UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"CARACTERIZACIÓN DE LA CLASE DE OPERADORES HILBERT-SCHMIDT Y DETERMINANTE REGULARIZADA"

Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática

Victor Robinson Barrial Sandoval

Callao, Noviembre, 2018

PERÚ

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

"Caracterización de la clase de operadores Hilbert - Schmidt y determinante regularizada"

VICTOR ROBINSON BARRIAL SANDOVAL

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los Requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática.

Aprobada por:

....
Mg. MENDOZA QUISPE, Wilfredo
Presidente

....
Mg. CASTILLO JIMENEZ, Emilio Marcelo
Vocal

....
Lic. DURAN QUIÑONES, Sofía Irena
Secretaria

....
Mg. ROJAS ORBEGOSO, Jorge Luis
Suplente

....
SOTELO PEJERREY, Alfredo
Asesor

AGRADECIMIENTO

A mi madre Rosa Sandoval y a mi padre Victor Barrial:
Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos y valores que me han inculcado para ser una persona de bien y por los ejemplos de perseverancia que me han infundido siempre.

A Jacqui:
Por su ayuda incondicional, por su compañía y la gran confianza que me ha brindado.

A mi asesor:
Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Por su gran ayuda para la redacción del anteproyecto y de la tesis. Además por el tiempo que me ha brindado para aconsejarme y hacer de mi un mejor profesional

Un agradecimiento póstumo y muy especial
A Mg. Luis Antonio Pareja Herrera:
Por sus grandes enseñanzas, su humildad y su labor incondicional en mi formación profesional, que hicieron de mi un estudiante férreo de Matemática.

INDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Índice de figuras

RESUMEN

"CARACTERIZACIÓN DE LA CLASE DE OPERADORES HILBERT-SCHMIDT Y DETERMINANTE REGULARIZADA"

Victor Robinson Barrial Sandoval

Setiembre - 2018

Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Titulo obtenido: Licenciado en matemática

En el presente trabajo haremos el estudio de la clase de operadores Hilbert-Schmidt, mostrando que es un espacio de Hilbert y un subalgebra sumergida con la propiedad de aproximación. Todo esto es posible usando propiedades no triviales de los números singulares.

Lo siguiente es prestar nuestra atención en el problema de extender continuamente el determinante $det_2(I+.)$ a ciertas subalgebras normadas de $L(B)$ desde $F(B)$, con B un espacio de Banach.

Finalmente, diferentes caracterizaciones de esta clase de operadores son mostradas y en el contexto de operadores integrales enunciaremos algunos ejemplos.

Palabras Claves

- Espacios de Banach.
- Operadores de rango finito
- Operadores compactos
- Operadores De Hilbert – Schmidt.
- Teorema Espectral para operadores compactos auto adjuntos.
- Núcleo del operador integral.

ABSTRACT

"CHARACTERIZATION OF THE CLASS OF HILBERT-SCHMIDT OPERATORS AND REGULARIZED DETERMINANT"

Victor Robinson Barrial Sandoval

September 2018

Advisor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained Bachelor of Mathematics

In the present work we will study the class of Hilbert-Schmidt operators, showing that it is a Hilbert Space and an embedded subalgebra with the approximation property. All this is possible using nontrivial properties of the singular numbers.
Furthermore, we devote our attention to the problem of extending continuously the determinant $det_2(I+.)$ to certain normed subalgebras of $L(B)$ from $F(B)$, where B is a Banach space.
Finally, different characterizations of this class of operators are proven and in the context of integral operators we will state some examples.

Keywords

- Banach Spaces.
- Finite range operators
- Compact operators
- Hilbert – Schmidt Operators
- Spectral theorem for self-adjoint compact operators.
- Kernel of the integral operator

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del problema

En lo que sigue del trabajo, H denotara un espacio de Hilbert. Se sabe que si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ es un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $S_1(T) \geq S_2(T) \geq \cdots \geq S_n(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $de\ H_1\ y$ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $de\ H_2$ tal que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)\langle x; \varphi_n\rangle\phi_n$ (teorema de representación espectral Hilbert -Schmidt)

Donde los $\{S_n(T)\}_{n\geq 1}$ son llamados números singulares y $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(T) = 0$. Con estos números singulares se define y denota el espacio de los operadores de clase traza como:

$$S_1(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H)\ /\ A\ es\ compacto\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n(A) < \infty\right\}$$

Luego se definen los operadores Hilbert – Schmidt como:

$$S_2(H) = \{A \in K(H)\ /\ A^*A \in S_1\}$$

Lo natural es estudiar como caracterizar esta clase de operadores, definir y extender continuamente la traza y el determinante de los operadores de rango finito a esta clase de operadores, también estudiar el operador integral en el contexto de los operadores Hilbert - Schmitd.

1.2. Formulación del problema

A. ¿Será posible caracterizar a la clase de operadores **Hilbert – Schmitd?**

B. ¿Será posible definir un determinante sobre esta clase de operadores?

C. ¿Qué condiciones hay que imponer a un operador integral para que pertenezca a esta clase de operadores?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivos generales

1. Caracterizar a la clase de operadores **Hilbert – Schmitd**
2. Definir un determinante sobre esta clase de operadores.
3. Imponer condiciones a un operador integral para que pertenezca a esta clase de operadores.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Familiarizarse con los métodos del análisis funcional que se usaran para definir una traza y determinante para esta clase de operadores.
2. Mostrar la importancia del teorema de descomposición espectral para operadores compactos autoadjuntos.

1.4. Importancia y justificación de la investigación

El presente trabajo está inmerso en la línea del Análisis Funcional – Operadores sobre espacios de Hilbert.

Un trabajo no trivial es definir una traza y determinante sobre un ideal de operadores, el trabajo se justifica ya que aborda el estudio extender continuamente el determinante $det_2(I+.)$ a ciertas subalgebras normadas de $L(B)$ desde $F(B)$, con B un espacio de Banach.

Definir $det_2(I+.)\ para\ T \in S_2(H)$ se justifica ya que existe una estrecha relación entre este funcional y los autovalores de T.

Se justifica también porque este proyecto adicionalmente mostrará, como ejemplo, las condiciones para que un operador integral este contenido en la clase de operadores Hilbert – Schmitd.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Espacios de Banach

Espacios Normados.

Definición 2.1.1:

Consideremos un espacio vectorial $(X; +; K; .)$ $donde\ K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Una norma es una aplicación

$$\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}$$

Que satisface:

i. $\|x\| \geq 0\ \ \forall\, x \in X\ \wedge\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|\ \ \ \forall\, x \in X;\ \alpha \in K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$
iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ \ \forall\, x, y \in X$

El par $(X;\ \|\,.\,\|)$ se llama espacio normado.

Ejemplo 2.1.2:

$X = \mathbb{R}^n\ sea\ x \in \mathbb{R}^n\ entonces: x = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$ Luego se definen las normas

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_{max} = max\{|x_i|; i = 1; 2; 3; \dots; n\}$

Entonces: $(\mathbb{R}^n; \|\,.\,\|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \|\,.\,\|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \|\,.\,\|_{max})$ son espacios normados.

Ejemplo 2.1.3:

$$X = \ell^{\infty}(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ /\ |a_n| \leq k\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ y\ para\ algun\ k > 0\}$$

Con la norma:

- $\|(a_n)\|_{sup} = \{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$

Luego: $(\ell^{\infty}(\mathbb{R}); \|\,.\,\|_{sup})$ es un espacio normado

Ejemplo 2.1.4:

$X = C_{[a;b]} = \{f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}/\ f\ es\ continua\}$ Luego se definen las normas

- $\|f\|_{max} = max\{|f(x)|; x \in [a; b]\}$
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

Entonces: $(C_{[a;b]}; \|\,.\,\|_{max})$; $(C_{[a;b]}; \|\,.\,\|_1)$ son espacios normados

Definición 2.1.5 (convergencia)

Sea $(X; \|.\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si:

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \|a_n - x\| < \varepsilon;\ \forall\, n \geq n_0$$

Notación: $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

Ejemplo 2.1.6:

Sea $CN(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / a_n = 0,\ \forall\, n > k,\ para\ algun\ k \in \mathbb{N}\}$ es llamado el espacio de las sucesiones casi nulas.

Claramente $CN(\mathbb{R}) \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$. Además $CN(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Ahora consideremos:

- ✓ $a_1 = (1; 0; 0; 0; 0; \dots; 0; \dots) \in CN(\mathbb{R})$
- ✓ $a_2 = \left(1; \frac{1}{2}; 0; 0; 0; \dots; 0; \dots\right) \in CN(\mathbb{R})$
- ✓ $a_3 = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0; 0; \dots; 0; \dots\right) \in CN(\mathbb{R})$

....

- ✓ $a_n = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; 0; \dots\right) \in CN(\mathbb{R})$

.

.

.

Y consideremos $x = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{1}{n+1}; \dots\right)$

Afirmación: $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

En efecto:

$$a_n - x = \left(0; 0; 0; \dots; 0; -\frac{1}{n+1}; -\frac{1}{n+2}; \dots\right)$$

Luego $\|a_n - x\|_{sup} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ por tanto: $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

En este contexto

- La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x\ en\ \ell^\infty(\mathbb{R})$
- La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $CN(\mathbb{R})$, pues $x \notin CN(\mathbb{R})$.

Espacios de Banach.

Definición 2.1.7 (sucesión de Cauchy)

Sea $(X; \|.\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión, decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si:

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon;\ \forall\, n, m \geq n_0$$

Definición 2.1.8 (Espacio de Banach)

Sea $(X; \|.\|)$ un espacio normado. $(X; \|.\|)$ es llamado espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 2.1.9: $(\ell^\infty(\mathbb{R}); \|.\|_{sup})$ es un espacio de Banach

Demostración:

Sea $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(\mathbb{R})$; $x^m = (x_1^m; x_2^m; \ldots; x_n^m; \ldots)$

Luego

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall\, n, m \geq n_0 \longrightarrow \|x^m - x^n\|_{sup} < \varepsilon$$

Pero:

$$\|x^m - x^n\|_{sup} = sup\{|x_j^m - x_j^n| / j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$$

De donde:

$|x_j^m - x_j^n| < \|x^m - x^n\|_{sup} < \varepsilon$, luego $(x_j^m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ que es completo.

Por tanto existe $x_j \in \mathbb{R} \ / \ x_j^m \to x_j\ cuando\ m \to \infty$

Ahora definamos $x = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_j; ..)$

Afirmación 1: $x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$

En efecto:

$\forall\, k \in \mathbb{N};\ x_k^m \longrightarrow x_k; m \longrightarrow \infty$ Si y solo si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_{0,k} = n_{0,k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

Tal que sí: $m > n_{0,k} \Longrightarrow |x_k^m - x_k| < \varepsilon$

Por otro lado: como $(x^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})\ \exists\, M_m \in \mathbb{R}\ tal\ que\ |x_j^m| < M_m\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$

Ahora:

$$|x_j| = |x_j - x_j^m + x_j^m| \leq |x_j - x_j^m| + |x_j^m| < \varepsilon + M_m$$

Donde: $\varepsilon + M_m$ no depende de j.

Luego: $\quad \underset{j\in\mathbb{N}}{\operatorname{Sup}}\{|x_j| / j \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon + M_m < +\infty$

Con lo cual $x = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_j; ..) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$.

Afirmación 2: $x_m \longrightarrow x \; cuando \; m \longrightarrow \infty$

En efecto:

Como $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(\mathbb{R})$

Entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n, m \geq n_0 \longrightarrow \|x^m - x^n\|_{sup} < \varepsilon$$

De donde:

$$|x_j^m - x_j^n| < \|x^m - x^n\|_{sup} = sup\{|x_j^m - x_j^n| / j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon.$$

Ahora:

$$\lim_{n\to\infty}|x_j^m - x_j^n| = \left|x_j^m - \lim_{n\to\infty} x_j^m\right| = |x_j^m - x| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \|x^m - x^n\|_{sup} = sup\{|x_j^m - x| / j \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$$

Esto es:

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} x^m = x \; en \; \ell^\infty(\mathbb{R})$$

Por lo tanto toda sucesión de Cauchy $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $\ell^\infty(\mathbb{R})$ es convergente, así $(\ell^\infty(\mathbb{R}); \|.\|_{sup})$ es un espacio de Banach

■

Ejemplo 2.1.10:

Sea $C_{[a;b]} = \{f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} / \, f \; es \; continua\}$ con la norma $\|f\|_{max} = \{|f(x)|; x \in [a;b]\}$

Entonces: $(C_{[a;b]}; \|.\|_{max})$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C_{[a;b]}$ entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n, m \geq n_0 \longrightarrow \|f_n - f_m\|_{max} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora fijando un $t_0 \in C_{[a;b]}$ se tiene $|f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \|f_m - f_n\|_{max}$

De donde la sucesión $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$

Por tanto $\quad \exists\, f(t_0) \in \mathbb{R} \,/\, \lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0) \in \mathbb{R}$

Como $t_0 \in C_{[a;b]}$ es arbitrario, tenemos definida la función

$$f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R} \; dado \; por: f(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t)$$

Y esta convergencia es puntual, hora observemos que $\forall\, m; n \geq n_0$ se tiene

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{a\leq t\leq b} |f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Resultado (de análisis real)

Si $f_n: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces "$f$" es continua.

En (*) fijando $\exists\, m \in \mathbb{N}$ y tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene:

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ Tal que}$$

$$si\ n, m \geq n_0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} |f_m(t) - f_n(t)| = \left|f_m(t) - \lim_{n\to\infty} f_n(t)\right| = |f_m(t) - f(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto se tiene $\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, m \geq n_0 \longrightarrow \sup_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ a\leq t\leq b}} |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$, Esto es $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Converge uniformemente para $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y por el resultado (de análisis real) $f \in C_{[a;b]}$ con lo cual se demuestra que $\left(C_{[a;b]}; \|\,.\,\|_{max}\right)$ es un espacio de Banach.

■

Teorema 2.1.11: Toda sucesión convergente en un espacio normado es de Cauchy.

Demostración: inmediato de la Definición.

OBSERVACIÓN: EL RECIPROCO DEL TEOREMA ES FALSO.

En efecto:

Consideremos el espacio normado $\left(C_{[0;1]}; \|\,.\,\|_1\right)$, aquí definamos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4n}{n+2}x - \dfrac{2n}{n+2}, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \wedge n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Grafica (Véase **figura 2.1.1**):

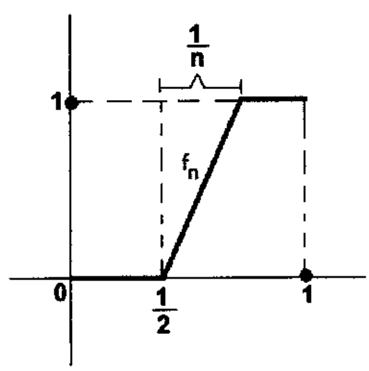

Figura 2.1.1

<u>**Afirmación 1:**</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

En efecto: sea $n < m \Longrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

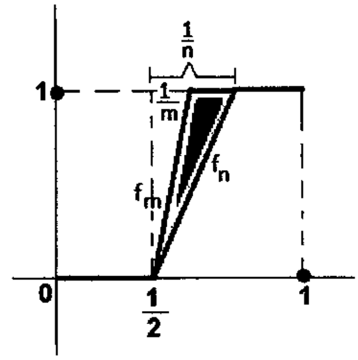

Figura 2.1.2

Luego: $\|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}$ Como la sucesión $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en$\mathbb{R}$, también lo es $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_{[0;1]}$.

<u>**Afirmación 2:**</u> $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

Donde: $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

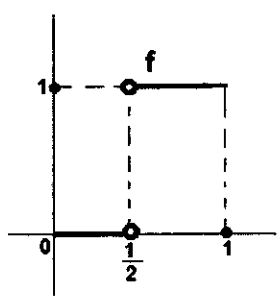

Figura 2.1.3

En efecto:

Claramente: $f \notin C_{[0;1]}$ además $\|f_n - f\|_1 = \frac{1}{2n} \to 0\ cuando\ n \to \infty$.

Por tanto $(C_{[0;1]}; \|\,.\,\|_1)$ no es de Banach.

Lema 2.1.12: (De la combinación lineal)

Sea $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial normado $(E; \|\,.\,\|)$ de dimensión arbitraria.

Entonces:

Existe un número $c > 0$ tal que para cualquier colección de escalares $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ tenemos:

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots |\alpha_n|).$$

Demostración:

1er caso: Consideremos $s = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots |\alpha_n| = 1$ luego la desigualdad se convierte en

$$\|\alpha_1 \, x_1 + \alpha_2 \, x_2 + .. + \alpha_n \, x_n\| \geq c$$

Probaremos que para toda colección de escalares $\beta_1; \beta_2; ...; \beta_n$ tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ Se verifica $\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + .. + \beta_n x_n\| \geq c$ para algún $c > 0$.

Veamos por reducción al absurdo

Negando: $\forall \, c \, > 0; \, \exists \, \beta_1; \beta_2; ...; \beta_n$ escalares tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y

$$\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + .. + \beta_n x_n\| \, < \, c$$

Haciendo $c = \frac{1}{k}; k \, \in \mathbb{N}. \, \exists \, \beta_1^k; \, \beta_2^k; ...; \, \beta_n^k \, escalares \, / \, \|\beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n\| < \frac{1}{k}$

Llamando

$$y_k = \beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n \text{ se tiene: } \|y_k\| < \frac{1}{k} \text{ luego } \|y_k\| \to 0 \, cuando \, k \to \infty$$

Y como $|\beta_1^k| + |\beta_2^k| + \cdots + |\beta_n^k| = 1$ entonces $\|\beta_j^k\| \, \leq 1; \, \forall \, j = 1,2, ... \, , n$

Por tanto la sucesión $(\beta_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R} \, \forall \, j = 1,2, ... \, , n$ y por el teorema de **Bolzano Weiersstras** existe una subsucesión convergente

Es decir: para cada $j = 1,2, ... \, , n$ la sucesión $(\beta_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(\beta_j^{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente a un escalar que le llamaremos β_j.

Sea $(y_{k_m})_{m \in \mathbb{N}} = (\beta_1^{k_m} x_1 + \beta_2^{k_m} x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m} x_n)_{m \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$

Luego

$$y_{k_m} = \beta_1^{k_m} x_1 + \beta_2^{k_m} x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m} x_n \text{ Donde } |\beta_1^{k_m}| + |\beta_2^{k_m}| + \cdots + |\beta_n^{k_m}| = 1$$

Además

$$\beta_1^{k_m} \to \beta_1 \, cuando \, m \to \infty$$

$$\beta_2^{k_m} \to \beta_2 \, cuando \, m \to \infty$$

....

....

$$\beta_n^{k_m} \to \beta_n \, cuando \, m \to \infty$$

Entonces:

$$y_{k_m} \to y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + .. + \beta_n x_n \wedge |\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$$

Esto es,

No todos los $\beta_1; \beta_2; ...; \beta_n$ son ceros simultáneamente y como $\{x_1; \, x_2; ...; x_n\}$ es L.I.

Se tiene que $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + .. + \beta_n x_n \neq 0$

Por otro lado

$y_{k_m} \to y$ Entonces: $\|y_{k_m}\| \to \|y\|$ pero $\|y_k\| \to 0 \, cuando \, k \to \infty$ entonces $y = 0$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

2do caso: sea $s = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots |\alpha_n|$ tenemos:

- Si s = 0 no hay nada que probar.
- Si: $s \neq 0$ consideremos:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{s};\ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{s};\ldots;\ \beta_n = \frac{\alpha_n}{s}$$

Es claro que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y por el caso anterior Existe un número $c > 0$ tal que

$$\left\|\frac{\alpha_1}{s}x_1 + \frac{\alpha_2}{s}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_2}{s}x_2\right\| \geq c$$

Luego

$$\|\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + .. + \alpha_n\, x_n\| \geq c.s = c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots |\alpha_n|)$$

■

Teorema 2.1.13: Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

Demostración:

Sea "E" un espacio normado de dimensión finita "n" luego consideremos $\{e_1;\ e_2;\ldots;\ e_n\}$ una base de E.

