UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"FUNDAMENTOS DE OPTIMIZACIÓN PARA UN ALGORITMO A USARSE EN LA EXPLOTACIÓN DE RECURSOS MARINOS"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ALEX FERNANDO CHUCHÓN NÚÑEZ

Callao, enero, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"FUNDAMENTOS DE OPTIMIZACIÓN PARA UN ALGORITMO A USARSE EN LA EXPLOTACIÓN DE RECURSOS MARINOS"

Alex Fernando Chuchón Núñez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Dr. Pedro Canales García
Presidente

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Vocal

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Suplente

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Asesor

Dr. Erik Alex Papa Quiróz
Co-asesor

Callao-Perú
2019

Dedicatoria

Este informe está dedicado a mi hijo Adrian.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por darme todo su apoyo incondicional, a mi esposa que me dió fuerzas para continuar, a mis amigos por sus consejos, sugerencias y sobre todo a mi asesor el Dr. Erik Papa Quiroz por su gran ayuda e infinita paciencia en el desarrollo de esta tesis.

Índice general

Resumen

En esta tesis estamos interesados en el uso de elementos matemáticos para modelar problemas de explotación pesquera en el Perú como también de algoritmos numéricos para resolverlos, es por ese motivo que presentamos un algoritmo para resolver un problema de optimización relacionado a la explotación de recursos pesqueros en el Perú.

Bajo algunas hipótesis razonables probamos que usando técnicas de optimización matemática es posible estudiar el modelo de explotación óptima de pesca, como también su implementación en un caso particular.

Abstract

In this thesis we are interested in the use of mathematical elements to model problems of fishing exploitation in Peru as well as numerical algorithms to solve them, it is for this reason that we present an algorithm to solve an optimization problem related to the exploitation of fishery resources in Peru.

Under some reasonable hypotheses we prove that using mathematical optimization techniques it is possible to study the model of optimal exploitation of fishing, as well as its implementation in a particular case.

Capítulo 1

Planteamiento de la Investigación

1.1. Identificación del Problema

La gestión de recursos naturales renovables ha adquirido en los últimos años un considerable interés, tanto desde la perspectiva ecológica, como económica y social, por la necesidad de proveer recursos sustentables a las futuras generaciones. Este hecho motivó un gran interés científico por estudiar dicha gestión, en ese sentido las matemáticas aplicadas y el modelamiento matemático son muy importantes pues incorporan elementos objetivos de análisis, predicción y control, como por ejemplo al modelar la evolución de una población con $x = cx'$, donde x es la población en un determinado momento y c es una constante, se puden ver ejemplos en [18], [19], [20], [21], [22], [23] y [24]. Esto ha motivado un creciente interés científico por estudiar estos problemas y, en este sentido, la Matemática Aplicada mediante el modelamiento matemático juega un rol muy relevante, al incorporar elementos objetivos de análisis, predicción y control.

En este informe estamos interesados en el uso de elementos matemáticos para modelar problemas de explotación de pesca en el Perú como también de algoritmos numéricos para resolverlos. Estos modelos y algoritmos numéricos están basados en la línea de optimización matemática.

Desde el punto de vista del modelamiento matemático, aparecen dos problemas importantes, uno de ellos es el problema de la cuantificación del tamaño de la población, el cual está bien expuesto en [25], [26] y [27] y el segundo problema es sobre la evolución, los cuales tienen relación con estudios de tipo estadístico, muestreo, modelos diferenciales de evolución incluyendo los efectos de crecimiento natural y pesca.

El área de Optimización intenta dar respuesta a un tipo general de problemas donde se desea elegir el mejor o mejores entre un conjunto de elementos. En su forma matemática el problema equivale a resolver un modelo de este tipo:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.a. \\ x \in X \subseteq I\!R^n \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector y representa variables de decisión, las cuales son incógnitas que deben ser determinadas a partir de la solución del modelo, $f : I\!R^n \to I\!R$ es llamada función objetivo y representa la calidad de las decisiones, es decir, representa la función beneficio que se quiere maximizar o la función costo que se quiere minimizar, y X es el conjunto de decisiones factibles o restricciones del problema. Para resolver el modelo anterior existen varios métodos, para referencias clásicas ver [28], [29] y [30].

Un problema de optimización trata entonces de tomar una decisión óptima para maximizar (ganancia, velocidad, eficiencia, etc.) o minimizar un criterio determinado (costo, tiempo, riesgo, error, etc.)

Este proyecto presenta una propuesta de solución, desde el punto de vista de la gestión, a un problema de explotación de pesca en el Perú, por ello se describe el planteamiento, formulación, objetivos, metodología, entre otros.

Consideremos una campaña de pesca que se extiende por un periodo de $[0, T]$, con $T > 0$ y considere también las siguientes notaciones:

$x(t)$ es el efectivo o número total de peces en el instante t.
$x(0)$ es el número total de peces existentes al inicio ($t = 0$).
$F(.)$ es una función que posee propiedades generales de regularidad y representa la evolución instantánea de la población de peces en el momento t.
$E(.)$ es una función del tiempo llamada esfuerzo de pesca que expresa la medida de la capacidad de pesca: barcos o botes disponibles, redes, mano de obra, otros insumos o tecnología en general.
$R(t)$ es la ganancia en cada instante t.
$h(t)$ es la tasa de pesca en el instante t.
p es el precio constante al que puede ser vendido el producto de la pesca.
c costo unitario de esfuerzo.

q es un coeficiente de captura, la cual representa la atrapabilidad de la especie, es decir, dado un nivel de stock $x(t)$ es posible atrapar una parte $qx(t)$ y la tasa de captura depende del esfuerzo $E(t)$ desplegado en el instante t, luego $h(t) = qE(t)x(t)$.

Se presentará el caso de una población que se rige básicamente por el modelo

$$x' = \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)),\ t \geq 0$$

Si se considera que existe pesca sobre esta población, el modelo estaria dado por el proceso dinámico:

$$x' = \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) - h(t),\ t \geq 0$$

Obteniendo así que la evolución del stock de la especie está dada por la ecuación de Clark y Munro (1975), ver [31]:

$$x' = \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) - qE(t)x(t) \tag{1.2}$$

Donde q, E fueron definidas anteriormente.

Desde el punto de vista social se quiere maximizar $R(t), t \in [0; T]$, la ganancia en cada instante t, pero como dependen del tiempo, se quiere maximizar

$$\int_0^T R(t)dt \tag{1.3}$$

Desde el punto de vista económico es necesario considerar el análisis del factor de descuento. Para simplificar esta idea basado en [32] supongamos que se tiene A soles, que se depositan en un banco por varios años con un interés anual δ, acumulándose los intereses que se vayan generando en el tiempo(interés compuesto). El objetivo será el de calcular la cantidad de dinero que exista en la cuenta a lo largo de cada año. A continuación se analizará lo ocurrido para según las veces que se contabilicen los intereses una vez al año, dos veces al año, m veces al año o se contabilicen de manera continua.

Si se contabiliza una vez al año: La cantidad de dinero que se tendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al principio, A
- Al cabo de un año, $(1+\delta)A$
- Al cabo de dos años, $(1+\delta)^2A$
- Al cabo de tres años, $(1+\delta)^3A$
- En general, al cabo de t años, $(1+\delta)^tA$

De esta forma vemos que, en las condiciones consideradas, A soles de ahora se transforman en $B=(1+\delta)^tA$ soles dentro de t años.

Recíprocamente , para que dentro de t años tengamos B soles en la cuenta necesitamos depositar ahora $A=(1+\delta)^{-t}B$ soles.

Si se contabiliza dos veces al año: Bajo las mismas condiciones anteriores, salvo que este caso la cuenta contabiliza dos veces al año, o sea, cada seis meses. La cantidad de dinero que se tendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al principio, A
- Al cabo de seis meses, $(1+\frac{\delta}{2})A$
- Al cabo de un año, $(1+\frac{\delta}{2})^2A$
- Al cabo de un año y medio, $(1+\frac{\delta}{2})^3A$
- Al cabo de dos años, $(1+\frac{\delta}{2})^4A$
- En general, al cabo de t años, $(1+\frac{\delta}{2})^{2t}A$

De esta forma vemos que, en este caso, A soles de ahora se transforman en $B=(1+\frac{\delta}{2})^{2t}A$ soles dentro de t años.

Recíprocamente , para que dentro de t años tengamos B soles en la cuenta necesitamos depositar ahora $A=(1+\frac{\delta}{2})^{-2t}B$ soles.

Si se contabiliza m veces al año: La cantidad de dinero que se tendrá en la cuenta a través del tiempo será:

- Al principio, A
- Al cabo de $\frac{1}{m}$ años, $(1+\frac{\delta}{m})A$

- Al cabo de $\frac{2}{m}$ años, $(1+\frac{\delta}{m})^2 A$
- Al cabo de $\frac{3}{m}$ años, $(1+\frac{\delta}{m})^3 A$
- Al cabo de un año, $(1+\frac{\delta}{m})^m A$
- Al cabo de dos años, $(1+\frac{\delta}{m})^{2m} A$
- En general, al cabo de t años, $(1+\frac{\delta}{m})^{tm} A$

De esta forma vemos que, en este caso, A soles de ahora se transforman en $B=(1+\frac{\delta}{m})^{tm}A$ soles dentro de t años.

Recíprocamente , para que dentro de t años tengamos B soles en la cuenta necesitamos depositar ahora $A=(1+\frac{\delta}{m})^{-tm}B$ soles.

Si se contabiliza de manera continua: Supongamos que ahora se contabiliza de manera continua, es decir, m veces al año, cuando m tiende al infinito.
La cantidad de dinero que se tendrá al cabo de t años será:

$$\lim_{m\to+\infty}(1+\frac{\delta}{m})^{tm}A = A\lim_{m\to+\infty}[(1+\frac{1}{\frac{m}{\delta}})^{\frac{m}{\delta}}]^{\delta t} = Ae^{\delta t}$$

ya que,

$$\lim_{k\to+\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e.$$

De esta forma vemos que si contabilizamos de manera continua, A soles de ahora se transforman en

$$B = Ae^{\delta t}$$

soles dentro de t años.

