UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"GRUPOS DE COHOMOLOGÍA SINGULAR"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELTON ROCKY DAMAZO JAIMES

Callao, Enero, 2017

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"GRUPOS DE COHOMOLOGÍA SINGULAR"

Elton Rocky Damazo Jaimes

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Aprobado por:

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Presidente

Lic. Elsa Marisa Quispe Cárdenas

Secretaria

Lic. Moisés Simón Lázaro Carrión

Vocal

Lic. Sofía Irena Duran Quiñones

Suplente

Callao - Perú

2017

DEDICATORIA

A mis padres, por ser el pilar fundamental en todo lo que soy.

Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por siempre tenerme presente en todos sus planes y por permitirme alcanzar mis metas.

A mi papá, Justino Damazo y mi mamá, Placencia Jaimes, por el apoyo que siempre me han brindado en cada aventura que emprendo en mi vida y por el incansable esfuerzo que hacen día a día para darme una vida satisfactoria. Son tantas cosas que tendría que agradecerles, por ello solo puedo decirles, gracias papá y gracias mamá. Los amo de forma infinita.

Al Mg. Ezequiel Fajardo Campos, no solo por su paciencia y tiempo que me dedicó para preparar mejor este trabajo sino también por su amistad, confianza, exigencia y motivación en esta hermosa carrera, la cual disfruto. Que Dios lo tenga en su santa gloria y que desde el cielo él siempre nos guíe para seguir su gran ejemplo y cada día desempeñar mejor nuestra carrera.

A mi novia Yessica Solórzano, por ser mi compañera incondicional en cada instante de mi vida, por motivarme a seguir con mis sueños y estar siempre conmigo en las buenas y en las malas, sólo me queda decirte gracias amor por todo lo que haces por mí.

A mis amigos del código 07, con quienes compartí gratos momentos. Que Dios los bendiga a todos.

Índice

Índice de figuras

RESUMEN

GRUPOS DE COHOMOLOGÍA SINGULAR

ELTON ROCKY DAMAZO JAIMES

Enero - 2017

Asesor : Mg. Ezequiel Fajardo Campos

Título obtenido : Licenciado en Matemática

El objetivo principal de ésta tesis es estudiar Teoría de Cohomología y algunos resultados. Específicamente presentamos los Grupos de Cohomología Singular y verificamos su axiomática para una teoría de Cohomología.

Palabras claves : Secuencia exacta
Simplejo Singular
Cohomología Reducida
Homomorfismo inducido
Cohomología Singular

ABSTRACT

SINGULAR COHOMOLOGY GR0UPS

ELTON ROCKY DAMAZO JAIMES

January - 2017

Adviser : Mg. Ezequiel Fajardo Campos

Obtained title : Licenciated in Mathematic

The main objective of this thesis is to study Cohomology Theory and some results. Specifically we present Singular Cohomology Groups and verify its axiomatic for a Cohomology theory.

Keywords : EXACT SECUENCE
SINGULAR SIMPLEX
REDUCED COHOMOLOGY
INDUCED HOMOMORPHISM
SINGULAR COHOMOLOGY

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Determinación del problema

La teoría de Cohomología se define con un funtor contravariante, denotado por H^q y satisfaciendo los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod [2]. Para construir dicha teoría, es necesario definir el H^q dado por

$$C_q(X) = \mathrm{Hom}(C_q(X), \mathbb{Z})$$

Estos son los grupos libres generados por los simplejos singulares $S_q(X)$ con $A \subset X$, subespacio del espacio topológico X que actúa en la construcción del subgrupo $C^q(X, A)$, es decir con $C^q(X,A) = \{\emptyset \in C^q(X); \emptyset(A) = 0\}$ obtenemos el complejo de cadenas

$$\ldots \to C^{q-1}(X,A) \xrightarrow{\delta} C^q(X,A) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(X,A) \to \ldots$$

Así se consiguen los grupos cocientes

$$H^q(X,A) = \frac{Z^q(X,A)}{B^q(X,A)}$$

Donde $Z^q(X) = \mathrm{Nuc}(\delta)$ es llamado **grupo de Cociclos,** $B^q(X) = \mathrm{Im}(\delta)$ es llamado **grupo de Cobordes.** Que forman los grupos de Cohomología singular $H^q(X,A)$ para el cual debemos verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod.

1.2. Formulación del problema

Se quiere resolver la siguiente interrogante:

¿Para los grupos de Cocadenas Singulares $C(X,A)$ se podrán obtener Grupos de

Cohomología $H^q(X, A)$?

¿Para los Grupos de Cohomología Singular se podrán verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de Cohomología?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Sobre los grupos de Cohomología Singular, verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de Cohomología.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Estudiar grupos de Cohomología Singular sobre espacios topológicos.
- De la axiomática en Cohomología Singular obtener algunos resultados y aplicaciones.

1.4. Justificación

La justificación en estudiar grupos de Cohomología Singular sobre espacios topológicos radica en que por ejemplo se pueden emplear isomórficamente en la determinación de Grupos de homotopía, en estos útimos se tienen las transformaciones homotópicas muy usadas en ciencias e ingenierías. Por otro lado la Cohomología Singular en dimensiones superiores permitirá seguir avanzando en la solución de problemas en topología y geometría diferencial

1.5. Importancia

La importancia de la teoría de Cohomología Singular radica en que se presenta como un modelo para resolver problemas de Topología , Geometría, Álgebra y Teoría de Números.

El sector que se verá beneficiado con los resultados de esta investigación son todos los estudiantes de Ciencias e Ingenierías.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Grupos, Secuencias exactas, Categorías y Funtores

En esta sección revisamos Grupos, subgrupos, homomorfismos entre Grupos, secuencias de homomorfismos, Categorías y Funtores.

2.1.1. Grupos y subgrupos

Definición 2.1.1. Dado un conjunto $G \neq \emptyset$ el cual tiene asociada la operación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G \times G & \to & G \\ & (a,b) & \mapsto & \varphi(a,b) \end{array}$$

entonces el par (G, φ) es llamado **Grupo** si se verifican los siguientes axiomas:

1. $\varphi(a, \varphi(b,c)) = \varphi(\varphi(a,b),c)$, para todo a, b, c en G.

2. Existe $e \in G$ tal que $\varphi(a,e) = a = \varphi(e,a)$ para todo $a \in G$. El elemento e a veces denotado por 1 es llamado el **neutro o identidad** de G.

3. Para cada $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $\varphi(a,b) = 1 = \varphi(b,a)$. El elemento b es llamado el **inverso** de a y suele denotarse por a^{-1}.

En adelante denotaremos de manera sintética $(G, \varphi) = G$ y $\varphi(a,b) = ab$.

Definición 2.1.2. El grupo G se dice que es Abeliano o conmutativo si $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Definición 2.1.3. Un grupo G se dice que es finito si tiene un número finito de elementos. El orden de un grupo finito G es el número de elementos de G el cual es denotado por ${}_{\circ}(G) = |G|$. Sí G no es finito se denota ${}_{\circ}(G) = |G| = \infty$.

Definición 2.1.4. El orden de un elemento a de un grupo finito G denotado por ${}_{\circ}(a)$ es el menor entero positivo k tal que $a^k = 1$.

Ejemplo 2.1.5. Los siguientes grupos son usuales:

1. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con su suma usual son grupos Abelianos.

2. $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathbb{C}^n - \{0\}$ con su producto usual son grupos Abelianos.

Definición 2.1.6. Un subconjunto no vacío H del grupo G se dice que es un **subgrupo**, si con las operaciones heredadas de G también es un grupo.
La notación $H < G$ significará H subgrupo de G.
Aquí $\{1\}$ y G se dicen subgrupos triviales de G

Proposición 2.1.7. Dado un grupo G y $\emptyset \neq H \subset G$ entonces

$$H < G \text{ si y sólo si } xy^{-1} \in H, \ \textit{para todo } x, y \in H$$

Demostración.
Implicación directa: Si $H < G$ entonces H con la operación de G es grupo. Por lo que $xy^{-1} \in H$, $\forall x, y \in H$
Implicación recíproca: De la hipótesis se tiene que:
Para todo $x \in H$, $x^{-1} \in G$ entonces $xx^{-1} = 1 \in H$
Para todo $x \in H$, $1 \in H$, $x^{-1} \in G$ entonces $1x^{-1} = x^{-1} \in H$
Para todo $x, y \in H$, $y^{-1} \in H$, $(y^{-1})^{-1} \in G$ entonces $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$ □

Ejemplo 2.1.8. En los grupos $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathbb{C}^n - \{0\}$ con su producto usual se tiene el subgrupo $M = \{-1, 1\}$ el cuál es llamado **grupo multiplicativo**.

Proposición 2.1.9 (Intersección y reunión de subgrupos). Son verdaderos

1. La intersección finita de subgrupos es un subgrupo.

2. La unión de subgrupos no necesariamente es un subgrupo.

Demostración.
Para el primer item se tiene usando intersección e inducción.
Para el segundo item tómese en cuenta el grupo $\mathbb{Z}$ con la suma, en el cuál la unión de los subgrupos $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ deja de ser un subgrupo. □

Definición 2.1.10 (Subgrupo generado). Dado el grupo G considérese los subconjuntos $\emptyset \neq S \subset G$ y $S^{-1} = \{s^{-1} \ , \ s \in S\}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \{s_1 s_2 \ldots s_n \ : \ n \in \mathbb{N} \ , \ s_i \in S \text{ ó } s_i \in S^{-1}\} \\ &= \{s_1^{r_1}, \ldots, s_k^{r_k} \ : \ s_i \in S \ , \ r_i \in \mathbb{Z} \ , \ k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

es un subgrupo de G llamado **subgrupo generado** por S y es el menor subgrupo de G que contiene S, o sea

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H_i} H_i \ : \ H_i \text{ subgrupo de } G$$

Observación 2.1.11 (Grupo cíclico). Dado un grupo G entonces

1. Si $\langle S \rangle = G$ se dice que S es un conjunto de generadores de G.

2. Si $\langle S \rangle = G$ y S es finito entonces se dice que G es finitamente generado.

3. Si $a \in G$ se tiene que $\langle a \rangle = \{a^i \ : \ i \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G llamado **subgrupo cíclico**. Además si $\langle a \rangle = G$ se dice que G es un **grupo cíclico** generado por a.

Ejemplo 2.1.12. $\mathbb{Z}$ con la suma usual es grupo cíclico infinito generado por 1.

$$\mathbb{Z} = \{1^n = 1 + \ldots + 1 \ : \ n \in \mathbb{Z}\} = \{n \ : \ n \in \mathbb{Z}\} = \langle 1 \rangle$$

Así mismo $\mathbb{Z}^n$ con la suma usual es generado por

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \ : \ e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Ejemplo 2.1.13 (El grupo de permutaciones S_3). Dado por:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es un grupo con la composición y $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$ es la identidad.

Ejemplo 2.1.14. Dado un grupo G entonces

$$Z(G) = \{x \in G \ : \ xa = ax \ \ para\ todo\ a \in G\}$$

es un subgrupo de G llamado el **centro de** G .

Definición 2.1.15. Dado el grupo G y H subgrupo si $a \in G$ se tienen:

$$Ha = \{na \ : \ n \in H\} \quad \text{clase lateral derecha de } H \text{ en } G.$$
$$aH = \{an \ : \ n \in H\} \quad \text{clase lateral izquierda de } H \text{ en } G.$$

Observación 2.1.16. Dado G un grupo y H subgrupo entonces:

1. Hay una correspondencia biyectiva entre las clases laterales de H en G. Por lo que si H es finito entonces $\#(aH) = \#(Ha) = \#(He) = |H|$.

2. La relación en G dada por $x \sim y$ si y sólo si $xy^{-1} \in H$ es de equivalencia. Obteniéndose el conjunto cociente $\dfrac{G}{\sim} = \dfrac{G}{H} = \{[a] \ : \ a \in G\}$.

3. $Ha = [a]$ por lo que $G = \bigcup\limits_{a \in G} Ha$

Teorema 2.1.17 (de Lagrange)**.** Si G es grupo finito y $H < G$ entonces $|H|$ divide a $|G|$.

Demostración.
De la observación (2.1.16)

$$|G| = \#(G) = \sum_{i=0}^{r} \#(Ha_i) = (r+1)\#(H) = (r+1)\,|H|$$

Por lo que se tiene el resultado. □

Definición 2.1.18. El número de clases laterales de H en G es llamado el índice de H en G denotado por $[G : H]$. Cuando G sea finito se tiene $[G : H] = \dfrac{G}{H}$.

Proposición 2.1.19. Sea G un grupo finito entonces

1. Si $a \in G$ entonces el ${}_{\circ}(a)$ divide a $|G|$.

2. Si $H,\ K$ son subgrupos de G y $HK = \{hk \ : \ h \in H \ , \ k \in K\}$ entonces

   $$HK \text{ es subgrupo si y sólo si } HK = KH$$

   Además $|HK| = \dfrac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$.

Demostración.

Se tiene de las definiciones respectivas y el teorema (2.1.17) $\square$

Definición 2.1.20. Se dice que N es **subgrupo normal** de G si $Na = aN$.
N es **subgrupo normal** de G es denotado por $N \lhd G$.
Notar que $N \lhd G$ si y sólo si $a^{-1}Na \subseteq N$ *para todo* $a \in G$

Ejemplo 2.1.21. En S_3 se tiene a $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \right\}$ como único subgrupo normal no trivial.

2.1.2. Homomorfismo y secuencias exactas

Definición 2.1.22. Dados G y G' dos grupos con sus respectivas operaciones se dice que la aplicación $f : G \to G'$ es un **homomorfismo de grupos** si se cumple la siguiente condición $f(ab) = f(a)f(b)$.
Además un homomorfismo se dice que es:

- **Monomorfismo** si es inyectivo.
- **Epimorfismo** si es sobreyectivo
- **Isomorfismo** si es inyectivo y sobreyectivo.
  Aquí se dice que G y G' son isomorfos lo cuál es denotado por $G \cong G'$.
  Además si $G = G'$ el isomorfismo se dice **Automorfismo** de G, el conjunto de automorfismos de G con la operación composición es un grupo denotado por $A(G)$.

Ejemplo 2.1.23. $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0},\ \bar{1}\}$ con la suma y $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix} \right\}$ con la composición son isomorfos, donde $\bar{0}$ va en $\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{pmatrix}$ y $\bar{1}$ va en $\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix}$.
Por lo que $\mathbb{Z}_2 \cong S_2$.

Proposición 2.1.24. Sea $f : G \to G$ un automorfismo de G entonces

$$\circ(a) = \circ(f(a)), \text{ para todo } a \in G$$

Demostración.

Se tiene por el absurdo suponiendo que $\circ(f(a)) < \circ(a)$. $\square$

Proposición 2.1.25. Dados G y G' dos grupos con identidades e, e' respectivamente, $f : G \to G'$ un homomorfismo entonces $f(e) = e'$ y $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ respectivamente.

Demostración.

Se tiene directamente de la definición. $\square$

Definición 2.1.26. Dado $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos se definen

$$Im(f) = \{y \in G' \ : \ f(x) = y \ , \ x \in G\} \quad \text{la } \textbf{imagen} \text{ de } f$$
$$Nuc(f) = \{x \in G \ : \ f(x) = e'\} \quad \text{el } \textbf{núcleo} \text{ de } f$$

Proposición 2.1.27. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo entonces

1. $Nuc(f)$ es un subgrupo normal de G.
2. $Im(f)$ es un subgrupo de G'.
3. f es monomorfismo si y sólo si $Nuc(f) = \{e\}$.

Demostración.

Ver Herstein(1988)[4] $\square$

Definición 2.1.28 (Grupo cociente). Sean $N \lhd G$ y $[a]$ clase de equivalencia del conjunto cociente $\frac{G}{N}$ teniendo conocimiento que $[a] = Na$ podemos establecer la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{rccc} \varphi \ : & \dfrac{G}{N} \times \dfrac{G}{n} & \to & \dfrac{G}{N} \\ & (Na,\ Nb) & \mapsto & NaNb = Nab \end{array}$$

entonces φ esta bién definida y hace que $\frac{G}{N}$ sea un grupo con el producto de clases laterales, el cuál es llamado **grupo cociente**.

Además recordando que el índice de N en G es el número de elementos de $\frac{G}{N}$ se tiene que $\left|\frac{G}{N}\right| = [G : N]$. Si G es finito entonces $|G| = |N|\,[G : N]$.

Ejemplo 2.1.29. Como $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \right\} \lhd S_3$.

Entonces $\dfrac{S_3}{N} = \left\{ N, N \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \right\}$

Por lo que $\left| \dfrac{S_3}{N} \right| = 2$ y $|S_3| = |N|\,[S_3 : N] = (3)(2) = 6$.

Teorema 2.1.30 (Teorema fundamental de homomorfismos). Dado $f : G \to G'$ un epimorfismo entonces existe el isomorfismo $\dfrac{G}{Nuc(f)} \cong G'$.

Demostración.

Consideremos la aplicaciíon:

$$\begin{array}{rcl} g \;:\; \dfrac{G}{Nuc(f)} & \to & G' \\ Nuc(f)a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

el cual es un isomorfismo único que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ \dfrac{G}{Nuc(f)} & & \end{array}$$

donde $\pi : G \to \dfrac{G}{Nuc(f)} \;:\; a \to Na$ es la proyección canónica $\square$

El teorema (2.1.30)(Teorema fundamental de homomorfismos) me permite determinar la cantidad de homomorfismos de $G \to G'$ ubicando la cantidad de homomorfismos inyectivos de $\dfrac{G}{H} \to G'$ donde H recorre los subgrupos normales de G.