Ahora consideremos $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy,

Entonces para cada $k \,\epsilon\, \mathbb{N}$ cada y_k tiene representación única de la forma:

$$y_k = \alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ldots + \alpha_n^k e_n$$

Por ser $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy

$$\forall\, \mathcal{E} > 0, \exists\, n_0 \,\epsilon\, \mathbb{N} \,/\, k; r \geq n_0 \Longrightarrow \|y_k - y_r\| < \mathcal{E}$$

Entonces:

$$\|y_k - y_r\| = \left\|(\alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ldots + \alpha_n^k e_n) - (\alpha_1^r e_1 + \alpha_2^r e_2 + \ldots + \alpha_n^r e_n)\right\| =$$
$$\left\|(\alpha_1^k - \alpha_1^r)e_1 + (\alpha_2^k - \alpha_2^r)e_2 + \cdots + (\alpha_n^k - \alpha_n^r)e_n\right\| < \mathcal{E}.$$

Por el **Lema 2.1.12** (de la combinación lineal)

$$\exists\, c > 0 \,/\, \left(|\alpha_1^k - \alpha_1^r| + |\alpha_2^k - \alpha_2^r| + \cdots + |\alpha_2^k - \alpha_2^r|\right).c \leq \|y_k - y_r\| < \mathcal{E}$$

Por tanto:

$$|\alpha_j^k - \alpha_j^r| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall\, j = 1; 2; \ldots; n$$

Con lo cual $(\alpha_j^k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$

Sea $\alpha_1;\ \alpha_2;..;\ \alpha_n \,/\, \alpha_j^k \to \alpha_j$ *cuando* $k \to \infty;\ \forall j = 1; 2;\ \ldots;\ n$

Llamemos $y = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \cdots + \alpha_n\, e_n \,\epsilon\, E$

Y se tiene:

$$\|y_k - y\| = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k e_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^k - \alpha_j)e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^k - \alpha_j|\|e_j\|$$

$Como\ a_j^k \to \propto_j\ cuando\ k \to \infty;\ \forall j = 1; 2; \ldots ; n$ Entonces: $y_k \to y\ cuando\ k \to \infty$

Por tanto queda probado que toda sucesión de Cauchy, en un espacio de dimensión finita es convergente. Por lo tanto es de Banach.

■

Operadores lineales acotados.

Definición 2.1.14: Sea $(X; \|\cdot\|_X)\ y\ (Y; \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \to Y$ que satisface:

i. $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall\, x;\ y \in X$

ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall\, x \in X \ \wedge \ \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$

"T" así definido se llama operador lineal.

Definición 2.1.15: Sea $(X; \|\cdot\|_X)\ y\ (Y; \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\, x \in X, para\ algun\ M > 0$, "$T$" es llamado operador lineal acotado.

Ejemplo 2.1.16:

Sea $T: \left(C_{[a;b]}; \|\cdot\|_{max}\right) \to \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- Es claro que "T" es lineal
- Vamos que "T" es acotado

Sea $f \in C_{[a;b]}$, luego

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b max\{f(x) / x \in [a;b]\}dx = \int_a^b \|f\|_{max}dx$$

$$= \|f\|_{max}\int_a^b dx = (b-a)\|f\|_{max}$$

De donde: $|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{max}$ luego "T" es acotado.

Observación: Sea $(X; \|\cdot\|_X)\ y\ (Y; \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado, luego $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\, x \in X, para\ algun\ M > 0$, ahora para $x \neq 0$ se tiene $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq M$ y por tanto el conjunto $\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}$ es acotado superiormente y así existe su supremo.

Notación: $\mathcal{L}(X;Y) = \{T: X \to Y\ /\ \text{"T"}\ es\ un\ operador\ lineal\ acotado\ \}$,

Luego $(\mathcal{L}(X;Y); \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ es un espacio vectorial normado, con la norma:

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = Sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}$$

Teorema 2.1.17: Sea $(X, \|\ \ \|_x)$; $(Y, \|\ \ \|_y)$ dos espacios normados sobre el cuerpo "K" y $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y denotemos por: $X^* = \{f: X \to K / f \ es \ lineal \ y \ acotado\}$.

Sea $T^*: Y^* \to X^* \ tal \ que \ T^*(f)(x) = f(T(x))$, entonces:

a) $T^* \in \mathcal{L}(Y^*; X^*)$

b) $\|T^*\| = \|T\|$

Prueba:

Como $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ entonces $T(x) = y \in Y$, ahora

$$\begin{aligned} T^*: \quad Y^* \quad &\longrightarrow \quad X^* \\ f: Y \to K \quad &\mapsto \quad T^*(f): X \to K \\ T(x) \longmapsto f\big(T(x)\big) \ ; \ & x \longmapsto T^*(f)(x) \end{aligned}$$

Luego definimos: $T^*(f)(x) = f(T(x))$

Afirmación 1: T^* es lineal

En efecto:

- Dado f ; $g \in X^*$ entonces:

$$T^*(f+g)(x) = (f+g)\big(T(x)\big) = f\big(T(x)\big) + g\big(T(x)\big)$$
$$= T^*(f)(x) + T^*(g)(x) = (T^*(f) + T^*(g))(x)$$

De donde: $T^*(f+g) = T^*(f) + T^*(g)$

- Dado $\alpha \in K$, entonces: $T^*(\alpha f)(x) = (\alpha f)\big(T(x)\big) = \alpha(f(T(x))) = \alpha T^*(f)(x)$

De donde: $T^*(\alpha f) = \alpha T^*(f)$

Afirmación 2: T^* es acotada

En efecto:

$$|f(y)| \leq \|f\|_{Y^*}.\|y\|_Y = \|f\|_{Y^*}.\|T(x)\|_Y \leq \|f\|_{Y^*}.\|T\|_{\mathcal{L}}.\|x\|_X$$

Ahora:

$$|f(y)| \leq \|f\|_{Y^*}.\|T\|_{\mathcal{L}}.\|x\|_X \Rightarrow \frac{|f(y)|}{\|x\|_X} \leq \|f\|_{Y^*}.\|T\|_{\mathcal{L}}.$$

Entonces:

$\frac{|T^*(f)(x)|}{\|x\|_X} = \frac{|f(T(x))|}{\|x\|_X} \leq \|f\|_{Y^*}.\|T\|_{\mathcal{L}}.$

De donde:

$$\|T^*(f)\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}.\|T\|_{\mathcal{L}}.$$

Luego:

$$T^* \in \mathcal{L}(Y^*; X^*) \ \wedge \ \|T^*\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$$

Afirmación 3: $\|T^*\| = \|T\|_{\mathcal{L}}$

$$\|T^*\| = Sup\{\|T^*(f)\|_{X^*};\ \|f\|_{Y^*} \leq 1\} = Sup\{|T^*f(x)|;\ \|x\| \leq 1;\ \|f\|_{Y^*} \leq 1\}$$
$$= Sup\{\big|f\big(T(x)\big)\big|;\ \|x\| \leq 1;\ \|f\|_{Y^*} \leq 1\big\} = Sup\{|f(T)(x)|;\ \|x\| \leq 1;\ \|f\|_{Y^*} \leq 1\}$$
$$= Sup\{|T(x)|_Y;\ \|x\| \leq 1\} = \|T\|$$

■

2.2 Espacios de Hilbert

Espacios pre Hilbert.

Definición 2.2.1: (producto interno)

Consideremos un espacio un espacio vectorial $(E;+;K;.)$ Donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación:

$$\langle\, .\,;\, .\, \rangle: ExE \to K$$

Tal que se cumple:

i. Definida positiva $\langle x;x\rangle \geq 0\ \forall x \in E\ \wedge\ \langle x;x\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$
ii. Lineal en la primera variable: $\langle \alpha x + \beta y; z\rangle = \alpha\langle x;z\rangle + \beta\langle y;z\rangle\ \forall x,y,z \in E\ \wedge \alpha,\beta \epsilon K$
iii. Es hermítica $\langle x;y\rangle = \overline{\langle y;x\rangle}\ \forall x\,,y \in E$

Observación: el producto interno es conjugado lineal en la segunda variable.

Sea $x,y,z \in E\ \wedge \alpha,\beta \epsilon K$ luego:

$$\langle x;\alpha y + \beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z; x\rangle} = \overline{\langle \alpha y; x\rangle} + \overline{\langle \beta z; x\rangle} = \overline{\alpha\langle y;x\rangle} + \overline{\beta\langle z;x\rangle}$$
$$= \bar{\alpha}\overline{\langle y;x\rangle} + \bar{\beta}\,\overline{\langle z;x\rangle} = \bar{\alpha}\langle x;y\rangle + \bar{\beta}\,\langle x;z\rangle$$

Teorema 2.2.2: (Desigualdad de Cauchy - schwartz) Sea E un espacio pre hilbertiano, entonces: $|\langle x;y\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{1/2}\langle y;y\rangle^{1/2}\quad \forall\, x,y \in E$, la igualdad se cumple cuando x e y son linealmente independientes.

Demostración:

Denotemos por: $\lambda = \langle x;y\rangle$ luego:

$$0 \leq \langle x - \lambda y; x - \lambda y\rangle = \langle x; x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y; x - \lambda y\rangle$$
$$= \langle x;x\rangle - \bar{\lambda}\langle x;y\rangle - \lambda\langle y;x\rangle + \lambda.\bar{\lambda}\langle y;y\rangle$$
$$= \langle x;x\rangle - \bar{\lambda}.\lambda - \lambda.\bar{\lambda} + |\lambda|^2\langle y;y\rangle$$
$$= \langle x;x\rangle - 2|\lambda|^2 + |\lambda|^2\langle y;y\rangle \ldots\ldots\ldots (*)$$

Caso 1: si $y = 0$ el resultado es inmediato.

Caso 2: si $y \neq 0 \Longrightarrow \langle y;y\rangle \neq 0$

a) Si $\langle y;y\rangle = 1$ reemplazando en (*) se tiene:

$$0 = \langle x;x\rangle - |\lambda|^2 \Longrightarrow |\lambda|^2 \leq \langle x;x\rangle \Longrightarrow |\langle x;y\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{1/2} = \langle x;x\rangle^{1/2}\langle y;y\rangle^{1/2}$$

b) Si $\langle y;y\rangle \neq 1$; denotamos por $\mu = \langle y;y\rangle^{1/2} \epsilon\, \mathbb{R}$ luego tiene sentido denotar: $z = \frac{1}{\mu}y$

Entonces $y = \mu z$ ahora: $\langle z;z\rangle = \langle \frac{1}{\mu}y;\frac{1}{\mu}y\rangle = \frac{1}{\mu^2}\langle y;y\rangle = 1$

Y usando el caso anterior $|\langle x;z\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{1/2} \Longrightarrow \left|\langle x;\frac{1}{\mu}y\rangle\right| \leq \langle x;x\rangle^{1/2}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu}|\langle x;y\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow |\langle x;y\rangle| \leq \mu.\langle x;x\rangle^{1/2}$$

Por lo tanto: $|\langle x;y\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{1/2}\langle y;y\rangle^{1/2}$.

■

Corolario 2.2.3 Sea "E" un espacio vectorial con un producto interno definido $\langle\ ;\ \rangle$.

Entonces: $\|x\| = \langle x;x\rangle^{1/2},\ x \in E$ define una norma.

Prueba: para $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\|\alpha x\| = \langle \alpha x; \alpha x\rangle^{1/2} = \sqrt{\alpha.\overline{\alpha}\,\langle x;x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\|x\|^2} = |\alpha|\|x\|$$

Además es claro que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x;x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Desigualdad triangular $\|x+y\|^2 = \langle x+y;x+y\rangle = \langle x;x\rangle + \langle x;y\rangle + \overline{\langle x;y\rangle} + \langle y;y\rangle$

$$= \|x\|^2 + 2Re(\langle x;y\rangle) + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x;y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

De donde: $\|x+y\| \leq \|y\| + \|y\|$.

■

Definición 2.2.4 Llamamos espacio pre - hilbertiano a un espacio vectorial "E" normado, cuya norma está definida a partir de un producto interno en la forma:

$$\|x\| = \langle x;x\rangle^{1/2}$$

Definición 2.2.5 Un espacio de **Hilbert** es un espacio pre hilbertiano completo con la norma definida a partir de su producto interno.

Teorema 2.2.6 (Desigualdad de Bessel) Sea "H" un espacio pre-Hilbert, $\{e_1;e_2;\ldots;e_n;\ldots\}$ un conjunto ortonormal de H, $x \in$ H arbitrario. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x;e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Prueba: Sea $\alpha_i = \langle x;e_i\rangle,\ i \in \mathbb{N}$ luego:

$$0 \leq \langle x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, e_i\,; x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, e_i\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\langle e_i;x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\,\langle x;e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i.\overline{\alpha_j}\,\langle e_i;e_j\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$$

De donde: $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$

Tomando límite:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x;e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Teorema 2.2.7 Sea "H" un espacio de Hilbert, $\{e_1; e_2; \dots; e_n; \dots\}$ un conjunto ortonormal de H. Entonces:

a) La serie $\sum_{K=1}^{\infty} \propto_k e_k$ converge si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} |\propto_k|^2 < +\infty$.

b) Si $\sum_{K=1}^{\infty} \propto_k e_k = x \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k = x$.

c) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k$ converge $\forall x \in H$.

Prueba:

a) Sean las sumas parciales

$$S_n = \propto_1 . e_1 + \propto_2 . e_2 + \dots + \propto_n . e_n$$
$$t_n = |\propto_1|^2 + |\propto_2|^2 + \dots + |\propto_n|^2$$

Para $n > m$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|\propto_{m+1} e_{m+1} + \propto_{m+2} e_{m+2} + \dots + \propto_n e_n\|^2$$
$$= \langle \propto_{m+1} e_{m+1} + \propto_{m+2} e_{m+2} + \dots + \propto_n e_n; \propto_{m+1} e_{m+1} + \propto_{m+2} e_{m+2} + \dots + \propto_n e_n\rangle$$
$$= |\propto_{m+1}|^2 + |\propto_{m+2}|^2 + \dots + |\propto_n|^2 = |t_n - t_m|$$

Por completitud:

La serie $\sum_{K=1}^{\infty} \propto_k e_k$ converge

b) Sea

$$S_n = \propto_1 . e_1 + \propto_2 . e_2 + \dots + \propto_n . e_n$$

Entonces: $\langle S_n; e_j\rangle = \propto_j$ *además* $\langle S_n; e_j\rangle \longrightarrow \langle x; e_j\rangle$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$

$$de\ donde:\ \propto_j = \langle x; e_j\rangle$$

c) Por la parte (a): La serie $\sum_{K=1}^{\infty} \propto_k e_k$ converge si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} |\propto_z|^2$ converge.

Luego si x ∈ H. por la desigualdad de Bessel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

■

Corolario 2.2.8 Sea "H" un espacio de Hilbert, $\{e_1; e_2; \dots; e_n; \dots\}$ una base ortonormal de H. Entonces: $\forall x \in H$ *se tiene*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k$$

Prueba: $\forall x \in H$ se tiene

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k$$

Luego: $\beta_k = \langle x; e_k\rangle$ por lo tanto se da el resultado.

■

Operadores de rango finito – Operadores compactos.

Definición 2.2.9: Sean H_1; H_2 dos espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$, "T" es de rango finito si y sólo si: $\dim(ImT) < \infty$

Notación: $F(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \,/\, \mathrm{T} \;\; es\ de\ rangofinito\}$

Teorema 2.2.10: $F(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Prueba:

- Sea $T_1, T_2 \in F(H_1; H_2) \Rightarrow \dim Im(T_1 + T_2) \leq dim\, Im(T_1) + dim\, Im(T_2) < \infty$
  Por tanto $T_1 + T_2 \in F(H_1; H_2)$.
- Es obvio que $\propto T_1 \in F(H_1; H_2)\ \forall \propto \in K$.

Observaciones:

- Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \land dim H_2 < \infty \Rightarrow T \in F(H_1; H_2)$.
- La composición de dos operadores de rango finito es de Rango finito.

Definición 2.2.11: Sean H_1; H_2 dos espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ "T" es compacto si y solo si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ existe una subsucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ convergente.

Notación: $K(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \,/\, \mathrm{T} \;\; es\ compacto\}$

Teorema 2.2.12: $K(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Prueba:

- Sea $T_1, T_2 \in K(H_1; H_2) \land (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ una sucesión acotada entonces $\exists (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $(Tx_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ convergente
  Como T_2 es compacto entonces $\exists (x_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ convergente
  Luego $(T_1 + T_2)(x_{n''})$ es convergente Por tanto $T_1 + T_2 \in K(H_1; H_2)$.
- Es obvio que $\propto T_1 \in K(H_1; H_2)\ \forall \propto \in K$.

Observación: $\mathcal{L}(H)$ es un algebra sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$ con las operaciones de suma puntual y composición.

Teorema 2.2.13: $K(H) = K(H; H)$ es un ideal Bilátero del álgebra $\mathcal{L}(H)$.

Prueba: sea $T \in \mathcal{L}(H) \wedge R \in K(H)$ por demostrar que

1) $TR \in K(H)$
2) $RT \in K(H)$

En efecto:

1) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ H sucesión acotada entonces $\exists(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $Rx_{n'} \to r$ como "T" es continua se tiene $TRx_{n'} \to Tr$ por tanto TR es compacto.
2) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada $\Rightarrow (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\Rightarrow \exists(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tal que $(RTx_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Teorema 2.2.14: Sea X un espacio de Banach

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ acotada } (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \to x.$$

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea $\dim X = n \wedge \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ una base para X

Consideremos: $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada $\Rightarrow \exists\, M > 0$ tal que $|x^k| \leq M\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$x^1 = \alpha_1^1\, e_1 + \alpha_2^1\, e_2 + \dots + \alpha_1^1\, e_1$$

$$x^2 = \alpha_1^2\, e_1 + \alpha_2^2\, e_2 + \dots + \alpha_1^2\, e_1$$

....

$$x^j = \alpha_1^j\, e_1 + \alpha_2^j\, e_2 + \dots + \alpha_1^j\, e_1; \text{ fijando } j \in \mathbb{N}$$

Por el teorema de la combinación lineal:

$$\exists c_j > 0 \text{ Tal que } (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)c_j \leq \|x^j\| < M; \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |\alpha_p^j| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \leq \frac{M}{c_j} \text{ Para } 1 \leq p \leq n$$

$$\Rightarrow (\alpha_p^j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ Es una sucesión acotada en } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha_p^{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (\alpha_p^j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ Convergente, luego } \alpha_p^{j_k} \to \alpha_p \textit{ cuando } k \to \infty$$

Definamos: $x = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \dots + \alpha_n\, e_n \in X$

$x^{j_k} = \propto_1^{j_k} e_1 + \propto_2^{j_k} e_2 + \cdots + \propto_1^{j_k} e_1$ Claramente: $(x^{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x^j)_{j\in\mathbb{N}}$

Además $\|x^{j_k} - x\| = \|\sum_{p=1}^{n}(\propto_p^{j_k} - \propto_p)e_p\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\propto_p^{j_k} - \propto_p|.\|e_p\| \to 0$ $cuando\ k \to \infty$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x^{j_k} = x$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que dimX $= \infty$

- Sea $x_1 \in X\ /\ \|x_1\| = 1$ y sea $f_1 = \mathcal{L}\{x_1\};\ \overline{f_1} = f_1$ cerrado en X

  Por el lema de Riesz

  Para $\theta = \frac{1}{2}\ \exists\, x_2 \in X\ /\ \|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}\ \wedge\ \|x_2\| = 1$

  Sea $f_2 = \mathcal{L}\{x_1; x_2\};\ \overline{f_2} = f_2$ cerrado en X

  Por el lema de Riesz

  $\exists\, x_3 \in X\ /\ \|x_3 - x\| \geq \theta = \frac{1}{2}\ \forall x \in f_2\ \wedge\ \|x_2\| = 1$

  En particular: $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}\ \wedge\ \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

  Siguiendo inductivamente: obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{B(0;1)}$

  Tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ de donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesión convergente, lo cual contradice la hipótesis.

$\blacksquare$

Como consecuencia directa del **teorema 2.2.14** se tiene:

Corolario 2.2.15: Se cumple

a) $F(H_1; H_2) \subset K(H_1; H_2) \subset \mathcal{L}(H_1; H_2)$
b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)\ \wedge\ dimH_1 < \infty \Longrightarrow T \in K(H_1; H_2)$.

