UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA

INSTITUTO DE INVESTIGACION

INFORME FINAL DE INVESTIGACION

TEXTO: FÍSICA APLICADA II

(EJERCICIOS)

PRESENTADO POR:

LIC. CESAR CABRERA ARISTA

LIC. RICHARD BELLIDO QUISPE

Resolución Rectoral No. 709-09-R

Periodo del 01-06-2009 al 30-05-2011

CALLAO-PERU
2011

INDICE

Pagina

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
CDCITRA
VRI

RESUMEN

El propósito del presente trabajo de investigación fue la elaboración de un texto universitario de ejercicios resueltos que sirva de complemento a la formación que se brinda en el aula y como una orientación en el estudio y reforzamiento de las enseñanzas brindadas por el profesor, lo cual significará un valioso aporte para los estudiantes de ciencias e ingeniería y en particular para los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química.

La metodología utilizada para la elaboración del "Texto: Física Aplicada II (Ejercicios)", se sustenta en la revisión bibliografía y la experiencia del autor como profesores titular de las asignaturas de Física. La didáctica que el autor ha venido utilizando y brindando al los estudiantes durante muchos años ha sido mejorado a través del tiempo, incorporando cada vez temas actualizados sobre la materia, lo que redunda en el beneficio de los alumnos que cursan dicha asignatura y que ha permitido al autor definir el contenido del presente texto.

En general se ha logrado elaborar un texto de ejercicios sencillo y práctico, de fácil entendimiento y dirigido a los estudiantes que inician el pre-grado de la carrera de ciencias e ingeniería.

1 INTRODUCCION

El tema, materia de la investigación, es el desarrollo de un texto universitario de ejercicios de la asignatura de Física II, titulado "Física Aplicada II: (Ejercicios)" dirigido a los estudiantes universitarios del pre-grado en ciencias e ingeniería. Se busca que el texto presente de manera práctica, didáctica y ordenada los principios fundamentales de la física lo que permitirá cumplir con los propósitos de una adecuada enseñanza y formación académica y profesional. En las últimas décadas la publicación de material bibliográfico sobre los principios y leyes de la física y sus aplicaciones prácticas para entender los fenómenos naturales ha sido de vital importancia en la formación académica y profesional de los estudiantes universitarios de ciencias y de ingeniería.

Más aun, cuando se trata de textos de especialidad que permita a los estudiantes usar los principios y leyes de la física para entender y resolver muchos problemas cuantitativamente de manera práctica y sencilla. El texto desarrollado y elaborado por el autor tiene una estructura sencilla, la cual pretende ser un instrumento práctico de fácil entendimiento, diseñado específicamente para los alumnos del pre-grado de la carrera de ciencias y de ingeniería.

1.1 Presentación del Problema de Investigación.

Existen en la actualidad muchos textos de física con orientación preuniversitaria que se utilizan como texto de consulta en los centros universitarios, como resultado de esto la mayoría de los estudiantes se mecanizan con ideas que no contemplan pequeños detalles o sutiles (pero importantes) en la solución de los problemas y por tanto los aleja muchas veces de las soluciones con sentido real.

Por otro lado existen algunos textos de nivel que se usan en los claustros universitarios, pero la mayoría de estos textos y libros de física presentan los principios y leyes físicas con mucha frecuencia de manera rígida, extensa y aburrida, con ejemplos que no contemplan los detalles, ni las técnicas de cálculo. Esto no permite a los estudiantes novatos comprender los aspectos fundamentales, prácticos, sencillos y de la utilidad de los principios básicos de la física, los que son necesarios para cumplir con los propósitos de una adecuada enseñanza y formación profesional.

Durante los años que tengo a mi cargo el desarrollo de este tema, se ha observado que los estudiantes carecen de material bibliográfico suficiente, con esta clase de detalles, que le permita un aprendizaje adecuado y por consiguiente el uso de los principios básicos de la física en la solución de problemas.

1.2 Planteamiento del Problema de Investigación.

¿Es posible desarrollar un texto de Física Aplicada II con ejercicios de los principios fundamentales y sus aplicaciones prácticas en la solución de problemas, con los detalles y técnicas de solución para una mejor orientación de los estudiantes del pre-grado?

1.3 Objetivos de la Investigación.

- OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un texto universitario de ejercicios que sirva como material de estudio y facilite la comprensión de las leyes físicas para adquirir experiencia en la solución de problemas con aplicaciones prácticas.

- OBJETIVOS ESPECIFICOS

a) Recopilar información básica y actualizada, necesaria para desarrollar un texto de ejercicios

b) Que sirva de material de estudio en la formación profesional del estudiante universitario en ciencias e ingeniería.

c) Presentar la solución de diversos problemas y ejercicios en forma ordenada usando los principios de la física y mostrando su aplicación práctica en la solución de problemas de la mecánica.

d) Presentar los ejemplos desarrollados con detalles y técnicas de cálculo.

1.4 Importancia y Justificación de la Investigación.

El presente estudio de investigación fue motivado por la necesidad de contar con un texto de ejercicios que presente de manera didáctica y ordenada los principios y leyes fundamentales de la física, mostrando los ejemplos con lujo de detalles las técnicas de solución con el propósito de lograr una adecuada enseñanza y contribuir de esta manera con la formación profesional del estudiante universitario de Ciencias e Ingeniería.

Se puede manifestar que el presente trabajo de investigación pretende ser un medio complementario a la formación que se brinda en el aula y que sirva como orientación en el estudio y reforzamiento de las enseñanzas brindadas por el profesor, lo que significará un valioso aporte para los estudiantes universitarios y por que no decir para los alumnos de Ingeniería Química.

Este trabajo se justifica por la suma importancia que tiene el conocimiento de las aplicaciones prácticas de los principios de la física en la solución de problemas reales lo que contribuye en la formación de los estudiantes de Ciencias e Ingeniería, ya que tienen profunda influencia dentro de su campo de actividad la aplicación de estos conocimientos.

1.5 Enunciado de la Hipótesis.

El desarrollo del texto de nivel universitario "FÍSICA APLICADA II: (EJERCICIOS)", le permitirá al estudiante ganar experiencia en la aplicación de las leyes fundamentales de la física para buscar soluciones prácticas de problemas mecánicos, favoreciendo así la enseñanza-aprendizaje de los alumnos de Ciencias e Ingeniería de nuestra universidad.

2 MARCO TEORICO

El estudio de la física es una aventura que el lector encontrara estimulante, algunas veces frustrante y ocasionalmente dolorosa, pero que da abundantes beneficios y satisfacciones. La física apela a nuestro sentido de la belleza y a nuestra inteligencia. Lo que se conoce del mundo físico se basa en los cimientos establecidos por gigantes como Galileo, Kepler, Newton, Maxwell y Einstein, cuya influencia se ha extendido mas halla de la ciencia para afectar profundamente nuestra vida y nuestras ideas.

2.1 Elasticidad y Oscilaciones. – La elasticidad es un concepto matemático de gran utilidad en la física, sirve para describir las deformaciones a la que están sometidas los materiales bajo la acción de fuerzas externas. La elasticidad permite comprender las propiedades de dureza y flexibilidad de los materiales. Las oscilaciones son una clase muy importante de movimiento que se observa con mucha frecuencia en la naturaleza. Cualquier oscilación se debe a la presencia de fuerzas elásticas actuando sobre un cuerpo.

2.2 Estática de Fluidos.- Es una parte importante de la mecánica que describe las leyes que gobiernan a los fluidos en reposo. En la estática de fluidos se desarrollan las aplicaciones de la ecuación de la hidrostática que relaciona la presión con la profundidad. También se estudia el principio de Pascal y el principio de Arquímedes y sus aplicaciones en diversos problemas y finalmente se desarrollan los fenómenos relacionados a la tensión superficial.

2.3 Dinámica de Fluidos. – Es una parte de la mecánica que estudia las leyes y principios que gobiernan el movimiento de los fluidos líquidos ideales y su relación con las fuerzas que la causan. Su desarrollan las aplicaciones de la ecuación de continuidad y las aplicaciones de la ley de la conservación de la energía que equivalente a la ecuación de Bernoulli y sus respectivos predicciones.

2.4 Temperatura y Calor. – La temperatura es un concepto relacionado con la energía interna que posee una sustancia y para establecer su valor se pueden usar la escala Celsius, la escala Fahrenheit y la escala absoluta o Kelvin. La temperatura tiene influencia directa en las propiedades físicas de muchos de los materiales. El calor es la cantidad que describe la energía en tránsito desde (o hacia) una sustancia y que tiene como resultado un cambio directo en la temperatura de la sustancia. Describiendo la equivalencia entre el calor y la energía mecánica se puede comprender y resolver problemas que tienen relación con la transferencia de calor.

2.5 Termodinámica.-. Es una rama de la Física que permite describir las leyes que gobiernan la transferencia de calor en todo proceso que implique una expansión y un cambio en la energía interna. Se describen los procesos de expansión isobárica, expansión isotérmica, expansión adiabática, etc. Se resuelven ejercicios sobre las maquinas de calor y la aplicación de la primera ley de la termodinámica, la segunda ley de la termodinámica y el concepto de entropía en la solución del problema.

2.6 Ondas Elásticas. – El movimiento de las ondas es uno de los fenómenos más importantes de la mecánica. Se formula la ecuación de onda para un sistema ideal y se estudian principalmente las ondas periódicas y su aplicación a casos que se observan con mucha frecuencia en la naturaleza. En este capítulo se adquiere experiencia en el cálculo de la longitud de onda, la frecuencia de la onda, la rapidez, la potencia y energía de las ondas viajeras y su relación con las propiedades del medio en que se propagan.

2.7 Sonido. - El sonido es una onda longitudinal cuya rapidez con que se propaga depende de las características físicas del medio en que se propaga la onda de sonido. Se realizan ejercicios que muestran las diversas aplicaciones del sonido, tales como en una ecografía, en una medida de velocidad con efecto Doppler en ondas sonoras, etc. Se desarrollan ejercicios sobre la intensidad y el nivel de intensidad de las ondas sonoras producidas por una fuente.

3 MATERIALES Y METODOS

3.1 Materiales:

- Materiales de oficina
- Materiales de Consulta (Textos Universitarios, revistas, artículos, etc.)
- Materiales de computo e impresión

3.2 Método

La elaboración del texto, propósito de la investigación, ha demandado al autor el ordenamiento de la información compilada durante su vida profesional y académica, al desempeñarse primero como profesor titular de los cursos de fisica desde el año 1997 hasta la presente fecha.

El hecho de ser profesor de los cursos de fisica en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, le da la oportunidad al autor de ir elaborando separatas de los capítulos del presente texto y poder comprobar con los alumnos, determinadas necesidades de modificación, hasta tener los mejores resultados de entendimiento por parte de los alumnos.

La experiencia adquirida, durante el periodo de trabajo en la UNAC ha contribuido a lograr el texto con las características didácticas que se presentan.

4 RESULTADOS

El resultado de la presente investigación es el texto universitario de ejercicios que se adjunta y, es titulado: "Física Aplicada II: (Ejercicios)". El texto elaborado contiene siete capítulos, expuestos en forma breve y práctica, con ejercicios resueltos y soluciones con lujo de detalle lo que permite una fácil interpretación de los alumnos del pre-grado de ciencias e ingeniería que usen este texto.

El texto presenta algunos aspectos teóricos: leyes y principios fundamentales en forma breve y se concentra en la solución de los ejercicios propuestos. Usa ejemplos de aplicación practica en cada capitulo desarrollado, mostrando las técnicas de solución en cada uno de los ejercicios desarrollados, así como se muestra la justificación de las leyes o principios físicos en la solución de los problemas.

RPP.

5 DISCUSION

El texto universitario, titulado "Física Aplicada II: (Ejercicios)" que es el resultado de la presente investigación se caracteriza por presentar en una forma ordenada, sencilla y de fácil comprensión, los ejercicios de aplicación de los principales conceptos y leyes físicas que se estudian en la asignatura de Física II que se imparte en la facultad de ingeniería química.

Si bien existen algunos textos de nivel universitario que se usan en los claustros universitarios, la mayoría de estos textos o libros de física presentan los principios o leyes físicas con mucha frecuencia de manera rígida, seca y aburrida. Este texto Física Aplicada II (Ejercicios) intenta superar esto con ejemplos y ejercicios que contemplan los detalles y las técnicas de cálculo, así como la justificación de las leyes y los principios físicos aplicados en la solución de los problemas planteados.

Este texto universitario que ha sido desarrollado mediante un cuidadoso estudio, tiene la intención de presentar al lector de una manera sencilla y practica el uso, manejo y las técnicas de aplicación de los principios básicos de la física.

6 REFERENCIALES

1. ALONSO M., FINN E., "FÍSICA, Mecánica", Volumen I, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1986.

2. BLATT F. J., "FÍSICA", Volumen I, Editorial Prentice Hall Inc. , USA 1991.

3. BRONSHTEIN I, SEMENDIAEV K., "MANUAL DE MATEMATICAS para ingenieros y estudiantes", Cuarta edición, Editorial MIR, Moscú, URSS 1982.

4. EISBERG M., LERNER L., "FÍSICA", Volumen I, Editorial Mc Graw Hill Interamericana de Mexico S. A. de C. V., Mexico 1984.

5. FEYNMAN R., "FÍSICA, Mecánica, Radiación y Calor", Volumen I, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1987.

6. HALLIDAY R., RESNICK R., "FÍSICA I", Editorial Copyright de Mexico, Mexico 1984.

7. HIGDON A., STILES W., "ENGINEERING MECHANICS, Statics", Volumen I, Third Edition, Editorial Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA 1968.

8. HIGDON A., STILES W., "ENGINEERING MECHANICS, Dynamics", Volumen II, Third Edition, Editorial Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA 1968.

9. HEWITT P. G., "FÍSICA CONCEPTUAL", segunda edición, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1995.

10. LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M., "FISCA TEORICA: MECÁNICA" Volumen 1, 2da. Edición, Editorial Reverté S. A., España, 1994.

11. Mc KELVEY J. P., GROTCH H., "FISICA Para Ciencias e Ingeniería", Volumen I, Editorial Harla de México, México 1981.

12. SEARS F., ZEMANSKY M., YOUNG H., FREEDMAN R., "FISICA Universitaria", Novena edición, Volumen I, Editorial Pearson Educación, México 1999.

13. SERWAY R., FAUGHN J., "Fundamentos de Física", Volumen I, Sexta edición, Editorial Thomson, México 2004.

14. SERWAY R., FAUGHN J., "FISICA", Volumen I, Quinta edición, Editorial Prentice Hall de México, México 2001.

15. SERWAY R., FAUGHN J., "Física I", Volumen I, Tercera edición, Editorial Thomson, México 2004.

16. SHORTLEY B., DUDLEY W., "FÍSICA, Mecánica", Volumen I, Editorial Urmo S. A., Bilbao, España 1976.

17. STRELKOV S., "MECÁNICA", Editorial MIR, Moscú, URSS 1978.

18. TOMAS G. Jr., "CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY", Second Printing, Editorial Addison Wesley Publishing Company, INC. USA 1960.

7 APENDICE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD INGENIERÍA QUIMICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUIMICA

SYLLABUS

1 INFORMACION ADMINISTRATIVA

1.1 Asignatura	: Física II
1.2 Código	: FM202
1.3 Semestre Académico	:
1.4 Ciclo Académico	: III
1.5 Créditos	: 4
1.6 Horas Semanales	: T/2h, P/2h, L/2h.
1.7 Duración	: 17 semanas.
1.8 Requisito	: Física I
1.9 Profesor	:

2 SUMILLA

2.1 Naturaleza de la asignatura: Teórica, Práctica y Experimental.

2.2 Síntesis: Elasticidad: Fatiga, Deformación. Oscilaciones: Movimiento Armónico Simple (MAS). Oscilaciones amortiguadas y forzadas. Hidrostática: Presión, Densidad, Principio: de Pascal, de Arquímedes; Tensión Superficial. Hidrodinámica: Ecuación de continuidad. Ecuación de Bernoulli. Viscosidad, Ley de Poiseuille. Temperatura y Dilatación: Equilibrio Térmico. Escalas de Temperatura. Calor: Primera y segunda ley de la Termodinámica. Ondas en medios elásticos, ondas sonoras. Ecuación de ~~onda: E~~fecto Doppler.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

3 OBJETIVOS

A. Generales:

Estudiar y describir: los fenómenos de los cuerpos elásticos, la estática y dinámica de los fluidos, las leyes físicas que gobiernan los procesos termodinámicos, los fenómenos ondulatorios.

B. Específicos.

Al término del semestre académico el alumno será capaz de:

- emplear el cálculo infinitesimal y diferencial para estudiar las magnitudes que caracterizan las deformaciones elásticas que experimentan los cuerpos.
- predecir la dinámica de las oscilaciones elásticas.
- medir y comprobar las magnitudes que caracterizan las ondas en un medio físico elástico.
- establecer la ecuación de onda e interpretar sus soluciones
- de aplicar las leyes de la termodinámica en la solución de problemas prácticos.

4 CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

Semana 1. ELASTICIDAD: Deformación unitaria: de longitud, Transversal, de volumen. Esfuerzo unitario o Fatiga: de Tensión, de Compresión, de Corte. Diagrama de Fatiga vs. Deformación, Ley de Hooke, Módulo Elástico: de Young, de Rigidez, de Compresión. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3],

Laboratorio N° 01: "Modulo de Rigidez"

Semana 2. MOVIMIENTO ARMONICO: Concepto. Movimiento Armónico Simple (MAS): Ecuación de elongación, Amplitud, frecuencia angular, Periodo. Aplicaciones: Movimiento del Bloque-resorte. Péndulo Simple. Energía en el MAS. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [7]

Laboratorio N° 02: "Oscilaciones Simples"

Semana 3. MOVIMIENTO ARMÓNICO: Péndulo Físico. Movimiento Armónico Amortiguado (MAA): Ecuación del MAA, Amplitud Amortiguada, Frecuencia angular, Periodo. Energía en la Oscilación Amortiguada. Oscilación Forzada: Ecuación del OF, Amplitud. Energía y Resonancia. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [4], [6]

Laboratorio N° 03: "Péndulo Físico".

Semana 4. HIDROSTÁTICA: Fluidos. Densidad. Presión. Presión atmosférica. Ecuación de la Hidrostática. Presión Manométrica. Manómetro. Fuerza Hidrostática. Principio de Arquímedes: Empuje. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [4], [6]

Laboratorio N° 4: "Oscilaciones Amortiguadas"

Evaluación N° 1: **Practica calificada N° 1**

Semana 5. TENSIÓN SUPERFICIAL: Principio de Pascal. Fuerza Hidráulica. Tensión Superficial. Ángulo de Contacto. Presión en una Gota liquida. Presión en una Burbuja. Efecto de Capilaridad. Viscosidad. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [7]

Laboratorio N° 08: "Principio de Arquímedes"

Semana 6. HIDRODINAMICA: Flujo: Flujo Laminar, Flujo Turbulento. Numero de Reynolds. Ecuación de Continuidad: conservación del flujo. Conservación de la energía: Ecuación de Bernuolli. Aplicaciones: Principio de Venturí. Ecuación de Poiseuille. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [4],

Laboratorio N° 09: "Tensión Superficial".

Semana 7. TEMPERATURA Y DILATACION: Concepto de Temperatura. Unidades de Temperatura: Unidad Celsius. Unidad Fahrenheit. Unidad Kelvin. Equilibrio Térmico. Dilatación Térmica: Expansión lineal, Expansión de volumen en sólidos y líquidos. Esfuerzo Térmico. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [6], [7]

Laboratorio N° 7: "Coeficiente de Viscosidad"

Semana 8. Evaluación N° 2: **Examen Parcial**

Semana 9. CALOR: Concepto: Capacidad calorífica o Calor Específico. Transferencia de Calor: Por Conducción: Conductividad térmica, Por Convección, Por Radiación: ley de Stefan. Cambios de Fase de la Materia: Calor de fusión, Calor de vaporización. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [7]

Laboratorio N° 9: "Dilatación lineal de un Gas".

Semana 10. LEYES DE LA TERMODINAMICA: Ecuación de Estado y Energía Interna del gas ideal. Trabajo de Expansión. Primera Ley de la Termodinámica. Procesos de Expansión: isotérmico, isométrico, isobárico y adiabático. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [7]

Laboratorio N° 10: "Flujo Térmico y Calor especifico"

Semana 11. LEYES DE LA TERMODINAMICA: Procesos térmicos reversibles e irreversibles. Maquinas Térmicas. Eficiencia térmica. El frigorífico. Segunda Ley de la

Termodinámica. Ciclo de Carnot. Concepto de Entropía: Principio de aumento de Entropía. Calculo de entropía. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [4], [5], [6], [7]

Laboratorio N° 11: "Calor de Transformación"

Semana 12. MOVIMIENTO ONDULATORIO: Concepto: Ecuación de Onda, Ondas Armónicas: longitud de onda, vector de onda, Frecuencia, velocidad de la onda. Ondas Longitudinales en una barra cilíndrica. Ondas Transversales en una cuerda. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [7]

Laboratorio N° 12: "Rapidez del Sonido"

Evaluación N° 3: **Practica Calificada N° 2**

Semana 14. ONDAS DE SONIDO: Ecuación de Onda del Sonido. Velocidad del Sonido. Potencia e Intensidad del sonido: Nivel de intensidad. Ondas estacionarias en una cuerda y en un tubo. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [9]

Laboratorio N° 14: Ondas estacionarias

Semana 15. EFECTO DOPPLER: Concepto. Efecto Doppler en Ondas Sonoras. Efecto Doppler en ondas electromagnéticas. Fenómeno de la Reflexión y de la Refracción de Ondas. Problemas. Bibliografía: [1], [2], [3], [5], [7]

Laboratorio N° 15: "Recuperación de Laboratorio"

Semana 16: Evaluación N° 4: Examen Final

Semana 17: Evaluación N° 5: Examen de Sustitución.

4. METODOLOGÍA

La teoría será desarrollada por el profesor respectivo, mediante la exposición de las leyes que gobiernan los fenómenos físicos en la naturaleza por medio de clases magistrales en la pizarra y usando medios audiovisuales dentro de la concepción moderna del proceso de enseñanza-aprendizaje por Objetivos. La parte práctica será desarrollada con participación activa de los estudiantes.

5. EVALUACIÓN.

Cinco Evaluaciones: Dos practicas calificadas, un examen parcial (EP) y un examen final (EF). Un examen de sustitución (ES), que reemplaza al examen de menor calificación o al no rendido. Un promedio de prácticas calificadas (PP). Una nota de Laboratorio (PL). La nota final NF se obtiene mediante la ponderación siguiente:

$$NF = \frac{EP + EF + NP + NL}{4}$$

6. BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

[1] F. Sears, M. Zemansky, H. Young, R. Freedman. FISICA Universitaria, Editorial: Pearson Educación, Vol. 1 México 1999.

COMPLEMENTARIA

[2] P. G. Hewith, Física Conceptual, Edición N° 10, Editorial: Addison Wesley, USA 1990.

[3] R. A. Serway, J. W. Jewett Jr. FÍSICA: Para Ciencias e Ingeniería, Vol. I, Editorial: Internacional Thomson Editores, USA 2005.

[4] M. Alonso, O. Rojo; Física, Vol. 1, Campos y Ondas, Editorial: Addison Wesley. USA 1987.

[5] J. P. Mc Kelvey, H. Grotch; Física para Ciencias e Ingeniería, Vol.1, Editorial: Harla. México 1981.

[6] R. Feyman, R. Leihton, Física, Campos. Vol. I, Editorial: Addison Wesley, USA 1987.

[7] M Alonso - E. Finn, Física, Campos y Ondas, Vol. 1, Editorial: Addison Wesley. USA 1986.

[8] F. J. Blatt; Física, Editorial: Prentice - Hall inc. 1991.

8 ANEXOS

$\vec{u}$	Vector unitario
$\vec{r}$	Vector de desplazamiento
$\vec{v}$	Vector de velocidad
$\vec{a}$	Vector de aceleración
$\vec{\omega}$	Vector de velocidad angular
$\vec{\alpha}$	Vector de aceleración angular
$\vec{p}$	Vector del momentum lineal
$\vec{F}$	Vector de Fuerza
$\vec{L}$	Vector del momentum angular
$\vec{\tau}$	Vector de torque+
I	Momento de inercia
W	Trabajo
K	Energía cinética
U	Energía Potencial
E	Energía mecánica
μ	Coeficiente de fricción
η	Coeficiente de viscosidad

RPP.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA • VRI •

FISICA APLICADA II

(EJERCICIOS)

Lic. CESAR CABRERA ARISTA

Profesor Asociado de la Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Callao

Lic. RICHARD BELLIDO QUISPE

Profesor de la Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Callao

Universidad Nacional del Callao

Dedicada a mis queridas hijas
Dana Helena y Sofía Grace K.

PROLOGO

La física es una ciencia fundamental que tiene profunda influencia en todas las ramas científicas y de ingeniería. Por consiguiente, no solo los estudiantes de física e ingeniería, sino todo aquel que piense seguir una carrera científica debe tener una buena compresión de sus leyes fundamentales.

Este libro es un texto de nivel universitario elaborado por el autor para la formación de estudiantes que inician una carrera profesional en ciencias o ingeniería. En este libro se presenta ejercicios con aplicaciones de los principios y leyes de la Física de una manera ordenada y sencilla, con el propósito de que el estudiante se familiarice con los conceptos que le permitirán describir las propiedades de los fenómenos mecánicos.

La preparación de este libro se sustenta en las copias de las clases impartidas en el curso de Física I a los estudiantes del pre-grado de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.

Un criterio fundamental para la preparación de este libro fue la presentación de un material de ayuda que sirva de complemento en la formación académica que se brinda en las aulas universitarias, motivo por el cual se presentan temas con algunos problemas desarrollados explícitamente. Sin embargo el estudiante deberá tener cierto conocimiento del cálculo diferencial e integral para manejar adecuadamente algunos capítulos del presente texto.

En esta obra Principios Básicos de la Física se pretende exponer los conceptos y principios fundamentales de la física tales que nos permitan crear modelos teóricos para describir hechos experimentales en la naturaleza, se pone énfasis en las técnicas de resolución de problemas, poniendo especial énfasis en la interpretación de los resultados y su discusión será la característica primordial del texto.

En la presentación de los distintos capítulos se seguirá un orden contrastado con la experiencia docente del autor. Siempre que sea posible, la aplicación de los principios físicos se hará a los casos más simples hasta llegar a casos de un nivel de complejidad adecuado.

CESAR CABRERA ARISTA

INDICE

CAPITULO I

ELASTICIDAD Y OSCILACIONES

1.1 ELASTICIDAD

El concepto de elasticidad se puede simplificar de la manera siguiente: Si se le aplica una fuerza a un resorte, se verá que el estiramiento o compresión (deformación) que experimenta es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada. El físico británico Robert Hooke (1635-1703) un contemporáneo de Isaac Newton, observó por primera (vez en el siglo XVII) esta relación que se conoce como la **Ley de Hooke**. Si un material elástico se estira o comprime más allá del **límite elástico** no recuperará su estado original, la deformación será permanente. Para comprender y describir la elasticidad de los materiales es necesario reconocer los conceptos de: Fatiga o Esfuerzo Unitario, Deformación Unitaria, Modulo Elástico, etc.

1.2 FATIGA

La fatiga o esfuerzo unitario que experimenta un material que está sometido a fuerzas externas puede ser de Tensión, de Compresión y de Corte. La fatiga se denota con la letra σ (sigma) del alfabeto griego y se define como:

$$\sigma_t = \frac{F}{A_\perp} \rightarrow \sigma_c = \frac{F}{A_\parallel} \qquad \ldots (1,1)$$

Donde:

σ_t	Fatiga de Tensión y Fatiga de Compresión, en N/m^2.
σ_c	Fatiga de Corte, en N/m^2.
F	Magnitud de la Fuerza aplicada, en Newton (1N) o Libra-Fuerza (lb).
$A_\perp$	Área perpendicular a la dirección de la fuerza, en m^2 o in^2.
$A_\parallel$	Área transversal a la dirección de la fuerza, en m^2 o in^2.

La unidad de la Fatiga en el sistema internacional (SI) es de $1N/m^2$ = 1Pa (un Pascal). La unidad de uso común en el sistema británico o ingles es el de libra-fuerza sobre pulgada cuadrada 1lbf/in^2 unidad que en el sistema técnico o de ingeniería recibe el nombre de 1psi.

$$1psi = 1\frac{lb}{in^2} = 6891Pa \quad y \quad 1Pa = 1.451 \times 10^{-4}psi$$

1.3 DEFORMACION UNITARIA

La deformación unitaria describe el cambio fraccional de forma (resultante) que experimenta un material. La deformación unitaria es una cantidad escalar positiva y sin unidad (es un número puro) que se representará con la letra "ε" (épsilon) del alfabeto griego y su expresión matemática depende del tipo de deformación que experimente el material. Así su expresión funcional es:

$$\varepsilon_l = \frac{|\Delta l|}{l} \; ; \; \varepsilon_v = \frac{|\Delta V|}{V} \; ; \; \varepsilon_c = \frac{|\Delta A|}{A} = \varphi \qquad \ldots (1,2)$$

Donde:

ε_l	Deformación unitaria longitudinal.
ε_v	Deformación unitaria de volumen.
ε_c	Deformación unitaria transversal o de corte.
φ	Ángulo de corte o deformación de corte, en radianes (1rad).

El valor absoluto en la definición de la deformación unitaria implica que se debe considerar que $|x| = \begin{Bmatrix} +x; & si\ x\ es\ positivo \\ -x; & si\ x\ es\ negativo \end{Bmatrix}$. Siempre que la deformación unitaria de corte o ángulo de corte resulte ser de pequeño valor $\varphi \ll$ 1rad podemos usar la aproximación $\varphi \approx \tan(\varphi)$ que resulta muy útil para hallar una relación entre las cantidades medibles en la deformación.

1.4 MODULO DE ELÁSTICIDAD

Es la cantidad que define cuan elástico es un material. Si el esfuerzo unitario σ y la deformación unitaria ε no excede los valores del límite elástico de un material, entonces son directamente proporcionales y a la constante de proporcionalidad se le llama **modulo de elasticidad** del material. Esta proporcionalidad (bajo ciertas condiciones) se también denomina **Ley de Hooke**, el patrón general se puede formular por la expresión matemática siguiente:

$$Y = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_l} = \frac{F\,L}{A_\perp\,|\Delta L|} \qquad \ldots(1,3)$$

$$G = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{FA_\parallel}{A_\parallel|\Delta A|} = \frac{F}{A_\parallel\,|\varphi|} \qquad \ldots(1,4)$$

$$\beta = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_v} = \frac{F\,V}{A_\perp|\Delta v|} \qquad \ldots(1,5)$$

Donde:

Y	Modulo elástico de Young, en N/m^2.
G	Modulo elástico de Rigidez o de Corte, en N/m^2.
β	Modulo elástico de Volumen, en N/m^2.

EJERCICIO.- Determine la energía potencial U que almacena una barra cilíndrica homogénea de sección transversal A y de longitud inicial L, la cual es sometida a estiramiento longitudinal por fuerzas externas de tensión.

SOLUCIÓN: Como la fuerza externa produce un estiramiento dx en la longitud de la barra cilíndrica. La fuerza interna en la barra es $F_i = -YA\varepsilon_l$ donde ε_l es la deformación unitaria de longitud, Y es el modulo elástico de Young. Recordando la definición de

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

trabajo podemos calcular el trabajo de la fuerza interna cuando la barra se deforma esto es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = -\int_{x_i}^{x_f} YA\varepsilon_l \, dx$$

$$W = -YA \int_{x_i}^{x_f} \varepsilon_l dx$$

Debido a que la deformación longitudinal está relacionada con el estiramiento x por la ecuación $\varepsilon_l = \frac{x}{L}$ entonces el incremento diferencial de la deformación unitaria longitudinal resulta ser $d\varepsilon_l = \frac{dx}{L}$ por lo que al evaluar en la ecuación se obtiene:

$$W = -YAL \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} \varepsilon_l \, d\varepsilon_l = \frac{1}{2} Y(\varepsilon_i)^2 \, AL - \frac{1}{2} Y \left(\varepsilon_f\right)^2 AL$$

Resultado satisface el teorema del trabajo y la energía potencial, por lo tanto la energía potencial U almacenada por la barra cilíndrica en la deformación es:

$$U = \frac{1}{2} \, Y \, (\varepsilon_l)^2 \, AL$$

Donde ε_l es la deformación longitudinal y el producto $AL = V$ es el volumen de la barra cilíndrica en cuestión. La energía potencial también se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} \frac{YA}{L} x^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

Donde x es el estiramiento total de la barra cilíndrica sometida a tensión y la cantidad definida como $k = \frac{YA}{L}$ recibe el nombre de constante elástica de la barra cilíndrica.

EJERCICIO.- Dos hilos de igual longitud L son hechos del mismo material, uno es de área cuadrada de lada "d" y el otro es área circular de diámetro "d". Si de cada hilo cuelga un bloque del mismo peso W ¿Cuál de los dos hilos almacena mayor energía potencial en la deformación?

SOLUCION: La sección recta de los dos hilos se puede calcular directamente por formula, esto es: $A_1 = d^2$; $A_2 = \frac{\pi}{4}d^2$ por lo tanto podemos determinar la constante elástica de cada hilo, esto es:

$$k_1 = \frac{YA_1}{L} = \frac{Yd^2}{L} \quad y \quad k_2 = \frac{YA_2}{L} = \frac{\pi}{4}\frac{Yd^2}{L}$$

Vemos que k_2 es menor que k_1, puesto que $k_2 = \frac{\pi}{4}k_1$. El estiramiento de cada hilo se produce para equilibrar el peso W que sostienen, por lo tanto se cumple:

$$k_1 x_1 = W \;\rightarrow\; x_1 = \frac{W}{k_1} \qquad \ldots \text{(a)}$$

$$k_2 x_2 = W \;\rightarrow\; x_2 = \frac{W}{k_2} = \frac{4}{\pi}\frac{W}{k_1} = \frac{4}{\pi}x_1 \qquad \ldots\text{(b)}$$

Vemos pues de las ecuaciones (a) y (b) que el estiramiento de hilo de sección circular es mayor que la del hilo de sección cuadrada. Por otro lado la energía potencial acumulada en la deformación del hilo de sección cuadrada es:

$$U_1 = \frac{1}{2}k_1(x_1)^2 = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{W}{k_1}\right)^2$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{W^2}{k_1} \qquad \ldots \text{(c)}$$

La energía potencial acumulada en el hilo de sección circular es:

$$U_2 = \frac{1}{2}k_2(x_2)^2 = \frac{1}{2}k_2\left(\frac{W}{k_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{W^2}{k_2}$$

$$U_2 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{W^2}{k_1}\right) \qquad \ldots \text{(c)}$$

Se observa pues, que la energía potencial acumulada en el hilo de sección circular es mayor que la energía potencial acumulada en el hilo de sección cuadrada. Este resultado era de esperar puesto que el hilo de sección circular se estira mas que el hilo de sección cuadrada.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA • VRI •

EJERCICIO.- El diámetro de una varilla de bronce es de 8 mm. Determinar la fuerza, en dinas, que produce una extensión del 0.3 % de su longitud. El módulo de Young Y del bronce es $9x10^{11}\ dinas/cm^2$.

SOLUCION: Por definición,

$$\Delta L = FL/AY \Rightarrow F = \Delta LAY/L \qquad (\alpha)$$

Dónde
$$\Delta L = (0.003)L, \quad A = \pi D^2/4 \qquad (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α):

$$F = \frac{(0.003)L\,\pi(0.8)^2(9x10^{11})}{4L}$$

$$\therefore\ F = 13.6x10^8\ dinas$$

EJERCICIO.- Un cable de acero 12.5 mm de diámetro soporta una carga de 4 Ton. Calcular la máxima aceleración vertical hacia arriba que puede comunicarse a dicha carga si la fatiga del cable no puede exceder de 40 Kgf/mm^2.

SOLUCION: Por definición fatiga se tiene:

$$\sigma = T/A \ \rightarrow \ T = \sigma A \qquad (\alpha)$$

Donde, T: es la tensión que soporta el cable, como el diámetro es conocido podemos calcular la tensión, esto es:

$$T = \sigma\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = 40\,\frac{(\pi)(12.5)^2}{4} = 4906\ Kgf$$

Por otro lado aplicando la segunda ley de Newton al sistema se tiene:

$$T - p = m\,a \Rightarrow a = \frac{(T-p)}{m} \qquad (\beta)$$

Evaluando en la ecuación (β), se tiene:

$$a = \frac{(4906-4000)(9.8)}{4000}$$

$$\therefore\ a = 2.22\, m/s^2$$

EJERCICIO.- Un alambre circular de acero de 2 m de longitud no debe estirarse más de 0.25 cm cuando se aplica una tensión de $400N$ a cada extremo. ¿Qué diámetro mínimo debe tener?