Ejemplo 2.1.31. Sean $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$ grupos con la suma y sea el epimorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ tal que $f(z) = [z]$ entonces $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle = Nuc(f) \lhd \mathbb{Z}$ entonces por el teorema fundamental de homomorfismos (2.1.30) existe un isomorfismo $g : \dfrac{\mathbb{Z}}{\langle m \rangle} \to \mathbb{Z}_m$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_m \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ \dfrac{\mathbb{Z}}{\langle m \rangle} & & \end{array}$$

Por lo que $\dfrac{\mathbb{Z}}{\langle m\rangle} \cong \mathbb{Z}_m$.

Proposición 2.1.32. Sea G un grupo entonces

1. Si $K < H < G$, $K \lhd G$, $H \lhd G$ entonces $\dfrac{\frac{G}{K}}{\frac{H}{K}} \cong \dfrac{G}{H}$.

2. Si $H \lhd G$ Y $K < G$ entonces $\dfrac{K}{H\cap K} \cong \dfrac{HK}{H}$.

Demostración.

Para el primer item considérese

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \dfrac{G}{K} & \rightarrow & \dfrac{G}{H} \\ & & gK & \mapsto & gH \end{array}$$

epimorfismo tal que $Nuc(\psi) = \dfrac{H}{K}$, luego usar el teorema (2.1.30).

Para el segundo item considérese

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & K & \rightarrow & \dfrac{KH}{H} = \dfrac{HK}{H} \\ & & k & \mapsto & kH \end{array}$$

epimorfismo tal que $Nuc(\varphi) = H\cap K$, luego usar el Teorema (2.1.30). □

Producto directo y suma directa

Definición 2.1.33 (Producto directo). Dada una familia de grupos $\{G_i\ ;\ i\in\Delta\}$ donde Δ es un conjunto de índices. El **producto directo** de la familia de grupos se define como sigue

$$\prod_{i\in\Delta} G_i = \left\{ f:\Delta\rightarrow \bigcup_{i\in\Delta} G_i\ :\ f(i)\in G_i,\ \text{para todo } i\in\Delta \right\}$$

Observación 2.1.34. Si Δ es un conjunto de índices finito con n elementos entonces denotamos $\prod_{i\in\Delta} G_i = \prod_{i=1}^{n}$,entonces se tiene la biyección

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \prod_{i=1}^{n} G_i & \rightarrow & G_1\times G_2\times\ldots\times G_n \\ & & f & \mapsto & (f(1),f(2),\ldots,f(n)) \end{array}$$

En adelante $\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1\times G_2\times\ldots\times G_n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ :\ x_i\in G_i\}$

Definición 2.1.35 (Proyección natural). La aplicación

$$\begin{array}{rcl} p_j \ : \ \prod_{i\in\Delta} G_i & \to & G_j \\ f & \mapsto & f(j) \end{array}$$

es llamada **proyección natural** al j-ésimo factor.

Definición 2.1.36 (Suma directa). Dada una familia de grupos $\{G_i \ ; \ i \in \Delta\}$ donde Δ es un conjunto de índices. La **suma directa** de la familia de grupos se define como sigue

$$\sum_{i\in\Delta} G_i = \left\{ f \in \prod_{i\in\Delta} G_i \ : \ f = 0 \text{ salvo número finito} \right\}$$

Aquí si Δ es un número finito entonces $\sum_{i\in\Delta} G_i = \sum_{i=1}^{n} G_i = \prod_{i=1}^{n} G_i$.

Definición 2.1.37 (Inyección natural). La aplicación S_n se define

$$\begin{array}{rcl} j \ : \ G_j & \to & \sum_{i\in\Delta} G_i \\ x_j & \mapsto & j(x_j) \ : \ j(x_j)(k) = \left\{ \begin{array}{ll} x_j & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{array} \right. \end{array}$$

es llamada **inyección natural** del j-ésimo factor.

Proposición 2.1.38. Sean G y G' dos grupos entonces

$$G \times G' = \{(g, g') \ : \ g \in G, \ g \in G'\}$$

con la operación $(g_1, g_1^{'})(g_2, g_2^{'}) = (g_1g_2, g_1^{'}g_2^{'})$ es un grupo.

Demostración.

Se tiene de la estructura de grupo en G y G' donde el elemento identidad es dado por $e_{G\times G'} = (e_G, e_{G'})$ y $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$ □

Proposición 2.1.39. Para G y G' dos grupos se tienen

1. Si G y G' son finitos entonces $|G \times G'| = |G|\,|G'|$.

2. Si G y G' son Abelianos entonces $G \times G'$ es Abeliano.

Demostración.

Se tienen de la Proposición (2.1.38) $\square$

Teorema 2.1.40 (Caracterización universal para suma directa). Sea G un grupo, $A \triangleleft G$ y $B \triangleleft G$ tal que $AB = G$, $A \cap B = \{e\}$ entonces $G \cong A \times B$. Aquí se dice que G es **producto directo interno** o **suma directa** de A con B siendo denotado $G = A \oplus B$.

Demostración.

Basta considerar el siguiente homomorfismo biyectivo:

$$\begin{array}{rccl} f & : & A \times B & \to & G \\ & & (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

Por tanto se tiene el resultado. $\square$

Corolario 2.1.41. Sea G un grupo, $A_i \triangleleft G; i = 1, \ldots, n$ tal que

1. $A_1 A_2 \ldots A_n = G$
2. $A_i \cap \hat{A}_i = \{e\}$; $\hat{A}_i = A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n$

entonces $G \cong A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Aquí se dice que G es **producto directo interno** ó **suma directa** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotada $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$.

Demostración.

Basta considerar el siguiente homomorfismo biyectivo:

$$\begin{array}{rccl} f & : & A_1 \times A_2 \times \ldots A_n & \to & G \\ & & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & a_1 a_2 \ldots a_n \end{array}$$

Por tanto se tiene el resultado. $\square$

Proposición 2.1.42. Dados los homomorfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ tal que la composición $h = g \circ f$ es un isomorfismo, entonces $B = Im(f) \oplus Nuc(g)$.

Demostración.

Como h es isomorfismo se tiene $B = Im(f)Nuc(g)$.

Además se tiene $Im(f) \cap Nuc(g) = \{e\}$.

Por tanto del Teorema (2.1.40) $B = Im(f) \oplus Nuc(g)$. $\square$

Definición 2.1.43 (Grupo libre generado por un conjunto). Considérese un conjunto S y sea S^{-1} otro conjunto tal que $S \cap S^{-1} = \emptyset$ y S está en correspondencia biyectiva con S^{-1} por lo que la imagen de x^{+1} a través de esta biyección será denotada por x^{-1}. Obtenemos así un alfabeto de **letras o símbolos** $\{x^{+1},\ x^{-1}\}$ que usaremos para formar *palabras*

Una palabra es dada por

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} \text{ tal que } r_i = \pm 1,\ \forall i = 1, \dots, n$$

Una palabra que no contiene letras es llamada vacía y será denotada por 1.

Una palabra $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ se dice que es reducida si x_j^1 y x_j^{-1} no son adyacentes.

Toda palabra puede reducirse suprimiendo los pares $x_j^1 x_j^{-1}$ o $x_j^{-1} x_j^1$. Así x_j^{-1} funciona como la inversa de x_j^1.

Escribiremos $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} = x_1^{s_1} \dots x_m^{s_m}$ si y sólo si $n = m,\ r_i = s_i,\ paratodo\ i = 1, \dots, n$.

Considerando

$$L(S) = \{p = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}\ :\ p \text{ es palabra reducida}\}$$

Entonces $L(S)$ es un grupo como sigue. Si $p = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n},\ q = y_1^{s_1} \dots y_m^{s_m} \in L(S)$

$$p.q = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} y_1^{s_1} \dots y_m^{s_m} \text{ yuxtaponer y reducir}$$

El neutro es la palabra vacía 1.

Para $p = x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$ se tiene la inversa $p^{-1} = x_1^{-r_n} \dots x_1^{-r_1}$

$L(S)$ se llama **grupo libre** generado por la base S.

Si S tiene n elementos se dice que $L(S)$ es grupo libre de n-generadores.

Definición 2.1.44. Un grupo L es libre si existe un conjunto S tal que $L \cong L(S)$.

Teorema 2.1.45 (Caracterización universal para grupos libres). Si L es un grupo libre tal que $L \cong L(S)$, entonces existe una función inyectiva $i : S \to L$ tal que para todo grupo H y toda función $f : S \to H$ existe un único homomorfismo $\bar{f} : L \to H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & L \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ H & & \end{array}$$

En otras palabras toda función de S en el grupo H se extiende a un único homomorfismo de L en H.

Demostración.

Primeramente sabemos que $L \cong L(S)$ por lo que podemos considerar $i : S \to L : x \to x$ la cual es inyectiva. Ahora si H es un grupo y $f : S \to H$ una función entonces escribiendo $\bar{f}(x^{+1}) = f(x)$ y $\bar{f}(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ se determina de manera única el homomorfismo

$$\bar{f}(x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}) = (f(x_1))^{r_1} \dots f(x_n))^{r_n}$$

tal que $f = \bar{f} \circ i$ que hace conmutativo el diagrama.

Como i es inyectiva identificamos S con $i(S)$ en L.

Diremos que S genera a L. □

Ejemplo 2.1.46. Si $S = \{x\}$ entonces $L(S)$ tiene por elementos

$$1, x^{+1}, x^{-1}, x^{+1}x^{+1}, x^{-1}x^{-1}, x^{+1}x^{+1}x^{+1}, x^{-1}x^{-1}x^{-1}, \dots$$

Aquí es común escribir x por x^{+1}, x^2 por $x^{+1}x^{+1}$, x^{-2} por $x^{-1}x^{-1}$, etc. Además $L(S) \cong \mathbb{Z}$ donde la función $\{x\} \to \mathbb{Z}$ tal que $x \to 1$ se extiende a un isomorfismo $L(S) \to \mathbb{Z}$. Obsérvese además que el grupo libre de n-generadores para $n > 1$ es un grupo infinito no Abeliano.

Teorema 2.1.47. Todo subgrupo de un grupo libre es libre.

Demostración.

Consultar Sze-Tsen Hu(1968)[8]. □

Proposición 2.1.48. Todo grupo es cociente de un grupo libre.

Demostración.

Sea G grupo y S un generador(puede ser que $S = G$), considerar la inclusión $f : S \hookrightarrow G$. Por definición para $f(S)$ existe un homomorfismo único $\bar{f}$ tal que $x = f(x) = \bar{f}(i(x))$.

Por otro lado $Im(\bar{f}) \supset Im(f) = S$ y S genera G entonces $Im(\bar{f})$ genera G. Pero $Im(\bar{f}) < G$ entonces $Im(\bar{f}) = G$, por tanto $\bar{f}$ es un epimorfismo. Por tanto, siguiendo el teorema fundamental de homomorfismos (2.1.30) se tiene

$$G \cong \frac{f(S)}{Nuc(\bar{f})}$$

Concluyéndose el resultado. □

Definición 2.1.49. Una sucesión finita o infinita de homomorfismos de grupos

$$\ldots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-1} \rightarrow \ldots$$

se dice que es **exacta** si $Im(f_n) = Nuc(f_{n-1})$. Particularmente la sucesión exacta

$$1 \rightarrow G_3 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_1 \rightarrow 1$$

es llamada sucesión exacta corta.

Definición 2.1.50. Una sucesión finita ó infinita de homomorfismos de grupos

$$\ldots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-1} \rightarrow \ldots$$

se dice que es **semiexacta** si $f_{n-1} \circ f_n = id$.

Ejemplo 2.1.51. Si $N \triangleleft G$ y $i : N \rightarrow G$ es la inclusión, entonces

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{N} \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta.

Ejemplo 2.1.52. Si $f : G \rightarrow H$ es un epimorfismo y $i : N \rightarrow G$ es la inclusión, entonces

$$1 \rightarrow Nuc(f) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta.

Ejemplo 2.1.53. Sea $h : M \rightarrow N$ homomorfismo de grupos, $i : Nuc(h) \rightarrow M$ es la inclusión, $Im(h) \triangleleft N$, $Conuc(h) = \dfrac{N}{Im(h)}$ y $p : N \rightarrow Conuc(h)$ la proyección natural, entonces

$$1 \rightarrow Nuc(h) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{p} Conuc(h) \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta llamada **sucesión exacta del homomorfismo** h.

Teorema 2.1.54. Dada la siguiente sucesión exacta

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

1. f es epimorfismo.

2. g es homomorfismo trivial.

3. h es monomorfismo.

Demostración.

Para (1⇔2)

Como f es epimorfismo entonces $Im(f) = B$. Por otro lado g es trivial si y sólo si $Nuc(g) = B$ y por exactitud $Im(f) = Nuc(g)$.

Para (2⇔3)

Como g es homomorfismo trivial si y sólo si $Im(g) = 0$. Por otro lado h es monomorfismo si y sólo si $Nuc(h) = 0$.

Por la exactitud tenemos $Im(g) = Nuc(h)$. □

Corolario 2.1.55. Los siguientes resultados se tienen del teorema (2.1.54)

1. En una sucesión exacta

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

   $C = 0$ si y sólo si f es un epimorfismo y k un monomorfismo.

2. Si la sucesión

$$1 \to A \xrightarrow{f} B \to 1$$

   es exacta f es isomorfismo.

Demostración.

Ver Sze-Tsen Hu(1968)[8]

Teorema 2.1.56 (Diagrama de cazador). En el siguiente diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ {}^{\alpha}\downarrow & & {}^{\beta}\downarrow & & {}^{\gamma}\downarrow & & {}^{\delta}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas, los tres cuadrados conmutativos, α epimorfismo y δ monomorfismo. Entonces si γ es epimorfismo también lo será β y si β es monomorfismo también los será γ.

Demostración.

La conmutatividad de los tres cuadrados dice que

$$\beta \circ f = f' \circ \alpha \ , \ \gamma \circ g = g' \circ \beta \ , \ \delta \circ h = h' \circ \gamma$$

Donde $Im(\beta) = g'^{-1}(Im(\gamma))$, $Nuc(\gamma) = g(Nuc(\beta))$. Ver Sze-Tsen Hu(1968)[8] $\square$

Lema 2.1.57 (de los cinco). Si en el siguiente diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ {}^{\alpha}\downarrow & & {}^{\beta}\downarrow & & {}^{\gamma}\downarrow & & {}^{\delta}\downarrow & & {}^{\epsilon}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas, los cuatro cuadrados conmutativos y los homomorfismos α, β, δ, ϵ son isomorfismos entonces el homomorfismo central γ también es un isomorfismo.

Demostración.

Se tiene del Teorema (2.1.56)

Lema 2.1.58 (de los cinco corto). Si en el diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \rightarrow & 1 \\ & & {}^{\alpha}\downarrow & & {}^{\beta}\downarrow & & {}^{\gamma}\downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \rightarrow & 1 \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas y los dos cuadrados conmutativos entonces

1. Si α y γ son monomorfismos también lo es β.

2. Si α y γ son epimorfismos también lo es β.

Por tanto β es isomorfismo si lo son α y γ.

Demostración.

Se tiene del Teorema (2.1.56)

2.1.3. Categorías y Funtores

Definición 2.1.59. Un **semigrupoide** es un conjunto M tal que, para α, $\beta \in M$ está definido un producto

$$\alpha\beta \in M$$

que satisface las dos condiciones de asociatividad siguientes:

(CA 1) Para elementos cualesquiera α, β, γ de M, el triple producto $\alpha(\beta\gamma)$ está definido si y sólo si $(\alpha\beta)\gamma$ está definido. En el caso en que cualquiera de los dos esté definido, se cumple la ley asociativa

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Este producto triple será denotado por $\alpha\beta\gamma$.

(CA 2) El triple producto $\alpha\beta\gamma$ está definido siempre que estén definidos los productos $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$.

Por ejemplo, todo semigrupo es un semigrupoide. Según la definición, es obvio que un semigrupoide M es un semigrupo si y sólo si el producto $\alpha\beta$ está definido para todo par α, β de elementos de M.

Un elemento ξ de un semigrupoide se dice que es una *identidad* (o una *unidad*) de M si y sólo si $\xi\alpha = \alpha$ y $\xi\beta = \beta$ siempre que $\xi\alpha$ y $\beta\xi$ estén definidos.

Un semigrupoide M se llama **regular** si y sólo si, para todo elemento $\alpha \in M$, existen unidades ξ y η en M tales que $\xi\alpha$ y $\alpha\eta$ estén definidos.

Lema 2.1.60. Dado un elemento α arbitrario de un semigrupoide regular M, existe una única identidad ξ de M tal que $\xi\alpha$ esté definido.

Demostración. Sean ξ y ξ' dos identidades de M tales que $\xi\alpha$ y $\xi'\alpha$ estén definidos. Como ξ y ξ' son identidades, el triple producto

$$\xi(\xi'\alpha) = \xi\alpha = \alpha$$

está definido. Entonces, por (AC 1), se deduce que $(\xi\xi')\alpha$ está también definido. Esto implica que el producto $\xi\xi'$ está definido. Como ξ y ξ' son identidades, es

$$\xi = \xi\xi' = \xi'.$$

lo que prueba (2.1.60). □

Está identidad única ξ de (2.1.60) recibirá el nombre de *identidad* por la *izquierda* del elemento α de M y se designará con el símbolo $\lambda(\alpha)$. La correspondencia $\alpha \to \lambda(\alpha)$ define una función

$$\lambda : M \to M$$

del semigrupoide regular M en sí mismo.

Análogamente, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.1.61. Dado un elemento α arbitrario de un semigrupoide regular M, existe una única identidad η de M tal que $\alpha\eta$ está definido.