Definición 2.2.16 Sea "H" un espacio de Hilbert y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de H. Decimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal (no es base algebraica) o base Hilbertiana si:

I. $\|e_i\| = 1;\ \forall\, i\ \in \mathbb{N}\ \wedge\ \langle e_i; e_j\rangle = 0;\ \forall\, i \neq j$
II. $\overline{\mathcal{L}\{e_1; e_2; \ldots; e_n; \ldots\}} = H$

Observación: $\forall x \in H$ tenemos $x = \sum_{k=1}^{\infty} \propto_k e_k$ lo que implica $x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x; e_k\rangle e_k$

Teorema 2.2.17: Sea H espacio de Hilbert, entonces:

a) Si H es separable, cada conjunto ortonormal en H es numerable.
b) Si H contiene una base Hilbertiana, entonces H es separable.

Prueba: la demostración de este resultado lo podemos apreciar en [2] Teorema 3. 6 – 4.

Forma Sesquilineal acotada.

Definición 2.2.18: Si E, F, G son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo escalar K, una aplicación $\phi: E \times F \to G$ se llama sesquilineal si es lineal en la primera variable y semilineal, o lineal conjugada, en la segunda.

- En el caso particular de que G = K, tal aplicación se llama **forma sesquilineal**

Proposición 2.2.19 (Identidad de polarización) Si E, F son espacios vectoriales y $\phi: E \times E \to F$ es sesquilineal, entonces

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\{\phi(x+y,x+y) - \phi(x-y,x-y) + i[\phi(x+iy,x+iy) - \phi(x-iy,x-iy)]\}$$

Prueba: Fijados x, y ∈ E, se tiene

$$\phi(x+y,x+y) = \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y)$$

Sustituyendo "y" en esta expresión sucesivamente por $-y, iy, -iy$ encontramos que

$$\phi(x-y,x-y) = \phi(x,x) - \phi(x,y) - \phi(y,x) + \phi(y,y),$$

$$\phi(x+iy,x+iy) = \phi(x,x) - i\phi(x,y) + i\phi(y,x) + \phi(y,y),$$

$$\phi(x-iy,x-iy) = \phi(x,x) + i\phi(x,y) - i\phi(y,x) + \phi(y,y).$$

Por tanto:

$$\phi(x+y,x+y) - \phi(x-y,x-y) = 2\phi(x,y) + 2\phi(y,x) \dots\dots\dots (*)$$

$$\phi(x+iy,x+iy) - \phi(x-iy,x-iy) = -2i\phi(x,y) + 2i\phi(y,x)$$

$$i[\phi(x+iy,x+iy) - \phi(x-iy,x-iy)] = 2\phi(x,y) - 2\phi(y,x) \dots\dots (*)(*)$$

De (*) y (*) (*) se obtiene la desigualdad deseada. ■

Consecuencia inmediata de éste resultado es el siguiente:

Proposición 2.2.20 Si $\phi: E \times E \to F$ y $\psi: E \times E \to F$ son aplicaciones sesquilineal tales que $\phi(x,x) = \psi(x,x)$; $(x \in E)$, entonces $\phi(x,y) = \psi(x,y)$ $(x,y \in E)$.

Definición 2.2.21 Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Una forma sesquilineal se dice

$$\phi: E \times E \to K$$

Hermítica si $\phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}$, $(x,y \in E)$

Proposición 2.2.22 Una forma sesquilineal $\phi : E \times E \to K$ es hermítica si, y sólo si, $\phi(x,x)$ es real para todo $x \in E$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si ϕ es hermítica, para cada $x \in E$ se tiene $\overline{\phi(x,x)} = \phi(x,x)$, por lo que $\phi(x,x)$ es real.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\phi(x,x)$ es real para todo $x \in E$. Definimos $\psi(x,y) = \phi(y,x)$ $(x,y \in E)$; entonces ψ es una forma sesquilineal en $E \times E$, y, por hipótesis, $\psi(x,x) = \phi(x,x)$ $(x \in E)$ **La Proposición 2.2.20** prueba ahora que $\psi = \phi$ con ello que ϕ es hermítica.

■

Definición 2.2.23: Sea E, F, G son espacios normados, una aplicación sesquilineal

$$\phi : E \times F \to G$$

Es acotada si existe una constante $M > 0$ tal que $\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $(x \in E, y \in F)$.

- Si, además, $G = K$, ϕ se dice una forma sesquilineal acotada en $E \times F$.

Operador adjunto.

Teorema 2.2.24:

Todo funcional lineal $f: H \to \mathbb{K}$ continua en un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de Hilbert H puede ser representado en términos de producto interno, en la siguiente forma: $f(x) = \langle x; z\rangle$ donde "z" depende de "f" y es determinado por "f" de manera única, además $\|z\| = \|f\|$.

Prueba:

- Si $f = 0; z = 0$ pues $f(x) = 0 = \langle x; o\rangle \; \forall \; x \in H$
- Si $f \neq 0$

Si existiera $z \in H / f(x) = \langle x; z\rangle$

Si $f(x) = 0$; $x \in Ker(f)$ en este caso $z \in (Ker(f))^{\perp}$

Tenemos $f \neq 0 \Rightarrow Ker(f) \neq H$ por tanto $H = Ker(f) \oplus (Ker(f))^{\perp}$ y $(Ker(f))^{\perp} \neq \{0\}$

Sea $z_0 \neq 0$, $z_0 \in (Ker(f))^{\perp}$, definimos:

$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$; $x \in H$ Luego $f(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker(f)$ y tenemos que

$$0 = \langle v;\, z_0\rangle = \langle f(x)z_0 - f(z_0)x;\, z_0\rangle$$

$$= f(x)\langle z_0; z_0\rangle - f(z_0)\langle x; z_0\rangle = f(x)\|z_0\|^2 - f(z_0)\langle x; z_0\rangle$$

De donde

$$f(x) = \frac{f(z_0)\langle x; z_0\rangle}{\|z_0\|^2} \Rightarrow f(x) = \langle x; \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0\rangle \text{ Denotando } z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$$

Unicidad: Suponga que existen z_1, z_2 $\in H$ tal que $f(x) = \langle x; z_1\rangle = \langle x; z_2\rangle \; \forall x \in H$

Entonces: $\langle x; z_1 - z_2\rangle = 0$ para $x = z_1 - z_2$ se tiene $\|z_1 - z_2\| = 0 \Rightarrow z_1 - z_2 = 0$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

Igualdad de normas:

- $\|z\|^2 = \langle z; z\rangle = f(z) \leq \|f\|\|z\| \Rightarrow \|z\| \leq \|f\|$
- Por otro lado

$$|f(x)| = |\langle x; z\rangle| \leq \|x\|\|z\| \Rightarrow \|f\| \leq \|z\|$$

Por tanto $\|z\| = \|f\|$. ■

Teorema 2.2.25 (Representación de Riesz):

Sea H_1 ; H_2 dos espacios de Hilbert y $h: H_1 x H_2 \rightarrow K$ una forma Sesquilineal acotada $|h(x; y)| \leq c\|x\|\|y\| \; para \; algún \; c > 0$

Entonces: "h" tiene la representación $h(x; y) = \langle Sx; y\rangle$

Donde: $S: H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal acotado.

Además "S" esta únicamente determinado por h y $\|S\| = \|h\| = \sup\limits_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \left\{\frac{|h(x;y)|}{\|x\|\|y\|}\right\}$.

La prueba de este resultado se puede encontrar en [2] Teorema 3.8 – 4.

Teorema 2.2.26 (existencia y unicidad del operador adjunto)

Sean H_1 ; H_2 dos espacios de Hilbert y consideremos $T: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado.

Entonces: existe un único operador $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ lineal y acotado tal que:

$$\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^*y\rangle \quad \wedge \quad \|T\| = \|T^*\|$$

Prueba: Definamos $h: H_1 x H_2 \rightarrow K$ / $h(x; y) = \langle y; Tx\rangle$ una forma sesquilineal y acotada.

Además:

$$|h(x; y)| = |\langle y; Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|y\|\|T\|\|x\| = \|T\|\|x\|\|y\|$$

$$\Rightarrow \|h\| \leq \|T\|$$

También:

$$\|h\| = \operatorname*{Sup}_{x;y \neq 0} \left\{\frac{|h(x; y)|}{\|x\|\|y\|}\right\} = \operatorname*{Sup}_{x;y \neq 0} \left\{\frac{|\langle y; Tx\rangle|}{\|x\|\|y\|}\right\} \geq \operatorname*{Sup}_{T_x \neq 0} \left\{\frac{|\langle Tx; Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|}\right\} = \|T\|$$

Luego por el **Teorema 2.2.25** (representación de Riesz):

$\exists!\ T^*: H_2 \to H_1$ Operador lineal y acotado tal que: $h(y;x) = \langle T^*y;x\rangle \implies \langle y;Tx\rangle = \langle T^*y;x\rangle$

Tomando conjugado, se tiene: $\langle Tx;y\rangle = \langle x:T^*y\rangle$ ■

Definición 2.2.26: Un operador lineal $T: H \to H$ se dice autoadjunto si y sólo si $T = T^*$ donde H es un espacio de Hilbert.

Definición 2.2.27: Consideremos un espacio de Hilbert "H" y un operador lineal acotado:

$$T : H \to H$$

El escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** de T si y sólo si existe un vector no nulo $x \in H$, tal que $T(x) = \lambda x$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama **vector propio** de T, asociado al valor propio λ.

Teorema 2.2.28: Los autovalores de un operador Autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ son números reales y autovectores correspondientes a distintos autovalores, son ortogonales.

Prueba: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador auto adjunto $\Rightarrow T = T^*$ y sea λ un autovalor de T, correspondiente al autovector "v", entonces: $T_V = \lambda v$

Ahora:

$$\lambda\langle v;v\rangle = \langle \lambda v;v\rangle = \langle T_v;v\rangle = \langle v:T_v\rangle = \langle v:\lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v;v\rangle} = \bar{\lambda}.\overline{\langle v;v\rangle} = \bar{\lambda}.\ \langle v;v\rangle$$

De donde:

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Por otro lado: Sean λ, β autovalores diferentes y sus respectivos autovectores $v; w$

Entonces: $Tv = \lambda v\ ;\ Tw = \beta w.$

Ahora:

$$\lambda\langle v;w\rangle = \langle \lambda v;w\rangle = \langle Tv;w\rangle = \langle v;Tw\rangle = \langle v;\beta w\rangle = \beta\langle v;w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \beta)\langle v;w\rangle = 0 \wedge \lambda \neq \beta \Rightarrow \langle v;w\rangle = 0$$

Teorema 2.2.29: Sea T un operador autoadjunto, entonces:

$$\|T\| = Sup\{|\langle Tx;x\rangle| /\ \|x\| = 1\}$$

Prueba:

- Por la desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$|\langle Tx;y\rangle| = |\langle y;Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|y\|\|T\|\|x\| = \|T\|\|x\|\|y\|$$

Para x = y, $\|x\| = 1$ se tiene: $|\langle Tx;x\rangle| \leq \|T\|\|x\|\|x\| = \|T\|$

$$\Rightarrow\ Sup\{|\langle Tx;x\rangle| /\ \|x\| = 1\} \leq \|T\|$$

- Por lado: denotemos por $s = Sup\{|\langle Tx; x\rangle| / \ \|x\| = 1\}$

Sea $x; y \ \in H$ entonces $\langle T(x+y); x+y\rangle - \langle T(x-y); x-y\rangle = 4Re\langle Tx; y\rangle$

Aplicando desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, obtenemos:

$$4|Re\langle Tx; y\rangle| \leq |T(x+y); x+y| + |T(x-y); x-y|$$
$$\leq s(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2s(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

En particular, si tomamos $x \in H \ con \ \|x\| = 1 \ y \ Tx \neq 0, \ y = \ \|Tx\|^{-1}Tx$

Se obtiene

$$\|Tx\| = Re\langle Tx; \|Tx\|^{-1}Tx\rangle \leq \frac{1}{2}s(1+1) = s$$

Por lo tanto Obtenemos:

$$\|T\| = Sup\{|\langle Tx; x\rangle| / \ \|x\| = 1\}.$$

2.3 Teoría Espectral elemental

Teorema 2.3.1: Sea H *un espacio de Hilbert y* $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto y autoadjunto, entonces: $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un autovalor de T.

Prueba:

1er caso: Si T = 0 se tiene $\lambda = 0$.

2do caso: Si $T \neq 0$, Como T es autoadjunto: $\|T\| = Sup\{|\langle Tx; x\rangle| / \ \|x\| = 1\}$

$$\text{Entonces: } \exists\ (x_n)_{n\geq 1} \subset H \ tal\ que\ \|x_n\| = 1\ y\ |\langle Tx_n; x_n\rangle| \to \|T\|$$

Luego: $(\langle Tx_n; x_n\rangle)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano – Weierstrass

$$\exists\ (x_{n'}) \subset (x_n)\ \ tal\ que\ \ \langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \to \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle| \to |\lambda| = \|T\| \quad \text{De donde } \lambda = \|T\| \ \vee\ \lambda = -\|T\|.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lambda = \|T\|$.

$$\text{Ahora: } 0 \leq \|Tx_{n'} - \|T\|x_{n'}\|^2 = \|Tx_{n'}\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle + \|T\|^2$$
$$\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \to 0$$

$$\text{Luego: } \ Tx_{n'} - \|T\|x_{n'} \to 0$$

Por compacidad $\exists (x_{n''}) \subset (x_{n'})$ tal que $Tx_{n''} \to y \in H$

$$\Rightarrow (\|T\|x_{n''}) \to y$$

$$\text{De donde: } \ x_{n''} \to \frac{y}{\|T\|} \ \text{ entonces } Tx_{n''} \to T\frac{y}{\|T\|} = y$$

Por tanto: $T(y) = \|T\|y$ de donde $\|T\|$ es autovalor de "T"

Además $\|y\| = \|T\| \neq 0 \Longrightarrow y \neq 0$

Lema 2.3.2: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y "M" un subespacio invariante por "T" ($T(M) \subset M$)

Entonces: $M^{\perp}$ es invariante por T^*.

Prueba:

Sea $y \in M^{\perp}$ entonces para cada $x \in M$ se tiene $\langle x; T^*y\rangle = \langle Tx; y\rangle = 0$ (pues $T(M) \subset M$).

Luego:

$$T^*y \in M^{\perp}.$$

Teorema 2.3.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto Autoadjunto, entonces existe un conjunto ortonormal $\{x_1; x_2; ...; x_n; ...\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1; \lambda_2; ... \lambda_n; ...$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\langle x; x_n\rangle x_n$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \to 0 \ cuando \ n \to \infty$

Prueba:

Por el **teorema 2.3.1** "T" admite un auto valor $\lambda_1 \ tal \ que \ |\lambda_1| = \|T\|$. Sea x_1 un autovector asociado a λ_1 tal que $\|x_1\| = 1$ (unitario).

Sea $H_2 = (\mathcal{L}\{x_1\})^{\perp}$. Como $(\mathcal{L}\{x_1\})^{\perp}$ es invariante por "T" entonces por el **Lema 2.3.2,** H_2 es invariante por $T^* = T, \quad (T(H_2) \subset H_2)$.

Ahora consideremos $T_2 = T/H_2$ es compacto y autoadjunto en H_2, por el **teorema 2.3.1** T_2 Admite un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, además $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$.

Sea x_2 un autovector asociado a λ_2 tal que $\|x_2\| = 1$ (unitario).

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ consideramos $x_1 \perp x_2$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $x_1 \perp x_2$, por teorema.

Ahora sea $H_3 = (\mathcal{L}\{x_1;\ x_2\})^{\perp}$ entonces por **Lema 2.3.2** $T(H_3) \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 = H$.

Ahora consideremos $T_3 = T/H_3$ es compacto y autoadjunto en H_2.

Continuando con este proceso, tenemos una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ Tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, de T y un sistema ortonormal de vectores $\{x_1; x_2; ...; x_n; ...\}$

> Claramente si la sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ es infinita, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = 0$.

Ahora veamos la representación:

Caso 1: si $T_{n+1} = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n}\langle x; x_j\rangle x_j \Rightarrow y_n \in H_{n+1} = (\mathcal{L}\{x_1; x_2; ...; x_n\})^{\perp}$$

$$T_{n+1}(y_n) = T(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow T\left(x - \sum_{j=1}^{n}\langle x; x_j\rangle x_j\right) = 0 \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n}\langle x; x_j\rangle T(x_j)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n}\langle x; x_j\rangle \lambda_j x_j \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle x; x_j\rangle x_j.$$

Caso 2 $T_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sea:

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n}\langle x; x_j\rangle x_j \ ; \quad y_n \in (\mathcal{L}\{x_1, x_2, x_3, ... x_n\})^{\perp} = H_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T_{n+1}(y_n)\| = \left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\|,$$

Pero:

$$\|y_n\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|x\|,$$

Por tanto:

$$\left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \to 0 \; cuando \; n \to \infty$$

$$\therefore T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

Teorema 2.3.4: (Espectral para operadores compactos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $S_1(T) \geq S_2(T) \geq \cdots \geq S_n(T) \geq S_{n+1}(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H_1$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \; \wedge \; S_n(T) \to 0 \; si \; (S_n(T)) \; es \; infinito$$

Prueba:

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces $T^*T \in \mathcal{L}(H_1)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.3.3, tenemos un sistema ortonormal $\{x_1; x_2; \dots\}$ de autovectores de T^*T

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) \langle x; x_n \rangle x_n$$

Además $\langle T^*Tx; x \rangle = \langle Tx; Tx \rangle = \|Tx\|^2 > 0$. También del teorema anterior $\lambda_n(T^*T) \geq \lambda_{n+1}(T^*T) > 0$.

Afirmación:

$$Ker(T) = Ker(T^*T)$$

($\subset$) Directo

($\supset$) Sea $x \in Ker(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx; x \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx; Tx \rangle = 0$

$$\Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(T).$$

Consideremos $y_n = \frac{Tx_n}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)}}$

Luego $\langle y_n; y_m \rangle = \frac{\langle Tx_n; Tx_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \frac{\langle T^*Tx_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}}$

$$= \frac{\langle \lambda_n(T^*T) x_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$$

Como: $H_1 = (Ker\,T) \oplus (Ker\,T)^{\perp} \;\wedge\; (Ker\,T)^{\perp} = \overline{ImT}$ Del **Teorema 2.3.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)** tenemos que $\{x_1;\, x_2; \ldots\}$ es una base ortonormal para $\overline{ImT}$

$$Tx = \sum_{K=1}^{\infty} \lambda_k \langle x; x_n \rangle x_n \quad \forall\, x \in H_1.$$

$$\text{Luego } x \in H_1 = (Ker\,T) \oplus \overline{ImT} \Rightarrow x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle x_n$$

$$\Rightarrow Tx = Tu + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle T x_n,$$

Pero $Tu = 0$, pues $u \in Ker\,T$

De donde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Llamando $S_n = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$

Se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(*)$$

∎

Notación:

- $S_n(T)$ Es llamado el n – esimo numero singular de "T"
- La representación $(*)$ es llamada la representación Hilbert – Schmidt.

Corolario 2.3.4: $\overline{F(H)} = K(H)$

Prueba: Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $S_1(T) \geq S_2(T) \geq \cdots \geq S_n(T) \geq S_{n+1}(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \;\wedge\; S_n(T) \to 0 \;\; si\; (S_n(T))\; es\; infinito$$

Definamos

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n(T) \langle\, .\, ; x_n \rangle y_n \;\in F(H)$$

Además: $T_k \to T$ *cuando* $k \to \infty$ por lo tanto $T \in \overline{F(H)}$ ∎

Corolario 2.3.5: Sea $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x; x_n \rangle y_n$ Donde (x_n), (y_n) son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, Entonces: B es compacto y $a_n = S_n(T)$.