Recíprocamente, para que dentro de t años tengamos B soles en la cuenta, necesitamos depositar ahora

$$A = e^{-\delta t}B$$

Al factor $e^{-\delta t}$ se le conoce como factor de descuento, el cual refleja el valor del presente sobre el futuro que hace el planificador o el individuo.

así el objetivo social de la campaña de pesca sería,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} R(t)dt \tag{1.4}$$

y el objetivo biológico sería (1.2)

Teniendo en cuenta que $E_M \in I\!R$ es un límite en la capacidad, $0 \leq E(t) \leq E_M$ y x_0 es la cantidad de peces al inicio. Obtenemos el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} \max \int_0^\infty e^{-\delta t} R(t)dt & \\ x' = & F(x(t)) - E(t)qx(t) \\ 0 \leq E(t) \leq & E_M \\ x(t) \geq & 0 \\ x(0) = & x_0 \end{array} \tag{1.5}$$

Donde se busca una función $E(.)$, de variable independiente t, que maximice el beneficio total. Este es un problema de maximización. Con el fin de determinar una solución de este problema, se especificará una forma particular de la función R. Como se consideró que el precio por unidad de tasa de pesca p y el costo unitario de esfuerzo c, son constantes, entonces el beneficio instantáneo será $R(t) = ph(t) - cE(t) = (pqx(t) - c)E(t)$, el problema anterior se convierte a:

$$\begin{array}{rl} \max \int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx(t) & -c)E(t)dt \\ x' = & F(x(t)) - E(t)qx(t) \\ 0 \leq E(t) \leq & E_M \\ x(t) \geq & 0 \\ x(0) = & x_0 \end{array}$$

pero como $x' = F(x(t)) - E(t)qx(t)$, entonces $E(t) = \frac{F(x(t))-x'}{qx(t)}$, el problema (1.5) se convierte a:

$$\begin{array}{rl} \max & \int_0^\infty e^{-\delta t} \quad (pqx(t) - c)\frac{F(x(t))-x'}{qx(t)}dt \\ 0 \leq & \frac{F(x(t))-x'}{qx(t)} \leq E_M \\ x(t) \geq & 0 \\ x(0) = & x_0 \end{array}$$

donde se busca una función $x(.)$ de variable independiente t que maximice el beneficio total.

Es decir

$$\begin{array}{ll} \max & \int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx(t) \quad -c)\frac{F(x(t))-x'}{qx(t)}dt \\ s.a & \\ & x(t) \in C \end{array} \tag{1.6}$$

Donde:

$C = \{x(.) :]0;\infty[\rightarrow]0;\infty[$ tal que $0 \leq \frac{F(x(t))-x'}{qx(t)} \leq E_M \ \forall t \geq 0, x(0) = x_0\}$

1.1.1. Formulación del problema

Se pretende resolver y analizar las siguientes interrogantes:

1. ¿Será posible resolver el problema (1.5) numéricamente usando técnicas de optimización?

2. Considerando un caso particular de pez, ¿será posible usar técnicas de optimización matemática y obtener un equilibrio que considere las condiciones biológicas, ecológicas, económicas y sociales?

1.1.2. Objetivos de la investigación

Objetivo general

Encontrar un algoritmo de optimización apropiado para resolver el modelo (1.5).

Objetivos específicos

1. Estudiar la existencia de soluciones del problema (1.5).

2. Estudiar condiciones para la convexidad y diferenciabilidad del modelo (1.5).

3. Estudiar las condiciones de optimalidad del modelo (1.5).

4. Encontrar un algoritmo de optimización y probar la convergencia a la solución del problema.

1.1.3. Justificación

Sería útil obtener una política de pesca óptima y un beneficio máximo a partir del modelo matemático (1.5) usando técnicas de optimización, además se podría encontrar un equilibrio en la explotación de pesca que considere las condiciones mencionadas. Si son alcanzados los objetivos de la tesis, la investigación permitirá al ministerio de la producción adoptar políticas óptimas de explotación de la pesca con respecto a una clase genérica de pez. Con esta política se beneficiaría los habitantes que se dedican a la pesca.

1.1.4. Importancia

Al realizar un trabajo como la pesca, siempre se va a buscar obtener beneficios, pero de los tantos posibles lo deseado es obtener el máximo beneficio posible, es así que sería de mucha importancia poder contar con una herramienta matemática que nos permita llegar a obtener dicho beneficio además que permitiría ahorrar tiempo, el cual también se invierte y muchas veces se pierde en el intento de obtenerlos. Este tiempo ahorrado serviría para realizar otras actividades.

1.2. Marco Teórico

1.2.1. Antecedentes del estudio

La optimización es un área de la Matemática Aplicada que tuvo sus inicios a mediados del siglo anterior durante la segunda guerra mundial donde se plantea un modelo matemático para planificar los gastos y retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas al enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra muchas industrias lo usaron en la planificación diaria; posteriormente se aplicaron a diferentes áreas de ciencias e ingenierías.

El modelo general de un problema de optimización es expresado como:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.a. \\ x \in X \subseteq H \end{cases}$$

donde f es una función en el espacio de Hilbert y x es la variable que debe determinarse.

Para resolver este modelo anterior existen muchos métodos, por ejemplo, el Método Simplex, Método Iterativo, Método de Newton, Método de Lagrange, emtre otros. Como referencia ver [29], [30].

Por otro lado, la pesca en el Perú es muy importante ya que contribuye a la generación de un buen porcentaje del Producto Bruto Interno. Lo que conlleva a la importancia de la gestión de recursos renovables.
Para que la pesca mantenga una regularidad en la producción necesitan regular la explotación considerando aspectos ecológicos, económicos y sociales.

1.2.2. Condiciones necesarias y suficientes

Para resolver el problema (1.6) es necesario conocer las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad del problema propuesto. Es por ese motivo que en esta subsección presentamos las condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema (1.6). Sean t_0 y t_1 números reales, verificando que $t_0 < t_1$. Se considera el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Se define el siguiente conjunto de funciones:

$$\Omega = \{x : [t_0, t_1] \to R / x \text{ posee derivadas primera y segunda, continuas en} [t_0, t_1]\}$$

En este conjunto de funciones, se consideran las operaciones usuales de suma y producto por número real:

Para $x_1,\ x_2 \in [t_0, t_1]$, se define

$$(x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

.

Para $\lambda \in R,\ x \in \Omega,\ t \in [t_0, t_1]$, se define

$$(\lambda x)(t) = \lambda . x(t)$$

El conjunto Ω, sobre el cuerpo $I\!R$, con las dos operaciones definidas, tiene estructura de espacio vectorial.

En Ω, se define ahora la siguiente norma:

$$\begin{aligned} \|.\| :\ & \Omega \to R \\ & x \to \|x\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| \end{aligned}$$

Se define el problema de cálculo de variaciones para el caso escalar, con extremos constantes.

Sea F una función de tres variables, de clase $C^{(2)}$ (es decir que posee todas las derivadas parciales primeras y segundas, y son contínuas). Se considera la siguiente función:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), x'(t), t]dt,$$

donde $\dot{x}(t)$ es la función derivada de $x(t)$ con respecto a t.

Se trata de encontrar aquella función derivada de $x^*(t)$ con derivadas primera y segunda contínuas en $[t_0, t_1]$, verificando que $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_1) = x_1$, siendo x_0 y x_1 dados para que la función J alcance el valor máximo (o el valor mínimo).

El problema, por tanto, en el caso de maximización es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), x'(t), t]dt \\ s.a. & \\ & x \in \Omega \\ & x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Donde $\Omega = \{x : [t_0, t_1] \to I\!R \,/ x$ posee derivadas primera y segunda continuas en $[t_0, t_1]\}$
Por tanto, para este problema, el conjunto factible (llamado el conjunto de funciones admisibles) es

$$\psi = \{x \in \Omega \ / \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\}$$

Como es habitual en optimización, el considerar sólo el máximo (o el mínimo) de la función objetivo, en este caso de la función objetivo, no supone ninguna pérdida de generalidad, ya que

$$\min\ J(x), \text{es equivalente a} \max[-J(x)]$$

y, además, el elemento x que minimiza $J(x)$ es el mismo x que maximiza $[-J(x)]$.

Condiciones necesarias de optimalidad

Al igual que ocurre en programación matemática, en cálculo variacional se definen los conceptos de óptimo global y de óptimo local. En este caso, refiriéndonos al problema (1.7) , definimos máximo global y máximo local. Antes de pasar propiamente a las condiciones de optimalidad, veamos unas definiciones previas.

Definición 1.1 *Se dice que x es una función admisible para el problema (1.7), si verifica que*

$$x \in \Omega, x(t_0) = x_0, \; y \;\; x(t_1) = x_1$$

Podemos definir , por tanto el conjunto de todas las funciones admisibles para el problema (1.7) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi \; &= \{\text{funciones admisibles para el problema (1,7)}\} \\ &= \{x \in \Omega \; / \; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1\} \end{aligned}$$

A continuación se define el concepto de máximo global.

Definición 1.2 *Sea x^* una función admisible para el problema (1.7). Se dice que x^* es máximo global si para cualquier función admisible x, se verifica que*

$$J(x) \leq J(x^*).$$

Al igual que ocurre en programación matemática, en muchas ocaciones no dispondremos de instrumentos que nos detecten máximos locales, y sí dispondremos de condiciones que nos permitan obtener máximos locales.

Definición 1.3 *Sea $x \in \Omega$ y $r \in R$, se define $B(x, r)$ como*

$$B(x, r) = \{y \in \Omega : ||x(t) - y(t)|| \leq r, \; t \in [t_0, t_1]\}$$

Definición 1.4 *Sea x^* una función admisible para el problema (1.7). Se dice que x^* es máximo local, si existe un $\delta > 0$, tal que para toda función admisible, x perteneciente a $B(x^*, \delta)$, se verifica que*

$$J(x) \leq J(x^*).$$

De manera análoga, se definen los conceptos de mínimo global y de mínimo local. Para resolver el problema (1.7), tenemos que calcular el máximo global, sin embargo, al igual que ocurre en programación matemática, se considera máximos locales porque se van a obtener condiciones de optimalidad que detecten óptimos locales y no óptimos globales.

Condición necesaria de primer orden. Ecuación de Euler

La condición que se va a obtener, llamada condición o ecuación de Euler, es la más importante del cálculo de variaciones. Su deducción es muy sencilla y fácilmente comprensible, pues se apoya en la programación matemática clásica de funciones diferenciables. A continuación se enuncian dos resultados previos, la fórmula de Leibniz y un lema, que se utilizan posteriormente en la demostración del teorema que da la ecuación de Euler.

(Fórmula de Leibniz) *Supongamos que las funciones* $\dot{u}(\alpha)$, $\dot{v}(\alpha)$ *son continuas en* $\{\alpha \;/\alpha_0 - \epsilon < \alpha < \alpha_0 + \epsilon\}$, para $\epsilon > 0$, f, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ *son continuas en* $\{u(\alpha) \leq z \leq v(\alpha), \quad \alpha_0 - \epsilon < \alpha < \alpha_0 + \epsilon\}$.

Entonces se verifica que:

$$\left[\tfrac{d}{d\alpha}\left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(\alpha,z)dz\right)\right](\alpha_0) = f(\alpha_0, v(\alpha_0))\dot{v}(\alpha_0) - f(\alpha_0, u(\alpha_0))\dot{u}(\alpha_0) + \int_{u(\alpha_0)}^{v(\alpha_0)} \left[\tfrac{\partial f(\alpha,z)}{\partial \alpha}\right](\alpha_0)dz. \tag{1.8}$$

(Caso particular) *Si* $u(\alpha) = a$, $v(\alpha) = b$, *y las funciones* f *y* $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ *son continuas, se verifica que*

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(\alpha,z)dz\right) = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha,z)}{\partial \alpha}dz. \tag{1.9}$$

Lema 1.2.1 *Sea* f *una función continua, definida en* $[t_0, t_1]$. *Sea* η *una función diferenciable, definida en* $[t_0, t_1]$, *con* $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. *Si*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)dt = 0$$

para toda función η *que cumple las condiciones señaladas, entonces:* $f(t) = 0$, *para todo* $t \in [t_0, t_1]$.