Esta identidad única η de (2.1.61) recibirá el nombre de *identidad* por la *derecha* del elemento α de M y se designará con el símbolo $\rho(\alpha)$. La correspondencia $\alpha \to \rho(\alpha)$ define una función

$$\rho : M \to M$$

Sea $\mathcal{J}(M)$ la clase de todas las identidades de M. Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1.62. Dado un semigrupoide regular M, tenemos

$$\lambda(\xi) = \xi = \rho(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathcal{J}(M)$. En consecuencia, tenemos

$$\lambda(M) = \mathcal{J}(M) = \rho(M).$$

Demostración. Por definición de $\lambda(\xi)$, el producto $\lambda(\xi)\xi$ está definido.

Como $\lambda(\xi)$ y ξ son identidades, se sigue que $\lambda(\xi) = \xi$. Análogamente, se puede probar que $\rho(\xi) = \xi$, lo que completa la demostración del Corolario (2.1.62). □

Lema 2.1.63. Si α y β son dos elementos cualesquiera de un semigrupoide regular M, entonces $\alpha\beta$ está definido si y sólo si $\rho(\alpha) = \lambda(\beta)$.

Demostración. *Necesidad.* Si $\alpha\beta$ está definido. Entonces el triple producto

$$\alpha[\lambda(\beta)\beta] = \alpha\beta$$

está definido. Por (AC 1) también está definido $[\alpha\lambda(\beta)]\beta$, lo que implica que $\alpha\lambda(\beta)$ está definido. Por Lema (2.1.61), obtenemos

$$\rho(\alpha) = \lambda(\beta)$$

Suficiencia. Supongamos $\rho(\alpha) = \lambda(\beta)$. Entonces están definidos $\alpha\rho(\alpha)$ y $\rho(\alpha)\beta$. Por (AC 2), está definido $\alpha\rho(\alpha)\beta$. Como $\rho(\alpha)$ es una identidad, tenemos

$$\alpha\rho(\alpha)\beta = \alpha\beta$$

y por consiguiente $\alpha\beta$ está definido. □

Lema 2.1.64. Si el producto $\alpha\beta$ de dos elementos α, β de un semigrupoide regular M está definido, entonces

$$\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\alpha), \qquad \rho(\alpha\beta) = \rho(\beta).$$

Demostración. Como $\lambda(\alpha)\alpha$ y $\alpha\beta$ están definidos, se deduce de (AC2) que $\lambda(\alpha)\alpha\beta$ está definido. Por Lema (2.1.60), esto implica $\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\alpha)$. Análogamente se prueba que $\rho(\alpha\beta) = \rho(\beta)$.

Dado un elemento α de un semigrupoide regular M, diremos que $\beta \in M$ es un *inverso* de α si y sólo si $\alpha\beta = \lambda(\alpha)$ y $\beta\alpha = \rho(\alpha)$. Si α posee un *inverso*, diremos que α es *inversible.* □

Lema 2.1.65. El elemento inverso en un semigrupoide regular es único.

Demostración. Sean β y γ dos inversos de un elemento inversible arbitrariamente dado α de un semigrupoide regular M. Entonces están definidos $\beta\alpha$ y $\alpha\gamma$. Por tanto, por (AC 2), está definido $\beta\alpha\gamma$. De las relaciones

$$\beta\alpha\gamma = \beta(\alpha\gamma) = \beta\gamma(\alpha) = \beta,$$

$$\beta\alpha\gamma = (\beta\alpha)\gamma = \rho(\alpha)\gamma = \gamma,$$

deducimos $\beta = \gamma$. $\square$

El único inverso del elemento inversible α de M se denotará por α^{-1}, por definición, tenemos evidentemente

$$\lambda(\alpha^{-1}) = \rho(\alpha), \qquad \rho(\alpha^{-1}) = \lambda(\alpha).$$

Obviamente, toda identidad ξ de un semigrupoide regular M es inversible, siendo $\xi^{-1} = \xi$. En general, M posee elementos que no son inversibles.

Llamaremos *grupoide* a todo semigrupoide regular M en el que todo elemento es inversible. Todo grupo es un grupoide, pero existen grupoide que no son grupos. Un ejemplo importante de estos grupoides lo constituye el grupoide fundamental de un espacio topológico como se verá mas adelante.

Definición 2.1.66. Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste de una clase K de elementos llamados **objetos** y un semigrupoide regular M de elementos llamados **morfismos** justamente con una función biyectiva

$$\iota : K \to \mathcal{J}(M)$$

de la clase K de objetos sobre la subclase $\mathcal{J}(M)$ de las identidades de M.

Sea $\mathcal{C} = \{K, M, \iota\}$ una categoría arbitrariamente dada. Para cada objeto $X \in K$, la identidad $\iota(X) \in \mathcal{J}(M)$ recibe el nombre de morfismo identidad del objeto X y lo denotamos por i_X. Para cada morfismo $\alpha \in M$, los objetos

$$Dom(\alpha) = X = \iota^{-1}[\lambda(\alpha)],$$

$$Ran(\alpha) = Y = \iota^{-1}[\rho(\alpha)],$$

se llaman, respectivamente, **Dominio** y **Rango** del morfismo α. En este caso, α se dice que es un *morfismo* de X en Y, denotándolo por

$$\alpha : X \to Y.$$

En particular, tenemos

$$i_X : X \to X$$

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de (2.1.63) y (2.1.64).

Proposición 2.1.67. El producto $\alpha\beta$ de dos morfismos α, $\beta \in M$ está definido si y sólo si $Ran(\alpha) = Dom(\beta)$.
Si $\alpha : X \to Y$ y $\beta : Y \to Z$ son morfismos, entonces el morfismo producto $\alpha\beta$ está determinado por el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Para dar ejemplos de categorías, se debe especificar los objetos y los morfismos de la categoría, e indicar cómo están definidos los productos de morfismos. En la mayoría de los casos, las identidades y las condiciones de asociatividad son obvias.

Ejemplos de categorías

(1) La categoría $\mathcal{Y}$ de conjuntos consiste de todos los conjuntos como objetos y todas las funciones (de un conjunto en un conjunto) como morfismos. los productos de morfismos están definidos por la composición de funciones como sigue. El producto de $\alpha : X \to Y$ y $\beta : Y \to Z$ es la composición

$$\alpha\beta = \beta \circ \alpha : X \to Z.$$

(2) La categoría $\mathcal{T}$ de espacios topológicos consiste de todos los espacios topológicos como objetos y de las aplicaciones continuas como morfismos. Los productos de morfismos están definidos por la composición, como en el Ejemplo(1). Las definiciones de espacio topológico y aplicación continua, consultar el siguiente capítulo.
(3) La categoría $\mathcal{G}$ de grupos consiste de todos los grupos como objetos y todos los homomorfismos (de grupo) como morfismos. Los productos de morfismos están definidos como en el Ejemplo(1), por la composición.
(4) La categoría $\mathcal{L}$ *de sucesiones descendentes* consiste de todas las sucesiones descendentes de grupos como objetos y de sus homomorfismos como morfismos. Los productos de morfismos están definidos por composición como en (3).
Sea ahora $\mathcal{C} = \{K, M, \iota\}$ una categoría arbitrariamente dada. Con dos objetos X, $Y \in K$ de $\mathcal{C}$, consideremos la subclase

$$\mathrm{Mor}(X,\, Y) = \{\alpha \in M \mid \alpha : X \to Y\}.$$

En el ejemplo (3), tenemos

$$\mathrm{Mor}(X,\, Y) = \mathrm{Hom}(X,\, Y)$$

Una categoría $\mathcal{C} = \{K,\, M,\, \iota\}$ se dice *R-lineal* si y sólo si se satisface:

(LC1) Para cada dos objetos $X,\, Y \in K$ de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Mor}(X,\, Y)$ es un R-módulo.

(LC2) Para tres objetos cualesquiera $X, Y, Z \in K$ de $\mathcal{C}$, el producto en M define una función bilineal de $\mathrm{Mor}(X,\, Y) \times \mathrm{Mor}(Y,\, Z)$ en $\mathrm{Mor}(X,\, Z)$.

En particular, las categorías lineales sobre Z se llaman *categorías aditivas*, con Z el anillo de los enteros.

Concluiremos esta sección con algunas observaciones sobre la definición de categorías. la noción de categoría proviene de la consideración de las propiedades comunes del ejemplo (2) y otros análogos.

La estructura de una categoría $\mathcal{C} = \{K,\, M,\, \iota\}$ está determinada por el semigrupoide regular M. En efecto, la clase de los objetos de $\mathcal{C}$ puede ser identificada con $\mathcal{T}(M)$ por medio de la función biyectiva ι. Debido a esto, los semigrupoides regulares M se llaman *categorías abstractas*. Por tanto, en una categoría, son los morfismos los que juegan un papel importante, mientras que el desempeñado por los objetos es secundario. De todas formas, en la mayoría de las aplicaciones de este concepto, los objetos tienen interés primordial. Esto explica porqué la clase K de objetos es introducida artificialmente en noción de categoría mediante una función biyectiva ι. En los ejemplos anteriores, hemos utilizado los términos "la clase de todos los conjuntos" , etc. En la axiomática usual de la teoría de conjuntos, éstas son totalidades ilegítimas que deben ser evitadas. Sin embargo, si adoptamos los axiomas de Godel-Bernays-von Neumann de la teoría de conjuntos, disponemos de totalidades más amplias llamadas clases, y podemos hablar legítimamente de "la clase de todos los conjuntos", etc. Así, en una categoría arbitraria $\mathcal{C} = \{K,\, M,\, \iota\}$, K y M son en general clases. Se debe tener cuidado de no efectuar sobre estas categorías ciertas operaciones, tales como la formación del conjunto de todos los conjuntos. Una categoría se llama *pequeña* si y sólo si su clase K de objetos es un conjunto.

Definición 2.1.68. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías dadas y consideremos una función

$$f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

que asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $f(X)$ de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo α de $\mathcal{C}$ un morfismo $f(\alpha)$ de $\mathcal{D}$. La función f se dice que es un **funtor covariante** de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ si y soló si satisface las tres condiciones siguientes:

(CF1) Si $\alpha : X \to Y$, entonces $f(\alpha) : f(X) \to f(Y)$.

(CF2) $f(i_X) = i_{f(X)}$

(CF3) Si $\alpha\beta$ está definido, entonces $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$.

La condición (CF1) puede ser expresada en la forma siguiente:

$$f[Dom(\alpha)] = Dom[f(\alpha)], \quad f[Ran(\alpha)] = Ran[f(\alpha)].$$

Así un funtor covariante f conmuta con las operaciones de las categorías.
En virtud de la condición (CF2), un funtor f está completamente determinado por la función $f(\alpha)$ definida para los morfismos α de $\mathcal{C}$ únicamente. Así un funtor covariante $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es esencialmente un homomorfismo del semigrupoide de los morfismos de $\mathcal{C}$ en el de los de $\mathcal{D}$, sujeto a la condición de que las identidades (o unidades) se apliquen en identidades.
Por otra parte, la función f se dice que es un **funtor contravariante** de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes:

(CF1*) Si $\alpha : X \to Y$, entonces $f(\alpha) : f(Y) \to f(X)$.

(CF2*) $f(i_X) = i_{f(X)}$.

(CF3*) Si $\alpha\beta$ está definido, entonces $f(\alpha\beta) = f(\beta)f(\alpha)$.

Se tienen observaciones análogas a las anteriores, con modificaciones obvias que son necesarias a causa de la contravariancia .
Sean $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $g : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores arbitrariamente dados. Como f y g son funtores, su producto será la composición

$$g \circ f : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$$

que está bien definida y ésta aplica objetos en objetos y morfismos en morfismos.

Proposición 2.1.69. La función compuesta $g \circ f$ es un funtor covariante si f y g tienen la misma variancia; $g \circ f$ es un funtor contravariante si f y g son de variancia opuesta.

Ejemplos de funtores

(1) Consideremos la categoría $\mathcal{Y}$ de conjuntos y la categoría $\mathcal{G}$. Definamos una función

$$f : \mathcal{Y} \to \mathcal{G}$$

como sigue. Un objeto arbitrario X de $\mathcal{Y}$ es un conjunto. Denotamos con $f(X)$ el grupo libre engendrado por X. Por otra parte el morfismo arbitrario α de $\mathcal{Y}$ es una función

$$\alpha : X \to Y \subset f(X).$$

Puesto que $f(X)$ es el grupo libre engendrado por X, se sigue que α se extiende a un único homomorfismo

$$f(\alpha) : f(X) \to f(Y)$$

Es evidente que f es un funtor covariante.

(2) Consideremos de nuevo la categoría $\mathcal{G}$ justamente con un grupo G dado. Definamos una función

$$h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

como sigue. Para cada grupo X de $\mathcal{G}$ sea $h(X)$ el grupo $\mathrm{Hom}(X, M)$ de los homomorfismos de X en M. Por otra parte, para cada homomorfismo $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{G}$, sea $h(\alpha)$ el homomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\alpha, i) : \mathrm{Hom}(Y, M) \to \mathrm{Hom}(X, M),$$

donde $i : M \to M$ representa el endomorfismo identidad de M. Fácilmente se comprueba que h es un funtor contravariante. Definamos ahora una función

$$k : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

en la forma siguiente. Para cada grupo X de $\mathcal{G}$, sea $k(X)$ el módulo $\mathrm{Hom}(M, X)$. Además, para cada homomorfismo $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{G}$, sea $k(\alpha)$ el homomorfismo

$$\text{Hom}(i,\, \alpha) : \text{Hom}(M,\, X) \to \text{Hom}(M,\, Y).$$

Se verifica que k es un funtor covariante.

(3) Consideremos la categoría $\mathcal{L}$ de sucesiones descendentes y un entero dado n. Definamos la función

$$H^n : \mathcal{G} \to \mathcal{L}$$

de grupos de $\mathcal{G}$ en la categoría $\mathcal{L}$. Para cada grupo X de $\mathcal{G}$, sea $H^n(X)$ el grupo de cohomología n-dimensional de X. Lo cuál veremos en el capítulo final. Por otra parte, para cada morfismo $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{G}$, sea $H^n(\alpha)$ el homomorfismo inducido

$$H^n(\alpha) : H^n(Y) \to H^n(X).$$

Se comprueba que H^n es un funtor contravariante, llamado **funtor de cohomología n-dimensional.**

Sean ahora $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías arbitrariamente dadas. Un funtor covariante $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *lineal* si y sólo si, para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, define f un homomorfismo

$$f_{(X,Y)} : \text{Mor}(X,\, Y) \to \text{Mor}[f(X), f(Y)]$$

Análogamente, un funtor contravariante $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *lineal* si y sólo si, para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, g define un homomorfismo

$$g_{(X,Y)} : \text{Mor}(X,\, Y) \to \text{Mor}[f(Y), f(X)]$$

2.2. Axiomas en Teoría de Cohomología, primeros resultados

En esta sección presentamos la teoría de Cohomología, la axiomática asociada y los primeros resultados obtenidos.

2.2.1. Teoría de Cohomología, axiomática

Definición 2.2.1. Una **categoría admisible** para teorías de cohomología será la categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son pares topológicos (X, A), con A subespacio de X y los morfismos son ciertas aplicaciones continuas de pares de espacios satisfaciendo:

(AC1) Si un par topológico es un objeto en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ contiene todos los pares y aplicaciones inclusión en el retículo de (X, A) dado por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & (X,\emptyset) \arrow[dr] & & \\
(\emptyset,\emptyset) \arrow[r] & (A,\emptyset) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X,A) \arrow[r] & (X,X) \\
 & & (A,A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(AC2) Si una aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ contiene todos los pares topológicos (X, A) y (Y, B) junto con todas las aplicaciones que f define de miembros del retículo de (X, A) en correspondencia con miembros del retículo de (Y, B).

(AC3) Si las aplicaciones $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ son morfismos en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ contiene $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$.

(AC4) Sí un par topológico (X, A) es un objeto en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ contiene el cilindro $(X, A) \times I$ definido por: $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$, $I = [0, 1]$ y las inmersiones canónicas:

$$k_0 : (X, A) \to (X, A) \times I \;/\; k_0(x) = (x, 0), \text{ para todo } x \in X$$

$$k_1 : (X, A) \to (X, A) \times I \;/\; k_1(x) = (x, 1), \text{ para todo } x \in X$$

(AC5) Existe un espacio de un solo punto en $\mathcal{C}$, si P es cualquier espacio de un solo punto en $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}$ contiene toda aplicación $f : P \to X$ de cualquier espacio X en $\mathcal{C}$.

En (AC5) tenemos identificado el par topológico $(X, \emptyset)$ con la misma topología de X en cual será usado en este trabajo. En particular la categoría $\mathcal{C}_T$ de todos los pares topológicos y aplicaciones de pares es una categoría admisible.

TEORÍA DE COHOMOLOGÍA

En lo que sigue $\mathcal{C}$ denotará cualquier categoría admisible.

Por una **teoría de Cohomología** sobre $\mathcal{C}$ diremos de una colección $\mathcal{H} = \{H, *, \delta\}$ de tres funciones como sigue:

- La función H asigna a cada par topológico (X, A) en $\mathcal{C}$ y cada entero q un grupo abeliano $H^q(X, A)$ el cual será llamado el **q-grupo de cohomología del par** (X, A) en la teoría de cohomología $\mathcal{H}$. Algunas veces $H^q(X, A)$ es llamado el q-grupo de cohomología relativa del espacio topológico X módulo el subespacio A. Cuando $A = \emptyset$ denotamos por $H^q(X, A) = H^q(X)$ llamado **q-grupo de Cohomología absoluta**.

- La función $(*)$ asigna a cada aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{C}$ y cada entero q un homomorfismo: $f^* = f^{*q} : H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ el cual será llamado el **homomorfismo inducido por** f en la teoría $\mathcal{H}$.