Corolario 2.3.6: Sea $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n$ Donde (x_n), (y_n) son sistemas ortonormales y $S_n = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ Entonces: $T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)\langle x; y_n\rangle x_n$

Prueba:

Basta probar que: $(\langle\,.\,; x_n\,\rangle y_n)^* = (\langle\,.\,; y_n\,\rangle x_n)^*$

Sea: $R = \langle\,.\,; x_n\rangle y_n \Rightarrow Rx = \langle x; x_n\rangle y_n$ ahora $\langle Rx; y\rangle = \langle\langle x; x_n\rangle y_n; y\rangle = \langle x; x_n\rangle\langle y_n; y\rangle =$ $\langle x; \langle y; y_n\rangle x_n\rangle$ luego: $R^*y = \langle y; y_n\rangle x_n \Rightarrow R^* = \langle\,.\,; y_n\rangle x_n$

Observación:

Como

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)\langle x; y_n\rangle x_n \Rightarrow S_n(T) = S_n(T^*)$$

■

Proposición 2.3.7: si $(T_n)_{n\geq 1} \subset F(H)$ tal que $T_n \to T$ *cuando* $n \to \infty$ entonces: $T \in K(H)$

Teorema 2.3.8 (teorema de MIN - MAX):

$$S_n(T) = \min_{dim\,M=n-1} \max_{\substack{x\neq 0 \\ x\perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego: $S_1(T) = \|T\|$

Corolario 2.3.9: Sea "A" un operador compacto y "B" un operador acotado

Entonces:

$$S_n(AB) \leq \|B\| S_n(A)$$
$$S_n(BA) \leq \|B\| S_n(A)$$

Corolario 2.3.10: Sea "A" un operador compacto, B y C dos operadores Acotados

Entonces:

$$S_n(BAC) \leq \|B\| S_n(AC) \leq \|B\|.\|C\|.S_n(A)$$

Teorema 2.3.11: Sea "A" un operador Compacto sobre H

Entonces: $S_n(A) = min\{\|A - K\|;\ K \in \mathcal{L}(H), Ran\ K \leq n - 1\}$

Prueba: Sea $Ran\,K = m \leq n - 1 \Rightarrow \dim(Ker\ T)^{\perp} = m$

También:

$$S_n(A) \leq S_{m+1}(A) = \min_{dim\,M=n-1} \max_{\substack{x\neq 0 \\ x\perp M}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{\substack{x\neq 0 \\ x\perp M}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|};\ \dim M = m$$

Como

$$\dim(Ker\ T)^{\perp} = m$$

En particular:

$$S_n(A) \leq S_{m+1}(A) \leq \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in Ker\ A}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in Ker\ A}} \frac{\|(A-K)x\|}{\|x\|} \leq \|A-K\|$$

$$\therefore S_n(A) \leq \|A-K\|\ \forall K\ tal\ \ que\ RanK \leq n-1$$

$$\Rightarrow S_n(A) \leq min\{\|A-K\|;\ K \in \mathcal{L}(H), Ran\ K \leq n-1\}$$

Por otro lado, como "A" es compacto

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} S_n\langle\ .\ ; x_n\rangle y_n$$

Y consideremos:

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} S_j\langle\ .\ ; x_j\rangle y_j \Rightarrow Ran\ K_n = n-1$$

Probemos que:

$$\|A - K_n\| \leq \operatorname{Sup}_{j \geq n} S_j(A)$$

En efecto:

$$A - K_n = \sum_{j=n}^{\infty} S_j\langle\ .\ ; x_n\rangle y_n \Rightarrow \|A-K_n\| = \operatorname{Sup}_{x \neq 0}\left\{\frac{\left\|\sum_{j=n}^{\infty} S_j\langle x; x_j\rangle y_j\right\|}{\|x\|}\right\}$$

$$\leq \operatorname{Sup}_{x \neq 0}\left\{\frac{\sum_{j=n}^{\infty} S_j . \|x\|}{\|x\|}\right\} = \sum_{j=n}^{\infty} S_j \leq \underset{j \geq n}{Sup}\, S_j$$

Luego:

$$\|A - K_n\| \leq \underset{j \geq n}{Sup}\, S_j\,(A) \leq S_n(A);\quad Ran\ K_n = n-1$$

Por lo tanto:

$$min\{\|A-K\|;\ K \in \mathcal{L}(H), Ran\ K \leq n-1\} \leq S_n(A)$$

■

Corolario 2.3.12: Si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|S_n(A) - S_n(B)| \leq \|A-B\|;\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

DESIGUALDADES DE LOS NUMEROS SINGULARES

Más desigualdades de los números singulares pueden ser encontradas en [8], [13] y [14] entre los cuales resaltan:

1. Lema de WEYL.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$

- $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} S_j(A)$
- $\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} S_j(A)$

Otras desigualdades:

2. $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^{n}[S_j(A)]^p$, $p \geq 1$.
3. Si $p \geq 1$ *se tiene* $\sum_{j=1}^{n}[S_j(A+B)]^p \leq \sum_{j=1}^{n}\left(S_j(A)+S_j(B)\right)^p$.
4. $\sum_{j=1}^{n}(S_j(AB))^p \leq \sum_{j=1}^{n}\left(S_j(A)\right)^p\left(S_j(B)\right)^p$, $p \geq 1$.
5. $\prod_{j=1}^{n} S_j(AB) \leq \prod_{j=1}^{n} S_j(A)S_j(B)$
6. Si $p \geq 1$ *se tiene* $\left(\sum_{j=1}^{n}\left(S_j(A+B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(S_j(A)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(S_j(B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

2.4 Trazas y Determinantes de Operadores de Rango finito

Definición 2.4.1: Una traza "φ" sobre un ideal de operadores compactos "J" es un funcional lineal, unitariamente invariante
Esto es:

$$\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}$$

$T \longmapsto \varphi(T)$ Funcional lineal y $\varphi(U^{*}TU) = \varphi(T);\ \forall\, T \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)$ *unitario.*

Teorema 2.4.2: Un funcional lineal φ sobre J es una traza si y solo si

$$\varphi(AB) = \varphi(BA);\ \forall\, A \in J, \forall\, B \in \mathcal{L}(H)$$

Prueba:

($\Leftarrow$) $\varphi\big(U^{*}(TU)\big) = \varphi\big(U^{*}(UT)\big) = \varphi((U^{*}U)T) = \varphi(T)$

($\Leftarrow$) Usaremos el siguiente resultado:

Sea

$$B \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, U_i;\ \ donde\ U_i \epsilon\ \mathcal{L}(H)\ unitario,\ \ \alpha_i{:}\ escalares$$

Primero veamos que: $\varphi(UA) = \varphi(AU);\ \forall\, A \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)$ *unitario*

En efecto:

$$\varphi(UA) = \varphi(U^{*}UAU) = \varphi(AU)$$

Ahora sea

$$B \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, U_i$$

$$\Rightarrow\ \varphi(AB) = \varphi\left(A\sum_{i=1}^{4}\alpha_i U_i\right) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\varphi(AU_i) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\varphi(U_iA) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i U_i\right)A\right) = \varphi(BA)$$

Lema 2.4.3 (Lema de Auerbach): Sea "X" un espacio normado de dimensión finita (dim X= n), entonces:

Existen $u_1; u_2; \ldots; u_n \in X \wedge f_1; f_2; \ldots; f_n \in X^{*}$ tal que

$\|u_i\| = \|f_i\| = 1,\ \forall\, i = 1; \ldots; n\ \ tambien\ \ f_i(u_j) = \delta_{ij},\ \forall\, i,j = 1; \ldots; n$

Prueba:

$$dim\, X = n \implies \exists\ \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}\ una\ base\ de\ X$$

Ahora para cada $x \in X$ tiene una única representación de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$$

Dado una n – upla $(x^1; x^2; \ldots; x^n) \epsilon\ X^n\ para\ cada\ i = \overline{1;n}$

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, e_j$$

De donde:

$$x^1 = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \cdots + \lambda_{1n}e_n$$
$$x^2 = \lambda_{12}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \cdots + \lambda_{n2}e_n$$
$$\vdots$$
$$x^n = \lambda_{n1}e_1 + \lambda_{n2}e_2 + \cdots + \lambda_{nn}e_n$$

Definimos:

$$D: X^n \to \mathbb{K}$$
$$x = (x^1; x^2; \dots; x^n) \mapsto D(x) = det\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

Recordemos: X: es de Banach $\Leftrightarrow \overline{B(0,1)}$ es compacta $\Leftrightarrow \overline{B(0,1)}$ es cerrada y acotada

Sea $B = \overline{B(0,1)}\, x\overline{B(0,1)}x \dots x\overline{B(0,1)}\ \ (n\ veces)$; luego "B" es compacto

Entonces:

$$D/_B: B \to \mathbb{K}$$
$$v = (v_1; v_2; \dots; v_n) \mapsto D/_B(u) = det\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

El cual alcanza su máximo valor en B $\Rightarrow \exists\, u = (u_1; u_2; \dots; u_n) \in B$ tal que:

$$D/_B(u) = D(u_1; u_2; \dots; u_n) = \max_{\|x_1\|=\|x_2\|=\cdots=\|x_n\|=1} |D(x_1; x_2; \dots; x_n)|$$

También:

$D/_B(u) \neq 0$ Pues caso contrario $u_1; u_2; \dots; u_n$ son L. D.

Ahora definimos:

$$f_i(x) = \frac{D(u_1;\ u_2; \dots;\ u_{i-1};\ x;\ u_{i+1}; \dots;\ u_n)}{D(u_1;\ u_2;\ \dots\ ;\ u_n)}$$

Claramente se cumple:

- $\|u_1\| = \|u_2\| = \cdots = \|u_n\| = 1$
- $f_i(u_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$ Además $\|f_i\| = \max_{\|x\|=1} |f_i(x)| = 1$
- $f_i\ es\ lineal\ y\ acotado\ \Rightarrow f_i \in X^*$ ∎

Lema 2. 4. 4: Sea "B" un espacio de Banach y consideremos $F \in F(B)$, entonces B se representa como la suma directa

$$B = M_F \oplus N_F$$

Donde: $F(M_F) \subset M_F\ \ y\ \ N_F \subset KerF$

Prueba: Sea $\{\varphi_1; \varphi_2; \ldots; \varphi_m\}$ una base de la ImF y sea $\{\psi_1; \psi_2; \ldots; \psi_m\}$ un conjunto de vectores de B tal que $F\psi_i = \phi_i$ $(j = 1; \ldots; m)$.

Denotemos por $\{f_1; \ldots; f_n\}$ un sistema biortogonal de funcionales

$$\langle\varphi_j; f_k\rangle = \delta_{jk}\ (\varphi_j \in B, f_k \in B')$$

Es claro que para cada $x \in B$ se tiene

$$Fx = \sum_{j=1}^{m} \langle Fx; f_j\rangle \varphi_j$$

Esto es

$$F = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes g_j,\ \ g_j = F'f_j \quad (F' \textit{ es el conjugado de } F).$$

Ahora definamos los conjuntos

$$M_F = span\{\varphi_1; \varphi_2; \ldots; \varphi_m; \psi_1; \psi_2; \ldots; \psi_m\} \ \ y\ \ R_F = \bigcap_{j=1}^{m} Ker g_j.$$

Luego cada vector $x \in B$ puede ser representado en la forma $x = u + v$ donde

$$u = x - \sum_{j=1}^{m} \langle x; g_j\rangle \psi_j \in R_F \quad \wedge \quad v = \sum_{j=1}^{m} \langle x; g_j\rangle \psi_j \in M_F.$$

Por tanto se tiene la igualdad

$$B = M_F + R_F$$

También

$$F(M_F) \subset M_F, R_F \subset KerF$$

Denotemos por S_F la intersección $S_F = M_F \cap R_F$. Como $dimS_F < \infty$, R_F puede ser representado por la suma directa $R_F = S_F \oplus N_F$.

Es claro que $B = M_F \oplus R_F$ es la suma directa de los subespacios $M_F\, y\, R_F$ los cuales satisfacen las condiciones del lema.

■

Definición 2. 4. 5 (traza sobre $F(B)$): Por el lema anterior si $F \in F(B)$, entonces F se puede representar como una matriz 2x2 de la siguiente forma:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \ I + F = \begin{pmatrix} I_1 + F_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$F_1 = {}^{F}/_{M_F}\ ; I = {}^{F}/_{B};\ \ I_1 = {}^{I}/_{M_F};\ \ I_2 = {}^{I}/_{N_F}$$

Como:

$$F_1 \colon M_F \ \ \rightarrow \ \ M_F$$

Tenemos que $Tr;\ det$ de F_1 están bien definidos por el álgebra lineal como sigue:

$$Tr(F_1) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(F_1); \quad \det(I + F_1) = \prod_{j=1}^{n} (1 + \lambda_j(F_1))$$

Donde: $n = dimM_F$

Luego con esto definamos: $$Tr(F) := TrF_1$$
$$\det(I + f) := \det(I_1 + F_1)$$

Además esta definición no depende de H_1 ya que los autovalores de F y F_1 coinciden (contando multiplicidades) Por lo tanto tenemos:

$$Tr(F) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(F)$$

$$\det(I + F) = \prod_{j=1}^{n} (1 + \lambda_j(F))$$

Linealidad de la traza

Teorema 2. 4. 6

A) $Tr(F + G) = Tr(F) + Tr(G)$

B) $Tr(\alpha F) = \alpha Tr(F)$

Prueba

A) Por el **Lema 2. 4. 4**

Sea $F;\ G \in F(H)$ entonces, existen $H_1;\ H_2$ subespacio de H de dimensión finita tal que:

- $F(H_1) \subset H_1$; $H_1^{\perp} \subset Ker(F)$
- $G(H_2) \subset H_2$; $H_2^{\perp} \subset Ker(G)$

Sea $H_0 = H_1 + H_2$ $entonces$ $\dim(H_0) < \infty$ y $(F + G)(H_0) \subset H_0$

Además: $H_0^{\perp} = H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \subset Ker(F) \cap Ker(G) \subset Ker(F + G)$

Por tanto tenemos:

$$H_0; \dim(H_0) < \infty; \quad (F + G)(H_0) \subset H_0; \qquad H_0{}^{\perp} \subset Ker(F + G)$$

Finalmente:

$$Tr(F + G) = Tr\left({}^{F + G}/_{H_0}\right) = Tr\left({}^{F}/_{H_0} + {}^{G}/_{H_0}\right)$$
$$= Tr\left({}^{F}/_{H_0}\right) + Tr\left({}^{G}/_{H_0}\right) = Tr(F) + Tr(G)$$

B) Inmediato de la definición

Lema 2. 4. 7: Sea $F \in F(B) \Rightarrow |Tr(F)| \leq n\|F\|$, donde $n = \dim(Im(F)) = Ran(F)$

Prueba:

Sea $Ran(F) = n$

Por el lema de Auerbach, existen $x_1;\ x_2;\ x_3; \ldots\ldots; x_n \in Im(F)$

Existen $f_1;\ f_1;\ f_1; \ldots\ldots;\ f_1 \in (Im(F))^*$ $tal\ que$ $\|x_i\| = \|f_i\| = 1$ y $f_i(x_j) = \underbrace{\langle x_j; f_i\rangle}_{notacion} = \delta_{ij}$

Tenemos que $\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ forman una base de $Im(F)$

Luego:

$$\langle Fx; f_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i; f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i; f_j \rangle = \alpha_j$$

Entonces:

$$Fx = \sum_{i=1}^{n} \langle Fx; f_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x; F^* f_i \rangle x_i$$

Denotemos:

$$F^* f_i = g_i \wedge \langle x;\ g_i \rangle x_i = (x_i \otimes g_i)(x); entonces: F = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes g_i$$

Afirmación:

$$si\ \ F = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes g_i \ \Rightarrow\ Tr(F) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i; g_i \rangle$$

En efecto: Basta probar que si $F = \varphi \otimes g \Rightarrow Tr(F) = \langle \varphi; g \rangle$

Caso (1): Si $\varphi = 0$ (Trivial)

Caso (2): Si $\varphi \neq 0 \Rightarrow F(\varphi) = (\varphi \otimes g)(\varphi) = \langle \varphi; g \rangle \varphi$

$\langle \varphi; g \rangle$ *es un autovalor de* $\varphi \otimes g$, de donde $Tr(\varphi \otimes g) = \langle \varphi; g \rangle$

Regresando:

$$|Tr(F)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i; g_i \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.\|g_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.\|F^* f_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.\|F^*\|.\|f_i\| = n\|F\|$$

Teorema 2. 4. 8: Sea $\tau: F(B) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que

$\tau(F_1.F_2) = \tau(F_2.F_1)\ \ \forall\ F_1;\ F_2\ \in F(B)$ Entonces $\exists\ \alpha \in \mathbb{C}\ tal\ que\ \tau(F) = \alpha.Tr(F), \forall\ F \in F(B)$

Además:

Si $\tau(F_0) = \lambda_1(F_0) \neq 0$ para F_0 de rango 1, entonces: $\tau = Tr$

Prueba:

Fijemos $\varphi_0 \in B\ \wedge\ f_0\ \in B^*$ tal que $\langle \varphi_0; f_0 \rangle = 1$

Sea $k_0 = \varphi_0 \otimes f_0$ y denotemos a $\tau(k_0) = \alpha$

Sea F_0 un operador de rango 1, entonces $F_0 = \psi_0 \otimes g$

Definimos:

$K_1 = \psi \otimes f_0;\ K_2 = \varphi_0 \otimes g$ Ambos de rango 1

Entonces $K_1 K_2(x) = K_1\big((\varphi_0 \otimes g)_{(x)}\big) = K_1(\langle x; g \rangle \varphi_0) = (\psi \otimes f_0)(\langle x; g \rangle \varphi_0)$

$$= \langle \langle x; g \rangle \varphi_0; f_0 \rangle \psi = \langle x; g \rangle \langle \varphi_0; f_0 \rangle \psi = \langle x; g \rangle \psi = (\psi \otimes g)(x)$$

Luego

$$K_1K_2 = \psi \otimes g$$

Similarmente

$$K_2K_1 = \langle\psi; g\rangle(\varphi_0 \otimes f_0)$$

Por Hipótesis

$$\tau(F_1.F_2) = \tau(F_2.F_1)$$

Entonces $\tau(\psi \otimes g) = \tau\big(\langle\psi; g\rangle(\varphi_0 \otimes f_0)\big) = \langle\psi; g\rangle\tau(\varphi_0 \otimes f_0)$ Llamando $\alpha = \tau(\varphi_0 \otimes f_0)$ $\Rightarrow$ $\tau(\psi \otimes g) = \alpha\langle\psi; g\rangle$

En general: Si

$$F = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes g_i$$

Se tiene:

$$\tau(F) = \sum_{i=1}^{n} \tau(\varphi_i \otimes g_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\langle\varphi_i; g_i\rangle = \alpha \sum_{i=1}^{n} \langle\varphi_i; g_i\rangle = \alpha Tr(F)$$

Por lo tanto

$$\tau(F) = \alpha.Tr(F)$$

Finalmente:

Como $\tau(F) = \alpha Tr(F)\ \forall\ F \in F(B)$, además si F_0 es de rango 1 tal que $\tau(F_0) = \lambda_1(F_0) \neq 0$

Entonces: $\tau(F_0) = \alpha Tr(F_0) \Rightarrow \lambda_1(F_0) = \alpha\lambda_1(F_0) \Rightarrow \alpha = 1$

Por tanto:

$$\tau = Tr$$

Teorema 2. 4. 9: Dado $F = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \otimes f_i \in F(B)$ entonces

$$\det(I + F) = det\big(\delta_{jk} + \langle\varphi_j; f_k\rangle\big)_{j,k=1}^{m}$$

Prueba:

Consideremos los operadores $X \in \mathcal{L}(B; \mathbb{C}^n)$ y $Y \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; B)$ dado por

$$X\varphi = (\langle\varphi; f_1\rangle; \langle\varphi; f_2\rangle; \dots; \langle\varphi; f_m\rangle)$$

$$Y(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_m) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k$$

Es claro que $F = YX$ entonces $\det(I + F) = \det(I + YX)$, pero tenemos

$$XY\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\langle\varphi_k;f_1\rangle\\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\langle\varphi_k;f_2\rangle\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\langle\varphi_k;f_n\rangle\end{pmatrix}$$

Por tanto $\det(I_m+XY)=\det(\delta_{jk}+\langle\varphi_j;f_k\rangle)_{j,k=1}^{m}$

Ahora debemos verificar que $\det(I+YX)=\det(I_m+XY)$

En efecto:

Dado $A\in Bx\mathbb{C}^m$ y definamos la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix}I_2 & -X\\ Y & I_1\end{pmatrix}$

Donde I_1, I_2 son los operadores identidad en B y $\mathbb{C}^m$ respectivamente

Ahora notemos que A es de la forma $I+G$, donde $G\in F(Bx\mathbb{C}^m)$ por tanto el $detA$ está bien definido.