SOLUCION: D : Diámetro $\quad L=2m,\quad \Delta L=0.25cm,\quad T=400N$

Por la ley de Hooke:

$$Y = \frac{FL}{A\Delta L} \qquad (\alpha)$$

Cómo:

$$A = \frac{\pi\, D^2}{4} \qquad (\beta)$$

Luego, (β) en (α):

$$Y = \frac{4FL}{\pi\, D^2 \Delta L} \quad \Rightarrow \quad D^2 = \frac{4FL}{\pi Y\,\Delta L}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$D = \left(\frac{4x400x2}{\pi\, x20x10^{10}x25x10^{-4}}\right)^{1/2}$$

Finalmente,

$$D \approx 1.4\ mm$$

EJERCICIO.- Un peso W cuelga de un alambre de acero vertical de 60 cm de longitud y $0.625\,mm^2$ de sección transversal. Se cuelga de la parte inferior del peso un alambre análogo que soporta la mitad del peso anterior. El alambre superior experimenta una deformación unitaria longitudinal de $6x10^{-4}$. Calcular cuánto vale el peso W.

SOLUCION: Aplicando la ley de Hooke,

$$(\Delta L/L) = P/AY \qquad (\alpha)$$

En (α),
$$(\Delta L/L) = (W + W/2)/AY \qquad (\beta)$$

De (β),
$$(\Delta L/L) = 1.5\,W/A\,Y \Rightarrow W = \frac{(\Delta L/L)AY}{1.5} \qquad (\gamma)$$

En (γ),
$$W = \frac{(6x10^{-4})0.625(20x10^{3})}{1.5}$$

$$\therefore W = 5\ Kgf$$

EJERCICIO.- Un alambre vertical de $5\,m$ de largo y $0.0088\,cm^2$ de área de sección transversal tiene un módulo de Young $Y = 200\,GPa$. Un objeto de $2\,Kg$ se sujeta a su extremo y alarga el alambre elásticamente. Si ahora el objeto se tira hacia abajo un poco y se suelta, el objeto experimentará un MAS vertical. Encuentre el período de su vibración.

SOLUCION: Sabemos que el período de su vibración está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (\alpha)$$

La constante de fuerza del alambre que actúa como resorte vertical está dada por: $K = F/\Delta L$, donde ΔL es la deformación producida por la fuerza (peso) F. Pero de

$F/A = Y(\Delta L/L)$, Entonces:

$$K = \frac{F}{\Delta L} = \frac{A\,Y}{L} = \frac{(8.8x10^{-7}\ m^2)(2x10^{11} Pa)}{5\ m} = 35\ K\,N/m$$

Reemplazando en (α)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ Kg}{35x10^3\ N/m}} = 0.047\ s$$

$$\therefore\quad T = 0.047\,s$$

EJERCICIO.- Una varilla metálica de $4\ m$ de longitud y sección de $0.5\ cm^2$ se estira $0.2\ cm$ al someterse a una tensión de $5000\ N$. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

SOLUCION: Aplicando la ley de Hooke, $$Y = \frac{F\ L}{A\,\Delta L}$$

Reemplazando valores, se tiene, $$Y = \frac{(5000\ N)4\ m}{0.2x10^{-2}m(0.5x10^{-4}m^2)}$$

$$Y = \frac{2x10^4\ N}{10^{-7}\ m^2} = 2x10^{11}\ Pa$$

$$\therefore Y = 2x10^{11}\ Pa$$

EJERCICIO.- Una muestra de aceite con un volumen inicial de $600\ cm^3$ se somete a un aumento de presión de $3.6x10^6\ Pa$ y el volumen disminuye $0.45\ cm^3$. ¿Qué módulo de compresibilidad tiene el material? ¿Qué coeficiente de compresibilidad tiene?

SOLUCION: Por el módulo de compresibilidad B, se tiene,

$$B = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} = -\frac{V\,\Delta p}{\Delta V}$$

Reemplazando valores,

$$B = \frac{(600\ cm^3)(3.6x10^6\ Pa)}{0.45\ cm^3}$$

$$B = 4.8x10^9\ Pa$$

Además, el coeficiente de compresibilidad $1/B$, será,

$$1/B = 1/4.8x10^9\ Pa$$

$$1/B = 2.1x10^{-10}\ Pa^{-1}$$

EJERCICIO.- El módulo volumétrico del agua es $2.1\ GPa$. Calcule la contracción volumétrica de 100 ml de agua cuando se someten a una presión de $1.5\ MPa$.

SOLUCION: Por definición, se tiene, $B = -\Delta p/(\Delta V/V) \Rightarrow \Delta V = -\dfrac{V\,\Delta p}{B}$

$$\Delta V = -\frac{(100\ ml)(1.5x10^6\ Pa)}{2.1x10^9\ Pa}$$

$$\therefore\ \Delta V = -0.071\ ml$$

EJERCICIO.- Una placa cuadrada de acero mide 10 cm por lado y tiene un espesor de 0.5 cm. (a) Calcule la deformación de corte que se produce al aplicarse a cada uno de los cuatro lados una fuerza de $9x10^5\ N$ paralela a cada lado. (b) Determine el desplazamiento x en centímetros.

SOLUCION: (a) Por la definición del módulo de rigidez o corte,

$$G = \frac{F/A}{x/h} = \frac{F}{A\,\frac{x}{h}}$$

RPP.

La deformación de corte (x/h), será,

$$\frac{x}{h} = \frac{F}{AG}$$

Donde, el módulo de rigidez para el acero es, $G = 7.5x10^{10}\ Pa$

Reemplazando valores, se tiene,

$$\frac{x}{h} = \frac{9x10^5\ N}{5x10^{-4}\ m^2\ (7.5x10^{10}\ Pa)}$$

$$\frac{x}{h} = 0.024 \Rightarrow x = h\ (0.024) = 10\ (0.024)\ cm$$

$$\therefore\ x = 0.24\ cm$$

EJERCICIO.- Una gelatina con forma de caja tiene un área en su base de $15\ cm^2$ y una altura de $3\ cm$. Cuando se aplica una fuerza cortante de $0.5\ N$ en la cara superior, ésta se desplaza $4\ mm$ en relación con la cara inferior. ¿Cuáles son el esfuerzo cortante, la deformación cortante y el módulo de corte para la gelatina?

SOLUCION: Por definición,

$$\sigma_c = \frac{F}{A_{II}} = \frac{0.5\ N}{15x10^{-4}\ m^2} = 0.33\ KPa$$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta x}{h} = \frac{0.40\ cm}{3\ cm} = 0.13$$

Además,

$$G = \frac{0.33\ KPa}{0.13} = 2.5\ KPa$$

EJERCICIOS DE ELASTICIDAD

1.- Una cuerda de nylon se alarga 120cm so- metida al peso de un alpinista de 80kg. Si la cuerda tiene 50m de longitud y 7mm de diámetro. ¿Cuál es el modulo de Young de este material?

2.- Un bíceps relajado requiere una fuerza de 25N para estirarse 3cm; el mismo músculo sometido a una máxima tensión requiere una fuerza de 500N para el mismo estiramiento. Determinar el modulo de Young para el músculo en ambas condiciones, si podemos considerarlo como un cilindro uniforme de 20cm de largo y de 50cm^2 de sección recta.

3.- Dos varillas cilíndricas, una de acero y la otra de latón, se sueldan por sus extremos. Cada una tiene 1m de longitud y 2cm de diámetro. La combinación se somete a una tensión de 4000N Determine: a) el modulo de Young del sistema, b) el estiramiento de cada varilla. $Y_{acero} = 20x10^{10}Pa,\ Y_{Lat} = 9x10^{10}Pa$

4.- Un bloque de 5kg se cuelga de un hilo de acero de 50cm de largo y 1mm de diámetro. De la parte inferior del bloque se cuelga una esfera de 10kg sujeta por otro hilo igual al primero. Determine: a) el estiramiento de cada hilo, b) La energía almacenada por cada hilo.

5.- Una muestra de aceite con volumen inicial de 800cm^3 se somete a un aumento de presión de 2x10^{6}Pa, y el volumen disminuye en 0.2cm^3, entonces ¿Cuál es el modulo de volumen del material? ¿En qué porcentaje cambia su densidad?

6.- Dos tiras de metal se remachan juntas en sus extremos con 4 remaches, de 3mm de diámetro. ¿Qué tensión máxima puede ejercer la tira remachada sin que el esfuerzo de corte sobre cada remache exceda de $5x10^8$Pa?

7.- El cable que sujeta el ascensor de un edificio se estira 5mm cuando el ascensor esta en reposo. Si el ascensor sube y baja con la misma aceleración de $2m/s^2$ determine el estiramiento: a) cuando sube, b) cuando baja. Considere $g = 10m/s^2$

8.- Un hilo de metal, tiene una longitud L y una sección recta A. Si otro hilo del mismo material tiene el doble de longitud y el doble del diámetro, entonces la constante elástica del segundo hilo ¿es mayor o menor que la del primer hilo?, ¿en cuánto?

9.- Una varilla cilíndrica de 40cm de longitud y 2mm de diámetro, se fija de un extremo y, el extremo libre se somete a una torsión de 9Nm haciendo que la varilla gire sobre su eje un ángulo de 5°, entonces ¿Cuál es el modulo de rigidez de la varilla? ¿Cuánta energía se almacena en la torsión?

10.- Demuestre que el esfuerzo de tensión por cambio de volumen de una sustancia se puede expresar en términos del cambio unitario de densidad.

$$\sigma = \beta \frac{\Delta \rho}{\rho_i}$$

11.- Un bloque de 15kg, se sujeta al extremo de un hilo de acero de longitud no estirada de 50cm y este hilo se alarga 2mm a causa del peso del bloque. Si se hace girar el bloque en un círculo vertical a razón de 6rev/s determine el estiramiento del hilo cuándo el bloque se halle en el punto más bajo y más alto. Considere $g = 10m/s^2$

12.- Una varilla rígida de 110cm de largo y de peso despreciable se sostiene en sus extremos por dos alambres A y B de igual longitud. El diámetro de A es de 8mm y el diámetro de B es de 1.2mm. El modulo de Young de los hilos es $Y_A = 2.4x10^{11}$Pa, $Y_B = 1.2x10^{11}$Pa, entonces ¿A que distancia del hilo B debe colgarse un peso W a fin de producir a) fatigas iguales en A y B, b) Deformaciones iguales en A y B?

13.- Se saca a la superficie del mar, un lingote de cobre (de un barco hundido) desde a una profundidad cuya presión absoluta es de $3x10^5$Pa. Entonces ¿Cuál es la deformación unitaria de volumen del lingote de cobre?

14.- Un alambre de latón debe resistir una tensión de 470N aplicada perpendicularmente a cada extremo sin romperse. ¿Qué diámetro mínimo debe tener? $\sigma_{Rotura} = 4.7x10^8\,Pa$.

15.- Las pruebas realizadas con un hilo metálico de una aleación nueva indican que se rompe al aplicarle una tensión de 52N. Si el diámetro del hilo es de 0.84mm ¿Cuál es el esfuerzo de rotura del material?

16.- Un alambre de acero de 6m de largo tiene una sección recta de $0.04m^2$ y un límite elástico 1,6 veces mayor que su modulo de Young. Si el esfuerzo de rotura es 6,5 veces mayor que el modulo de Young, ¿Cuánto peso puede colgar del alambre sin exceder el limite elástico? ¿Cuál es el estiramiento del alambre con esta carga?

17.- El límite elástico de un cable de acero es de $2,4x10^8$Pa y su área seccional es de $3.14cm^2$. Entonces determine la aceleración máxima hacia arriba que puede darse a un ascensor de 980kg sostenido por este cable sin que el esfuerzo exceda un tercio del límite elástico.

18.- Un bloque cuelga del extremo de un hilo de aluminio vertical. El peso estira al hilo 0.2mm. Si el esfuerzo satisface la ley de Hooke, ¿Cuánto se habría estirando el hilo a) si tuviera el triple de longitud, b) si tuviera la misma longitud y el triple de diámetro?

19.- El modulo de Young del hueso humano es cerca de $1,4x10^{10}$Pa. Si los huesos pueden sufrir un cambio de longitud del 1% antes de romperse ¿Qué fuerza máxima puede aplicarse a un hueso con sección recta mínima de $3cm^2$? Estime la altura máxima de la que puede saltar una persona de 80kg sin fracturarse los huesos de la pierna? Suponga que el contacto con el piso dura 0,04s y que el peso se distribuye sobre las dos piernas.

20.- Una varilla de cobre de 1,4m de largo y área transversal de $2,0cm^2$ se sujeta por un extremo al extremo de una varilla de acero de longitud L y sección recta de $1,0cm^2$. La varilla compuesta se somete a tensiones iguales y opuestas de $6x10^4$N en sus extremos. ¿Cuál es el valor de L si el estiramiento de las varillas es el mismo? ¿Qué esfuerzo experimenta cada varilla? Recuerde que $Y_{Cu} = 11x10^{10}$Pa.

21.- Un negociante produce etanol puro y lo almacena en un tanque cilíndrico rígido de 25cm de diámetro con un pistón ajustado en la parte superior. El volumen total del tanque es de $0,2m^3$ y en un intento por meter un poco más al tanque, el negociante coloca 1420kg de plomo sobre el pistón. Entonces ¿Qué volumen adicional de etanol puede meter el negociante? $\kappa_{etanol} = 110x10^{-11} Pa^{-1}$

22.- Una varilla de acero de 10ft de longitud y 0,5in de diámetro, empalmada con el eje de un motor eléctrico de 1CV, proporciona una conexión entre le eje y la carga. Si el eje del motor tiene una rapidez de rotación de 1800rpm ¿Qué torsión se transmite por la varilla cuando el motor está en plena marcha? ¿Qué ángulo de torsión sufre la varilla en estas condiciones? ¿Cuánta energía almacena la varilla a causa de la torsión?

1.5 OSCILACIONES SIMPLES

Las oscilaciones simples o movimiento armónico simple (MAS) es causado por una fuerza elástica neta $F = -kx$ actuando sobre una partícula. Siempre que el movimiento de una partícula sea el de un MAS, la posición $x = x(t)$ se puede describir por medio de la ecuación:

$$x = A\, sen(\omega t + \varphi) \qquad \ldots (1{,}6)$$

Donde:

A	: es la amplitud de la oscilación, su unidad es 1m, 1cm, 1mm.
t	: es el tiempo, su unidad es 1s, 1min, 1h.
ω	: es la frecuencia angular, su unidad es 1rad/s, 1rev/s, 1rev/min.
φ	: es la fase inicial, su unidad es 1rad.
$\omega t + \varphi$	: es la fase de la oscilación.

Para el caso de la condición inicial más general, en el tiempo t = 0, la posición es x_o y la velocidad es v_o entonces la amplitud (A) y la fase inicial (φ) de la oscilación estarán dadas por las ecuaciones:

$$A = \sqrt{(x_o)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2} \qquad \ldots (1{,}7)$$

y

$$\tan(\varphi) = \frac{x_o \omega}{v_o} \qquad \ldots (1{,}8)$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \qquad \ldots (1{,}9)$$

La ecuación de la aceleración es:

$$a = -\omega^2 A\, sen(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \qquad \ldots (1{,}10)$$

De la aceleración resulta una ecuación diferencial de segundo orden y homogénea, conocida como la ecuación de movimiento de las oscilaciones simples:

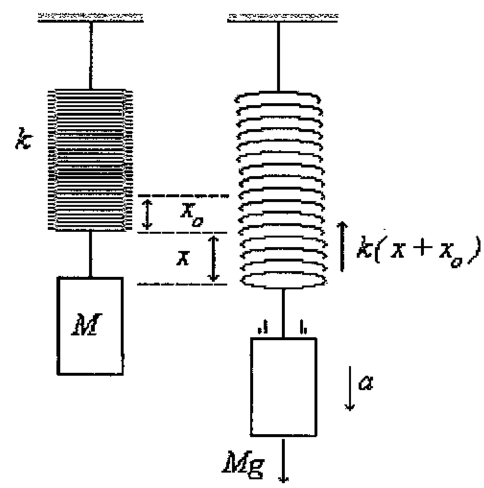
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \ldots (1,11)$$

La energía mecánica de una partícula oscila con un MAS alrededor de la posición de equilibrio es una constante en el movimiento de la partícula y se escribe por medio de la ecuación:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \ldots (1,12)$$

1.6 SISTEMA BLOQUE-RESORTE

EJERCICIO.- Un bloque de masa M cuelga en equilibrio de un resorte vertical de masa despreciable y de constante elástica K. Si el bloque se golpea suavemente hacia abajo demuestre que adquiere un movimiento armónico simple. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones?



SOLUCIÓN: De lo planteado, el resorte se estira la cantidad x_o para equilibrar el peso del bloque, vea la figura adjunta. Aquí se debe cumplir que:

$$Kx_o - Mg = 0 \qquad \ldots (a)$$

Como el bloque se golpea hacia abajo, este se estira una cantidad x adicional a la del equilibrio. Aplicando la 2da. Ley de Newton al sistema en movimiento, se tiene:

$$ma = \sum_i f_i = Mg - K(x + x_o) = -Kx + Mg - Kx_o$$

RPP.

Dado que en el equilibrio se cumple la ecuación (a), entonces podemos escribir esta última ecuación como:

$$ma = -kx \rightarrow a = -\frac{K}{M}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M}x = 0$$

Esta ecuación es la ecuación de movimiento para las oscilaciones simples de una partícula que vibra con una frecuencia angular que depende solo de la masa M y de la constante elástica K del resorte, lo que demuestra que el movimiento resultante del bloque, es un movimiento armónico simple. La frecuencia angular ω y el periodo T se determina inmediatamente, esto es:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

EJERCICIO.- De un muelle está colgado un platillo de balanza con pesas. El período de las oscilaciones verticales es igual a $0.5\ s$. Después de poner en el platillo más pesas, el período de las oscilaciones verticales se hizo igual a $0.6\ s$. Qué alargamiento provocaron en el muelle las pesas añadidas.

SOLUCIÓN: De las condiciones del problema.

Por definición: $w_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi\, rad/s$ y

$$w_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{0.6} = \frac{10}{3}\pi\ rad/s$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO • VRI • CDCITRA

Además se tiene que:

$$K x_1 = m_1 \, g \Rightarrow w_1^2 x_1 = g$$

$$x_1 = \frac{g}{(w_1)^2} = \frac{9{,}8m/s^2}{(4\pi \, rad/s)^2}$$

$$x_1 = 0.0620 \, m$$

También,

$$K x_2 = m_2 \, g \Rightarrow w_2^2 \, x_2 = g$$

$$\Rightarrow x_2 = g/w_2^2 = 9.8 \Big/ \left(\frac{10}{3}\pi\right)^2$$

$$\Rightarrow x_2 = 0.0893 \, m$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 0.0893 \, m - 0.0620 \, m$$

$$\therefore \Delta x = 0.0273 \, m$$

EJERCICIO.- Un punto vibra armónicamente. El período de las vibraciones es de $2 \, s$, la amplitud de $50 \, mm$ y la fase inicial igual a cero. Hallar la velocidad del punto en el momento en que la elongación es igual a $25 \, mm$.

SOLUCIÓN: Por definición,

$$x = A sen(wt + \phi), \qquad \phi = 0$$

Reemplazando valores, $\quad 25 = 50 \, sen \, wt \Rightarrow sen \, wt = 0.5$

$$\Rightarrow wt = \frac{\pi}{6}$$

Además, $\quad v = A \, w \cos wt$

$$v = 50 \, \frac{2\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore v = 136.03 \, mm/s$$

EJERCICIO.- Partiendo de la posición de equilibrio un sistema bloque-resorte oscila con MAS de amplitud A y de periodo T = 6s. Según esto, después de que tiempo la energía potencial del oscilador tiene el triple de magnitud que la energía cinética.

SOLUCIÓN: Del problema el periodo es conocido, por lo tanto se puede hallar la frecuencia angular de las oscilaciones, esto es:

$$T = 6s \;\rightarrow\; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}$$

Por otro lado para resolver el problema, primero debemos hallar el valor de la posición para la que se cumple la siguiente condición impuesta:

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = 3\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{6}kx^2 \qquad \ldots (a)$$

Evaluado esta condición (a) en la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \;\rightarrow\; \frac{2}{3}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Por lo tanto la posición en que se cumple la condición impuesta es:

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{3A^2}{4}} = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}A \qquad \ldots (b)$$

También sabemos que se cumple:

$$x = A\,sen(\omega t + \varphi) \qquad \ldots (c)$$

Y de las condiciones iníciales del problema, en $t = 0s$; $x = 0m \;\; y\, A \neq 0$. Por lo que al evaluar en la ecuación anterior se tiene:

$$0 = A\,sen(\varphi); \rightarrow\; sen(\varphi) = 0 \;\rightarrow\; \varphi = 0$$

Usando este resultado junto con la ecuación (b) y evaluando en la ecuación (c) se tiene:

$$A\,sen(\omega t) = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}A \;\rightarrow\; sen(\omega t) = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \ldots (d)$$

Esta ecuación se debe cumplir para todas las oscilaciones del sistema bloque resorte. Pero solo tomaremos la solución para la primera oscilación completa.

Ahora como la frecuencia angular ya se ha calculado, es conocida $\omega = \pi/3\ rad/s$ y dado que existen dos soluciones para cada signo en la ecuación (d), cuando se toma el signo (+) se obtienen las dos primeras soluciones:

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{3} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{3\omega} = 1s$$

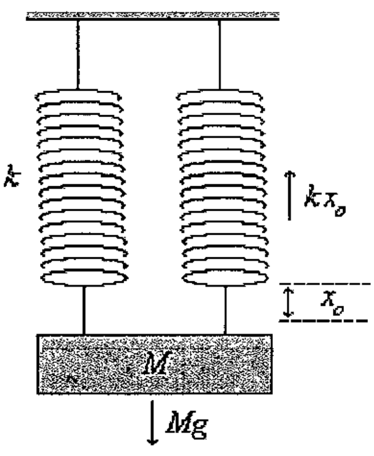
$$\omega t_2 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{3\omega} = 2s$$

Cuando se toma el signo (-), se obtienen las dos segunda soluciones:

$$\omega t_3 = \frac{4\pi}{3} \rightarrow t_3 = \frac{4\pi}{3} = 4s$$

$$\omega t_4 = \frac{5\pi}{3} \rightarrow t_4 = \frac{5\pi}{3\omega} = 5s$$

EJERCICIO.- Un resorte sin masa con una constante de fuerza de $3.6N/cm$ se corta en mitades. (a) ¿Cuál es la constante de cada mitad? (b) las dos mitades, suspendidos por separado, contienen un bloque de masa M, ver figura. El sistema vibra a una frecuencia de $2.87Hz$. Calcule el valor de la masa M.



SOLUCIÓN: Se puede suponer que los dos resortes estaban inicialmente en serie por lo tanto la constante equivalente es:

$$K_{equiv.} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = K$$

Del problema K = 3,6 N/cm y como los resortes son iguales se asume que $K_1 = K_2$ por lo tanto de la ecuación anterior se deduce que:

$$K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 = 7.2\ N/cm$$

Luego, $K_1 = K_2 = 7.2N/cm$

Pero sabemos que:

$$w^2 = \frac{2K_1}{m} = \frac{2K_1}{M} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{2K_1}{M}} = 2\pi f$$

Evaluando los datos en la ecuación se tiene:

$$M = \frac{K_1}{2\pi^2 f^2} = \frac{7{,}2N/cm}{2\pi^2(2{,}87s^{-1})^2} = 4.43\,Kg$$

1.7 EL PÉNDULO SIMPLE

EJERCICIO.- Un péndulo simple de 2m de longitud oscila con un MAS en el ecuador terrestre donde la aceleración de la gravedad es $g_e = 9{,}78\text{m/s}^2$. Si este péndulo oscila con un MAS en el polo norte terrestre donde la aceleración de la gravedad es $g_p = 9{,}82\text{m/s}^2$ ¿Cuál es la diferencia entre los periodos?

SOLUCIÓN: El periodo del péndulo en el ecuador terrestre es:

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{9{,}78m/s^2}} = 2{,}8414s$$

El periodo en el polo norte terrestre es:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{9{,}82m/s^2}} = 2{,}8356s$$

El periodo es menor en el polo norte, lo que significa que las oscilaciones del péndulo son más lentas en el ecuador que en el polo norte. La diferencia entre los periodos es de:

$$T_e - T_p = 5{,}8ms$$

Rpf.

EJERCICIO.- Si la diferencia entre el periodo de un péndulo simple de longitud L y de otro péndulo simple de longitud $L - 0{,}49m$, es de $\frac{\pi}{4}s$ ¿Cuál es el valor de la longitud L del primer péndulo simple?

SOLUCIÓN: El periodo de los dos péndulos simples es:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad ; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L - 0{,}49m}{g}}$$

De la condición del problema:

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{L - 0{,}49m}{g}} = \frac{\pi}{4}s$$

De la que resulta:

$$\sqrt{\frac{L - 0{,}49m}{g}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{4}s - \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Operando y elevando al cuadrado, se tiene:

$$\frac{L}{g} - \frac{0{,}49m}{g} = \left(\frac{1}{8}s - \sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2 = \frac{1s^2}{64} - \frac{1s}{4}\sqrt{\frac{L}{g}} + \frac{L}{g}$$

Eliminando términos comunes y despejando se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1s}{16} + \frac{1s}{5} = \frac{21s}{80}$$

Elevando al cuadrado los dos términos y despejando L se obtiene:

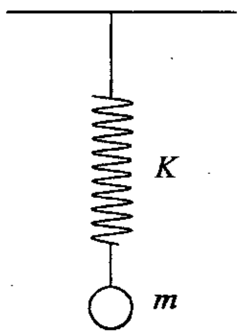
$$L = g\left(\frac{21s}{80}\right)^2 = 9{,}8\frac{m}{s^2}\left(\frac{441s^2}{6400}\right) = 0{,}675m$$

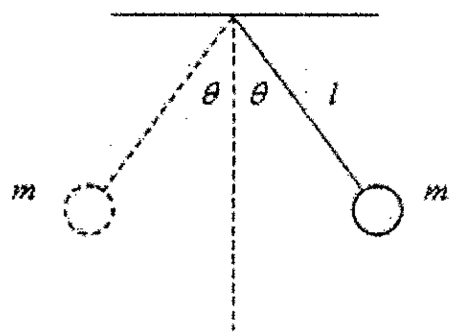
$$L = 67{,}5cm$$

EJERCICIO.- Un cuerpo pesa $1\,N$. Si la colgamos del extremo de un resorte largo con constante de fuerza de $1.50\,N/m$ y masa despreciable, rebota verticalmente en MAS. Si detenemos el rebote y dejamos que el cuerpo oscile de lado a lado con un ángulo pequeño, la frecuencia de este péndulo simple es la mitad de la del rebote. Puesto que el ángulo es pequeño, las oscilaciones de lado a lado no alteran apreciablemente la longitud del resorte. ¿Qué longitud tiene el resorte no estirado?

SOLUCIÓN.-

$K = 1.5\,N/m$





$W = 1\,N$

L: Longitud del Resorte no estirado. Por la condición del problema:

$$f = \frac{1}{2} f_{MAS}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}\right) \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4mg}{K} \qquad (\alpha)$$

l : Longitud del resorte estirado

Además, en el equilibrio se tiene: $Kx = mg \;\Rightarrow\; x = \dfrac{mg}{K}$ $\qquad (\beta)$

Finalmente:

$$L = l - x \qquad (\gamma)$$

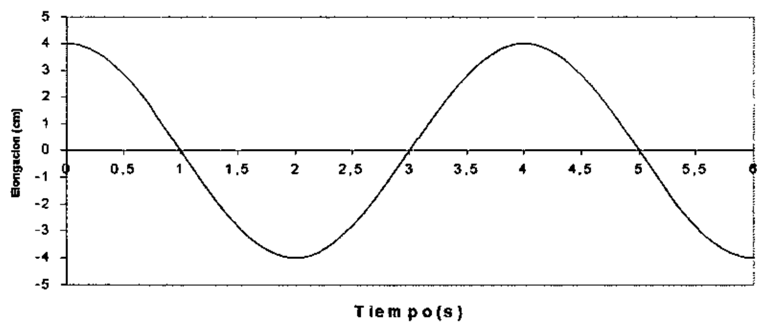
Reemplazando (α) y (β) en (γ):

$$L = \frac{4mg}{K} - \frac{mg}{K} = \frac{3mg}{K} \Rightarrow L = 2\,m$$

EJERCICIOS DE OSCILACIONES

1.- Un objeto de 5g de masa vibra a razón de 5 vibraciones por segundo. Halle la frecuencia angular, el periodo y la constante elástica asociada a la fuerza restauradora que actúa sobre el objeto.

2.- Un bloque de 10g de masa oscila armónicamente por la acción de la fuerza de un resorte ideal de constante elástica k no conocida. Partiendo del origen con rapidez inicial de 12cm/s el bloque logra una amplitud de 3cm, entonces calcular: a) la frecuencia y el periodo de las oscilaciones, b) la constante elástica k, c) la ecuación de elongación.



3.- Un bloque de 80g de masa, oscila con movimiento armónico simple, de amplitud A igual a 6cm. Este vibra a razón de 12 oscilaciones completas cada 3segundos y, si partió de la posición de equilibrio, determinar: a) La rapidez inicial del bloque, b) El periodo y la rapidez angular, c) la constante elástica asociada a la fuerza restauradora.

4.- Un bloque de masa m, unido a un resorte ideal de constante elástica k = 20N/cm, tiene movimiento armónico simple y vibra a razón de 12 oscilaciones completas cada 4s. Si parte del reposo a 10cm de la posición de equilibrio hallar: a) el valor de la masa m del bloque, b) la rapidez angular y el periodo, c) la fase inicial y la ecuación de elongación.

5.- Si un bloque tiene movimiento armónico simple de amplitud A, diga usted ¿A qué distancia de la posición de equilibrio, la energía cinética y la energía potencial son de igual magnitud?

6.- Una esfera de 20g de masa, que cuelga de un hilo de longitud L, oscila armónicamente con frecuencia de 1,5Hz. Suponiendo que partió de la posición de equilibrio con rapidez inicial de 5cm/s, determine: a) la longitud L del péndulo, b) la amplitud y la fase inicial de la oscilación, c) la rapidez angular y la ecuación de elongación.

7.- El hilo del péndulo simple de un reloj, tiene una longitud de 50cm, entonces ¿Cuál es periodo de las oscilaciones de este péndulo en la ciudad del callao donde g = 9.78m/s^2? Si el reloj se traslada a una ciudad donde la aceleración de la gravedad es g = 9.81m/s^2 el reloj ¿se adelanta o se retrasa? ¿En cuanto al cabo de 10horas?

8.- Una pequeña esfera cuelga de un hilo de 9,8cm de longitud, formando un péndulo simple. Entonces: a) ¿Cuál es su periodo?, b) ¿Cuál será su periodo en la luna donde la gravedad es 1,62m/s^2?

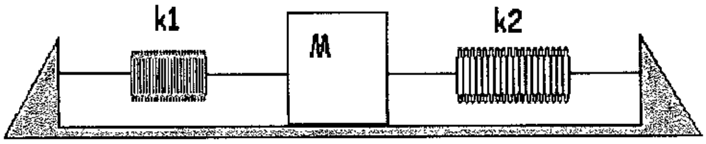
9.- La grafica ilustra la oscilación simple de un bloque de masa m, unido a resorte ideal de constante elástica k = 8N/m, determinar: a) la amplitud, el periodo y la rapidez angular, b) la masa del bloque y la energía total de la oscilación, c) la fase inicial y la ecuación de elongación.

10.- Se tiene un resorte ideal, de constante elástica k = 12N/m, en posición vertical. Justo encima del resorte se libera un bloque de 24g de masa y después empieza a comprimir el resorte. Entonces: a) Demostrar que el movimiento resultante es armónico simple ¿Cuál es su periodo?, b) ¿A qué distancia del punto en que se libera inicialmente el bloque esta la posición de equilibrio?, c) ¿Qué amplitud tiene? y ¿Cuál es la máxima energía cinética de las oscilaciones? Halle la ecuación de elongación de la oscilación.

11.- Si un bloque de 20g se cuelga de un hilo elástico, este hilo se estira 1cm. Si jalamos el bloque levemente hacia abajo y se suelta, demuestre que el movimiento resultante es armónico simple ¿Cuál es su periodo?

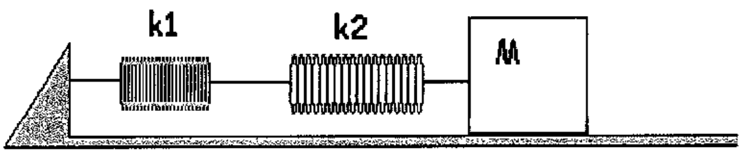
12.- Un bloque de 100g de masa, cuelga en equilibrio, de un resorte ideal de constante elástica k = 6.4N/m, si le aplicamos al bloque un golpecito vertical hacia abajo adquiere rapidez inicial de 2cm/s. Demuestre que el movimiento resultante es armónico simple ¿Cuál es la frecuencia de este movimiento armónico simple?

13.- Dos resortes de masa despreciable y de constantes elásticas k1 y k2, están unidos al bloque de masa M, tal como se ilustra en la figura. El bloque se mueve por la acción de un suave golpe horizontal, Si la superficie es lisa demuestre que el movimiento resultante es armónico simple, ¿Qué rapidez angular tiene el bloque?, Diga usted ¿Cuál es el periodo? Halle usted: la fase inicial y la ecuación de elongación.



14.- En relación al problema anterior, diga usted ¿Cuál sería el periodo de las oscilaciones si las constantes elásticas de los resortes fueran iguales? ¿Qué amplitud tendrá la nueva oscilación?

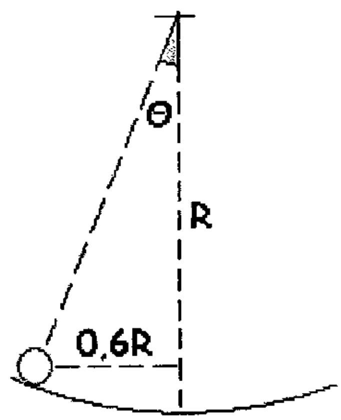
15.- Dos resortes de masas despreciables, de constantes elásticas k1 y k2 se unen a un bloque de masa M, tal como se ilustra en la figura. Si le aplicamos un suave golpe horizontal al bloque, este adquiere rapidez inicial, demuestre que el movimiento resultante adquirido es armónico simple, ¿Cuál es la rapidez angular? Determine: el periodo de las oscilaciones, la fase inicial y la ecuación de elongación.



16.- En relación al problema anterior, diga usted ¿Cuál sería el periodo de las oscilaciones si las constantes elásticas de los resortes fueran iguales? ¿Qué amplitud tendrá la nueva oscilación?

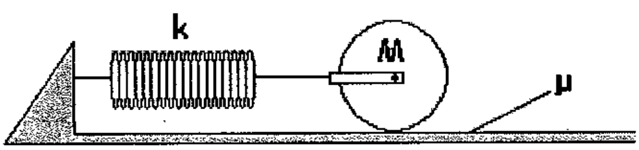
17.- Una esfera de 20g cuelga en equilibrio, de un hilo elástico de $0.5cm^2$ de sección recta y de 50cm de longitud no estirada. Si puede oscilar con movimiento armónico simple de muy pequeña amplitud, entonces: a) ¿Cuál será el periodo? $g = 9.8m/s^2$, b) ¿Qué periodo tendrá en la luna, donde la gravedad es de $1.6m/s^2$?

18.- Una esfera muy pequeña se suelta en un punto sobre parte de una rampa cilíndrica cuyo radio de curvatura es R, tal como se ilustra en la figura. Demuestre usted que el movimiento resultante es armónico simple, ¿Cuál es la rapidez angular? Indique usted la posición de equilibrio de la oscilación. ¿Con qué periodo oscila la esfera? Determine la amplitud, la fase inicial y la ecuación de elongación de la oscilación de la esfera.



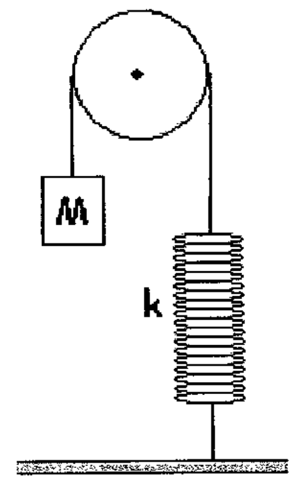
19.- En relación al problema anterior, determine usted en la posición de equilibrio la reacción normal N sobre la esfera. Halle en función del tiempo la magnitud de la aceleración centrípeta de la esfera, ¿en qué punto es máxima?

20.- Un cilindro de masa M y radio R, puede girar alrededor de su eje sin fricción unido a un resorte ideal, tal como se ilustra en la figura. El coeficiente de fricción entre el cilindro y el suelo es μ. Si le aplicamos un golpe horizontal al cilindro demuestre que, este oscilará con movimiento armónico simple. ¿Con qué rapidez angular? ¿Cuál es el periodo? Determine la amplitud y la fase inicial de la oscilación. $I = \frac{1}{2}MR^2$

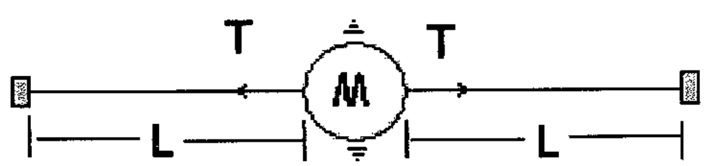


21.- En relación al problema anterior, ¿Cuáles serían sus respuestas si cambiamos el cilindro por una esfera de igual masa y de igual radio?