Teorema 1.1 ***(Condición de Euler)*** *Si* $x^*(t)$ *es un máximo local del problema (1.7), entonces en* $x^*(t)$ *se verifica la siguente condicion:*

$$F_x\left[x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right] - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}[x^*(t), \dot{x}^*(t), t] = 0, \forall t \in [t_0, t_1],$$

que es la ecuación de Euler, en donde F_x *es la derivada parcial de* F *con respecto a su primera variable* x, *y* $F_{\dot{x}}$ *es la derivada parcial de* F *con respecto a su segunda variable* $\dot{x}$. *Prueba. Ver [32].*

Algunas consideraciones sobre la ecuación de Euler

La ecuación de Euler (aportación de L. Euler, en 1744), para una función admisible $x(t)$ genérica, es por tanto:

$$F_x(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

desarrollando el segundo sumando a partir de la regla de la cadena la derivada con respecto a t, se obtiene:

$$F_x - F_{\dot{x}x}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - F_{\dot{x}t} = 0 \tag{1.10}$$

en donde $F_{\dot{x}x}$ es la segunda derivada de F con respecto a sus variables x y $\dot{x}$, $F_{\dot{x}\dot{x}}$ es la segunda drivada de F con respecto a su variable $\dot{x}$ dos veces, $F_{\dot{x}t}$ es la segunda derivada de F con respecto a sus variables $\dot{x}$ y t, $\ddot{x}$ es la segunda derivada de $x(t)$ respecto de t dos veces.

Algunas casos especiales de la ecuación de Euler

Se ha visto que la ecuación de Euler es una ecuación diferencial de segundo orden. Dicha ecuación puede ser muy dificil de resolver analíticamente. En algunos casos, la forma de la función f permite permite que la ecuación se pueda expresar de otra forma más simple. Vamos a considerar los siguiente casos:

a) F no depende de x.

b) F no depende de $\dot{x}$.

c) F sólo depende de x y de $\dot{x}$.

Caso en que F no depende de x
Supongamos que F no depende de x, es decir, sea $F = F(\dot{x}, t)$. En este caso es por tanto, $F_x = 0$. La ecuación de Euler queda:

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0$$

que es equivalente a:

$$F_{\dot{x}=C} \tag{1.11}$$

Caso en que F no depende de $\dot{x}$
Supongamos que F no depende de $\dot{x}$, es decir, sea $F = F(x, t)$. Al ser en este caso, $F_{\dot{x}} = 0$, la ecuación de Euler queda:

$$F_x = 0 \tag{1.12}$$

que es una ecuación algebraica. La solución a dicha ecuación no dependerá de constantes arbitrarias, por lo que sólo cumplirá por casualidad las condiciones inicial y final dadas.

Caso en que F sólo depende de x y de $\dot{x}$

Supongamos que F sólo depende de x y de $\dot{x}$, es decir, $F = F(x, \dot{x})$. Aplicando regla de la cadena y del hecho que $F_t = 0$, la ecuación de Euler queda:

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}} = C \tag{1.13}$$

Condiciones suficientes de optimalidad

En programación matemática es habitual utilizar condiciones necesarias de optimalidad de primer y segundo orden y condiciones suficientes, que en el caso convexo lo son de optimalidad global. A continiuación se va a enunciar y demostrar un teorema que establece que en determinadas condiciones se puede asegurar que una solución es un óptimo global para un problema de cálculo de variaciones.

Se considera el siguiente problema:

$$\begin{cases} \max & J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), \dot{x}(t), t]dt \\ s.a. & \\ & x \in \Omega \\ & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

siendo t_0 y t_1 fijos, sujeto a alguna de las condiciones terminales siguientes: (i) $x(t_1) = x_1$; (ii) $x(t_1) \geqslant x_1$; (iii) $x(t_1)$ libre, donde F es una función de clase $C^{(2)}$.

Teorema 1.2 ***(Condición de Legendre)***

- *Si $x^*(t)$ es máximo local del problema (1.7), entonces en $x^*(t)$ se verifica la siguiente condición:*

$$F_{\dot{x}\dot{x}}[x^*(t), \dot{x}^*(t), t] \leq 0, \forall t \in [t_0, t_1]$$

- *Si $x^*(t)$ es mínimo local del problema (1.7), entonces en $x^*(t)$ se verifica la siguiente condición:*

$$F_{\dot{x}\dot{x}}[x^*(t), \dot{x}^*(t), t] \geq 0, \forall t \in [t_0, t_1]$$

en donde $F_{\dot{x}\dot{x}}$ es la segunda derivada parcial de F, con respecto a su segunda variable $\dot{x}$ dos veces.

Teorema 1.3 *Supongamos que $F[x, \dot{x}, t]$ es una función cóncava en $(x, \dot{x})$ para cada $t \in [t_0, t_1]$. Si $x^* = x^*(t)$ verifica la ecuación de Euler, junto con la condición inicial, condición final (en los casos (i) y (ii)), y la correspondiente condición de transversalidad (en los casos (ii) y (iii)), entonces $x^*(t)$ en un máximo global para el problema que estamos considerando.*

1.2.3. Problema de Desigualdad Variacional

El problema de desigualdad variacional (PDV) consiste en encontrar $u \in K$ tal que

$$\langle Tu, v - u \rangle \geq 0, \ \forall v \in K \tag{1.14}$$

donde T es un operador no lineal $T : H \to H$, K es un conjunto convexo cerrado en H. El modelo anterior recubre como casos particulares a problemas de optimización , problemas de tráfico urbano, problemas de complementaridad lineal y no lineal, problemas de equilibrio económico, entre otros, por ejemplo ver Harker y Pang ([33]) y Facchinei y Pang ([34]). Existen diversos métodos para resolver problemas de desigualdad variacional, por ejemplo, los métodos basados en funciones de mérito, métodos del punto interior, métodos proyectivos, métodos del punto proximal, etc.

1.2.4. Definiciones de términos básicos

A continuación daremos algunas definiciones que nos ayudan a fundamentar la investigación:

Optimización: Optimización matemática (o bien, optimización o programación matemática) es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles. En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función.

Algoritmo: Es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad. Dados un estado inicial y una entrada, siguiendo los pasos sucesivos se llega a un estado final y se obtiene una solución.

Iteración: Una iteración es el acto de repetir un proceso con el objetivo de alcanzar una meta deseada, objetivo o resultado. Cada repetición del proceso también se le denomina una iteración, y los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración.

Implementación de un algoritmo: Implementar un algoritmo significa traducir el algoritmo a un lenguaje de programación de tal modo que sea interpretado por dicho lenguaje al momento de su ejecución.

Convergencia: Se entiende por convergencia de un método numérico a la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.

Solución óptima: Es la mejor solución de un problema propuesto.

Modelo: En ciencias puras y, sobre todo, en ciencias aplicadas, se denomina modelo científico a una representación abstracta, conceptual, gráfica o visual (ver, por ejemplo: mapa conceptual), física, de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizar, describir, explicar, simular (en general, explorar, controlar y predecir) esos fenómenos o procesos. Un modelo permite determinar un resultado final a partir de unos datos de entrada. Se considera que la creación de un modelo es una parte esencial de toda actividad científica.

1.3. Variables e Hipótesis

1.3.1. Variable de la investigación

Dado el problema a resolver:

$$\max_{E(.)} \int_0^\infty e^{-\delta t} R(t)dt$$
$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x(t)) - E(t)qx(t) \\ x(t) &\geq 0 \\ 0 \leq E(t) &\leq E_M \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Se tienen las siguientes variables:

- $x(t)$ es el número total de peces en el instante t.
- $x(0)$ es el número total de peces en el instante $t = 0$.
- $F(t)$ es una función que posee propiedades generales de regularidad y representa la evolución instantánea de la población de peces en el momento t.

- $E(t)$ es una función del tiempo llamada esfuerzo de pesca que expresa la medida de la capacidad de pesca: barcos o botes disponibles, redes, mano de obra, otros insumos o tecnología en general.
- q es un coeficiente que representa la atrapabilidad de la especie.
- $R(t)$ es la función ganancia que puede depender del precio, de los costos, de esfuerzo, etc.

1.3.2. Operacionalización de variables

Variable	**Definición conceptual**	**Definición operacional**	**Dimensiones**	**Indicadores**
Establecer los fundamentos de optimización para un algoritmo	Permiten obtener un beneficio económico máximo.	El problema de optimización con restricciones de tiempo, esfuerzo y número total de peces en el instante t permitirán encontar un beneficio máximo.	• Población de peces en el instante t • Esfuerzo de pesca en el instante t • Ganancia en el instante t	• La poblacón de peces tiene un tamaño adecuado • Esfuerzo adecuado para la pesca • Obtiene el beneficio máximo

1.3.3. Hipótesis general e hipótesis específica

Hipótesis general

Usando técnicas de optimización matemática es posible estudiar el modelo de explotación óptima de pesca.

Hipótesis específica

1. Usando la teoría de optimización en dimensión infinita será posible obtener condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de (1.5).

2. Usando el análisis convexo es posible estudiar las condiciones de convexidad y diferenciabilidad del problema (1.5).

3. Usando las condiciones de optimalidad lograremos resolver el modelo (1.5).

4. Usando un algoritmo de optimización probaremos la convergencia a la solución del problema (1.5).

1.4. Metodología

1.4.1. Tipo de investigación

El estudio de la investigación es de carácter teórico-aplicativo. En el desarrollo del trabajo si se obtiene los resultados deseados, esto será un nuevo aporte científico, muy significativo en optimización en la búsqueda de algoritmos más eficientes tanto teórica como computacionalmente, para la solución de problemas prácticos que surgen en diversas áreas de las ciencias e ingeniería, y en lo posible que sirva como una motivación para que se siga investigando en esta área de la matemática y se desarrollen nuevos métodos.

1.4.2. Diseño de la investigación

Durante el desarrollo del proyecto utilizamos un método inductivo-deductivo, es decir, generalizaremos al conjunto de los números reales, teoremas, y corolarios de resultados clásicos de optimización y a la vez particularizaremos los resultados obtenidos aplicándolos a algunos ejemplos específicos para los cuales implementaremos su algoritmo.

Para tal objetivo en la primera parte presentaremos un problema de optimización, el cual busca una solución óptima para maximizar o minimizar una función, luego planteamos el problema usando restricciones naturales.

En la segunda parte, desarrollaremos un método de optimización con el fin de determinar una solución al problema (1.5).

Por último, implementaremos un algoritmo en algún lenguaje de programación tal que la convergencia sea la solución del problema estudiado.

1.4.3. Población y muestra

Nuestro trabajo es teórico-aplicativo, a pesar de ello se busca estudiar de forma general a una población de peces. Nuestro trabajo se encuentra dentro del universo de los métodos de optimización.