- La función δ asigna a cada par (X, A) en $\mathcal{C}$ y cada $q \in \mathbb{Z}$ un homomorfismo $\delta = \delta(X, A, q) : H^{q-1}(A) \to H^q(X, A)$ el cual es llamado **operador coborde**.

Las funciones $H, *, \delta$ requieren satisfacer las siguientes siete condiciones llamadas "Axiomas de Eilenberg Steenrod para una teoría de Cohomología":

AXIOMA I (Axioma de Identidad)

Si $i : (X, A) \to (X, A)$ es la aplicación identidad sobre el par topológico (X, A) en $\mathcal{C}$, entonces el homomorfismo inducido $i^* : H^q(X, A) \to H^q(X, A)$ es la identidad para todo $q \in \mathbb{Z}$.

AXIOMA II (Axioma de Composición)

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ son aplicaciones en $\mathcal{C}$ entonces $(g \circ f)^{*q} = f^{*q} \circ g^{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, para todo entero q fijo, las funciones H^q, $*^q$ constituyen un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{A}$ de todos los grupos abelianos y todos los homomorfismos de tales grupos .

Si introducimos la notación $H^q(f) = f^{*q}$ para toda aplicación f en $\mathcal{C}$ este funtor contravariante puede ser denotado por H^q y se llamará **q-funtor de cohomología** en la teoría de cohomología $\mathcal{H}$.

AXIOMA III (Axioma de Conmutatividad)

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una aplicación en $\mathcal{C}$ y si $g : A \to B$ es una aplicación en $\mathcal{C}$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, entonces $\delta \circ g^* = f^* \circ \delta$, para todo $q \in$

$\mathbb{Z}$ dado en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H^{q-1}(B) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\delta"] & H^{q-1}(A) \arrow[d, "\delta"] \\ H^q(Y,B) \arrow[r, "f^*"'] & H^q(X,A) \end{tikzcd}$$

AXIOMA IV (Axioma de Exactitud)

Si (X, A) es un par topológico en $\mathcal{C}$ y $i : A \to X$, $j : X \to (X, A)$ son aplicaciones inclusión, entonces la siguiente secuencia infinita es exacta:

$$\ldots . \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X,A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \to \ldots$$

llamada secuencia de cohomología del par (X, A).

AXIOMA V (Axioma de Homotopía)

Si las aplicaciones $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son homotópicas en $\mathcal{C}$ o sea existe una aplicación $h : (X, A) \times I :\to (Y, B)$ en $\mathcal{C}$ tal que $f = h \circ k_0$, $g = h \circ k_1$ donde k_0, $k_1 : (X, A) \to (X, A) \times I$ son inmersiones canónicas, entonces $g^{*q} = f^{*q}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

AXIOMA VI (Axioma de Excisión)

Si U es un conjunto abierto de un espacio topológico X cuya clausura $Cl(U)$ está contenida en el interior de un subespacio A de X y si la aplicación inclusión
$e : (X - U, A - U) \to (X, A)$ está en $\mathcal{C}$, entonces el homomorfismo inducido
$e^{*q} : H^q(X, A) \to H^q(X - U, A - U)$ es un isomorfismo para todo entero q.
La aplicación e es llamada excisión de U y e^{*q} es el q-isomorfismo excisión.

AXIOMA VII (Axioma de Dimensión)

El q-grupo de cohomología $H^q(P_0)$ del espacio distinguido de un solo punto P_0, $q \neq 0$ consiste de un solo punto, o sea $H^q(P_0) = 0$, $q \neq 0$.

Esto completa la definición de una teoría de cohomología $\mathcal{H}$ sobre la categoría $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{H}$ satisface solo los primeros seis axiómas, entonces $\mathcal{H}$ se conoce como **teoría de cohomología generalizada** sobre la categoría admisible $\mathcal{C}$.

Observación 2.2.2. El 0-grupo de cohomología $G = H^0(P_0)$ del espacio distinguido de un punto P_0 en $\mathcal{C}$ es llamado **grupo coeficiente** de la teoría de cohomología $\mathcal{H}$.

La consistencia de los axiomas es mostrada por la cohomología $\mathcal{H}_0$ sobre la categoría admisible $\mathcal{C}$ definida por $H^q(X, A) = 0$ para todo par topológico (X, A) en $\mathcal{C}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Esto además prueba la existencia de una teoría de cohomología con grupo coeficiente trivial $G = 0$ sobre toda categoría admisible $\mathcal{C}$. Ver Hu S. T. [7] de hecho el interés está en la existencia de teorías de cohomología no trivial.

2.2.2. Consecuencias inmediatas de la Teoría de Cohomología

En lo que sigue $\mathcal{H} = \{H, *, \delta\}$, denotará una teoría de cohomología sobre la categoría admisible $\mathcal{C}_T$ de todos los pares topológicos y todas las aplicaciones de pares.

Proposición 2.2.3. Sí una aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una **equivalencia homotópica** en $\mathcal{C}_T$ en el sentido que existe $g : (Y, B) \to (X, A)$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicas a la identidad. Entonces el homomorfismo inducido $f^* : H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ es **isomorfismo** para todo $q \in \mathbb{Z}$

Demostración: Por axioma I, II y V las composiciones

$$\begin{aligned} g^* \circ f^* &= (f \circ g)^* : H^q(Y, B) \to H^q(Y, B) \\ f^* \circ g^* &= (g \circ f)^* : H^q(X, A) \to H^q(X, A) \end{aligned}$$

son automorfismos identidad con lo cuál se sigue el resultado.
En particular si $A = \emptyset,\ B = \emptyset$ se tiene $H^q(X) \approx H^q(Y)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. □

Definición 2.2.4. Un espacio topológico en $\mathcal{C}$ se dice que es contractible en $\mathcal{C}$ si la aplicación identidad es homotópica en $\mathcal{C}$ a una aplicación constante en $\mathcal{C}$.

Según la proposición (2.2.3) si X es un espacio topológico contractible en $\mathcal{C}$

$$H^q(X) \approx \begin{cases} G & : \ q = 0 \\ 0 & : \ q \neq 0 \end{cases}$$

donde G denota el **grupo coeficiente** de la teoría de cohomología $\mathcal{H}$.

Proposición 2.2.5. Si la aplicación inclusión $i : A \to X$ es una equivalencia homotópica en $\mathcal{C}_T$ entonces $H^q(X, A) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Por la proposición (2.2.3) $i^* : H^q(X) \to H^q(A)$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$, luego considerando la secuencia de cohomología del par (X, A):

$$\ldots . \to H^{q-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \ldots$$

Como i^* en ambos extremos son isomorfismos entonces $H^q(X, A)$ es un punto. □

Proposición 2.2.6. Si U es abierto de un espacio topológico X contenido en un subespacio A de X entonces la excisión $e : (X - U, A - U) \to (X, A)$ induce un isomorfismo $e^* : H^q(X, A) \to H^q(X - U, A - U)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Además se prueba que existe un conjunto abierto V del espacio X tal que la clausura $Cl(V) \subset U$ y la inclusión $h : (X - U, A - U) \to (X - V, A - V)$ es equivalencia homotópica.

Demostración:

Como $Cl(V) \subset U \subset A$ entonces $Cl(V) \subset\ Int(A)$ (interior de A), por el axioma de excisión $k : (X - V, A - V) \to (X, A)$ induce un isomorfismo $k^* : H^q(X, A) \to H^q(X - V, A - V)$, por Proposición (2.2.3) h induce un isomorfismo $h^* : H^q(X - V, A - V) \approx H^q(X - V, A - V)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $e^* = h^* \circ k^*$ y el axioma de composición implican que:

$$e^* = h^* \circ k^* : H^q(X - V, A - V) \to H^q(X - U, A - U)$$

es isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$. □

2.3. Grupos de Cohomología Reducida

En esta sección presentamos los Grupos de Cohomología reducida, el isomorfismo suspensión y calculamos grupos de Cohomología de las esferas.

Consideremos la aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ en la categoría $\mathcal{C}$ y sean $g : X \to Y$, $h : A \to B$ definidas por f entonces obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^{q-1}(B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h^*"'] & H^q(Y, B) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"'] & H^q(Y) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "g^*"'] & H^q(B) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^{q-1}(A) \arrow[r, "\delta"] & H^q(X, A) \arrow[r, "j^*"] & H^q(X) \arrow[r, "i^*"] & H^q(A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Donde por axioma de exactitud y los axiomas II y III las filas son exactas y los cuadrados conmutativos: $\delta \circ h^* = f^* \circ \delta$, $j^* \circ f^* = g^* \circ j^*$, $i^* \circ g^* = h^* \circ i^*$. Para todo $q \in \mathbb{Z}$, denotar:

$$\begin{aligned} K^q(X,A) &= Conuc(f^*) = \frac{H^q(X,A)}{Im(f^*)} \\ K^q(X) &= Conuc(g^*) = \frac{H^q(X)}{Im(g^*)} \\ K^q(A) &= Conuc(h^*) = \frac{H^q(A)}{Im(h^*)} \end{aligned}$$

Para todo q se verifica:

$i^*[K^q(X)] \subset K^q(A)$	lo cuál define	$i^* : K^q(X) \to K^q(A)$
$j^*[K^q(X,A)] \subset K^q(X)$	lo cuál define	$j^* : K^q(X,A) \to K^q(X)$
$\delta[K^{q-1}(A)] \subset K^q(X,A)$	lo cuál define	$\delta : K^{q-1}(A) \to K^q(X,A)$

obtenemos así una secuencia infinita:

$$\dots K^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} K^q(X,A) \xrightarrow{j^*} K^q(X) \xrightarrow{i^*} K^q(A) \xrightarrow{\delta} K^{q+1}(X,A) \to \dots$$

llamada **secuencia de conúcleos** de la aplicación $f : (X,A) \to (Y,B)$, como $j^* \circ \delta$, $i^* \circ j^*$, $\delta \circ i^*$ son triviales, entonces la secuencia de conúcleos es semiexacta.

Ahora apliquemos al caso $(Y,B) = (P_0, P_0)$ cuando P_0 denota el espacio (distinguido) de un solo punto en $\mathcal{C}$, la secuencia de conúcleos de la aplicación constante $\theta : (X,A) \to (P_0,P_0)$ es llamada la **secuencia de cohomología reducida** del par topológico (X,A) en la teoría de cohomología $\mathcal{H}$ y será denotado por:

$$\dots \to \widetilde{H}^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}^q(X,A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{H}^q(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^q(A) \to \dots$$

Como los grupos en la secuencia de cohomología del par (P_0,P_0) son triviales excepto para $H^0(P_0) = G$ tenemos:

$$\widetilde{H}^q(X,A) = H^q(X,A); \text{ para todo } q \in \mathbb{Z}$$

$$\widetilde{H}^q(X) = H^q(X), \quad \widetilde{H}^q(A) = H^q(A), \quad q \neq 0$$

Los grupos $\widetilde{H}^0(X)$, $\widetilde{H}^0(A)$ en la secuencia de cohomología reducida de (X,A) son llamados los 0-grupos de cohomología reducida de los espacios X, A.

Generalizando $\widetilde{H}^q(X)$, $\widetilde{H}^q(A)$, $\widetilde{H}^q(X,A)$ en la secuencia de cohomología reducida del par (X,A) serán llamados **grupos de cohomología reducida**.

Proposición 2.3.1. Para cualquier espacio topológico no vacío X tenemos: $H^0(X) \approx G \oplus \widetilde{H}^0(X)$, $H^0(A) \approx G \oplus \widetilde{H}^0(A)$ donde $H^0(P_0) = G$, $\emptyset \neq A \subset X$.

Demostración:

Consideremos $\sigma : X \to P_0$, $\tau : A \to P_0$ definidas por $\theta : (X, A) \to (P_0, P_0)$, elijamos $x_0 \in A$ definamos $\lambda : (P_0, P_0) \to (X, A)$ / $\lambda(P_0) = x_0$.

Sean $\mu : P_0 \to X$, $v : P_0 \to A$ aplicaciones definidas por λ entonces $\sigma \circ \mu : P_0 \to P_0$ es la identidad.

Por los axiomas I,II la composición $\mu^* \circ \sigma^* : H^0(P_0) \to H^0(P_0)$ es automorfismo y por álgebra elemental $H^0(X) = Im(\sigma^*) \oplus Nuc(\mu^*)$. Además $Nuc(\mu^*) = \widetilde{H}^0(X)$ y como σ^* es un monomorfismo $H^0(P_0) = G \approx Im(\sigma^*)$.

por tanto $H^0(X) \approx G \oplus \widetilde{H}^0(X)$.

Similarmente $H^0(A) \approx G \oplus \widetilde{H}^0(A)$. □

Ahora consideremos la aplicación $f : X \to Y$ / $f(x_0) = y_0$, $\rho : Y \to P_0$, $\omega : P_0 \to Y$ / $\omega(P_0) = y_0$. Así $\omega = f \circ \mu$, $\sigma = \rho \circ f$.

Entonces los triángulos en el siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{tikzcd}
& H^0(Y) \arrow[dr, "\omega^*"] \arrow[dd] & \\
H^0(P_0) \arrow[ur, "\rho^*"] \arrow[dr, "\sigma^*"'] & & H^0(P_0) \\
& H^0(X) \arrow[ur, "\mu^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Obteniéndose así:

$$\begin{aligned} f^*[Im(\rho^*)] &\subset Im(\sigma^*) \\ f^*[Nuc(\omega^*)] &\approx Nuc(\mu^*) \end{aligned}$$

Por definición tenemos $\widetilde{H}^0(X) = Nuc(\mu^*)$, $\widetilde{H}^0(Y) = Nuc(\omega^*)$

el homomorfismo inducido $f^* : H^0(Y) \to H^0(X)$ define $f^* : \widetilde{H}^0(Y) \to \widetilde{H}^0(X)$ llamado homomorfismo inducido en cohomología reducida.

En particular $i^* : \widetilde{H}^0(X) \to \widetilde{H}^0(A)$ es el homomorfismo inducido de $i : A \to X$, como $H^q(X) = \widetilde{H}^q(X)$ para todo $q \neq 0$ tenemos el homomorfismo inducido $f^* : \widetilde{H}^q(Y) \to \widetilde{H}^q(X)$ según los axiomas I, II, V se tiene las siguientes proposiciones:

Proposición 2.3.2. Si $i : X \to X$ es la identidad entonces el homomorfismo inducido $i^* : \widetilde{H}^q(X) \to \widetilde{H}^q(X)$ es el automorfismo identidad para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.3.3. Si $f : X \to Y, \;\; g : Y \to Z$ son aplicaciones entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.3.4. Si las aplicaciones $f, g : X \to Y$ son homotópicas entonces $f^* = g^*$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Corolario 2.3.5. Si los espacios topológicos X, Y son homotópicamente equivalentes ($X \cong Y$) entonces $\widetilde{H}^q(X) \approx \widetilde{H}^q(Y)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$. Así $\widetilde{H}^q(X)$ es invariante homotópico de X.

Teorema 2.3.6. Para todo par topológico (X, A) con $X \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$ la secuencia de cohomología reducida de (X, A) es exacta.

$$\ldots \to \widetilde{H}^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}^q(X, A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{H}^q(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^q(A) \to \ldots$$

Demostración:

Como la secuencia de cohomología reducida no difiere de la secuencia de cohomología usual en los grupos $\widetilde{H}^0(A)$ y $\widetilde{H}^0(X)$ es suficiente ver la exactitud de:

$$\widetilde{H}^0(X, A) \xrightarrow{\widetilde{j}^*} \widetilde{H}^0(X) \xrightarrow{\widetilde{i}^*} \widetilde{H}^0(A) \xrightarrow{\widetilde{\delta}} \widetilde{H}^1(X, A)$$

Para esto comparemos la secuencia de cohomología usual de (X, A)

$$H^0(X, A) \xrightarrow{j^*} H^0(X) \xrightarrow{i^*} H^0(A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A)$$

Como $\widetilde{H}^1(X, A) = H^1(X, A)$ y $\widetilde{\delta}$ es definido por δ tenemos $Nuc(\widetilde{\delta}) = Nuc(\delta)$ de la observación (2.3.1), $i^*(\widetilde{H}^0(A)) \subset \widetilde{H}^0(X)$, como $Im(\widetilde{j}^*)$ es la restricción de $Im(j^*)$ a $\widetilde{H}^0(X)$ tenemos $Im(\widetilde{j}^*) = Im(j^*) \cap \widetilde{H}^0(X)$. Por tanto de la exactitud de la secuencia de cohomología usual de (X, A) tenemos

$Im(\widetilde{j}^*) = Im(j^*) \cap \widetilde{H}^0(X) = Nuc(i^*) \cap \widetilde{H}^0(X) = Nuc(\widetilde{i}^*)$

$Im(\widetilde{i}^*) = Im(i^*) \cap \widetilde{H}^0(A) = Nuc(\delta) \cap \widetilde{H}^0(A) = Nuc(\widetilde{\delta})$ □

Proposición 2.3.7. Si X es un espacio contractible entonces $\widetilde{H}^q(X) = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Si X es contractible entonces la aplicación constante $\sigma : X \to P_0$ es obviamente una equivalencia homotópica, se sigue de la Proposición (2.2.3) que σ induce un isomorfismo: $\sigma^* : H^q(P_0) \approx H^q(X)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$ entonces $\widetilde{H}^q(X) = Nuc(\sigma^*) = 0$. $\square$

ISOMORFISMO SUSPENSIÓN

Recordar que $\mathcal{H} = \{H, *, \partial\}$ denota una **teoría de homología** sobre la categoría admisible $\mathcal{C}$ de pares topológicos y aplicaciones de pares. Sea $X \neq \emptyset$, $I = [0,1]$ en $X \times I$ si identificamos $X \times \{0\}$ con u y $X \times \{1\}$ con v obtenemos el espacio cociente $S(X)$, el cual es llamado la **suspensión** de X

En la figura 1 se identifica $S^1 \times \{1\}$ con el polo norte v de S^2 y $S^1 \times \{0\}$ con el polo sur u de S^2.