22.- Un bloque de masa M descansa en equilibrio sostenido por un hilo, que está unido a un resorte ideal de constante elástica k. El hilo esta sobre una polea sin fricción, de radio R y de masa m. Si le damos un golpecito vertical al bloque de-muestre que este oscilará con un movimiento armónico simple, ¿Con qué rapidez angular? ¿Cuál es el periodo de estas oscilaciones? Halle la amplitud y la fase inicial de la oscilación. $I = \frac{1}{2}MR^2$.



23.- Una esfera de masa M descansa en equilibrio unida a dos hilos de aluminio de longitud L, sometidos cada uno a la tensión T, tal como se ilustra. Si le aplicamos un golpe de costado demuestre que la esfera oscilará con movimiento armónico simple. ¿Con que rapidez angular? ¿Cuál es el periodo de la oscilación? Determine la amplitud y la fase inicial.



24.- Una balanza de resorte, de constante elástica k = 4N/cm, tiene un plato de 100g que descansa en equilibrio sobre el resorte. El carnicero suelta justo encima del plato 1.5kg de carne fresca, demuestre que el sistema oscila con movimiento armónico simple. ¿Cuál es la rapidez angular? ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones? Halle la amplitud y la fase inicial de las oscilaciones.

25.- La energía potencial de la molécula de Cloruro de Potasio KCl, esta descrita por la ecuación U = U(r), donde: $R_o = 2{,}67Å$ y la constante $A = 2{,}31x10^{-28}$J-m.

$$U(r) = A\left(\frac{R_o^7}{r^8} - \frac{1}{r}\right)$$

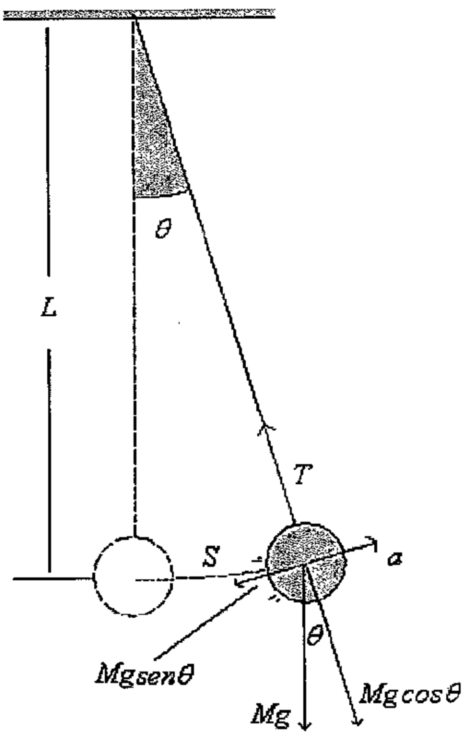
Demuestre que R_o es la separación de equilibrio de la molécula. Si la molécula de KCl se separa ligeramente de la posición de equilibrio, una pequeña distancia x por la acción de un suave golpe, demuestre que la fuerza intermolecular entre los átomos se puede escribir como si fuera una fuerza elástica F = -kx, donde k es la constante elástica de un resorte imaginario que une a los dos átomos. Determine el valor de la constante k. ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones simple? Considere el teorema del binomio para u<<1:

$$(1+u)^n = 1 + nu + \tfrac{n(n-1)}{2!}u^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA • VRI •

1.8 EL PÉNDULO FISICO

EJERCICIO.- Una esfera solida y homogénea de masa M y de radio R está en equilibrio colgada de un hilo vertical de longitud l (R < l) y de masa despreciable. Se le aplica un suave golpe horizontal a la esfera y gira un ángulo θ respecto de la vertical, demuestre que su movimiento resultante es un MAS. Halle el periodo de las oscilaciones y compárelo con el periodo del péndulo simple.



SOLUCIÓN: Como el golpe es suave se puede suponer que la esfera se aleja poco de la posición de equilibrio (línea vertical) y el ángulo barrido $\theta \ll 1rad$, vea la figura adjunta. Si se define la longitud:

$$L = l + R$$

Y aplicando la 2da. Ley de Newton para la rotación de la esfera que gira un ángulo θ respecto de la línea vertical que pasa por un punto de suspensión fijo, se obtiene:

$$I\alpha = \sum_i \tau_i = -Mgsen(\theta)L \qquad \ldots(a)$$

Como el ángulo barrido (θ) es pequeño, podemos escribir la siguiente aproximación:

$$sen(\theta) \cong \theta \qquad \ldots(b)$$

Ahora si despejamos α de la ecuación (a) y usamos la aproximación (b) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\alpha = -\frac{Mg\,L}{I} sen(\theta) \cong -\frac{MgL}{I}\theta \qquad \ldots(c)$$

Y dado que la aceleración angular "α" a lo largo del recorrido es igual a la segunda derivada del ángulo barrido (θ) con respecto al tiempo, podemos reescribir la ecuación anterior y se obtiene:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgL}{I}\theta$$

De la cual se obtiene la ecuación diferencial de las oscilaciones simples.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I}\theta = 0$$

Lo que demuestra que el sistema oscila con un MAS. La frecuencia angular se obtiene de esta ecuación y por tanto el periodo también se puede determinar:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}}$$

Vemos que el periodo depende del momento de inercia I, del valor de la aceleración de la gravedad y de la longitud $L = l + R$. Como la distancia del centro de masa del sistema al eje de giro (punto de suspensión) es $d = L = l + R$, el momento de inercia I se puede determinar por el teorema de Steiner, esto es:

$$I = I_{cm} + m(d)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + ML^2 = ML^2\left(1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right)$$

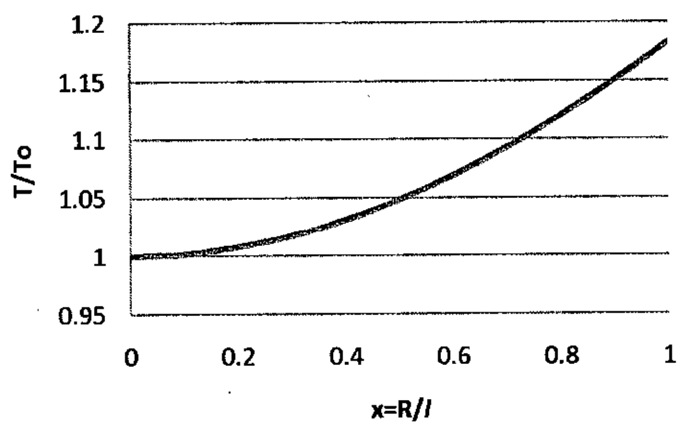
Por lo que el periodo de las oscilaciones resulta ser:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\left(1 + \frac{2R^2}{5L^2}\right)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{1 + \frac{2R^2}{5L^2}}$$

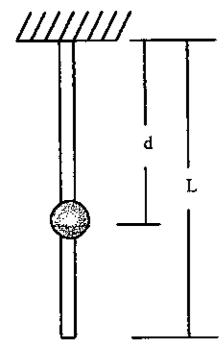
Podemos reescribir este periodo de la esfera en términos de la nueva variable $x = R/L$, esto es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{2}{5}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se observa que para $L \gg R$, $x \to 0$ y el periodo de la esfera tiende comportarse como el periodo del un péndulo simple, mientras que para $L \approx R$, $x \to 1$ en este caso la esfera se mueve con un MAS pero esta modificado por el factor $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1{,}18$ y está lejos de ser un péndulo simple. La siguiente grafica muestra el periodo relativo (T/T_o) vs la cantidad $x = R/L$ que ilustra la diferencia entre el periodo del péndulo simple y la del periodo de la esfera del problema que se hemos resuelto.



EJERCICIO: Una varilla de longitud L, oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Un cuerpo de masa igual a la de la varilla puede sujetarse a ella, a una distancia d, del eje. (a) Obtener el periodo del sistema en función de d y L. (b) ¿Hay algún valor de d, para el cual el periodo sea el mismo como si no hubiera ninguna masa?



SOLUCIÓN: (a) El periodo del sistema está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\ }} \qquad (\alpha)$$

Primero calcularemos el momento de inercia del sistema,

$$I = I_{\text{var illa}} + I_{cuerpo}$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + Md^2 = \frac{M\left(L^2 + 3d^2\right)}{3} \qquad (\beta)$$

Ahora calcularemos el centro de gravedad del sistema,

$$h = \frac{M\,g(L/2) + M\,g\,d}{2M\,g} = \frac{L + 2d}{4} \qquad (\gamma)$$

Reemplazando (β) y (γ) en (α):

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

$m = 2\,M$

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\frac{M}{3}\left(L^2 + 3d^2\right)}{2\,M\,g\left(\frac{L + 2\,d}{4}\right)}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{2\left(L^2 + 3\,d^2\right)}{3g(L + 2\,d)}}$$

(b) Si no hubiera ninguna masa el periodo será,

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Donde

$$I = \frac{1}{3}M\,L^2,\;\; m = M,\;\; h = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M\,L^2}{M\,g\,\frac{L}{2}}} = 2\pi\,\sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}}$$

Igualemos las expresiones que nos dan el periodo de la varilla con el cuerpo adherido a ella y el de la varilla sola,

$$2\,\pi\sqrt{\frac{2\left(L^2+3\,d^2\right)}{3g\left(L+2d\right)}}=2\,\pi\sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}}$$

$$\frac{L^2+3\,d^2}{L+2d}=L$$

$$L^2+3d^2=L^2+2L\,d$$

$$\therefore\ d=\frac{2}{3}\,L$$

1.9 OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Cuando un sistema bloque-resorte (oscilador armónico) se somete a la acción de la fuerza elástica del resorte y de una fuerza de fricción cuya magnitud es directamente proporcional a la rapidez del bloque $F=-bv$ (fuerza amortiguadora) el movimiento resultante del oscilador armónico esta descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+(\omega_o)^2x=0 \qquad \ldots (1,13)$$

Donde:

γ : es el parámetro de amortiguamiento, su unidad es rad/s.

ω_o : es la frecuencia angular propia del oscilador simple.

Para el sistema bloque-resorte el parámetro de amortiguamiento y la frecuencia angular propia quedan definidas como:

$$\gamma=\frac{b}{2m} \quad y \quad \omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \ldots (1,14)$$

Para el sistema bloque-resorte si $\gamma < \omega_o$ el movimiento oscilatorio es débilmente amortiguado y la solución de la ecuación (1,13) se denomina sub-amortiguada y tiene la siguiente forma:

$$x = A_o e^{-\gamma t} sen(\omega t + \varphi) \qquad \ldots (1,15)$$

En esta ecuación la amplitud de la oscilación es una función del tiempo que se representa por la ecuación:

$$A(t) = A_o e^{-\gamma t} \qquad \ldots (1,16)$$

Y la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas depende del parámetro de amortiguamiento y de la frecuencia angular propia según la ecuación:

$$\omega = \sqrt{(\omega_o)^2 - (\gamma)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \ldots (1,17)$$

Por lo tanto el periodo de las oscilaciones amortiguadas se puede deducir a partir de esta ecuación (1,17), esto es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_o)^2 - \gamma^2}} \qquad \ldots (1,18)$$

EJERCICIO: El periodo natural de un oscilar armónico es de 4,0 s. Si se hace oscilar bajo la acción de una fuerza amortiguadora su amplitud inicial disminuye en 63,2% después de dos oscilaciones completas. Determine la frecuencia de la oscilación amortiguada.

SOLUCION: Por dato $T_o = 4\,s$ y el tiempo correspondiente para dos oscilaciones completas es igual al doble del periodo de las oscilaciones amortiguadas, esto es t = 2T y para este tiempo el valor de la amplitud restante es igual al 100% menos el 63,2% lo que entonces da:

$$(1 - 0.632) \times A_o = 0.368A_o = A_o e^{-\gamma 2T}$$

Eliminando A_o y tomando el logaritmo natural se tiene:

$$\ln(0.368) = -\gamma 2T \;\rightarrow\; \gamma T = -\frac{\ln(0.368)}{2} = \frac{1}{2}$$

Como el periodo de la oscilación amortiguada es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_o)^2 - \gamma^2}} \rightarrow \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{(\omega_o)^2 - \gamma^2}} = \frac{1}{2}$$

Despejando el parámetro de amortiguamiento y evaluando en la ecuación resultante se obtiene el siguiente valor:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\omega_o}{\sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{2\pi}{T_o}}{\sqrt{16\pi^2 + 1}} = 0.125s^{-1}$$

Con este valor podemos hallar el periodo T y su inversa es la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas, esto es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}s^{-1}\right)^2 - (0.125s^{-1})^2}}{2\pi} = 0.249Hz$$

EJERCICIO: Si $b = 4\, g{-}s^{-1}$ es la constante de la fuerza amortiguadora sobre un sistema bloque-resorte de constante elástica $k = 810.4\, din/cm$ y que disminuye su amplitud inicial en 63.2% después de 5 s de iniciado el movimiento. Determine el número de oscilaciones que habrá realizado en este tiempo de 5 s.

SOLUCIÓN: Como la amplitud inicial disminuye en 63.2% el valor de la amplitud en este tiempo es:

$$0.368A_o = A_o e^{-\gamma 5s} \;\rightarrow\; \gamma = -\frac{\ln(0.368)}{5s} = 0.2\, s^{-1}$$

Como se cumple que:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \rightarrow m = \frac{b}{2\gamma} = \frac{4\,g\,s^{-1}}{2(0.2s^{-1})} = 10\,g$$

Entonces la frecuencia se puede calcular por la ecuación:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{81.04\,gs^{-1}}{10g} - (0.2s^{-1})^2}$$

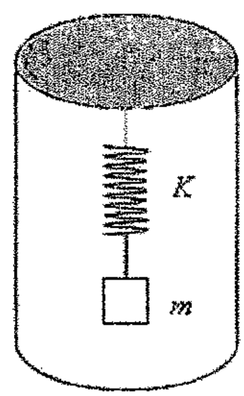
$$f = \frac{9}{2\pi}s^{-1} = 1.43\,s^{-1}$$

Por tanto el número de oscilaciones en el tiempo de 5 s, es:

$$N^{\underline{o}} = f \times 5\,s = 7.15$$

EJERCICIO: Una carga de masa M está suspendida de un muelle cuya constante es $4Kgf/cm$ y está conectado a un émbolo y cilindro que proporcionan un amortiguamiento viscoso. La fuerza de amortiguamiento es $5Kgf$ cuando la velocidad del émbolo es $50cm/s$. La carga de masa M más el émbolo es $6Kg$. (a) Cual será el período de las vibraciones amortiguadas? y (b) El período del sistema sin amortiguar.

SOLUCIÓN: Dado que:



$$K = 4Kgf/cm$$

(a) $T_{amort.}$

$$f = 5Kgf$$

(b) $T_{sin\ amort.}$

$$v = 50cm/s$$

$$m = 6Kg$$

(a) Por definición:

$$f = bv \Rightarrow b = \frac{f}{v}$$

$$\Rightarrow b = 98\,Kg/s$$

Luego:

$$\gamma = \frac{b}{2m} = 8.166\,s^{-1}$$

Pero,

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}} = 25.56\,rad/s$$

Además,

$$w' = \sqrt{w^2 - \gamma^2} = 24.22\,rad/s$$

$$\Rightarrow T_{amort.} = \frac{2\pi}{w'} = 0.26\,s$$

(b) También,

$$T_{\text{sin } amort.} = \frac{2\pi}{w} = 0.245\ s$$

EJERCICIO: Un péndulo simple oscila libremente con un periodo de $2\,s$ y después de 10 oscilaciones completas, su amplitud disminuye de 2° a 1.5°. Calcule el factor de calidad del péndulo. ¿Qué potencia media se tendría que entregar al péndulo para mantener oscilaciones de amplitud constante si la masa del péndulo es de 1kg?

SOLUCIÓN: La ecuación que describe las oscilaciones del péndulo con fricción es,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\theta}{dt} + w_0^{\,2}\theta = 0 \qquad (\alpha)$$

En el caso de poco amortiguamiento $\gamma \langle\ 2\, w_0$, la solución general de la ecuación (α), se puede escribir como,

$$\theta(t) = A_0\, e^{\frac{-\gamma\, t}{2}}\ sen\,(w\, t - \varphi) \qquad (\beta)$$

En que la amplitud A_0 y la fase φ quedan determinadas por las condiciones iníciales.

La frecuencia w está dada por

$$w = \sqrt{w_0^{\,2} - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad (\gamma)$$

El desplazamiento θ del péndulo con respecto a la vertical oscila con periodo $T = 2\,\pi/w$ y la amplitud de las oscilaciones:

$$A(t) = A_0\, e^{-\gamma\, t/2},$$

Decae exponencialmente en el tiempo.

$$\Rightarrow A(t) = A_0\, e^{-(\gamma/2\, w)\, w\, t} \qquad (\theta)$$

De los datos numéricos del problema tenemos qué $A_0 = 2°$ y para $w\, t = 10\,(2\pi) = 20\,\pi$ es decir, al cabo de diez oscilaciones completas, $A\,(t) = 1.5°$.

Entonces de (θ) tenemos

$$\frac{1.5}{2} = e^{\frac{-\gamma}{2\, w}\, 20\,\pi} = e^{\frac{-\gamma}{w}\, 10\,\pi}$$

De donde obtenemos

$$\frac{w}{\gamma} = \frac{10\,\pi}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} = 109.20$$

El factor de calidad del péndulo, Q, está definido como

$$Q = \frac{w_0}{\gamma}$$

Por lo que usando (γ) obtenemos

$$Q = \sqrt{\frac{w^2}{\gamma^2} + \frac{1}{4}} \approx 109.20$$

La potencia media que se debe entregar al péndulo de masa m para mantener oscilaciones de amplitud constante, digamos B, está dada por

$$P = m\, B^2 \, \frac{w_0^{\,3}}{Q} \qquad (\rho)$$

Como: $\quad T = 2\,\pi/w = 2\ s,\ $ y $\ w \approx w_0 = \sqrt{g/l},$

El largo del péndulo es aproximadamente, $l \approx 0.99\ m$. Entonces, la amplitud B del movimiento es

$$B = (l)2° = (l)(2\,\pi/180) \approx 0.0346\, m.$$

Usando $m = 1\ Kg,\ Q = 109.20$ y $w_0 = \pi,$ de (ρ) obtenemos

$$P = 3.40\ x10^{-4}\ Watts$$

EJERCICIO: Un diapasón que ha sido golpeado vibra a $440\ ciclos/s$. Se observa que la amplitud del sonido decrece a un 10 % de su valor original en 10 s. (a) Si el amortiguamiento se debe por completo a la emisión de sonido, calcule la frecuencia con que el diapasón vibraría en el vacío. (b) ¿Cuánto tiempo se demora la energía emitida en decrecer a un 10 % de su valor original? (c) Calcule el factor Q del diapasón.

SOLUCIÓN: La amplitud $x\,(t)$, de las oscilaciones del diapasón obedece a la ecuación,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\,x}{dt} + w_0^{\,2}\,x = 0 \qquad (\alpha)$$

La solución general de (α) en el caso de poco amortiguamiento es

$$x(t) = A_0\, e^{\frac{-\gamma}{2}t}\, sen\,(w\,t - \varphi) \qquad (\beta)$$

Donde

$$w = \sqrt{w_0^{\,2} - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad (\gamma)$$

Las constantes A_0 y φ dependen de las condiciones iníciales.

Además

$$A(t) = A_0\, e^{\frac{-\gamma}{2}t} = A_0\, e^{-(\gamma/2\,w)\,wt} \qquad (\theta)$$

De (γ), obtenemos

$$w_0 = \sqrt{w^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \qquad (\rho)$$

Para determinar γ utilizamos que $A\,(10\,s) = 0.1\,A_0$. Entonces de (θ), obtenemos

$$\gamma = \frac{1}{5}\ln(10) = 0.46$$

De (ρ), como $f = w/2\,\pi$, obtenemos

$$f_0 = \frac{w_0}{2\,\pi} = \sqrt{f^2 + \frac{\gamma^2}{16\,\pi^2}} = \sqrt{(440)^2 + \frac{(0.46)^2}{16\,\pi^2}}$$

Donde

$$f_0 \approx 440\ Hz$$

Es decir, no hay un cambio perceptible en la frecuencia.

(b) La energía emitida $E\,(t)$ es proporcional al cuadrado de la amplitud, de modo que a partir de (θ) obtenemos

$$E\,(t) = E\,(0)\, e^{-\gamma\, t}$$

Si $E(t) = 0.1\,E\,(0)$, entonces $\gamma\, t = \ln\,(10)$ pero como conocemos el valor de $\gamma = 0.46$ obtenemos

$$t = 5\ s$$

(c) El factor de calidad del diapasón está dado como,

$$Q = \frac{w_0}{\gamma} = \frac{2\,\pi(440)}{0.46} \approx 6.010$$

EJERCICIO: Un objeto de $2\,Kg$ oscila sobre un muelle de constante de fuerza $K = 400\ N/m$. La constante de amortiguamiento es $b = 2\ Kg/s$. Está forzado por una fuerza sinusoidal de valor máximo $10\,N$ y frecuencia angular $w = 10\,rad/s$. (a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? (b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia? (c) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. (d) ¿Cuál es la anchura $\Delta\, w$ de la curva de resonancia?

SOLUCIÓN:

(a) Por definición

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\ (w_0^2 - w^2)^2 + b^2 w^2}} \qquad (\alpha)$$

Calculando w_0

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{400\ N/m}{2\ Kg}} = 14.14\ rad/s$$

Hallando A

$$A = \frac{10\ N}{\sqrt{(2\ Kg)^2\ \left[(14.14\ rad/s)^2 - (10\ rad/s)^2\right]^2 + (2\ Kg/s)^2 (10\ rad/s)^2}}$$

$$\therefore\ A = 4.98\ cm$$

(b) La resonancia ocurre cuando

$$w = w_0 = 14.1\, rad/s$$

(c) La amplitud de las vibraciones en la resonancia

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\ w_0^2}}$$

$$A = \frac{10\ N}{\sqrt{(2\ Kg/s)^2(14.14\ rad/s)^2}} = 35.4\ cm$$

(d) El ancho de la curva de resonancia es

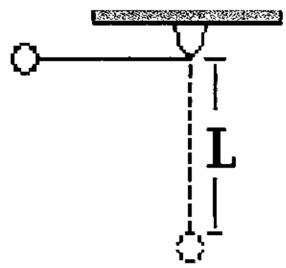
$$\Delta\, w = \frac{b}{m} = \frac{2\ Kg/s}{2\ Kg} = 1.0\ rad/s$$

EJERCICIOS DE OSCILACIONES AMORTIGUADAS

1.- Una barra cilíndrica sólida y homogénea, hecha de acero ($G = 8,4x10^{10}Pa$), de 2m de longitud y $2cm^2$ de sección recta, se somete a una torsión de 4Nm. Determine el ángulo de torsión y la energía almacenada en la deformación.

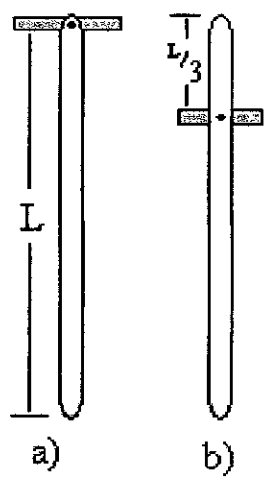
2.- Una esfera de masa M y radio R, cuelga de un hilo delgado de longitud igual al radio de la esfera. Si le aplicamos un golpecito horizontal adquiere rapidez inicial v_o, demuestre que el péndulo oscilará con movimiento armónico simple. Determine el periodo y la amplitud de estas oscilaciones.

3.- Un péndulo simple se suelta con su cuerda en posición horizontal tal como se ilustra. Demuestre que la masa del péndulo llega al punto más bajo en un tiempo t dado por la ecuación:

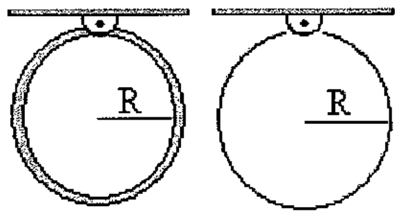


$$t = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

4.- Una varilla rígida de masa M y longitud L, se puede suspender del eje sin fricción, de las dos formas en que se ilustra en la figura. Si le damos un suave golpe horizontal adquiere una rapidez inicial v_o demuestre que el movimiento de la varilla en cada caso es armónico simple. ¿Cuál es la frecuencia y el periodo en cada caso? ¿En que situación resulta mayor el periodo? ¿A que distancia del centro de masa se debe ubicar el eje para que el periodo de las oscilaciones sea máximo?



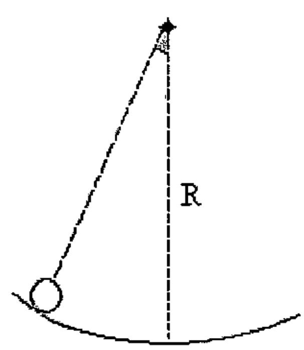
5.- Un disco y un aro de igual radio R y de masas M y m, cuelgan de una articulación con eje de rotación sin fricción, tal como se ilustra. Si le damos un suave golpe horizontal demuestre que oscilaran con movimiento armónico simple. ¿Cuál de ellos tiene mayor periodo?



6.- Una esfera de radio R y masa M, cuelga de una articulación con eje de rotación sin fricción. Si le aplicamos un pequeño golpe horizontal a la esfera, demuestre que el movimiento resultante es armónico simple. ¿Cuál es la frecuencia y el periodo de las de las oscilaciones?

7.- Un cubo solidó de lado L, cuelga en equilibrio de un eje horizontal sin fricción, con uno de sus lados unido al eje. Si le empujamos levemente en forma horizontal demuestre que el movimiento resultante es armónico simple. ¿Cuál es el periodo y la frecuencia de las oscilaciones del cubo?

8.- Una pequeña bola de acero, de radio r, puede rodar sobre una pista cilíndrica de radio R, tal como se ilustra en la figura. Si el desplazamiento angular θ es pequeño entonces demostrar que el movimiento resultante es armónico simple, cuya frecuencia f estará dada por la ecuación:



$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\left(\frac{mR^2}{I_{cm} + mR^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

9.- Un cuerpo oscila en un fluido gaseoso viscoso donde el parámetro de amortiguamiento γ es de $0.6s^{-1}$ entonces después que tiempo la amplitud de las oscilaciones se reduce en 60%.

10.- Una partícula reduce su amplitud inicial a la mitad después de oscilar con amortiguamiento durante 10s. Halle el parámetro de amortiguamiento, determine la frecuencia angular y el periodo de las oscilaciones si la rapidez angular propia del oscilador es ω_o= 9rad/s.

11.- La frecuencia angular propia de un oscilador es $\omega_o = \sqrt{2}\,\frac{rad}{s}$ y su amplitud inicial $A_o = \sqrt{10}\,cm$, se reduce a la cuarta parte después de oscilar durante 10s. Entonces determinar: a) la rapidez angular y el periodo de las oscilaciones amortiguadas, b) la magnitud de la energía al cabo de este tiempo.

12.- Una esfera de 10g de masa y 6cm de radio oscila con amortiguamiento bajo la acción de una fuerza elástica de constante k = 200din/cm y de una fuerza de fricción debido a la viscosidad del aire (η = $1,81x10^{-3}$g/cm-s). Si parte de la posición de equilibrio con rapidez inicial de 10cm/s, determinar: a) el parámetro de amortiguamiento y el periodo de la oscilación amortiguada, c) la ecuación de elongación.

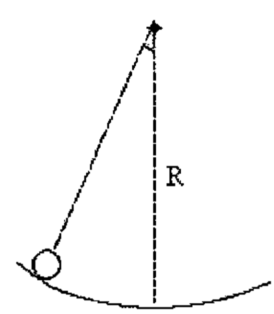
13.- Una esfera de aluminio (ρ = $2.7g/cm^3$) cuelga de un hilo de 60cm de longitud formando un péndulo que oscila con amortiguamiento en el aire (η = $181x10^{-6}$poise) reduciendo su amplitud inicial 20% después de oscilar durante 10s, entonces hallar: a) el parámetro de amortiguamiento y el radio de la esfera, b) la frecuencia y el periodo de la oscilación amortiguada.

14.- Una esfera de metal (ρ = 7,8g/cm^3) y de 1cm de radio, cuelga de un resorte de constante elástica k = 1N/m. Si después de 15 oscilaciones completas su amplitud inicial se reduce en 30%, determinar: a) el parámetro de amortiguamiento y la viscosidad del medio, b) el periodo de las oscilaciones amortiguadas.

15.- Las llantas de un auto tienen 8kg de masa y oscilan amortiguamiento después de golpear un bache. Si la amplitud inicial se reduce en 90% después de 10s, determine: a) el parámetro y la constante de amortiguamiento, b) la constante elástica del muelle si realiza dos oscilaciones completas en estos 10s, c) el periodo y la frecuencia de la oscilación amortiguada.

16.- Un bloque de 500g, reduce su energía inicial en 60% después de 15 oscilaciones completas. La rapidez angular propia es ω_o = 2rad/s, entonces calcular: a) el parámetro de amortiguamiento y el periodo de las oscilaciones, b) la constante elástica y la constante de amortiguamiento.

17.- Una esfera de 2cm de radio, puede rodar sobre la superficie circular de radio R=160cm. Si la fricción viscosa del aire (η = 181x10^{-6}poise) actúa sobre la esfera, demuestre que el movimiento resultante es armónico amortiguado. Determine el periodo y el parámetro de amortiguamiento. Considere θ_o= 16° y g = 9.78m/s^2.



18.- Un objeto de 2kg unido a un resorte se mueve impulsado por una fuerza externa $f = 3N\cos(2\pi t)$. Si la constante del resorte es de 20N/m y la constante amortiguadora es b = 0.25kg/s, determine: a) el periodo y el parámetro de amortiguamiento, b) la diferencia de fase φ y la amplitud de la oscilación.

19.- Si la constante de amortiguamiento es muy pequeño (b = 0) para un cuerpo de 0.15kg que cuelga de un resorte ligero de 6.4N/m. Una fuerza periódica con amplitud de 1.7N mueve al sistema. ¿a que frecuencia es que la fuerza externa hará que el objeto vibre con una amplitud de 0.4m? ¿Qué valor tiene la diferencia de fase de la oscilación forzada?

20.- Un cuerpo puntual de 0.4kg cuelga por medio de un hilo de 98cm de longitud. La fricción del aire sobre el cuerpo es: f = - cηv, donde la constante c = 19cm y la constante $\eta = 0.18\text{x}10^{-3}$ Poise, es la viscosidad del aire. Si el sistema oscila por la acción de una fuerza periódica $f = 0{,}5N\ cos(3\pi t)$ entonces determine: a) los parámetros γ y ω_o, b) la diferencia de fase φ y la amplitud de la oscilación forzada.

23.- Una esfera de aluminio ($2.7g/cm^3$) de radio R = 3cm cuelga de un resorte de masa despreciable y de constante elástica k = 0.2N/m. La fricción del aire está dada por la fuerza f = -6πRηv, donde la viscosidad es igual a $\eta = 0.18\text{x}10^{-3}$ Poise y la fuerza externa periódica está dada por la ecuación: f = 0.27 N cos(4πt), entonces determine: a) la magnitud de los parámetros γ y ω_o, b) la diferencia de fase y la amplitud de las oscilaciones.

CAPITULO II

ESTATICA DE FLUIDOS

2.- ESTATICA DE FLUIDOS

En esta parte del texto vamos a estudiar las leyes físicas más generales que describen a un fluido líquido que se halla en estado de reposo y que por sencillez se considerará como una sustancia ideal. Por sustancia ideal se debe entender que este fluido es incompresible (es decir que su volumen cambia de manera insignificante o muy poco cuando está sometida a fuerzas externas) y que es no viscosa (esto es que la fuerza de fricción entre las partículas o moléculas del liquido es insignificante o prácticamente nula). Las ecuaciones que describen las propiedades físicas de un líquido ideal en reposo están basadas en la primera y tercera ley de Newton.

Por otro lado para comprender las leyes físicas que rigen cuando un líquido se halla en reposo, es necesario conocer el concepto de cantidades físicas tales como: la densidad, la presión, el volumen, la temperatura, etc.

2.1 LA DENSIDAD

Es la cantidad de masa (materia) por unidad de volumen que tiene una sustancia y por convención se denota por la letra griega ρ. Su unidad (en el sistema internacional de unidades SI) es el kg/m^3 y equivale a un kilogramo de masa que está contenida en un metro cubico de volumen. Existe una sub-unidad de la densidad el g/cm^3 y técnicamente $1kg/m^3 = 1000g/cm^3 = 10^3g/cm^3$. En términos matemáticos se escribe como:

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \ldots(2,1)$$

En esta ecuación M es la masa y V el volumen de la sustancia. Si la sustancia es un sólido o un líquido uniforme y homogéneo entonces la densidad de la sustancia es constante, tales como el caso del hierro, el oro, la plata, el aluminio, el agua, el aceite. Por otro lado algunas sustancias no son uniformes y homogéneas por lo que su densidad puede variar con la posición, por lo que esta deja de ser constante y se convierte en una función $\rho = \rho(x)$. Tal es el caso del aire en la atmosfera terrestre, su densidad no es la misma al nivel del mar que en la montaña Everest a una altura de 8km sobre el nivel del mar.

EJERCICIO: Determine la masa contenida en un cubo de aluminio (ρ = 2.7g/cm^3) de 20cm de lado.

SOLUCIÓN: El volumen del cubo es:

$$V = 20cm \times 20cm \times 20cm = 8000cm^3$$

Por tanto la masa es:

$$M = \rho \times V = 2.7\frac{g}{cm^3} \times 8000cm^3$$

$$M = 21600g = 21.6kg$$

EJERCICIO: La masa de una sustancia está distribuida en una región esférica de radio a y tiene una densidad varía según la ecuación: $\rho = \rho_o\left(1 - \frac{r}{a}\right)$ donde ρ_o es una constante en g/cm^3 y r es la distancia radial medida a partir del centro de la región esférica. Determine la masa contenida por esta región esférica.

SOLUCIÓN: Como la densidad de la sustancia varía con la distancia radial r, la masa infinitesimal dm para un elemento de volumen infinitesimal dV, es igual al producto:

$$dm = \rho(r)dV \rightarrow m = \int \rho(r)dV$$

Como la región es esférica entonces el volumen infinitesimal es $dV = 4\pi r^2 dr$ por tanto la masa se obtiene por integración, tomando como limites r = 0 y r = a, de esta manera se tiene:

$$m = \int_0^a \rho_o \left(1 - \frac{r}{a}\right) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a}\right) dr$$

$$m = 4\pi\rho_o \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a}\right)_0^a = 4\pi a^3\, \rho_o \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$m = \frac{4\pi a^3 \rho_o}{12} = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3} a^3 \rho_o\right)$$

Vemos que el resultado muestra que la masa es la cuarta parte de la masa contenida por un sólido uniforme y homogéneo cuya densidad es ρ_o.

2.2 LA PRESIÓN

Es una cantidad física que se define como la razón entre la magnitud F de la fuerza aplicada y el área A sobre la cual se distribuye esta fuerza. Se denota con la letra P y se escribe como:

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow P = \frac{dF}{dA} \qquad \ldots (2,2)$$

En esta ecuación la dirección de la fuerza es perpendicular al área sobre la cual se distribuye. La unidad natural de la presión es de $1N/m^2$ unidad que recibe el nombre de un pascal en honor al científico francés Blas Pascal y se abrevia como $1Pa = 1N/m^2$.

2.3 PRESIÓN ATMOSFERICA

La presión que ejerce el aire sobre cada área de 1m^2 a nivel del mar recibe el nombre de presión atmosférica, se denota con la letra P_o y su valor es $P_o = 1.013 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 101.3kPa$. Cantidad que también se denomina una atmosfera de presión y que en forma abreviada se escribe como $P_o = 1atm. = 101{,}3kPa$.