1.4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de nuestro trabajo de tesis se revisará bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet, libros, proyectos y tesis relacionados al tema de interés.

1.4.5. Plan de análisis estadísticos de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.

Capítulo 2

Método de Optimización para Resolver Problemas de Desigualdad Cuasivariacional

En análisis convexo uno de los problemas más estudiados es el problema de desigualdad variacional: encontrar $u \in H$ tal que:

$$\langle Tu, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in H$$

donde $T : H \to H$ es un operador no lineal y H es un espacio de Hilbert.

Este modelo abarca diversas aplicaciones, desde optimización, equilibrios en economía hasta problemas de tráfico urbano, es por ello que encontrar mejores algoritmos para resolver este problema es un desafio para los investigadores de la actualidad.

En este informe estudiamos el problema de desigualdad cuasivariacional: encontrar $u \in H$ tal que:

$$\langle Tu, v - u \rangle + \varphi(v, u) - \varphi(u, u) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

donde $T : H \to H$ es un operador no lineal, $\varphi(.,.) : H \times H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ una función contínua y H es un espacio de Hilbert.

El modelo cuasivariacional surge naturalmente como una extensión del problema de desigualdad variacional con el objetivo de ampliar las aplicaciones del modelo y de los métodos, por ejemplo, a problemas de optimización no convexo, problemas de singularidad no monótono, sistemas de ecuaciones no lineales y no convexos, problemas de equilibrio no convexos, etc.

Existen diversas metodologías para resolver el problema de desigualdad cuasivariacional, en este informe presentaremos una de las más conocidas llamada el método del punto proximal.

El método del punto proximal es uno de los métodos más estudiados e importantes para resolver problemas de optimización, de singularidades, problemas de desigualdad variacional, de equilibrio, entre otros. Este método fue introducido por Martinet (1970),[5], motivado por el trabajo de Moreau en [6] y [7], y fue extensamente estudiado por Rockafellar [16] en los años setenta del siglo anterior para encontrar ceros de operadores monótonos maximales.

Para el problema de minimización

$$\min\{f(x) : x \in H\} \tag{2.1}$$

donde H es un espacio de Hilbert y $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función propia convexa y semicontinua inferior, el método del punto proximal, para resolver el problema (2.1) genera una sucesión de puntos $\{x^k\}$ definidos por

$$x^0 \in H, \tag{2.2}$$

$$x^k = \texttt{arg}\min\{f(x) + (\lambda_k/2)||x - x^{k-1}||^2 : x \in H\}. \tag{2.3}$$

donde λ_k es algún parámetro positivo. Observe que la notación $\texttt{arg}\min$ de la ecuación anterior es bien utilizada en la comunidad de optimización y significa que x^k es el mínimo (global) de $f(\cdot) + (\lambda_k/2)||\cdot - x^{k-1}||^2$ sobre H.

Los resultados de convergencia del método para el caso convexo son muy bien conocidos y es probado en [3], que si $\{\lambda_k\}$ satisface $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1/\lambda_k) = +\infty$, entonces $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \inf\{f(x) : x \in M\}$. Además, si la solución existe la sucesión $\{x^k\}$ converge (débilmente) a un punto de mínimo. En la actualidad se están realizando investigaciones para extender las aplicaciones del método para funciones no necesariamente convexas, motivados por las múltiples aplicaciones en Economía.

La importancia del método del punto proximal radica principalmente en dos aspectos: se puede probar que los métodos de multiplicadores, usado generalmente en todos los softwares de optimización coinciden con el método del punto proximal aplicado al dual del problema original y es así que la teoría de convergencia del método se puede utilizar para garantizar la convergencia de los métodos de multiplicadores que directamente e independientemente es complicado de demostrar.

El otro aspecto es con respecto a los métodos de descomposición, Eckstein y Bertsekas (1992), [1], han demostrado que una gran clase de métodos de descomposición de problemas convexos son casos particulares del método del punto proximal para encontrar un cero de un operador monótono maximal, especificamente el método de Douglas-Rachford estudiado por Lions y Mercier (1979), [4], que abarca una gran clase de algoritmos de optimización es una versión particular del método del punto proximal.

En este informe estamos interesados en estudiar el método de punto proximal aplicado a resolver desigualdades cuasivariacionales. Este informe es un desarrollo extendido del artículo [8], y es organizado en dos capítulos.

En el primer capítulo (Marco Teórico), que es basicamente introductorio, se presentan los símbolos y notaciones que se van a usar más adelante, se menciona el problema de la Desigualdad Cuasivariacional, el Método del punto Proximal con algunos ejemplos, una propiedad de la norma y el Operador Monótono.

En el segundo capítulo (Desarrollo del informe) se presentan los resultados preliminares y el algoritmo proximal para generar una sucesión de puntos que converge a una solución del problema de desigualdad cuasivariacional.

En este capítulo las demostraciones de las proposiciones y teoremas serán referenciadas.

2.1. Algunos resultados de análisis

Sea H un espacio real de Hilbert, donde su producto y su norma son denotados por $\langle .,. \rangle$ y $\|.\|$ respectivamente. Sea $K \neq \emptyset$ un conjunto cerrado y convexo en H.

Definición 2.1 *Dada una función* $f : H \to I\!R$*. Se dice que* f *es propia si* $domf = \{x \in I\!R : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$ *y* $\forall\, x \in domf, -\infty < f(x)$*.*

Definición 2.2 *Dado un conjunto*$X \in H$ *y un punto* $y \in H$*. Se define a la proyección del punto* $y \in H$ *sobre el conjunto* X *como la solución global de del problema*

$$\begin{cases} min\ \|y - x\| \\ s.a. \\ \qquad x \in X \subset H \end{cases} \tag{2.4}$$

Al punto solución (si existe) lo denotamos por $P_X(y)$*.*

Definición 2.3 *Dada una función* $f : S \subseteq H \to I\!R$*. Se dice que* f *es semicontinua inferior en* $\bar{x} \in S$*, si para toda sucesión* $\{x^k\} \subset S$ *convergente a* $\bar{x} \in S$ *se tiene que:*

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x^k) \geq f(\bar{x}). \tag{2.5}$$

Si f *es semicontinua inferior para todo* $x \in S$*, entonces decimos que* f *es semicontinua inferior en* S*.*

Definición 2.4 *Dada una función $f : H \to \mathbb{R}$, $s \in H$ es llamado subgradiente de f en x si*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle, \quad \forall\, y \in H.$$

Observación 2.0.1 *El conjunto de todos los subgradientes de f en x, denotado por $\partial f(x)$, es llamado subdiferencial de f en x.*

2.2. Elementos de análisis convexo

Definición 2.5 *Un subconjunto $K \subset H$ es llamado convexo si para todo x, $y \in K$, $t \in [0,1]$, se tiene que $tx + (1-t)y \in K$.*

Definición 2.6 *Un conjunto $K \subset H$ es llamado fuertemente convexo si para todo $x, y \in K$, y $t \in (0,1)$, existe $r > 0$ tal que $B((1-t)x - ty, r) \subseteq K$, donde B es una bola de radio r.*

Proposición 2.0.1 *Sean $D_i \subseteq H$, $i \in I$, conjuntos convexos, donde I es un conjunto arbitrario. Entonces la intersección $D = \bigcap_{i \in K} D_i$ también es un conjunto convexo.*

Prueba. Ver [17], Proposición 3.2.1, pp. 72.

Ejemplo 2.1 *Sea K un conjunto convexo, F una función en $\mathbb{R}$ y regular. El conjunto definido como*

$$\mathcal{S}_y := \{x \in K \,:\, \langle F(y), y - x \rangle \geq 0\} \tag{2.6}$$

es convexo. En efecto, sea $x^1, x^2 \in \mathcal{S}_y$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces

$$\left\langle F(y), \alpha \left(y - x^1\right) \right\rangle \geq 0 \tag{2.7}$$

$$\left\langle F(y), (1-\alpha)\left(y - x^2\right) \right\rangle \geq 0. \tag{2.8}$$

Sumando (2.7) y (2.8) se tiene,

$$\left\langle F(y), y - \left(\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2\right) \right\rangle \geq 0;$$

entonces, $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in \mathcal{S}_y$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_y$ es un conjunto convexo.

Definición 2.7

1. *Sea* $K \subset H$ *un conjunto convexo,* $f : K \to I\!R$ *es una función convexa si para cada* $x, y \in K$ *y* $\alpha \in [0,1]$, *se tiene que* $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

2. *La función* f *es estrictamente convexa cuando la desigualdad anterior es estricta para todo* $x \neq y$ *y* $\alpha \in (0,1)$.

3. *La función* $f : K \subset H \to I\!R$ *es pseudoconvexa si* $f(x) < f(y)$ *entonces* $\langle \nabla f(y), x - y\rangle < 0$. *La función* f *es pseudocóncava si* $-f$ *es pseudoconvexa.*

El problema general de optimización en el espacio de Hilbert H consiste en resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} min\ f(x) \\ s.a. \\ \qquad x \in K \subset H, \end{cases} \tag{2.9}$$

Teorema 2.1 *Considerando el problema* (2,9)*, si* $K \subset H$ *es un conjunto compacto y* f *es una función continua sobre* K*. Entonces, existe un mínimo global del problema.*

Prueba. Ver [17], Teorema 1.2.1, pp.7.

Teorema 2.2 *Sea* $K \subset H$ *un conjunto convexo y* $f : H \to I\!R$ *una función diferenciable en el punto* $\bar{x} \in K$*. Si* $\bar{x}$ *es un minimizador local del problema* (2,9)*, entonces*

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \geq 0, \qquad \forall\, x \in K.$$

Demostración. Ver [17], Teorema 3.1.3, pp.66.

Teorema 2.3 *Sea* $K \subset H$ *un conjunto convexo y* $f : K \to I\!R$ *una función convexa sobre* K*. Entonces todo minimizador local del problema* (2,9) *es global y el conjunto de minimizadores es convexo. Además, si* f *es estrictamente convexa, no puede existir más de un minimizador.*

Demostración. Ver [17], Teorema 3.1.5 pp. 69.
Supongamos que $\bar{x} \in K$ es un minimizador local que no es global. Entonces, existe $y \in K$ tal que

$$f(y) < f(\bar{x}). \tag{2.10}$$

Definimos $z(\alpha) = \alpha y + (1-\alpha)\bar{x}$. Por la convexidad de K se tiene que $z(\alpha) \in K$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Desde que f es una función convexa para $\alpha \in (0,1]$, y de (2.10) se tiene que

$$\begin{array}{rcl} f(z(\alpha)) & \leq & \alpha f(y) + (1-\alpha) f(\bar{x}) \\ & = & f(\bar{x}) + \alpha(f(y) - f(\bar{x})) \\ & < & f(\bar{x}). \end{array}$$

Tomando $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, se garantiza que el punto $z(\alpha)$ está arbitrariamente próximo al punto $\bar{x}$, y aún se tiene que $f(z(\alpha)) < f(\bar{x})$, para $z(\alpha) \in K$. Lo cuál es una contradicción desde que $\bar{x}$ es un minimizador del problema. Por tanto, $\bar{x}$ es un minimizador global.