Ahora hacemos la descomposición del operador A como sigue:

$$A=\begin{pmatrix}I_2 & -X\\ Y & I_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ Y & I_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_1+YX\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & X\\ 0 & I_1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}I_2 & X\\ 0 & I_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2+XY & 0\\ 0 & I_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ Y & I_1\end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\det(A)=\det(I+G)=\det(I+YX)=\det(I+XY)$$

Por lo tanto

$$\det(I+F)=det\big(\delta_{jk}+\langle\varphi_j;f_k\rangle\big)_{j,k=1}^{m}$$

Teorema 2. 4. 10: Sea $d: I+F(B)\to\mathbb{C}$ un funcional tal que

$$d((I+F_1)(I+F_2))=d(I+F_1)d(I+F_2)\ \ \forall\ F_1;\ F_2\in F(B)$$

Además: Si $d(F_0)=1+\lambda_1(F_0)$ para F_0 de rango 1, entonces: $d=det$

Prueba:

Por **Lema 2. 4. 4** existen subespacios $B_0\ y\ B_1\ de\ B$ tal que $B=B_0\oplus B_1$ con $dimB_0<\infty$ además $F(B_0)\subset B_0$ y $F(B_1)=\{0\}$

Supongamos que $dimB_0=m$, escogemos en B_0 una base $\varphi_1;\ \varphi_2;\ \varphi_3;\ \ldots.;\ \varphi_m$ del operador F_0 que es la estricción $F_0=F/B_0$ del operador F

Sea $\{g_n\}_{n=1}^{m}\subset B^{/}$ un sistema biortogonal de funcionales $\langle\varphi_k;g_n\rangle=\delta_{kn}$ y $f_n=F^{/}g_n$. Entonces el operador F puede ser representado de la forma:

$$F = \sum_{n=1}^{m} F_n \quad donde: F_n = \varphi_k \otimes f_n$$

Luego se tiene que $F_k F_n = \langle \varphi_n; f_k \rangle \varphi_k \otimes f_n = \langle F\varphi_n; g_k \rangle \varphi_k \otimes f_n$. Para $k > n$, dado que $\{\varphi_n\}$ es una base del operador $F_0 = F/B_0$ entonces se tiene: $F\varphi_n = \epsilon\langle \varphi_{n-1}; g_k \rangle + \lambda\langle \varphi_n; g_k \rangle = 0$

Así:

$$F_k F_n = 0 \ para \ k > n$$

Por tanto se tiene que

$$(I + F_m)(I + F_{m-1})(I + F_{m-2}) \dots (I + F_1) = I + F_m + F_{m-1} + \cdots + F_1 = I + F$$

Por tanto:

$$d(I + F) = \prod_{n=1}^{m} d(I + F_n) = \prod_j \left(1 + \lambda_j(F)\right) = \det(I + F).$$

2.5 Extensión continua de la traza y el Determinante

Definición 5.5.1: Sea "X" un espacio de Banach y $(x_n) \subset X$, decimos que (x_n) es una base de Schauder si existen únicos escalares $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall\, x \in X$ se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

Teorema 2.5.2: Todo espacio de Banach con base de Schauder es separable.

Teorema 2.5.3: Son equivalentes:

A) $(x_n) \subset X$ es una base de Schauder
B) $\exists\, (f_n) \subset X^*$ sistema biortogonal asociada a (x_n) tal que $\forall\, x \in X$ se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n$$

Teorema 2.5.4: Sea $(x_n) \subset X$una base de Schauder, consideremos $(f_n) \subset X^{/}$ por $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ y los operadores P_n dado por:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$$

Se tiene que:

A) $(f_n) \subset X^*$
B) Cada P_n es continuo
C) $\exists\, M > 0$ tal que $\|P_n\| \leq M\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ (esto es: $(\|P_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotada)

En general los funcionales $Tr(\,.\,)$ y $\det(I + .\,)$ no son continuos con la norma $\|\,.\,\|_{\mathcal{L}(B)}$ para esto veamos

Ejemplo 2.5.5: Sea B espacio de Banach con base de Schauder (w_n) luego por **teorema 2.5.3** podemos encontrar un sistema biortogonal $(v_n) \subset B^*$.
Definamos los operadores

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes x_j \ \wedge \ F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n$$

Ahora $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (w_j \otimes x_j)(x) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle x; v_j \rangle}_{v_j(x)} w_j = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) w_j$ y por el **Teorema 2.5.4** la sucesión $(\|S_n\|) \subset \mathbb{R}$ es acotada, Luego $\|F_n\| \to 0$
Pero

- $TrF_n = \frac{1}{\sqrt{n}} TrS_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \langle w_j; v_j \rangle$
- $\det(I + F_n) = \det(\delta_{jk} + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle w_j; v_k \rangle)_{j,k=1}^{m}$

De donde

- $TrF_n = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$
- $\det\left(\delta_{jk} + \frac{1}{\sqrt{n}}\langle w_j; v_k\rangle\right)_{j,k=1}^{m} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \to \infty$

Luego Tr y $\det(I + .)$ no son continuas con $\| . \|_{\mathcal{L}(H)}$.

Teorema 2.5.6: (Condición de Lipschitz):

Sea $(N; \| . \|_N)$ un espacio normado complejo y sea $f: N \to \mathbb{C}$ aplicación lineal, tal que:

a) $f(A + \lambda B)$ es una función entera $\forall\, A; B \in N$

b) Existe $G: [0; \infty) \to \mathbb{R}$ monótona no decreciente tal que $|F(A)| \leq G(\|A\|_N)$

Entonces:

$$|F(A) - F(B)| \leq \|A - B\|_N\, G(\|A\|_N + \|B\|_N + 1).$$

Prueba:

- Si $A = B$ obvio
- Si $A \neq B$, definamos $g(\lambda) = f\left(\frac{1}{2}(A + B) + \lambda(A - B)\right)$

Notemos que "g" es una función entera (holomorfa en todo el plano complejo), además

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(A)$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = f(B)$$

Luego:

$$|f(A) - f(B)| = \left|g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$

Por el teorema del valor medio

$$\exists\, c \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle \ tal\ que\ g'(c) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Luego:

$$|f(A) - f(B)| = \left|g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = |g'(c)| \leq \underset{-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}}{Sup} |g'(t)|$$

Por otro lado p0or la formula integral de Cauchy

$$\forall\, \rho > 0;\ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ Se tiene } g'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = \rho} \frac{g(\xi + t)}{\xi^2} d\xi$$

Luego:

$$|g'(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\xi| = \rho} \frac{g(\xi + t)}{\xi^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{\rho} \underset{|\xi| = \rho}{\text{Sup}} |g(t + \xi)| \leq \frac{1}{\rho} \underset{|\lambda| \leq \rho + \frac{1}{2}}{\text{Sup}} |g(\lambda)|$$

Luego:

$$|f(A)-f(B)|\leq \frac{1}{\rho}\sup_{|\lambda|\leq \rho+\frac{1}{2}}|g(\lambda)|$$

Para $\rho=\|A-B\|_N^{-1}$ y $|\lambda|\leq \rho+\frac{1}{2}$

Tenemos:

$$\left\|\frac{1}{2}(A+B)+\lambda(A-B)\right\|_N \leq \frac{1}{2}\|A+B\|_N+|\lambda|\|A-B\|_N \leq \frac{1}{2}\|A+B\|_N+(\rho+\frac{1}{2})\|A-B\|_N$$

$$=\frac{1}{2}(\|A+B\|_N+\|A-B\|_N)+\rho\|A-B\|_N$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|A\|_N+\|B\|_N+\|A\|_N+\|B\|_N)+1=\|A\|_N+\|B\|_N+1$$

Por tanto si $|\lambda|\leq \rho+\frac{1}{2}$

$$|g(\lambda)|=\left|f\left(\frac{1}{2}(A+B)+\lambda(A-B)\right)\right|\leq G\left(\left\|\frac{1}{2}(A+B)+\lambda(A-B)\right\|_N\right)$$

$$\leq G(\|A\|_N+\|B\|_N+1)$$

Finalmente:

$$|f(A)-f(B)|\leq \frac{1}{\rho}\sup_{|\lambda|\leq \rho+\frac{1}{2}}|g(\lambda)|\leq \frac{1}{\rho}G(\|A\|_N+\|B\|_N+1)=\|A-B\|_N G(\|A\|_N+\|B\|_N+1)$$

$$\Rightarrow |f(A)-f(B)|\leq \|A-B\|_N G(\|A\|_N+\|B\|_N+1).$$

■

Definición 2.5.7:

Sea "D" un subálgebra de $\mathcal{L}(B)$, se dice que D está sumergida en $\mathcal{L}(B)$ si existe una norma en D tal que:

1) $\exists\, c>0;\ \|A\|_{\mathcal{L}(B)}\leq c\|A\|_D;\ \forall\, A\in D$
2) $\|AB\|_D\leq \|A\|_D.\|B\|_D$

Definición 2.5.8: Sea "D" un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(B)$, se dice que D tiene la propiedad de aproximación si: $\overline{F_D}^{\|\cdot\|_D}:=\overline{F(H)\cap D}^{\|\cdot\|_D}=D$

Teorema 2.5.9: Sea $D\subset\mathcal{L}(B)$ un subálgebra sumergida con la propiedad de aproximación. Son equivalentes:

A) La función $\det(I+\cdot):F_D\to\mathbb{C}$ admite una extensión continua en $\|\cdot\|_D$ a D
B) La función $\det(I+\cdot)$ definida en F_D es uniformemente continua en $\|\cdot\|_D$ en alguna bola $\{G\in F_D/\ \|G\|\leq r\}$ de F_D
C) La función $\det(I+\cdot)$ definida en F_D satisface la Condición de Lipschitz en alguna r – bola de F_D
D) La función $\det(I+\cdot)$ definida en F_D es continua en $F=0$ en $\|\cdot\|_D$
E) El funcional lineal Tr es acotada en $(F_D;\|\cdot\|_D)$ esto es $|Tr(F)|\leq c\|F\|_D$ $\forall\, F\in F_D$

Definición 2.5.10: Sea $D \subset \mathcal{L}(B)$ un subálgebra sumergida con la propiedad de aproximación que satisface (A), (B), (C), (D) o (E) del **Teorema 2.5.10**

Entonces:

Esto nos permite definir $Tr_D;\ Det_D(I + \cdot)\ en\ D$ dado por:

- $Tr_D F = \lim_{n\to\infty} Tr\ F_n$
- $\det(I + F) = \lim_{n\to\infty} \det(I + F_n)\ \ \forall F \in D$

Donde $\|F_n - F\|_D \to 0$; $F_n \in F_D$

Teorema 2.5.11: Sea $D \subset \mathcal{L}(B)$ un subálgebra sumergida con la propiedad de aproximación. Dado

$G: [0; \infty[\ \to \mathbb{R}$ Monótona no decreciente tal que: $|\det(I + F)| \le G(\|F\|_D)$

$$\forall F \in F_D = F \cap D;\ \overline{F_D}^D = D$$

Entonces:

La función determinante $det(I+\ .)$ puede ser extendido de $F_D\ a\ D$, además para $A, B \in D$ se tiene

$$|det_D(I + A) - det_D(I + B)| \le \|A - B\|_D G(\|A\|_D + \|B\|_D + 1)$$

Prueba:

Para $F \in F_D$ definamos $f(F) \coloneqq \det(I + F)$

Luego $f(F + \lambda K) = \det(I + F + \lambda K)$ es un polinomial para $F, K \in F_D$ entonces por el **Teorema 2.5.6** se tiene

$$|\det(I + F) - \det(I + K)| \le \|F - K\|_D G(\|F\|_D + \|K\|_D + 1)$$

Por lo tanto la función $\det(I+\ .)$ tiene una extensión continua de $F_D\ a\ D$ por el **Teorema 2.5.9**

Dado $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_D$ tal que $\|F_n - A\|_D \to 0\ \wedge\ \|K_n - A\|_D \to 0$

Luego

$$|\det(I + F_n) - \det(I + K_n)| \le \|F_n - K_n\|_D . G(\|F_n\|_D + \|K_n\|_D + 1)$$

Haciendo $n \to \infty$

$$|det_D(I + A) - det_D(I + B)| \le \|A - B\|_D . G(\|A\| + \|B\| + 1)$$

2.6 Operadores de Clase Traza y Operadores Hilbert - Schmitd

Operadores de Clase Traza

Definición 2.6.1:

Sea "H" un espacio de Hilbert separable

$$S_1(H) = \left\{ A \in \mathcal{L}(H) \,/\, A \; es \; compacto \; \wedge \; \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) < \infty \right\}$$

Un Operador $A \in S_1(H)$ es llamado operador de clase traza.

Teorema 2.6.2:

$$\| \; . \; \|_1 : S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) \; es \; una \; norma$$

Prueba:

1) Como los $S_j \geq 0, \; \forall \; j \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) \geq 0$

   Además $\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) = 0 \Rightarrow S_1(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R} \; \wedge \; A \in S_1$

$$\Rightarrow \|\alpha A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 . \lambda_j[A^* A]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha| \sqrt{\lambda_j[A^* A]} = |\alpha| . \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) = |\alpha| . \|A\|_1$$

3) $\|A + B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A + B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_2$

Teorema 2.6.3: $S_1(H)$ es completo en la norma $\| \; . \; \|_1$

Prueba:

Sea $(A_n)_{n\geq 1} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy

$$\Rightarrow \forall \; \varepsilon > 0, \exists \; m_0 \in \mathbb{N} \;\; m, n \; \geq \; m_0 \; \Rightarrow \; \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon$$

Pero: $\|A_m - A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = S_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon$ Luego: $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(H)$ el cual es completo $\Rightarrow \exists \; A \in \mathcal{L}(H) \; tal \; que \; \|A_m - A\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, además Como A_m es compacto $\forall \; m \; \in \; \mathbb{N} \; \Rightarrow$ A es compacto

También:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon$$

Haciendo $m \to \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0 \ \Rightarrow \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0$$

Luego:

$A_n \to A, cuando\ n \to \infty$, En la norma $\|\ .\ \|_1$

■

Teorema 2.6.4: $S_1(H)$ es un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la norma $\|\ .\ \|_1$, con la propiedad de aproximación

Prueba:

1) $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \leq \|A\|_1$ lo que verifica la parte 1 de la **Definición 2.5.7**
2) De las desigualdades de los números singulares se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} S_j(AB) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} S_j(A)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} S_j(B)\right) \Rightarrow \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 . \|B\|_1$$

Ahora veamos la propiedad de aproximación:

Tenemos que $F(H) \subset S_1(H)$, las funciones de rango finito están en S_1

Ahora sea $A \in S_1(H)$ un operador de rango finito, entonces la representación Hilbert – Schmidt es:

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A)\langle\ .\ ; \varphi_j\rangle\varphi_j$$

Llamemos:

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} S_j(A)\langle\ .\ ; \varphi_j\rangle\varphi_j$$

Luego:

$$\|A_n - A\|_1 = \sum_{j=n+1}^{\infty} S_j(A) \to 0\ con\ lo\ cual\ \overline{F(H) \cap S_1}^{\|\ .\ \|_1} = S_1$$

Teorema 2.6.5: Sea $A \in S_1(H)\ \wedge B,\ C\ \in \mathcal{L}(H)$ entonces:

$$BAC \in S_1(H)\ \wedge\ \|BAC\|_1 \leq \|B\|_{\mathcal{L}(H)} . \|A\|_1 . \|C\|_{\mathcal{L}(H)}$$

Prueba:

Se sabe que: $S_j(BAC) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(H)} . \|C\|_{\mathcal{L}(H)} S_j(A) \Rightarrow BAC \in S_1$

Ahora:

$$\sum_{j}^{\infty} S_j(BAC) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(H)} . \|C\|_{\mathcal{L}(H)} \sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) \Rightarrow \|BAC\|_1 \leq \|B\|_{\mathcal{L}(H)} . \|A\|_1 . \|C\|_{\mathcal{L}(H)}$$

Teorema 2.6.7: Sea $A \in S_1(H)$ y sea $(B_n)_{n\geq 1}, (C_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de operadores lineales acotados en "H" que convergen puntualmente a B y C respectivamente, entonces: $B_n A C_n^* \to BAC^*$ en la norma de la clase traza.

Demostración en [8] sección IV teorema 11.3

Teorema 2.6.8: El funcional TrF definido en el conjunto de los operadores de rango finito $F(H)$ es continua en F con la norma $\| \quad \|_1$.

Prueba:

$$|TrF| = \left|\sum_{j=1}^{N(F)} \lambda_j(F)\right| \leq \sum_{j=1}^{N(F)} S_j(F) = \|F\|_1$$

Definición 2.6.9: Como $S_1(H)$ es un subálgebra sumergida con la propiedad de aproximación, podemos definir $Tr_1;\ det_1(I+\cdot)\ en\ D$ dado por:

- $Tr_1(T) = \lim_{n\to\infty} Tr\, F_n \quad \forall\ T \in S_1$
- $\det(I+T) = \lim_{n\to\infty} \det(I+F_n) \quad \forall\, T \in S_1$

Donde $\|F_n - T\|_1 \to 0\,;\ F_n \in F(H)$.

Teorema 2.6.10: Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador de clase traza y sea $\{\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \ldots; \varphi_n; \ldots\}$ una base ortonormal de "H" entonces:

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n\rangle$$

Demostración en [8] sección IV teorema 5.6

Teorema 2.6.11 (de Lidskii): Sea A un operador de clase traza y sea $\lambda_1(A);\ \lambda_2(A); \ldots;\ \lambda_n(A); \ldots$ los autovalores no nulos de A (incluyendo multiplicidades) Entonces:

$$tr\, A = \sum_j \lambda_j(A) \quad \wedge \quad \det(I-A) = \prod_j (1 - \lambda_j(A))$$

Demostración en [7] sección IV teorema 6.1

Operadores Hilbert - Schmidt

Definición 2.6.12: Sea "H" un espacio de Hilbert separable y $A \epsilon K(H)$ "A" Es llamado operador Hilbert – Schmidt si y solo si A^*A es un operador de clase traza.