2.4 ECUACIÓN DE LA HIDROSTATICA

Es la primera ley de la hidrostática y su enunciado es: Dentro de un líquido ideal (de densidad ρ) en reposo, la razón de cambio de la presión respecto a la altura es directamente proporcional y opuesta al producto de la aceleración de la gravedad por la densidad del líquido, esto es:

$$\frac{dP}{dy} = -g\rho \qquad \ldots (2{,}4)$$

En la ecuación:

P : es la presión, expresada en Pascal (N/m^2)

y : es la altura medida desde la base del recipiente que contiene al liquido

g : es la aceleración de la gravedad g = 9.8 m/s^2

ρ : es la densidad del liquido, expresado en kg/m^3

Para un líquido ideal (incompresible) la densidad es constante por lo que al integrar la ecuación (2,4) desde un punto y_i de gran profundidad hasta el punto y_f en la superficie del líquido donde la presión es P_o, resulta:

$$P_o = P + \rho g(y_i - y_f)$$

Dado que para el líquido en cuestión $y_i - y_f = -H$ donde "H" es la distancia que hay entre los dos puntos limites de integración. Por lo tanto la presión P a una profundidad H medida desde la superficie del líquido es:

$$P = P_o + \rho g H \qquad \ldots (2,5)$$

Aquí P es la presión absoluta dentro del líquido a la profundidad H. La presión manométrica es igual a la diferencia:

$$\Delta P = P - P_o = \rho g H \qquad \ldots (2,6)$$

EJERCICIO.- ¿Cuál es la presión a $1\ m$ y a $10\ m$ de profundidad desde la superficie del mar? Suponga que $\rho = 1.03x10^3\ Kg/m^3$ como densidad del agua de mar y que la presión atmosférica en la superficie del mar es de $1.01x10^5\ Pa$. Suponga además que a este nivel de precisión la densidad no varía con la profundidad.

SOLUCIÓN: Por definición,

$$p = p_a + \rho g y$$

$$p = 1.01x10^5\ Pa + (1.03x10^3\ Kg/m^3)(9.8\ m/s^2)y$$

Si: $y = 1\ m \Rightarrow p = 1.11x10^5\ Pa$

Si: $y = 10\ m \Rightarrow p = 2.02x10^5\ Pa$

EJERCICIO.- Las dimensiones de una piscina rectangular son $25\ m$ de largo, $12\ m$ de ancho y $2\ m$ de profundidad. Determinar: (a) La presión manométrica en el fondo de la piscina. (b) La fuerza total en el fondo debido al agua que contiene. (c) La presión absoluta en el fondo de la piscina en condiciones atmosféricas normales a nivel del mar.

SOLUCIÓN: (a) La presión manométrica en el fondo de la piscina será:

$$p - p_a = \rho g y$$

$$p - p_a = (1000\ Kg/m^3)(9.8\ m/s^2)\ (2\ m)$$

$$p - p_a = 19600\, Pa$$

(b) La fuerza total en el fondo, será:

$$F = pA$$

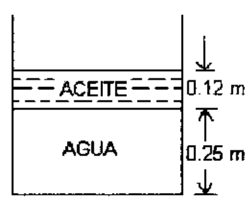
Donde p, es la presión manométrica

$$\Rightarrow F = \left(19600\ N/m^2\right)\left(12m\,x\,25m\right)$$
$$\therefore\ F = 5.88x10^6\ N$$

(c) La presión absoluta en el fondo de la piscina es la suma de las presiones manométrica y atmosférica, que a nivel del mar vale $1.01x10^5\ Pa$.

$$p = 19600\, Pa + 1.01x10^5\, Pa$$
$$\therefore\ p = 120.6\ KPa$$

EJERCICIO.- Un barril contiene una capa de aceite con densidad $600\ Kg/m^3$ de $0.12\ m$ sobre $0.25\ m$ de agua. (a) ¿Qué presión manométrica hay en la interfaz aceite – agua? (b) ¿Qué presión manométrica hay en el fondo del barril?



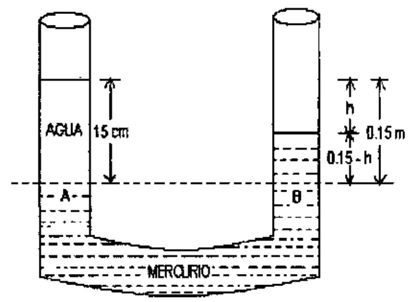
SOLUCIÓN: (a) p_m : presión manométrica en la interfaz aceite – agua

$$p_m = p_{aceite} = (600\ Kg/m^3)\ (9.8\ m/s^2)(0.12\ m)$$
$$\therefore\ p_m = 705.6\ Pa$$

(b) p_m: presión manométrica en el fondo del barril

$$p_m = p_{aceite} + p_{agua} = 705.6\ Pa + (1000\ Kg/m^3)\ (9.8\ m/s^2)\ (0.25\ m)$$
$$\therefore\ p_m = 3155.6\ Pa$$

EJERCICIO.- Un tubo en forma de U abierto por ambos extremos contiene un poco de mercurio. Se vierte con cuidado un poco de agua en el brazo izquierdo del tubo hasta que la altura de la columna de agua es de 15 cm ver figura. (a) Calcule la presión manométrica en la interfaz agua – mercurio. (b) Calcule la distancia vertical h, entre la superficie del mercurio en el brazo derecho del tubo y la superficie del agua en el brazo izquierdo.



SOLUCIÓN: (a) de la teoría se tiene decir que:

p_{m_A} : Presión manométrica en la interfaz agua – mercurio

Por definición:

$$p = p_{m_A} + p_a \rightarrow p - p_a = p_{m_A}$$

$$p_{m_A} = \rho_{agua} g\, y$$

$$\Rightarrow p - p_a = (1000\,Kg/m^3)(9.8\ m/s^2)(0.15\ m)$$

$$\therefore\ p_{m_A} = 1470\ Pa$$

(b) para este caso:

h: Es la distancia vertical.

Y de la figura, se tiene que:

$$p_{m_A} = p_{m_B} \rightarrow 1470\ Pa = \rho_{mercurio}\, g\,(0.15 - h)$$

$$1470\ Pa = 13600\ Kg/m^3\,(9.8\ m/s^2)(0.15 - h)$$

$$0.011 = 0.15 - h \quad \rightarrow \quad h = 13.9\ cm$$

2.5 PRINCIPIO DE PASCAL

Descubierto por el físico francés Blaise Pascal (1623-1662), establece lo siguiente: **La presión adicional ejercida en todo fluido (liquido o gas) encerrado herméticamente se trasmite por igual a todas las partes del fluido y sobre las paredes del recipiente que lo contiene**. Lo que quiere decir que en dos puntos diferentes del fluido encerrado en un recipiente se cumple la siguiente expresión:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \dots (2,7)$$

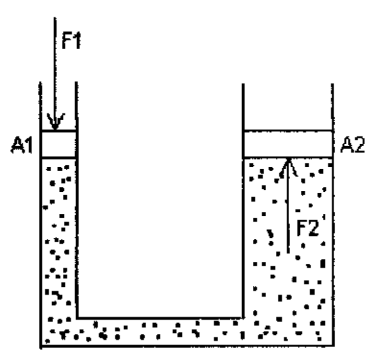
En la ecuación:

P : es la presión adicional

F_1 y F_2 : son las magnitudes de la fuerza en los puntos 1 y 2

A_1 y A_2 : son las áreas de acción de las fuerzas en los puntos 1 y 2

EJERCICIO.- Un recipiente cerrado que contiene líquido incompresible está conectado al exterior mediante dos pistones, uno pequeño de área $A_1 = 1\ cm^2$ y uno grande de área $A_2 = 100\ cm^2$ como se muestra en la figura. Ambos pistones se encuentran a la misma altura. Cuando se aplica una fuerza $F = 100\ N$ hacia abajo sobre el pistón pequeño. ¿Cuánta masa m, puede levantar el pistón grande?



SOLUCIÓN: Cuando actúa F_1 sobre el pistón pequeño la presión p del líquido en ese punto es:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{100\,N}{1\,cm^2} = \frac{10^2\,N}{10^{-4}\,m^2}$$

$$p_1 = 10^6\,Pa$$

Como el pistón grande está a la misma altura, tendrá la misma presión p, que el otro pistón, por tanto la fuerza F_2 que actúa sobre él es: $F_2 = p\,A_2$ y el peso que puede levantar es: $F_2 = m\,g$ por lo que se tiene,

$$p\,A_2 = m\,g$$

De donde:

$$m = \frac{p\,A_2}{g} = \frac{(10^6\,Pa)(10^{-2}\,m^2)}{9.8\,m/s^2}$$

$$\therefore\ m = 1020.4\ Kg$$

2.6 PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

Descubierto por el filósofo griego Arquímedes de Siracusa, también es conocido como el principio de flotación, establece lo siguiente:

Todo cuerpo sumergido total o parcialmente dentro de un fluido experimenta una fuerza vertical hacia arriba (empuje E) cuya magnitud es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo.

$$E = m_f g = \rho g V \qquad \dots (2,8)$$

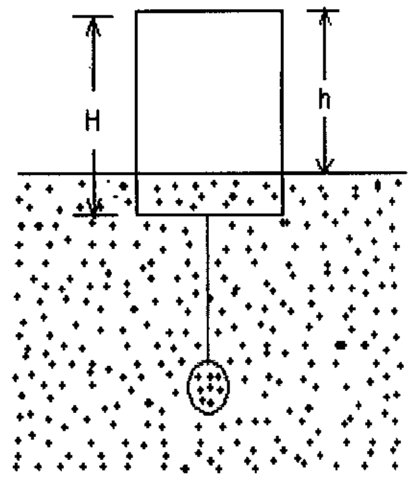
En esta ecuación:

ρ : es la densidad del liquido, se expresa en kg-m^{-3}

g : es la aceleración de la gravedad, se expresado en m-s^{-2}

V : es el volumen del fluido desalojado, se expresa en m^3

EJERCICIO.- La figura muestra una bola de hierro suspendida por un hilo de masa despreciable desde un cilindro que flota parcialmente sumergido en agua. El cilindro tiene una altura de $6\ cm$, un área de base de $12.0\ cm^2$ en la parte superior y el fondo y una densidad de $0.30\ g/cm^3$ y $2\ cm$ de su altura está sobre la superficie del agua. (a) ¿Cuál es el radio de la bola de hierro? $\rho_{Fe} = 7.90\ g/cm^3$. (b) Suponga ahora que se rompe el hilo, de modo que el cilindro está oscilando en MÁS, ¿cuál es el período de las oscilaciones?



SOLUCIÓN: Del problema, los datos que se tienen son:

$$H = 0.06\ m, \quad A = 12x10^{-4}\ m^2, \ \rho_c = 300\ Kg/m^3, \ h = 0.02\ m$$

Si R: es el radio de la bola de hierro, $\rho_{Fe} = 7900\ Kg/m^3$ es su densidad.

Para el sistema está parcialmente sumergido en agua, y que además esta se encuentra en equilibrio, por lo que las fuerzas se anulan es decir, para la bola de hierro:

$$T + E = mg \qquad (\alpha)$$

Para el cilindro:

$$E' = Mg + T \qquad (\beta)$$

De la ecuación (β):

$$T = E' - Mg$$

En la ecuación (α):

$$E^{'} - M\,g + E = m\,g$$

$$\rho\, g V_s^{'} - M\,g + \rho\, g V_s = m\,g$$

$$\rho V_s^{'} - M + \rho V_s = m$$

$$\rho A\,(H - h) - \rho_c\, A H + \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{Fe} \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$3\,\rho A (H - h) - 3\,\rho_c\, A\, H = (\rho_{Fe} - \rho)\, 4\pi R^3$$

$$R^3 = \frac{3\,\rho\, A (H - h) - 3\,\rho_c\, A H}{4\pi(\rho_{Fe} - \rho)}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$R^3 = \frac{3(1000)12x10^{-4}(0.04) - 3\,(300)\,12x10^{-4}(0.06)}{4\,\pi(7900 - 1000)}$$

Y tomando la raíz cubica se tiene:

$$R = 9.71mm$$

(b) T: Período de las oscilaciones,

$$M\,a = -E^{'} \quad \rightarrow \quad M\frac{d^2 y}{d t^2} + E^{'} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\rho\, g V_s^{'}}{M} = 0 \rightarrow \frac{d^2 y}{d\, t^2} + \frac{\rho\, g\, A\, y}{\rho_c\, A H} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\rho\, g}{\rho_c H}\, y = 0$$

Donde,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA • VRI •

$$w^2 = \frac{\rho g}{\rho_c H} \rightarrow w = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_c H}} = \frac{2\pi}{T}$$

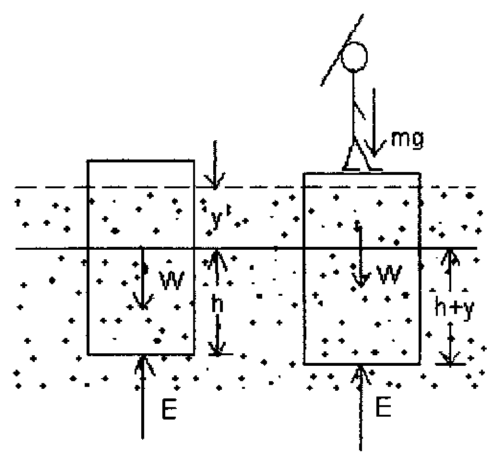
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_c H}{\rho g}}$$

Reemplazando valores se tiene,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(300)0.06}{1000(9.8)}} \rightarrow T = 0.269\ s$$

EJERCICIO.- Una boya cilíndrica de 950 Kg y 0.900 m de diámetro flota verticalmente en agua salada. (a) Calcule la distancia adicional que la boya se hundirá si un hombre de 70 Kg se para en ella. (b) Calcule el período del MAS, que se produce cuando el hombre se echa al agua, desprecie la amortiguación por fricción del fluido.

SOLUCIÓN: Aplicando el Principio de Arquímedes al sistema en equilibrio, se tiene la ecuación:



$$E = W$$

$$\rho g A h = m\ g$$
$$h = m/\rho A$$

$$h = 950/1030(\pi)(0.45)^2$$
$$\Rightarrow h = 1.45\ m$$

Además:

$$E = W + mg \rightarrow \rho g A(h+y) = W + mg$$

$$h + y = \frac{W + mg}{\rho g A} \rightarrow y = \frac{W + mg}{\rho g A} - h$$

Reemplazando los datos tenemos:

$$y = \frac{(950)(9.8) + (70)(9.8)}{(1030)(9.8)\pi(0.45)^2} - 1.45$$

$$y = 0.107\ m$$

(b) Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = Ma \rightarrow -E = M\frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho g A y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{\rho g A}{M}\right) y = 0$$

Donde:

$$w^2 = \frac{\rho g A}{M} \rightarrow w = \sqrt{\frac{\rho g A}{M}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho g A}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{950}{1030(9.8)\pi(0.45)^2}}$$

$$T = 2.42\ s$$

2.7 TENSION SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD

La fuerza de tensión superficial en la superficie libre de un líquido es directamente proporcional al perímetro del área de contacto con la superficie del líquido. En términos matemáticos:

$$T_s = \gamma L_p \qquad \ldots (2{,}9)$$

En esta ecuación:

T_s : es la fuerza de tensión superficial, expresado en dina

γ : es el parámetro de tensión superficial, expresado en dina-cm^{-1}

L_p : es la longitud del perímetro de la cara de contacto con el líquido.

EJERCICIO.- Un tubo capilar de $2\,mm$ de radio interior se introduce en un líquido. Determinar la tensión superficial del líquido, sabiendo que la cantidad de éste que se eleva por el tubo capilar pesa $9x10^{-5}$ Kgf.

SOLUCIÓN: Aquí γ: es la tensión superficial y como el líquido, se encuentra en equilibrio,

$$F\cos\alpha = W \;\rightarrow \gamma\, L \cos\alpha = W$$
$$\gamma\, 2\pi\, r \cos\alpha = W$$

Considerando que el líquido moja perfectamente, entonces, se tiene $\alpha = 0$,

$$\Rightarrow \gamma\, 2\pi r = W$$
$$\gamma = \frac{(9x10^{-5})9.8}{2\pi(2x10^{-3})}$$
$$\therefore \quad \gamma = 0.070\,\frac{N}{m}$$

EJERCICIO: De un tubo vertical cuyo radio interior $r = 1\,mm$, gotea agua. Determinar el radio de las gotas en el momento de desprenderse. Considere que las gotas son esféricas.

SOLUCIÓN: En el momento de desprenderse la gota, su peso tiene que romper la película superficial en una longitud, $L = 2\pi r$

Además, el peso de la gota es,

$$mg = F = \gamma L \quad \rightarrow \quad mg = \gamma 2\pi r$$

$$\rho V g = \gamma 2\pi r$$

$$\rho \frac{4}{3}\pi R^3 g = \gamma 2\pi r$$

$$\Rightarrow R^3 = 3\gamma r / 2\rho g$$

Reemplazando valores,

$$R = \sqrt[3]{\frac{3(0.073)10^{-3}}{2(1000)9.8}}$$

$$\therefore R = 2.25\, mm$$

EJERCICIO: En un recipiente con agua se introduce un tubo capilar abierto cuyo diámetro interior $d = 1\, mm$. La diferencia entre los niveles del agua en el recipiente y en el tubo capilar es $\Delta h = 2.8\, cm$. (a) ¿Qué radio de curvatura tendrá el menisco en el tubo capilar? (b) ¿Cuál será la diferencia entre los niveles del agua en el recipiente y en el tubo capilar si este liquido mojara perfectamente?

SOLUCIÓN: (a) Por definición,

$$\Delta h = \frac{2\gamma \cos\alpha}{\rho g r}$$

$$cos\alpha = \frac{r}{R}$$

$$\Delta h = \frac{2\gamma r}{R\rho g r} = \frac{2\gamma}{R\rho g}$$

$$R = \frac{2\gamma}{\rho g \Delta h}$$

Rfl.

Reemplazando valores,

$$R = \frac{2\,(0.073)}{1000\,(9.8)(2.8x10^{-2})}$$

$$\therefore\ R = 0.532\,mm$$

(b) Para que moje perfectamente, se tendrá: $\alpha = 0$

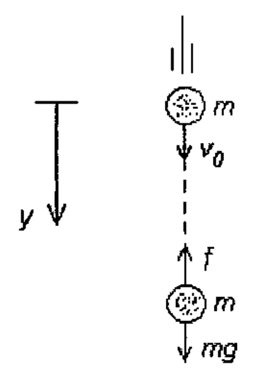
$$\Rightarrow\ \Delta h = \frac{2\,\gamma}{\rho g r}$$

$$\Delta h = \frac{2\,(0.073)}{1000(9.8)(0.5x10^{-3})}$$

$$\therefore\ \Delta h = 2.98\,cm$$

EJERCICIO: Una gota de lluvia de masa m, que parte con una velocidad inicial v_0 cae verticalmente en un fluido viscoso. (a) Determinar la velocidad de la gota de lluvia en función del tiempo t. (b) Encontrar la distancia cubierta en el tiempo t.

SOLUCIÓN: Del problema se tiene



(a) Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$mg - f = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - k\eta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$mdv = (mg - k\eta v)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{mg - k\eta v} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

Resolviendo la integral, se tiene

$$v(t) = \frac{mg}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right) e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$

(b) Teniendo en cuenta, la expresión de la velocidad en función del tiempo t,

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{mg}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right) e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t \left(\frac{mg}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right) e^{-\frac{k\eta}{m}t}\right) dt$$

Resolviendo la integral, se tiene

$$y(t) = \frac{mg}{k\eta} t + \frac{m}{k\eta}\left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right)\left(1 - e^{-\frac{k\eta}{m}t}\right)$$

EJERCICIOS DE HIDROSTÁTICA

1.- Determine el volumen que ocupa un bloque de 1kg de masa si esta hecho de: madera $\rho = 0{,}6g.cm^{-3}$aluminio, hierro cobre, plomo y oro.

2.- Una placa circular muy delgada de radio R = 5cm, y una lamina cuadrada cuyo lado es L = 10cm están hechas de acero. Halle la densidad superficial de masa de las placas.

3.- Se tiene tres hilos metálicos delgaditos de igual sección recta igual an3.14mm^2, uno de aluminio de 27cm de largo, otro de cobre de 89cm de largo y el otro de oro de 193cm de largo halle la masa de cada hilo ¿Cuál de los tres tiene mayor densidad lineal de masa?

4.- Se tienen dos esferas de hierro de igual radio R, una es solida y la otra es hueca de radio interior r = 3R/4 y llena de aire (ρ = 1,23kg/m^3) ¿Cuál es la densidad de la segunda esfera y la masa de cada esfera?

5.- Una esfera hueca de radio R = 4cm y de espesor de pared ΔR = 0,5cm hecha de aluminio, contienen aire a la presión atmosférica. Determine la densidad y la masa que contiene la esfera.

6.- Una esfera de radio R, tiene una densidad en función de la distancia radia r, de acuerdo a la ley: $\rho(r) = \rho_o(1 - \frac{r}{R})$ Si R = 5cm y ρ_o = 0,72g/cm^3 ¿Cuál es la masa contenida por esta esfera?

7.- Un buzo sumergido en un lago observa que la lectura de su manómetro es de 1amt de presión y después de bajar a más profundidad la lectura es de 3atm de presión. ¿Cuál es el cambio de profundidad que ha experimentado el buzo?

8.- Los peces nadan fácilmente a 15m de profundidad en el mar cuya densidad es $\rho = 1030\frac{kg}{m^3}$ ¿Cuál es la presión absoluta que experimenta el pez a esta profundidad?

9.- Demuestre que la fuerza que ejerce el aire comprimido a la presión absoluta P sobre el globo esférico de radio R es igual a $F = \pi R^2 P$.

10.- Si un globo se infla hasta que su radio sea de 15cm y el aire comprimido dentro del globo tenga una presión manométrica de 620Pa. Halle la fuerza que ejerce el aire comprimido sobre el globo.

11.- Una esfera hueca de 30cm de radio, se forma con dos hemisferios. Se extrae el aire dentro de la esfera hasta que la presión interna sea igual dos tercios de la presión atmosférica. Determine la fuerza neta que ejerce la atmosfera sobre la esfera.

12.- Un sumergible de exploración submarina tiene forma esférica de 1,5m de radio y se sumerge en el mar hasta una profundidad de 12m. Halle la fuerza neta que ejerce el mar sobre este sumergible.

13.- Un canal de regadío de 2m de ancho y 1,4m de alto está lleno de agua debido a su compuerta de metal cerrada. Halle la presión manométrica a la mitad de profundidad del canal y la fuerza que ejerce esta presión sobre la compuerta metálica.

14.- Un tubo de 12m de altura que llena un tanque de agua en lo alto de edificio está lleno de agua. Halle la presión manométrica en la base del tubo y la fuerza que esta ejerce sobre una cinta lateral de área igual a $30cm^2$.

15.- Un balón cilíndrico de gas tiene un diámetro de 40cm y una altura de 50cm aproximadamente. Lleno de gas esta a una presión manométrica de 35kPa ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el gas sobre la cara circular y sobre la pared lateral del balón.

16.- Un tubo en forma U de brazos iguales contiene agua hasta cierta altura. Se vierte una columna de 20cm de aceite ($\rho = 0.83g/cm^3$) en uno de los brazos. Halle la altura de la columna de agua en el otro brazo.

17.- Un tubo en forma de U de brazos iguales contiene (hasta cierta altura) mercurio de densidad $\rho = 13{,}6g/cm^3$. Se vierte un liquido por un brazo hasta que el nivel del mercurio en este brazo descienda la misma distancia que hay entre el nivel del agua y del mercurio en el otro brazo. ¿Cuál es la densidad del líquido que se vierte? Si 6cm es el desnivel del mercurio halle la altura de la columna del otro líquido.

18.- Un bloque cubico de madera húmeda (ρ = 0,8g/cm^3) de 10cm de lado flota en equilibrio en el agua. ¿Qué longitud de arista esta sumergida? Halle la presión manométrica justo debajo de la cara del cubo que se halla sumergida.

19.- Si al bloque del problema anterior se le empuja suavemente hacia abajo y se suelta adquiere movimiento armónico simple ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones de este bloque?

20.- Un tanque hermético provisto de una llave de paso contiene un gas a gran presión. Al conectar la llave de paso con un tubo en U de brazos iguales que contiene mercurio (ρ = 13,6g/cm^3) se produce un desnivel de 20cm en los brazos ¿Cuál es la presión absoluta del gas en el tanque hermético?

21.- Una esfera de aluminio y otra de hierro, ambas huecas por dentro tienen igual radio R = 30cm. Si se colocan en el agua ambas quedan sumergidas en equilibrio a ras de la superficie del agua sin hundirse hasta el fondo. ¿Cuál es el espesor de pared de las esferas?

22.- Un cilindro solido hecho de madera húmeda (ρ = 0,8g/cm^3) de 10cm de altura H flota en equilibrio en el agua. Se sumerge levemente una distancia y << H y se suelta, demuestre que el cilindro se mueve con MAS. Determine el periodo de las oscilaciones.

23.- Una esfera solida de 10cm de radio, hecha de aluminio (ρ = 2,7g/cm^3) se suelta justo en la superficie del agua, si se desprecia la fricción viscosa del agua ¿Cuál es la aceleración y la velocidad de la esfera 10s después de soltarla?

24.- Una esfera salida de radio R = 10cm hecha de madera ($\rho = 0{,}7 g/cm^3$) entra verticalmente en el agua con una velocidad de 4m/s ¿Cuál es la aceleración sobre la esfera? ¿A qué profundidad se detiene la esfera? Después de que tiempo vuelve a la superficie del agua.

25.- Una espira cuadrada de 6cm de lado, cuelga de manera el área que encierra es paralela al plano vertical y contiene una película jabonosa ($\gamma = 25 din\text{-}cm^{-1}$). La arista que se encuentra en la parte baja se puede mover sin fricción hacia abajo ¿Cuál es la máxima masa de la arista que podrá sostener la película jabonosa antes de romperse?

CAPITULO III

DINAMICA DE FLUIDOS

3.1 FLUJO DE UN FLUIDO

El movimiento de un fluido se puede describir usando el concepto de flujo del fluido. El flujo es una cantidad escalar que se denota por la letra griega Φ y se define como el producto de la densidad por la rapidez y por el área que atraviesa el fluido en su movimiento, esto es:

$$\Phi = \rho v A = \rho Q \qquad (3.1)$$

En la ecuación:

ρ : es la densidad del fluido, expresado en kg/m^3

v : es la rapidez del fluido, expresada en m/s

A : es el área que atraviesa el fluido, expresada en m^2

Q : es el caudal del fluido, se expresa en m^3/s

La unidad del flujo en el sistema internacional es kg/s, por lo que el flujo representa la corriente del fluido a lo largo de su recorrido.

3.2 LEY DE CONTINUIDAD DEL FLUJO

Esta ley es consecuencia de la ley de la conservación de la materia. Hace referencia a la constancia del flujo a lo largo del camino recorrido por el fluido, su enunciado es: **El flujo de un fluido en movimiento es el mismo en dos puntos diferentes del camino recorrido por el fluido**. En términos matemáticos, es:

$$\Phi = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_1 v_1 A_1 \qquad \ldots (3,2)$$

Esta ecuación también recibe el nombre de ecuación de continuidad del flujo. Expresa que la cantidad de masa por unidad de tiempo que ingresa por un punto deber ser igual a la cantidad de masa por unidad de tiempo que sale por otro punto del recorrido del fluido.

3.3 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Si el fluido es un líquido no viscoso e incompresible, su densidad permanece constante durante el flujo, entonces se puede eliminar la densidad en ambos miembros de la ecuación (3,2) del flujo, por lo que la ecuación de continuidad del flujo se reduce a la ecuación de continuidad del caudal del líquido. Esto es:

$$Q = v_2 A_2 = v_1 A_1 \qquad \ldots (3,3)$$

EJERCICIO: De una manguera sale un chorro de agua a razón de 20cm/s. Si el jardinero decide reducir área del orificio de salida del agua a ¼ de su valor inicial ¿con que rapidez sale ahora el chorro de agua?

SOLUCIÓN: Sea A_1 el área de salida del chorro inicial y A_2 el área de salida final del chorro, por tanto de las condiciones del problema:

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1 \;\rightarrow\; A_1 = 4A_2$$

Aplicando la ecuación de continuidad del caudal, se tiene:

$$Q = A_2 v_2 = A_1 v_1 \;\rightarrow\; v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Operando, se tiene:

$$v_2 = \frac{4A_2}{A_2} v_1 = 4v_1 = 4 \times 20 \frac{cm}{s}$$

Evaluando resulta:

$$v_2 = 80 \frac{cm}{s} = 0,8 \frac{m}{s}$$

EJERCICIO: El agua corre por la tubería del caño de a razón de 0.5 m/s. Si el diámetro del tubo es de 2cm halle el caudal y flujo en la tubería de agua.

SOLUCIÓN: Por los datos del problema es posible calcular el caudal del agua en el caño, esto es:

$$Q = vA = v\frac{\pi}{4}d^2 = 0.5\frac{m}{s} \times \frac{\pi}{4} \times (0.02m)^2$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \times 10^{-4}\frac{m^3}{s} = 50\pi\frac{cm^3}{s}$$

El flujo del agua en el caño es:

$$\Phi = \rho Q = 10^3\frac{kg}{m^3} \times \frac{\pi}{2}\, 10^{-4}\frac{m^3}{s}$$

$$\Phi = 5\pi\, 10^{-2}\frac{kg}{s}$$

EJERCICIO: Fluye agua por un tubo circular de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. (a) En un punto el radio del tubo de $0.15\ m$. ¿Qué rapidez tiene el agua en este punto si la razón de flujo de volumen en el tubo es de $1.20\ m^3/s$? (b) En otro punto, la rapidez del agua es de $3.8\ m/s$. ¿Qué radio tiene el tubo en este punto?

SOLUCIÓN: De los datos del problema es posible calcular la velocidad del agua. Por la ecuación de la continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q = \frac{dV}{dt}$$

Entonces evaluando datos en la ecuación y operando:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \rightarrow v_1 = \frac{1.20\ m^3/s}{\pi(0.15\ m)^2}$$

$$v_1 = 16.9\ m/s$$

(b) Para calcular el radio del tubo en el punto 2, es decir r_2 :

Por la ecuación de la continuidad:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \rightarrow \quad \pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$$

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 0.15\ m \sqrt{\frac{16.9\ m/s}{3.8\ m/s}}$$

$$r_2 = 0.32\ m$$

3.4 EL PRINCIPIO DE BERNOULLI

El principio de Bernoulli es una ley que se deduce a partir de la ley de conservación de la energía para un fluido en movimiento. Esta ley fue descubierta por el matemático holandés Daniel Bernoulli (1700-1782), su enunciado establece lo siguiente: **La presión neta ejercida a un fluido en movimiento es igual a la suma de los cambios de la energía cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo**. En términos matemáticos, es:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho((v_2)^2 - (v_1)^2) + \frac{1}{2}\rho(y_2 - y_1) \qquad \ldots (3{,}4)$$

A partir de esta también se puede escribir una ecuación equivalente y que tiene la siguiente forma:

$$P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2)^2 = P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1)^2 \qquad \ldots (3{,}5)$$

Es decir que energía total por unidad de volumen entregada al fluido en movimiento es la misma en todos los puntos diferentes del camino recorrido por el fluido.

EJERCICIO: Se tiene un tanque cilíndrico abierto, de 1.5m de diámetro con agua y tiene una llave de caño al costado de la base con una boca circular de 1cm de diámetro. Si se abre la llave del caño cuando la altura del agua en el tanque es de 0.6m ¿Cuál será la rapidez del chorro de agua?

SOLUCIÓN: Si d es el diámetro en la boca del caño y la rapidez del agua en esta es v_2; D es el diámetro del cilindro y la rapidez con que desciende el nivel es v_2, entonces de la ecuación de continuidad podemos escribir

$$Q = v_2 A_1 = v_1 A_1 \;\rightarrow\; v_2 \frac{\pi d^2}{4} = v_1 \frac{\pi D^2}{4}$$

$$v_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_2 = \left(\frac{1cm}{150cm}\right)^2 v_2 = 4.4 \times 10^{-5}\, v_2$$

Ahora aplicando la ecuación de Bernoulli al nivel del agua dentro del tanque y al chorro que sale del caño, se tiene:

$$P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2)^2 = P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1)^2$$

Como el tanque es abierto por encima entonces: $P_2 = P_1 = P_o$ y definiendo el nivel de referencia en la base del tanque se tiene $y_2 = 0$; $y_1 = H$, entonces la ecuación de Bernoulli es:

$$P_o + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho(v_2)^2 = P_o + \rho g H + \frac{1}{2}\rho(4.4 \times 10^{-5}\, v_2)^2$$

Dado que el último término a la derecha resulta muy pequeño, podemos despreciarlo y resolver la ecuación a la rapidez en la boca del caño, esto es:

$$\frac{1}{2}\rho(v_2)^2 = \rho g H \;\rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gH}$$

Esta predice que la rapidez del chorro de agua es igual a la rapidez que tiene un cuerpo en caída libre después de recorrer una altura H, este hecho se conoce como ley de Torricelli. Reemplazando datos y evaluando en la ecuación se tiene la rapidez del agua en la boca del caño, esto es:

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9.8 \tfrac{m}{s^2} \times 0.6\, m} = 3.43 \tfrac{m}{s}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA • VRI •

EJERCICIO: Una cubeta cilíndrica, abierta por arriba tiene 25 cm, de altura y 10 cm de diámetro. Se hace un agujero circular con área de 1.5 cm^2 en el centro del fondo de la cubeta. Se está vertiendo agua en la cubeta mediante un tubo que está arriba a razón de $2.4x10^{-4}\ m^3/s$. ¿A qué altura subirá el agua en la cubeta?

SOLUCIÓN: La máxima altura a la que sube el agua dentro de la cubeta ocurre cuando el caudal de entrada del agua a la cubeta sea igual al caudal de salida por el agujero del fondo. De esta manera podemos escribir lo siguiente:

$$Q_e = Q_s = v_1 A_1 \rightarrow v_1 = \frac{Q_e}{A_1}$$

$$v_1 = \frac{2.4x10^{-4}\ m^3/s}{1.5x10^{-4}\ m^2} = 1.6\ \tfrac{m}{s}$$

Por la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero se cumple; $p_1 = p_2,\ y_1 = 0,\ v_2 = 0$

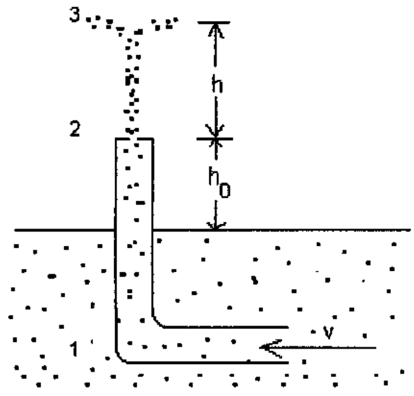
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_1 \quad \rightarrow \quad h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$$

Evaluando en la ecuación:

$$h_1 = \frac{\left(1.6\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)} = 0.131m$$

$$h_1 = 13.1cm$$

EJERCICIO: En un torrente de agua se sumergió un tubo doblado, según como se muestra en la figura. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es $v = 2.5\, m/s$. La parte superior del tubo se encuentra a $h_0 = 12\ cm$ sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero. ¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?



SOLUCIÓN: Aplicando la ecuación de Bernoulli, entre los puntos 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero, $p_1 = p_2 = p_a$ (p_a : presión atmosférica), $y_1 = 0$, $y_2 = h_0$, $v_1 = v$, v_2 :

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2 = v^2 - 2 g h_0 \qquad (\alpha)$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli, entre los puntos 2 y 3:

$$p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3 + \rho g y_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

Pero, $p_2 = p_3 = p_a$ (p_a : presión atmosférica); $y_2 = 0$; $v_3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h \qquad (\beta)$$

Luego, (α) en (β):

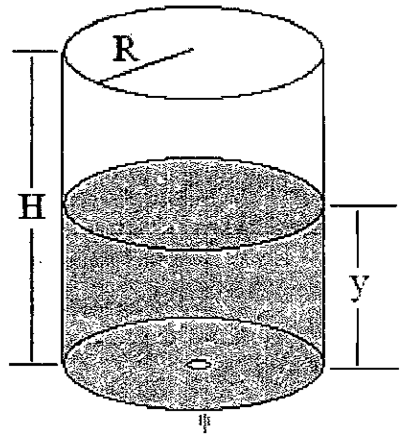
$$\frac{1}{2}\left(v^2 - 2 g h_0\right) = g h$$

$$h = \frac{v^2}{2g} - h_0$$

Reemplazando valores se tiene,

$$h = \frac{(2.5)^2}{2(9.8)} - 0.12 = 0.198\ m$$

$$h = 19.8\ cm$$



EJERCICIO: El radio de un cilindro circular recto mide $3.06\ m$ y su altura $6.12\ m$. El cilindro que se llena con agua tiene en su base un pequeño orificio circular de $25.5\ mm$ de diámetro. ¿Cuánto tardará en salir toda el agua? A) Si $v = (2\,g\,h)^{1/2}$

(b) $v = 0.6\,(2\,g\,h)^{1/2}$

SOLUCIÓN: Del problema se infiere que $D=6.12\ m$, $d = 25.5x10^{-3}\ m$, $h = 6.12\ m$, "t" tiempo de vaciado del agua.