Además, sea S el conjunto de minimizadores globales y $\bar{z} \in I\!R$ es un valor óptimo del problema, esto es, $f(x) = \bar{z}$ para cualquier $x \in S$. Para cualquier $x \in S$ y $\bar{x} \in S$, $\alpha \in [0,1]$, por la convexidad de f tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) & \leq & \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\bar{x}) \\ & = & \alpha \bar{z} + (1-\alpha)\bar{z} = \bar{z}, \end{array}$$

esto es, $f(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) \leq z$. Desde que $\bar{z}$ es un valor óptimo del problema, se tiene que $f(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) = \bar{z}$. Por lo tanto, $\alpha x + (1-\alpha)\bar{x} \in S$. Entonces, el conjunto de minimizadores es convexo.

Teorema 2.4 *Sea K un conjunto convexo y abierto y $f : K \to I\!R$ una función diferenciable en K. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

i. *La función f es convexa en K.*

ii. *Para todo x, $y \in K$,*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle .$$

Demostración. Ver [17], Teorema 3.4.7, pp. 147.
Sea f una función convexa sobre K. Para $x, y \in K$, $\alpha \in (0,1]$ y definiendo $d = y - x$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(x + \alpha d) & = & f(x + \alpha(y - x)) \\ & = & f(\alpha y + (1-\alpha)x) \\ & \leq & \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x), \end{array}$$

de donde, $\alpha(f(y)-f(x)) \geq f(x+\alpha d)-f(x)$. Dividiendo por $\alpha>0$,

$$f(y)-f(x) \geq \frac{f(x+\alpha d)-f(x)}{\alpha}.$$

Desde que f es una función convexa existe el límite. Tomando límite, cuando $\alpha \to 0^+$ tenemos

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &\geq \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x+\alpha d)-f(x)}{\alpha} \\ &= \langle \nabla f(x), d\rangle \\ &= \langle \nabla f(x), y-x\rangle . \end{aligned}$$

Entonces, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle$.

Recíprocamente, sea $x, y \in int(dom\, f)$ y para $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle . \tag{2.11}$$

Sustituyendo $x = x+\alpha(y-x)$ y $y = x$ en (2.11), se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x+\alpha(y-x)) + \langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), x-(x+\alpha(y-x))\rangle \\ &= f(x+\alpha(y-x)) + \langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), \alpha(x-y)\rangle . \end{aligned}$$

Multiplicando por $(1-\alpha)$,

$$(1-\alpha)f(x) \geq (1-\alpha)f(x+\alpha(y-x)) + (1-\alpha)\langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), \alpha(x-y)\rangle . \tag{2.12}$$

Sustituyendo $x = x+\alpha(y-x)$ en (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x+\alpha(y-x)) + \langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), y-(x+\alpha(y-x))\rangle \\ &= f(x+\alpha(y-x)) + \langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), (1-\alpha)(y-x)\rangle . \end{aligned}$$

Multiplicando por α,

$$\alpha f(y) \geq \alpha f(x+\alpha(y-x)) + \alpha\langle \nabla f(x+\alpha(y-x)), (1-\alpha)(y-x)\rangle . \tag{2.13}$$

Sumando (2.12) y (2.13) tenemos

$$\alpha f(y) + (1-\alpha)f(x) \geq f(x+\alpha(y-x)) = f(\alpha y + (1-\alpha)x).$$

Por lo tanto, f es una función convexa.

Proposición 2.4.1 *Sea $f : H \to I\!R$ una función propia, semicontinua inferior y convexa, entonces ∂f es monótona maximal.*

Prueba. Ver [15], Teorema A, pp. 213.

2.3. Operador Monótono y Pseudo-Monótono

Definición 2.8 *Sea $(x, y), (x', y') \in T$. Un conjunto $T \subset H \times H$ es*

1. *monótono(estrictamente), si $\langle y - y', x - x' \rangle \geq 0$ (> 0 para $x \neq x'$).*
2. *pseudo-monótono, si $\langle y', x - x' \rangle \geq 0$ entonces $\langle y, x - x' \rangle \geq 0$.*
3. *paramonótono, si es monótono y $\langle x - x', y - y' \rangle = 0$ entonces $(x, y'), (x', y) \in T$.*
4. *monótono maximal, si es monótono y si para cualquier T' monótono tal que*
   $T(x) \subset T'(x)$ para todo x, se tiene que $T = T'$.

Teorema 2.5 *Si $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ (función punto conjunto), es monótono maximal y $\lambda_k > 0$, entonces la aplicación $(I + \lambda_k T)$ es inyectiva y sobreyectiva.*

Demostración: Ver [14] pp 342.

Ejemplos 2.1 **a.** *La aplicación $M : [-2, 2] \rightrightarrows I\!R$ definida como*

$$M(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ Si } x \in [-2, 0] \\ 1 + x^2 & , \text{ Si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

es pseudo-monótona.
En efecto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in [-2, 0]$ y $x' \in [0, 2]$, esto es, $-x \in [0, 2]$, de donde

$$x' - x \in [0, 4]. \tag{2.14}$$

Además, $0 \leq (1 + (x')^2)(x - x') = (x - x') + (x')^2(x - x')$, de donde

$$x' - x \leq (x')^2(x - x'). \tag{2.15}$$

Comparando (2.14) y (2.15) se tiene que $0 \leq (x')^2(x - x')$. Por lo tanto, M es una aplicación pseudo-monótona.
b. *Las aplicaciones $N : [0, +\infty] \to I\!R$ y $T : [0, 2] \rightrightarrows I\!R$ definidas como*

$$N(x) = \frac{1}{1 + x}, \qquad y \qquad T(x) = \begin{cases} -x + 2 & , \text{ Si } x \in [0, 1] \\ x & , \text{ Si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

son pseudo-monótonas pero no monótonas.
En efecto, supongamos que es monótona, esto es,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + x'} \right)(x - x') \\ &= -\frac{1}{(1 + x)(1 + x')}|x - x'|^2, \end{aligned}$$

lo cuál es una contradicción desde que $(1+x)(1+x')>0$. *Por lo tanto, la aplicación punto-punto* N *no es monótona. Además,*

$$0 \leq \frac{1}{(1+x')}(x-x')$$

desde que $(1+x')>0$*, se tiene que* $x-x' \geq 0$. *Entonces,*

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)(x-x') \geq 0$$

pues $x \in [0,+\infty]$. *Por lo tanto, la aplicación* N *es pseudo-convexa. Análogamente se tiene para la aplicación punto-conjunto* T.

2.4. Método del Punto Proximal (MPP)

Uno de los métodos más populares para resolver problemas de optimización irrestricta convexa y no diferenciable es el Método del Punto Proximal (MPP). El MPP clásico genera una sucesión de puntos $\{x^k\}$ dado por $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y

$$x^{k+1} = argmin\left\{f(x) + \frac{\lambda_k}{2}\left\|x-x^k\right\|^2 : \quad x \in H\right\} \tag{2.16}$$

esto es, x^k resuelve

$$min \quad \begin{cases} \left\{f(x) + \frac{\lambda_k}{2}\left\|x-x^k\right\|^2 \right. \\ s.a \\ x \in H \end{cases}$$

donde λ_k es un parámetro positivo y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana.

Se puede probar que si f es acotada inferiormente y semicontinua inferior entonces la sucesión $\{x^k\}$ generada por (2.16), está bien definida.

En el análisis de convergencia del MPP clásico, se observa que los requerimientos más importantes para obtener la convergencia de la sucesión $\{x^k\}$ a la solución es que la condición de que $\{x^k\}$, generada por (2.16), sea una sucesión Fejér convergente y que todos los puntos de acumulación pertenecen a cierto conjunto cerrado y convexo. Para más detalles del MPP clásico y su prueba de convergencia, ver [12].
Por la condición de mínimo, de (2.16) se tiene,

$$\Theta \in \partial f(x^{k+1}) + \lambda_k\left(x^{k+1}-x^k\right). \tag{2.17}$$

De la Proposición 2.4.1, ∂f es un operador maximal; sustituyendo $T = \partial f$ y reordenando (2.17) se tiene

$$x^k \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)(x^{k+1}), \qquad \forall\, k \geq 0.$$

Por cuestiones computacionales, Rockafellar[12] consideró una sucesión de error $\{e^k\}$ que está relacionado con la sucesión $\{x^k\}$ de la siguiente 'versión inexacta':

$$x^k + e^{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)(x^{k+1}), \qquad \forall\, k \geq 0.$$

El modelo anterior muestra que el MPP clásico es una versión particular del método proximal para encontrar ceros de operadores monótonos maximales, el cuál genera una sucesión $\{x^k\} \subseteq H$, a partir de un punto arbitrario $x^0 \in H$, dado como

$$x^{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)^{-1}(x^k + e^{k+1}).$$

Del Teorema 2.5, la existencia y unicidad de la sucesión $\{x^k\}$ es garantizada desde que $(I + 1/\lambda_k T)$ es biyectivo, (la existencia por la sobreyectividad y la unicidad por la inyectividad).

Trabajos anteriores a Rockafellar[12] basaron sus estudios del MPP en la 'forma exacta' en la cual $e^k = 0$ para todo k. Rockafellar[12] mostró que si e^k converge a 0 suficientemente rápido tal que $\sum_{k=1}^{+\infty} ||e^k|| < \infty$, entonces $x^k \to z \in H$, donde $0 \in T(z)$. Los resultados básicos de Rockafellar sobre la convergencia del MPP para resolver problemas de desigualdad variacional con operadores monótonos maximales fueron generalizados por Luque [13] concerniente al grado de convergencia. Podemos decir que el análisis de convergencia del MPP para operadores maximales es análogo a lo hecho en el modelo clásico con la salvedad de sustituir la condición de convexidad por la monotonicidad de T.

2.5. Problema de Desigualdad Cuasivariacional

Sea $\varphi(.,.) : H \times H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ una función contínua. Dado un operador no lineal $T : H \to H$, consideremos el problema de encontrar $u \in H$ tal que

$$\langle Tu, v - u\rangle + \varphi(v, u) - \varphi(u, u) \geq 0, \quad \forall v \in H \tag{2.18}$$

Una desigualdad del tipo (2.18) es llamada **Desigualdad Cuasivariacional Mixta**.

$g(.,.) : H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ una función contínua,

Si $\varphi(v,u) = g(v), \quad \forall u \in H$, entonces el problema (2.18) es equivalente a buscar $u \in H$ tal que

$$\langle Tu, v-u\rangle + g(v) - g(u) \geq 0, \quad \forall v \in H \tag{2.19}$$

que es conocido como una desigualdad variacional mixta.

Además, si K es un conjunto en H y

$$g(u) = I_K(u) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u \in K \\ +\infty & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

es la función indicadora de K, entonces el problema (2.19) es equivalente a buscar $u \in K$ tal que

$$\langle Tu, v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K \tag{2.20}$$

que es llamado problema clásico de desigualdad variacional.