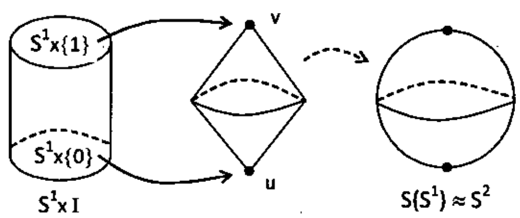

Figura 1: La suspensión de un espacio.

Usando la inmersión $i : X \to S(X)$ / $i(x) = p(x, \frac{1}{2})$, el espacio topológico X puede ser considerado de $S(X)$, donde $p : X \times I \to S(X)$ es la proyección natural.

Sean: $V = \{p(x,t) \ / \ x \in X, \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$ y $U = \{p(x,t) \ / \ x \in X, \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$ estos subespacios de $S(X)$ son contractibles además $U \cap V = X$, $U \cup V = S(X)$. Para establecer un isomorfismo entre $\widetilde{H}^q(X)$ y $\widetilde{H}^{q+1}[S(X)]$, para todo $q \in \mathbb{Z}$, considerar la secuencia de cohomología reducida del par (V, X). Como V es contractible de (2.3.7) $\delta : \widetilde{H}^q(X) \to H^{q+1}(V, X)$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$. Considerar la secuencia de cohomología reducida del par $[S(X), U]$. Como U es contractible de (2.3.7) tendremos que $j^* : H^{q+1}[S(X), U] \to \widetilde{H}^{q+1}[S(X)]$ es isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Finalmente considerar la inclusión $e : (V, X) \to [S(X), U]$ la cual es excisión del conjunto abierto $M = Int(U) = S(X) - V$ del par $[S(X), U]$, considerar el conjunto abierto $N = \{p(x,t) \ / \ x \in X, \ 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\}$ como la $Cl(N) \subset M$, la aplicación inclusión $h : (U, X) \to [S(X) - N, U - N]$ es una equivalencia homotópica por (2.2.6), $e^* : H^{q+1}[S(X), U] \to H^{q+1}(V, X)$ es isomorfismo obteniéndose así el diagrama de isomorfismos:

$$\widetilde{H}^q(X) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(V, X) \xrightarrow{e^{*-1}} H^{q+1}(S(X), U) \xrightarrow{j^*} \widetilde{H}^{q+1}(S(X))$$

El isomorfismo composición $\sigma = j^* \circ e^{*-1} \circ \delta$ será llamado el **isomorfismo suspensión** sobre el grupo $\widetilde{H}^q(X)$ en la teoría de cohomología .

Proposición 2.3.8. Para cada entero $n \geq 0$ los grupos de cohomología reducida de la esfera S^n son dados:

$$\widetilde{H}^q(S^n) \approx \begin{cases} G & : \quad q = n \\ 0 & : \quad q \neq n \end{cases}$$

donde G denota el *grupo coeficiente* de la teoría de cohomología $\mathcal{H}$.

Demostración

La esfera S^0 puede ser definida como el subespacio $\{0, 1\}$ de $\mathbb{R}$. Para determinar los grupos de cohomología reducida de S^0 considerar la secuencia de cohomología reducida de (S^0, P_0), por Proposición (2.3.7) tenemos el isomorfismo
$j^* : H^q(S^0, P_0) \approx \widetilde{H}^q(S^0)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$, seguidamente como $\{0\}$ es subconjunto abierto de S^0 con $Cl(\{0\}) \subset Int(\{0\})$ la excisión $e : \{1\} = (\{1\}, \emptyset) \to (S^0, P_0)$ de P_0 del par (S^0, P_0) induce un isomorfismo $e^* : H^q(S^0, P_0) \approx H^q(\{1\})$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Por Proposición (2.2.6) y axioma de dimensión se tiene:

$$\widetilde{H}^q(S^0) \approx H^q(S^0, P_0) \approx H^q(\{1\}) \approx \begin{cases} G & : \quad q = n \\ 0 & : \quad q \neq n \end{cases}$$

Lo cual prueba (2.3.8) para $n = 0$.
Completemos la prueba de (2.3.8) por inducción sea $k \geq 0$ asumir que se tiene (2.3.8) para $n = k$. Veamos la prueba para $n = k + 1$
Consideremos la suspensión $S(S^k)$ de la k-esfera S^k, como $S(S^k)$ es homeomorfo a la $(k+1)$-esfera S^{k+1} se sigue del Corolario (2.3.5) que: $\widetilde{H}^q(S^{k+1}) \approx \widetilde{H}^q(S(S^k))$ para

todo $q \in \mathbb{Z}$.

Tenemos así el isomorfismo suspensión $\sigma : \widetilde{H}^{q-1}(S^k) \approx \widetilde{H}^q(S(S^k)) \approx \widetilde{H}^q(S^{k+1})$ para todo $q \in\mathbb{Z}$. □

Corolario 2.3.9. Los grupos de cohomología de la esfera S^n son dados por:

$$H^q(S^n) \approx \begin{cases} 0 & ; \ n \neq q \neq 0 \\ G & ; \ n \neq q = 0, \text{ ó } n = q \neq 0 \\ G \oplus G & ; \ n = q = 0 \end{cases}$$

donde G denota el grupo coeficiente de la teoría de cohomología $\mathcal{H}$.

Demostración:

Se obtiene de la Proposición (2.3.1) y Proposición (2.3.8). □

Proposición 2.3.10. Para toda aplicación $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ y para todo $q \in \mathbb{Z}$ el rectángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}^q(Y) & \xrightarrow{\sigma} & \widetilde{H}^{q+1}[S(Y)] \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [S(f)]^*} \\ \widetilde{H}^q(X) & \xrightarrow{\sigma} & \widetilde{H}^{q+1}[S(X)] \end{array}$$

σ es isomorfismo suspensión y $S(f) : S(X) \to S(Y)$ / $[S(f)](p(x,t)) = p[f(x), t]$ $\forall x \in X, \forall t \in I$ es llamado la **suspensión** de f.

Demostración:

Sean U_X, V_X subespacios de $S(X)$, U_Y, V_Y subespacios de $S(Y)$. Como el isomorfismo suspensión σ está definido $\sigma = j^* \circ e^* \circ \delta$ tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{H}^q(X) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U_Y, Y) & \xrightarrow{e^*} & H^{q+1}[S(Y), V_Y] & \xrightarrow{j^*} & \widetilde{H}^{q+1}[S(Y)] \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle g^*}\downarrow & & {\scriptstyle h^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [S(f)]^*} \\ \widetilde{H}^q(X) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U_X, X) & \xrightarrow{e^*} & H^{q+1}[S(X), V_X] & \xrightarrow{j^*} & \widetilde{H}^{q+1}[S(X)] \end{array}$$

donde g, h están definidas por f, como $f = g/X$ la conmutatividad del rectángulo izquierdo es una consecuencia del axioma III. La conmutatividad de los otros dos rectángulos se sigue del axioma II junto con las relaciones $e \circ g = h \circ e$, $j \circ h = S(f) \circ j$. Entonces $\sigma \circ f^* = [S(f)]^* \circ \sigma$. □

2.4. Cohomología Singular

En esta sección presentamos los Simplejos Singulares, el Grupo de Cadenas singulares, los Grupos de Cohomología Singular sobre un Grupo Abeliano, Homomorfismo Inducido y la secuencia exacta en Cohomología.

2.4.1. El Grupo libre de Cadenas Singulares

Un q-simplejo estándar es dado por:

$$\Delta_q = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{q+1} \,/\, 0 \leq x_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{q} x_i = 1 \right\}$$

El cual es compacto y convexo.

Ejemplo 2.4.1. En $\mathbb{R}^n$; $\Delta_0 = \{\lambda_0 x_0 \,/\, \lambda_0 = 1\}$

O sea Δ_0 puede ser identificado con los puntos de $\mathbb{R}^n$.

La figura 2 representa el 0-simplejo en $\mathbb{R}$.

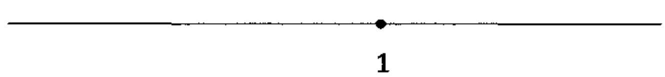

Figura 2: El 0-simplejo en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4.2. En $\mathbb{R}^n$; $\Delta_1 = \{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \,/\, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$

$$\Delta_1 = \{\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) x_1 \,/\, 0 \leq \lambda_0 \leq 1\}$$

O sea Δ_1 es el segmento de recta desde x_0 hasta x_1.

La figura 3 representa el 1-simplejo en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.4.3. En $\mathbb{R}^n$; $\Delta_2 = \{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \,/\, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$

$$\Delta_2 = \{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + (1 - (\lambda_0 + \lambda_1)) x_2 \,/\, 0 \leq \lambda_0 + \lambda_1 \leq 1\}$$

O sea Δ_2 son los puntos de un triángulo formado por x_0, x_1, x_2.

La figura 4 representa el 2-simplejo en $\mathbb{R}^3$.

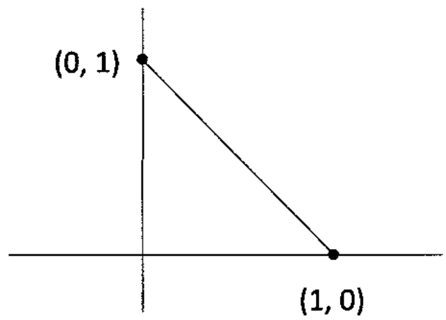

Figura 3: El 1-simplejo en $\mathbb{R}^2$.

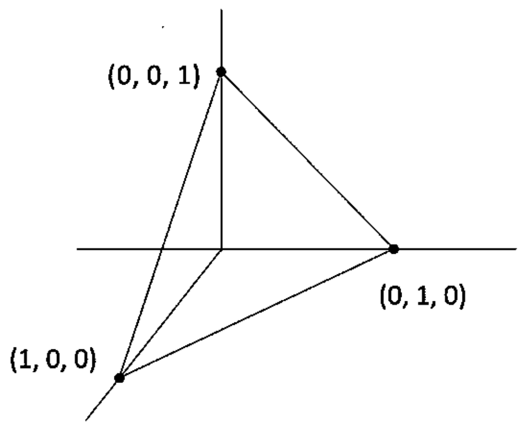

Figura 4: El 2-simplejo en $\mathbb{R}^3$.

Diremos que $e^0, e^1, \dots, e^t \in \Delta_q$ son los vértices; $e^i = (0, \underbrace{\dots, 1, \dots}_{\text{lugar i+1}}, 0) \in \mathbb{R}^{q+1}$.

Sean $P_0, P_1, \dots, P_q \in \mathbb{R}^n$ según el teorema fundamental de las transformaciones lineales existe una única aplicación lineal $f : \Delta_q \to \mathbb{R}^n$ tal que: $f(e^j) = P_j$; $j = 0, \dots, q$. Si $x \in \Delta_q \Rightarrow x = x_0 e^0 + x_1 e^1 + \dots + x_q e^q; \quad x_0 + \dots + x_q = 1$

Entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q} x_i f(e^i) = \sum_{i=0}^{q} x_i P_i; \quad x \geq 0; \quad i = 0, 1, \dots, q$$

Entonces

$$f(\Delta_q) = \left\{ P = \sum_{i=0}^{q} x_i P_i \ / \ 0 \leq x_i \leq 1 \ \wedge \ \sum_{i=0}^{q} x_i = 1 \right\}$$

En particular

$$\xi_q^j : \Delta_{q-1} \subset \mathbb{R}^q \to \Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}; \quad j = 0, 1, \dots, q$$

$$\xi_i^n(e^j) = \begin{cases} e^j & \text{para } j < i \\ e^{i+1} & \text{para } j \geq i \end{cases}$$

$$Im(\xi_j^n) = \xi_j^n(\Delta_{q-1}) = \{(x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in \Delta_n \ / \ x_j = 0\}$$

La figura 5 representa los vértices y caras de simplejos.

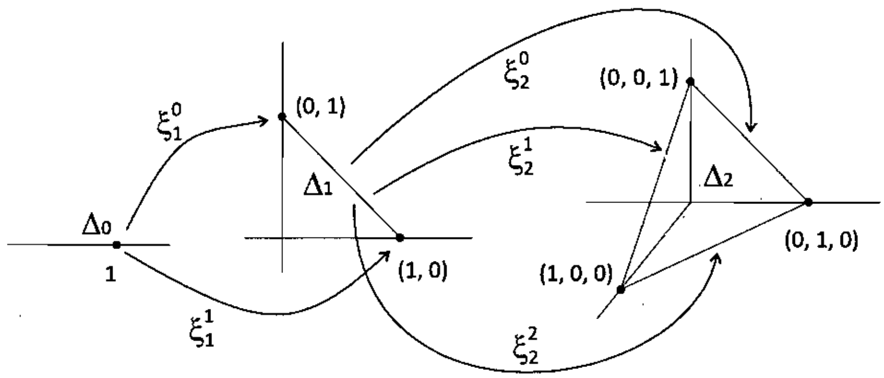

Figura 5: Vértices y caras de simplejos.

La frontera de Δ_q es $\Delta_q^0 = \bigcup_{j=0}^{q} Im(\xi_q^j)$.
Además $\xi_k^{n-1} \circ \xi_1^n = \xi_1^{n-1} \circ \xi_{k-1}^n$ para $k < i$.

Definición 2.4.4. Sea X un espacio topológico. Un **q-simplejo singular** es una aplicación continua:

$$\sigma_q : \Delta_q \to X \ , \quad q \geq 0$$

Ejemplo 2.4.5. Si X es un espacio topológico:

1. La figura 6 representa el 0-simplejo singular $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$.

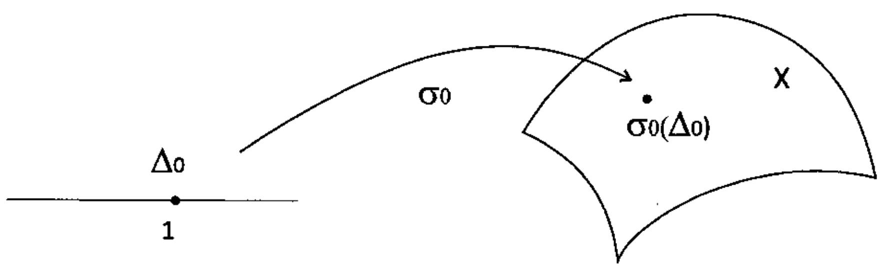

Figura 6: El 0-simplejo singular.

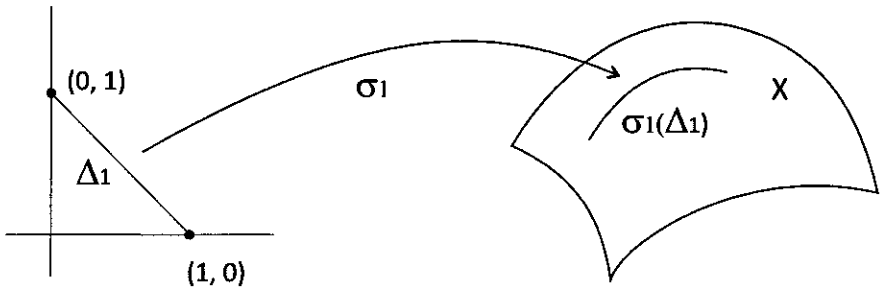

Figura 7: El 1-simplejo singular.

2. La figura 7 representa el 1-simplejo singular $\sigma_1 : \Delta_1 \to X$.

3. La figura 8 representa el 2-simplejo singular $\sigma_2 : \Delta_2 \to X$.

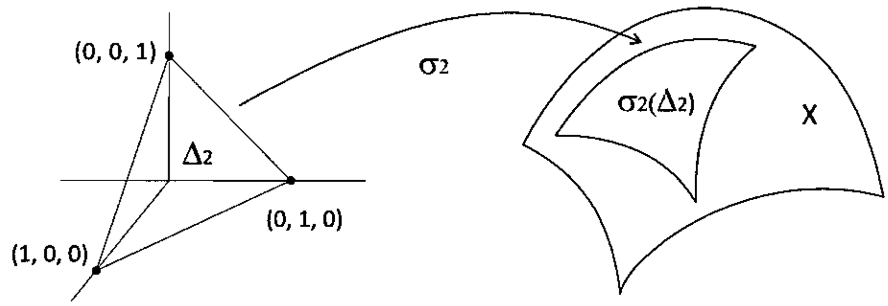

Figura 8: El 2-simplejo singular.

Ahora si $S_q(X)$ es el conjunto de todos los simplejos singulares considérese:
Sea $C_q(X) = \left\{ \sum_q a_q\sigma_q \ / \ \sigma_q \in S_q(X)\ ,\ a_q \in Z,\ a_q = 0 \text{ excepto un número finito} \right\}$
Dada la representación de los elementos de $C_q(X)$ éste es un grupo abeliano libre llamado **q-cadena singular**, cuya base son los simplejos singulares.
Se define $C_q(X) = 0$ si $q < 0$.

Definición 2.4.6. El **operador borde** o **frontera** es dado por:

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X) \ / \ \partial_n(\sigma_n) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\xi_j$$

Donde ξ_j es llamada la j-ésima cara de ∂_n y $\xi_j = \sigma_n \circ \xi_j^n$ y cuando $n \leq 0$ se considera a ∂_n como el homomorfismo trivial.