Teorema 2.6.13: Sea H un espacio de Hilbert y $A \in K(H)$, los siguientes enunciados son equivalentes:

a) "A" es un operador Hilbert – Schmidt.

b) Sea $\{\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \dots; \varphi_n; \dots\}$ una base ortonormal de "H", Entonces: $\sum_{j=1}^{\infty} \|A\varphi_j\|^2 < \infty$

c) Sea $\{\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \dots; \varphi_n; \dots\}$ una base ortonormal de "H", entonces:

$$\sum_{j;k=1}^{\infty} |\langle A\varphi_j; \varphi_k\rangle|^2 < \infty$$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} (S_j(A))^2 < \infty$

Prueba:

Sea $\lambda_1(A^*A), \lambda_2(A^*A), \lambda_2(A^*A), \dots$ una sucesión de autovalores de A^*A no nulos y consideremos $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una base ortonormal de H y por el teorema 2.6.10 se tiene:

$$Tr(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*A\varphi_j; \varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A\varphi_j; A\varphi_j\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \|A\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |\langle A\varphi_j; \varphi_k\rangle|^2 \right) \quad \textit{esto es por identidad de Parsebal}.$$

Esto garantiza la equivalencia (a), (b) y (d)

Por otro lado, por el teorema 2.3.3 existe un sistema ortonormal $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ de autovectores del operador A^*A tal que

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)\langle\ .\ ; \psi_k\rangle\psi_k$$

Luego tenemos:

$$\langle A^*A\varphi_j; \varphi_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)\langle\varphi_j; \psi_k\rangle\psi_k\ ;\ \varphi_j\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)\langle\varphi_j; \psi_k\rangle\langle\psi_k; \varphi_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)|\langle\varphi_j;\ \psi_k\rangle|^2$$

Se deduce que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*A\varphi_j; \varphi_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)|\langle\varphi_j;\ \psi_k\rangle|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^*A)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi_j;\ \psi_k\rangle|^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(A^*A) = \sum_{k=1}^{\infty}[S_k(A)]^2$$

■

Definición 2.6.14: Sea "H" un espacio de Hilbert separable, denotemos y definamos la clase de operadores Hilbert – Schmitd

$$S_2(H) = \{A \in K(H)/\text{"}A\text{" es un operador Hilbert} - \text{Schmidt}\}$$

Teorema 2.6.15: En $S_2(H)$ definamos $\|\ .\ \|_2: S_2(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$A \mapsto \|A\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(S_j(A)\right)^2\right)^{1/2} \quad es\ una\ norma$$

Prueba:

1. Claramente $\|A\|_2 \geq 0$

   Además: $\|A\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}\left(S_j(A)\right)^2 = 0 \Rightarrow S_1(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Rightarrow A = 0$

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}\ \wedge\ A\ \in S_2(H)$

$$\|\alpha A\|_2 = \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(S_j(A)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{j=1}^{\infty}\langle(\alpha A)^*(\alpha A)\varphi_j;\varphi_j\rangle\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^2\langle A^*A\varphi_j;\varphi_j\rangle\right]^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\left[\sum_{j=1}^{\infty}\langle A^*A\varphi_j;\varphi_j\rangle\right]^{\frac{1}{2}} = |\alpha|.\|A\|_2$$

3. Sea $A, B\ \in S_2(H)$

$$\|A+B\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\langle(A+B)^*(A+B)\varphi_j;\ \varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle(A+B)\varphi_j;(A+B)\varphi_j\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\langle A\varphi_j;A\varphi_j\rangle + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\langle A\varphi_j;B\varphi_j\rangle + \langle B\varphi_j;A\varphi_j\rangle\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\langle B\varphi_j;B\varphi_j\rangle$$

$$\leq \|A\|_2^2 + \sum_{j=1}^{\infty}2\left(Rea\langle A\varphi_j;B\varphi_j\rangle\right) + \|B\|_2^2 = \|A\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}Rea\langle B^*A\varphi_j;\varphi_j\rangle + \|B\|_2^2$$

$$\leq \|A\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}|\langle B^*A\varphi_j;\varphi_j\rangle| + \|B\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 + 2\|A\|_2.\|B\|_2 + \|B\|_2^2 = (\|A\|_2 + \|B\|_2)^2$$

$$\therefore\ \|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$$

Teorema 2.6.16: $S_1(H) \subset S_2(H)$

En efecto: Sea $A \in S_1(H)\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty}S_j(A) < \infty$, además:

$$S_j(A^*A) \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)}.S_j(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}.S_j(A) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty}S_j(A^*A) < \infty$$

Luego: $A^*A \in S_1 \Rightarrow A \in S_2$ ■

Teorema 2.6.17: Sean $A, B \in S_2(H)$ entonces: $AB \in S_1(H) \wedge \|AB\|_1 \leq \|A\|_2.\|B\|_2$

Prueba:

De la desigualdad de Holder para sumatorias

$$\sum_{j=1}^{n} S_j(A).S_j(B) \leq \left[\sum_{j=1}^{n}(S_j(A))^2\right]^{1/2}.\left[\sum_{j=1}^{n}(S_j(B))^2\right]^{1/2}$$

Además:

$$\sum_{j=1}^{n} S_j(AB) \leq \sum_{j=1}^{n} S_j(A).S_j(B)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} S_j(AB) \leq \left[\sum_{j=1}^{n}(S_j(A))^2\right]^{1/2}.\left[\sum_{j=1}^{n}(S_j(B))^2\right]^{1/2} \Rightarrow AB \in S_1 \wedge \|AB\|_1 \leq \|A\|_2.\|B\|_2$$

Teorema 2.6.18:

I. El conjunto $S_2(H)$ es un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(B)$ con la propiedad de aproximación en la norma $\| \ . \ \|_2$

II. $S_2(H)$ es completo.

III. Si "B" es Hilbert – Schmidt si y solo si B^* es Hilbert – Schmidt.

IV. $(S_2; \langle \ ; \ \rangle)$es un espacio de Hilbert donde $\langle A; B\rangle = tr(AB^*)$.

Prueba:

I.

1) $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = S_1(A) \leq \|A\|_2$ lo que verifica la parte 1 de la **Definición 2.5.7**

2) Sean $A, B \in S_2(H)$ entonces de las desigualdades de los números singulares se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}(S_j(AB))^p \leq \sum_{j=1}^{n}(S_j(A))^p(S_j(B))^p$$

Ahora veamos la $\|AB\|_2$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j^2((AB).(AB)^*) = \sum_{j=1}^{n} S_j^2((AB).(B^*A^*)) = \sum_{j=1}^{n} S_j^2((AA^*).(BB^*))$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} S_j^2(AA^*).S_j^2(BB^*) \leq \sum_{j=1}^{n} S_j^2(AA^*)\sum_{j=1}^{n} S_j^2(BB^*)$$

Por tanto:

$$\|AB\|_2{}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} S_j^2((AB).(AB)^*) \leq \sum_{j=1}^{\infty} S_j^2(AA^*)\sum_{j=1}^{\infty} S_j^2(BB^*) = \|A\|_2^2\|B\|_2^2$$

De donde $$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2.\|B\|_2$$

Ahora veamos la propiedad de aproximación:

Sea $\{\varphi_1;\ \varphi_2;\ \varphi_3; \ldots;\ \varphi_n; \ldots\}$ un sistema ortonormal en "H" y consideremos

P_n: Proyección ortogonal del espacio extendido $\mathcal{L}\{\varphi_1;\ \varphi_2;\ \varphi_3; \ldots;\ \varphi_n\}$ y definamos

$$F_n = P_n A$$

Por demostrar que

$$\forall A \in H\ \exists \{F_n\} \subset S_2(H)\ tal\ que\ \|F_n - A\|_2 \to 0$$

Ahora $F_n - A \in S_2 \Rightarrow (F_n - A)(F_n - A)^* \in S_1(H)$

Pero:

$$\begin{aligned}(F_n - A)(F_n - A)^* &= (F_n - A).(F_n^* - A^*) = F_nF_n^* - F_nA^* - AF_n^* + AA^* \\ &= (P_nA)(P_nA)^* - (P_nA)A^* - A(P_nA)^* + AA^* \\ &= P_n(AA^*)P_n^* - P_nAA^* - AA^*P_n + AA^*\end{aligned}$$

Por otro lado, como los P_n son las proyección ortogonal del espacio extendido $\mathcal{L}\{\varphi_1;\ \varphi_2;\ \varphi_3; \ldots;\ \varphi_n\}$ se tiene $P_n\, x \to x\ \ \forall x \in H\ en\ \|\,.\,\|_1$

Finalmente usando el **Teorema 2.6.7** se tiene

$$\|F_n - A\|_2^2 = \|(F_n - A)(F_n - A)^*\|_1 \to 0$$

Por lo tanto

$$F_n \to A\ \ en\ \|\ .\ \|_2$$

Por lo tanto $S_2(H)$ es un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la propiedad de aproximación.

II. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $S_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_m - A_n\|_2 < \varepsilon \qquad \forall m; n > m_0$$

Pero

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = S_1(A) \leq \|A\|_2 \ \Rightarrow\ \|A_m - A_n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A_m - A_n\|_2 < \varepsilon$$

De donde $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(H)$ el cual es completo, entonces:

$$\exists\, A \in \mathcal{L}(H) \text{ tal que } \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0\ cuando\ n \to \infty$$

Además

$$\begin{aligned}\|A_nA_n^* - A_kA_k^*\|_1 &= \|A_nA_n^* - A_kA_n^* + A_kA_n^* - A_kA_k^*\|_1 = \|(A_n - A_k)A_n^* + A_k(A_n^* - A_k^*)\|_1 \\ &\leq \|(A_n - A_k)A_n^*\|_1 + \|A_k(A_n^* - A_k^*)\|_1 \leq \|A_n - A_k\|_2\|A_n^*\|_2 + \|A_k\|_2\|A_n^* - A_k^*\|_2 \\ &= \|A_n - A_k\|_2\|A_n^*\|_2 + \|A_k\|_2\|A_n - A_k\|_2 \to 0\ cuando\ n; k \to \infty\end{aligned}$$

Luego $\{A_nA_n^*\}_{n\geq 1} \subset S_1$(el cual es completo por **Teorema 2.6.3**) entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} A_nA_n^*$ en $S_1(H)$ y se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} A_nA_n^* = AA^*$ con la norma de $\mathcal{L}(H)$ de donde $AA^* \in S_1(H)$ por lo tanto $A \in S_2(H)$.

III. Como $S_j^2(B) = \lambda_j(B^*B) = \lambda_j((B^*B)^*) = \lambda_j(BB^*) = \lambda_j((B^*)^*B^*) = S_j^2((B^*)^*)$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j^2(B^*) = \sum_{j=1}^{\infty} S_j^2(B) < \infty \Rightarrow B^* \in S_2(H)$$

IV. $\langle A;B\rangle = tr(AB^*)$ es un producto interno en $S_2(H)$

- $\langle A;A\rangle = tr(AA^*) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(AA^*) = \sum_{j=1}^{\infty}S_j^2(A) = \|A\|_2^2$

$$\Rightarrow \langle A;A\rangle \geq 0 \;\wedge\; \langle A;A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

- $\langle \alpha A;B\rangle = tr\big((\alpha A)B^*\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\big((\alpha A)B^*\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha\lambda_j(AB^*)$

$$= \alpha\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(AB^*) = \alpha\langle A;B\rangle$$

- Análogamente $\langle A;\alpha B\rangle = \alpha\langle A;B\rangle$

- $\langle A+B;C\rangle = tr\big((A+B)C^*\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(AC^*+BC^*) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(AC^*) + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(BC^*)$

$$= tr(AC^*) + tr(BC^*) = \langle A;C\rangle + \langle B;C\rangle.$$

2.7 Determinante regularizada

A diferencia del algebra de los operadores de clase traza, el funcional Tr definido en el conjunto de los operadores de rango finito no es continua en la norma Hilbert – Schmidt. Veamos un ejemplo:

Sea $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y consideremos $F_n = \sum_{m=1}^{n} n^{-\frac{2}{3}}(\varphi_m \otimes \varphi_m)$.
Luego:

- $\|F_n\|_2^2 = Tr(F_n^* F_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(F_n^* F_n) = \sum_{j=1}^{n} S_j^2(F_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = n^{-\frac{1}{3}}$

  De donde $\|F_n\|_2 = n^{-\frac{1}{6}}$; por tanto $\|F_n\|_2 \to 0$; $n \to \infty$
- $Tr(F_n) = \sum_{m=1}^{n} n^{-\frac{2}{3}}\langle\varphi_m; \varphi_m\rangle = \sum_{m=1}^{n} n^{-\frac{2}{3}} = n^{\frac{1}{3}}$

  De donde $Tr(F_n) \to \infty$; $n \to \infty$
- $\det(I + F_n) = \left(1 + n^{-\frac{2}{3}}\right)^n \to \infty$; $n \to \infty$

Teorema 2.7.1 Sea $A \in S_2(H)$ Definamos $R_A = (I + A)\exp(-A) - I$, entonces:

$$R_A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} A^n$$

Prueba: Sea

$$(R_A)_k = (I + A)\left[I + (-A) + \frac{(-A)^2}{2!} + \frac{(-A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-A)^k}{k!}\right] - I$$

$$\Rightarrow (R_A)_k = I + (-A) + \frac{(-A)^2}{2!} + \frac{(-A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-A)^k}{k!} +$$

$$+A + A(-A) + \frac{A(-A)^2}{2!} + \frac{A(-A)^3}{3!} + \cdots + \frac{A(-A)^k}{k!} - I$$

De donde

$$(R_A)_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} A^n \Rightarrow R_A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} A^n$$

Teorema 2.7.2 Sea $A \in S_2(H)$ entonces $R_A = (I + A)\exp(-A) - I \in S_1(H)$

Prueba: por inducción sobre n

- Si $n = 2$ entonces: $(R_A)_2 = -\frac{A^2}{2} \in S_1(H)$
- Supongamos cierto para $n = k$ y veamos para $n = k + 1$

$$(R_A)_{k+1} = \sum_{n=2}^{k+1} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} A^n$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^{k+2}(k)}{(k+1)!}A^{k+1}}_{Esta\ en\ S_1(H)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{k}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}A^n}_{Esta\ en\ S_1(H)} \in S_1(H)$$

Por tanto $\quad R_A = \lim_{n\to\infty}(R_A)_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}A^n \in S_1(H)$

Definición 2.7.3 Sea $F \in F(H)$, entonces tenemos $I + R_F = (I+F)\exp(-F)$, definamos

$$det_2(I+F) = \det(I+F)\exp(-TrF)$$

Teorema 2.7.3 Sea $A; B \in S_2(H)$ entonces:

- $|det_2(I+A)| \le \exp(\frac{1}{2}\|A\|_2^2)$
- $|det_2(I+A) - det_2(I+B)| \le \|A-B\|_2 exp\left(\frac{1}{2}(\|A\|_2 + \|B\|_2 + 1)^2\right)$

Prueba:

➢ Como $F(H)$ es denso en $S_2(H)$ entonces vamos a probar el resultado para $A \in F(H)$, por el **Teorema 2.6.11 (de Lidskii)**

$$|det_2(I+A)| = |\det(I+A)\exp(-TrA)| = \left(\prod_{k=1}^{N}|1+\lambda_k(A)|\right)\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{N}-\lambda_k(A)\right)\right|$$

$$\le \left(\prod_{k=1}^{N}(1+|\lambda_k(A)|)\right)\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{N}-\lambda_k(A)\right)\right|$$

$$\le \left(\prod_{k=1}^{N}(\exp|\lambda_k(A)|)\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{N}-\lambda_k(A)\right)$$

$$= exp\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k(A)|\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{N}-\lambda_k(A)\right)$$

$$= exp\left(\sum_{k=1}^{N}(|\lambda_k(A)| - \lambda_k(A))\right) \le exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\lambda_j^2(A)\right)$$

$$\le exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}s_j^2(A)\right) \le exp\left(\frac{1}{2}\|A\|_2^2\right)$$

➢ Por el **Teorema 2.5.11**

Consideremos $G: [0;\infty[\to \mathbb{R}$

$G(x) = exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ La cual es continua, monótona no decreciente, de donde:

$$|det_2(I+A) - det_2(I+B)| \le \|A-B\|_2 exp\left(\frac{1}{2}(\|A\|_2 + \|B\|_2 + 1)^2\right)$$

Corolario 2.7.4 Sea $A \in S_2(H)$; $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(H)\ tal\ que\ \|F_n - A\|_2 \to 0$ Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} det_2(I + F_n) = det_2(I + A)$$

Prueba:

$$|det_2(I + F_n) - det_2(I + A)| \le \|F_n - A\|_2 exp\left(\tfrac{1}{2}(\|A\|_2 + \|F_n\|_2 + 1)^2\right)$$

Haciendo $n \to \infty$ se tiene $\lim_{n\to\infty} |det_2(I + F_n) - det_2(I + A)| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} det_2(I + F_n) = det_2(I + A)$$

Parece natural extender continuamente el determinante regularizado $det_2(I + .)$ de $F(B)$ a su clausura con la norma uniforme en $\mathcal{L}(B)$. Pero esto es imposible porque existe $F_n \in B$ tal que $\|F_n\| \to 0$ pero $det_2(I + F_n) \to \infty$

Veamos un ejemplo

Sea B un espacio de Banach con base de Schauder $\{w_n\}_1^\infty$. Sea $\{v_n\}_1^\infty$ el correspondiente sistema biortonormal en el espacio conjugado B'

$$\langle w_j; v_k\rangle = \delta_{jk}\ \ (1 \le j\,;k\ < \infty).$$

Denotemos por $\{F_n\}_1^\infty$ una sucesión de operadores $F_n = \frac{i}{\sqrt[3]{n}} S_n$ donde

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes v_j$$

Es claro que la sucesión $\{\|F_n\|\}_1^\infty$ es acotada y $\|F_n\| \to 0$ sin embargo

$$det_2(I + F_n) = \det(I + F_n)\exp(-TrF_n) = (1 + \frac{i}{\sqrt[3]{n}})^n \exp(-i\sqrt[3]{n^2})$$

$$\Rightarrow |det_2(I + F_n)|^2 = (1 + \frac{i}{\sqrt[3]{n}})^n \to \infty;\ cuando\ n\ \to \infty$$

Ahora tenemos que ver como extender continuamente el determinante $det_2(I + .)$ a ciertas subálgebra sumergidas de $\mathcal{L}(B)$ desde $F(B)$

Sea D un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(B)$ con la propiedad de aproximación, supongamos que el funcional lineal $Tr(.)$es continua en $F_D := F \cap D$ con respecto a la norma $\|\ \ \|_D$, entonces por el **Teorema 2.5.9** los funcionales $Tr(.)\,y\,\det(I + .)$ pueden ser extendidos continuamente a D y por lo tanto el funcional $det_2(I + .) = \det(I + .)\exp(-Tr(.))$ también se puede extender continuamente hacia D.

Sin embargo existen algebras D tal que ambas funciones $Tr(.)\,y\,\det(I + .)$ no admiten extensiones continuas de $F_D\ a\ D$, pero el funcional $det_2(I + .)$ permite admitir extensión continua.

Por ejemplo, Sea H un espacio de Hilbert separable y en $S_2(H)$ consideremos la sucesión de operadores $F_n = \frac{\log n}{n} S_n$ donde $S_n = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes v_j$ y esta sucesión de operadores esta en F_D, tenemos:

$$\|F_n\|_D^2 = \frac{log^2 n}{n} \to 0$$

Pero

$$TrF_n = \log n \to \infty \quad y \quad det(I + F_n) = \left(1 + \frac{logn}{n}\right)^n \to \infty$$

Este ejemplo muestra que $Tr(.)$ y $det(I+.)$ no pueden ser extendido de F_D hacia D

Si, en particular

$$det_2(I + F_n) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{logn}{n}\right)^n \to 1 = det_2 I$$

El siguiente teorema da la condición necesaria y suficiente para la extensión continua de $det_2(I + \ .\ )$ de F_D a D.

Teorema 2.7.5 Sea $D \subset \mathcal{L}(B)$ un subálgebra sumergida con la propiedad de aproximación. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) El funcional $det_2(I + \ .\ ): F_D \to \mathbb{K}$ admite una extensión continua en la norma $\| \ .\ \|_D$ de F_D a D.
b) El funcional $det_2(I + \ .\ ): F_D \to \mathbb{K}$ es uniformemente continua en la norma $\| \ .\ \|_D$ en alguna r – bola $\{G \in F_D \ / \ \|G\|_D \leq r\}$ de F_D
c) El funcional $det_2(I + \ .\ ): F_D \to \mathbb{K}$ satisface la condición de Lipschitz en alguna r – bola $\{G \in F_D \ / \ \|G\|_D \leq r\}$ de F_D
d) El funcional $det_2(I + \ .\ ): F_D \to \mathbb{K}$ es continua con la norma $\| \ .\ \|_D$ en $F = 0$
e) El cuadrado de $Tr(F^2)$es acotada en F_D esto es, existe una constante $c > 0$ tal que $|Tr(F^2)| \leq c\|F\|_D^2$
f) El funcional bilineal $Tr(F_1 F_2)$ definido en $F_D x F_D$ es acotado en la norma $\| \ .\ \|_D$, esto es:
   Existe $\beta > 0$ tal que $|Tr(F_1 F_2)| \leq \beta \|F_1\|_D \|F_2\|_D$ para todo $F_1; \ F_2 \in F_D$

Prueba en [8] Capitulo IX – teorema 2.1.