En efecto, si $\bar{u}$ es solución de(2.19), entonces $\bar{u} \in K$, luego $g(\bar{u}) = I_K(\bar{u}) = 0$, además tomando $v \in K$ se tiene que $g(v) = I_K(v) = 0$, reemplazando estos resultados en el problema (2.19):

$$\langle T\bar{u}, v-\bar{u}\rangle + 0 - 0 \geq 0$$

se logra obtener (2.20):

$$\langle T\bar{u}, v-\bar{u}\rangle \geq 0, \quad \forall v \in K$$

Recíprocamente, para $\bar{u} \in K$ se tiene que $\bar{u}$ es solución de (2.20), entonces

$$\langle T\bar{u}, v-\bar{u}\rangle \geq 0, \ \forall v \in K \text{ y } g(\bar{u}) = I_K(\bar{u}) = 0$$

Si $v \in K$, $g(v) = I_K(v) = 0$, entonces

$$\langle T\bar{u}, v-u\rangle + g(v) - g(\bar{u}) \geq 0$$

si $v \notin K$, $\varphi(v) = I_K(v) = +\infty$, entonces

$$\langle T\bar{u}, v - \bar{u}\rangle + \varphi(v) - \varphi(\bar{u}) \geq 0$$

Por lo tanto, si $\bar{u} \in K$ es solución de (2.20) y $v \in H$ entonces

$$\langle T\bar{u}, v - \bar{u}\rangle + \varphi(v) - \varphi(\bar{u}) \geq 0, \ \forall v \in H$$

Así, el problema de **Desigualdad Cuasivariacional Mixta** es un caso particular del problema clásico de **Desigualdad Variacional**.

Lema 2.5.1 *$\forall u, v \in H$,*

$$2\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \tag{2.21}$$

Prueba. *Para $u, v \in H$ tenemos que*

$$\langle (u + v), (u + v)\rangle = \|u + v\|^2$$

ahora desarrollando el producto interno

$$\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = \|u + v\|^2$$

de esto tenemos

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2$$

por lo tanto, acomodando convenientemente

$$2\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$$

Definición 2.9 *La función $\varphi(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ es llamada* ***anti-simétrica*** *si se cumple que:*

$$\varphi(u, u) - \varphi(u, v) - \varphi(v, u) - \varphi(v, v) \geq 0, \quad \forall u, v \in H$$

Vemos que si la función φ es lineal en las dos variables, entonces

$$\varphi(u - u - v - v, u - v - u - v) = \varphi(-2v, -2v) \geq 0$$

y como $-2v \in H$ tenemos que $\varphi(.,.)$ es no negativa.

Veremos el análisis del método proximal para desigualdades cuasivariacionales mixtas.
Para $u \in H$ consideremos el problema de buscar un único $w \in H$ tal que:

$$\langle \rho T w + w - u, v - u \rangle + \rho\varphi(v, w) - \rho\varphi(w, w) \geq 0, \quad \forall v \in H \qquad (2.22)$$

donde $\rho > 0$ es constante.
Se observa que si $w = u$ en la ecuación (2.22) tendríamos:

$$\langle \rho T w, v - w \rangle + \rho\varphi(v, w) - \rho\varphi(w, w) \geq 0$$

como $\rho > 0$, tenemos que:

$$\langle T w, v - w \rangle + \varphi(v, w) - \varphi(w, w) \geq 0$$

entonces w es solución de (2.18)

Esta observación permite sugerir y analizar el siguiente método proximal para desigualdades cuasivariacionales mixtas.

2.6. Algoritmo

Para H espacio de Hilbert, sea $\varphi(.,.) : H \times H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ una función contínua. Dado un operador no lineal $T : H \to H$, $\rho > 0$ una constante, tenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2.1 *Sea la sucesión $\{u_n\}$ en H, para $u_0 \in H$, $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ y $u_n \in H$, tenemos que la solución u_{n+1} es aproximada por la siguiente iteración:*

$$\langle \rho T u_{n+1} + u_{n+1} - u_n, v - u_{n+1} \rangle + \rho\varphi(v, u_{n+1}) - \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) \geq 0, \quad \forall v \in H \qquad (2.23)$$

Si $\varphi(v, u) = g(v) \forall u \in H$ entonces el **Algoritmo 2.1** se convierte en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2.2 *Para $u_0 \in H$, $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ y $u_n \in H$, la solución u_{n+1} es aproximada por la siguiente iteración*

$$\langle \rho T u_{n+1} + u_{n+1} - u_n, v - u_{n+1} \rangle + \rho g(v) - \rho g(u_{n+1}) \geq 0, \forall v \in H$$

Si la función $\varphi(.,.)$ es propia, convexa y semicontínua inferior con respecto a la primera variable, entonces al **Algoritmo 2.1** *se reduce al siguiente algoritmo.*

Algoritmo 2.3 *Para $u_0 \in H$, $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ y $u_n \in H$, la solución u_{n+1} es aproximada por la siguiente iteración:*

$$u_{n+1} = J_{\partial g(u_{n+1})}[u_n - \rho T u_{n+1}], \; n = 0, 1, 2, ...$$

donde $J_{\partial g(u)} = (I + \rho\partial\varphi(., u))^{-1}$ es el operador asociado con el operador monótono maximal $\partial\varphi(v, u)$, el subdiferencial de un convexo propio y la función semicontínua inferior con respecto a la primera variable. Si g es la función indicador de un conjunto convexo y cerrado K en H, entonces el algoritmo 2.2 es equivalente al siguiente método para resolver desigualdades variacionales, que se conoce como el método proximal.

Algoritmo 2.4 *Para $u_0 \in H$, $n = 0, 1, 2, 3, ...,$ y $u_n \in H$, la solución u_{n+1} es aproximada por la siguiente iteración:*

$$\langle \rho T u_{n+1} + u_{n+1} - u_n, v - u_{n+1} \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K$$

que puede ser escrito como

$$u_{n+1} = P_K[u_n - \rho T u_{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde P_K es la proyección de H sobre K. La convergencia se ve en Tseng [10] y Liao [11].

2.7. Resultados Preliminares

Lema 2.7.1 *Sea $\overline{u} \in H$ una solución de (2.18) y sea u_{n+1} la solución aproximada obtenida por el algoritmo 2.1. Si el operador $T : H \to H$ es pseudo monótono y la función $\varphi(.,.)$ es antisimétrica, entonces*

$$\|u_{n+1} - \overline{u}\|^2 \leq \|u_n - \overline{u}\|^2 - \|u_{n+1} - u_n\|^2 \tag{2.24}$$

Prueba. Sea $\overline{u} \in H$ una solución de (2.18). Entonces,

$$\langle T\overline{u}, v - \overline{u} \rangle + \varphi(v, \overline{u}) - \varphi(\overline{u}, \overline{u}) \geq 0, \quad \forall v \in H$$

lo que implica que

$$\langle Tv, v - \overline{u} \rangle + \varphi(v, \overline{u}) - \varphi(\overline{u}, \overline{u}) \geq 0 \tag{2.25}$$

pues T es un operador pseudo monótono. De (2.25), tomamos $v = u_{n+1}$ y obtenemos

$$\langle Tu_{n+1}, u_{n+1} - \overline{u} \rangle + \varphi(u_{n+1}, \overline{u}) - \varphi(\overline{u}, \overline{u}) \geq 0$$

es decir

$$\langle Tu_{n+1}, u_{n+1} - \overline{u} \rangle \geq \varphi(\overline{u}, \overline{u}) - \varphi(u_{n+1}, \overline{u}) \tag{2.26}$$

ahora de (2.23), tomamos $v = \overline{u}$ y obtenemos

$$\langle \rho Tu_{n+1} + u_{n+1} - u_n, \overline{u} - u_{n+1} \rangle + \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1}) - \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) \geq 0$$

es decir

$$\langle \rho Tu_{n+1} + u_{n+1} - u_n, \overline{u} - u_{n+1} \rangle \geq \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1}) \tag{2.27}$$

luego, por propiedad de producto interno

$$\langle \rho Tu_{n+1}, \overline{u} - u_{n+1} \rangle + \langle u_{n+1} - u_n, \overline{u} - u_{n+1} \rangle \geq \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1})$$

ahora, pasamos el primer producto al otro miembro

$$\langle u_{n+1} - u_n, \overline{u} - u_{n+1} \rangle \geq \langle \rho Tu_{n+1}, u_{n+1} - \overline{u} \rangle + \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1}) \tag{2.28}$$

multiplicando a (2.26) por $\rho > 0$ y sumandole $\rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1})$ a ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\rho\langle Tu_{n+1}, u_{n+1} - \overline{u} \rangle + \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1}) \geq \\ &\rho\varphi(\overline{u}, \overline{u}) - \rho\varphi(u_{n+1}, \overline{u}) + \rho\varphi(u_{n+1}, u_{n+1}) - \rho\varphi(\overline{u}, u_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.29}$$

por transitividad de (2.28) y (2.29)

$$\langle u_{n+1}-u_n,\overline{u}-u_{n+1}\rangle \geq \rho\varphi(\overline{u},\overline{u})-\rho\varphi(u_{n+1},\overline{u})+\rho\varphi(u_{n+1},u_{n+1})-\rho\varphi(\overline{u},u_{n+1})$$

ordenandolo

$$\langle u_{n+1}-u_n,\overline{u}-u_{n+1}\rangle \geq \rho\varphi(\overline{u},\overline{u})-\rho\varphi(\overline{u},u_{n+1})-\rho\varphi(u_{n+1},\overline{u})+\rho\varphi(u_{n+1},u_{n+1})$$

luego, como la función $\varphi(.,.)$ es antisimétrica, usamos la definición 2.9 y obtenemos que:

$$\langle u_{n+1}-u_n,\overline{u}-u_{n+1}\rangle \geq 0 \tag{2.30}$$

de (2.21) hacemos $u=\overline{u}-u_{n+1}$ y $v=u_{n+1}-u_n$, obteniendo

$$2\langle u_{n+1}-u_n,\overline{u}-u_{n+1}\rangle = \|\overline{u}-u_n\|^2-\|\overline{u}-u_{n+1}\|^2-\|u_n-u_{n+1}\|^2 \tag{2.31}$$

de (2.30) y (2.31) tenemos

$$0\leq \|\overline{u}-u_n\|^2-\|\overline{u}-u_{n+1}\|^2-\|u_n-u_{n+1}\|^2$$

pasando a la norma del centro hacia el otro miembro

$$\|\overline{u}-u_{n+1}\|^2\leq \|\overline{u}-u_n\|^2-\|u_n-u_{n+1}\|^2$$

por lo tanto

$$\|u_{n+1}-\overline{u}\|^2\leq \|u_n-\overline{u}\|^2-\|u_{n+1}-u_n\|^2$$

■

2.8. Resultado de Convergencia

Teorema 2.6 *Sea H un espacio finito dimensional. Si u_{n+1} es la solución aproximada obtenida por el* **Algoritmo 2.1** *entonces $\{u_n\}$ converge a una solución de (2.18).*

Demostración. Sea $\overline{u} \in H$ una solución de (2.18). De (2.24)

$$\|u_{n+1} - \overline{u}\|^2 \leq \|u_n - \overline{u}\|^2 - \|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq \|u_n - \overline{u}\|^2$$

obtenemos que $\|u_{n+1} - \overline{u}\| \leq \|u_n - \overline{u}\|$, lo cual implica que $\{\|\overline{u} - u_n\|\}$ es una sucesión no creciente, es decir, acotado superiormente por un $c > 0$. Por este motivo tenemos que $\|u_n\| - \|\overline{u}\| \leq \|u_n - \overline{u}\| \leq c$, entonces $\|u_n\| \leq c + \|\overline{u}\|$, lo cual implica que $\{u_n\}$ es acotada.