Proposición 2.4.7. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Demostración: La prueba será para simplejos, para cualquier elemento de $C_n(X)$ se extiende por linealidad.

La i-ésima cara ξ_i está definida como la composición:

$$\Delta_{n-1} \xrightarrow{\xi_i^n} \Delta_n \xrightarrow{\sigma_n} X \text{ donde } \xi_i^n(e^j) = \begin{cases} e^j & \text{para } j < i \\ e^{j+1} & \text{para } j \geq i \end{cases}$$

Para $k < i$ sabemos que $\xi_k^{n-1} \circ \xi_1^n = \xi_i^{n-1} \circ \xi_{k-1}^n$ (*)

Casos:

a) Para $j < k < i$

b) Para $j \geq k,\ k < i,\ j \geq i$

Así $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma_n) = \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma_n)) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi_i\right)$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \sigma_{n-1}\xi_j^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_n \xi_i^n\right] = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_i^n)]$$

$$= \sum_{0\leq j\leq i\leq n}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_i^n)] + \sum_{0\leq i\leq j\leq n-1}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_i^n)]$$

por (*) tenemos

$$= \sum_{0\leq j\leq i\leq n}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_{j-1}^n)] + \sum_{0\leq i\leq j\leq n-1}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_i^n)]$$

Tomando $i \leq j$ hacemos $i = j' - 1$, $j = i'$

entonces $j' - 1 \leq i' \Rightarrow j' \leq i' + 1 \Rightarrow 0 \leq j' \leq n - 1 + 1 = n$

$\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_n)$

$$= \sum_{0\leq j\leq i\leq n}(-1)^{i+j}[(\sigma_{n-1}\xi_j^{n-1})(\sigma_n\xi_{j-1}^n)] + \sum_{0\leq j'\leq i'\leq n}(-1)^{i'+j'-1}[(\sigma_{n-1}\xi_{i'}^{n-1})(\sigma_n\xi_{j'-1}^n)]$$

$$= \sum_{0\leq j\leq i\leq n}[(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j+1}][(\sigma_{n-1}\xi_i^{n-1})(\sigma_n\xi_{j-1}^n)] = 0$$ □

Así obtenemos la siguiente secuencia semiexacta:

$$C(X): \quad \ldots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X) \to \ldots$$

llamado **complejo de cadenas singulares.**

2.4.2. Grupos de Cohomología Singular sobre el grupo Abeliano G

Sea X un espacio topológico, G un grupo Abeliano y para cada n sea el grupo Abeliano de todos los homomorfismos de $C_n(X)$ en G

$$C^n(X,G) = Hom[C_n(X), G]$$

llamado **grupo de cocadenas singulares sobre** G.
Como $C_n(X) = 0$; $n < 0$ entonces $C^n(X,G) = 0$; $n < 0$.
Ahora para $n \geq 0$, como $C_n(X)$ es un grupo Abeliano libre generado por $S_n(X)$ de todos los n-simplejos singulares en X. Se sigue que la asignación $\phi \to \phi|_{S_n(X)}$ define un isomorfismo

$$\iota : Hom[C_n(X), G] \cong Fun[S_n(X), G]$$

donde $Fun[S_n(X), G]$ es el grupo Abeliano de las funciones de S_n en G. Así los elementos de $C^n(X,G)$ pueden ser consideradas como funciones de S_n en G.
Ahora para cada entero n considérese el **operador borde** $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ y el automorfismo identidad $i : G \to G$. El homomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} Hom(\partial, i) & : & Hom[C_{n-1}(X), G] & \to & Hom[C_n(X), G] \\ & & \phi & \mapsto & i \circ \phi \circ \partial \end{array}$$

el cual será denotado:

$$\delta : C^{n-1}(X;G) \to C^n(X;G)$$

será llamado el **operador coborde** sobre el grupo $C^{n-1}(X;G)$. Nótese que si $n \leq 0$ entonces $C^{n-1}(X;G) = 0$ por lo que $\delta = 0$.
Asumamos que $n > 0$ y que $\phi \in C^{n-1}(X;G)$. Entonces $\phi : C_n(X) \to G$ es un homomorfismo y $\delta(\phi) \in C^n(X;G)$: $\delta(\phi) = \phi \circ \partial : C_n(X) \to G$
Para todo n-simplejo σ en X tenemos

$$[\delta(\phi)](\sigma) = \phi[\partial(\sigma)] = \phi\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma^i\right] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\phi[\sigma^i]$$

Teorema 2.4.8. La siguiente composición

$$C^{n-1}(X;G) \xrightarrow{\delta} C^n(X;G) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(X;G)$$

es el homomorfismo trivial $\delta \circ \delta = 0$.

Demostración.

Sea $\phi \in C^{n-1}(X;G)$ entonces

$$\delta \circ \delta(\phi) = \delta(\phi \circ \partial) = \phi \circ \partial \circ \partial = 0$$

□

Así obtenemos la secuencia semiexacta:

$$C^*(X;G): \quad \ldots \to C^{n-1}(X;G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n(X;G) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(X;G) \to \ldots$$

llamada **complejo de cocadenas singulares de X sobre G**. Ahora los grupos:

$$Z^n(X;G) = Nuc(\delta_n)$$

llamado **cociclos singulares** de X en G.

$$B^n(X;G) = Im(\delta_{n-1})$$

llamado **cobordes singulares** de X en G. Como $C^*(X,G)$ es semiexacta se tiene $B^n(X;G) \subset Z^n(X;G)$. Se tiene el grupo cociente:

$$H^n(X;G) = \frac{Z^n(X;G)}{B^n(X;G)}$$

llamado **grupo de cohomología singular** de X sobre G.

En particular si $G = \mathbb{Z}$, entonces

$$H^n(X) = H^n(X;\mathbb{Z})$$

es llamado **grupo de cohomología singular entera** del espacio X. Por otro lado sea A un subespacio de X. Entonces el subgrupo de $C^n(X,G)$ definido por

$$C^n(X,A;G) = \{\phi \in C^n(X;G) \ : \ \phi[C_n(A)] = 0\}$$

es llamado el **grupo de n-cocadenas singulares del par (X,A) sobre G**.

De la definición podemos trabajar con la restricción:

$$\delta : C^{n-1}(X,A;G) \to C^n(X,A;G)$$

donde también se tiene $\delta \circ \delta = 0$ y la secuencia semiexacta:

$$C^*(X,A;G): \quad \ldots \to C^{n-1}(X,A;G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n(X,A;G) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(X,A;G) \to \ldots$$

llamado **complejo de cocadenas singulares del par (X,A) sobre G.**

De manera análoga tenemos el grupo cociente:

$$H^n(X,A;G) = \frac{Z^n(X,A;G)}{B^n(X,A;G)}$$

llamado **n-grupo de cohomología singular de X módulo A sobre G.**

En particular $H^n(X,A) = H^n(X,A;\mathbb{Z})$ es llamado **n-grupo de cohomología singular** de X módulo A.

Proposición 2.4.9. Si $n < 0$ entonces $H^n(X,A;G) = 0$.

Demostración.

Esto se debe a que $C^n(X,A;G) = 0$. □

2.4.3. Homomorfismo inducido, secuencia exacta en cohomología

Sean $(X,A),(Y,B)$ pares topológicos y la aplicación $f:(X,A) \to (Y,B)$. Para cada $n \geq 0$ se tiene la función

$$\begin{array}{rcccl} S_n(f) & : & S_n(X) & \to & S_n(Y) \\ & & \sigma & \to & S_n(f)(\sigma) = f \circ \sigma \end{array}$$

extendiendo se tiene el homomorfismo único:

$$C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$$

Como $S_n(f)$ lleva $S_n(A)$ en $S_n(B)$ entonces $C_n(f)$ lleva $C_n(A)$ en $C_n(B)$, podemos definir el homomorfismo:

$$C_n(f) : [C_n(X), C_n(A)] \to [C_n(Y), C_n(B)]$$

Lema 2.4.10. El rectángulo de homomorfismos es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] \arrow[d, "\partial_n^X"'] & C_n(Y) \arrow[d, "\partial_n^Y"] \\ C_{n-1}(X) \arrow[r, "C_{n-1}(f)"] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Demostración.

$$[\partial_n^Y \circ C_n(f)](\sigma_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (f \circ \sigma_n \circ \xi_n^j) = [C_{n-1}(f) \circ \partial_n^X](\sigma_n). \qquad \square$$

Ahora sea G grupo Abeliano y $i : G \to G$ la identidad, entonces del homomorfismo

$$Hom[C_n(f), i] : C^n(Y; G) \to C^n(X; G)$$

que lleva $C^n(Y, B; G)$ en $C^n(X, A; G)$ se tiene el homomorfismo

$$C^n(f; G) : C^n(Y, B; G) \to C^n(X, A; G)$$

donde para $\xi : C_n(Y) \to G$ en $C^n(Y, B; G)$ se tiene

$$[C^n(f; G)](\xi) = \xi \circ C_n(f) : C_n(X) \to G$$

Por lo que del Lema anterior se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.4.11. El rectángulo de homomorfismos es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^{n-1}(Y, B; G) \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "C^{n-1}(f;G)"'] & C^n(Y, B; G) \arrow[d, "C^n(f;G)"] \\ C^{n-1}(X, A; G) \arrow[r, "\delta_X"] & C^n(X, A; G) \end{tikzcd}$$

Es decir, $\delta_X \circ C^{n-1}(f; G) = C^n(f; G) \circ \delta_Y$.

Obteniéndose una transformación de complejos de cocadenas singulares

$$C^*(f; G) : C^*(Y, B; G) \to C^*(X, A; G)$$

inducida de la aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$. Como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & C^{n-1}(Y, B; G) \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "C^{n-1}(f;G)"'] & C^n(Y, B; G) \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d, "C^n(f;G)"'] & C^{n+1}(Y, B; G) \arrow[r] \arrow[d, "C^{n+1}(f;G)"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & C^{n-1}(X, A; G) \arrow[r, "\delta_X"] & C^n(X, A; G) \arrow[r, "\delta_X"] & C^{n+1}(X, A; G) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Donde para cada entero n los homomorfismos:

$$C^n(f; G) : C^n(Y, B; G) \to C^n(X, A; G)$$

lleva $Z^n(Y, B; G)$ en $Z^n(X, A; G)$ y $B^n(Y, B; G)$ en $B^n(X, A; G)$

Por lo que el homomorfismo $C^n(f; G)$ induce un homomorfismo:

$$f^* = H^n(f; G) : H^n(Y, B; G) \to H^n(X, A; G)$$

llamado **homomorfismo inducido** por la aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ sobre el n-grupo de cohomología singular $H^n(Y, B; G)$.

Observación 2.4.12. De la definición se tienen:

1. Si $i : (X, A) \to (X, A)$ entonces el homomorfismo inducido

$$i^* = H^n(i; G) : H^n(X, A; G) \to H^n(X, A; G)$$

es el automorfismo identidad.

2. Para las aplicaciones de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ y n entero se tiene:

$$H^n(g \circ f; G) = H^n(f; G) \circ H^n(g; G)$$

Ahora considérese $z \in Z^{n-1}(A; G)$ que como un elemento de $C^{n-1}(A; G)$ es un homomorfismo $z : C_{n-1}(A) \to G$. Como $C_{n-1}(A)$ es un sumando directo de $C_{n-1}(X)$ existe un homomorfismo $u : C_{n-1}(X) \to G$ tal que $u|_{C_{n-1}(A)} = z$.

Por definición u es un elemento de $C^{n-1}(X; G)$ por lo que se obtiene un elemento $\delta(u) \in C^n(X; G)$ a través del **operador coborde**:

$$\delta : C^{n-1}(X; G) \to C^n(X; G)$$

Lema 2.4.13. El elemento $\delta(u)$ está contenido en el subgrupo $Z^n(X, A; G)$ del grupo $C^n(X; G)$

Demostración.

Sea c un elemento en $C_n(A)$ entonces

$$[\delta(u)](c) = u[\partial(c)] = z[\partial(c)] = [\delta(z)](c) = 0$$

Luego $\partial(c) \in C_{n-1}(A)$ y $z \in Z^{n-1}(A; G)$ entonces $\delta(u) \in C^n(X, A; G)$. Por otro lado tenemos:

$$\delta[\delta(u)] = (\delta \circ \delta)(u) = 0$$

Por tanto $\delta(u) \in Z^n(X, A; G)$.

Ahora considerando la proyección natural

$$\rho : Z^n(X, A; G) \to H^n(X, A; G)$$

Tenemos el siguiente lema:

Lema 2.4.14. El elemento $\rho[\delta(u)] \in H^n(X, A; G)$ es independiente de la elección de $u \in C^{n-1}(X; G)$ por lo que depende sólo del elemento $z \in Z^{n-1}(A; G)$

Demostración.

Sean u, v elementos en $C^{n-1}(X; G)$ satisfaciendo

$$u|_{C_{n-1}(A)} = z = v|_{C_{n-1}(A)}$$

Por lo que bastará probar que $\rho[\delta(u)] = \rho[\delta(v)]$
Consideremos el elemento $u - v$ de $C^{n-1}(X; G)$. Como $(u - v)|_{C_{n-1}(A)} = z - z = 0$ se sigue que $u - v$ está contenido en el subgrupo $C^{n-1}(X, A; G)$ de $C^{n-1}(X; G)$. Lo cual implica que el elemento $\delta(u - v) \in B^n(X, A; G)$ por lo que:

$$\rho[\delta(u)] - \rho[\delta(v)] = \rho[\delta(u - v)] = 0$$

Por tanto $\rho[\delta(u)] = \rho[\delta(v)]$.

De este lema definamos el homomorfismo:

$$\phi : Z^{n-1}(A; G) \to H^n(X, A; G)$$

asignando a cada elemento $z \in Z^{n-1}(A; G)$ el elemento

$$\phi(z) = \rho[\delta(u)] \in H^n(X, A; G)$$

con $u \in C^{n-1}(X; G)$ satisfaciendo $u|_{C_{n-1}(A)} = z$.

Lema 2.4.15. El núcleo del homomorfismo ϕ contiene al subgrupo $B^{n-1}(A; G)$ de $Z^{n-1}(A; G)$.

Demostración.

Sea z un elemento en $B^{n-1}(A; G)$ entonces por definición existe un elemento y de $C^{n-2}(A; G)$ con $\delta(y) = z$. Luego considerando un elemento $v \in C^{n-2}(X; G)$ con $v|_{C_{n-2}(A)} = y$ entonces el elemento

$$u = \delta(v) \in C^{n-1}(X; G)$$

satisface $u|_{C_{n-1}(A)} = z$ por lo que

$$\phi(z) = \rho[\delta(u)] = \rho[\delta^2(v)] = 0$$

Con lo que se tiene la demostración.

El homomorfismo $\phi : Z^{n-1}(A; G) \to H^n(X, A; G)$ induce

$$\delta : H^{n-1}(A; G) \to H^n(X, A; G)$$

llamado **operador coborde** del par (X, A) sobre el grupo $H^{n-1}(A; G)$. Por otro lado considerando la aplicación de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ donde la aplicación $g : A \to B$ es definida por f entonces tenemos:

Proposición 2.4.16. Para cada entero n y G grupo Abeliano el rectángulo de homomorfismos

$$\begin{tikzcd} H^{n-1}(B; G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g^*"'] & H^n(Y, B; G) \arrow[d, "f^*"] \\ H^{n-1}(A; G) \arrow[r, "\delta"] & H^n(X, A; G) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, o sea $\delta \circ g^* = f^* \circ \delta$.

Demostración.

Ver Hu S. T. (1966)[7].

Finalmente sean el par (X, A), G grupo Abeliano y las inclusiones

$$i : A \to X \ , \ j : X \to (X, A)$$

Las cuales para cada entero n inducen los homomorfismos:

$$i^* : H^n(X; G) \to H^n(A; G)$$

$$j^* : H^n(X, A; G) \to H^n(X; G)$$

y considerando el operador coborde obtenemos la secuencia:

$$\ldots \to H^{n-1}(A; G) \xrightarrow{\delta} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \to \ldots$$

llamada **secuencia en cohomología singular del par (X, A) sobre G.**

Proposición 2.4.17. La secuencia en cohomología singular del par (X, A) sobre G

$$\ldots \to H^{n-1}(A; G) \xrightarrow{\delta} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \to \ldots$$

es exacta.

Demostración.

Ver Hu S. T. (1966)[7]. □

2.5. Verificación de axiomas en Cohomología Singular

En esta sección verificamos los axiomas para una teoría de Cohomología sobre los Grupos de Cohomología Singular.

Considerar la categoría admisible $\mathcal{C}_T$ de todos los pares topológicos (X, A) y todas las aplicaciones de tales pares. Denotemos G un grupo Abeliano arbitrario. Definamos una colección de tres funciones

$$\mathcal{H} = \{H, *, \delta\}$$

como sigue. Para la primera función H asignamos a cada par topológico (X, A) y a cada entero n el n**-grupo de cohomología singular**

$$H^n(X, A; G)$$

del par topológico (X, A) sobre G. Para la segunda función $*$, asignamos a cada aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{C}_T$ y a cada entero q el **homomorfismo inducido**

$$f^* : H^q(Y, B; G) \to H^q(X, A; G).$$

Para la tercera función δ, asignar a cada par topológico (X, A) y a cada entero q el **operador coborde**

$$\delta : H^{q-1}(A; G) \to H^q(X, A; G).$$

Para establecer que esta colección $\mathcal{H}$ es una teoría de cohomología sobre la categoría $\mathcal{C}_T$, tenemos que verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Por la Observación (2.4.12), $\mathcal{H}$ satisface el axioma de identidad (I) y el axioma de composición (II). Además de la Proposición (2.4.16), $\mathcal{H}$ satisface el axioma de conmutatividad (III). En vista de la Proposición (2.4.17), $\mathcal{H}$ satisface los axiomas de exactitud (IV). Restando verificar los axiomas del V al VII.