(a) $v = (2gh)^{1/2}$

Por la ecuación de la continuidad:

$$A_1\, v_0 = A_2\, v \ \rightarrow\ v_0 = \frac{A_2}{A_1}(2\ g\,y)^{1/2}$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{A_2}{A_1}(2\ g\,y)^{1/2}$$

$$\int_0^h \frac{d\,y}{(2\ g\ y)^{1/2}} = \int_0^t \frac{A_2}{A_1}\,d\,t$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$t = \frac{2\,A_1}{A_2}\left(\frac{h}{2\,g}\right)^{1/2}$$

$$t = \frac{2\pi\, D^2/4}{\pi\, d^2/4}\left(\frac{h}{2\,g}\right)^{1/2} = \frac{2\,D^2}{d^2}\left(\frac{h}{2\,g}\right)^{1/2}$$

Reemplazando valores, se tiene:

$$t = \frac{2\,(6.12)^2}{\left(25.5\,x10^{-3}\right)^2}\left(\frac{6.12}{2(9.8)}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ t = 17.85\ h$$

(b) Análogamente, como en el caso anterior, se tiene:

$$v = 0.6\,(2\,g\,h)^{1/2}$$

Por la ecuación de la continuidad:

$$v_0\,A_1 = v\,A_2 \quad\rightarrow\quad v_0 = \frac{A_2}{A_1}0.6(2g\,h)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.6\,\frac{A_2}{A_1}\,(2g\,y)^{1/2}$$

$$\int_0^h \frac{dy}{(2g\,y)^{1/2}} = \int_0^t 0.6\,\frac{A_2}{A_1}\,dt$$

Donde

$$t = \frac{2\,A_1}{0.6\,A_2}\left(\frac{h}{2g}\right)^{1/2} \rightarrow t = \frac{2\pi D^2/4}{0.6\pi\,d^2/4}\left(\frac{h}{2g}\right)^{1/2}$$

$$t = \frac{2D^2}{0.6d^2}\left(\frac{h}{2g}\right)^{1/2}$$

Reemplazando valores, se tiene:

$$t = \frac{2(6.12)^2}{0.6\left(25.5x10^{-3}\right)^2}\left(\frac{6.12}{2(9.8)}\right)^{1/2}$$

$$t = 29.8\ h$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
CDCITRA
• VRI •

EJERCICIOS DE HIDRODINAMICA

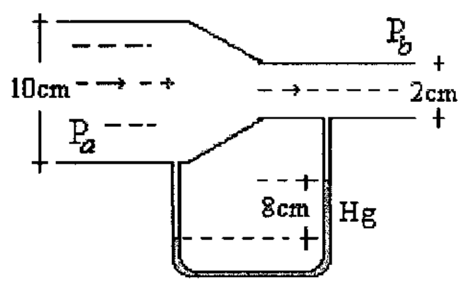
1.- Un recipiente hermético y cerrado contiene un liquido (densidad ρ) hasta una altura H y encima del agua tiene aire comprimido a una presión absoluta P mayor que la presión atmosférica. Si en la parte inferior existe un orificio abierto de sección recta "a", el cual es 100 veces más pequeño que la sección recta del recipiente, demostrar que la velocidad inicial de salida del líquido es:

$$v = \sqrt{\frac{2(P - P_o)}{\rho} + 2gH}$$

2.- Un frasco cilíndrico de 20cm de altura y 12cm de diámetro, se llena de agua desde un caño a razón de 160cm^3/s. En la base del frasco existe un orificio de 0.6cm^2 por donde sale el agua de frasco ¿Qué altura alcanzará el nivel del agua en el frasco?

3.- Un cohete de plástico, de 4N de peso total, contiene agua hasta la mitad de su volumen disponible y encima del agua tiene aire comprimido a 7atm de presión manométrica. Si en la parte inferior tiene un hueco de 0.4cm^2 de área ¿Cuál es la velocidad de escape del agua por este orificio? ¿Cuál es la fuerza de empuje hacia arriba sobre el cohete?

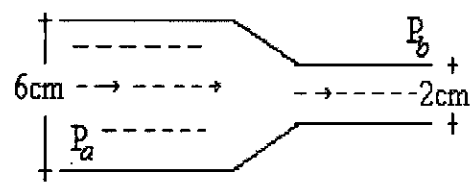
4.- Se desea medir la velocidad del aire (ρ = 1.2kg-m^3) de un huracán, para lo cual se utiliza el dispositivo que se muestra en la figura. Si el desnivel del liquido (ρ = 13.6g-cm^3) en la rama inferior es de 8cm ¿Cuál es la velocidad del aire al entrar y salir del dispositivo?



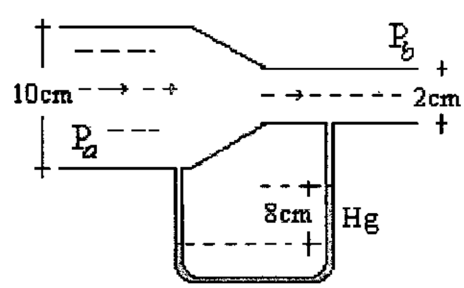
5.- Un avión liviano de 800kg de masa, tiene unas alas de 20cm de altura media entre los extremos de cada ala. ¿Qué área debe cubrir cada ala a fin de que el avión pueda volar con una velocidad mínima de 144km/h? ¿Con que velocidad debe despegar cuando esta con su carga completa de 5 pasajeros de 80kg incluyendo al piloto?

6.- Un frasco hermético esta casi lleno de perfume y, encima de este liquido el aire esta a la presión atmosférica. El frasco está provisto de un capilar largo y la longitud del extremo superior hasta el nivel del liquido dentro del frasco es de 3cm ¿Cuál debe ser la velocidad del aire justo encima de la boca del capilar para que el perfume fluya hasta allí?

7.- Dado la unión de los tubos de la figura, por la que fluye aire (η = 186 x10^{-6}poise) con una velocidad de 6m/s en la rama ancha ¿Cuál es la velocidad en la rama delgada y la diferencia de presión?



8.- Se desea medir la velocidad del agua (ρ = 1000kg/m^3) dentro de un tubo, para lo cual se utiliza el dispositivo que se muestra en la figura. Si el desnivel del mercurio liquido (ρ = 13.6g-cm^3) en la rama inferior es de 20cm ¿Cuál es la velocidad del agua al entrar y salir del dispositivo?



9.- Un cubil hermético de observación marina tiene aproximadamente una forma cúbica, de 2m de lado, el cual se sumerge a 20m de profundidad en el mar ($1.018g\text{-}cm^{-3}$) del callao para estudiar la flora marina, a) ¿Qué magnitud de presión media actúa sobre el cubil ha esta profundidad?, b)¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre las paredes verticales del cubil?

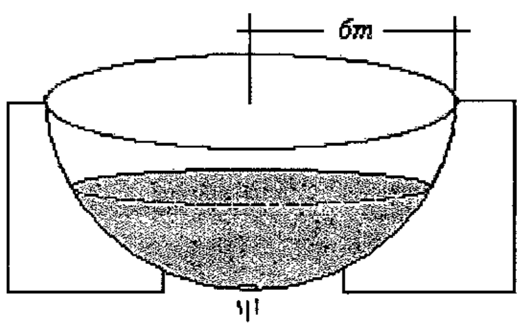
10.- Un bote de madera ($0.6g\text{-}cm^{-3}$) de 40cm de alto flota en un río. Si la base rectangular de $6m^2$ de área esta a una profundidad H de la superficie a) ¿Qué valor tiene H?, b) ¿Qué masa adicional podrá sostener sin hundirse este bote?, c) ¿Qué espesor de pared tiene el bote?

11.- Un tanque cilíndrico lleno de aceite ($\rho = 0,8g\text{-}cm^{-3}$) tiene de 2m de altura y 1m de diámetro. En la base del cilindro se perfora un agujero de 1cm de diámetro circular. Halle la rapidez inicial del chorro en este agujero. Determine la rapidez con que desciende el nivel del aceite en el tanque. Después de que tiempo se ha vaciado el tanque de aceite. Considere $g = 9.8m\text{-}s^2$ y dibuje un esquema.

12.- Un frasco cilíndrico de 3,6cm de diámetro contiene perfume ($\rho = 0,9g\text{-}cm^{-3}$) hasta cierto nivel. La tapa está provista de un capilar de 1,2mm de diámetro circular y este sobresale 6cm por encima del nivel del perfume. ¿Qué rapidez debe tener el aire cuya densidad es $\rho = 1,2\ kg\text{-}m^{-3}$ justo en el extremo superior del capilar para que el nivel del perfume llegue al extremo superior. Considere $g = 9.8m\text{-}s^2$ y dibuje un esquema.

13.- En la ciudad de lima un tanque cúbico de 1.2m de lado y hermético contiene agua hasta una altura de 100cm y encima del agua hay aire comprimido a la presión manométrica $100N\text{-}m^{-2}$ a) ¿Cuál es presión en el fondo del tanque?, b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre la pared lateral del tanque?

14.- Una placa circular muy delgada de 2mm espesor y de material plástico ($0.6g\text{-}cm^{-3}$) se coloca sobre agua ($75din\text{-}cm^{-1}$) y a la profundidad de 1mm el ángulo de contacto es cero entonces ¿Cuál debe ser el radio mínimo de la placa para sostener una masa de 10g sin mojarla?



15.- Un tanque semicircular abierto por encima está completamente lleno de agua. El tanque tiene un orificio de $1cm^2$ en la base ¿en cuánto tiempo estará vacío el tanque?

CAPITULO IV

TEMPERATURA Y CALOR

4.1 TEMPERATURA

El concepto de temperatura se asocia fácilmente a la idea cualitativa de caliente o frio, pues un cuerpo caliente tiene una gran temperatura y un cuerpo frio tiene una baja o muy poca temperatura. En ciencias físicas la temperatura es una medida indirecta de la energía interna ya que un cuerpo caliente tiene una gran energía interna y un cuerpo frio por el contrario tiene muy poca energía interna.

4.2 ESCALA CELSIUS Y ESCALA FAHRENHEIT

La unidad de la temperatura en la mayoría de los países de habla hispana es de 1°C (un grado Celsius), mientras que en los países de habla inglesa es de 1°F (un grado Fahrenheit). La relación entre las unidades de estas dos escalas de temperatura se describe por medio de la siguiente ecuación:

$$T_f = \frac{9°F}{5°C}\, T_c + 32°F \quad \text{ó} \quad T_c = \frac{5°C(T_f - 32°F)}{9°F} \tag{4.1}$$

4.3 ESCALA ABSOLUTA

En el sistema internacional de pesos y medidas reconoce la escala absoluta de temperatura, en esta escala la unidad de la temperatura es de 1K (un grado Kelvin), que numéricamente equivalente a 1°C, pero el valor 0K (cero Kelvin) en esta escala absoluta corresponde al valor de -273.15°C de la escala Celsius de temperatura. Para propósitos de cálculos prácticos se suele despreciar el valor -0.15°C para escribir la ecuación que relaciona la escala absoluta con la escala Celsius, por lo que se escribe de la forma siguiente:

$$T_k = \frac{1°F}{1°C} T_c + 273K \tag{4.2}$$

Por tanto el agua que solidifica a una temperatura de 0°C a presión constante de 1atm, en la escala absoluta, esta temperatura será de 273K. Mientras que el punto de ebullición del agua corresponde a una temperatura de 100°C a la misma presión constante de 1amt, en la escala absoluta, esta temperatura será de 373K.

EJERCICIO.- La temperatura de 40°C corresponde a una fiebre muy alta, halle el valor de esta temperatura en la escala absoluta de temperatura. ¿Cuál será el valor de esta temperatura en la ciudad de los Ángeles en California, USA?

SOLUCIÓN: La temperatura en la escala kelvin o absoluta se puede determinar por medio de la ecuación (4.2), esto es:

$$T_k = 40°C \times \frac{1°F}{1°C} + 273K = 313K$$

Para calcular el valor de esta temperatura en la ciudad de los Ángeles en California (USA) usaremos la ecuación (4.1), esto es:

$$T_F = \frac{9°F}{5°C} \times 40°C + 32°F = 9°F \times 8 + 32°F = 104°F$$

EJERCICIO: En la ciudad de Siberia, en el norte de la actual Rusia, un termómetro en la escala Fahrenheit marca el mismo valor numérico que un termómetro en la escala Celsius. ¿Cuál es el valor de la temperatura a la que se encuentra esta ciudad?

SOLUCIÓN: Del enunciado del problema se tiene que la temperatura en los dos termómetros en esta ciudad es: $T_c = x°C \;\; y \;\; T_f = x°F$ usando la ecuación (4.1), se tiene:

$$x°C = \frac{5°C}{9°F} \times (x°F - 32°F) \rightarrow \;\; 9x = 5x - 160$$

$$4x = -160 \;\rightarrow\; x = -40$$

Por tanto la ciudad Rusa de Siberia se encuentra a una temperatura muy fría por debajo del punto de congelación, de -40°C o de -40°F.

EJERCICIO: En una escala desconocida el agua hierve a 140°X y se congela a -10°X. Halle el valor que le corresponde a 50°C es esta escala desconocida.

SOLUCIÓN: Del enunciado, el número de grados entre el punto de ebullición y el punto de fusión del agua en la escala desconocida es de 150°X, mientras que en la escala Celsius es de 100°C. Entonces se cumple la siguiente relación:

$$\frac{T_x - (-10°X)}{T_c - 0°C} = \frac{150°X}{100°C}$$

$$T_x + 10°X = \frac{3°X}{2°C} \times T_c$$

$$T_x = \frac{3°X}{2°C} \times 50°C - 10°X = 75°X - 10°X$$

$$T_x = 65°X$$

EJERCICIO: En un día de verano en la ciudad de Lima un termómetro en la escala Fahrenheit marca un decimo del cuadrado de lo que marca un termómetro en la escala Celsius. Determine la temperatura de la ciudad de Lima este especial día.

SOLUCIÓN: Del enunciado, cuando $T_c = x°C \rightarrow T_F = \frac{1}{10}x^2\,°F$, por tanto la ecuación (4.1) se puede escribir en términos de estas cantidades. Esto es:

$$\frac{1}{10}x^{2}°F = \frac{9°F}{5°C}x°C + 32°F$$

$$x^2 = 18x + 320$$

$$(x-9)^2 - 81 = 320$$

$$x - 9 = \pm \sqrt[2]{401}$$

$$x_1 = 9 + 20.02 = +\,29.02$$

$$x_2 = 9 - 20.02 = -10.98$$

Elegimos como solución del problema el valor de x_1 puesto que se trata de un día de verano en la ciudad de Lima.

4.4 DILATACION TERMICA

El cambio de temperatura produce un cambio de longitud, de área y de volumen en todas las sustancias. Este cambio esta descrito por el concepto genérico de la dilatación térmica de los materiales:

$$\Delta L = L_o\,\alpha\,\Delta T \quad ; \quad \Delta A = A_o \sigma\,\Delta T \quad ; \quad \Delta V = V_o \beta\,\Delta T \qquad \ldots (4.3)$$

En esta ecuación:

α : es el coeficiente térmico de dilatación lineal, expresado en $°C^{-1}$

σ : es el coeficiente térmico de dilatación superficial, expresado en $°C^{-1}$

β : es el coeficiente térmico de dilatación de volumen, expresado en $°C^{-1}$

ΔT : es el cambio de temperatura, expresado en °C.

EJERCICIO: Una lamina de aluminio a 20°C tiene un agujero de 2.99mm de diámetro ¿a qué temperatura se debe calentar el aluminio para que un remache de acero de 3mm de diámetro se incruste en este agujero? Después la lámina y el remache alcanzan el equilibrio térmico a 20°C, halle la temperatura a la que se podrá retirar el remache. Considere: $\alpha_{Al} = 2.4 \times 10^{-5}°C^{-1}$; $\alpha_{acero} = 1.2 \times 10^{-5}°C^{-1}$

SOLUCIÓN: Si $D = 3mm$ y $d = 2.99mm$, para que el remache se incruste se debe cumplir que:

$$D_f = d(1 + \alpha\Delta T) \;\rightarrow\; D - d = d\alpha(T_f - T_i)$$

$$T_f = T_i + \frac{D - d}{d\alpha}$$

Evaluando datos, se tiene:

$$T_f = 20°C + \frac{(3 - 2.99)mm}{2.99mm \times 2.4 \times 10^{-5}} °C$$

$$T_f = 20°C + 139.4°C = 159.4°C$$

Para que el remache se afloje de la lámina de aluminio se debe cumplir que:

$$D_f = d_f \;\rightarrow D(1 + \alpha_1\Delta T) = d(1 + \alpha_2\Delta T)$$

$$D - d = (d\alpha_2 - D\alpha_1)(T_f - T_i)$$

$$T_f = T_i + \frac{D - d}{d\alpha_2 - D\alpha_1}$$

Evaluando datos, se tiene:

$$T_f = 20°C + \frac{(3 - 2.99)mm}{(2.99mm \times 2.4 - 3mm \times 1.2) \times 10^{-5}} °C$$

$$T_f = 20°C + 279.6°C = 299.6°C$$

EJERCICIOS DE TEMPERATURA Y DILATACION

1.- La temperatura normal del cuerpo humano es de 36°C, ¿Cuál es el valor en la unidad Fahrenheit? ¿Cuál es la temperatura en °F de una persona con fiebre a 40°C?

2.- ¿se sentiría preocupado usted si está enfermo en los estados unidos y el médico de turno le dice que tiene 106°F de temperatura?

3.- En un país lejano le dicen a usted que la temperatura de congelación del agua es de -12°X y la temperatura de ebullición del agua es de 172°X, ¿Cuál es la temperatura del cuerpo humano en esta unidad? ¿Qué valor de temperatura en °C corresponde al 0°X?

4.- ¿Para qué valor, la temperatura en unidad °F es igual al doble del valor en unidad Celsius? Y ¿para qué valor, la temperatura en unidad Celsius es igual al doble del valor en la unidad Fahrenheit? ¿Cuánto es este valor en kelvin?

5.- ¿A qué valor de temperatura son numéricamente iguales la temperatura en unidad Celsius y la temperatura en unidad Fahrenheit? ¿Cuánto es este valor en Kelvin?

6.- La temperatura de fusión de la naftalina es de 80°C expresar este valor en unidades Kelvin y Fahrenheit. ¿Cuál es la temperatura normal del cuerpo humano en unidad kelvin y en unidad Fahrenheit?

7.- En un lejano país la temperatura de fusión del agua es de -10°X y la temperatura de ebullición es de 140°X. ¿Qué valor le corresponde a 36°C y a 40°C de temperatura en esta unidad desconocida?

8.- Trazar una grafica de la temperatura Celsius vs Fahrenheit y, responder: ¿A que temperatura marcan el mismo valor estas dos unidades? ¿Qué temperatura en Kelvin le corresponde a este valor?

9.- ¿A qué temperatura la escala °F Fahrenheit marca el doble de lo que marca la escala Celsius °C? ¿Para qué valor de temperatura se cumple el reciproco?

10.- Una varilla metálica de 60cm de longitud se dilata 0.84mm al sufrir un cambio de temperatura de 100°C. Otra varilla de distinto material pero de igual longitud se dilata 0.6mm para el mismo cambio de temperatura. Uniendo dos trozos de cada material se construye una tercera varilla de igual longitud a las otras dos, la cual se dilata 0.74mm para un cambio de temperatura de 100°C ¿Cuál es la longitud de cada trozo empleado?

11.- A temperatura de medio ambiente el acero tiene una densidad de 7.9g-cm^{-3} ¿en cuánto cambia este valor cuando se eleva y se disminuye la temperatura en 100°C? el coeficiente de dilatación del acero es de $1.2\text{x}10^{-5}$ °C^{-1}.

12.- El puente más largo del mundo tiene la arcada individual mas larga con una longitud de 1.2km hecha de acero ¿Cuál es el cambio de longitud si la temperatura baja de 25°C a -5°C?

13.- El periodo de un péndulo simple esta dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ donde L es la longitud del hilo, hecho de aluminio ($\alpha = 2.4\text{x}10^{-5}$ °C^{-1}) y g es la aceleración de la gravedad ¿Cuál es el cambio en la magnitud del periodo si la temperatura ambiente sube de -5°C a 35°C?

14.- Una moneda de nuevo sol tiene un diámetro de 25mm a 20°C. Si la moneda esta hecha principalmente de cinc ($\alpha = 2.6\text{x}10^{-5}$ °C^{-1}) ¿Qué diámetro tendría en la costa de Piura en un día soleado de verano de 42°C y en un día muy frió en la sierra de los andes a -17°C?

15.- Una placa de cobre ($\alpha = 1.7\text{x}10^{-5}$ °C^{-1}) a 20°C tiene un agujero circular de 40mm de diámetro. Si se quiere fijar una barra cilíndrica de aluminio ($\alpha = 2.4\text{x}10^{-5}$ °C^{-1}) de

40.1mm de diámetro en el orificio ¿Cuál debe ser la temperatura final de la placa? Después de que alcancen el equilibrio térmico ¿a que temperatura se aflojará la barra?

16.- Un frasco de vidrio pirex con un volumen de 1lit a 0.0°C se llena de mercurio (($\alpha = 18x10^{-5}$ °C^{-1}) a esa misma temperatura. Si el frasco y el mercurio se calientan a 80°C, se derraman 0.0125lit de mercurio ¿Cuál es el coeficiente térmico de expansión de volumen del vidrio?

17.- Una barra cilíndrica de longitud inicial "L", diámetro inicial "d" y de modulo de Young "Y", está sujeta por los extremos y se somete a esfuerzo por un aumento lineal de temperatura ¿Cuál es la energía potencial almacenada para un cambio de temperatura?

18.- Un tubo cuadrado de aluminio ($Y = 7x10^{10}N\text{-}m^{-2}$) de 1cm de lado, de 140cm de longitud y de 4mm de espesor es la columna principal de la ventana de una casa. Si el coeficiente térmico de expansión lineal de este material es $\alpha = 2.4x10^{-5}$ °C^{-1} ¿Cuál es la magnitud del esfuerzo de tensión o de compresión que experimenta el tubo cuando la temperatura baja de 32°C a 7°C?

4.5 CONCEPTO DE CALOR

Es la energía en tránsito de un sistema a otro como resultado de una diferencia de temperatura ΔT entre dichos sistemas y es directamente proporcional a la masa del sistema. Se denota con la letra Q y se define como:

$$\Delta Q = cm\Delta T = cm(T_f - T_i) \quad \ldots (4,4)$$

En la ecuación:

ΔQ : es el calor cedido o absorbido, expresado en kilo-Calorías (1kCal)

m : es la masa que absorbe o cede calor, expresado en kg

ΔT : es el cambio de temperatura, expresado en °C

c : es el calor especifico, expresado en Kcal/(kg-°C)

4.6 EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR

El calor como cualquier otra forma de energía se debe de expresar en la unidad del sistema internacional de Patrones y Medidas, el Joule (1J). En el sistema técnico el calor se expresa en calorías, entonces se cumple:

$$1kcal = 1000cal = 4186J \rightarrow 1cal = 4.186J$$

En el sistema ingles el calor se expresa en Btu (Brithis Thermal Unit), entonces se cumple:

$$1\,Btu = 778\,ft - lb = 252\,cal \rightarrow {}_{¡}\,btu = 1055J$$

EJERCICIO. El calor específico verdadero del grafito, referido al átomo gramo, viene dado por la expresión $C_e = 2.67 + 2.62x10^{-3}T - 1.17x10^{-5}T^{-2}$ donde la temperatura T se da en Kelvin (K). Calcular la cantidad de calor que precisan $10Kg$ de grafito para elevar su temperatura de 50°C a $300\,°C$.

SOLUCIÓN: Del problema se tiene, el calor especifico molar

$$C_e = 2.67 + 2.62x10^{-3} T - 1.17x10^{-5} T^{-2}$$

$$m = 10^4\ g, \qquad M_{carbono} = 12\ g/mol,$$

$$T_0 = 50\,°C = 323\ K, \quad T_f = 300\,°C = 573\ K$$

Q : Cantidad de calor, que por definición es:

$$Q = \int n\, C_e\, dT$$

$$Q = n \int_{323K}^{573K} \left(2.67 + 2.62x10^{-3}\ T - 1.17x10^{-5}\ T^{-2}\right) dT$$

$$Q = \frac{10^4 g}{12\ g/mol} \int_{323K}^{573K} \left(2.67 + 2.62x10^{-3}\ T - 1.17x10^{-5}\ T^{-2}\right) dT$$

Resolviendo se tiene,

$$\therefore \quad Q = 800.780\ Kcal$$

EJERCICIO. A temperaturas muy bajas, la capacidad calorífica molar de la sal de roca varía con la temperatura según la Ley T^3 de Debye: $C = K T^3 / \theta^3$ donde $K = 1940\ J/mol.K$ y $\theta = 281\ K$. (a) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de $1.5\ mol$ de sal de roca de $10\ K$ a $40\ K$? (b) Calcule la capacidad calorífica molar media en este intervalo. (c) Calcule la capacidad calorífica molar verdadera a $40\ K$.

SOLUCIÓN: Del problema se tiene que

$$C = K T^3 / \theta^3, \quad K = 1940\ J/molK, \quad \theta = 281\ K$$

(a) $n = 1.5\ mol,\ T_0 = 10\ K,\ T_f = 40\ K,\ Q$:

La cantidad de calor y por definición:

$$d\,Q = n\,C\,d\,T \;\rightarrow\; Q = \int_{T_0}^{T_f} n\,\frac{K\,T^3}{\theta^3}\,d\,T$$

$$Q = \frac{nK}{\theta^3}\int_{T_0}^{T_f} T^3 dT = \frac{n\,K}{4\,\theta^3}\left(T_f^4 - T_0^4\right)$$

Reemplazando valores,

$$Q = \frac{1.5(1940)}{4\,(281)^3}\left((40)^4 - (10)^4\right)$$

$$\therefore \quad Q = 83.6\ J$$

(b) $\Delta\,T = 30\ K$, C: Capacidad calorífica molar media y por definición:

$$Q = n\,C\,\Delta\,T$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{n\,\Delta\,T} = \frac{83.6}{1.5\,(30)} = 1.86\ J/mol.K$$

$$\therefore \quad C = 1.86\ J/mol.K$$

(c) $T = 40\ K$, C :Capacidad calorífica molar y de la expresión dada:

$$C = \frac{K\,T^3}{\theta^3}$$

Entonces, reemplazamos valores y evaluamos:

$$C = 1940\frac{(40)^3}{(281)^3} = 5.60\ J/mol.\ K$$

$$C = 5.60\ J/mol.K$$

EJERCICIO. La capacidad calorífica de un calorímetro incluyendo el agitador y el termómetro es de $10 cal/mol.°C$. Su temperatura es de $20°C$ y contiene $100\,g$ de agua. Si en el mismo se introduce un cuerpo cuya masa es de $60\,g$ y esta a $120°C$ y la temperatura final es de $30°C$. Calcular el calor especifico del cuerpo.

SOLUCIÓN: Si Ce_c : Calor especifico del cuerpo y aplicando la ley de conservación de la energía se tiene:

$$Q_p = -Q_g$$

$$n_a C\,\Delta T + m_a Ce_a \Delta T = -m_c\, Ce_c\, \Delta T'$$

$$\frac{100\,g}{18\,\frac{g}{mol}}\left(10\,\tfrac{cal}{mol-°C}\right)(30-20)°C + 100\,g\left(1\,\tfrac{cal}{g-°C}\right)(30-20)°C = -60\,g.Ce_c(30-120)°C$$

$$\therefore\ Ce_c = 0.288\ cal/g.°C$$

EJERCICIO. Un trozo de plomo de $2\ moles$ a una temperatura de $700°C$ se deja caer en $200g$ de agua contenidos en un tazón de plata de $1Kg$. Suponiendo que inicialmente tanto el agua como el tazón estén a $0°C$. Calcular la temperatura final de la mezcla, si el intercambio de calor tiene lugar a volumen constante y no hay escape de calor del sistema. Suponga que $C_v = 3R$ tanto para el plomo como para la plata y que la capacidad térmica molar del agua es de $18 cal/mol.°K$.

SOLUCIÓN: Si T_f : Temperatura final, de la ley de conservación de la energía se tiene:

$$Q_p = -Q_g$$

$$n_{H_2O} C_{H_2O} \Delta T + n_{Ag} Cv_{Ag} \Delta T = -n_{Pb} Cv_{Pb}\, \Delta T'$$

$$\left(\ \left(11.1 mol \times 18\,\tfrac{cal}{mol-K}\right) + \left(9.27 mol \times 3x8.314\,\tfrac{J}{mol-K}\right)\ \right)(T_f - 0) = -\left(2mol \times 3x8.314\,\tfrac{J}{mol-K}\right)(700 - T_f)$$

$$\therefore\ T_f = 31.24\ °C$$

EJERCICIO. Un calorímetro de cobre de $0.1\,Kg$ contiene $0.16\,Kg$ de agua y $0.018\,Kg$ de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si $0.75\,Kg$ de plomo a $255°C$ se dejan caer en el calorímetro, ¿Qué temperatura final se alcanza? Suponga que no se pierde calor al entorno.

SOLUCIÓN: Si T_f : es la temperatura final y de la ley de conservación de la energía, se tiene,

$$Q_g = -Q_p$$

$$\left(m_{Cu}Ce_{Cu} + m_{H_2O}Ce_{H_2O} + m_{hielo}L_{f_{hielo}} + mCe_{H_2O} \right)\Delta T = -m_{Pb}Ce_{Pb}\Delta T'$$

$$\left(0.1kg \times 390\tfrac{J}{kg-K} + 0.16kg \times 4190\tfrac{J}{kg-K} \right)(T_f - 0) + (0.018\,Kg)3.34x10^5\tfrac{J}{kg} +$$

$$+\ 0.018kg \times 4190\tfrac{J}{kg-K}(T_f - 0) = -(0.75\,Kg)130\tfrac{J}{kg-K}(255 - T_f)$$

$$\therefore\ T_f = 21.4\ °C$$

4.7 CALOR POR CONDUCCION

El calor transferido por conducción queda establecida por la ley de Fourier, la cual establece la rapidez con que fluye el calor en la dirección del eje X^+ a lo largo de un medio conductor es directamente proporcional al producto del área A (por el que fluye o atraviesa) por el gradiente de temperatura a lo largo del camino recorrido por el calor, esto es:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k_t A \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \dots (4,5)$$

En la ecuación:

H : es el flujo térmico, expresado en Cal/s o en Watt (J/s)

A : es el área del camino recorrido por el calor, expresado en m^2

ΔT : es la diferencia de temperatura entre dos puntos del camino

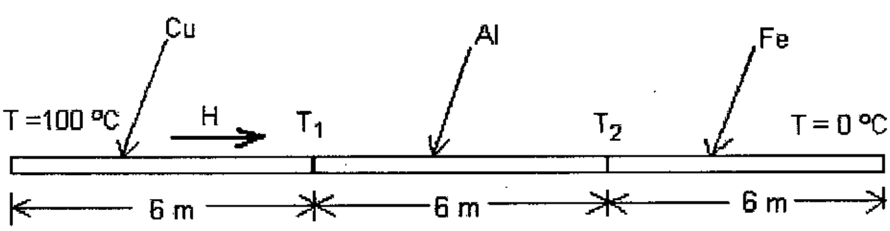
Δx : es la longitud entre los dos puntos del camino recorrido, expresado en m

k_t : es la conductividad térmica del material por el que fluye el calor.

La unidad de la conductividad térmica depende del sistema de unidades que se elija para operar, la relación entre el sistema técnico y el sistema internacional:

$$[k_t] = \frac{cal}{{}^{\circ}C\, m\, s} = 4.186 \frac{W}{K\, m} \qquad \dots (4,6)$$

EJERCICIO: Una varilla de cobre, una de aluminio y una de hierro, cada una de $6.0\ m$ de longitud y $1.0\ cm$ de diámetro se colocan extremo con extremo con la varilla de aluminio entre las otras dos. El extremo libre de la varilla de cobre se mantiene al punto de ebullición del agua y el extremo libre de la varilla de hierro se mantiene al punto de congelación del agua. ¿Cuál es la temperatura de estado estable de (a) la unión de cobre – aluminio y (b) la unión de aluminio – hierro? Considere: $K_{Cu} = 401\, W/m.K$, $K_{Al} = 235\ W/m.K$ y $K_{Fe} = 67\ W/m.K$.



SOLUCIÓN: Por definición se tiene:

$$H = -K\, A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

(a) $D = 1\ cm,\ L = 6\ m,\ T_1$:

Para la varilla de cobre,

$$H = -K_{Cu}\, A\frac{\Delta T}{\Delta x} = -K_{Cu}\frac{\pi D^2}{4}\frac{(T_1 - T)}{L}$$

$$H_{Cu} = 401\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(100\ °C - T_1)}{6\ m} \qquad (\alpha)$$

Para la varilla de aluminio,

$$H_{Al} = -K_{Al}\frac{\pi D^2}{4}\frac{(T_2 - T_1)}{6\ m}$$

$$H_{Al} = 235\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(T_1 - T_2)}{6\ m} \qquad (\beta)$$

Para la varilla de hierro,

$$H_{Al} = -K_{Fe}\frac{\pi D^2}{4}\frac{(T_0 - T_2)}{6\ m}$$

$$H_{Fe} = 67\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(T_2 - 0)}{6\ m} \qquad (\gamma)$$

Igualando las ecuaciones (α), (β) y (γ), se tiene,

$$401\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(100 - T_1)}{6\ m} = 235\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(T_1 - T_2)}{6\ m} =$$
$$= 67\frac{W}{m.K}\frac{\pi\left(1x10^{-2}\,m\right)^2}{4}\frac{(T_2 - 0)}{6\ m}$$

Despejando términos resultan las ecuaciones:

$$401(100 - T_1) = 235\,(T_1 - T_2) = 67(T_2 - 0)$$

Resolviendo a las temperaturas T_1 y T_2 se obtiene,

$T_1 = 88.51\ °C$ (Temperatura de estado estable de la unión de Cu - Al)

$T_2 = 68.83\ °C$ (Temperatura de estado estable de la unión de Al – Fe)

4.8 CALOR POR RADIACION

El calor transferido por radiación se debe a la emisión de ondas electromagnéticas en el espectro infrarrojo y esta descrito por la ley de Stefan-Boltzmann.

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\,\sigma\,A\,T^4 \qquad \dots (4,7)$$

En la ecuación:

H : es el flujo térmico de la radiación, expresado en cal/s o en W = 1J/s

A : es el área de la superficie radiante, expresado en m^2

T : es la temperatura de la superficie radiante, expresada en K (Kelvin)

e : es la emisividad de la superficie radiante, varía entre $0 < e < 1$

σ : es la constante de Stefan-Boltzmann, su valor es:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\frac{W}{m^2\,K^4}$$

EJERCICIO: Un físico usa un recipiente paralelepípedo de metal de $0.280\,m$ de altura y $0.080\,m$ de lado en la base cuadrada para guardar helio líquido a $4.22\,K$, a esa temperatura el calor de vaporización del helio es de $2.09x10^4\ J/Kg$. El cuerpo está rodeada por completo de paredes que se mantienen a la temperatura del nitrógeno líquido a $77.3\,K$, con un vacío entre cuerpo y dichas paredes. ¿Cuánto helio se pierde por hora? La emisividad del cuerpo metálico es de 0.30. La única transferencia de calor entre el cuerpo y las paredes es por radiación. Considere la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67x10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

SOLUCIÓN: Del problema se tiene

$$a = 0.080\,m,\ h = 0.280\,m,\ L_{v\,helio} = 2.09x10^4\ J/Kg,$$

$$\sigma = 5.67x10^{-8}\frac{W}{m^2.K^4},$$

$$T=4.22\ K,\ \ T_s = 77.3\ K,\ \ e = 0.30,$$
$$(m/t)_{helio}:$$

Por definición:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Ae\sigma\left(T_s^4 - T^4\right) \rightarrow \frac{\Delta m\ L_v}{\Delta t} = A\ e\sigma\left(T_s^4 - T^4\right)$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{Ae\sigma\left(T_s^4 - T^4\right)}{L_v} = \frac{\left(2a^2 + 4ah\right)e\sigma\left(T_s^4 - T^4\right)}{L_v}$$

Reemplazando valores,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\left(2(0.080)^2 + 4(0.080)0.280\right)(0.30)5.67x10^{-8}\left((77.3)^4 - (4.22)^4\right)}{2.09x10^4}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2.975x10^{-6}\ \frac{Kg}{s}\frac{3600\ s}{1\ h}$$

$$\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{helio} = 0.011\ \frac{Kg}{h}$$

EJERCICIO. Uno de los extremos de una barra de hierro se mantiene a la temperatura de $100°C$ mientras que otro se apoya en un trozo de hielo. La barra tiene $14\ cm$ de longitud y $2cm^2$ de sección transversal. Despreciar las perdidas por las paredes laterales. (a) Determinar la velocidad de propagación del calor a lo largo de la barra. (b) Calcule la cantidad de hielo que se funde en $40\ \text{min}$. Considere $K_{Fe} = 58.7W/m°C;\ \ L_f = 80cal/g.$

SOLUCIÓN: (a)

$$K_{Fe} = 58.7\ W/m°C,\quad A = 2x10^{-4}\ m^2,$$

$$T_c = 100\ °C,\ \ T_f = 0°C,\ \ L = 0.14\ m$$

dQ/dt : Velocidad de propagación del calor y por definición:

$$H = \frac{d\,Q}{d\,t} = K\,A\frac{(T_c - T_f)}{L}$$

$$\frac{dQ}{dt} = (58.7)2x10^{-4}\frac{(100-0)}{0.14}$$

$$\frac{d\,Q}{d\,t} = 8.38\ J/s\ = 2\ cal/s$$

$$\therefore\ \frac{d\,Q}{d\,t} = 2\ cal/s$$

(b) $t = 40$ min. $\langle\rangle$ 2400 s, $L_f = 80\ cal/g$, m_{hielo} : el calor necesario para fundir el hielo es $Q = m\ L_f$

$$\Rightarrow 2\ cal \ \_\_\_\_\_\ 1\ s$$
$$m\ L_f\ \_\_\_\_\_\ 2400\ s$$

$$\Rightarrow m = \frac{2\ (2400)}{1(80)} = 60\ g$$

$$\therefore\ m = 60\ g$$

EJERCICIO. Sobre una estufa se coloca un caldero de aluminio que contiene agua. Iniciada la ebullición, el agua evapora a razón de $0.12Kg/\text{min}$. Si el área de la parte inferior del caldero es $200cm^2$ y su espesor $2\,mm$, ¿Cuál es la temperatura de la superficie de la parte inferior del caldero en contacto con el fuego?