También, dandole valores a n hasta el infinito en (2.24),

$$\begin{array}{rcl}
\|u_1 - \overline{u}\|^2 & \leq & \|u_0 - \overline{u}\|^2 - \|u_1 - u_0\|^2 \\
\|u_2 - \overline{u}\|^2 & \leq & \|u_1 - \overline{u}\|^2 - \|u_2 - u_1\|^2 \\
\|u_3 - \overline{u}\|^2 & \leq & \|u_2 - \overline{u}\|^2 - \|u_3 - u_2\|^2 \\
 & \vdots & \\
\|u_{n+1} - \overline{u}\|^2 & \leq & \|u_n - \overline{u}\|^2 - \|u_{n+1} - u_n\|^2 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

luego, sumando todas las desigualdades obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq \|u_0 - \overline{u}\|^2$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0 \tag{2.32}$$

como $\{u_n\}$ es acotada, existe $\widehat{u} \in H$ tal que una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ de u_n converge a $\widehat{u}$, entonces reemplazando u_n por u_{n_j} en (2.23) y haciendo que $n_j \to \infty$, obtenemos

$$\langle \rho T\widehat{u} + \widehat{u} - \widehat{u}, v - \widehat{u}\rangle + \rho\varphi(v, \widehat{u}) - \rho\varphi(\widehat{u}, \widehat{u}) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

es decir

$$\langle T\widehat{u}, v - \widehat{u}\rangle + \varphi(v, \widehat{u}) - \varphi(\widehat{u}, \widehat{u}) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

lo cual implica que $\widehat{u}$ resuelve (2.18),luego usando (2.24) tenemos que

$$\|u_{n+1} - \widehat{u}\|^2 \leq \|u_n - \widehat{u}\|^2 - \|u_{n+1} - u_n\|^2$$

entonces

$$\|u_{n+1} - \widehat{u}\|^2 \leq \|u_n - \widehat{u}\|^2$$

de aqui, observamos que $\{\|u_n - \widehat{u}\|\}$ es decreciente y acotada inferiormente, osea que

$$\{\|u_n - \widehat{u}\|\} \text{ converge} \tag{2.33}$$

por otro lado $\widehat{u}$ es un punto de acumulación, entonces $\exists\{n_j\}\ /\ u_{n_j} \to \widehat{u}$, es decir

$$\{\|u_{n_j} - \widehat{u}\|\} = 0 \tag{2.34}$$

de (2.33) y (2.34)

$$\{\|u_n - \widehat{u}\|\} \to 0$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \widehat{u}$$

■

2.9. Análisis del problema donde el instante final es infinito

El estado del sistema debe tender a un estado estacionario x_s. En este caso se aplica el principio del máximo, imponiendo como condición final:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$$

Para el siguiente problema

$$\begin{cases} \max\limits_{u}\ J(x) = & \int_0^\infty e^{-\delta t} G(x,u)dt \\ sujeto\ \ a: & x' = f(x,u), \\ con: & x(0) = x_0, \\ & \lim_{t\to\infty} x(t) = x_s \end{cases}$$

Siendo x_s un estado estacionario.
Se supone que f y G poseen derivadas parciales primeras y segundas continuas, y que G está acotada.
Para resolver el problema se define el Hamiltoniano valor presente:

$$H(x,u,m) = G(x,u) + mf(x,u)$$

A continuación se aplica el principio del máximo, en la formulación del Hamiltoniano valor presente:

1)
$$m' = \delta m - \frac{\partial H}{\partial u} = \delta m - G_u - mf_x$$

2) Hay que resolver:
$$\underset{u}{max} \quad H$$

Como u no está sujeto a restricciones, será:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = G_u + mf_u$$

Suponemos que se cumple la condición suficiente de máximo para el problema a resolver la condición 2),

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} < 0$$

3)
$$x' = f(x,u), \text{ con } x(0) = x_0, \lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$$

Por ser x_s estado estacionario (punto de equilibrio), existirán m_s, u_s, tales que cumplirán junto con x_s la condición necesaria de optimalidad en 2):

$$G_u(x_s,u_s) + m_s f_u(x_s,u_s) = 0$$

La ecuación:

$$G_u(x,u) + mf_u(x,u) = 0$$

define a u como función implícita diferenciable de (x,m), alrededor del punto (x_s,m_s). Sea $u = U(x,m)$, verificándose que $u_s = U(x_s,m_s)$. Obtengamos los valores de

$$\frac{\partial U}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial U}{\partial m}$$

se verificará que:

$$G_u(x, U(x,m)) + m f_u(x, U(x,m)) = 0$$

Derivando miembro a miembro, con respecto a x:

$$G_{ux} + G_{uu}\frac{\partial U}{\partial x} + m\left[f_{ux} + f_{uu}\frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0$$

de donde, despejando la derivada parcial de U con respecto a x, se obtiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{G_{ux} + m f_{ux}}{G_{uu} + m f_{uu}} = -\frac{H_{ux}}{H_{uu}}$$

Análogamente, derivando miembro a miembro, con respecto a m:

$$G_{uu}\frac{\partial U}{\partial m} + f_u(x, U(x,m)) + m f_{uu}\frac{\partial U}{\partial m} = 0$$

de donde se obtiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial m} = -\frac{f_u}{H_{uu}}$$

Llevando los resultados obtenidos a las condiciones 2) y 3) del principio del máximo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' & = f(x, U(x,m)) \\ m' & = \delta m - H_x(x, U(x,m), m) \end{cases}$$

Cada una de las funciones del segundo miembro se aproximan a continuación por un polinomio de grado uno, utilizando el teorema de Taylor, en el punto de equilibrio (x_s, m_s) las derivadas de x y de m serán cero, se verificará que:

$$\begin{aligned} f(x_s, U(x_s, m_s)) & = 0 \\ \delta m_s - H_x(x_s, U(x_s, m_s), m_s) & = 0 \end{aligned}$$

por lo que el sistema dado se puede aproximar por:

$$\begin{cases} x' & = (f_x + f_u U_x)(x - x_s) + f_u U_m(m - m_s) \\ m' & = -(H_{xx} + H_{xu}U_x)(x - x_s)(\delta - H_{xu}U_m - f_x)(m - m_s) \end{cases}$$

Pero por ser

$$U_x = -\frac{H_{ux}}{H_{uu}}, \quad U_m = -\frac{f_u}{H_{uu}}$$

queda:

$$\begin{cases} x' & = (f_x - f_u \frac{H_{ux}}{H_{uu}})(x - x_s) - \frac{f_u^2}{H_{uu}}(m - m_s) \\ m' & = -(H_{xx} - \frac{H_{xu}^2}{H_{uu}})(x - x_s) + (\delta + H_{xu}\frac{f_u}{H_{uu}} - f_x)(m - m_s) \end{cases}$$

Podemos poner:

$$\begin{cases} x' & = a(x - x_s) + b(m - m_s) \\ m' & = c(x - x_s) + (\delta - a)(m - m_s) \end{cases}$$

en donde

$$a = f_x - f_u \frac{H_{ux}}{H_{uu}}, \quad b = \frac{-f_u^2}{H_u}, \quad c = \frac{H_{xu}^2 - H_{xx}H_{uu}}{H_{uu}}$$

que están particularizados en x_s, m_s, $u_s = U(x_s, m_s)$.

Se ha aproximado el sistema de ecuaciones diferenciales ques siguen las trayectorias óptimas por un sistema lineal que se comporta como el sistema original, alrededor del estado estacionario.

Utilizando notación matricial queda:

$$\begin{pmatrix} (x - x_s)' \\ (m - m_s)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \delta - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_s \\ m - m_s \end{pmatrix}$$

Para estudiar la estabilidad de este sistema, hay que calcular los autovalores de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & \delta - a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \delta x + a(\delta - a) - bc = 0$$

Por lo que:

$$\lambda = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4bc + (\delta - 2a)^2}$$

Distinguimos tres casos:

1) $4bc + (\delta - 2a)^2 > 0$. Hay dos autovalores reales distintos λ_1, λ_2, obteniéndose que:

$$x(t) - x_s = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

2) $4bc + (\delta - 2a)^2 = 0$. Hay un autovalor repetido: $\lambda = \frac{\delta}{2}$, obteniéndose que:

$$x(t) - x_s = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$$

3) $4bc + (\delta - 2a)^2 < 0$. Hay dos autovalores complejos y conjugados: $\lambda = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}i$ en donde $p = -4bc - (\delta - 2a)^2$, obteniéndose que:

$$x(t) - x_s = e^{\frac{\delta}{2}t}\left(Acos(\frac{1}{2}\sqrt{p}t) + Bsen(\frac{1}{2}\sqrt{p}t)\right)$$

En cada uno de los casos, A y B son constantes, cuyo valor se obtendrá al imponer las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$, y final $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$. Analicemos cada uno de los tres casos:

En el caso 1, los dos autovalores reales son:

$$\lambda_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4bc + (\delta - 2a)^2}\ ; \quad \lambda_2 = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4bc + (\delta - 2a)^2}$$

Se tiene que $\lambda_1 > 0$, y que λ_2 puede ser positivo, negativo o nulo. Se comprueba fácilmente que: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Longleftrightarrow bc > a(\delta - a)$. En este caso hay estabilidad punto de silla. Existe una única trayectoria que verifica que $x(0) = x_0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$. En efecto: para que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$ o lo que es lo mismo, $\lim_{t\to\infty}(x(t) - x_s) = 0$, tendrá que ser $A = 0$, ya que $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} = \infty$, mientras que $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$, por ser $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Por otra parte:

$$x_0 - x_s = B$$

por lo que:

$$x^*(t) = x_s + (x_0 - x_s)e^{\lambda_2 t}$$

Por otra parte se verifica que:

$$\lambda_1 > 0\ ;\ \ \lambda_2 \geq 0 \Longleftrightarrow bc \leq a(\delta - a)$$

En este caso hay inestabilidad. No existe ninguna trayectoria que verifique $x(0) = x_0$, y $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$, siempre que $x_0 \neq x_s$.

En los casos 2 y 3 también se obtiene inestabilidad.

Por tanto, las condiciones para obtener estabilidad punto de silla son:

$$4bc + (\delta - 2a)^2 > 0 \quad \text{y} \quad bc > a(\delta - a)$$

Si no se cumplen estas condiciones, el problema dado no tiene solución. Ver [32] pag 190.

2.10. Adaptación

De (1.6) tenemos

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{s.a} & -\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx(t) \quad -c)\frac{F(x(t))-x'}{qx(t)}dt \\ & x(t) \in C \end{array}$$

Donde:

$C = \{x(.) :]0;\infty[\to]0;\infty[\text{ tal que } 0 \leq \frac{F(x(t))-x'}{qx(t)} \leq E_M \ \forall t \geq 0, x(0) = x_0\}$

Hacemos $f(x) = G(t, x(t), x'(t)) = -\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx(t) - c)\frac{F(x(t))-x'}{qx(t)}dt$

Entonces, se tiene

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.a. \\ x \in C \end{cases}$$

Además usando la derivada de Gateux de J en la dirección de h en el punto x para $J = \int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx(t) - c)Edt$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\delta J(x^0,h) = &\ \lim_{\theta\to 0} \tfrac{J(x^0+\theta h)-J(x^0)}{\theta}\\
= &\ \lim_{\theta\to 0} \tfrac{\int_0^\infty e^{-\delta t}(pq(x^0+\theta h)-c)Edt-\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx^0-c)Edt}{\theta}\\
= &\ \lim_{\theta\to 0} \tfrac{\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx^0-c+pq\theta h)Edt-\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx^0-c)Edt}{\theta}\\
= &\ \lim_{\theta\to 0} \tfrac{\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx^0-c)Edt+\int_0^\infty e^{-\delta t}pq\theta hEdt-\int_0^\infty e^{-\delta t}(pqx^0-c)Edt}{\theta}\\
= &\ \lim_{\theta\to 0} \tfrac{\int_0^\infty e^{-\delta t}pq\theta hEdt}{\theta}\\
= &\ \lim_{\theta\to 0} \int_0^\infty e^{-\delta t}pqhEdt\\
= &\ \int_0^\infty e^{-\delta t}pqEhdt\\
= &\ \langle e^{-\delta t}pqE,h\rangle, \text{donde } J' = e^{-\delta t}pqE\\
= &\ \langle J',h\rangle\\
= &\ \langle J'(x^0), x-x^0\rangle
\end{aligned}
$$

Como $C \subset H$ es convexo, F y x son diferenciables, por tanto tenemos que la función integrando es contínua, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo tenemos que f es diferenciable, luego por el teorema (2.2), si es solución de (1.6) se tiene que

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle \geq 0, \qquad \forall\, x \in C.$$

2.11. Ejemplo

$$
\begin{array}{ll}
\max J = & \int_0^\infty e^{-3t}(4-x^2-u^2+2u)dt\\
\text{s.a} & x' = 2x+2u\\
\text{con} & x(0)=5\\
 & \lim_{n\to\infty} x(t) = 0
\end{array}
$$

Solución:

Se define el Hamiltoniano
$H(x,u,m) = 4-x^2-u^2+2u+m(2x+2u)$
$\qquad\qquad = 4-x^2-u^2+2u+2mx+2mu$
Aplicando el principio del máximo

1) $m' = \delta m - \frac{\partial H}{\partial u}$
   $m' = 3m-(-2u+2+2m)$

2) Resolver max $4-x^2-u^2+2u+2mx+2mu$

i) $\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + 2 + 2m = 0$, entonces $u = 1 + m$

ii) $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$ (máximo)

3) Resolver $x' = 2x + 2u$, $x(0) = 5$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

$x = e^2 t \left[\int e^{-2t} 2udt + c\right]$

Por otro lado, para la estabilidad del sistema se debe calcular

$$a = f_x - f_u \frac{H_{ux}}{H_{uu}} \;, \quad b = -\frac{f_u^2}{H_{uu}} \quad \text{y} \quad c = \frac{H_{xu}^2 - H_{xx} H_{uu}}{H_{uu}}$$

donde $f = 2x + 2u$ y $H = 4 - x^2 - u^2 + 2u + m(2x + 2u)$.

Reemplazando tenemos: $a = 2$, $b = 2$ y $c = 2$.
Las condiciones para obtener estabilidad del sistema son: $4bc + (\delta - 2a)^2 > 0$ y $bc > a(\delta - a)$. Reeplazando los valores de a, b y c, obtenemos $17 > 0$ y $4 > 2$, por lo tanto el problema (2.11) tiene solución.

2.12. Conclusiones

- Fue posible presentar un algoritmo que resuelva un problema de optimización relacionado a la explotación de recursos pesqueros en el Perú.

- El Método Proximal para Desigualdades Cuasivariacionales Mixtas es un método iterativo que genera una sucesión de puntos tal que en cada iteración se resuelve un modelo perturbado más simple. En este trabajo se demostró la covergencia de un algoritmo proximal usando hipótesis más débiles como por ejemplo la pseudo-monotonicidad del operador.

- Siguiendo los pasos de las demostraciones se ve posible que el algoritmo pueda ser empleado para resolver problemas cuasivariacionales cuando el operador es más general que un operador monótono o pseudomonotono, en particular, parece que es posible la generalización para operadores cuasi-monótonos.

2.13. Recomendaciones

- Un futuro trabajo puede ser la implementación del método estudiado para algunos problemas realistas y su respectiva comparación con otros métodos. Para ello recomendamos una implementación en C^{++}.

- La generalización de métodos de optimización y en general de métodos para desigualdades variacionales de espacios de Hilbert para variedades riemannianas es natural y se está desarrollando actualmente por razones de extensión y el surgimiento de nuevos modelos no lineales. Es por eso que queda libre la posibilidad que se generalice el presente trabajo a variedades riemanianas.

Bibliografía

[1] ECKSTEIN J. y BERTSEKAS D.P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal algorithm for maximal monotone operators. Mathematical Programming Vol 55, N°3: 293-318, 1992.

[2] GLOWINSKI, R., LIONS, J. L., and TREMOLIERES, R.,*Numerical Anaysis of Variational Inequalities,* North-Holland, Amsterdam, Holland 1981.

[3] GULER O.,On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization. SIAM J. Control Optim. Vol. 29: 403-419, 1991.

[4] LIONS, P. L., MERCIER, B., Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 16 (6):964-979, 1979.

[5] MARTINET B. -*Régularisation d'inéquations variationelles par approximations successives.*Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationell,154-159.1970.

[6] MOREAU J.-J., Fonctiones convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien. Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences de Paris 255: 2897–2899, 1962

[7] MOREAU J.-J., Proximité et dualité dans un espace hilbertien. Bulletin de la Société Mathématique de France 93: 273–299, 1965.

[8] NOOR, M. A.,*Proximal Methods for Mixed Variational Inequalities, Journal of Optimization Theory and Aplications,* Vol. 115, pp.447-452, 2002.

[9] NOOR, M. A., *A Class of New Iterative Methods for General Mixed Variational Inequalities,* Mathematical and Computer Modelling, Vol. 31, pp. 11-19, 2000.

[10] TSENG, P., *On Linear Convergence of Iterative Methods for the Variational Inequality Problem,* Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 60, pp. 237-252, 1995.

[11] HE, B. S, and LIAO, L. Z., Improvement of Some Projection Methods for Monotone Nonlinear Variational Inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 112, pp. 111-128, 2002.

[12] ROCKAFELLAR R.T. - *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm.* SIAM J. Control Optim., 14(1976), pp. 877-898.

[13] LUQUE, F.J. - *Asymptotic Convergence Analysis of the Proximal Point Algoritms.*SIAM J. Control and Optimization 22, 277-293.1984.

[14] MINTY, B.-*Monotone nonlinear Operators in Hilbert Space.* Duke Mathematical Journal 29, 341-346. 1978.

[15] ROCKAFELLAR R.T. - *On the Maximal Monotonicity of Subdifferential Mapping.* Pacific Journal of Mathematics. Vol 33, Nro 1. 1970.

[16] ROCKAFELLAR R.T., Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 14 N° 5: 877-898, 1976.

[17] IZMAILOV A.F., SOLODOV M.V. *Otimização - Volume 1. Condiçõoes de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade.* Rio de Janeiro. IMPA, 2005.

[18] CLARK, C. W. *Mathematical bio-economics: the optimal management of renewable resources.* Second edition, Wiley, New York, 1990.

[19] CASTILLO, C. y P. D. N. SRINIVASU. *Bio- economics of a renawable resource in seasonally varying eviroment.* Ecological and Evironmental Economics (EEE) Working Paper Series , no. 16, 2004.

[20] IVES, A. R., K. GROSS y V: A. A. JANSEN. *Periodic mortality events in predator-prey systems.* 2000.

[21] ZHANG, X., Z. SHUAI y K. WANG. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* Optimal impulsive harvesting policy for single population. 2003.

[22] ZULETA, A., C. A. MORENO, P. RUBILAR y J. GUERRA. *Modelo de expltación del bacalao de profundidad bajo incertidumbre del tamaño y rendimiento sustentable del stock.* Informe Final del Proyecto FIP. 1998.

[23] MORENO, C., E. JARAMILLO e I. LEPEZ. *Estudio de áreas potenciales de reservas marinas y parques marinos entre la VIII y X regiones.* Informe Final Proyecto FIP 1999. 2001.

[24] MORENO, C., R. HUCKE-GAETE y J. ARATA. *Interacción de la pesquería del bacalao de profundidad con mamíferos y aves marinas.* Informe Final Proyecto FIP 2001. 2003.

[25] SOTO, D., F. JARA y C. MORENO. *Escaped salmon in the inner seans, southem Chile: facing ecological and social conflicts.* Ecological Apllications. 2001.

[26] MENDEZ, R. y C. MUNITA. *La salmonicultura en Chile.* Fundación Chile. 1989.

[27] SOTO, D. *Evaluación de salmónidos de vida libre existentes en las aguas interiores de las regiones X y XI.* Informe Técnico. Fondo de Investigación Pesquera, Subsecretaría de Pesca. 1997.

[28] BAZARAA M., SHERALY H. and SHETTY C. *Nonlinear Programing.* Jon Wiley & Sons, third edition, 2006.

[29] BERTSEKAS D.P. *Nonlinear Programing.* Massachusetts institute of tecnology, second edition, 1995.

[30] LUENBERGER D.G. *The gradient projection method along geodesics.* Management Science, 1972, Vol 18 n. 1, pp. 620-631.

[31] CLARK, C. W. y G. R. MUNRO 1975. The Economics of Fishing and Modern Capital Theory: A Simplified Approach. Journal of Environmental Economics and Management 3: 92-106.

[32] CERDA, E. *Optimización Dinámica.* Madrid, España primera edición, 2012.

[33] HARKER, P. T., PANG, J. S. (1990). Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementary problems: a survey of theory, algorithms and applications. MATH. PROGRAM., Vol 48:161-220.

[34] FACCHINEI, F., PANG, J. S. (2003). Finite-dimensional variational inequalities and complementary problems. Vol I and II, Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York.