En particular se sabe que para $D = S_2(H)$ es un algebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la propiedad de aproximación pues $\overline{F(H)}^{\| \cdot \|_2} = D$

Entonces como

$$|Tr(F^2)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2(F)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} S_k^2(F) = \|F\|_2^2$$

Luego por el **Teorema 2.7.5** $det_2(I + F)$ se puede extender continuamente a todo $S_2(H)$ en virtud de la **Definición 2.5.10.**

Definición 2.7.6 Sea $T \in D = S_2(H)$ entonces existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_D$ / $T_n \to T$ en la norma $\| \,.\, \|_2$ luego definimos:

$$det_2(I + T) = \lim_{n\to\infty} det_2(I + T_n)$$

2.8 Ejemplos y caracterización de Operadores Hilbert - Schmidt

Definición 2.8.1 (operador integral)

Consideremos el operador:

$$A: L_2[a;b] \to L_2[a;b]$$
$$f \;\mapsto\; A(f)$$

Definido por:

$$(Af)_{(t)} = \int_a^b k(t;s)f(s)ds$$

Donde: $k \in L_2([a;b]x[a;b])$ esto es: $\int_a^b \int_a^b |k(t;s)|^2 dtds < \infty$

Teorema 2.8.2 El operador "A" es lineal, acotado y compacto.

Prueba:

La linealidad de "A" es obvia, probemos la acotación.

$$\left|(Af)_{(t)}\right| = \left|\int_a^b k(t;s)f(s)ds\right| \leq \int_a^b |k(t;s)||f(s)|ds \leq \left(\int_a^b |k(t;s)|^2 ds\right)^{1/2} . \|f\|_{L_2}$$

Elevando al cuadrado e integrando

$$\int_a^b \left|(Af)_{(t)}\right|^2 dt \leq \|f\|_{L_2}^2 \int_a^b \int_a^b |k(t;s)|^2 dsdt$$

Elevando a la ½

$$\|Af\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} \left(\int_a^b \int_a^b |k(t;s)|^2 dsdt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L_2} \|k\|_{L_2}$$

El operador A es Compacto.

- Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una base ortonormal de $L_2[a;b]$, probemos primero que $\{\phi_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ es una base ortonormal de $L_2([a;b]x[a;b])$ donde $\phi_{ij}(t;s) = \varphi_i(t).\varphi_j(s)$

En efecto:

- Sea $g \in L_2([a;b]x[a;b]) \wedge \langle g;\phi_{ij}\rangle = 0$ probaremos que $g = 0\ c.t.p.$

$$Como\ \langle g;\phi_{ij}\rangle = 0 \Rightarrow \int_a^b \int_a^b g(t;s)\overline{\phi_{ij}(t;s)}dtds = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \int_a^b \overline{\varphi_i(t)}.\overline{\varphi_j(s)}g(t;s)dtds = 0 \Rightarrow \int_a^b \overline{\varphi_j(s)}.\underbrace{\left(\int_a^b \overline{\varphi_i(t)}.g(t;s)dt\right)}_{h(s)}ds = 0$$

Luego:

$$\int_a^b \overline{\varphi_j(s)}.h(s)ds = 0 \Rightarrow \langle h;\varphi_j\rangle = 0 \Rightarrow h \perp \varphi_j\ ; \forall j \in \mathbb{N}$$

Como:

$$h = \sum_k \langle h; \varphi_k \rangle \varphi_k \Rightarrow h = 0\, c.t.p.$$

Luego existe un conjunto Z de medida nula tal que $h(s) = 0;\ \forall s\ \in Z$

Por otro lado

$$\int_a^b g(t;s).\overline{\varphi_j(t)}dt = 0 \Rightarrow \langle g(.\,;s); \varphi_i \rangle = 0 \Rightarrow g(.\,;s) \perp \varphi_i\,;\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Luego: $g(.\,;s) = 0\, c.t.p.\ de\ \ t\ \ \wedge\ \ s \notin Z$

$$Asi:\ \int_a^b \int_a^b |g(t;s)|^2 dtds = 0 \Rightarrow \|g\|_{L_2} = 0 \Rightarrow g = 0\, c.t.p.$$

- $\{\phi_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ es ortonormal

$$\langle \phi_{ij}; \phi_{mn} \rangle = \int_a^b \int_a^b \phi_{ij}(t;s).\overline{\phi_{mn}(s;t)}dtds$$

$$= \int_a^b \int_a^b \varphi_i(t).\varphi_j(s)\overline{\varphi_m(t)}.\overline{\varphi_n(s)}dtds = \langle \varphi_i; \varphi_m \rangle.\langle \varphi_j; \varphi_n \rangle = \delta_{im}.\delta_{jn}$$

Ahora veamos la compacidad de "A"

Como $(\phi_{ij})_{i,j\,\in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L_2([a;b]x[a;b])$

$$\Rightarrow k = \sum_{ij} \langle k; \phi_{ij} \rangle \phi_{ij}$$

Luego definimos:

$$k_n = \sum_{ij}^{n} \langle k; \phi_{ij} \rangle \phi_{ij}\ \ de\ donde\ \|k - k_n\|_{L_2} \to 0$$

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n: L_2([a;b]) \to L_2([a;b])$$

$$(A_n f)_{(t)} = \int_a^b k_n(t;s) f(s)ds$$

$$\Rightarrow (A_n f)_{(t)} = \sum_{ij}^{n} \langle k; \phi_{ij} \rangle \varphi_i(t) \int_a^b \varphi_j(s) f(s)ds$$

Luego:

$$Im\,(A_n) \subset \mathcal{L}\{\varphi_1; \varphi_2; \ldots \varphi_n\} \Rightarrow ran(A_n) < \infty$$

Finalmente $\|A - A_n\| \leq \|k - k_n\| \to 0\ cuando\ n \to \infty\ entonces\ A_n \to A\ cuando\ n \to \infty$

Por tanto "A" es compacto.

■

- **Observación:** Supongamos que $\overline{k(t;s)} = k(s;t)$ $c.\ t.\ p.$ entonces:

$$\langle Af; g\rangle = \int_a^b (Af)_{(t)}\overline{g(t)}dt = \int_a^b \left[\int_a^b k(t;s)f(s)ds\right]\overline{g(t)}\,dt$$

Por el teorema de Fubini

$$= \int_a^b f(s)\left[\int_a^b k(t;s)\overline{g(t)}dt\right]ds = \int_a^b \int_a^b f(s)\left[\int_a^b \overline{\overline{k(t;s)}g(t)}dt\right]ds$$

$$= \int_a^b f(s)\overline{\left[\int_a^b k(s;t)g(t)dt\right]}ds = \int_a^b f(s)\,\overline{(Ag)_{(s)}}ds = \langle f; Ag\rangle$$

$$\therefore\ A\ es\ autoadjunto$$

Observaciones:

Tenemos definido el operador

$$\begin{aligned} A: L_2[a;b] &\to L_2[a;b] \\ f &\mapsto A(f) \end{aligned}$$

Definido por:

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t;s)f(s)ds$$

Donde: $k \in L_2([a;b]x[a;b])$ esto es: $\int_a^b \int_a^b |k(t;s)|^2 dtds < \infty$

El cual es lineal, acotado y compacto. Además si $\overline{k(t;s)} = k(t;s)$ $c.\ t.\ p.$ Entonces "A" es autoadjunto, y por el teorema de descomposición espectral

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f; \varphi_j\rangle\, \varphi_j$$

Esta convergencia es en C.T.P.

Teorema 2.8.3 (De Hilbert - Schmidt)

Sea k Lebesgue medible en $[a;b]$ tal que

1. $\overline{k(t;s)} = k(s;t)$
2. $\sup_t \int_a^b |k(t;s)|^2 ds < \infty$

Entonces:

$$\forall f \in L_2([a;b])\ se\ tiene\ (Af)_{(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f; \varphi_j\rangle\, \varphi_j(t)\ c.t.p.$$

Y la serie converge absolutamente y uniformemente en $[a;b]$

Prueba:

$$k \in L_2([a;b]x[a;b]) \iff \|k\|_2 < \infty$$

Sea $n > m$

$$\Rightarrow \sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \langle f;\varphi_j \rangle \varphi_j(t)| \leq \left(\sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \varphi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^{n} |\langle f;\varphi_j \rangle| \right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots (\#)$$

Como

$$(Af)_{(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f;\varphi_j \rangle \, \varphi_j(t) \Rightarrow (A\varphi_i)_{(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \varphi_i;\varphi_j \rangle \, \varphi_j(t) = \lambda_i \varphi_i(t) \ldots\ldots (*)$$

También

$$(Af)_{(t)} = \int_a^b k(t;s) f(s) ds \, ; \ denotando \ k(t;s) = k_t(s)$$

Se tiene

$$(A\varphi_i)_{(t)} = \int_a^b k_t(s) \varphi_j(t) ds = \langle k_t; \overline{\varphi_j} \rangle \ldots\ldots\ldots (*)(*)$$

Luego de $(*)$ y $(*)(*)$ también la identidad de **Parseval:** $\sum_{j=m}^{n} \left| \langle k_t; \overline{\varphi_j} \rangle \right|^2 = \|k_t\|_2^2$

$$\lambda_i \varphi_i(t) = \langle k_t; \overline{\varphi_j} \rangle \Rightarrow \sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \varphi_j(t)|^2 = \sum_{j=m}^{n} \left| \langle k_t; \overline{\varphi_j} \rangle \right|^2 = \|k_t\|_2^2$$

$$= \int_a^b |k_t(s)|^2 ds = \int_a^b |k(t;s)|^2 ds \leq c^2$$

Por otro lado

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f;\varphi_j \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Dado $\varepsilon > 0$; $\exists \, N > 0$ tal que

$$\sum_{j=m}^{n} |\langle f;\varphi_j \rangle|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{c} \right)^2 \ \forall n > m \geq N$$

Finalmente en $(\#)$: Dado $\varepsilon > 0$; $\exists \, N > 0$ tal que

$$\sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \langle f;\varphi_j \rangle \varphi_j(t)| \leq \left(\sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \varphi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^{n} |\langle f;\varphi_j \rangle| \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon; \ \forall n > m \geq N$$

■

Teorema 2.8.4: Sea $A: L_2[a;b] \to L_2[a;b]$ el operador integral y $K \in L_2([a;b]x[a;b])$ tal que $\overline{k(t;s)} = k(s;t)$ en c. t. p. Entonces:

$$\text{"A"} \ es \ un \ operdor \ Hilbert - Schmidt \ \wedge \int_a^b \int_a^b |K(t;s)|^2 dtds = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^2(A)$$

Prueba: sea (φ_i) base de $L_2[a;b]$ luego (ϕ_{ij}) es una base de $L_2([a;b]x[a;b])$ donde

$$\phi_{ij}(t;s) = \varphi_i(t)\overline{\varphi_j(s)} \Rightarrow k = \sum_{i,j} \langle k;\phi_{ij}\rangle\phi_{ij}$$

$$donde: \langle k;\phi_{ij}\rangle = \int_a^b\int_a^b k(t;s)\overline{\phi_{ij}(t;s)}\ dt\ ds$$

$$= \int_a^b\int_a^b k(t;s)\overline{\varphi_i(t)}\varphi_j(s)\ dtds = \int_a^b \overline{\varphi_i(t)}\underbrace{\left(\int_a^b k(t;s)\varphi_j(s)ds\right)}_{(A\varphi_j(t))}dt$$

$$= \int_a^b (A\varphi_j(t))\,\overline{\varphi_i(t)}dt = \langle A\varphi_i;\varphi_i\rangle$$

Así:

$$\int_a^b\int_a^b |k(t;s)|^2dt\ ds = \underbrace{\|K\|_{L_2}^2 = \sum_{i,j}\left|\langle k;\phi_{ij}\rangle\right|^2}_{identidad\ de\ Parsebal} = \sum_{i,j}|\langle A\varphi_i;\varphi_i\rangle|^2$$

Por el **Teorema 2.6.13** se tiene que la serie $\sum_{i,j}|\langle A\varphi_i;\varphi_i\rangle|^2$ es convergente y por tanto A es un operador Hilbert – Schmitd, además

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_i^2(A) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_i^2(A) = \sum_{i,j}|\langle A\varphi_i;\varphi_i\rangle|^2 = \|K\|_{L_2}^2$$

De donde: $\|A\|_2 = \|K\|_{L_2}^2$

Teorema 2.8.5: Sea $(M;\mu)$ un espacio de medida y $H = L_2(M;\mu)$, si existe una función $K \in L_2(MxM; d\mu\ x\ d\mu)$ donde $d\mu\ x\ d\mu$ es la medida producto tal que

$$A: L_2(M;\mu) \rightarrow L_2(M;\mu)$$
$$f \mapsto Af$$

Donde:

$$(Af)(x) = \int K(x;y)f(y)d\mu(y)$$

Entonces: $A \in \mathcal{L}(H)$ es Hilbert – Schmitd si $\|A\|_2 = \iint |K((x;y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) < \infty$

Prueba:

I. El operador A es lineal y acotado

La linealidad de "A" es obvia, probemos la acotación.

$$|(Af)_{(x)}| = \left|\int k(x;y)f(y)d\mu(y)\right| \leq \int |k(x;y)||f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq (\textstyle\int |k(t;s)|^2 d\mu(y))^{1/2}(\int |f(y)|^2 d\mu(y))^{1/2} \quad \text{Por Cauchy - Schwartz}$$

$$= \left(\int |k(t;s)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} . \|f\|_{L^2}$$

Elevando al cuadrado e integrando

$$\int |(Af)_{(x)}|^2 d\mu(x) \leq \|f\|_{L^2}^2 \iint |k(x;y)|^2 d\mu(y)d\mu(x) = \|f\|_{L^2}^2 . \|k\|_{L^2}^2$$

Elevando a la ½

$$\|Af\| \leq \|f\|_{L^2}\|k\|_{L^2}$$

Por tanto $\|A\| \leq \|k\|_{L^2}$, luego "A" es acotado.

II. El operador A es de rango finito

- Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una base ortonormal de $L_2(M;\mu)$, probemos primero que $\{\phi_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ es una base ortonormal de $L_2(MxM; d\mu\, x\, d\mu)$ donde $\phi_{ij}(t;s) = \varphi_i(t).\varphi_j(s)$

En efecto:

Sea $g \in L_2(MxM; d\mu\, x\, d\mu) \wedge \langle g;\phi_{ij}\rangle = 0$ probaremos que $g = 0\; c.t.p.$

Como

$$\langle g;\phi_{ij}\rangle = 0 \Rightarrow \iint g(x;y)\overline{\phi_{ij}(x;y)}d\mu(x)d\mu(y) = 0$$

$$\Rightarrow \iint \overline{\varphi_i(x)}.\overline{\varphi_j(y)}g(x;y)d\mu(x)d\mu(y) = 0$$

$$\Rightarrow \int \overline{\varphi_j(x)}.\underbrace{\left(\int \overline{\varphi_i(y)}.g(x;y)d\mu(x)\right)}_{h(y)}d\mu(y) = 0$$

Luego:

$$\int \overline{\varphi_j(y)}.h(y)d\mu(y) = 0 \Rightarrow \langle h;\varphi_j\rangle = 0 \Rightarrow h \perp \varphi_j\;;\; \forall j \in \mathbb{N}$$

Como:

$$h = \sum_k \langle h;\varphi_k\rangle\varphi_k \Rightarrow h = 0\; c.t.p.$$

Luego existe un conjunto Z de medida nula tal que $h(y) = 0;\ \forall\, y\ \in Z$

Por otro lado

$$\int g(x;y).\overline{\varphi_j(x)}d\mu(x) = 0 \Rightarrow \langle g(.\,;y);\varphi_i\rangle = 0 \Rightarrow g(.\,;s) \perp \varphi_i\;;\; \forall i \in \mathbb{N}$$

Luego: $g(x;y) = 0\; c.t.p.\; de\;\; x \;\;\wedge\;\; y \notin Z$

Así:

$$\iint |g(x;y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) = 0 \Rightarrow \|g\|_{L_2}^2 = 0 \Rightarrow g = 0\; c.t.p.$$

- $\{\phi_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ es ortonormal

$$\langle\phi_{ij};\phi_{mn}\rangle = \iint \phi_{ij}(x;y).\overline{\phi_{mn}(x;y)}d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \iint \varphi_i(x).\varphi_j(y)\overline{\varphi_m(x)}.\overline{\varphi_n(y)}d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \left(\int \varphi_i(x).\overline{\varphi_m(x)}d\mu(x)\right)\left(\int \varphi_j(y).\overline{\varphi_n(y)}d\mu(y)\right) = \langle\varphi_i;\varphi_m\rangle.\langle\varphi_j;\varphi_n\rangle$$

$$= \delta_{im}.\delta_{jn}$$

Ahora veamos la compacidad de "A"

Como $(\phi_{ij})_{i,j\,\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L_2(MxM; d\mu\ x\ d\mu)$

$$\Rightarrow k = \sum_{ij}\langle k;\phi_{ij}\rangle\phi_{ij}$$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión:

$$k_n = \sum_{ij}^{n}\langle k;\phi_{ij}\rangle\phi_{ij}\ \ de\ donde\ \|k - k_n\|_{L^2} \to 0$$

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n: L_2(M;d\mu) \to L_2(M;d\mu)$$

$$(A_n f)_{(x)} = \int k_n(x;y)f(y)d\mu(y)$$

$$\Rightarrow (A_n f)_{(x)} = \int \sum_{ij}^{n}\langle k;\phi_{ij}\rangle\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)f(y)d\mu(y)$$

$$= \left(\sum_{ij}^{n}\langle k;\phi_{ij}\rangle\varphi_i(x)\right)\underbrace{\left(\int \varphi_j(y)f(y)d\mu(y)\right)}_{h(y)}$$

$$= \sum_{ij}^{n}\langle k;\phi_{ij}\rangle h(y)\varphi_i(x) \Rightarrow A_n f = \sum_{ij}^{n}\langle k;\phi_{ij}\rangle h(y)\varphi_i$$

Luego: $\quad Im\,(A_n) \subset \mathcal{L}\{\varphi_1;\varphi_2;\ldots\varphi_n\} \Rightarrow ran(A_n) < \infty$

Con lo cual A_n es de rango finito $\forall\, n\ \in \mathbb{N}$

Finalmente $\|A - A_n\| \leq \|k - k_n\|_{L^2} \to 0\ cuando\ n \to \infty\ entonces$

$A_n \to A\ cuando\ n \to \infty$ Por tanto "A" es compacto

Finalmente:

A^*A Es compacto (por ser ideal Bilátero)

$$Tr(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle A^*A\varphi_n;\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle A\varphi_n;A\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\|A\varphi_n\|_{L^2}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle A\varphi_n;\varphi_m\rangle|^2 \quad por\ la\ identidad\ de\ Parsebal$$

Ahora:

$$\langle A\varphi_n;\varphi_m\rangle = \int (A\varphi_n)(x)\overline{\varphi_m(x)}d\mu(x) = \iint k(x;y)\varphi_n(y)\overline{\varphi_m(x)}d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \iint k(x;y)\overline{\phi_{mn}(x;y)}d\mu(x)d\mu(y) = \langle k;\phi_{mn}\rangle$$

Luego:

$$Tr(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle k;\phi_{mn}\rangle|^2 = \|k\|_{L^2} \quad \Rightarrow \|A\|_2 = \|k\|_{L_2}$$

Teorema 2.8.6: Sea $H = L_2(M;\mu)$ si $A \in \mathcal{L}(H)$ es Hilbert – Schmidt, entonces existe una función $k \in L_2(MxM; d\mu\, x\, d\mu)$ tal que $(Af)(x) = \int k(x;y)f(y)d\mu(y)\ \forall\ f \in L_2(M;\ \mu)$ Además:

$$\|A\|_2^2 = \iint |k(x:y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

Prueba:

Sea $H = L_2(M;\mu)$ y consideremos $A \in S_2(H)$, por el teorema de descomposición espectral

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(A)\langle f; f_n\rangle g_n$$

Para algunos sistemas ortogonales $\{f_n\}$; $\{g_n\}$ en $L_2(M;\mu)$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(A) < \infty$

Como

$$\left\|S_n(A)\overline{f_n(y)}g_n(x)\right\|_{L_2}^2 = \iint \left|S_n(A)\overline{f_n(y)}g_n(x)\right|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \left(S_n(A)\right)^2 \iint \left|\overline{f_n(y)}g_n(x)\right|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \left(S_n(A)\right)^2 \underbrace{\|\phi_{mn}\|_{L_2}^2}_{1} = \left(S_n(A)\right)^2$$