Considere $L_V = 540cal/g$, $K_{Al} = 0.49cal/s.cm.°C$.

SOLUCIÓN: Del problema tenemos que,

$$\frac{d\,m}{d\,t} = 0.12\,Kg/\text{min} = 0.002\,Kg/s,$$

$$L_v = 540\,cal/g = 2260440\,J/Kg$$

$$K_{Al}=0.49 cal/s.cm.°C=205.114 J/s.m.°C,$$

$$A=200\ cm^2=0.02\ m^2\ \ y\ \ L=2\ mm=2x10^{-3}\ m$$

T: Temperatura de la superficie de la parte inferior del caldero y por definición,

$$H=\frac{dQ}{dt}=K_{Al}A\left(\frac{T_c-T_f}{L}\right) \qquad (\alpha)$$

Como el agua hierve a $0.12\ Kg/\min$.

$$\Rightarrow H=\frac{dQ}{dt}=0.12\frac{Kg}{\min}x2260440\frac{J}{Kg}x\frac{1\ \min.}{60\ s}$$

$$H=\frac{dQ}{dt}=4520.88\ \frac{J}{s}$$

Reemplazando en (α),

$$4520.88\ \frac{J}{s}=205.114\ \frac{J}{s.m.°C}x\frac{0.02\ m^2(T-100)}{2x10^{-3}\ m}$$

$$\therefore\ T=102.2\ °C$$

EJERCICIO. Una varilla tiene inicialmente una temperatura uniforme de $0°C$. Un extremo se mantiene a $0\ °C$ y el otro se pone en contacto con un baño de vapor a $100\ °C$. La superficie de la varilla está aislada de modo que el calor sólo puede fluir longitudinalmente por la varilla que tiene un área transversal de $2.5\ cm^2$ longitud de $120\ cm$, conductividad térmica de $380\ W/m.K$, densidad de $10^4\ Kg/m^3$ y calor específico de $520\ J/Kg.K$. Considere un elemento cilíndrico de la varilla de $1\ cm$ de longitud. (a) Si el gradiente de temperatura en el extremo más frío de éste elemento es de $140\ °C/cm$. ¿Cuántos Joule de energía térmica fluyen por éste extremo cada segundo? (b) Si la temperatura media del elemento está aumentando a razón de $0.25\ °C/s$ calcule el gradiente de temperatura en el otro extremo del elemento.

SOLUCIÓN: Del problema tenemos que,

$$A=2.5\ cm^2,\ L=120\ cm,\ K=380\ W/m.K,$$

$$\rho=10^4\ Kg/m^3,\ Ce.=520\ J/Kg.K,\ l=1\ cm$$

(a) Por dato: $\dfrac{dT}{dl}=140\ °C/cm$ y Q: $t=1\,s$ Por definición:

$$H=\frac{dQ}{dt}=KA\frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow Q=\left(KA\frac{dT}{dl}\right)t=\left(380\frac{W}{m.K}x2.5x10^{-4}\ m^2x14x10^3\frac{°C}{m}\right)1\ s$$

$$\therefore\ Q=1330\ J$$

(b) Por dato: $T_m=0.25\ °C/s$ y $\dfrac{dT}{dl}$: por definición se tiene que,

$$H=\frac{dQ}{dt}=KA\frac{dT}{dx}=\frac{dQ}{dT}x\frac{dT}{dt}=T_m\frac{dQ}{dT}=T_m\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

$$\frac{dT}{d\,x}=\frac{T_m m Ce}{K\,A}=\frac{T_m\ \rho\ A l Ce}{K\,A}$$

$$\frac{dT}{dx}=\frac{T_m\rho\ lCe}{K}\ \rightarrow\ \frac{dT}{dl}=\frac{T_m\,\rho l Ce}{K}$$

Reemplazando valores, se tiene:

$$\frac{dT}{dl}=\frac{0.25\dfrac{°C}{s}x10^4\dfrac{Kg}{m^3}x10^{-2}m\,x520\dfrac{J}{Kg.K}}{380\dfrac{W}{m.K}}$$

$$\therefore\ \frac{dT}{dl}=0.34\frac{°C}{cm}$$

EJERCICIOS DE CALOR Y FLUJO DE CALOR

1.- ¿Cuánto calor se debe agregar a 50g de hielo a -10°C para calentarlo hasta 0°C? Calor especifico del hielo $C = 0.5cal\text{-}g^{-1}\text{-}°K^{-1}$.

2.- Un hervidor de 368watt de potencia se usa para calentar 10lit de agua. Si todo el calor suministrado por el hervidor se usa para calentar el agua durante 5min ¿Cuál es el incremento de temperatura?

3.- Un hervidor eléctrico de 360watt se emplea para calentar 500g de agua inicialmente a 18°C ¿Qué tiempo tomara hacer hervir el agua para un café?

4.- Un clavo aumenta su temperatura al ser clavado en la madera. Al suponer que el 60% de la energía cinética del martillo de 1.8kg de masa y que se mueve a 7.8m/s se transforma en calor que fluye al clavo y no sale de este, ¿Cuánto aumenta la temperatura de un clavo de aluminio ($910J\text{-}kg^{-1}\text{-}°K^{-1}$) de 5g golpeado 5 veces?

5.- Se mezclan 300g de agua a 22°C con 50g de hielo a -5°C en un recipiente ideal que cede calor al entorno ¿Cuál es la temperatura de equilibrio de esta mezcla? ¿Cuánta energía en forma de calor cedió el agua?

6.- Un cubo de hielo de 50g de masa y a -10°C de temperatura es colocado en un recipiente hermético y aislante térmico que con agua a 0°C. ¿Cuál es la masa de agua que se solidifica en el equilibrio térmico?

7.- En un recipiente se tiene 250g de vapor de agua a 100°C, que luego se enfría hasta obtener hielo a 0°C. ¿Cuánto calor se ha liberado en todo el proceso?

26.- En una ciudad completamente nevada el termómetro en grados Fahrenheit marca el cuadrado de lo que marca un termómetro en grados Celsius. ¿Cuál es la temperatura correspondiente a esta ciudad?

8.- Un carpintero construye una pared exterior con una capa de madera de 2cm de espesor por el exterior y una capa de espuma aislante (0.01W/(m-°K) de 3.5cm de espesor por el interior. La temperatura de la superficie interior es de 19°C y la exterior es de -10°C, a) ¿Cuál es la temperatura de la unión entre la medra y espuma? ¿Cuál es el flujo térmico por 1m^2 de esta pared? Conductividad térmica de la madera es de 0.08W/(m-°K).

9.- Suponiendo que el flujo térmico por conducción se puede escribir según la ecuación: $H = \Delta T/R$ deducir de que cantidades depende R y ¿Cuál es su unidad en el sistema internacional y en el sistema británico?

10.- El techo de un cuarto tiene 125ft^2 y 2in de espesor, el cual está hecho de madera (0.08W/(m-°K) Calcular el valor de la resistencia térmica del techo. ¿Cuánto calor en unidades Btu fluye si la temperatura del cuarto se mantiene a 69°F y la cara opuesta del techo de mantiene a 105°F?

11.- Un extremo de una varilla aislada se mantiene a 100°C y el otro a 0°C con una mezcla de agua y hielo. La varilla tiene 40cm de longitud y 0.75cm^2 de sección transversal. Si el calor conducido por la varilla funde 3g de hielo en 5min, ¿Cuál es el valor de la conductividad térmica de la varilla?

12.- Por un tubo cilíndrico de diámetro interno d, de diámetro externo D y longitud L fluye agua caliente con una temperatura T_I constante. Si el medio externo se mantiene a temperatura T_E y el flujo térmico radialmente hacia fuera del tubo es estacionario calcular la resistencia térmica del dispositivo. ¿Cuál es la ecuación para describir el flujo en esta situación?

13.- Una olla con base de acero de 1.2cm de espesor y área de 0.15m^2 descansa sobre una estufa caliente. El agua dentro de la olla esta a 100°C y se evapora 440g cada 5min. Calcule la temperatura en la superficie inferior de la olla que está en contacto con la estufa.

14.- La temperatura de operación del filamento de tungsteno (e = 0.35) dentro de un foco esa de 2450°K. Calcule el área superficial del filamento de un foco de 120W si toda la energía eléctrica consumida por la lámpara es radiada por el filamento como ondas.

15.- Si la energía de radiación solar que incide cada segundo sobre la superficie congelada de un lago es de 600W/m^2 y el 70% de ella es absorbida por el hielo ¿Cuánto tiempo tardará en fundirse una capa de hielo de 1.2cm de espesor? El hielo y el agua por debajo de la capa están a 0°C.

16.- La energía radiante que llega del sol a la atmósfera es de cerca de $1.5 kW/m^2$ y la distancia media de la tierra al sol es de $1.5x\ 10^{11} m$. Si el radio del sol es de $6.96x10^8 m$ a) ¿Cuál es la razón de radiación de energía por unidad de área desde la superficie del sol?, b) ¿Cuál es la temperatura de la superficie del sol si radia como un cuerpo negro?

36.- Un extremo de una varilla cilíndrica de cobre sólido de 20cm de largo se mantiene a 20°K el otro extremo se ennegrece y se expone a radiación térmica de las paredes circundantes que están a 400°K. Los costados de la varilla están aislados, de modo que solo se gana o pierde energía por los extremos. Al alcanzar la temperatura de equilibrio ¿Qué temperatura tiene el lado ennegrecido?

17.-- Una vasija de aluminio tiene en el fondo un diámetro de $16 cm$ y un espesor de $4 mm$. Contiene $2 lt$ de agua a $80°C$. Si la temperatura en la superficie exterior es de $110°C$. (a) ¿Qué tiempo tardara el agua en hervir? (b) ¿Qué cantidad de agua hervirá por segundo?

18.- Se formó hielo de un estanque poco profundo y se alcanzó un estado estacionario cuando el aire arriba del hielo está a $-5.2°C$ y cuando el fondo del estanque tiene una temperatura de $3.98°C$. Si la profundidad total de hielo más agua es $1.42\ m$, ¿de qué espesor es el hielo? Suponga que su conductividad térmica es de 1.67 y de $0.502\ W/m.K$, respectivamente.

19.- Un tazón de cobre de $146\ g$ contiene $223\ g$ de agua, el tazón y el agua tienen una temperatura de $21\ °C$. Se deja caer en el agua un cilindro muy caliente de cobre de $314 g$. Esto la hace hervir, $4.7\ g$ se convierten en vapor y la temperatura final del sistema entero es $100\,°C$. (a) ¿Cuánto calor se transfiere al agua? (b) ¿Cuánto al tazón? (c) Cuál era la temperatura original del cilindro?

20.- Una sustancia tiene una masa molar de $51.4\ g/mol$. Cuando $320\ J$ de calor se agregan a una muestra de $37.1\ g$ de este material, su temperatura asciende de 26.1 a $42\,°C$. (a) Calcule el calor especifico de la sustancia. (b) ¿Cuántos moles tiene? (c) Calcule su calor específico molar.

21.- Se tiene un cubo de hielo a $-10\ °C$, con una masa total de $0.045\ Kg$, y se lo coloca con $0.3\ Kg$ de agua a $30\,°C$. ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio?

22.- Una olla cuyo fondo es de cobre y que contiene $0.8\ L$ de agua hirviendo se seca en $10\ \min$. Suponiendo que todo el calor se transmite a través del fondo plano de cobre de $15\ cm$ de diámetro y $3.0\ mm$ de espesor, calcular la temperatura en la parte exterior del fondo de cobre cuando todavía queda algo de agua en la olla. $K_{Cu} = 401\ W/m.K$.

23.- La superficie de un lago tiene una capa de hielo de $0.4\ m$ de espesor. La temperatura del agua situada en contacto con la superficie inferior de esta capa es $0\,°C$, mientras que la temperatura de la cara superior, en contacto con el aire es $-10\ °C$. ¿A qué velocidad continúa formándose hielo si todo el calor latente de fusión pasa a través de la capa de hielo a la superficie en contacto con el aire? $K_{hielo} = 0.0053\ cal/s.cm.\,°C$, $\rho_{hielo} = 0.914\ g/cm^3$.

CAPITULO V

TERMODINAMICA

5.1 EL GAS IDEAL

Es el conjunto de un gran número de partículas diminutas o puntuales, de simetría esférica, del mismo tamaño y de igual volumen, todas del mismo material. Por tanto son partículas indistinguibles, todas contenidas en un recipiente de gran dimensión en comparación con el tamaño de las partículas.

5.2 ECUACIÓN DE ESTADO

El estado de las partículas en conjunto, contenidas en un recipiente se describe muy bien por medio de la ecuación de estado del gas ideal:

$$PV = nRT = NkT \qquad \text{.......... (5,1)}$$

En la ecuación:

P : es la presión en 1Pa = $1N\text{-}m^{-2}$ ó en 1atm = 101,3kPa = $14{,}7lb\text{-}in^{-2}$

V : es el volumen en $1m^3 = 10^6cm^3 = 10^3Lit = 35{,}3ft^{-3} = 61{,}024\ 10^3in^3$

T : es la temperatura en 1K (Kelvin)

n : es el numero de moles en mol

R : es la constante universal de los gases, su valor es:

$R = 8{,}314\ J\text{-}(mol\text{-}K)^{-1} = 1{,}986\ cal\text{-}(mol\text{-}K)^{-1} = 82{,}07\ 10^{-3}$ Lit-atm

N : es el número de partículas que conforman el gas

k : es la constante de Stefan-Boltzmann, su valor es:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.381 \times 10^{-23}\frac{J}{K}$$

Siempre que el gas este contenido en un recipiente hermético y pase del estado 1 al estado 2, la ecuación (1) se puede reescribir como:

$$\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_1\,V_1}{T_1} = nR \qquad \text{............ (5,2)}$$

EJERCICIO: Un volumen de $1\ l$ de oxígeno gaseoso a $40\ °C$ y a la presión de $76\ cm\ Hg$ se dilata hasta que su volumen es de $1.5\ l$ y su presión es de $80\ cm\ Hg$. Encontrar el número de moles de oxígeno en el sistema y su temperatura final.

SOLUCIÓN: del problema se tiene

$$p_1 = 76\ cm\ Hg,\ V_1 = 1\ l,\ T_1 = 40\ °C = 313\ K,$$

$$p_2 = 80\ cm\ Hg,\ V_2 = 1.5\ l,\quad n:$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales, se tiene:

$$p\,V = nRT \;\Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{(1\ atm)\ 1\ l}{0.082\ \dfrac{atm.l}{mol.K} \times 313\ K}$$

$$n = 0.039\ moles\ de\ O_2$$

Como no cambia la cantidad de moles entonces la ecuación que dá lugar para determinar T_2 es:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1$$

$$T_2 = \frac{(80\ cm\ \ Hg)\ 1.5\ l}{(76\ cm\ Hg)\ 1\ l}\ 313\ K$$

$$T_2 = 494\ K$$

EJERCICIO: Un cilindro de $1\ m$ de altura con diámetro interior de $0.12\ m$ contiene gas propano $(M = 44.1\ g/mol)$ que se usará en una varillada. Inicialmente el tanque se llena hasta que la presión manométrica es de $1.3x10^6\ Pa$ y la temperatura es $22\ °C$. La temperatura del gas se mantiene constante mientras el tanque se vacía parcialmente hasta que la presión manométrica es de $2.5x10^5\ Pa$. Calcule la masa de propano que se gastó.

SOLUCIÓN: Del problema se tiene

$$M = 44.1x10^{-3}\ Kg/mol,\ h = 1\ m,\ d = 0.12\ m,$$

$$p_1 = 1.3x10^6\ Pa,\ T_1 = 22\ °C = 295\ K,$$

$$p_2 = 2.5x10^5\ Pa,\ m_{propano}:$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales:

$$p\,V = n\,RT \ \rightarrow\ p\,V = \frac{m}{M}R\,T$$

$$m = \frac{pVM}{RT}$$

Ahora la masa de propano que se gastó será:

$$m_{propano} = \frac{MV}{RT}p_1 - \frac{MV}{RT}p_2 = \frac{MV}{RT}(p_1 - p_2)$$

$$= \frac{M}{RT}\frac{\pi d^2 h}{4}(p_1 - p_2)$$

Reemplazando valores,

$$m_{propano} = \frac{44.1x10^{-3}\ \frac{kg}{mol}}{8.314\ \frac{J}{mol-K}(295\ K)} \times \frac{\pi(0.12\ m)^2\, 1\ m}{4}\left(1.3x10^6 Pa - 2.5x10^5 Pa\right)$$

$$m_{propano} = 0.213\ Kg$$

5.3 ENERGÍA CINÉTICA MOLECULAR

Po otro lado, del modelo cinético molecular del gas ideal, la energía cinética molecular (K_{cm}) del gas ideal a una temperatura T es:

$$K_{cm} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}nN_AkT \qquad \text{.........} (5,3)$$

En la ecuación:

$N_A = 6{,}022\ 10^{23}$moleculas/mol, es el numero de Avogadro.

$k = 1{,}3806\ 10^{-23}$ J-(molécula-K)$^{-1}$, es la constante de Stefan-Boltzmann

Como el número de moléculas o de partículas es $N = nN_A$, entonces la energía cinética molecular K_{cp} de cada partícula de masa m, es igual a:

$$K_{cp} = \frac{K_{cm}}{N} = \frac{3}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \qquad \text{.........} (5,4)$$

5.4 ENERGÍA INTERNA DEL GAS IDEAL

Dado que las partículas del gas ideal solo tienen energía cinética, entonces la energía interna (U) del gas ideal es igual a la energía cinética molecular de todas las partículas del gas ideal, esto es:

$$U = \frac{3}{2}\,nRT = \frac{3}{2}\,PV \qquad \text{.........} (5,5)$$

EJERCICIO: Determine el volumen que ocupa 1mol de gas ideal a la temperatura de 20ºC y a la presión P = 101,3kPa.

SOLUCIÓN: Para usar la ecuación de estado del gas ideal debemos expresar la temperatura en kelvin y dado que 1Pa = 1J/m^3, se tiene:

$$T_K = 273 + T_C = 273 + 20 = 293K \quad y \quad P = 101{,}3 \times 10^3 \frac{J}{m^3}$$

Por tanto el volumen de 1mol de gas ideal en estas condiciones es:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{1mol \times 8{,}314 \frac{J}{mol\,K} \times 293K}{101{,}3 \times 10^3 \frac{J}{m^3}} = 24{,}05 \times 10^{-3} m^3$$

EJERCICIO: Determine la energía cinética molecular de 1mol de gas ideal a la temperatura de 20°C. ¿Cuál es la energía cinética molecular de una partícula en este mol de gas ideal?

SOLUCIÓN: La energía cinética molecular para 1mol se puede calcular a partir de la ecuación:

$$K_{cm} = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \times 1mol \times 8{,}314 \frac{J}{mol\ K} \times 293K = 3654J$$

La energía cinética de una sola partícula, se puede hallar dividiendo la energía cinética molecular K_{cm} entre el número $N = nN_A$ de partículas en 1mol de gas ideal. Esto es:

$$K_{cp} = \frac{K_{cm}}{nN_A} = \frac{3654J}{6{,}022 \times 10^{23}\, particulas}$$

$$K_{cp} = 606{,}78 \times 10^{-23} J/particula$$

También se puede hallar el mismo resultado, usando la ecuación (4), esto es:

$$K_{cp} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1{,}3806 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \times 293K = 606{,}78 \times 10^{-23} J/particula$$

EJERCICIO: En un día de verano, si la temperatura del aire cambia de 17°C (en la mañana) a 27°C (al medio día) ¿Cuál es el cambio de energía interna que experimenta 1mol de aire, suponiendo que se puede considerar como gas ideal?

SOLUCIÓN: del problema el cambio de temperatura resulta de:

$$T_f - T_i = 300K - 290K = 10K$$

Por tanto la variación de energía interna del gas es:

$$U_f - U_i = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \times 1mol \times 8{,}314\frac{J}{mol\,K} \times 10K = 124.71J$$

EJERCICIO: Supongamos que el aire de masa molecular M = 28.8x10^{-3}kg/mol, es un gas ideal, cuya temperatura de 20°C es aproximadamente constante desde la costa hasta la sierra en el Perú. Determine la presión atmosférica en el cruce de ticlio (punto más alto de la carretera central) que se encuentra a 4880m sobre el nivel de mar.

SOLUCIÓN: La presión del aire (atmosfera) disminuye con la altura, por tanto, si consideramos la ecuación diferencial de la hidrostática para el aire cuya densidad es ρ se puede escribir:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Considerando que para el aire vale la ecuación de estado del gas ideal, se tiene:

$$PV = nRT \;\rightarrow\; p\frac{m}{\rho} = nRT \;\rightarrow\; \rho = \frac{PM}{RT}$$

Se tiene la densidad ρ como función de la presión, reemplazamos en la ecuación anterior y se tiene:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{PMg}{RT} \;\rightarrow\; \int_{P_o}^{P} dP = -\frac{Mg}{RT}\int_{0}^{H} dy$$

En la que $P_o = 101{,}3kPa$ es la presión atmosférica a nivel del mar. Resolviendo la integral se obtiene la presión P como función de la altura H, esto es:

$$\ln\left(\frac{P}{P_o}\right) = -\frac{MgH}{RT} \rightarrow P = P_o e^{-\frac{MgH}{RT}}$$

Por tanto la presión atmosférica en ticlio es:

$$P = 101{,}3kPa \times e^{-\frac{28{,}8\times 9{,}8\times 4{,}88}{8{,}314\times 293}} = 57{,}55kPa$$

EJERCICIO: Un matraz contiene $1g$ de oxigeno a la presión absoluta de $10atm$ y a la temperatura de $47\,°C$. Al cabo de cierto tiempo se encuentra que, a causa de un escape, la presión ha descendido a $5/8$ de su valor inicial y la temperatura ha bajado a $27°C$. (a) ¿Cuál es el volumen del matraz? (b) ¿Qué peso de oxigeno se ha escapado entre las dos observaciones?

SOLUCIÓN: (a) Si V : volumen del matraz y dado que:

$$m_{O_2} = 1\,g,\ p_1 = 10\,atm,\ T_1 = 47\,°C,$$

$$p_2 = \frac{5}{8}(10\,atm) = 6.25\,atm,\ \ T_2 = 27\,°C$$

De la ecuación de estado del gas ideal despejamos el volumen:

$$V = \frac{n\,RT}{p} = \frac{1g}{32g/mol} \times \frac{0.082\,\frac{atm\text{-}l}{mol\,K} \times 320K}{10\,atm}$$

$$V = 0.082\,l$$

(b) m_{O_2}' : peso de oxígeno que se ha escapado, Calculando el número de moles de O_2, a $V = cte.$ se tiene:

$$n_{O_2} = \frac{p\,V}{R\,T} = \frac{(6.25\,atm)(0.082\,l)}{\left(0.082\,\frac{amt\text{-}l}{mol\text{-}K}\right)(300\,K)} = 0.0208\,mol\ de\ O_2$$

$$m_{O_2} = n_{O_2} M = 0.0208\ mol\left(32\ \frac{g}{mol}\right) = 0.666\ g$$

$$m_{O_2} = 0.334\ g$$

EJERCICIO: El vapor de benceno $(C_6 H_6)$ tiene una masa molecular de $1.29x10^{-25}\ Kg$. Calcúlese la energía cinética media de traslación de una molécula de vapor de benceno a $100\ °C$ y la velocidad cuadrática media de las moléculas a la misma temperatura.

SOLUCIÓN: La energía cinética media de traslación de una molécula está dado por:

$$K_t = \frac{1}{2} m \left(v^2\right)_m = \frac{3}{2} K_B T$$

$$K_t = \frac{3}{2} K_B T = \frac{3}{2} \left(1.381x10^{-23}\ \tfrac{J}{molecula\ K}\right) 373\ K$$
$$K_t = 7.72x10^{-21}\ \tfrac{J}{molecula}$$

Despejando la rapidez y evaluando:

$$v_m = \sqrt{\frac{3\ K_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3\left(1.381x10^{-23}\ \tfrac{J}{molecula\ K}\right) 373\ K}{1.29x10^{-25}\ Kg}}$$

$$v_m = 346.11\ m/s$$

5.5 TRABAJO DEL GAS IDEAL

Cuando el volumen del recipiente que contiene a un gas ideal se expande y cambia desde un valor inicial V_i hasta otro valor final V_f entonces el gas ideal dentro del recipiente ha efectuado un trabajo que se define por:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = \int_{V_i}^{V_f} P\ dV \qquad \dots (5,6)$$

En la ecuación:

P : es la presión del gas, expresado en Pa = N/m^2 = J/m^3

dV : es el cambio diferencial de volumen, expresado en m^3

W : es el trabajo, expresado en J (Joule)

5.6 TRABAJO ISOBARICO

EJERCICIO: Determine el trabajo efectuado por un gas ideal contenido en un recipiente hermético cuando pasa de un estado inicial a otro estado final en una expansión isobárica.

SOLUCIÓN: En una expansión isobárica el gas ideal se expande a presión constante por lo que trabajo efectuado por el gas es:

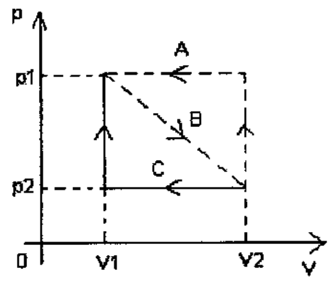
$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P\left(V_f - V_i\right)$$

$$W = P\left(V_f - V_i\right) \qquad \ldots(5,7)$$

Note: El trabajo isobárico es positivo si hay un aumento de volumen ($V_f > V_i$) y el trabajo isobárico es negativo si hay una disminución de volumen ($V_f < V_i$)

EJERCICIO: Una muestra de gas se expande de $V_1 = 1.0\,m^3$ y $p_1 = 40\,Pa$ a $V_2 = 4.0\,m^3$ y $p_2 = 10\,Pa$ a lo largo de la trayectoria B en el diagrama pV de la figura que se muestra. Luego se comprime de nuevo a V_1 a lo largo ya sea de la trayectoria A o la C. Calcule el trabajo neto realizado por el gas para el ciclo completo a lo largo de (a) la trayectoria BA y (b) la trayectoria BC.

SOLUCIÓN:



$V_1 = 1\, m^3,\ p_1 = 40\ Pa,\ V_2 = 4\ m^3,\ p_2 = 10\ Pa$

(a) W_{neto} : Trayectoria BA

$$\begin{aligned} W_{neto} &= W_{1\to 2} + W_{2\to 3} + W_{3\to 1} \\ &= \frac{1}{2}(40+10)3+40(1-4) \\ \therefore\ W_{neto} &= -45\ J \qquad (W_{2\to 3}=0) \end{aligned}$$

(b) W_{neto} : Trayectoria BC

$$\begin{aligned} W_{neto} &= W_{1\to 2} + W_{2\to 4} + W_{4\to 1} \\ &= \frac{1}{2}(40+10)3+10(1-4) \\ \therefore\ W_{neto} &= 45\ J \qquad (W_{4\to 1}=0) \end{aligned}$$

5.7 TRABAJO ISOTERMICO

EJERCICIO: Determine el trabajo efectuado por un gas ideal contenido en un recipiente hermético cuando pasa de un estado inicial a un estado final en una expansión isotérmica.

SOLUCIÓN: En una expansión isotérmica el gas ideal se expande a temperatura constante por lo que trabajo efectuado por el gas es:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\, dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

$$W = nRT\ lnV)_{V_i}^{V_f} = nRT\left(lnV_f - lnV_i\right)$$

$$W = nRT\ ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \qquad \dots (5,8)$$

Note: El trabajo isotérmico es positivo si hay un aumento de volumen ($V_f > V_i$) y el trabajo isotérmico es negativo si hay una disminución de volumen ($V_f < V_i$)

EJERCICIO: 0.5 mol de un gas monoatómico ideal a -23°C se expande isotérmicamente hasta triplicar su volumen. Halle el trabajo efectuado por el gas.

SOLUCIÓN: Del problema T = -23°C = 250K, por tanto el trabajo es:

$$W = 0.5\, mol \times 8.314 \frac{J}{mol\, K} \times 250\; K\; ln\left(\frac{3V_i}{V_i}\right)$$

$$W = 1141.7\, J$$

5.8 TRABAJO ADIABATICO

EJERCICIO: Determine el trabajo efectuado por un gas diatomico ideal contenido en un recipiente hermético cuando pasa de un estado inicial a un estado final en una expansión adiabática.

SOLUCIÓN: En una expansión adiabática el gas ideal se expande de modo que la presión y el volumen están relacionados por la ecuación:

$$PV^{\gamma} = k\,; \quad con{:}\; \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1.4$$

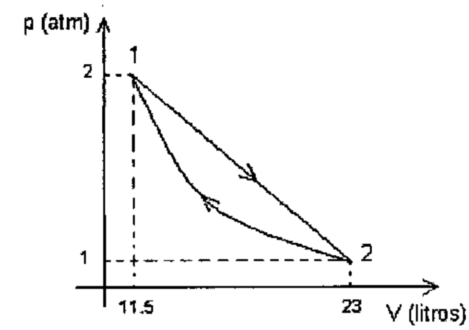
De este modo el trabajo efectuado por el gas es:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{k\, dV}{V^{\gamma}} = k \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV = k \left.\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right)_{V_i}^{V_f}$$

$$W = -\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{k\, V_f}{(V_f)^{\gamma}} - \frac{k\, V_i}{(V_i)^{\gamma}}\right) = -\frac{1}{\gamma-1}\left(P_f V_f - P_i V_i\right)$$

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_i V_i - P_f V_f\right) \qquad \ldots (5,8)$$

EJERCICIO: Un mol de un gas ideal diatomico se deja expandir a lo largo de la recta que va de 1 a 2 en el diagrama pV de la figura que se muestra. A continuación se comprime isotérmicamente desde 2 hasta 1. Calcular el trabajo total realizado sobre el gas durante este ciclo.



SOLUCIÓN: El trabajo total realizado sobre el gas durante este ciclo, será:

$$W_{total} = W_{1\to 2} + W_{2\to 1} \qquad (\alpha)$$

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2}(1+2)(23-11.5) = 17.25\ atml \qquad (\beta)$$

Calculando la temperatura T:

$$pV = nRT \ \Rightarrow \ T = \frac{pV}{nR}$$

$$T = \frac{(1\ atm)23l}{(1\ mol)0.082\ atm.l/mol.K}$$

$$T = 280.5\ K$$

$$W_{2\to 1} = Q = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) \qquad \text{(Proceso isotérmico)}$$

$$W_{2\to 1} = (1\ mol)\left(0.082\ \tfrac{atml}{molK}\right)280.5K\ln\left(\frac{11.5\ l}{23\ l}\right)$$

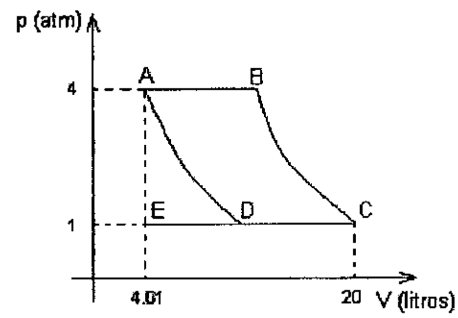
$$W_{2\to 1} = -\ 15.94\ atm.l \qquad (\gamma)$$

Reemplazando (β) y (γ) en (α):

$$W_{total} = 17.25\ atm.l - 15.94\ atm.l = 1.31\ atm.l \frac{101.325\ J}{1\ atm.l}$$

$$\therefore\ W_{total} = 132.74\ J$$

EJERCICIO: El diagrama pV de la figura que se muestra representa procesos realizados por 3 *moles* de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria AEC. Determinar: (a) Las temperaturas inicial y final. (b) El trabajo realizado por el gas. (c) El calor absorbido por el gas.



SOLUCIÓN: (a) Aplicando la ecuación de los gases ideales:

$$pV = nRT \Rightarrow T_A = \frac{pV}{nR}$$

$$T_A = \frac{(4\ atm)4.01\ l}{(3\ moles)0.082\ atm.l/mol.K}$$

$$\therefore\ T_A = 65.2\ K \quad \text{(Temperatura inicial)}$$

Además,

$$pV = nRT \Rightarrow T_C = \frac{pV}{nR}$$

$$T_C = \frac{(1\ atm)\,20\ l}{(3\ moles)0.082\ atm.l/mol.K}$$

$$\therefore\ T_C = 81.3\ K \quad \text{(Temperatura final)}$$

(b) El trabajo realizado por el gas, será:

$$W_{AEC} = W_{AE} + W_{EC}$$
$$W_{AEC} = 0 + p\Delta V = 1\,atm(20\,l - 4.01\,l)$$
$$W_{AEC} = 15.99\,atm.l\frac{101.325\,J}{1\,atm.l}$$

$$\therefore W_{AEC} = 1.62\,KJ \qquad (\alpha)$$

(c) Aplicando la primera ley de la termodinámica:

$$Q_{AEC} = \Delta U + W_{AEC} \qquad (\beta)$$

Calculando ΔU:

$$\Delta U_{AEC} = \frac{3}{2}\,nR(T_C - T_A)$$
$$\Delta U_{AEC} = \frac{3}{2}\,(3\,moles)0.082\frac{atm.l}{mol.K}(81.3 - 65.2)K$$
$$\Delta U_{AEC} = 5.941\,atm.l\frac{101.325\,J}{1\,atm.l} = 601.97\,J$$

$$\Rightarrow \Delta U_{AEC} = 601.97\,J \qquad (\gamma)$$

Reemplazando (α) y (γ) en (β):

$$Q_{AEC} = 601.97\,J + 1.62x10^3\,J$$

$$\therefore Q_{AEC} = 2.22\,KJ$$ (Calor absorbido por el gas)

5.9 PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Es consecuencia de la ley de la conservación de la energía en un proceso de expansión de un gas. Establece lo siguiente: **En todo proceso termodinámico de expansión o contracción el calor ΔQ absorbido o cedido siempre es igual al trabajo ΔW mas el cambio de la energía interna ΔU que experimenta la sustancia de trabajo**. Esto es:

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta U \qquad \ldots (5,9)$$

En la ecuación:

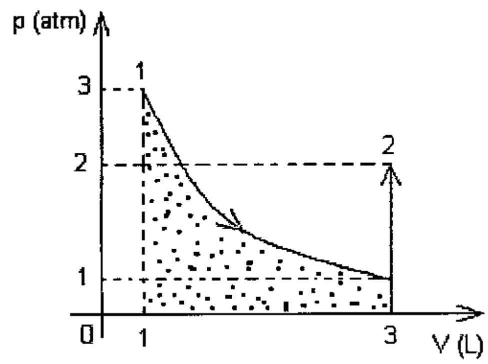
ΔQ : es el calor absorbido o cedido, expresado en Joule (1J)

ΔW : es el trabajo efectuado, expresado en Joule (1J)

ΔU : es la energía interna, expresada en Joule (1J)

EJERCICIO.- El gas se expansiona isotérmicamente hasta que su volumen es de 3 L y su presión 1 atm. Se calienta entonces a volumen constante hasta que su presión es de 2 atm. (a) Representar este proceso en un diagrama pV y calcular el trabajo realizado por el gas. (b) Determinar el calor absorbido durante este proceso.

SOLUCIÓN: (a) Del diagrama pV se observa que el trabajo realizado por el gas es igual al área bajo la curva:



$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$nRT_1 \int_{1L}^{3L} \frac{dV}{V} = p_1V_1 \int_{1L}^{3L} \frac{dV}{V} = p_1V_1[\ln V]_{1L}^{3L}$$

$$= p_1V \ln 3$$

$$W = \left(3\, atm\, \frac{101.3\, KPa}{1\, atm}\right)\left(1\, L\, \frac{10^{-3}\, m^3}{1\, L}\right) \ln 3$$

$$\therefore\ W = 334\ J$$

(b) Aplicando la primera ley de la termodinámica:

$$Q = \Delta U + W$$

$$Q = (U_2 - U_1) + W = (912\,J - 456\,J) + 334\,J$$

$$\therefore\ Q = 790\,J$$

EJERCICIO: Una mol de gas ideal mono-atómico se calienta de modo que la temperatura varía con la presión según la ley: $T = Ap^2$, donde A es una constante. Si la temperatura cambia de T_0 a $4\,T_0$ determinar el trabajo realizado por el gas.

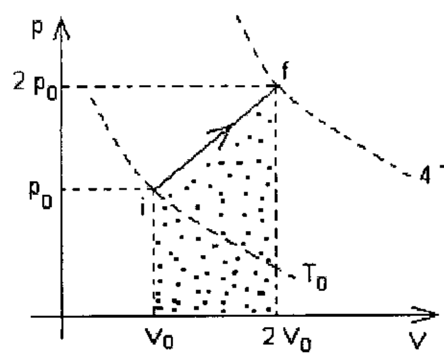
SOLUCIÓN: Aplicando la ecuación del gas ideal tenemos,

$$pV = nRT = 1mol\, RAp^2 \implies V = RAp$$

Además, $$p_0 = \sqrt{\frac{T_0}{A}}$$

$$p = \sqrt{\frac{4\,T_0}{A}} = 2\sqrt{\frac{T_0}{A}} = 2\,p_0$$

El diagrama pV para este proceso será:



El trabajo realizado por el gas es igual al área bajo la curva:

$$W = \frac{1}{2}\,(p_0 + 2\,p_0)(2\,V_0 - V_0)$$

$$\therefore W = \frac{3}{2}\,p_0V_0$$

EJERCICIO.- Un mol de aire ($C_V = 5R/2$) está encerrado a la presión atmosférica en un cilindro mediante un pistón a la temperatura de 0 °C. El volumen inicial ocupado por el gas es V. Determinar el volumen de gas V' después de suministrarle el calor equivalente a $13200\,J$.

SOLUCIÓN: De la ecuación del gas ideal, se tiene:

$$\frac{p_i V}{T_i} = \frac{p_f V'}{T_f}$$

$$\Rightarrow V' = V\frac{T_f}{T_i} = V\frac{T_i + \Delta T}{T_i}$$

$$V' = V\left(1 + \frac{\Delta T}{T_i}\right)$$

Además,

$$Q = \frac{7}{2} n R \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2Q}{7n R}$$

Reemplazando esta ecuación en la del volumen:

$$V' = V\left(1 + \frac{2Q}{7n R T_i}\right)$$

$$V' = (22.4\, x10^{-3} m^3)\left(1 + \frac{2\,(13.2\, KJ)}{7\,(1\, mol)(8.314\, J/mol.K)(273\, K)}\right)$$

$$\therefore \; V' = 59.6\, L$$

EJERCICIO.- Dos moles de un gas ideal inicialmente a una temperatura de $300\, K$ y a una presión de $0.4\, atm$ se comprime en forma isotérmica a una presión de $1.2\, atm.$ Determinar: (a) El volumen final del gas. (b) El trabajo realizado por el gas. (c) El calor transferido.

SOLUCIÓN: (a) Teniendo en cuenta la ecuación,

$$p_i V_i = p_f V_f$$

$$\Rightarrow V_f = V_i \frac{p_i}{p_f} = \frac{n\, R\, T_i}{p_f}$$

Reemplazando valores se tiene,

$$V_f = \frac{(2\,mol)\left(0.082\,\frac{atm.L}{mol.K}\right)(300\,K)}{1.2\,atm}$$

$$\therefore\ V_f = 41\,L$$

(b) El trabajo realizado por el gas,

$$W = n\,R\,T\ln\left(\frac{p_i}{p_f}\right)$$

$$W = (2\,mol)8.314\,\frac{J}{mol.K}(300\,K)\ln\left(\frac{0.4\,atm}{1.2\,atm}\right)$$

$$\therefore W = -5480.32\,J$$

(c) Por la primera ley de la termodinámica,

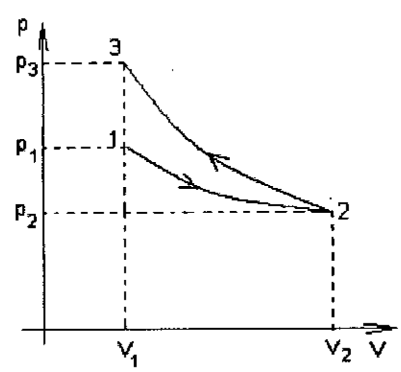
$$Q = \Delta U + W,$$

$$(\Delta U = 0)$$

$$\Rightarrow Q = W = -5480.32\,J$$

EJERCICIO.- En una expansión isoterma, un gas ideal a una presión inicial p_0 se expansiona hasta duplicar su volumen inicial. (a) Hallar su presión después de la expansión. (b) Luego el gas se comprime adiabática y cuasi estáticamente hasta su volumen original, en cuyo momento su presión vale $1.32\,p_0$. El gas, ¿es monoatómico, diatomico o poli-atómico?

SOLUCIÓN: (a) El diagrama pV, será:



Teniendo en cuenta la ecuación,

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$\Rightarrow\ p_2 = p_1\frac{V_1}{V_2} = p_0\frac{V_1}{2\,V_1}$$

$$\therefore\ p_2 = \frac{1}{2}\,p_0$$

(b) Por definición:

$$p_2V_2^{\gamma} = p_3V_3^{\gamma} \qquad \text{(Proceso adiabática)}$$

$$\Rightarrow\ \tfrac{1}{2}p_0(2V_0)^{\gamma} = 1.32\,p_0V_0^{\gamma}$$

$$2^{\gamma} = 2.64$$

$$\gamma \ln\ 2 = \ln 2.64$$

$$\gamma = \frac{\ln 2.64}{\ln 2}$$

$$\therefore\ \gamma = 1.40 \qquad \text{(Gas diatómico)}$$

EJERCICIO.- La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30 %. La máquina absorbe $800\,J$ de calor por ciclo de una fuente caliente a $500\,K$. Determine: (a) El calor liberado por ciclo. (b) La temperatura de la fuente fría.

SOLUCIÓN: (a) Por definición,

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}$$

Reemplazando valores,

$$0.3 = 1 - \frac{Q_c}{800} \qquad \Rightarrow\ Q_c = 560\,J$$

(b) Por definición,

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

Reemplazando valores,

$$0.3 = 1 - \frac{T_c}{500} \qquad \Rightarrow\ T_c = 350\,K$$

EJERCICIO.- Dos moles de un gas monoatómico ideal experimenta una expansión isotérmica desde $0.02\,m^3$ a $0.04\,m^3$ a una temperatura de $300\,K$. ¿Cuál es la variación de entropía del gas?

SOLUCIÓN: Para una expansión isotérmica reversible de un gas ideal tenemos,

$$dQ = d\,U + pdV, \qquad (dU = 0)$$

Entonces,

$$dQ = \frac{n\,R\,T}{V}\,dV$$

Donde,

$$\Delta S = \int \frac{d\,Q}{T} = n\,R\int \frac{d\,V}{V} = n\,R\ln\frac{V_f}{V_i}$$

$$\Delta S = (2\,mol)\left(8.314\,\frac{J}{mol.K}\right)\ln\frac{0.04\,m^3}{0.02\,m^3}$$

$$\therefore\ \Delta S = 11.53\,\frac{J}{K}$$

EJERCICIO.- Si la capacidad calorífica del gas nitrógeno a presión constante varia con la temperatura de acuerdo a $C_p = 6.524 + 1.25x10^{-3}T - 10^{-9}T^2\ cal/mol.K$. Determine el cambio de entropía de un mol de nitrógeno al calentarlo de $400\,K$ a $800\,K$ a presión de $1\,atm$.

SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta, la ecuación,

$$dQ = n\,C_p dT$$

Entonces,

$$\Delta S = \int \frac{d\,Q}{T} = \int_{400\,K}^{800\,K} \frac{6.524 + 1.25x10^{-3}T - 10^{-9}T^2}{T}\,dT$$

$$\therefore\ \Delta S = 5.02\,\frac{cal}{K}$$

EJERCICIOS DE TERMODINAMICA

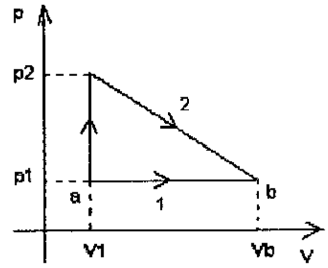
1. Un tanque de $1\,litro$ de volumen contiene $1\,g$ de gas nitrógeno a $290K$. Otro tanque de igual volumen a igual temperatura contiene $1\,g$ de gas oxígeno. (a) ¿Cuál es la presión en cada tanque? (b) Si se bombea el gas oxígeno en el tanque de nitrógeno, ¿Cuál es la presión producida por la mezcla de los dos gases? Suponga que la temperatura permanece constante a $290K$.

2. Tres vasijas aisladas de volúmenes iguales V, se conectan mediante tubos delgados que pueden transferir gas, pero no calor. Inicialmente todas las vasijas se llenan con el mismo tipo de gas a una temperatura T_0 y presión p_0. Entonces la temperatura de la primera vasija se duplica y la temperatura de la segunda vasija se triplica. La temperatura de la tercera vasija permanece invariable. Determinar la presión p del sistema en función de la presión inicial p_0.

3. Dos moles de un gas ideal monoatómico tienen una presión inicial $p_1 = 2\ atm$ y un volumen inicial $V_1 = 2\ L$. Se obliga al gas a realizar el siguiente proceso cíclico: Se expansiona isotérmicamente hasta que tiene un volumen de $V_2 = 4\ L$. Luego se calienta a volumen constante hasta que su presión vale $p_3 = 2\ atm$. Finalmente se enfría a presión constante hasta que vuelve a su estado inicial. (a) Dibujar este ciclo en un diagrama pV. (b) Calcular el calor absorbido o cedido por el gas durante este ciclo en *Joules*. Considere: $R = 0.082\dfrac{atm.L}{mol.K}, C_V = \dfrac{3R}{2}, C_p = \dfrac{5R}{2}$ y $1\ atm.L = 101.325$ *Joules*.

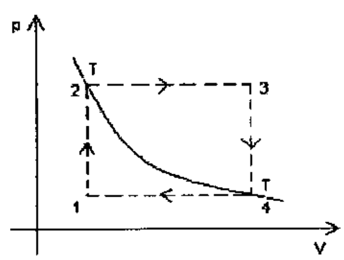
244

4. El diagrama pV de la figura, muestra dos trayectorias a lo largo de las cuales una muestra de gas se puede llevar del estado a al estado b, donde $V_b = 3.0\,V_1$. La trayectoria 1 requiere que energía igual a $5.0\,p_1 V_1$ se transfiera al gas como calor. La trayectoria 2 requiere que energía igual a $5.5\,p_1 V_1$ sea transferida al gas como calor. ¿Cuál es la razón p_2/p_1?



5.- Un matraz contiene $1g$ de oxigeno a la presión absoluta de $8\,atm$ y a la temperatura de $47\,°C$. Al cabo de cierto tiempo se encuentra que a causa de un escape, la presión ha descendido a $5/8$ de su valor inicial y la temperatura ha bajado a $27°C$. (a) ¿Cuál es el volumen del matraz? (b) ¿Qué peso de oxigeno se ha escapado entre las dos observaciones?

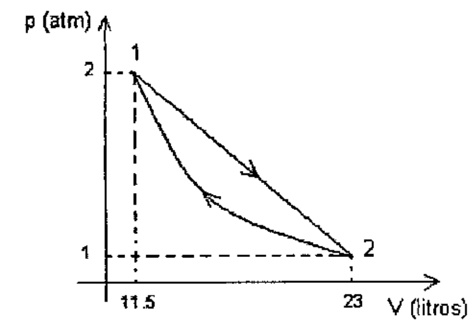
6.- Sobre un mol de gas ideal se realiza un ciclo cerrado, como se muestra en el diagrama pV. Las temperaturas en los estados 1 y 3 son T_1 y T_3 respectivamente. Encontrar el trabajo que realiza el gas durante el ciclo, sabiendo que los estados 2 y 4 se encuentran en una isoterma.



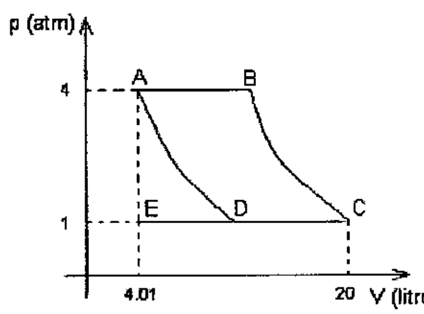
7.- Un volumen de $1\,l$ de oxígeno gaseoso a $40\,°C$ y a la presión de $76\,cm\,Hg$ se dilata hasta que su volumen es de $1.5\,l$ y su presión es de $80\,cm\,Hg$. Encontrar el número de moles de oxígeno en el sistema y su temperatura final.

8.- Un cilindro de 1 m de altura con diámetro interior de $0.12\ m$ contiene gas propano $(M = 44.1\ g/mol)$ que se usará en una varillada. Inicialmente el tanque se llena hasta que la presión manométrica es de $1.3x10^6\ Pa$ y la temperatura es $22\ °C$. La temperatura del gas se mantiene constante mientras el tanque se vacía parcialmente hasta que la presión manométrica es de $2.5x10^5\ Pa$. Calcule la masa de propano que se gastó.

9.- Un mol de un gas ideal diatomico se deja expandir a lo largo de la recta que va de 1 a 2 en el diagrama pV de la figura que se muestra. A continuación se comprime isotérmicamente desde 2 hasta 1. Calcular el trabajo total realizado sobre el gas durante este ciclo.

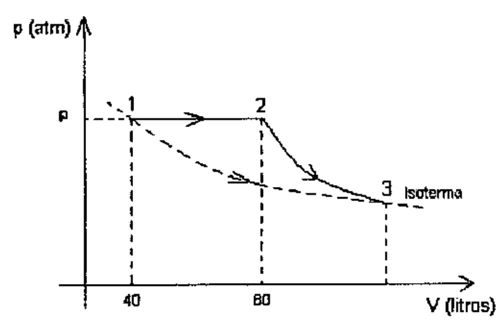


10.- El diagrama pV de la figura que se muestra representa procesos realizados por 3 *moles* de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria AEC. Determinar: (a) Las temperaturas inicial y final. (b) El trabajo realizado por el gas. (c) El calor absorbido por el gas.



11.- Un gas ideal inicialmente a la presión p_0 experimenta una expansión libre (adiabática, sin trabajo externo) hasta que su volumen final sea el triple de su volumen inicial. (a) Calcular la presión del gas después de la expansión libre. (b) El gas es luego comprimido lento y adiabáticamente hasta su volumen original, la presión después de la compresión es $\sqrt[3]{3}\,p_0$. Determinar si el gas es monoatómico, diatomico o poli-atómico. (c) Como se compara la energía cinética media por molécula en los estados inicial y final.

12.- Cuatro moles de argón se encuentra inicialmente a la temperatura de $27\,°C$ y ocupan un volumen de $40\ l$. El gas se expande primero a presión constante hasta duplicar el volumen y después adiabáticamente hasta que la temperatura vuelve a su valor inicial. (a) Dibuje un diagrama pV para este proceso termodinámico. (b) ¿Cuál es el calor total suministrado durante el mismo? (c) ¿Cuál es la variación total de la energía interna del argón? (d) ¿Cuál es el trabajo total realizado por el gas? (e) ¿Cuál es el volumen final?



13.- Durante cada ciclo, una máquina de Carnot extrae $100\ J$ de energía de un foco a $400\ K$, realiza un trabajo y elimina calor en otro foco a $300\ K$. Calcular la variación de entropía de cada foco en cada ciclo y demostrar que la variación de entropía del universo es cero en el caso de este proceso reversible.

CAPITULO VI

ONDAS ELASTICAS

6. ONDAS ELASTICAS

La onda elástica es la perturbación efectuada sobre un medio material y que se propaga con movimiento uniforme a través de este mismo medio. La rapidez con que se propaga la onda elástica depende de las propiedades físicas (tales como el modulo elástico, la densidad, la temperatura, etc.) del medio material que se perturba.

6.1 LA ECUACIÓN DE ONDA

La expresión Matemática de una onda elástica que se propaga con movimiento uniforme a lo largo del eje X^+ se describe por medio de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \qquad \ldots (6,1)$$

Esta ecuación diferencial se conoce con el nombre de **Ecuación de Onda** y la cantidad $f = f(x,t)$ es una función que describe la perturbación del medio y depende de la posición "x" y del tiempo "t" simultáneamente, se conoce como la función de onda de la onda elástica que se propaga. La unidad de la función de onda depende de la cantidad física que representa. La cantidad "v" en la ecuación de onda, es la magnitud de la velocidad con la que se propaga la onda elástica a través del medio material.

NOTA: Las ondas elásticas (por la forma en que se propagan) pueden ser ondas transversales y ondas longitudinales.

EJERCICIO: Verifique si la función $y = Ae^{k(x-vt)}$ es la función de onda de una onda que se propaga a lo largo del eje X.

SOLUCIÓN: Si deducimos la ecuación de onda a partir de esta función dada, entonces podemos afirmar que dicha función describe a una onda que se propaga a lo largo del eje X. Definiendo la nueva variable $u = k(x - vt)$ se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \quad ...(1) \quad ; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -kv \quad ...(2)$$

La función ahora se escribe de la forma siguiente $y = Ae^u$ entonces:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(Ae^u) = Ae^u \qquad .....(3)$$

Por tanto evaluando la primera derivada de la función y con respecto a la variable x, tomando en cuenta las ecuaciones (3) y (1) se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = Ae^u \frac{\partial u}{\partial x} = kAe^u$$

Calculando la segunda derivada de y respecto a x, tomando en cuenta las ecuaciones (3) y (1) nuevamente se tiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(kAe^u)\, k$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 Ae^u \qquad ....(4)$$

Ahora evaluando la primera derivada de la función y con respecto al tiempo t y tomando en cuenta las ecuaciones (3) y (2) se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = Ae^u \frac{\partial u}{\partial t} = -kv\, Ae^u$$

Calculando la segunda derivada de y respecto al tiempo t y tomando en cuenta las ecuaciones (3) y (2) nuevamente se tiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}(-kv\,Ae^u)\,(-kv)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=k^2v^2\,\frac{\partial}{\partial u}(\,Ae^u)=k^2v^2Ae^u$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=k^2Ae^u \quad .....(5)$$

Igualando las ecuaciones (4) y (5), operando y despejando se tiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Que es la ecuación de onda asociada, `por lo tanto la función $y=Ae^{k(x-vt)}$ es una función de onda que describe una onda propagándose en la dirección del eje X, con una rapidez v.

6.2 ONDAS ARMONICAS

Una importante clase de función de onda que satisface la ecuación de onda (1), es la función de onda armónica. Son funciones de onda que describen a las ondas elásticas armónicas. Estas se crean cuando la perturbación del medio material ocurre con una frecuencia f y un periodo T asociado a la perturbación. La función de onda armónica más simple es la que se describe por la relación:

$$f=f(x,t)=\ f_o\ sen(kx-\omega t) \qquad \dots (6,2)$$

En la ecuación:

f_0 : es la amplitud de la onda;

$k=\ 2\pi/\lambda$: es la frecuencia espacial (vector de onda), su unidad es el rad/m;

λ : es longitud de onda o periodo espacial, su unidad el metro (m);

$\omega = 2\pi / T$: es la frecuencia angular de la onda, su unidad el rad/s.

La rapidez de las ondas elásticas periódicas está relacionada con la longitud de onda (λ), la frecuencia (f) y el periodo (T) por medio de la siguiente relación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \dots (6,3)$$

En la ecuación:

f : es la frecuencia de la onda, su unidad es el Hertz (1Hz = 1/s).

EJERCICIO: La ecuación de una onda es $y = 10sen2\pi(2x - 100t)$, donde x se mide en metros y t en segundos. Hallar: (a) La amplitud y la longitud de la onda. (b) La frecuencia y la velocidad de propagación de la onda.

SOLUCIÓN: (a) De la ecuación

$$y = 10sen2\pi(2x - 100t)$$

$$= 10sen(4\pi x - 200\pi t)$$

Comparando con la ecuación:

$$y = y_0 sen(kx - wt)$$

Obtenemos la amplitud de la onda $y_0 = 10\ m$, el vector de onda $k = 4\pi$ y por tanto la longitud de onda, esto es:

$$k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \lambda = 2\pi/k = 0.5\ m,$$

$$\lambda = 0.5\ m$$

(b) Siendo, $\lambda/T = w/k = f\lambda \Rightarrow f = w/k\lambda$

$$f = 200\pi/(4\pi)(0.5) = 100\ osc/s$$

$$f = 100\ s^{-1}$$

$$v = \lambda/T = \lambda f = 0.5(100) = 50\ m/s$$

$$v = 50\ m/s$$

EJERCICIO: ¿Cuál es la ecuación de una onda que avanza en la dirección negativa en el eje X y que tiene una amplitud de 0.2 m, una velocidad de 200 m/s y una frecuencia de 350 osc/s?

SOLUCION: Del problema se tienen los siguientes datos

$$y_0 = 0.2\,m,\ \ v = 200\ m/s,\ \ f = 350\ osc/s$$

Pero

$$k = w/v = 2\pi f/v = 2\pi(350)/200 = 2\pi(7/4)\,m^{-1}$$

De donde resultas:

$$w = 2\pi(350)\,s^{-1}$$

La ecuación de una onda que avanza en la dirección negativa de X es,

$$y = y_0 sen(kx + wt) = 0.2sen2\pi\left(\frac{7}{4}x + 350t\right)$$

$$\therefore y = 0.2\ sen2\pi(1.75x + 350t)$$

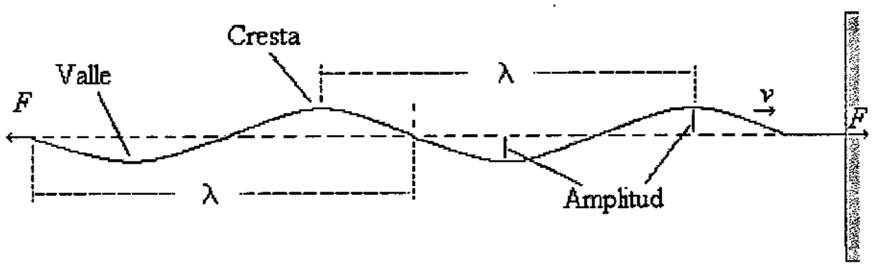
6.3 ONDAS TRANVERSALES

Una onda transversal se caracteriza por que la velocidad de la onda tiene una dirección que es perpendicular a la perturbación que le da forma a la onda. Las ondas transversales se observan con mucha frecuencia en la naturaleza, tal es el caso de las olas que se producen el mar, los rizos en un estanque de agua, las ondas estacionarias en una cuerda de guitarra, las ondas de corte o de cizalla en una barra, las ondas de torsión en una barra, etc.

44.

6.4 ONDA TRANSVERAL EN UNA CUERDA

La figura muestra las ondas transversales (periódicas) que se propagan por una cuerda delgada de masa m y de longitud L. La cuerda está sometida a una fuerza tensora de magnitud F y por un extremo sometido periódicamente a una perturbación vertical hacia arriba y hacia abajo, de periodo T.



La función de onda que describe esta onda transversal es:

$$Y(x,t) = Y_o\, sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right) \qquad \dots (6,4)$$

Donde:

Y_o : es la amplitud de la onda (máxima altura de la cresta), su unidad el metro (m)

λ : es la distancia entre dos crestas sucesivas, lo que llamaremos una longitud de onda, su unidad es el metro (m);

T : es el periodo de la onda, su unidad el segundo (s).

El periodo (T) de la onda transversal, es el tiempo que emplea una cresta en recorrer la distancia correspondiente a una longitud de onda (λ), por lo que la magnitud de la velocidad de la onda en la cuerda se puede escribir como:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \dots (6,5)$$

Pero la velocidad v de la onda transversal en la cuerda depende de la magnitud (F) de la fuerza que tensiona por sus extremos a la cuerda y también depende de la masa por unidad de longitud de la cuerda $\mu = m/L$ (la densidad lineal), de acuerdo a la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} \qquad \ldots (6,6)$$

Donde:

F : es la magnitud de la fuerza, su unidad es el Newton (N);

μ : es la densidad lineal de masa, su unidad es el kg/m.

EJERCICIO: De una soga de masa igual a 0,05kg por cada metro de longitud cuelga verticalmente un bloque de 5N de peso. Si la soga se golpea horizontalmente a razón de 20 golpes en 5s determinar la rapidez y la longitud de onda de las ondas en la cuerda.

SOLUCIÓN: La densidad lineal de la soga es $\mu = 0{,}05kg/m = 5 \times 10^{-2}kg/m$ entonces la rapidez de las ondas es:

$$v = \sqrt{\frac{5N}{5 \times 10^{-2}\frac{kg}{m}}} = \sqrt{100}\,\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

Como la frecuencia es f = 20/5s = 4Hz, Por lo tanto la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10\frac{m}{s}}{4\frac{1}{s}} = 2{,}5m$$

EJERCICIO: Una cuerda horizontal tiene 5 m de longitud y una masa de 1.45 g. (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda si la longitud de onda de una onda de 120 s^{-1} sobre ella es de 60 cm? (b) ¿De qué magnitud debe ser la masa que cuelgue en uno de sus extremos por decir, a través de una polea para darle esa tensión?

SOLUCION: (a) Se sabe que la rapidez de una onda en una cuerda depende tanto de la tensión como de la masa por unidad de longitud

44 -

Además,

$$v = \lambda f = 0.6\,m(120\,s^{-1}) = 72\ m/s$$

$$v = \sqrt{T/\mu} \Rightarrow T = \mu v^2 = \left(\frac{1.45x10^{-3}\,Kg}{5\,m}\right)(72\ m/s)^2$$

$$\therefore T = 1.5\,N$$

(b) La tensión en la cuerda equilibra el peso de la masa que cuelga de su extremo. Así:

$$T = mg$$

Donde

$$m = \frac{T}{g} = \frac{1.5\,N}{9.81\ m/s^2} = 0.153\,Kg$$

6.5 ENERGÍA DE LA ONDA EN LA CUERDA

La energía que se propaga junto con la onda transversal que viaja a través de la cuerda depende del cuadrado de la frecuencia angular y del cuadrado de la amplitud de la onda y de la masa de la cuerda que está contenida en una longitud de onda, tal como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2\,(Y_o)^2\,\lambda \qquad \ldots (6,7)$$

En esta ecuación:

μ : es la masa por unidad de longitud de la cuerda, su unidad es kg/m;

ω : es la frecuencia angular, su unidad es el rad/s;

Y_o : es la amplitud de la onda en la cuerda, su unidad es el metro (m);

λ : es la longitud de onda, su unidad es el metro (m).

La energía (E) por cada unidad de periodo (T) es la potencia media que se propaga con la onda y se escribe como:

$$P = \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2 \qquad \ldots (6,8)$$

Donde

v : es la rapidez de la onda en la cuerda, su unidad es el m/s.

EJERCICIO 5. Un alambre de acero ($\rho = 7.8x10^3\ Kg/m^3$) tiene por diámetro 0.2 mm y está sujeto a una tensión de 200 N. Determinar la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre.

SOLUCION: Para este caso, tenemos que la masa por unidad de longitud es,

$$\mu = \frac{m}{l} = \rho A = 7.8x10^3\pi(0.1x10^{-3})^2 = 24.49x10^{-5}\ Kg/m$$

Luego,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{200\ N}{24.49x10^{-5}\ Kg/m}} = 9.03\ m/s$$

$$\therefore v = 9.03\ m/s$$

EJERCICIO: Una cuerda de 2 m de largo está accionada por un vibrador de 240 s^{-1} colocado en uno de sus extremos. La cuerda resuena en cuatro segmentos formando un patrón de onda estacionaria. ¿Cuál es la rapidez de una onda transversal sobre tal cuerda?

SOLUCION: Como se sabe cada segmento tiene una longitud de $\lambda/2$, entonces,

$$4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = L$$

Donde,

$$\lambda = \frac{L}{2} = \frac{2\ m}{2} = 1\ m$$

Luego

$$v = \lambda f = (1\,m)(240\,s^{-1}) = 240\ m/s$$

$$\therefore v = 240\ m/s$$

EJERCICIO: Una cuerda de banjo de 30 cm de largo oscila en un patrón de onda estacionaria. Resuena en su modo fundamental a $256\,s^{-1}$. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si 80 cm de ésta tienen una masa de 0.75 g?

SOLUCION: Se sabe que la cuerda vibra en un segmento cuando $f = 256\,s^{-1}$.

Por consiguiente,

$$\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = (0.30\,m)(2) = 0.60\,m$$

Además,

$$v = \lambda f = (0.60\,m)(256\,s^{-1}) = 154\ m/s$$

La masa por unidad de longitud de la cuerda es,

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{0.75x10^{-3}Kg}{0.80\,m} = 9.4x10^{-4}\,Kg/m$$

Como,

$$v = \sqrt{F/\mu} \Rightarrow F = v^2\mu$$

Reemplazando valores,

$$F = (154\ m/s)^2(9.4x10^{-4}\,Kg/m)$$

$$\therefore F = 22\,N$$

6.6 VELOCIDAD DE LA ONDA ELASTICA

La rapidez con que viaja una onda elástica depende de las propiedades físicas del medio en que se propaga. A continuación se muestran las ecuaciones para la rapidez de la onda elástica en tres medios uniformes y homogéneos:

$$v_{solido} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \; ; \; v_{liquido} = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \; ; \; v_{gas} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \ldots (2)$$

Donde "Y" es el modulo elástico de Young del sólido; β es modulo elástico de volumen del liquido; P es la presión del gas; γ es un factor de expansión del gas (para un gas diatomico γ = 1,4 y para un gas monoatómico γ = 1,67) y ρ es la densidad (del sólido, liquido o gas) del medio en cuestión.

EJERCICIO: El modulo de Young del aluminio es $7 \times 10^{10} N/m^2$ y la del cobre es $11 \times 10^{10} N/m^2$ sus densidades respectivas son: $2{,}7 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ y $8{,}9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ Calcular la magnitud de la velocidad de las ondas elásticas producidas al golpear una barra solida y homogénea: a) hecha de aluminio; b) hecha material de cobre.

SOLUCIÓN: Para la barra solida de material de aluminio, la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}}{2{,}7 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{70 \times 10^6 \, m^2}{2{,}7 \, s^2}}$$

$$v_{Al} = 5091{,}7 \frac{m}{s}$$

Para la barra solida de material de cobre, la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{11 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}}{8{,}9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{110 \times 10^6 \, m^2}{8{,}9 \, s^2}}$$

$$v_{Cu} = 3515{,}6\ \frac{m}{s}$$

Vemos que la onda elástica en el material de aluminio es más rápida que la onda en el material de cobre.

EJERCICIO: El modulo elástico de volumen del mercurio (Hg) es $27{,}02 \times 10^9 N/m^2$ y la del agua (H_2O) dulce es $2{,}184 \times 10^9 N/m^2$. Sus respectivas densidades son de: $13{,}6 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ y $10^3 \frac{kg}{m^3}$, calcular la rapidez de las ondas elásticas generadas en el mercurio y en el agua.

SOLUCIÓN: La rapidez de la onda a través del mercurio líquido es:

$$v = \sqrt{\frac{27{,}02 \times 10^9 \frac{N}{m^2}}{13{,}6 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{27{,}02 \times 10^6\, m^2}{13{,}6\, s^2}}$$

$$v_{Hg} = 1409{,}5 \frac{m}{s}$$

Para el agua dulce la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{2{,}184 \times 10^9 \frac{N}{m^2}}{10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{2{,}184 \times 10^6\, m^2}{s^2}}$$

$$v_{H_2O} = 1477{,}8\ \frac{m}{s}$$

Vemos que la onda elástica es más rápida en el agua, que en el mercurio.

EJERCICIO: Calcule la rapidez de una onda elástica en el aire cuya densidad es ρ = 1,23kg/m^3 suponiendo que se comporta como un gas ideal a temperatura y presión atmosférica normal.

SOLUCIÓN: La presión atmosférica normal del aire es $P_o = 101{,}3x10^5 N/m^2$ y conocida su densidad, la rapidez de la onda resulta:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 101{,}3 \times 10^5 \times \frac{N}{m^2}}{1{,}23 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 10{,}13 \times 10^4 m^2}{1{,}23\ s^2}}$$

$$v_{aire} = 339{,}6\ m/s$$

Esta es la rapidez de las ondas sonoras que viajan en el aire, en virtud de su valor es usual aceptar la aproximación de 340m/s, que difiere en menos de 0,15% del valor real.

EJERCICIO: Un cable flexible uniforme de $20\ m$ de longitud tiene una masa de $5\ Kg$. Cuelga verticalmente bajo su propio peso y vibra desde su extremo superior con una frecuencia de $7\ s^{-1}$. (a) Encuentre la rapidez de una onda transversal sobre el cable en su punto medio. (b) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia en su punto medio?

SOLUCION: (a) El punto medio del cable soporta la mitad de su peso, así que la tensión en este punto es,

$$T = \frac{1}{2}(5\ Kg)(9.81\ m/s^2) = 24.5\ N$$

Además,

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{5\ Kg}{20\ m} = 0.25\ Kg/m$$

Donde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{24.5\ N}{0.25\ Kg/m}} = 9.9\ m/s$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

(b) Ya que las crestas de una onda no se acumulan en un punto a lo largo de la cuerda o cable, el número de crestas que pasa por un punto debe ser el mismo que el que pase por cualquier otro punto. Por tanto, la frecuencia $7\,s^{-1}$, es la misma en todos los puntos.

Para calcular la longitud de onda en el punto medio se debe usar la rapidez que se encontró para ese punto, 9.9 m/s. Esto es,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{9.9\,m/s}{7\,s^{-1}} = 1.4\,m$$

EJERCICIO: Una fuente vibrante al extremo de una cuerda tensa tiene un desplazamiento dado por la ecuación $y = 0.1sen6t$, donde y está en metros y t en segundos. La tensión en la cuerda es de $4\,N$ y la densidad lineal es 0.01 Kg/m. ¿Cuál es la longitud de onda?

SOLUCION: La velocidad esta dado por,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\,N}{10^{-2}\,Kg/m}} = 20\ m/s$$

La frecuencia será,

$$w = 2\pi f = 6\ rad/s\ \Rightarrow\ f = 0.955\,s^{-1}$$

Luego,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20\ m/s}{0.955\,s^{-1}} = 21\,m$$

$$\therefore\ \lambda = 21\,m$$

EJERCICIO: En un experimento de laboratorio de ondas estacionarias una cuerda de 0.95 m de largo está fija a la rama de un diapasón impulsado eléctricamente, que vibra perpendicularmente a la de la cuerda. El peso de la cuerda es $0.45\ N$ y soporta una tensión con pesas colgadas en el otro extremo de $38\ N$. ¿Cuál debe ser la frecuencia para que la cuerda vibre con cuatro vientres?

SOLUCION: La masa por unidad de longitud es,

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{W}{gl} = \frac{0.45\ N}{9.81\ m/s^2(0.95\ m)} = 0.0482\ Kg/m$$

La frecuencia será,

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

Donde, n es el número de vientres y reemplazando valores,

$$f = \frac{4}{2(0.95\ m)}\sqrt{\frac{38\ N}{0.0482\ Kg/m}} = 59\ s^{-1}$$

$$\therefore f = 59\ s^{-1}$$

EJERCICIO: Una cuerda vibra en cinco segmentos a una frecuencia de $460\ s^{-1}$. (a) ¿Cuál es su frecuencia fundamental? (b) ¿Qué frecuencia ocasionará que vibre en tres segmentos?

SOLUCIÓN: (a) Si la cuerda tiene n segmentos de largo, entonces

$$L = n\left(\frac{1}{2}\lambda\right).$$

Pero,

$$\lambda = v/f_n \qquad L = n(v/2f_n)$$

De donde se obtiene,

$$f_n = n\left(\frac{v}{2L}\right)$$

Además se sabe que,

$$f_5 = 460\, s^{-1}$$

Por lo tanto

$$460\, s^{-1} = 5\left(\frac{v}{2L}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{2L} = 92\, s^{-1}$$

Luego $f_n = n(92\, s^{-1})$ Por consiguiente,

$$f_1 = 92\, s^{-1}$$

$$f_3 = 3(92\, s^{-1}) = 276\, s^{-1}$$

EJERCICIOS DE ONDAS

1.- Un alambre de cobre de 2.4 mm de diámetro tiene 3 m de longitud y se usa para suspender una masa de 2 Kg de una viga. Si se envía una perturbación transversal a lo largo del alambre golpeándolo ligeramente con un lápiz, ¿con que rapidez viajará la perturbación? La densidad del cobre es de 8920 Kg/m^3.

2. Un cable flexible de 30 cm de longitud y 70 N de peso, se estira con una fuerza de 2 KN. Si el cable se golpea lateralmente por uno de sus extremos, ¿Cuánto tiempo tardará la onda transversal en viajar al otro extremo y regresar?

3. Dos alambres de acero y plata, del mismo diámetro y longitud, se estiran con idéntica fuerza. Sus densidades son 7.80 g/cm^3 y 10.6 g/cm^3, respectivamente. ¿Cuál es la frecuencia fundamental del alambre de plata, si la del acero es de 200 s^{-1}?

4. Una cuerda tiene una longitud de $60\,cm$ y una masa de $3\,g$. ¿Cuál debe ser la tensión de modo que, cuando vibra transversalmente, su primer sobre tono tiene una frecuencia de $200\,s^{-1}$?

5. ¿Cuál debe ser la longitud de una barra de hierro que tiene la frecuencia fundamental de $320\,s^{-1}$ cuando se sujeta por su centro? Suponga vibración longitudinal con una rapidez de 5 Km/s.

6.- Un niño lanza una piedra a 2m de la orilla de un estanque de agua, lo que produce ondas transversales en el estanque. Si llegan a la orilla 6 crestas en cada minuto determine: la rapidez de las ondas, la frecuencia y la longitud de onda de las ondas transversales en el agua.

7.- Se golpea un extremo de una varilla de cobre de 80m de largo. Una persona en el otro extremo escucha dos sonidos, una que viaja por el aire y otra que viaja por la varilla. Si la rapidez del sonido en el aire es de 340m/s, determine el intervalo de tiempo entre los sonidos. Considere para el cobre un modulo $Y = 11x10^{10} N/m^2$ y una densidad $\rho = 9000 kg/m^3$.

8.- Un pescador nota que su bote sube y baja periódicamente y, tarda 2s en moverse desde el punto más alto al más bajo, una distancia total de 0,6m. Si el pescador nota que hay 4 crestas a lo largo de 21m, entonces: a) ¿Cuál es la frecuencia, la longitud de onda y la rapidez de las olas?, b) escriba la función de onda de las olas marinas.

9.- La sirena de una escuela siempre emite sonido con una frecuencia de 170Hz a la hora de salida. Si la masa molecular del aire es de 28,8g/mol, entonces ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras en un día de verano a 27°C y en día de invierno a -7°C? Considere que el factor $\gamma = 1,4$ para esta situación.

10.- La bocina de una lancha emite ondas sonoras de 680Hz justo a 1,7m encima del agua de un lago. Si el eco de las ondas que penetran el agua regresan a la bocina 0.05s después ¿Cuál es la profundidad del lago? ¿Qué diferencia hay entre la longitud de onda de las ondas que viajan en el agua y de las ondas que viajan en el aire? Para el sonido la rapidez es: $v_{aire} = 340\frac{m}{s}$; $v_{agua} = 1480\frac{m}{s}$ Dibuje un esquema del problema.

CAPITULO VII

ONDAS DE SONIDO

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
CDCITRA
VRI

7.1 EL SONIDO

El sonido es una onda longitudinal que viaja con movimiento uniforme a través de diferentes medios (sólidos, líquidos, gases) propagado energía. Por ser de naturaleza elástica (mecánica), su rapidez depende de las propiedades físicas del medio en que se viaja. Así, una onda sonora que viaja a través de un medio uniforme y homogéneo, tal como un material sólido, una sustancia liquida o una sustancia gaseosa, la magnitud de su velocidad es:

$$v_{solido} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \; ; \; v_{liquido} = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \; ; \; v_{gas} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \ldots\ldots (7,1)$$

Donde:

Y : es el modulo elástico de Young del sólido, su unidad N/m^2;

β : es el modulo elástico de volumen del liquido, su unidad N/m^2;

ρ : es la densidad del medio, su unidad kg/m^3;

P : es la presión absoluta del gas; su unidad $1Pa = N/m^2$:

γ : es el factor de expansión: $\gamma = 1,4$ (gas diatomico); $\gamma = 1,67$ (gas monoatómico).

- Para la onda sonora que viaja en el aire (gas diatomico) a la presión atmosférica normal la rapidez es $v_{aire} = 339{,}6 m/s$, que para propósitos de operaciones y de cálculo, en este libro vamos a considerar el valor de 340m/s que tiene un 0,12% error de aproximación.
- Para la onda sonora que viaja en el agua su rapidez $v_{agua} = 1477{,}8 m/s$. La velocidad que vamos a considerar en este libro es de 1480m/s, valor que tiene un 0,15% error de aproximación.

Por otro lado la presión absoluta de un gas depende de la temperatura a la que se encuentra, por lo que la rapidez de la onda sonora también depende de la temperatura.

Suponiendo que podemos usar la ecuación de estado del gas ideal en función de la densidad podemos expresar la velocidad de la onda sonora en términos de la temperatura, esto es:

$$v_{sonido} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \ldots\ldots (7,2)$$

Donde:

R = 8,314J/mol-K : es la constante de los gases,

M = 28,9 x10^{-3}kg/mol : es la masa molar del aire;

T : es la temperatura en la escala Kelvin.

EJERCICIO: La rapidez del sonido en el aire (a presión atmosférica y temperatura normal) es de 340m/s. Expresar este valor: a) en kilómetros por hora (km/h); b) en pies por segundo (ft/s); c) en millas por hora (mi/h).

SOLUCIÓN: Usando las unidades de conversión se tiene

a) Que: 1m/s = 3,6km/h, por lo tanto la rapidez del sonido en km/h resulta:

$$v_{sonido} = 340\frac{m}{s} = 340 \times 3{,}6\frac{km}{h}$$

$$v_{sonido} = 1224\frac{km}{h}$$

b) Por otro lado 1m = 3.281ft, entonces, la rapidez del sonido en ft/s resulta:

$$v_{sonido} = 340\frac{m}{s} = 340 \times 3.281\frac{ft}{s}$$

$$v_{sonido} = 1115{,}5\frac{ft}{s}$$

c) Además 1mi = 1,61km por lo tanto la rapidez del sonido en mi/h es:

$$v_{sonido} = 1224\frac{km}{h} = \frac{1224}{1{,}61} \times \frac{1{,}61km}{h}$$

$$v_{sonido} = 760{,}25\frac{mi}{h}$$

EJERCICIO: Se producen ondas sonoras en el aluminio y en el cobre a razón de 100 pulsos por cada segundo. Si el modulo de Young del aluminio es $7 \times 10^{10} N/m^2$ y la del cobre es $11 \times 10^{10} N/m^2$ y sus densidades respectivas son: $2{,}7 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ y $8{,}9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ Calcular la rapidez y la longitud de onda (λ) de las ondas sonoras producidas en el aluminio y en el cobre.

SOLUCIÓN: Del problema la frecuencia de las ondas es:

$$f = \frac{Nº\, pulsos}{tiempo} = \frac{100}{1s} = 100Hz$$

Para el material de aluminio la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}}{2{,}7 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{70 \times 10^6\, m^2}{2{,}7\, s^2}}$$

$$v = 5091{,}7 \frac{m}{s}$$

Por tanto, la longitud de onda de las ondas sonoras en el aluminio es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5091{,}7\, ms^{-1}}{100\, s^{-1}} = 50{,}9\, m$$

Para el material de cobre la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{11 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}}{8{,}9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}}} = \sqrt{\frac{110 \times 10^6\, m^2}{8{,}9\, s^2}}$$

$$v = 3515{,}6\, \frac{m}{s}$$

Por tanto, la longitud de onda de las ondas sonoras en el cobre es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3515{,}6\, ms^{-1}}{100\, s^{-1}} = 35{,}16\, m$$

EJERCICIO: Un dispositivo de ecografía funciona emitiendo ondas sonoras de alta frecuencia $f = 5 \times 10^6 Hz$ determine la longitud de onda de las ondas sonoras que viajan a través del cuerpo humano. Suponer que el cuerpo humano está constituido en gran parte de agua.

SOLUCIÓN: Como el cuerpo humano está constituido en gran parte de agua, podemos suponer que la velocidad de las ondas sonoras dentro del cuerpo humano es de 1480m/s. De esta manera la longitud de onda se puede calcular por la ecuación:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\frac{1480m}{s}}{5 \times 10^6 Hz} = 296 \times 10^{-6} m$$

$$\lambda \approx 0{,}3mm$$

Este valor de la longitud de onda corresponde a la resolución necesaria para sondear los órganos dentro del cuerpo humano.

EJERCICIO: Calcule la rapidez del sonido en un gas diatomico ideal que tiene una densidad de 3.50 Kg/m^3 y una presión de 215 KPa. Considere para un gas diatómico ideal $\gamma = 1.40$.

SOLUCIÓN: La velocidad de la onda en un medio gaseoso es,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Reemplazando valores,

$$v = \sqrt{\frac{(1.40)(215x10^3 Pa)}{3.50 Kg/m^3}} = 293\ m/s$$

$$\therefore v = 293\ m/s$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

EJERCICIO: Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire, en condiciones normales es de $331\, m/s$, hallar la velocidad del sonido en hidrógeno a $0\ °C$ y $1\, atm$. La densidad relativa del hidrógeno con respecto al aire es 0.069. Considere para ambos gases $\gamma = 1.40$.

SOLUCION: Se sabe que,

$$v = \sqrt{\gamma\, p/\rho}$$

Comparando la velocidad del sonido en los gases aire e hidrógeno, se tendrá,

$$\frac{v_a}{v_H} = \sqrt{\frac{\gamma\, p/\rho_a}{\gamma\, p/\rho_H}} = \sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{0.069\,\rho_a}{\rho_a}} = \sqrt{0.069}$$

$$\Rightarrow\ v_H = \frac{v_a}{\sqrt{0.069}} = \frac{331}{\sqrt{0.069}} = 1260\ m/s$$

$$\therefore\ v_H = 1260\ m/s$$

EJERCICIO: Un altavoz produce sonido con una frecuencia de 500Hz. Determine la rapidez y la longitud de onda (λ) del sonido en el aire si está a una temperatura de 27°C. Suponer que la temperatura del aire es uniforme y homogénea. La masa molar del aire es $M = 28.9\text{x}10^{-3}$Kg/mol.

SOLUCIÓN: Suponiendo que el aire (en buena aproximación) se comporta como un gas ideal y tomando el hecho de que es un gas diatomico, entonces $\gamma = 1{,}4$ y su temperatura se deberá expresar en unidades Kelvin, esto es:

$$T = 27^{\underline{o}}C = (27 + 273)K = 300K$$

Por tanto de la ecuación (2), se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \frac{J}{mol - K} \times 300K}{28,9 \times 10^{-3} \frac{kg}{mol}}} = \sqrt{12,08 \times 10^4}\ \frac{m}{s}$$

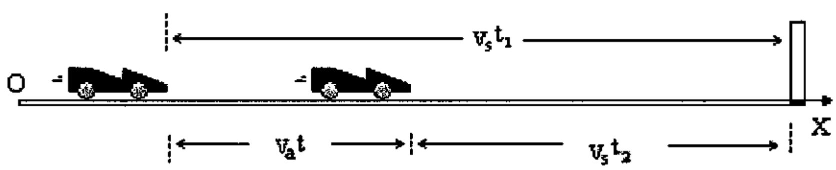
$$v = 347,6\ m/s$$

Por lo tanto la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{347,6\ ms^{-1}}{500\ s^{-1}} = 0,7m = 70cm$$

EJERCICIO: Un auto viaja directamente hacia una pared a 72km/h, el chofer activa la bocina y percibe el eco de la pared 4s después. ¿A qué distancia de la pared se encuentra el auto cuando el chofer percibe el eco? Recuerde para el sonido v = 340m/s.

SOLUCIÓN: La velocidad del auto es de 72km/h, lo que equivale a 20m/s y el esquema que se ilustra en la figura muestra el recorrido de ida ($v_s t_1$) y el recorrido de vuelta ($v_s t_2$) del sonido, el recorrido ($v_a t$) del auto.



El tiempo t = 4s es la suma de los tiempos $t = t_1 + t_2$ y es el tiempo que tarda el sonido en llegar a la pared y de rebote volver al auto. La distancia total recorrida por el sonido desde el auto a la pared y desde la pared al auto es:

$$v_s t = v_s t_1 + v_s t_2 = v_a t + v_s t_2 + v_s t_2$$

$$(v_s - v_a)t = 2 v_s t_2$$

La distancia de la pared al auto cuando el chofer percibe el eco es:

$$v_s t_2 = \frac{(v_s - v_a)t}{2} = \frac{\left(340\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s}\right) 4s}{2}$$

$$v_s t_2 = 640\, m$$

EJERCICIO: Ocurre una explosión a una distancia de 6 Km de una persona. ¿Cuánto tiempo transcurre después de la explosión antes de que la persona la pueda escuchar? Suponga que la temperatura es de 14 °C.

SOLUCIÓN: Como la rapidez del sonido se incrementa en 0.61 m/s por cada 1 °C, se tiene,

$$v = 331\ m/s + (0.61)(14)\, m/s = 340\ m/s$$

El tiempo transcurrido será,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{6000\, m}{340\, m/s} = 17.6\, s$$

$$\therefore t = 17.6\, s$$

EJERCICIO: Un diapasón vibra en el aire a $284\, s^{-1}$. Calcule la longitud de onda del tono emitido a 25 °C.

SOLUCION: La rapidez del sonido aumenta 0.61 m/s por cada incremento de 1 °C, a 25 °C,

$$v = 331\ m/s + (0.61)(25)\, m/s = 346\ m/s$$

La longitud de onda será,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346\, m/s}{284\, s^{-1}} = 1.22\, m$$

$$\therefore \lambda = 1.22\, m$$

7.2 ENERGIA EN LA ONDA SONORA

El sonido de naturaleza ondulatoria, como cualquier onda transporta energía a través del medio material en que se propaga. Si la onda sonora (periódica) es una onda de desplazamiento que se propaga a través de un medio uniforme y homogéneo la función de onda que la describe es:

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_o \, sen(kx - \omega t) \qquad \ldots (7,3)$$

Donde:

ε_o : es la amplitud de la onda, su unidad es el metro (1m);

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: es el vector de onda ó número de onda, su unidad es 1rad/m;

λ : es la longitud de onda, su unidad es el metro (1m);

$\omega = 2\pi f$: es la frecuencia angular de la onda, su unidad es 1rad/s.

La energía que se transmite en cada onda sonora que se propaga a través de un medio uniforme y homogéneo, está descrita por la ecuación:

$$E = \frac{1}{2} \rho \, \omega^2 (\varepsilon_o)^2 \, \lambda \, A \qquad \ldots (7,4)$$

Donde:

A : es el área sobre la cual se dispersa la onda, se expresa en m^2;

ρ : es la densidad del medio material, se expresa en kg/m^3

La razón entre la energía y el periodo T de la onda, es la potencia media de la onda. Por lo tanto podemos escribir:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (\varepsilon_o)^2 \, v \, A \qquad \ldots (7,5)$$

Donde $v = \lambda / T$ es la rapidez de la onda y la potencia P que transmite la onda se expresa en 1Watt (abreviado 1W).

7.3 INTENSIDAD DE LA ONDA

La intensidad de la onda se define como la potencia dividida entre el área sobre la cual se dispersa la onda, se denota por la letra I y se define como:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2(\varepsilon_o)^2\,v \qquad \dots (7,6)$$

Donde:

P : es la potencia, se expresa en Watt (abreviado 1W);

A : es el área, se expresa en m^2.

I : es la intensidad de la onda en W/m^2.

La intensidad sonora más pequeña que puede percibir el oído humano es $I_o = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ se denomina umbral de audición y, la intensidad sonora que produce dolor en el oído humano es $I_{dolor} = 1\frac{W}{m^2}$ se denomina umbral del dolor.

EJERCICIO: La intensidad es de $10^{-9}W/m^2$ para el sonido que produce la conversación de dos personas. Si la frecuencia de las ondas es de 200Hz determine la amplitud de las ondas sonoras. Recuerde para el sonido v = 340m/s.

SOLUCIÓN: La densidad del aire es $\rho = 1{,}23\,kg/m^3$ a presión atmosférica y temperatura normal. Por tanto de la ecuación (7,6) podemos escribir la amplitud de las ondas sonoras como:

$$\varepsilon_o = \sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 v}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}}{1{,}23\frac{kg}{m^3}\times(2\pi\times 200s^{-1})^2\times 340\frac{m}{s}}}$$

$$\varepsilon_o = \sqrt{3{,}028\times 10^{-14}m^2}$$

$$\varepsilon_o = 1{,}74\times 10^{-9}m$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

El valor de esta distancia corresponde al orden de las vibraciones moleculares

EJERCICIO: Un parlante que trabaja con una potencia de salida de $\pi^2 \times 10^{-9}$W emite ondas sonoras de 1000Hz de frecuencia. Si la amplitud de las ondas es 40×10^{-9}m determine el área del parlante que produce el sonido.

SOLUCIÓN: Si la frecuencia es de 1000Hz, entonces $\omega = 2000\pi s^{-1}$ y como la rapidez del sonido es de 340m/s y la densidad del aire es de 1,23kg/m^3, entonces por la formula (5), se tiene:

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2(\varepsilon_o)^2\, v\, A \;\rightarrow\; A = \frac{2P}{\rho\,\omega^2\,(\varepsilon_o)^2\, v}$$

Evaluando los datos en la formula:

$$A = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9}W}{1{,}23\frac{kg}{m^3}\,(2\pi \times 10^3\,\frac{1}{s})^2\,(40 \times 10^{-9}m)^2\;340\frac{m}{s}}$$

Resolviendo y despejando el valor de A, se tiene:

$$A = 0{,}0075m^2 = 75cm^2$$

EJERCICIO: Calcule la frecuencia fundamental de un tubo de órgano abierto de 2 m de longitud. Cuando el tubo está lleno de aire y cuando el tubo está lleno de hidrógeno a 27 °C.

SOLUCION: Para el tubo lleno de aire la velocidad de las ondas es $v = 331\ m/s$.

Luego, su frecuencia fundamental será,

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{331\ m/s}{2(2\ m)} = 82.75\ s^{-1}$$

$$\therefore\ f_1 = 82.75\, s^{-1}$$

Cuando el tubo está lleno de hidrógeno la velocidad de las ondas es,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(1.40)(8.31 J/mol.K)(300\ K)}{2.016x10^{-3}\, Kg/mol}}$$

$$v = 1315.8\ m/s$$

Y la frecuencia fundamental respectiva será,

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1315.8\, m/s}{2(2\, m)} = 328.95\, s^{-1}$$

$$\therefore\ f_1 = 328.95\, s^{-1}$$

EJERCICIO 16. Un sonido fuerte y desagradable puede tener una intensidad de $0.54\ W/m^2$. Calcule el máximo desplazamiento de las moléculas del aire en una onda sonora si su frecuencia es de $800\, s^{-1}$. Considere que la densidad del aire es de $1.29\, Kg/m^3$ y que la rapidez del sonido es de $340\ m/s$.

SOLUCION:

Para una onda sonora con amplitud a_0 y frecuencia f, que viaja con rapidez v en un medio material de densidad ρ, la intensidad I, es

$$I = 2\pi^2 f^2 \rho v a_0^2$$

Entonces el desplazamiento máximo de los átomos o moléculas del medio será,

$$a_0 = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}}$$

Reemplazando valores,

$$a_0 = \frac{1}{\pi(800\, s^{-1})}\sqrt{\frac{0.54\ W/m^2}{2(1.29\ Kg/m^3)(340\ m/s)}}$$

$$\therefore\ a_0 = 9.9\ \mu m$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO CDCITRA VRI

7.4 VARIACION DE LA INTENSIDAD

Si el sonido es creado por una fuente puntual y la onda viaja a través del aire, entonces el área sobre la cual se dispersa la onda corresponde a la superficie de una esfera imaginaria cuyo radio es la distancia desde la fuente al punto donde se evalúa la potencia de la onda, distancia que denotaremos por la letra "x", de esta forma el área correspondiente es $A = \pi x^2$. Por lo tanto la intensidad de la onda sonora resulta:

$$I = \frac{P}{\pi x^2} \qquad \dots (7{,}7)$$

Esta ecuación (7) está de acuerdo con el hecho de que la intensidad del sonido disminuye con el inverso cuadrado de la distancia. Es decir a mayor distancia de la fuente, el sonido es más débil o menos intenso. La conservación de la energía establece que la potencia es constante en los diferentes puntos del espacio sobre los que se dispersa la onda. Así se tiene la ecuación:

$$P = 4\pi(x_1)^2 I_1 = 4\pi(x_2)^2 I_2 \qquad \dots (7{,}8)$$

7.5 EL NIVEL DE INTENSIDAD

Otra forma de expresar cuan fuerte o cuan débil es la onda sonora, es a través del concepto de nivel de intensidad. Esta se denota con la letra griega β y define por medio de la ecuación:

$$\beta = 10db \log\left(\frac{I_x}{I_o}\right) \qquad \dots (7{,}9)$$

Donde la función log se sobreentiende que es en la base 10. La cantidad I_x es la intensidad a la distancia x de la fuente sonora, la cantidad I_o es la intensidad umbral de audición y la unidad del nivel de intensidad es el decibel (1db). Si se conoce el nivel de intensidad β a la distancia x de la fuente sonora, se puede determinar la intensidad en dicho punto por medio de la función inversa de la ecuación (9), esto es:

$$I_x = I_o \times (10)^{\frac{\beta}{10db}} \qquad \dots (7,10)$$

EJERCICIO: El nivel de intensidad que produce dolor en el oído humano es de 120db y recibe el nombre de umbral del dolor. Determine: a) la intensidad del dolor, b) halle la potencia y la amplitud de las ondas sonoras suponiendo que la frecuencia es de 1000Hz y el nivel se mide a 1m de la fuente sonora.

SOLUCION: La intensidad del sonido que corresponde al dolor se puede calcular por medio de la ecuación (10), esto es:

$$I_x = 10^{-12}\frac{W}{m^2} \times 10^{\frac{120}{10}} = 10^{-12}\frac{W}{m^2} \times 10^{12} = 1\frac{W}{m^2}$$

Como el sonido se dispersa sobre una esfera imaginaria cuyo radio debe ser de 1m, distancia de la fuente al punto donde se mide el nivel, la potencia con la que se crea el sonido es:

$$P = 4\pi x^2 \times I_x = 4\pi(1m)^2 \times 1\frac{W}{m^2} = 4\pi W$$

Dado que el sonido viaja en el aire ($\rho = 1{,}23kg/m^3$) su rapidez es de 340m/s, entonces la amplitud de las ondas sonoras se puede determinar usando la ecuación (6). Esto es:

$$1\frac{W}{m^2} = \frac{1}{2} \times 1{,}23\frac{kg}{m^3} \times (2\pi \times 1000s^{-1})^2 \times (\varepsilon_o)^2 \times 340\frac{m}{s}$$

Despejando el valor de ε_o de la ecuación se tiene:

$$\varepsilon_o = 77{,}8 \times 10^{-6}m$$

EJERCICIO: Determine la intensidad y el nivel de intensidad a cinco metros de una fuente sonora que opera con una potencia de $\pi \times 10^{-6}W$.

SOLUCION: La intensidad del sonido a 5m de la fuente sonora es:

$$I_x = \frac{P}{A} = \frac{\pi \times 10^{-6}W}{4\pi(5m)^2} = 10^{-8}\frac{W}{m^2}$$

El nivel de intensidad se determina por la ecuación:

$$\beta = 10db \times log\left(\frac{10^{-8}\frac{W}{m^2}}{10^{-12}\frac{W}{m^2}}\right) = 10db \times log(10^4)$$

$$\beta = 40db$$

EJERCICIO: Un medidor de nivel de ruido da una lectura de 85 db en el nivel de sonido en una habitación. ¿Cuál es la intensidad del sonido en la habitación?

SOLUCION: El nivel de intensidad en decibeles, se define como,

$$\beta = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\beta = 10log\left(\frac{I}{1.0x10^{-12}\,W/m^2}\right) = 85\,db$$

$$\frac{I}{1.0x10^{-12}\,W/m^2} = antilog8.5 = 3.16x10^8$$

$$I = (1.0x10^{-12}\,W/m^2)(3.16x10^8)$$

$$I = 3.16x10^{-4}\,W/m^2$$

EJERCICIO: Las intensidades de dos ondas sonoras son 10 y 500 $\mu W/cm^2$. ¿Cuál es la diferencia en sus niveles de intensidad?

SOLUCION: Del problema se tiene

$$I_A = 10\ \mu W/cm^2 \qquad\qquad I_B = 500\ \mu W/cm^2,$$

Entonces

$$\beta_A = 10\log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10\ (logI_A - logI_0)$$

$$\beta_B = 10log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10(logI_B - logI_0)$$

Al restar se obtiene,

$$\beta_B - \beta_A = 10(logI_B - logI_A) = 10log\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$

$$= 10log\left(\frac{500}{10}\right) = 10log50 = (10)(1.70) = 17\ db$$

$$\therefore\ \beta_B - \beta_A = 17\ db$$

EJERCICIO: Un automóvil que se mueve a 30 m/s se acerca a la sirena de una fabrica que tiene una frecuencia de $500\,s^{-1}$. (a) Si la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es la frecuencia aparente de la sirena que escucha el conductor? (b) Repita para el caso de un automóvil que se aleja de la fábrica con la misma rapidez.

SOLUCIÓN: (a) Se sabe que,

$$f_0 = f_s\frac{v + v_0}{v - v_s}$$

Reemplazando valores,

$$f_0 = 500\ s^{-1}\frac{340m/s+30\ m/s}{340\ m/s-0} = 544\ s^{-1}$$

$$\therefore\ f_0 = 544\ s^{-1}$$

(b) Para el siguiente caso:

$$f_0 = f_s \frac{v - v_0}{v - v_s}$$

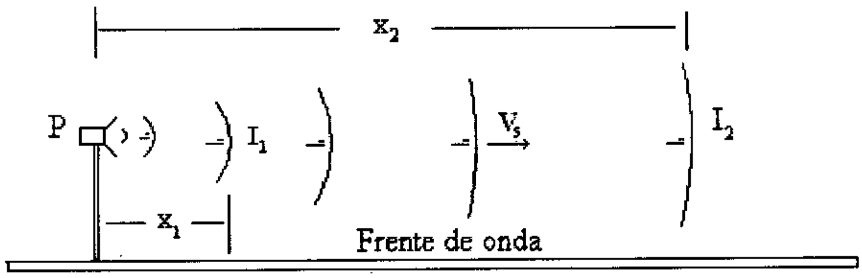
Reemplazando valores,

$$f_0 = 500\, s^{-1} \frac{340\ m/s - 30\ m/s}{340\ m/s - 0} = 456\, s^{-1}$$

$$\therefore\ f_0 = 456\, s^{-1}$$

EJERCICIO: El nivel de intensidad a 5m de una fuente sonora es de 80db, ¿Cuál es el nivel de intensidad a 50m de la misma fuente sonora?

SOLUCIÓN: El esquema ilustra la fuente puntual, el frente de las ondas que viajan en el aire, la intensidad I_1 a 5m y la intensidad I_2 a 50m de la fuente.



Conocido los 80db a 5m de la fuente podemos calcular la intensidad sonora I_1 a esta distancia usando la ecuación:

$$I_1 = 10^{-12} \frac{W}{m^2} 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12}\, 10^{8} \frac{W}{m^2}$$

$$I_1 = 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

La aplicación de la conservación de la energía nos permite calcular la intensidad I_2 de la onda sonora a 50m de la misma fuente de sonido. Esto es:

$$4\pi(x_2)^2 I_2 = 4\pi(x_1)^2 I_1 \rightarrow I_2 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 I_1$$

Evaluando en esta ultima ecuación, se tiene:

$$I_2 = \left(\frac{5m}{50m}\right)^2 10^{-4}\frac{W}{m^2} = 10^{-6}\frac{W}{m^2}$$

Por lo tanto el nivel de intensidad a 50m de la misma fuente sonora es:

$$\beta = 10db\ log\left(\frac{I_2}{I_o}\right) = 10db\ log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta = 10db\ log(10^6) = 60db$$

EJERCICIO 20. Un automóvil que se mueve a $20\ m/s$ haciendo sonar el claxon ($f = 1200\ s^{-1}$) persigue a otro automóvil que se mueve a $15\ m/s$ en la misma dirección. ¿Cuál es la frecuencia aparente del claxon que escucha el conductor perseguido? Considere la rapidez del sonido como $340\ m/s$.

SOLUCION: Del la teoría se sabe que,

$$f_0 = f_s \frac{v - v_0}{v - v_s}$$

Reemplazando valores,

$$f_0 = 1200\ s^{-1} \frac{340\ m/s - 15\ m/s}{340\ m/s - 20\ m/s} = 1218.75\ s^{-1}$$

$$\therefore\ f_0 = 1218.75\ s^{-1}$$

EJERCICIOS DE SONIDO

1. El helio es un gas monoatómico que tiene una densidad de $0.179\ Kg/m^3$ a una presión de $76.0\ cm$ de mercurio y una temperatura de 0 °C. Calcule la rapidez de las ondas de compresión (sonido) en helio a esta temperatura y presión.

2. Una barra cuyas dimensiones son $1.00\ cm^2 x 200\ cm$ y masa de $2.00\ Kg$ está prensada en su centro. Cuando vibra longitudinalmente emite su tono fundamental en unísono con un diapasón que oscila a $1000\ s^{-1}$. ¿Cuánto se alargará la barra si, estando sujeta de un extremo, se aplica en el otro extremo una fuerza de $980\ N$?

3.- Encuentre la rapidez de una onda de compresión que se propaga en una barra metálica cuyo material tiene un módulo de Young de $1.20x10^{10}\ N/m^2$ y una densidad de $8920\ Kg/m^3$.

4. Un sonido tiene un nivel de intensidad de $75\ db$, mientras que un segundo tiene un nivel de $72\ db$. ¿Cuál es el nivel de intensidad cuando los dos sonidos se combinan?

5. Una fuente sonora tiene una frecuencia de $1000\ s^{-1}$ y se mueve a la velocidad de $30\ m/s$ con respecto al aire. Si la velocidad del sonido respecto al aire en reposo es de $343\ m/s$, hallar la longitud de onda efectiva percibida por un observador en reposo respecto al aire y que ve a la fuente alejándose de él.

6.- Las ondas transversales en una cuerda tienen 3cm de amplitud y una frecuencia de 60Hz. Si la masa por unidad de longitud de la cuerda es $\mu = 0,2g/cm$ y la distancia horizontal entre una cresta y un valle es de 5cm, determine: la longitud de onda y la rapidez de las ondas. ¿Qué potencia y energía tiene la onda transversal en la cuerda?

7.- La frecuencia de las ondas en una cuerda tensionada a 24 N es de 54Hz. Si la masa por unidad de longitud de la cuerda es $\mu = 0{,}2g/cm$ y su amplitud es de 10cm ¿Cuál es la energía de la onda viajera en la cuerda?

8.- La frecuencia más baja que percibe el oído humano es de 20Hz y la más alta es de 20kHz a una intensidad de $10^{-11}\frac{W}{m^2}$ y $1\frac{W}{m^2}$ respectivamente. Halle la amplitud de las ondas sonoras para estas ondas. Considere que la rapidez del sonido es de 340m/s.

9.- Un maquinista de tren toca la bocina con una intensidad de $10^{-2}W/m^2$ cuando el tren viaja a 6m/s y nota que el eco llega al maquinista 2,4s después de tocar la bocina. Halle el nivel de intensidad de la onda que sale de la bocina y el nivel de intensidad del eco que llega al maquinista si la pared que produce el eco es paralela al tren.

10.- Un maquinista de tren toca la bocina con una intensidad de $10^{-1}W/m^2$ cuando el tren viaja a 5m/s y nota que el eco llega al maquinista 2s después de tocar la bocina. Halle el nivel de intensidad de la onda que sale de la bocina y el nivel de intensidad del eco que llega al maquinista si la pared que produce el eco esta delante del tren.

11.- El sonido más bajo que el oído humano puede oír a una frecuencia de 500Hz tiene una amplitud de presión de $3 \times 10^{-5}\ Pa$, halle la intensidad en W/m^2 y la energía en J de las ondas de sonido que percibe el oído humano.

12.- En relación con la intensidad de referencia $I_o = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$, ¿Qué nivel de intensidad de sonido en dB tiene una onda sonora cuya intensidad sea de $25 \times 10^{-5}\frac{W}{m^2}$?

13.- La boca de un bebe esta a 30cm del oído de su padre y a 3m del oído de su madre. ¿Qué diferencia hay entre el nivel de intensidad del sonido que percibe el padre y el que percibe la madre?

14.- Una ventana de 2m x 1.5m de dimensión esta abierta a la calle donde todos los ruidos juntos producen un nivel de intensidad de 60dB. ¿Cuánta es la potencia acústica que entra por la ventana?

REFERENCIAS

1. ALONSO M., FINN E., "FÍSICA, Mecánica", Volumen I, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1986.

2. ALONSO M., FINN E., "FÍSICA, Mecánica", Volumen II, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1986.

3. BLATT F. J., "FÍSICA", Volumen I, Editorial Prentice Hall Inc. , USA 1991.

4. BRONSHTEIN I, SEMENDIAEV K., "MANUAL DE MATEMATICAS para ingenieros y estudiantes", Cuarta edición, Editorial MIR, Moscú, URSS 1982.

5. EISBERG M., LERNER L., "FÍSICA", Volumen I, Editorial Mc Graw Hill Interamericana de Mexico S. A. de C. V., Mexico 1984.

6. FEYNMAN R., "FÍSICA, Mecánica, Radiación y Calor", Volumen I, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1987.

7. HALLIDAY R., RESNICK R., "FÍSICA I", Editorial Copyright de Mexico, Mexico 1984.

8. HIGDON A., STILES W., "ENGINEERING MECHANICS, Statics", Volumen I, Third Edition, Editorial Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA 1968.

9. HIGDON A., STILES W., "ENGINEERING MECHANICS, Dynamics", Volumen II, Third Edition, Editorial Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA 1968.

10. HEWITT P. G., "FÍSICA CONCEPTUAL", segunda edición, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1995.

11. LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M., "FISCA TEORICA: MECÁNICA" Volumen 1, 2da. Edición, Editorial Reverté S. A., España, 1994.

12. Mc KELVEY J. P., GROTCH H., "FISICA Para Ciencias e Ingeniería", Volumen I, Editorial Harla de México, México 1981.

13. SEARS F., ZEMANSKY M., YOUNG H., FREEDMAN R., "FISICA Universitaria", Novena edición, Volumen I, Editorial Pearson Educación, México 1999.

14. SERWAY R A., JEWETT J. Jr. "Física Para Ciencia e Ingeniería", Volumen I, Sexta edición, Editorial Thomson, México 2005.

15. SERWAY R., FAUGHN J., "FISICA", Volumen I, Quinta edición, Editorial Prentice Hall de México, México 2001.

16. SERWAY R., FAUGHN J., "Física I", Volumen I, Tercera edición, Editorial Thomson, México 2004.

17. SHORTLEY B., DUDLEY W., "FÍSICA, Mecánica", Volumen I, Editorial Urmo S. A., Bilbao, España 1976.

18. STRELKOV S., "MECÁNICA", Editorial MIR, Moscú, URSS 1978.

19. TOMAS G. Jr., "CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY", Second Printing, Editorial Addison Wesley Publishing Company, INC. USA 1960.

APENDICE A

Tabla de Conversion de Unidades

LONGITUD
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in.
1 cm = 0.3937 in.
1 in. = 2.540 cm
1 ft = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz = 9.461 × 10^{15} m

ÁREA
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft^2 = 144 in^2 = 0.0929 m^2

VOLUMEN
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

TIEMPO
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86 400 s
1 año = 365.24 d = 3.156 × 10^7 s

ÁNGULO
1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución= 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

VELOCIDAD
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 estadio[1]/quincena = 1.662 × 10^{-4} m/s

[1] *N. del E.*: Estadio: medida de 201 metros.

ACELERACIÓN
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1.467 ft/s^2

MASA
1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85 × 10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661 × 10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando g = 9.80 m/s^2

FUERZA
1 N = 10^5 din = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448 × 10^5 din

PRESIÓN
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.451 × 10^{-4} lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/in^2 = 6891 Pa
1 lb/ft^2 = 47.85 Pa
1 atm = 1.013 × 10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 lb/in^2 = 2117 lb/ft^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

ENERGÍA
1 J = 10^7 ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (basado en caloría a 15°)
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 ft · lb
1 eV = 1.602 × 10^{-19} J
1 kWh = 3.600 × 10^6 J

EQUIVALENCIA MASA-ENERGÍA
1 kg ↔ 8.988 × 10^{16} J
1 u ↔ 931.5 MeV
1 eV ↔ 1.074 × 10^{-9} u

POTENCIA
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

APENDICE B

El Alfabeto Griego:

Alfa	α	Nu	ν
Beta	β	Xi	ξ
Gamma	γ	Ómicron	o
Delta	δ	Pi	π
Epsilon	ε	Ro	ρ
Zeta	ζ	Sigma	σ
Eta	η	Tau	τ
Teta	θ	Ypsilon	υ
Iota	ι	Fi	φ
Kappa	κ	Ji	χ
Lamda	λ	Psi	ψ
Mu	μ	Omega	ω