Para verificar el axioma de homotopía (V), es suficiente probar que para cualquier par topológico (X, A), las dos inmersiones canónicas

$$\kappa_0, \kappa_1 : (X; A) \to (X, A) \times I.$$

definidas por $\kappa_0(x) = (x, 0)$ y $\kappa_1(x) = (x, 1)$ para cada $x \in X$, inducen el mismo homomorfismo

$$\kappa_0^* = \kappa_1^* : H^q(X \times I, A \times I; G) \to H^q(X, A; G)$$

Para este propósito, establescamos el siguiente lema.

Lema 2.5.1. Para cada espacio topológico X y cada entero n, existe un homomorfismo

$$D_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times I)$$

satisfaciendo las siguientes tres condiciones:

(a) Para cada entero n y cada elemento c de $C_n(X)$, tenemos

$$\partial[D_n(c)] + D_{n-1}[\partial(c)] = [C_n(\kappa_1)](c) - [C_n(\kappa_0)](c).$$

(b) Para todo subespacio A de X, D_n envía el subgrupo $C_n(A)$ de $C_n(X)$ en el subgrupo $C_{n+1}(A \times I)$ de $C_{n+1}(X \times I)$.

(c) Para toda aplicación $f : X \to Y$ y cada entero n, el siguiente rectángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "D_n"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_{n+1}(X \times I) \arrow[d, "C_{n+1}(f \times i)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "D_n"] & C_{n+1}(Y \times I) \end{tikzcd}$$

Donde $i : I \to I$ denota la aplicación identidad.

Demostración Primero considerar todo $n < 0$. Ya que $C_n(X) = 0$ para cada espacio topológico, debemos tener

$$D_n = 0$$

Las condiciones (a) hasta la (c) son obviamente satisfechas para todo $n < 0$.

Ahora consideremos $n = 0$. Denotemos por X cualquier espacio topológico. Para cada 0-simplejo singular $\xi : \Delta_0 \to X$, denotemos por $F_0(\xi)$ al 1-simplejo

$$F_0(\xi) : \Delta_1 \to X \times I$$

definido por

$$[F_0(\xi)](x_0, x_1) = [\xi(\Delta_0), x_1]$$

para cada punto (x_0, x_1) del 1-simplejo unidad Δ_1. La asignación $\xi \to F_0(\xi)$ define una función

$$F_0 : S_0(X) \to C_1(X \times I).$$

Desde que $C_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $S_0(X)$, F_0 se extiende a un único homomorfismo

$$D_0 : C_0(X) \to C_1(X \times I).$$

Es sencillo verificar que las condiciones de la (a) hasta la (c) son satisfechas para todo $n \leq 0$.

Finalmente, completemos la construcción por inducción. Para este propósito, sea $q > 0$ cualquier entero positivo tal que, para cada $n < q$, D_n es construido para todo espacio topológico X de tal forma que las condiciones de la (a) a la (c) son satisfechas.

Considerar la aplicación identidad

$$\iota_q : \Delta_q \to \Delta_q$$

Como un q-simplejo singular del espacio Δ_q y así como un elemento del grupo $C_q(\Delta_q)$. Desde que $\partial(\iota_q) \in C_{q-1}(\Delta_q)$, se sigue de nuestra suposición inductiva (a) que

$$[C_{q-1}(\kappa_1)](\partial\iota_q) - [C_{q-1}(\kappa_0)](\partial\iota_q) = \partial[D_{q-1}(\partial\iota_q)]$$

porque $\partial(\partial(\iota_q)) = 0$. De otro lado, tenemos

$$\partial\{[C_q(\kappa_1)](\iota_q) - [C_q(\kappa_0)](\iota_q)\} = [C_{q-1}(\kappa_1)](\partial\iota_q) - [C_{q-1}(\kappa_0)](\partial\iota_q)$$

por el Lema (2.4.10). Se sigue que el elemento

$$[C_q(\kappa_1)](\iota_q) - [C_q(\kappa_0)](\iota_q) - D_{q-1}[\partial(\iota_q)]$$

de $C_q(\Delta_q \times I)$ es un ciclo. Desde que $\Delta_q \times I$ es homeomorfo a un subespacio estrellado de un espacio Euclidiano, la sucesión

$$C_{q+1}(\Delta_q \times I) \xrightarrow{\partial} C_q(\Delta_q \times I) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(\Delta_q \times I)$$

es exacta. Así existe un elemento e_q de $C_{q+1}(\Delta_q \times I)$ satisfaciendo

$$\partial(e_q) = [C_q(\kappa_1)](\iota_q) - [C_q(\kappa_0)](\iota_q) - D_{q-1}[\partial(\iota_q)].$$

Teniendo seleccionado $e_q \in C_{q+1}(\Delta_q \times I)$, definimos para cualquier espacio topológico X una función

$$F_q : S_q(X) \to C_{q+1}(X \times I)$$

como sigue. Sea $\xi \in S_q(X)$ arbitrariamente dado. Entonces ξ es una aplicación

$$\xi : \Delta_q \to X$$

Considerar el producto topológico

$$\xi \times i : \Delta_q \times I \to X \times I$$

y ξ y la aplicación identidad $i : I \to I$. Luego definimos F_q por tomar

$$F_q(\xi) = [C_{q+1}(\xi \times i)](e_q).$$

Ya que $C_q(X)$ es un grupo Abeliano libre generado por $S_q(X)$, esta función F_q se extiende a un único homomorfismo

$$D_q : C_q(X) \to C_{q+1}(X \times I).$$

La verificación de la condición (a) a la (c), es sencilla y por tanto es omitida. Esto completa la construcción inductiva y prueba el Lema (2.5.1). □

Por las condiciones (a) y (b), la sucesión $\{D_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es llamada una **homotopía de cadenas** entre los **homomorfismos de cadenas**.

$$C(\kappa_0), C(\kappa_1) : [C(X), C(A)] \to [C(X \times I), C(A \times I)].$$

Por la condición (c), esta homotopía de cadenas se dice ser *natural* o *funtorial*.

El método usado en la prueba del Lema (2.5.1) es un caso especial del método general de modelos acíclicos, ver Hu S. T. (1966)[7]. En vez de formular su forma general abstracta, preferimos repetir el método en diferentes formas para varios casos especiales.

Ahora probemos que

$$\kappa_0^* = \kappa_1^* : H^q(X \times I, A \times I; G) \to H^q(X, A; G).$$

Para este propósito, denotemos por α un elemento arbitrario de $H^q(X \times I, A \times I; G)$. Seleccionar algún cociclo $\phi \in Z^q(X \times I, A \times I; G)$ que representa α. Luego por definición, ϕ es un homomorfismo

$$\phi : C_q(X \times I) \to G$$

Satisfaciendo $\phi \circ \partial = 0$ y $\phi[C_q(A \times I)] = 0$. Entonces $\kappa_0^*(\alpha)$ y $\kappa_1^*(\alpha)$ son representados por los cociclos

$$\phi \circ C_q(\kappa_0), \phi \circ C_q(\kappa_1) : C_q(X) \to G,$$

respectivamente. La composición

$$\psi = \phi \circ D_{q-1} : C_{q-1}(X) \to G$$

del homomorfismo $D_{q-1} : C_{q-1}(X) \to C_q(X \times I)$ en (2.5.1) y $\phi : C_q(X \times I) \to G$ es una $(q-1)$-cocadena singular de X sobre G. Desde que D_{q-1} envía $C_{q-1}(A)$ en $C_q(A \times I)$ y ϕ envía $C_q(A \times I)$ en 0, tenemos $\psi[C_{q-1}(A)] = 0$ y por tanto

$$\psi \in C^{q-1}(X, A; G).$$

Por la definición de coborde, tenemos

$$\delta\psi = \psi \circ \partial = \phi \circ D_{q-1} \circ \partial.$$

Por la condición (a) del Lema (2.5.1), tenemos

$$D_{q-1} \circ \partial = C_q(\kappa_1) - C_q(\kappa_0) - \partial \circ D_q.$$

Consecuentemente, tenemos

$$\delta\psi = \phi \circ C_q(\kappa_1) - \phi \circ C_q(\kappa_0)$$

pues $\phi \circ \partial = 0$. Esto implica $\kappa_0^*(\alpha) = \kappa_1^*(\alpha)$ y completa la verificación del axioma de homotopía (V).

Ahora verificamos el axioma de excisión (VI). Para este propósito, primero construimos, para cada espacio topológico X arbitrariamente dado y cada entero n, dos homomorfismos especiales

$$sd_n : C_n(X) \to C_n(X)$$

$$D_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$$

satisfaciendo las siguientes tres condiciones:

(a) Para cada entero n y cada elemento c de $C_n(X)$, tenemos

$$\partial[sd_n(c)] = sd_{n-1}[\partial(c)],$$

$$\partial[D_n(c)] + D_{n-1}[\partial(c)] = sd_n(c) - c.$$

(b) Para todo subespacio A de X, tenemos

$$sd_n[C_n(A)] \subset C_n(A),$$

$$D_n[C_n(A)] \subset C_{n+1}(A).$$

(c) Para toda aplicación $f : X \to Y$ y cada entero n, los siguientes dos rectángulos son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "sd_n"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_n(X) \arrow[d, "C_n(f)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "sd_n"] & C_n(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "D_n"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_{n+1}(X) \arrow[d, "C_{n+1}(f)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "D_n"] & C_{n+1}(Y) \end{tikzcd}$$

Primero considerar todo $n < 0$. Desde que $C_n(X) = 0$ para todo espacio topológico X, debemos tener

$$sd_n = 0, \quad D_n = 0.$$

Las condiciones de la (a) a la (c) son obviamente satisfechas para todo $n < 0$. Luego considerar $n = 0$. Para cada espacio topológico X, definimos los homomorfismos sd_0 y D_0 por tomar

$$sd_0(c) = c, \quad D_0(c) = 0$$

para cada elemento c de $C_0(X)$. Las condiciones de la (a) hasta la (c) son obviamente satisfechas para cada $n \leq 0$.

Luego, sea $q \geq 0$ y considerar el q-simplejo unidad Δ_q en el $(q+1)$-espacio Euclidiano R^{q+1}. Entonces Δ_q es un espacio métrico compacto y es un subespacio convexo de R^{q+1}.

Un simplejo singular $\xi : \Delta_n \to \Delta_q$ en Δ_q se dice ser *lineal* si y sólo si, para cada punto $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de Δ_n, tenemos

$$\xi(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \xi(v_i),$$

donde v_i denota el i-ésimo vértice de Δ_n. Para cada n, los n-simplejos singulares lineales en Δ_q generan un sumando directo $L_n(\Delta_q)$ del grupo Abeliano libre $C_n(\Delta_q)$. Obviamente tenemos

$$L_n(\Delta_0) = C_n(\Delta_0),$$

$$\partial[L_n(\Delta_q)] \subset L_{n-1}(\Delta_q).$$

Un simplejo singular lineal $\xi : \Delta_n \to \Delta_q$ es completamente determinado por los $n+1$ puntos $\xi(v_0), \xi(v_1), \cdots, \xi(v_n)$ en Δ_q. Para cualquier $n+1$ puntos $w_0, w_1, \cdots, w_n$ en Δ_q, usaremos $(w_0, w_1, \cdots, w_n)$ para denotar el simplejo singular lineal $\xi : \Delta_n \to \Delta_q$ satisfaciendo

$$\xi(v_i) = w_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

Luego claramente tenemos

$$\partial(w_0, w_1, \cdots, w_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (w_0, \cdots, \hat{w}_i, \cdots, w_n),$$

donde el circunflexo sobre $\hat{w}_i$ significa que w_i es omitida.

Desde que $L_n(\Delta_q)$ es el grupo Abeliano libre generado por los n-simplejos singulares lineales en Δ_q, podemos definir un homomorfismo

$$h_n : L_n(\Delta_q) \to L_{n+1}(\Delta_q)$$

por tomar

$$h_n(w_0, w_1, \cdots, w_n) = (c, w_0, w_1, \cdots, w_n)$$

para cada n-simplejo singular lineal $(w_0, w_1, \cdots, w_n)$ en Δ_q, donde c denota el centroide de Δ_q; que es, $c = (c_0, c_1, \cdots, c_q)$ con

$$c_i = \frac{1}{q+1} \quad (i = 0, 1, \cdots, q).$$

Ahora completemos la construcción por inducción sobre n. Para este propósito, denotemos por q cualquier entero y supongamos que sd_n y D_n han sido construidos satisfaciendo las condiciones (a) a la (c) y la siguiente condición:

(d) Para cada entero $m \geq 0$, tenemos

$$sd_n[L_n(\Delta_m)] \subset L_n(\Delta_m)$$

$$D_n[L_n(\Delta_m)] \subset L_{n+1}(\Delta_m)$$

para todo $n < q$.

Note que (d) es obviamente satisfecha cuando $q = 1$.

Considerar la aplicación identidad $\iota_q : \Delta_q \to \Delta_q$ como un q-simplejo singular lineal en Δ_q. Por medio del homomorfismo h_n y la condición (d), definimos

$$e_q = h_{q-1}[sd_{q-1}(\partial\iota_q)] \in L_q(\Delta_q),$$

$$k_q = h_q[e_q - \iota_q - D_{q-1}(\partial\iota_q)] \in L_{q+1}(\Delta_q).$$

Para definir sd_q y D_q, denotemos por X un espacio topológico arbitrario. Sea

$$\xi : \Delta_q \to X$$

un q-simplejo singular arbitrario en X. Como una aplicación continua, ξ induce un homomorfismo

$$C_n(\xi) : C_n(\Delta_q) \to C_n(X)$$

para cada entero n. Desde que $C_q(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los q-simplejos singulares en X, podemos definir los homomorfismos sd_q y D_q por tomar

$$sd_q(\xi) = [C_q(\xi)](e_q)$$

$$D_q(\xi) = [C_{q+1}(\xi)](k_q)$$

para cada q-simplejo singular ξ en X. La verificación de la condición (a) a la (d) es sencilla y por tanto es omitida. Esto completa la construcción del homomorfismo sd_n y D_n.

Por las condiciones (a) y (b), la sucesión $sd = \{sd_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es un homomorfismo de cadenas

$$sd : [C(X), C(A)] \to [C(X), C(A)]$$

y la sucesión $D = \{D_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es una homotopía de cadenas entre sd y el homomorfismo de cadenas identidad

$$id : [C(X), C(A)] \to [C(X), C(A)].$$

Por la condición (c), sd y D se dicen que son *naturales* o *funtoriales*.

Para todo entero $m \geq 0$, definimos un homomorfismo de cadenas

$$sd^m : [C(X), C(A)] \to [C(X), C(A)]$$

inductivamente por tomar $sd^0 = id$, y

$$sd^m = sd \circ sd^{m-1}$$

para todo $m > 0$.

Ahora consideremos una colección

$$\gamma = \{E_\mu / \mu \in M\}$$

de subconjuntos de un espacio topológico X tal que

$$X = \cup_{\mu \in M} \text{Int}(E_\mu).$$

Un simplejo singular $\xi : \Delta_n \to X$ se dice ser **pequeño** (con respecto a γ) si y sólo si existe un $\mu \in M$ con $\xi(\Delta_n) \subset E_\mu$. Los n-simplejos singulares pequeños en X generan un sumando directo $K_n(X)$ de los grupos Abelianos libres $C_n(X)$. Obviamente tenemos

$$\partial[K_n(X)] \subset K_{n-1}(X).$$

Así obtenemos una sucesión inferior semiexacta

$$\cdots \to K_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} K_n(X) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}(X) \to \cdots$$

la cual será referida como el **subcomplejo pequeño** $K(X)$ del complejo de cadenas singular $C(X)$ con respecto a γ.

Para un subespacio A arbitrariamente dado de X, sea

$$K(A) = K(X) \cap C(A).$$

Luego $K(A)$ es un subcomplejo de $K(X)$. Consideremos el homomorfismo de cadenas inclusión

$$\theta : [K(X), K(A)] \to [C(X), C(A)].$$

Lema 2.5.2. El homomorfismo de cadenas inclusión θ es una **equivalencia de cadenas**; en otras palabras, existe un homomorfismo de cadenas

$$\tau : [C(X), C(A)] \to [K(X), K(A)]$$

tal que los homomorfismos de cadenas compuestos $\theta \circ \tau$ y $\tau \circ \theta$ son homotópicos a los homomorfismos de cadenas identidad.

Demostración.

Considerar $\xi : \Delta_n \to X$ simplejo singular dado arbitrariamente. Para cada $\mu \in M$, Sea

$$U_\mu = \xi^{-1}[\mathrm{Int}(E_\mu)].$$

Entonces $\beta = \{U_\mu / \mu \in M\}$ es un cubrimiento abierto del espacio métrico compacto Δ_n. Denotemos $\lambda > 0$ el número de Lebesgue de β. Ver Hu S. T. (1964)[6].

Para todo n-cadena singular

$$c = \sum_\sigma a_\sigma \in C_n(\Delta_n),$$

Definimos

$$\mathrm{mesh}(c) = \sup\{\mathrm{diam}\ \sigma(\Delta_n) / a_\sigma \neq 0\},$$

Si c es lineal, entonces podemos fácilmente verificar que

$$\mathrm{mesh}[sd(c)] \leq (\frac{n}{n+1})\mathrm{mesh}(c).$$

Denotemos por $\kappa(\xi)$ el entero no negativo mas pequeño que satisface

$$(\frac{n}{n+1})^{\kappa(\xi)}\text{diam}(\Delta_n) \leq \lambda.$$

Denotemos con $\iota_n : \Delta_n \to \Delta_n$ la aplicación identidad. Entonces ι_n es un n-simplejo singular lineal en Δ_n con

$$\text{mesh}[sd^{\kappa(\xi)}(\iota_n)] \leq \lambda.$$

Ya que $sd^{\kappa(\xi)}(\xi)$ es la imagen de $sd^{\kappa(\xi)}(\iota_n)$ bajo el homomorfismo $C_n(\xi)$, esto implica

$$sd^{\kappa(\xi)}(\xi) \in K_n(X).$$

Es claro que $\kappa(\xi) = 0$ si y sólo si ξ es pequeño y que

$$\kappa[\xi^{(i)}] \leq \kappa(\xi)$$

se cumple para todo entero $i = 0, 1, \cdots, n$, donde $\xi^{(i)}$ denota la i-ésima cara de ξ.

Para todo entero n, definir un homomorfismo

$$\Omega_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$$

como sigue. Si $n < 0$, denotemos Ω_n el homomorfismo trivial. Para $n \geq 0$, definamos Ω_n por tomar

$$\Omega_n(\xi) = \sum_{j=0}^{\kappa(\xi)-1} D_n[sd^j(\xi)]$$

Para todo n-simplejo singular ξ en X, donde D_n permanece por el homomorfismo construido arriba. Luego tenemos $\Omega_n(\xi) = 0$ si y sólo si ξ es pequeño, ya que

$$\begin{aligned}
\partial[\Omega_n(\xi)] &= \sum_{j=0}^{\kappa(\xi)-1} \{sd^{j+1}(\xi) - sd^j(\xi) - D_{n-1}[sd^j(\partial\xi)]\} \\
&= sd^{\kappa(\xi)}(\xi) - \xi - \sum_{j=0}^{\kappa(\xi)-1} \left\{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i D_{n-1}[sd^j(\xi^{(i)})]\right\}, \\
\Omega_{n-1}(\partial\xi) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left\{\sum_{j=0}^{\kappa(\xi^{(i)})-1} D_{n-1}[sd^j(\xi^{(i)})]\right\}
\end{aligned}$$

la n-cadena singular

$$\begin{aligned}
\tau(\xi) &= \xi + \partial[\Omega_n(\xi)] + \Omega_{n-1}[\partial(\xi)] \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left\{\sum_{j=\kappa(\xi^{(i)})}^{\kappa(\xi)-1} D_{n-1}[sd^j(\xi^{(i)})]\right\}
\end{aligned}$$

está en el subgrupo $K_n(X)$ de $C_n(X)$. Desde que $C_n(X)$ es el grupo Abeliano libre generado por todos los n-simplejos singulares en X, la asignación $\xi \to \tau(\xi)$ define un único homomorfismo

$$\tau_n : C_n(X) \to K_n(X).$$

Uno puede fácilmente verificar que τ_n envía $C_n(A)$ en $K_n(A)$ y conmuta con el operador borde ∂. Así obtenemos un homomorfismo de cadenas

$$\tau : [C(X), C(A)] \to [K(X), K(A)].$$

Nos falta probar que $\theta \circ \tau$ y $\tau \circ \theta$ son homotópicos a los homomorfismos de cadenas identidad.

Para este propósito, primero considerar

$$\theta \circ \tau : [C(X), C(A)] \to [C(X), C(A)].$$

Sea $\xi : \Delta_n \to X$ un simplejo singular arbitrario en X. Entonces, tenemos

$$(\theta \circ \tau)(\xi) - \xi = \tau(\xi) - \xi = \partial[\Omega_n(\xi)] + \Omega_{n-1}[\partial(\xi)].$$

Esto implica que la sucesión

$$\Omega = \{\Omega_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

es una homotopía de cadenas entre $\theta \circ \tau$ y el homomorfismo de cadenas identidad.

Ahora, consideremos

$$\tau \circ \theta : [K(X), K(A)] \to [K(X), K(A)].$$

Denotemos $\xi : \Delta_n \to X$ cualquier simplejo singular pequeño en X. Entonces tenemos

$$\Omega_n(\xi) = 0, \ \ \Omega_{n-1}[\partial(\xi)] = 0.$$

Consecuentemente, obtenemos

$$(\tau \circ \theta)(\xi) = \tau(\xi) = \xi.$$

Esto prueba que $\tau \circ \theta$ es el homomorfismo de cadenas identidad y completa la prueba del Lema (2.5.2). $\square$

Para verificar el axioma de excisión (VI), denotemos por (X, A) cualquier par topológico y considerar un subconjunto abierto U arbitrario de X satisfaciendo

$$Cl(U) \subset \text{Int}(A).$$

Entonces tenemos

$$\text{Int}(A) \cup \text{Int}(X \backslash U) = X.$$

Así podemos aplicar el Lema (2.5.2) al caso especial donde

$$\gamma = \{A, X \backslash U\}.$$

Por lo tanto el homomorfismo de cadena inclusión

$$\theta : [K(X), K(A)] \to [C(X), C(A)]$$

es una equivalencia de cadenas. Además, también tenemos

$$C(X \backslash U) \subset K(X),$$

$$C(A \backslash U) \subset K(A) = C(A).$$

Esto nos da un homomorfismo de cadenas inclusión

$$\rho : [C(X \backslash U), C(A \backslash U)] \to [K(X), K(A)].$$

La composición $C(e) = \theta \circ \rho$ es el homomorfismo de cadenas inclusión

$$C(e) : [C(X \backslash U), C(A \backslash U)] \to [C(X), C(A)]$$

inducida por la aplicación inclusión

$$e : (X \backslash U, A \backslash U) \to (X, A).$$

Para todo entero n, considerar el subgrupo

$$C^n[K(X), K(A); G] = \{\phi \in \text{Hom}[K_n(X), G] \,/\, \phi[K_n(A)] = 0\}$$

del grupo Abeliano $\text{Hom}[K_n(X), G]$ de todos los homomorfismos de $K_n(X)$ a G. Esto nos lleva a un complejo de cocadenas

$$\cdots \to C^{n-1}[K(X), K(A); G] \xrightarrow{\delta} C^n[K(X), K(A); G] \xrightarrow{\delta} C^{n+1}[K(X), K(A); G] \to \cdots.$$

En el grupo $C^n[K(X), K(A); G]$, sea

$$Z^n[K(X), K(A); G] = \mathrm{Nuc}(\delta),$$

$$B^n[K(X), K(A); G] = \mathrm{Im}(\delta).$$

El grupo cociente

$$H^n[K(X), K(A); G] = \frac{Z^n[K(X), K(A); G]}{B^n[K(X), K(A); G]}$$

es llamado el **n-grupo de cohomología de $[K(X), K(A)]$ sobre G.**

Para todo entero n, los homomorfismos de cadenas ρ y θ inducen homomorfismos

$$\rho^* : H^n[K(X), K(A); G] \to H^n(X \backslash U, A \backslash U; G).$$

$$\theta^* : H^n(X, A; G) \to H^n[K(X), K(A); G].$$

Su composición $e^* = \rho^* \circ \theta^*$ es el homomorfismo inducido

$$e^* : H^n(X, A; G) \to H^n(X \backslash U, A \backslash U; G).$$

Ya que θ es una equivalencia de cadenas, uno puede fácilmente mostrar que θ^* es un isomorfismo. Por otro lado, desde que ρ induce un isomorfismo

$$C^n(\rho; G) : C^n[K(X), K(A); G] \approx C^n(X \backslash U, A \backslash U; G)$$

para todo n, entonces ρ^* es también un isomorfismo. Consecuentemente, obtenemos

$$e^* = \rho^* \circ \theta^* : H^n(X, A; G) \approx H^n(X \backslash U, A \backslash U; G).$$

Esto completa la verificación del axioma de excisión (VI).

Finalmente si $f : X \to Y$ es homotópica a una aplicación constante entonces el homomorfismo inducido

$$f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$$

es el homomorfismo trivial, o sea $f^* = 0$ para todo $q \neq 0$ y el axioma de dimensión (VII) es satisfecho.

Teorema 2.5.3 (Teorema de Existencia). Para toda categoría admisible $\mathcal{C}$ y todo grupo Abeliano G, existe una teoría de cohomología $\mathcal{H}$ definida sobre $\mathcal{C}$ y con el grupo coeficiente isomorfo a G.

Demostración.

En efecto, el grupo coeficiente de H^q es isomorfo a un grupo abeliano dado G. Consecuentemente, $\mathcal{H}$ es una teoría de cohomología sobre la categoría admisible $\mathcal{C}_T$ de todos los pares topológicos (X, A) y todas las aplicaciones de tales pares. $\square$

III. VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la investigación

$H^n(X, A) = \dfrac{Z^n(X, A)}{B^n(X, A)}$ grupo de Cohomología.

3.2. Operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
$H^n(X, A)$	Conjunto de clases de Cohomología de cociclos sobre cadenas, módulo cobordes	Grupo de Cohomología	Grupo de Cohomología n-dimensional	Mediante isomorfismos, identificar grupos de Cohomología en distintas dimensiones

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipotesis general

Conocida la axiomática para Cohomologías verificar estos axiomas sobre los grupos de Cohomología Singular para así obtener una teoría de Cohomología que llamaremos Cohomología Singular.

Hipotesis específicas

- Conocidos los grupos libres de Cocadenas Singulares obtener los grupos de Cohomología Singular.
- Según la axiomática en Cohomología Singular obtendremos algunos resultados trabajando sobre espacios contractibles y retractibles.

IV. METODOLOGÍA

4.1. Tipo de la investigación

El presente trabajo se encuentra inmerso en un nivel de investigación básica tanto en la parte teórica como en la parte práctica, teniendo como universo la Topología Algebraica.
El método a utilizar es de tipo deductivo y analítico que permitirá establecer la teoría de Cohomología Singular de una manera clara y que sirva como una motivación para que se siga investigando en ésta área de la matemática.

4.2. Diseño de la investigación

Primeramente introducimos las Categorías y las relaciones funtoriales entre ellas, para luego presentar la axiomática de Eilenber-Steenrod para una teoría de Cohomología y así obtener algunos resultados inmediatos, seguidamente construimos los grupos de Cohomología Singular para finalmente verificar la axiomática de Eilenberg-Steenrod sobre estos grupos de Cohomología.

4.3. Población y muestra

Tenemos como población los grupos de Cohomología sobre espacios topológicos, tomando como muestra los grupos de Cohomología Singular.

4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de nuestro trabajo se revisará bibiografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada con Topología Algebraica.

4.5. Procedimiento de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto la recolección de datos consistió en la revisión bibliográfica de libros, artículos, papers, páginas webs, etc.

4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

No hubo procesamiento estadístico alguno ni tampoco análisis de datos.

V. RESULTADOS

Los principales resultados son:

1. Se obtuvo la secuencia semiexacta de cocadenas:

$$C^*(X,A;G): \quad \ldots \to C^{n-1}(X,A;G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n(X,A;G) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(X,A;G) \to \ldots$$

   y por ende los grupos de Cohomología Singular:

$$H^n(X,A;G) = \frac{Z^n(X,A;G)}{B^n(X,A;G)}$$

2. Se obtuvo los grupos de Cohomología de las esferas:

$$H^q(S^n) \approx \begin{cases} 0 & ; \; n \neq q \neq 0 \\ G & ; \; n \neq q = 0, \text{ ó } n = q \neq 0 \\ G \oplus G & ; \; n = q = 0 \end{cases}$$

   donde G denota el grupo coeficiente de la teoría de cohomología .

3. Se verificaron los axiomas para asegurar la existencia de la teoría de Cohomología Singular.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Considerando que el presente trabajo no tiene resultados experimentales obtenidos en gabinete o laboratorio no es posible realizar una discusión en ese sentido.

6.1. Contrastación de la hipótesis con los resultados

En la hipótesis se propuso obtener los grupos libres de Cocadenas Singulares y obtener los grupos de Cohomología singular lo cual quedó establecido en los resultados. También se propuso verificar los axiomas para una teoría de Cohomología, en los resultados se verificaron los axiomas y además a través de los grupos de Cohomología reducida se establecieron los grupos de cohomología de las esferas.

6.2. Contrastación de resultados con otros estudios similares

En Genberg, M.(1966)[3], Lefschetz,S.(1942)[9] y Spanier, E. (1967)[12] se tiene un estudio de las teorías de Cohomología sin la preparación básica que ofrece este trabajo, tampoco se verifican específicamente los axiomas para la existencia de una teoría de Cohomología, como sí lo hacemos en este trabajo con la existencia de la teoría de Cohomología Singular. En Massey, W.(1967)[10] se ofrece una información básica sobre Topología Algebraica en Homología pero insuficiente en Cohomología pues no se enfoca para nada la existencia de la teoría de Cohomología ni resultados básicos como la Cohomología de las esferas que es presentado en los resultados de este trabajo.

VII. CONCLUSIONES

1. Los Simplejos Singulares se convierten en elementos claves para formar los grupos libres de Cadenas Singulares y luego los grupos libres de Cocadenas Singulares que conformarán la secuencia semiexacta larga para formar el funtor de Cohomología Singular.

2. Considerando los espacios distinguidos conformados por puntos se obtiene la Cohomología Reducida la que permite determinar grupos de Cohomología de la esfera.

3. Propiedades y aplicaciones dadas en Homología de Cadenas pueden ser planteadas para Cohomología de Cocadenas.

4. Como en la existencia de las teorías de Homología se pueden obtener teorías de Cohomología de manera dual.

VIII. RECOMENDACIONES

1. El trabajo de tesis desarrollado presenta la Teoría de Cohomología Singular sobre espacios Topológicos. Es natural preguntarse sobre la existencia de otras teorías de Cohomología y su descripción como lo hecho en este trabajo. Para esto recomendamos leer Hilto, P. J. (1960)[5]

2. En este trabajo se determina la Cohomología de las esferas, es natural la pregunta sobre Cohomología de otros espacios Topológicos. Para lo cuál recomendamos leer Spanier, E. (1967)[12].

3. Conocida la homología Singular y la Cohomología Singular otra pregunta sería por una relación entre estas teorías. Para esto, se recomienda leer Hu, S. T. (1968) [8]

4. El presente trabajo de investigación es útil y recomendable para los estudiantes de Ciencias e Ingenierías

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias

[1] EILENBERG, S. AND MACLANE, S. (1945). 'General theory of Natural Equivalences'. *Trans. Am.: Math. Soc 58. 231-294.*

[2] EILENBERG, S. AND STEENROD, N. (1952). 'Fundations of Algebraic Topology'. *Princeton: Univ. Press.*

[3] GENBERG, M. (1966) 'Lectures on Algebraic Topology', *W. A. Benjamin. New York.*

[4] HERSTEIN, I. N. (1988) 'Algebra abstracta', *Iberoamérica S.A. México.*

[5] HILTON, P. J., AND WYLIE, S. (1960). 'Homology Theory, and Introduction to Algebraic Topology'. *Cambridge University Press. New York.*

[6] HU, S. (1964). 'Elements of General Topology'. *Holden Day. San Francisco.*

[7] HU, S. T. (1966). 'Homology Theory'. *Holden Day, Inc. San Francisco.*

[8] HU, S. T. (1968). 'Introduction to Homological Algebra'. *Holden Day, Inc. San Francisco.*

[9] LEFSCHETZ, S. (1942). 'Algebraic Topology'. *Am Math Soc. Collective Publ., Vol 27.*

[10] MASSEY, W. (1967). 'Algebraic Topology Am Introduction'. *New York: Harcourt Brace World Inc.*

[11] MITCHELL, B. (1965). 'Theory of Categories'. *New York: Academic Press.*

[12] SPANIER, E. (1967). 'Algebraic Topology'. *Mc Graw-Hill, Inc. New York.*

X. ANEXOS

10.1. Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Determinación del problema: Investigaremos la axiomática para la teoría de Cohomología Singular, cálculos y algunas aplicaciones sobre algunos espacios. **Formulación del problema:** Se quiere resolver la siguiente interrogante: ¿Para los grupos de Cohomología Singular $H^n(X,A) = \dfrac{Z^n(X,A)}{B^n(X,A)}$ se podrán verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de Cohomología?	**Objetivo general:** Estudiar grupos de Cohomología sobre espacios topológicos. **Objetivos Específicos:** - De la axiomática en Cohomología obtener algunos resultados. - Sobre los grupos de Cohomología Singular, verificar los siete axiomas de Eilenberg-Steenrod.	**Hipótesis general:** Describir la teoría de Cohomología Singular. **Hipótesis Específicas:** - Obtener resultados de la axiomática en Cohomología. - Verificar la axiomática Cohomológica para los grupos de Cohomología Singular.	**Tipo de investigación:** El presente trabajo se encuentra inmerso en un nivel de investigación básica tanto en la parte teórica como en la parte práctica, teniendo como universo la Topología Algebraica. **Método:** El método a utilizar es de tipo deductivo y analítico que permitirá establecer la teoría de Cohomología Singular de una manera clara y que sirva como una motivación para que se siga investigando en ésta área de la matemática. **Diseño:** Primeramente introducimos las Categorías y las relaciones funtoriales entre ellas, para luego presentar la axiomática de Eilenber-Steenrod para una teoría de Cohomología y así obtener algunos resultados inmediatos, seguidamente construimos los grupos de Cohomología Singular para finalmente verificar la axiomática de Eilenberg-Steenrod sobre estos grupos de Cohomología.	**Población:** Tenemos como población los grupos de Cohomología sobre espacios topológicos. **Muestra:** Tomamos como muestra los grupos de Cohomología Singular.

10.2. Mapa conceptual del trabajo