Luego la serie

$$\left(\sum_{n=1}^{N} S_n(A)\overline{f_n(y)}g_n(x)\right)_{N>1} \quad es\ convergente\ en\ L_2(M;\mu)$$

Denotemos por

$$K(x;y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} S_n(A)\overline{f_n(y)}g_n(x)$$

Ahora

$$\|K\|_{L_2} = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} S_n(A)\overline{f_n(y)}g_n(x)\right\|_{L_2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\iint \sum_{n=1}^{N} \left(S_n(A)\right)^2 \left|\overline{f_n(y)}g_n(x)\right|^2 d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(S_n(A)\right)^2 \iint \left|\overline{f_n(y)}g_n(x)\right|^2 d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(S_n(A))^2 \|\phi_{mn}\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(S_n(A))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(S_n(A))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2$$

Por último definamos:

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(A)\langle f; f_n\rangle g_n$$

Ahora

$$\int K(x;y)f(y)d\mu(y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} S_n(A)g_n(x)\int \overline{f_n(y)}f(y)d\mu(y)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} S_n(A)g_n(x)\langle f; f_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(A)\langle f; f_n\rangle g_n(x) = (Af)(x)$$

Por tanto

$$(Af)(x) = \int K(x;y)f(y)d\mu(y)$$

Caracterización de operadores Hilbert - Schmidt

Definición 2.8.7: Sea E un espacio de Banach, un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice $p-$ sumable si existe $c > 0$ tal que para toda sucesión finita $(x_i)_{i=1}^{n} \subset E$ se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \ldots\ldots\ldots..(*)$$

Definición 2.8.8: al menor valor de la constante $c > 0$ que cumple con $(*)$ para cualquier sucesión finita $(x_i)_{i=1}^{n} \subset E$ se denota por $\pi_p(T)$

Teorema 2.8.9: Sea $\pi_p(E) = \{T \in \mathcal{L}(E)/\, T\ es\ p - sumable\}$ entonces:

a) $\pi_p(E)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E)$

b) $\| \quad \|_p: \pi_p(E) \to \mathbb{R}_0^+$

$T \longmapsto \|T\|_p = \pi_p(T)$ Es una norma

Prueba (a)

- Sea $T \in \pi_p(E) \implies \exists\, c > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Para $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|\alpha T x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(\sum_{j=1}^{n}\|T x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\alpha| c\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \alpha T \in \pi_p(E)$$

- Sea $T, h \in \pi_p(E)$, entonces existen las constantes c_1 y c_2 positivas tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|T x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|h x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Para cualquier sucesión finita $(x_i)_{i=1}^{n} \subset E$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|(T+h)x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\|T x_i + h x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}(\|T x_i\| + \|h x_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}(\|T x_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}(\|h x_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c_1\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} + c_2\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= (c_1 + c_2)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Por tanto $(T + h) \in \pi_p(E)$

Prueba (b)

- Dado $T \in \pi_p(E)$ tal que $\pi_p(T) = 0 \wedge x \in E$, entonces para la sucesión $x_i = x$ se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{1}\|T x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 0 \Rightarrow \|T x\| = 0 \Rightarrow T x = 0 \quad \forall x \in E$$

De donde $T = 0$

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\lambda \neq 0$

$$|\lambda|\left(\sum_{j=1}^{n}\|T x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\|\lambda T x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(\lambda T)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\pi_p(\lambda T)}{|\lambda|}\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

De donde

$$\pi_p(T)\leq\frac{\pi_p(\lambda T)}{|\lambda|}\Rightarrow\ |\lambda|\pi_p(T)\leq\pi_p(\lambda T)$$

Por otro lado:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|T(\lambda x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\pi_p(T)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(\lambda x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\pi_p(T)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow\pi_p(\lambda T)\leq|\lambda|\pi_p(T)$$

Por lo tanto:

$$\bar{\pi}_p(\lambda T)=|\lambda|\bar{\pi}_p(T)$$

- Desigualdad triangular

  Sea $T\,,h\ \in\pi_p(E)$, entonces:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\pi_p(T)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|hx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\pi_p(h)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

  Para cualquier sucesión finita $(x_i)_{i=1}^{n}\subset E$, luego

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|(T+h)x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|Tx_i+hx_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{j=1}^{n}(\|Tx_i\|+\|hx_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{n}(\|Tx_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}(\|hx_i\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\pi_p(T)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}+\pi_p(h)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\pi_p(T)+\pi_p(T)\right)\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

  Por tanto $\pi_p(T+h)\leq\pi_p(T)+\pi_p(T)$

Teorema 2.8.10: Sea H un espacio de Hilbert separable, entonces se tiene $\pi_2(H) = S_2(H)$ Con igualdad de normas

Prueba:

- $S_2(H) \subset \pi_2(H)$

En efecto: Sea $T \in S_2(H)$ y consideremos un par de sistemas ortonormales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en

$$\Rightarrow Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T) < \infty$$

Consideremos una sucesión finita de vectores $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ y consideremos

$$T_m v_i = \sum_{n=1}^{m} S_n(T)\langle v_i; x_n\rangle y_n \Rightarrow \|T_m v_i\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{m} S_n(T)\langle v_i; x_n\rangle y_n\right\|^2$$

$$= \langle \sum_{n=1}^{m} S_n(T)\langle v_i; x_n\rangle y_n ; \sum_{n=1}^{m} S_n(T)\langle v_i; x_n\rangle y_n\rangle = \sum_{n=1}^{m} S_n^2(T)|\langle v_i; x_n\rangle|^2 \quad para\ cada\ \ i = 1; k$$

Ahora

$$\sum_{i=1}^{k}\|T_m v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{n=1}^{m} S_n^2(T)|\langle v_i; x_n\rangle|^2\right) = \sum_{n=1}^{m}\left[S_n^2(T)\left(\sum_{i=1}^{k}|\langle v_i; x_n\rangle|^2\right)\right]$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n: H \rightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = \langle x; x_n\rangle$$

Luego: $|f_n(x)| = |\langle x; x_n\rangle| \leq \|x\|\|x_n\| \Rightarrow |f_n(x)| \leq \|x\|\|x_n\|$ por tanto $\|f\| \leq 1$

Ahora

$$\sum_{i=1}^{k}|\langle v_i; x_n\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k}|f_n(v_i)|^2 \leq \sup_{\substack{f\in H^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{i=1}^{k}|f(v_i)|^2\right)$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{k}\|T_m v_i\|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{m} S_n^2(T)\right)\left(\sup_{\substack{f\in H^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{i=1}^{k}|f(v_i)|^2\right)\right)$$

Haciendo $m \rightarrow \infty$ y elevando a la ½ tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\|Tv_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} S_n^2(T)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{\substack{f\in H^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{i=1}^{k}|f(v_i)|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \|T\|_2\left(\sup_{\substack{f\in H^* \\ \|f\|=1}}\left(\sum_{i=1}^{k}|f(v_i)|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

De donde

$$T \in \pi_2(H) \ \wedge \ \pi_2(T) \leq \|T\|_2$$

- $\pi_2(H) \subset S_2(H)$

Sea $T \in \pi_2(H)$ y sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} |Te_j|^2 \leq (\pi_2(T))^{\bar{2}} \operatorname*{Sup}_{\substack{f\in H^* \\ \|f\|=1}} \left(\sum_{j=1}^{k} |f(e_j)|^2 \right)$$

Por el **Teorema 2.2.24:**

$$f: H \to \mathbb{K} \text{ para cada } y \in \mathrm{H} \text{ (fijo)}$$
$$x \mapsto f(x) = \langle x; y \rangle; \ \|f\| = \|y\| \leq 1$$

De donde

$$\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |\langle e_j; y \rangle|^2 \leq \|y\|^2}_{\text{desigualdad de Bessl}} = \|f\|^2$$

Luego:

$$\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2 \leq (\pi_2(T))^2$$

Finalmente $T \in S_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*Ae_j; e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j; Ae_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2$$

Por tanto:

$$\|A\|_2 = \pi_2(T)$$

Ejemplo 2.8.11: Sea $A: L_2([0;1]) \to L_2([0;1])$

$$f \mapsto A(f)$$

Tal que $(Af)_{(x)} = \int_0^1 (1 - 3xt) f_{(x)} dt$

Definamos que $k: [0;1]x[0;1] \to \mathbb{R}$ donde $k(s;t) = 1 - 3st$

Afirmación 1: $k \in L_2([0;1]x[0;1])$

En efecto:

$$\|k\|_{L_2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 (1 - 3st)^2 ds dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \|K\|_{L_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Además $\overline{k(s;t)} = k(t;s)$ por tanto A es un operador compacto, autoadjunto

Por otro lado

$$\operatorname*{Sup}_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 |k(s;t)|^2 ds = \operatorname*{Sup}_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 (1 - 3st)^2 ds = \operatorname*{Sup}_{0\leq t\leq 1} \left\{ 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \right\}$$

Luego:

$$\operatorname*{Sup}_{0\leq t\leq 1} \left\{ 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \right\} \leq \frac{13}{4}$$

Por tanto A es un operador Hilbert – Schmidt, además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^2(A) = \|k\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2}$$

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPOTESIS

3.1. Variables de la investigación

Nuestras variables a estudiar son una traza, denotada por Tr y las normas singulares.

3.2. Operacionalización de las variables

Variables	Definición conceptual	Dimensiones	Indicadores
Una traza Tr	Un funcional lineal Tr sobre un ideal de operadores compactos K es llamado una traza si $Tr(AB) = Tr(BA)$, $\forall A \in \mathcal{L}(H), \forall B \in K$, con "$H$" un espacio de Hilbert.	• Espectral • Singular	• Si es igual a la suma de auto valores del operador. • $Tr(F) = 0$, $\forall F$ de rango finito.
$S_n(T)$	$S_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$	• Casi nula si $S_j = 0$, $\forall j > N$, para algún $N \in \mathbb{N}$ • $\sum_{n=1}^{\infty} S_n(T^*T)$	• Operadores de rango finito. • "T" es Hilbert - Schmitd.

3.3 Hipótesis general e hipótesis específica

3.3.1. HIPÓTESIS GENERAL

Si es posible caracterizar a los operadores Hilbert Schmidt

Si es posible definir un determinante sobre $S_2(H)$.

3.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICA

Es posible y es útil los métodos del análisis funcional para definir una traza y determinante en clase de operadores Hilbert – Schmidt.

CAP'ITULO IV

METODOLOGÍA

4.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

La investigación es de tipo científico–teórico y la metodología usada es de tipo inductivo–deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación presentará la siguiente estructura:

Primero

Empezamos definiendo los operadores lineales acotados.

Segundo

El espacio de los operadores Hilbert - Schmitd será denotado por $S_2(H)$, se probó que $S_2(H)$ es un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la propiedad de aproximación.

Tercero

Definiremos un determinante sobre el espacio de los operadores Hilbert - Schmitd $(S_2(H))$ con ciertas condiciones para la extensión continúa de Tr y det, para esto necesitaremos analizar la forma explícita de la traza y el determinante de un operador de rango finito según [4].

Cuarto

Por último, Daremos condiciones al operador integral para que pertenezca a esta esta clase de operadores.

4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathcal{L}(E,F)$ con E,F espacios de Banach.

4.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

4.5 PROCEDIMIENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

Ninguno

CAPÍTULO V

Resultados

1) El teorema de representación espectral para operadores compactos autoadjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal de vectores y sus autovalores correspondientes forman una sucesión convergente a cero (si es infinita).

2) $S_2(H)$ es un subalgebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la propiedad de aproximación y por el teorema 2.7.5, es posible extender continuamente $det_2(I+.)$ a los operadores Hilbert – Schmidt desde el espacio de operadores de rango finito.

3) El operador integral es lineal, acotado y compacto. Además, si $\overline{k(t;s)} = k(s;t)\ c.\ t.\ p$ entonces el operador es auto adjunto y se puede realizar su representación espectral.

4) Cuando la norma en $L_2([a,b]x[axb])$ del núcleo del operador integral es finita entonces la convergencia de la representación espectral es absoluta y uniforme.

5) Un operador integral sobre $L_2([a;b])$ es un operador Hilbert - Schmidt si su núcleo $K \in L_2([a;b]x[a;b])$ tal que $\overline{\overline{k(t;s)}} = k(s;t)$ en c.t.p.

6) La clase de operadores Hilbert – Schmidt se pueden caracterizar mediante la clase de operadores p - sumables según el teorema 2.8.10.

CAPÍTULO VI
Discusiones

1) Si bien es cierto hemos podido extender de forma continua $det_2(I+.)$ a la clase de operadores Hilbert – Schmidt, sin embargo no hemos calculado el determinante para esta clase de operadores. El cálculo del determinante de esta clase de operadores en el contexto de operadores integrales es el determinante de Hilbert - Carleman.

2) En el presente trabajo hemos dado condiciones adecuadas al operador integral para que pertenezca a la clase de operadores Hilbert – Schmidt sin embargo también al operador integral se le puede dar condiciones para que sea un operador de clase traza (Teorema de Mercer).

3) Según el resultado obtenido, notamos que el teorema de descomposición espectral de Hilbert Schmitd, para operadores compactos, aplicado al operador integral garantiza la convergencia en casi todo punto de la serie (en su representación espectral) pero no garantiza la convergencia uniforme. Por ello nos vemos en la necesidad de imponer condiciones adicionales al núcleo del operador integral para que la representación Hilbert- Schmidt garantice la convergencia absoluta y uniforme.

4) Para la demostración de la compacidad del operador integral tuvimos que construir un sistema ortonormal para $L_2([a;b]x[a;b])$ el cual se hizo de forma natural considerando un sistema ortonormal para $L_2([a;b])$

5) En el presente trabajo solo hemos mostrado una caracterización de la clase de operadores Hilbert – Schmidt pero no garantizamos que sea la única caracterización.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

1) Con ayuda de la representación Hilbert-Schmidt de un operador compacto puede definir diferentes clases de operadores entre las cuales resaltan los operadores de clase traza y la nuestra.

2) $det_2(I+.)$ no define un determinante en $\mathcal{L}(B)$, pero se puede extender a ciertas algebras sumergidas con la propiedad de aproximación desde $F(B)$.

3) El teorema de Hilbert – Schmidt es una herramienta útil para identificar si un operador integral pertenece a la clase de operadores Hilbert-Schmidt; en el contexto de operadores de clase traza el teorema de Mercer juega un papel importante.

4) $S_1(H) \subset S_2(H)$ y el contenido es estricto, ya que basta considerar el operador

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n \otimes x_n$$

Donde (x_n) es una base ortonormal de H.

CAPÍTULO VIII

Recomendaciones

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo fue éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación y en la teoría de trazas y determinantes.

2) El libro más completo que trata la teoría de trazas y determinantes es Traces and determinats of linear operators de Gohberg, Goldberg y Krupnik (véase [8]), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo.

3) Es importante mencionar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual, es decir, extensiones de la traza sobre la clase de operadores de clase traza; tales funcionales reciben el nombre de trazas singulares. Su existencia sobre un ideal de operadores es un trabajo no trivial, el interesado en su lectura puede ver [1], [3], [5] y sus aplicaciones en [4].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]. A. ALBERIO, D. GUIDO, A PONOSOV, AND S. SCARLATTI, **Singular traces and compact operators, J. Funct.Anal.** 137,281-302(1996)

[2]. ERWIN KREYSZIG, **Introductory functional analysis with applications,** Copyright, New York 1978.

[3]. J. DIXMIER, **Existence de traces non normales,** C.R. Acad.Sci. Paris sér. A 262,1107-1108(1996).

[4]. A.L. CAREY AND F.A. SUKOCHEV, **Dixmier traces and some** applications **to non-conmutative geometry,** Russ.Math. Surv.61,1039-1099(2006)

[5]. PIETSCH, **A. Dixmier traces of operators on Banach and Hilbert spaces.** Math.Nachr.285,1999-2028(2012).

[6]. PIETSCH, A.: **traces on operator ideals and related linear forms on sequence ideals (part.I) To appear in Indag.Math.**

[7]. PIETSCH, A.: **History of Banach Space and linear Operators.** Birkhauser, Boston(2007).

[8]. GOHBERG, S. GOLDBERG AND N. KRUPNIK, **Traces and determinants of linear operators, OperatorTheory: Advances and Applications** 116, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[9]. S. LORD, F. SUKOCHEV, D. ZANIN, **Singular traces: Theory and applications,** de Gruyter Studies in Mathematics, 46, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.

[10]. PIETSCH, A: **Eigenvalues and s-numbers.** Cambridge University Press, 1987.

[11]. LAX, P.D., FUNCTIONAL ANALYSIS, **Wiley-Interscience, New York, 2002.**

[12]. RUDIN, W., **Functional Analysis,** McGraw-Hill, New York, 1973.

[13]. ISRAEL GOHBERG, SEYMOUR GOLDBERG, MARINUS A. KAASHOEK. **Basic Classes of Linear Operators;** Birkhäuser; 2003.

[14]. ISRAEL GOHBERG, SEYMOUR GOLDBERG. **Basic Operator Theory;** Birkhäuser; 1981.

[15]. SEYMOUR GOLDBERG; **Unbounded Linear Lperators Teoría y Aplicaciones;** McGraw – Hill book company; 1966.

[16]. J. R. RETHERFORT. **Hilbert Space: Compact Operator and the Trace Theorem.** Cambrigdge University Press. 1993.

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
En lo que sigue del trabajo, H denotara un espacio de Hilbert. Se sabe que si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ es un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $S_1(T) \geq S_2(T) \geq \cdots \geq S_n(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $de\ H_1\ y\ \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $de\ H$ tal que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(T)(x; \varphi_n)\phi_n$ (teorema de representación espectral Hilbert -Schmidt) Donde los $\{S_n(T)\}_{n\geq 1}$ son llamados números singulares y $\lim_{n\to\infty} S_n(T) = 0$. Con estos números singulares se define y denota el espacio de los operadores de clase traza como: $S_1(H) = \left\{ \begin{matrix} A \in \mathcal{L}(H), compacto\ y \\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n(A) < \infty \end{matrix} \right\}$ Luego se definen los operadores Hilbert – Schmidt como: $S_2(H) = \{A \in K(H)\ /\ A^*A \in S_1\}$ Lo natural es estudiar como caracterizar esta clase de operadores, definir y extender continuamente la traza y el determinante de los operadores de rango finito a esta clase de operadores, también estudiar el operador integral en el contexto de los operadores Hilbert - Schmitd. **Formulación del problema** - ¿Será posible caracterizar a la clase de operadores **Hilbert – Schmitd?** ¿Será posible definir una traza y determinante sobre esta clase de operadores? ¿Qué condiciones hay que imponer al operador integral para que pertenezca a esta clase de operadores?	**Objetivos generales** Caracterizar a los operadores **Hilbert – Schmitd** Definir una traza y determinante sobre esta clase de operadores. Imponer condiciones al operador integral para que pertenezca a esta clase de operadores. **Objetivos específicos** Familiarizarse con los métodos del análisis funcional que se usaran para definir una traza y determinante para esta clase de operadores. Mostrar la importancia del teorema de descomposición espectral para operadores compactos autoadjuntos.	**Hipótesis general** Si es posible caracterizar a los operadores Hilbert Schmidt. Si es posible definir una traza y un determinante sobre $S_2(H)$. **Hipótesis específica** Es posible y es útil los métodos del análisis funcional para definir una traza y determinante en clase de operadores Hilbert–Schmidt.	**Tipo de investigación** La investigación es de tipo científico – teórico y la metodología usada es de tipo inductivo–deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. **Diseño de la investigación** El presente trabajo de investigación presentará la siguiente estructura: **Primero** Empezamos definiendo los operadores lineales acotados. **Segundo** El espacio de los operadores Hilbert - Schmitd será denotado por $S_2(H)$, se probó que $S_2(H)$ es un subálgebra sumergida de $\mathcal{L}(H)$ con la propiedad de aproximación. **Tercero** Definiremos una traza continua y determinante sobre el espacio de los operadores Hilbert - Schmitd (S_2) con ciertas condiciones para la extensión continúa de Tr y det, para esto necesitaremos analizar la forma explícita de la traza y el determinante de un operador de rango finito. **Cuarto** Por último, Daremos condiciones al operador integral para que pertenezca a esta esta clase de operadores.	Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de los espacios de Banach y espacios de Hilbert.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo