UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

INFORME FINAL DEL TEXTO

TÓPICOS INICIALES DE MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Con problemas con enfoque vectorial. Volumen 1

AUTOR: Rogelio Efren Cerna Reyes

Periodo de Ejecución: Del 01 de julio del 2016 al 30 de junio del 2018

Resolución de Aprobación N.° 595-2016-R

CALLAO, 2018

I. INDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO I

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO II

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO III

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO IV

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO V

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO VI

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO VII

ÍNDICE DE FIGURAS CAPITULO VIII

II. PROLOGO

Comprender los tópicos iniciales de matemática al inicio de una carrera de ingeniería para algunos estudiantes representa una encrucijada en cimentar su futura profesión, por la diferencia notoria en cómo están preparados, la forma inconexa entre el razonar, aplicar definiciones y propiedades con la fundamentación, justificación y explicación de los desarrollos al resolver diversas aplicaciones matemáticas. Esto, entiendo, se debe al frenesí por aprender y acertar al marcar la burbuja para ingresar a las Universidades, descuidando la comprensión, justificación y explicación de los definiciones, conceptos y propiedades de los tópicos iniciales de matemática. El texto: Tópicos Iniciales de Matemática para Estudiantes de Ingeniería con problemas con enfoque vectorial. Volumen 1, es un esfuerzo para que los estudiantes comprendan, justifiquen y expliquen los desarrollos de los diversos problemas que se les presenten, en temas como, vectores en R^2 y R^3, la recta en R^2 y R^3, transformaciones de coordenadas y transformaciones de ejes coordenados en R^2, El plano en R^3 y la diversas posiciones que se presenten entre vectores, rectas, entre una recta y un plano y entre planos bajo el enfoque vectorial que es muy apreciado en los estudiantes que inician sus estudios en las carreras de Ingeniera.

El presente texto, con especial dedicación para los estudiantes que inician sus estudios en Ingeniería Mecánica e Ingeniería en Energía de la Universidad Nacional del Callao. Así como también para todos aquellos lectores interesados en conocer los tópicos iniciales de matemática en Ingeniería.

El Autor

III. INTRODUCCION

Tópicos Iniciales de Matemática para Estudiantes de Ingeniería con problemas con enfoque vectorial. Volumen 1, es un texto, que está a disposición de los estudiantes de ingeniería y de aquellos lectores inquietos por conocer los pasos iniciales, en matemática, de los estudiantes en las carreras de ingeniería.

El enfoque vectorial de las definiciones, propiedades y de los ejercicios desarrollados hace que los lectores comprendan y se familiaricen rápidamente con los temas de, espacios vectoriales reales R^n, operaciones algebraicas con vectores, representación e interpretación grafica de vectores, independencia lineal de vectores, vectores base estándar o canónicos, aspectos importantes de los vectores como norma de un vector, paralelismo, ortogonalidad, ángulo entre vectores, vector unitario, proyección ortogonal y componente de un vector sobre otro vector constituyen los cimientos para: Primero, el estudio la recta en R^2 y R^3, posiciones relativas de dos rectas, transformaciones de traslación y rotación de coordenadas, traslación y rotación de ejes coordenados en R^2. Segundo, el estudio de los vectores en R^3, paralelismo, ortogonalidad, producto escalar, producto vectorial (propio de R^3) y producto mixto. Tercero, el estudio de la recta en R^3, posiciones relativas de dos rectas; rectas que se intersecan, que se cruzan, ángulo entre dos rectas, distancia entre rectas que se cruzan, distancia de un punto a una recta. Cuarto, el estudio del plano en R^3, posiciones relativas de dos planos, distancia de un punto a un plano, posiciones relativas entre una recta y un plano, intersección entre una recta y un plano, distancia entre planos paralelos y proyección ortogonal de una recta sobre un plano.

Por cada tópico presentado se tienen ejercicios desarrollados en detalle y ejercicios propuestos que serán abordados por el estudiante o lector para afianzar la comprensión de los tópicos respectivos.

IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO

CAPITULO I. INTRODUCCIÓN AL ESPACIO VECTORIAL REAL R^n

1.1 PRODUCTO CARTESIANO

Recordemos:

El producto cartesiano

$R^2 \approx R \times R = \{(x_1, x_2)/ x_1 \in R, x_2 \in R\}$ Conjunto de pares ordenados de números reales.

El producto cartesiano

$R^3 \approx R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$ Conjunto de ternas ordenadas de números reales.

En general, el conjunto de n-uplas ordenadas de números reales $n \geq 1$, se representa por R^n; es decir

$R^n \approx R \times R \times ... \times R = \{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in R, i = 1,2, ..., n\}$. Donde se cumple:

1.1.1 IGUALDAD DE N-UPLAS

Sean $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dos n-uplas en R^n, se define:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1,2, ..., n$$

A los elementos de R^n se les denomina puntos y se les denota de la forma $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. En donde se define:

1.1.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN R^n

Sean los puntos $P_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $P_2(y_1, y_2, ..., y_n)$ de R^n. Se define la distancia de P_1 a P_2 , denotado $d(P_1, P_2)$, como el número dado por:

$$\boldsymbol{d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}}$$

Los elementos o puntos de R^n serán llamados vectores y se denotan de la forma

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$$

El número a_i, en la entrada i, se denomina la i-ésima componente del vector $\bar{a}$.

1.2 OPERACIONES EN R^n

En R^n se definen las operaciones:

1.2.1 ADICIÓN DE VECTORES

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos vectores en R^n. Se define la adición de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, denotado por el vector $\bar{a} + \bar{b}$, como la adición de las componentes respectivas

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

1.2.2 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sea $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un vector en R^n y un escalar $r \in R$. Se define la multiplicación del vector $\bar{a}$ por el escalar real r, denotada por el vector $r\bar{a}$, como la multiplicación de r con las componentes del vector $\bar{a}$

$$r\bar{a} = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$$

1.3 PRESENTACIÓN AXIOMÁTICA DEL ESPACIO VECTORIAL R^n

Al conjunto R^n provisto, de las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por escalares, se le denomina **ESPACIO VECTORIAL REAL**[1] $\boldsymbol{R^n}$ y sus elementos o puntos reciben el nombre de **VECTORES** si y solo si satisfacen los siguientes axiomas[2]:

1.3.1 AXIOMAS PARA LA ADICIÓN

A1. Para todo $\bar{a}, \bar{b}$ de R^n se cumple $\bar{a} + \bar{b} \in R^n$ (Clausura o cerradura)

A2. Para todo $\bar{a}, \bar{b}$ de R^n se cumple $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (Conmutatividad)

A3. Para todo $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de R^n se cumple $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (Asociatividad)

A4. Para todo $\bar{a}$ de R^n $\exists!$ vector $\bar{o} = (0,0, \ldots ,0)$ de R^n, llamado el origen o vector cero o nulo, tal que $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$ (Existencia y unicidad del elemento o vector nulo aditivo)

A5. Para todo $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de R^n $\exists!$ vector $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ de R^n, llamado el opuesto o inverso aditivo de $\bar{a}$, tal que $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$ (Existencia y unicidad del elemento o vector inverso aditivo)

---

[1] También se dice: Espacio vectorial sobre el cuerpo o campo real. Ver anexo A. Axiomas del conjunto de números reales.

[2] Adaptado de: Algebra Lineal Con Aplicaciones y Matlab (KOLMAN, 1999). Pág. 197

1.3.2 AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

M1. Para todo $\bar{a}$ de R^n y todo escalar r de R se cumple $r\bar{a} \in R^n$ (Clausura o cerradura)

M2. Para todo $\bar{a}, \bar{b}$ de R^n y todo escalar r de R se cumple $r(\bar{a}+\bar{b}) = r\bar{a} + r\bar{b}$

M3. Para todo $\bar{a}$ de R^n y todo escalar r, s de R se cumple $(r+s)\bar{a} = r\bar{a} + s\bar{a}$

M4. Para todo $\bar{a}$ de R^n y todo escalar r, s de R se cumple $r(s\bar{a}) = (rs)\bar{a}$

M5. Para todo $\bar{a}$ de R^n se cumple $1\bar{a} = \bar{a}$, 1 es el número real uno.

En adelante nos referiremos al espacio vectorial real $\boldsymbol{R^n}$ como el espacio vectorial $\boldsymbol{R^n}$

1.4 DIFERENCIA DE VECTORES

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vectores en R^n. Se define

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$$

Lo que equivale a restar las componentes respectivas

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

Ejercicio 1. Para todo vector $\bar{a}$ de $\boldsymbol{R^n}$ demostrar que:

$$0\bar{a} = \bar{o}$$

Solucion 1.

Se desea demostrar que $0\bar{a} = \bar{o}$, para todo vector $\bar{a}$ de $\boldsymbol{R^n}$

De $0\bar{a} = 0\bar{a} + \bar{o}$, pues $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$

$= 0\bar{a} + (\bar{a} + (-\bar{a}))$, pues $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$

$= (0\bar{a} + 1\bar{a}) + (-\bar{a})$, pues $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$, $1\bar{a} = \bar{a}$

$= (0+1)\bar{a} + (-\bar{a})$, pues $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$

$= 1\bar{a} + (-\bar{a})$, pues $\alpha + 0 = \alpha$

$= \bar{a} + (-\bar{a})$, pues $1\bar{a} = \bar{a}$

$= \bar{o}$, pues $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$

Por lo tanto: $0\bar{a} = \bar{o}$, para todo vector $\bar{a}$ de $\boldsymbol{R^n}$

Ejercicio 2. Demostrar que:

1. $\alpha\bar{o} = \bar{o}$, para todo escalar real α
2. $\alpha\bar{a} = \bar{o} \Rightarrow \alpha = 0 \lor \bar{a} = \bar{0}$
3. $\bar{a} + \bar{a} = 2\bar{a}$, para todo vector $\bar{a}$ de $\boldsymbol{R^n}$
4. $\bar{a} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \implies \bar{c} = \bar{b}$
5. $\alpha\bar{a} = \beta\bar{a}\, , \bar{a} \neq \bar{o} \implies \alpha = \beta$
6. $\bar{a} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} \implies \bar{c} = \bar{b}$

Solucion 2.

Para ser demostrados por el estudiante.

1.5 REPRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN GRAFICA DE LAS OPERACIONES DE VECTORES EN R^2 Y R^3

1.5.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR.

Todo vector $\bar{a}$ en R^2 o $\bar{a}$ en R^3 puede ser representado gráficamente en el plano o en el espacio, como:

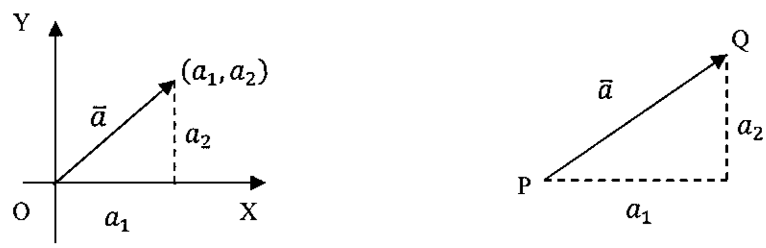
1. Un punto
2. Un radio vector o vector de posición de un punto. Es decir, con una flecha con origen en el origen de coordenadas y su extremo en un punto del plano o el espacio con coordenadas las componentes del punto.
3. Una flecha o segmento dirigido. El origen es un punto P cualquiera y el extremo será un punto Q cualquiera, de modo que $\bar{a} = \overline{PQ} = Q - P$

FIGURA 1.1 UN VECTOR $\bar{a}$ EN R^2 O EN R^3 REPRESENTADO COMO UN PUNTO

Un vector $\bar{a}$ en R^2 corresponde a un punto en R^2

Un vector $\bar{a}$ en R^3 corresponde a un punto en R^3

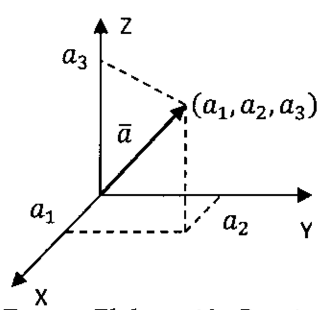
FIGURA 1.2 UN VECTOR $\bar{a}$ EN R^2 REPRESENTADO COMO UN VECTOR DE POSICIÓN Y UN VECTOR ARBITRARIO $\bar{a}$ REPRESENTADO COMO UNA FLECHA



Radio vector $\bar{\boldsymbol{a}}$ o vector de posición del punto $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$

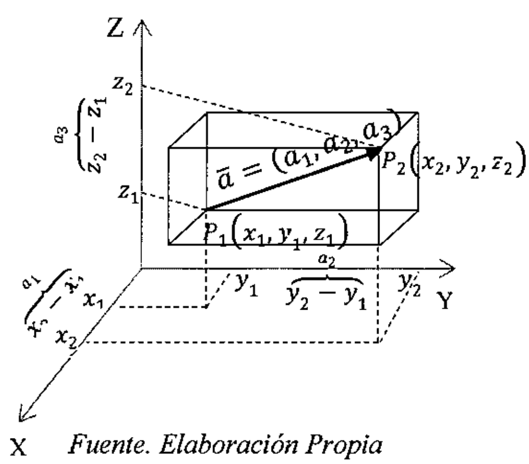
Vector $\bar{\boldsymbol{a}}$ con punto de inicio P y punto final Q

Fuente. Elaboración propia



Fuente. Elaboración Propia

FIGURA 1.3 RADIO VECTOR EN R^3 O VECTOR DE POSICIÓN DEL PUNTO $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$



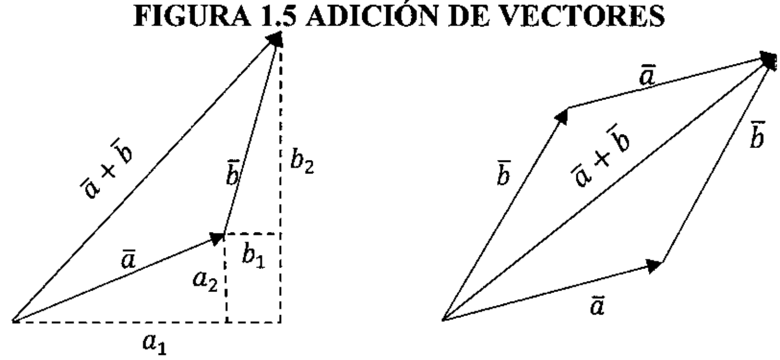
Fuente. Elaboración Propia

FIGURA 1.4 VECTOR $\bar{a}$ EN R^3.

$$\bar{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})$$

1.5.2 INTERPRETACIÓN GRAFICA DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR.

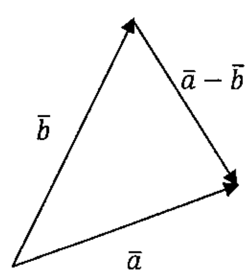
FIGURA 1.5 ADICIÓN DE VECTORES



La suma de vectores $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$ es igual a la suma de las componentes de los vectores. $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

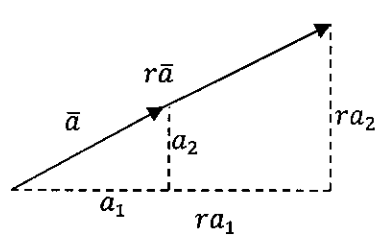
Fuente. Elaboración propia

La suma de vectores puede ser representado por la flecha que esta sobre la diagonal del paralelogramo determinado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.



Fuente. Elaboración propia

FIGURA 1.6 DIFERENCIA DE VECTORES



Fuente. Elaboración propia

FIGURA 1.7 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR $\bar{a}$ POR UN ESCALAR r POSITIVO MAYOR QUE 1

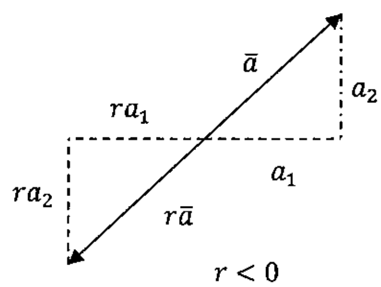


FIGURA 1.8 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR $\bar{a}$ POR UN ESCALAR rNEGATIVO

Fuente. Elaboración propia

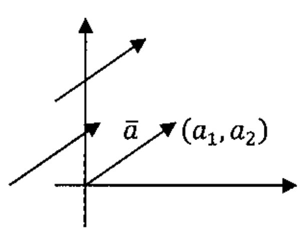
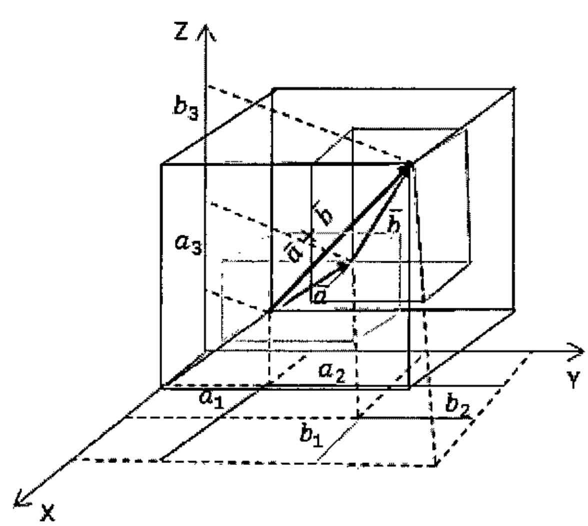


FIGURA 1.9 CADA FLECHA ES UNA TRASLACIÓN PARALELA DEL VECTOR DE POSICIÓN DEL PUNTO(a_1, a_2)

Fuente. Elaboración propia

FIGURA 1.10 ADICIÓN DE LOS VECTORES $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ Y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ EN R^3



Fuente. Elaboración propia

CAPITULO II. INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES EN R^n

La independencia lineal se refiere a vectores linealmente dependientes o a vectores linealmente independientes.

2.1 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES[3]

Sean $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vectores del espacio vectorial $\boldsymbol{R}^n$ y ciertos escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Un vector $\bar{a}$ en $\boldsymbol{R}^n$ escrito de la forma:

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n$$

Es una **combinación lineal** de los vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ con coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

2.1.1 COMBINACIÓN LINEAL NULA DE VECTORES

La expresión

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{o}$$

Es llamada **combinación lineal nula** de los vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$

2.2 VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES

Los vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ son linealmente dependientes (LD) si existe al menos un escalar no nulo talque

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{o}$$

2.3 VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Los vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ son linealmente independientes (LI) si la combinación lineal nula

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{o}$$

Implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$

2.4 INDEPENDENCIA LINEAL DE UN CONJUNTO DE VECTORES

Si los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente dependientes (LD) o linealmente independientes (LI) y los reunimos en el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces se

3 Adaptado de: Algebra Lineal Con Aplicaciones y Matlab (KOLMAN, 1999). Pág. 207

dice que el conjunto S es linealmente dependiente (LD) o linealmente independiente (LI).

2.5 RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

El rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores. El rango de S es el número de vectores de la combinación lineal nula que presentan coeficientes nulos (KOLMAN, 1999).

Ejercicio 3. Sean A, B y C los vértices de un triángulo, etiquetados en sentido anti horario, M_1 y M_2 son puntos medios de los lados representados por los vectores $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, P_1 y P_2 son puntos de trisección del lado representado por el vector $\overline{AB}$. Exprese el vector $\overline{PC}$ como combinación lineal de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, cuando

a) P es el primer punto que divide al segmento $\overline{P_1Q}$ en cuatro partes iguales.

b) P es el primer punto que divide al segmento $\overline{P_2R}$ en cinco partes iguales

Solucion 3.

a) Se desea expresar el vector $\overline{PC} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$ donde α y β son los coeficientes que se deben determinar.

En la figura:

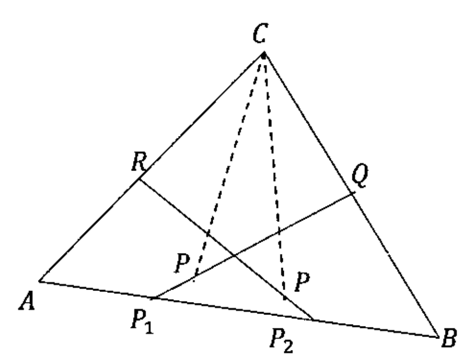
$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$\overline{AP_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

$$\overline{P_2B} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$



Para el punto P tal que $\overline{P_1P} = \frac{1}{4}\overline{P_1Q}$ se observa que:

$$\overline{PC} = \overline{PP_1} + \overline{P_1A} + \overline{AC}$$

Además: $\overline{P_1Q} = \overline{BQ} - \overline{BP_1}$, $\overline{BP_1} = \frac{2}{3}\overline{BA}$

Entonces

$$\overline{P_1P} = \frac{1}{4}\left(\overline{BQ} - \frac{2}{3}\overline{BA}\right)$$

$$\overline{P_1P} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{2}{3}\overline{BA}\right)$$

$$\overline{P_1P} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) + \frac{2}{3}\overline{AB}\right)$$

$$\overline{P_1P} = \frac{1}{8}\overline{AC} - \frac{1}{8}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB}$$

$$\overline{P_1P} = \frac{1}{8}\overline{AC} + \frac{13}{24}\overline{AB}$$

Remplazando en

$$\overline{PC} = \overline{PP_1} + \overline{P_1A} + \overline{AC}$$

Se tiene

$$\overline{PC} = -\frac{1}{8}\overline{AC} - \frac{13}{24}\overline{AB} + \overline{P_1A} + \overline{AC}$$

$$\overline{PC} = -\frac{1}{8}\overline{AC} - \frac{13}{24}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC}$$

Finalmente,

$$\overline{PC} = -\frac{7}{8}\overline{AB} + \frac{7}{8}\overline{AC}$$

b) Para el punto P tal que $\overline{P_2P} = \frac{1}{5}\overline{P_2R}$ se observa que:

$$\overline{PC} = \overline{PP_2} + \overline{P_2B} + \overline{BC}$$

Además: $\overline{P_2R} = \overline{AR} - \overline{AP_2}$, $\overline{AP_2} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Entonces

$$\overline{P_2P} = \frac{1}{5}\left(\overline{AR} - \frac{2}{3}\overline{BA}\right)$$

$$\overline{P_2P} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{2}{3}\overline{BA}\right)$$

$$\overline{P_2P} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{AB}\right)$$

$$\overline{P_2P} = \frac{1}{10}\overline{AC} + \frac{2}{15}\overline{AB}$$

Remplazando en

$$\overline{PC} = \overline{PP_2} + \overline{P_2B} + \overline{BC}$$

Se tiene

$$\overline{PC} = -\frac{1}{10}\overline{AC} - \frac{2}{15}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\overline{PC} = \frac{9}{10}\overline{AC} - \frac{12}{15}\overline{AB}$$

Finalmente,

$$\overline{PC} = -\frac{12}{15}\overline{AB} + \frac{9}{10}\overline{AC}$$

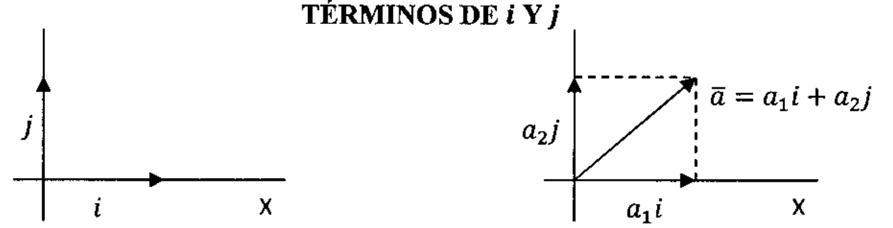
2.6 VECTORES BASE ESTÁNDAR[4] EN R^2, R^3 Y R^n

En R^2, los vectores $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ juegan un rol especial. Cualquier vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$ puede ser escrito en términos de i y j vía adición de vectores y multiplicación escalar:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1 i + a_2 j$$

Se puede escribir (a_1, a_2) o $a_1 i + a_2 j$ para denotar el vector $\bar{a}$. Geométricamente, los **vectores base estándar i y j,** significan que cualquier vector $\bar{a}$ de R^2 puede ser descompuesto apropiadamente en términos de sus componentes vectoriales sobre el eje X y eje Y, como se muestra en la figura.

FIGURA 2.1 CUALQUIER VECTOR $\bar{a}$ EN R^2 PUEDE ESCRIBIRSE EN TÉRMINOS DE i Y j



Fuente. Elaboración propia

En R^3, los vectores $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $k = (0,0,1)$ juegan un rol especial. Cualquier vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en R^3 puede ser escrito en términos de i, j y k vía adición de vectores y multiplicación escalar:

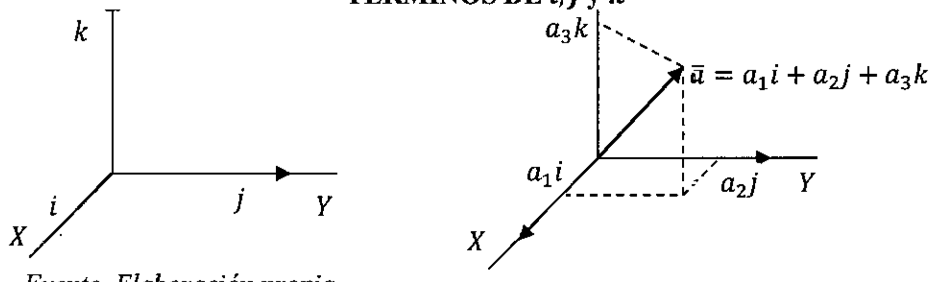
$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0,0) + (0, a_2, 0) + (0,0, a_3)$$

4 Traducido y adaptado de: Vector Calculus (COLLEY, 1998), pág. 10

$$= a_1(0,1,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$
$$= a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

Se puede escribir (a_1, a_2, a_3) o $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ para denotar el vector $\bar{a}$.

FIGURA 2.2 CUALQUIER VECTOR $\bar{a}$ EN R^3 PUEDE ESCRIBIRSE EN TÉRMINOS DE i, j y k



Fuente. Elaboración propia

En R^n, los vectores $e_1 = (1,0,0, \dots, 0)$, $e_2 = (0,1,0, \dots, 0)$. ..., $e_n = (1,0,0, \dots, 1)$, llamados vectores base estándar o canónicos, juegan un rol especial. Cualquier vector $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ puede ser escrito en términos de $e_1, e_2, \dots, e_n$ vía adición de vectores y multiplicación escalar:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \cdots + (0,0, \dots, a_n)$$
$$= a_1(1,0, \dots, 0) + a_2(0,1, \dots, 0) + \cdots + a_n(0,0, \dots, 1)$$
$$= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

Se puede escribir $(a_1, a_2, \dots a_n)$ o $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n \epsilon_n$ para denotar el vector $\bar{a}$.

CAPITULO III. OPERACIONES Y ASPECTOS IMPORTANTES DE VECTORES EN R^n

3.1 PRODUCTO ESCALAR[5] O PRODUCTO INTERNO O PRODUCTO PUNTO DE VECTORES

Definición. Dados los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en R^n. El producto escalar de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, denotado $\bar{a} \cdot \bar{b}$, es el número real dado por:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

NOTA

Utilizando notación de sumas, el producto escalar de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

PROPIEDADES.

Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en R^n y para todo escalar real r se cumple:

1. $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0, \bar{a} \neq \bar{o}\, ; \bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \iff \bar{a} = \bar{o}$
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
3. $(r\bar{a}) \cdot \bar{b} = r(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot (r\bar{b})$
4. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

3.2 NORMA DE UN VECTOR Y ANGULO ENTRE DOS VECTORES EN R^n

3.2.1 NORMA DE UN VECTOR

Definición. La norma (longitud o magnitud) de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en R^n, denotada $\|\bar{a}\|$ es el número real dado por:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

5 Traducido y adaptado de: Vector Calculus (COLLEY, 1998), pág. 21

O equivalentemente, $\|\bar{a}\|^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$

PROPIEDADES.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en R^n y para todo escalar real r, se cumple:

1. $\|\bar{a}\| > 0$, $\bar{a} \neq \bar{o}$; $\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{o}$
2. $\|r\bar{a}\| = |r|\|\bar{a}\|$
3. $\|\bar{a} + \bar{b}\| \leq \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ desigualdad triangular
4. $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|$ desigualdad de Cauchy Schwarz

La desigualdad triangular nos dice que: la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo debe ser igual o mayor que la longitud del tercer lado.

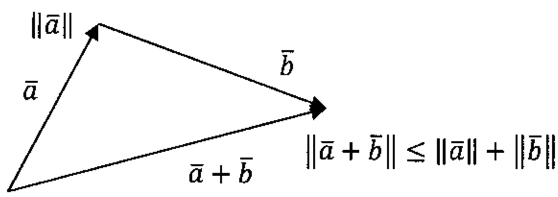


FIGURA 3. 1 DESIGUALDAD TRIANGULAR

Fuente. Elaboración propia

3.2.2 ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos en R^n. De la desigualdad de Cauchy Schwarz $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|$ se tiene

$$\frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|} \leq 1$$

$$\left|\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}\right| \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|} \leq 1$$

Por lo tanto, existe un único ángulo $\theta \in [0, \pi]$ talque $cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$. El ángulo θ está formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Si $\bar{a}$ o $\bar{b}$ es el vector cero, entonces θ es indeterminado (puede ser cualquier ángulo)

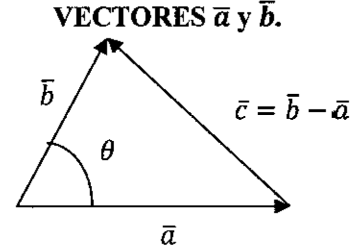
Teorema. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores cualesquiera en R^n, entonces

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta$$

Demostración.

Si $\bar{a}$ o $\bar{b}$ es el vector cero, entonces la formula se verifica de inmediato. En este caso el ángulo θ es indeterminado.

FIGURA 3.1. ANGULO FORMADO ENTRE LOS VECTORES $\bar{a}$ y $\bar{b}$.



Fuente. Elaboración propia

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores ambos no nulos. En la figura $\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$, entonces podemos aplicar la ley de los cósenos al triángulo de lados $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ para obtener

$$\|\bar{c}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - 2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta$$

De donde resulta

$$2\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|cos\theta = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \|\bar{c}\|^2$$

Donde el vector $\bar{c}$, usando las propiedades de producto escalar, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\bar{c}\|^2 &= \bar{c}\cdot\bar{c} = (\bar{b}-\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a}) \\ &= (\bar{b}-\bar{a})\cdot\bar{b} - (\bar{b}-\bar{a})\cdot\bar{a} \\ &= \bar{b}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{a} \\ &= \|\bar{b}\|^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \|\bar{a}\|^2\end{aligned}$$

Luego

$$2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \left(\|\bar{b}\|^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \|\bar{a}\|^2\right)$$

$$2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta = 2\bar{a}\cdot\bar{b}$$

Por lo que

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta$$

Finalmente, para encontrar el ángulo formado entre los vectores no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en R^n se usa

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{cos}^{-1}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}}{\|\bar{\boldsymbol{a}}\|\|\bar{\boldsymbol{b}}\|}\right)$$

3.2.3 VECTOR BISECTRIZ DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos en R^n. El vector bisectriz del ángulo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ (medido, en sentido anti horario, desde el vector $\bar{a}$ hasta el vector $\bar{b}$) es el vector $\|\bar{b}\|\bar{a} + \|\bar{a}\|\bar{b}$

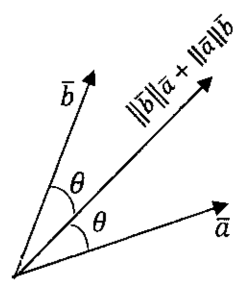


FIGURA 3.2 VECTOR BISECTRIZ DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES

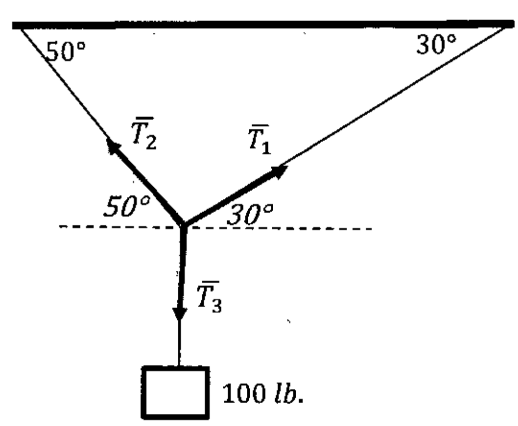
Fuente. Elaboración propia

Ejercicio 1. Demostrar que el vector bisectriz del ángulo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no nulos (medido, en sentido anti horario, desde el vector $\bar{a}$ hasta el vector $\bar{b}$) es el vector $\|\bar{b}\|\bar{a} + \|\bar{a}\|\bar{b}$

Solucion 1. Sera demostrado por los lectores

Ejercicio 2. Dos cuerdas sujetas en diferentes puntos forman con el cielo raso ángulos de 50° y 30° respectivamente, están unidas a una tercera cuerda la cual sostiene un peso de 100 lb. Halle los vectores que representan a las tensiones en las tres cuerdas.

Solucion 2. Graficamos el sistema de las tres cuerdas del ejercicio y etiquetamos los vectores que representan a las tensiones en las tres cuerdas.



En la gráfica se observa que:

$$\bar{T}_1 = (\|\bar{T}_1\|cos30, \|\bar{T}_1\|sen30)$$

$$\bar{T}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\|\bar{T}_1\|, \frac{1}{2}\|\bar{T}_1\|\right)$$

$$\bar{T}_2 = (-\|\bar{T}_2\|cos50, \|\bar{T}_2\|sen50)$$

$$\bar{T}_2 = (-0.64\|\bar{T}_2\|, 0.76\|\bar{T}_2\|)$$

$$\overline{T_3} = (0, -100)$$

Luego, el sistema está en equilibrio si

$$\overline{T_1} + \overline{T_2} + \overline{T_3} = \bar{0}$$

Remplazando los vectores se tiene

$$(\|\overline{T_1}\|cos30, \|\overline{T_1}\|sen30) + (-\|\overline{T_2}\|cos50, \|\overline{T_2}\|sen50) + (0, -100) = (0,0)$$

$$(0.86\|\overline{T_1}\|, 0.5\|\overline{T_1}\|) + (-0.64\|\overline{T_2}\|, 0.76\|\overline{T_2}\|) + (0, -100) = (0,0)$$

De donde se obtiene

$$\begin{cases} 0.86\|\overline{T_1}\| - 0.64\|\overline{T_2}\| = 0 \\ 0.5\|\overline{T_1}\| + 0.76\|\overline{T_2}\| - 100 = 0 \end{cases}$$

Despejando

$$\|\overline{T_1}\| = \frac{0.64}{0.86}\|\overline{T_2}\|$$

Remplazando en la otra ecuación tenemos

$$0.5\left(\frac{0.64}{0.86}\|\overline{T_2}\|\right) + 0.76\|\overline{T_2}\| = 100 \rightsquigarrow \|\overline{T_2}\| = \frac{100}{1.13} = 88.5$$

Luego

$$\|\overline{T_1}\| = \left(\frac{0.64}{0.86}\right)88.5 = 65.86$$

Los vectores que representan a las tensiones son:

$$\overline{T_1} = (0.86(65.86), 0.5(65.86)) \rightsquigarrow \overline{T_1} = (56.64, 32.93)$$

$$\overline{T_2} = (-0.64\|\overline{T_2}\|, 0.76\|\overline{T_2}\|) = \big(-0.64(88.5), 0.76(88.5)\big) = (-56.64, 67.26)$$

$\overline{T_2} = (-56.64, 67.26)$ y $\overline{T_3} = (0, -100)$

3.3 PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD DE VECTORES EN R^n

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en R^n

3.3.1 PARALELISMO DE VECTORES

Definición. Dos vectores son paralelos si uno de ellos es múltiplo real del otro.

Es decir, los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en R^n son paralelos, denotado $\bar{a} \;//\; \bar{b}$, si existe un escalar real r talque $\bar{a} = r\bar{b} \;\vee\; \bar{b} = r\bar{a}$

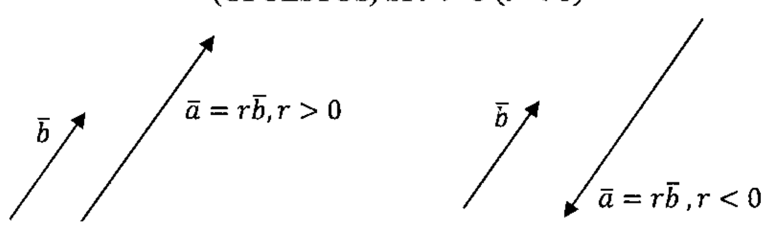
FIGURA 3.3 LOS VECTORES $\bar{a}$ y $\bar{b}$ SON PARALELOS

Observamos que el vector cero es paralelo a todos los vectores, pues $\bar{o} = 0\bar{a}$ para todo vector $\bar{a}$ en R^n.

Definición. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos en R^n, si $\bar{a}$ es paralelo a $\bar{b}$ decimos que:

1. Tienen sentidos iguales si $\bar{a} = r\bar{b}$ donde $r > 0$ y
2. Tienen sentidos opuestos si $\bar{a} = r\bar{b}$ donde $r < 0$

FIGURA 3.2. LOS VECTORES $\bar{a}$ Y $\bar{b}$ TIENEN SENTIDOS IGUALES (OPUESTOS) SI $r > 0$ ($r < 0$)



3.3.2 ORTOGONALIDAD DE VECTORES EN R^n

Definición. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos en R^n. Decimos que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son mutuamente ortogonales, denotado $\bar{a} \perp \bar{b}$, si el ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$.

De acuerdo con el teorema anterior, se dice que; los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales si su producto escalar es cero. Es decir,

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

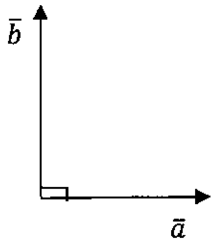


FIGURA 3.4 LOS VECTORES $\bar{a}$ Y $\bar{b}$ SON MUTUAMENTE ORTOGONALES

Observamos que el vector cero es ortogonal a todos los vectores, pues $\bar{o} \cdot \bar{a} = 0$ para todo vector $\bar{a}$ en R^n.

3.4 VECTOR UNITARIO

Definición. Un vector de norma igual a la unidad se llama vector unitario.

3.4.1 VERSOR DE UN VECTOR

El versor de un vector es un vector unitario con la misma dirección y sentido del vector.

NOTAS.

1. Si $\bar{a}$ es un vector no nulo en R^n, entonces su versor es el vector $\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$
2. Al proceso de obtener un versor asociado a un vector se lo llama normalización del vector, razón por la cual es común referirse a un vector unitario como vector normalizado.

3.4.2 VECTOR BISECTRIZ DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no nulos en R^n. El vector bisectriz del ángulo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ (medido, en sentido anti horario, desde el vector $\bar{a}$ hasta el vector $\bar{b}$) es la adición de los versores $\bar{u}_{\bar{a}}$ y $\bar{u}_{\bar{b}}$ de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ respectivamente.

Es decir, el vector bisectriz está dado por el vector, ver FIGURA 3.5

$$\bar{u}_{\bar{a}} + \bar{u}_{\bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} + \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \frac{\|\bar{b}\|\bar{a} + \|\bar{a}\|\bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$$

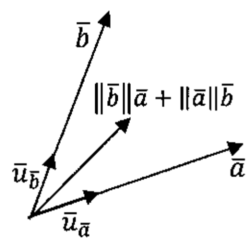


FIGURA 3.5 VECTOR BISECTRIZ DEL ÁNGULO FORMADO POR LOS VECTORES $\bar{a}$ Y $\bar{b}$

Ejercicio 3. Demostrar que el vector bisectriz del ángulo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no nulos (medido, en sentido anti horario, desde el vector $\bar{a}$ hasta el vector $\bar{b}$) es el vector adición de los versores $\bar{u}_{\bar{a}}$ y $\bar{u}_{\bar{b}}$ de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ respectivamente.

Solucion 3. Sera demostrado por el lector.

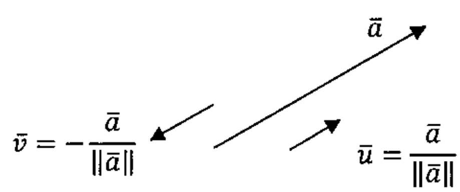
Ejercicio 4. Verificar si el versor $\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ de un vector es unitario.

Solucion 4. Se debe verificar que la norma de $\bar{u}$ es 1

Veamos;

$\|\bar{u}\| = \left\|\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}\right\| = \left|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\right| \|\bar{a}\| = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\|\bar{a}\| = 1$, Pues $\frac{1}{\|\bar{a}\|}$ es un escalar positivo.

Esta operación es denominada la normalización del vector $\bar{a}$.



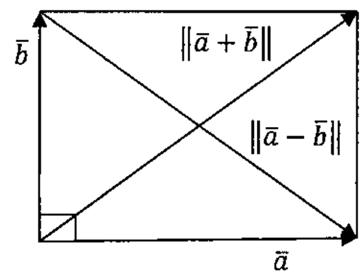
Y el vector unitario $\bar{v}$ con dirección opuesta al vector $\bar{a} \neq \bar{o}$ tiene la forma:

$$\bar{v} = -\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$$

Ejercicio 5. Demostrar que; si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los lados de un paralelogramo, $\bar{a} + \bar{b}$ y $\bar{a} - \bar{b}$ sus diagonales, entonces los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales si y sólo si $\|\bar{a} + \bar{b}\| = \|\bar{a} - \bar{b}\|$

Solucion 5. Demostración

Si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los lados de un paralelogramo, $\bar{a}+\bar{b}$ y $\bar{a}-\bar{b}$ sus diagonales



Se desea demostrar que: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ si y sólo si $\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\|$

Veamos,

$$\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\| \Leftrightarrow \|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}-\bar{b}\|^2$$
$$\Leftrightarrow (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$$
$$\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{a}+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{a}.\bar{a}-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b}$$
$$\Leftrightarrow 4\bar{a}\cdot\bar{b}=0$$
$$\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

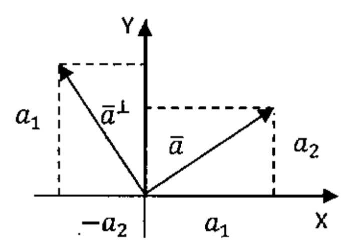
Por lo tanto:

$$\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\| \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

Ejercicio 6. Dado el vector $\bar{a}=(a_1,a_2)$ en R^2 se construye el vector $\bar{a}^{\perp} = (-a_2,a_1)$ en R^2 talque $\bar{a}\cdot\bar{a}^{\perp}=0$; se lee: $\bar{a}^{\perp}$ es el vector $\bar{a}$ ortogonal.

Solucion 6.

Dado el vector $\bar{a}=(a_1,a_2)$ en R^2 se construye el vector $\bar{a}^{\perp}=(-a_2,a_1)$ en R^2 talque $\bar{a}\cdot\bar{a}^{\perp}=0$



Veamos

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{a}^{\perp} &= (a_1,a_2)\cdot(-a_2,a_1)\\ &= a_1(-a_2)+a_2a_1\\ &= -a_1a_2+a_1a_2=0\end{aligned}$$

Finalmente

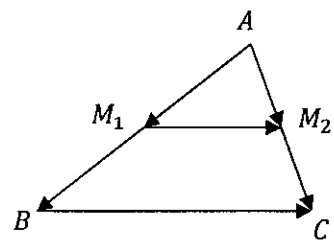
$$\bar{a}\cdot\bar{a}^{\perp}=0$$

Ejercicio 7. En un triángulo arbitrario, mostrar que el vector determinado por los puntos medios de dos lados es paralelo y tiene la mitad de la longitud del vector que representa al tercer lado.

Solucion 7. En otras palabras, si M_1 es el punto medio del lado $\overline{AB}$ y M_2 es el punto medio del lado $\overline{AC}$, se desea demostrar que $\overline{M_1M_2}$ es paralelo al lado $\overline{BC}$ y tiene la mitad de su longitud.

De la figura se tiene:

$\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AM_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$



Ahora

$$\overline{M_1M_2} = \overline{AM_2} - \overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

De donde;

$$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

Lo cual justifica que $\overline{M_1M_2}$ es paralelo a $\overline{BC}$

$$\|\overline{M_1M_2}\| = \left\|\frac{1}{2}\overline{BC}\right\| = \frac{1}{2}\|\overline{BC}\|$$

Lo cual justifica que la longitud de $\overline{M_1M_2}$ es la mitad de la longitud de $\overline{BC}$.

Ejercicio 8. Demostrar que; si la suma y la diferencia de las magnitudes de dos vectores son iguales, entonces dichos vectores son ortogonales.

Solucion 8.

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores en R^n, se desea demostrar que:

Si $\|\bar{a}\| + \|\bar{b}\| = \|\bar{a}\| - \|\bar{b}\|$ entonces $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Veamos, elevando al cuadrado ambos miembros de:

$$\|\bar{a}\| + \|\bar{b}\| = \|\bar{a}\| - \|\bar{b}\|$$

$$\|\bar{a}\|^2 + 2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\| + \|\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 - 2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\| + \|\bar{b}\|^2$$

Simplificando se tiene

$$\|\bar{a}\|\|\bar{b}\| = 0$$

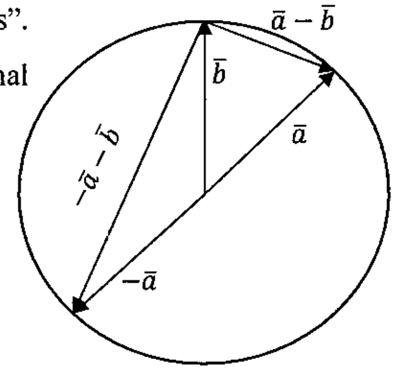
Por la desigualdad de Cauchy Schwarz $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|$ se obtiene

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

Por lo tanto $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales.

Ejercicio 9. Demostrar que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

Solucion 9.



En la figura, los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son "radios vectores".

Se desea demostrar que el vector $\bar{a}-\bar{b}$ es ortogonal al vector $-\bar{a}-\bar{b}$.

En otras palabras, se desea demostrar que

$$(\bar{a}-\bar{b})\cdot(-\bar{a}-\bar{b})=0$$

Veamos;

$$\begin{aligned}(\bar{a}-\bar{b})\cdot(-\bar{a}-\bar{b}) &= (-1)(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})\\ &= (-1)[(\bar{a}-\bar{b})\cdot\bar{a}+(\bar{a}-\bar{b})\cdot\bar{b}]\\ &= (-1)[\bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{b}]\\ &= (-1)[\|\bar{a}\|^2-\|b\|^2]\end{aligned}$$

$=0\,,\ \|a\|=\|b\|$

Por lo tanto

$$(\bar{a}-\bar{b})\cdot(-\bar{a}-\bar{b})=0$$

Pues $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son radios vectores que tienen la misma norma o longitud, llamado radios del círculo.

Por lo tanto, el ángulo formado por los vectores $\bar{a}-\bar{b}$ y $-\bar{a}-\bar{b}$ es un ángulo recto.

Ejercicio 10. Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en R^n talque $\|\bar{a}\|=2$, $\|\bar{b}\|=4$, $\|\bar{c}\|=2\sqrt{3}$ y $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Hallar $\frac{1}{\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}}$

Solucion 10.

Calculamos la norma en ambos miembros de $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{o}$ y elevando al cuadrado:

$$\|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\|^2=\|\bar{o}\|^2$$

De donde se tiene,

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=0$$

Por las propiedades del producto escalar

$$\bar{a}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})+\bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})+\bar{c}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{c}\cdot\bar{b}+\bar{c}\cdot\bar{c}=0$$

$$2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c})+\|\bar{a}\|^2+\|\bar{b}\|^2+\|\bar{c}\|^2=0$$

Reemplazando los datos dados

$$2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c})-4+16+12=0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}=\frac{1}{2}(-32)=-16$$

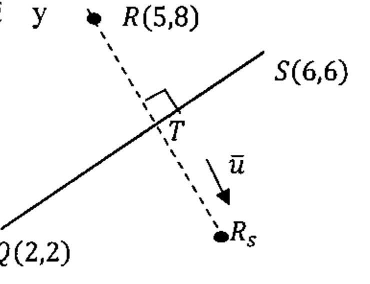
Finalmente,

$$\frac{1}{\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}}=-\frac{1}{16}$$

Ejercicio 11. Halle el punto simétrico de $R(5,8)$ respecto del segmento que une los puntos $Q(2,2)$ y $S(6,6)$

Solucion 11.

En la figura $\overline{QR}=\overline{QT}+\overline{TR}$, $\overline{QT}\perp\overline{TR}$, $\overline{RT}\,//\,\bar{u}$ y $\|\overline{RT}\|=\|\overline{TR'}\|$



$R_s=R+2\|\overline{TR}\|\bar{u}$, $\bar{u}=-\left(\frac{\overline{QS}}{\|\overline{QS}\|}\right)^{\perp}$,

$\overline{QT}=(4,4)\,//\,(1,1)$, $\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$\overline{QR}=(3,6)$, $\overline{QT}=r(4,4)$, $\overline{TR}=k\overline{QS}^{\perp}$

$\overline{TR}=k\overline{QS}^{\perp}=k(-4,4)$

Luego

$$(3,6)=r(4,4)+k(-4,4)$$

Multiplicando escalarmente por el vector $(4,4)$

$$(3,6)\cdot(4,4)=r(4,4)\cdot(4,4)+k(-4,4)\cdot(4,4)$$

$$36=32r\ \rightarrow\ r=\frac{9}{8}$$

Entonces

$$\overline{QT}=\frac{9}{8}(4,4)=\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$\overline{TR}=\overline{QR}-\overline{QT}=(3,6)-\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$\overline{TR}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\ \rightarrow\ \|\overline{TR}\|=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Finalmente

$$R_s = (5{,}8) + 2\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \;\rightarrow\; R_s(8{,}5)$$

Ejercicio 12. En la figura, expresar el vector $\overline{MN}$ como una combinación lineal (suma en términos) de los vectores $\overline{MB}$ y $\overline{OQ}$ si los triángulos son rectángulos.

Solucion 12.

Se desea expresar

$\overline{MN} = r\overline{MB} + s\overline{OQ}$ (*)

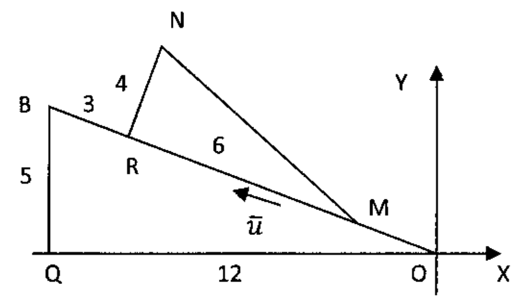
De la figura,

$\overline{OQ} = 12(-1{,}0) = (-12{,}0)$

Del triángulo rectángulo OQB y por Pitágoras

$(3 + 6 + \|\overline{OM}\|)^2 = 5^2 + 12^2$

$\|\overline{OM}\| = 4$



Del triángulo rectángulo MRN se tiene

$$\|\overline{MN}\| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

Sea el vector unitario $\bar{u}$ paralelo a los vectores $\overline{MB}$ y $\overline{OB} = (-12{,}5)$ de donde;

$$\bar{u} = \frac{\overline{OB}}{\|\overline{OB}\|} = \frac{1}{13}(-12{,}5)$$

Además;

$$\overline{MB} = \|\overline{MB}\|\bar{u} = 9\left(\frac{1}{13}(-12{,}5)\right)$$

$$\overline{RN} = \|\overline{RN}\|(-\bar{u}^{\perp}) = 4\left(\frac{1}{13}(5{,}12)\right)$$

$$\overline{MN} = \overline{MR} + \overline{RN} = 6\left(\frac{1}{13}(-12{,}5)\right) + 4\left(\frac{1}{13}(5{,}12)\right) = (-4{,}6)$$

Ahora la ecuación (1) resulta,

$(-4{,}6) = r\frac{9}{13}(-12{,}5) + s(-12{,}0)$ (**)

Aplicando el producto escalar en ambos miembros de la ecuación (**) por el vector $(0{,}12)$ resulta,

$$(-4,6)\cdot(0,12) = r\frac{9}{13}(-12,5)\cdot(0,12)$$

$$72 = \frac{540}{13}r \;\rightarrow\; r = \frac{26}{15}$$

Aplicando el producto escalar en ambos miembros de la ecuación (**) por el vector $(-5,-12)$ resulta,

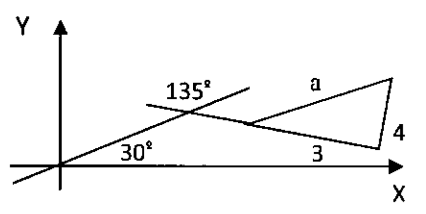
$(-4,6)\cdot(-5,-12) = s(-12,0)\cdot(-5,-12)$

$$-52 = 60s \;\rightarrow\; s = -\frac{13}{15}$$

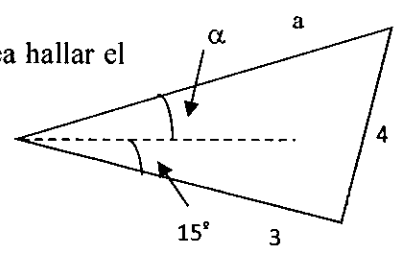
Finalmente, la ecuación (*) se escribe de la forma

$$\overline{MN} = \frac{26}{15}\overline{MB} - \frac{13}{15}\overline{OQ}$$

Ejercicio 13. En la figura si el triángulo es rectángulo, halle el vector $\bar{a}$.



Solucion 13.



En el triángulo rectángulo de la figura se desea hallar el vector:

$\bar{a} = (a_1, a_2) = (\|\bar{a}\|cos\alpha, \|\bar{a}\|sen\alpha)$,

$\|\bar{a}\| = 5$ y $\alpha + 15 = 53$ de donde;

$cos(\alpha + 15) = 3/5$, $sen(\alpha + 15) = 4/5$

Ademas;

$cos(\alpha)cos(15) - sen(\alpha)sen(15) = \frac{3}{5}$ (*)

$sen(\alpha)cos(15) + cos(\alpha)sen(15) = \frac{4}{5}$ (**)

Multiplicamos la ecuación (*) por $cos(15)$ y la ecuación (**) por $sen(15)$ se tiene;

$$cos(15)[cos(\alpha)cos(15) - sen(\alpha)sen(15)] = \frac{3}{5}cos(15)$$

$$sen(15)[sen(\alpha)cos(15) + cos(\alpha)sen(15)] = \frac{4}{5}sen(15)$$

Operando y sumando las ecuaciones anteriores resulta

$$cos(\alpha)[cos^2(15) + sen^2(15)] = \frac{3}{5}cos(15) + \frac{4}{5}sen(15)$$

$$cos(\alpha) = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

Ahora multiplicamos a la ecuación (*) por $-sen(15)$ y a la ecuación (**) por $cos(15)$

$$-sen(15)[cos(\alpha)cos(15) - sen(\alpha)sen(15)] = \frac{3}{5}(-sen(15))$$

$$cos(15)[sen(\alpha)cos(15) + cos(\alpha)sen(15)] = \frac{4}{5}cos(15)$$

Operando y sumando las ecuaciones anteriores

$$sen(\alpha)[cos^2(15) + sen^2(15)] = \frac{3}{5}(-sen(15)) + \frac{4}{5}cos(15)$$

$$sen(\alpha) = -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

Finalmente, el vector está dado por:

$$\bar{a} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}}, 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

Ejercicio 14. Sean $P\left(\frac{7}{2} + 6\sqrt{3}, 8 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$, $Q(6,14)$ y R vértices de un triángulo equilátero. Halle el vértice R y el área de dicho triángulo.

Solucion 14.

Sea desea hallar el vértice R y el área de dicho triángulo. En la figura, se desea

$$R = Q + 2a(-\bar{u})$$

$$A_{\Delta(PQR)} = \frac{1}{2}|\overline{RQ} \cdot \overline{RP}^{\perp}|$$

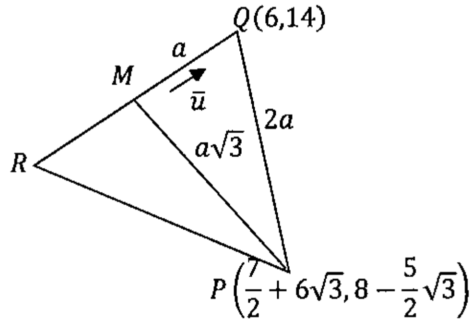
Del triángulo equilátero, se tiene:

$$\overline{PQ} = \left(\frac{5}{2} - 6\sqrt{3}, 6 + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$||\overline{PQ}|| = 13$$

Sea M punto medio de $\overline{RQ}$ y por propiedad de triángulo equilátero se tiene que:

$\|\overline{MQ}\| = a\,, \|\overline{PM}\| = a\sqrt{3}\,,\ \|\overline{PQ}\| = 2a\ \rightarrow\ a = \frac{13}{2}$



Además $\overline{PM} \perp \overline{MQ}$.

Sea el vector unitario $\bar{u} = (u_1, u_2)$ paralelo al vector $\overline{MQ}$. Entonces

$M = Q - a\bar{u} = (6,14) - \frac{13}{2}(u_1, u_2)$

$M = P + a\sqrt{3}\,\bar{u}^{\perp} = \left(\frac{7}{2} + 6\sqrt{3}, 8 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{13}{2}\sqrt{3}(-u_2, u_1)$

Igualando ambas expresiones

$$(6,14) - \frac{13}{2}(u_1, u_2) = \left(\frac{7}{2} + 6\sqrt{3}\,, 8 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{13}{2}\sqrt{3}(-u_2, u_1)$$

$$\left(6 - \frac{13}{2}u_1, 14 - \frac{13}{2}u_2\right) = \left(\frac{7}{2} + 6\sqrt{3} + \frac{13}{2}\sqrt{3}(-u_2), 8 - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{13}{2}\sqrt{3}u_1\right)$$

Igualando componentes se tiene el sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{13}{2}u_1 + \dfrac{13}{2}\sqrt{3}u_2 = \dfrac{7}{2} + 6\sqrt{3} - 6 \\ -\dfrac{13}{2}\sqrt{3}u_1 - \dfrac{13}{2}u_2 = 8 - \dfrac{5}{2}\sqrt{3} - 14 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{13} \\ u_2 = \dfrac{12}{13} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \bar{u} = \frac{1}{13}(5,12)$$

Remplazando en

$$R = Q + 2a(-\bar{u})$$

$$R = (6,14) - 2\left(\frac{13}{2}\right)\frac{1}{13}(5,12) = (1,2) \quad \rightarrow \quad R(1,2)$$

$$\overline{RQ} = (5,12)\,, \qquad \overline{RP} = \left(\frac{5}{2} + 6\sqrt{3}\,, 6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

Finalmente, el área del triángulo PQR es,

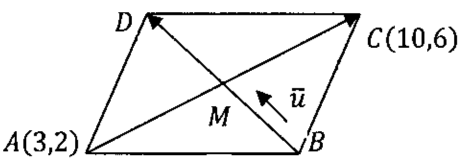
$$A_{\Delta(PQR)} = \frac{1}{2}|\overline{RQ} \cdot \overline{RP}^{\perp}|$$

$$A_{\Delta(PQR)} = \frac{1}{2}\left|(5,12) \cdot \left(-6 + \frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{2} + 6\sqrt{3}\right)\right|$$

$$A_{\Delta(PQR)} = \frac{169}{4}\sqrt{3}$$

Ejercicio 15. Sean $A(3,2)$ y $C(10,6)$ vértices opuestos de un paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $\|\overline{BD}\| = \sqrt{5}$ y $|\|\overline{BD}\| - \|(-2,4)\|| = \|\overline{BD} + (2,-4)\|$. Hallar los vértices B y D.

Solucion 15.



Remplazando $\|\overline{BD}\| = \sqrt{5}$ en

$|\|\overline{BD}\| - \|(-2,4)\|| = \|\overline{BD} + (2,-4)\|$

Se obtiene:

$$\left|\sqrt{5} - \|(-2,4)\|\right| = \|\overline{BD} + (2,-4)\|$$

$$\left|\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\right| = \|\overline{BD} + (2,-4)\|$$

$$\left|-\sqrt{5}\right| = \|\overline{BD} + (2,-4)\|$$

Elevando al cuadrado, se tiene

$$5 = \|\overline{BD}\|^2 + 2\overline{BD} \cdot (2,4) + \|(2,-4)\|^2$$

$$5 = 5 + 2\overline{BD} \cdot (2,-4) + 20$$

$$\overline{BD} \cdot (1,-2) = -5$$

Si $\overline{BD}=(x,y)$entonces:

$(x,y) \cdot (1,-2) = -5 \;\rightarrow\; x - 2y = -5 \quad (*)$

Pero de

$\|\overline{BD}\| = \sqrt{5} \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 5 \qquad (**)$

De (*) y (**) se obtiene: $x = -1\ , y = 2 \;\rightarrow\; \overline{BD} = (-1,2)$

Sea M punto medio de las diagonales, entonces $M = \left(\frac{13}{2}, 4\right)$

Como $\|\overline{BD}\| = 2\|\overline{BM}\| = \sqrt{5}$ se tiene $\|\overline{BM}\| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

De la figura: $B = M + \|\overline{BM}\|(-\bar{u}),\ \bar{u} = \frac{\overline{BD}}{\|\overline{BD}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ vector unitario

$$B=\left(\frac{13}{2},4\right)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right) \quad \rightarrow \quad B(7,3)$$

Como $M=\frac{1}{2}(B+D) \quad \rightarrow \quad D=2M-B$

Entonces $D=(13,8)-(7,3) \quad \rightarrow \quad D(6,5)$

Ejercicio 16. Sea el vector $\bar{a}=(2,1)$ tales que $\bar{a}=\bar{c}+\bar{d}$ y $\bar{c}\perp\bar{d}$. Hallar $\|\bar{c}-\bar{d}\|$

Solucion 16.

Elevando al cuadrado $\|\bar{c}-\bar{d}\|$

$$\|\bar{c}-\bar{d}\|^2=(\bar{c}-\bar{d})\cdot(\bar{c}-\bar{d})=\|\bar{c}\|^2+\|\bar{d}\|^2-2\bar{c}\cdot\bar{d}$$

Como $\bar{c}\perp\bar{d} \iff \bar{c}\cdot\bar{d}=0$

Se tiene

$\|\bar{c}-\bar{d}\|^2=\|\bar{c}\|^2+\|\bar{d}\|^2 \quad (*)$

Por otro lado, sacando norma en ambos miembros de $\bar{a}=\bar{c}+\bar{d}$ y elevando al cuadrado

$$\|\bar{a}\|^2=\|\bar{c}+\bar{d}\|^2=(\bar{c}+\bar{d})\cdot(\bar{c}+\bar{d})=\|\bar{c}\|^2+\|\bar{d}\|^2+\bar{c}\cdot\bar{d}$$

$\|\bar{a}\|^2=\|\bar{c}\|^2+\|\bar{d}\|^2 \quad (**)$

De (*) y (**) se tiene

$$\|\bar{c}-\bar{d}\|=\|\bar{a}\|$$

Como $\bar{a}=(2,1)$ se tiene $\|\bar{a}\|=\sqrt{5}$

Por lo tanto

$$\|\bar{c}-\bar{d}\|=\sqrt{5}$$

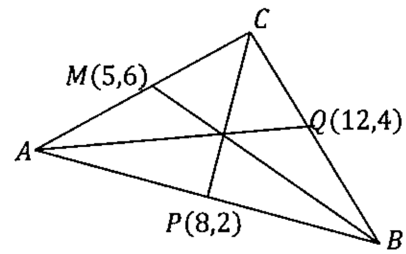
Ejercicio 17. Dado el triángulo ABC, $M(5,6)$ es punto medio de $\overline{AC}$, $P(8,2)$ es punto medio de $\overline{AB}$ y $Q(12,4)$ es punto medio de $\overline{BC}$. Expresar la mediana que parte de A, como combinación lineal de las otras dos medianas.

Solucion 17.

Se desea expresar

$$\overline{AQ}=r\overline{BM}+s\overline{CP}\,;\quad r,s\in R$$

De la figura se tiene:



$A + B = 2P$ (1)

$B + C = 2Q$ (2)

$A + C = 2M$ (3)

De (2) y (3) se tiene

$A - B = 2M - 2Q$ (4)

De (1) y (4) se tiene

$$2A = 2P + 2M - 2Q$$
$$A = P + M - Q$$
$$A = (8,2) + (5,6) - (12,4)$$
$$A(1,4)$$

También

$$B = 2P - A$$
$$B = 2(8,2) - (1,4)$$
$$B(15,0)$$

También

$$C = 2M - A$$
$$C = 2(5,6) - (1,4)$$
$$C(9,8)$$

Luego

$\overline{AQ} = (11,0)$, $\overline{BM} = (-10,6)$, $\overline{CP} = (-1,-6)$

Expresando la combinación lineal

$$(11,0) = r(-10,6) + s(-1,-6); \quad r,s \in R$$

$$\begin{cases} -10r - s = 11 \\ 6r - 6s = 0 \end{cases} \rightarrow \quad r = 1, \qquad s = -1$$

Finalmente se tiene

$$\overline{AQ} = (-1)\overline{BM} + (-1)\overline{CP}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Ejercicio 1. Determinar el vector de posición de un punto de la curva (cicloide) descrita por un punto de la circunferencia de un círculo que rueda a lo largo de una línea recta.

Ejercicio 2. Determinar el vector de posición de un punto de la curva (involuta) descrita por un punto de una cinta desenrollada de un dispensador circular, de manera que si la cinta desenrollada se mantiene tensa es tangente al rollo del dispensador.

Ejercicio 3. Determinar el vector de posición de un punto de la curva (curtate cycloid) descrita por un punto, que dista del centro de la circunferencia una distancia menor que su radio de un circulo que rueda a lo largo de una línea recta.

Ejercicio 4. Determinar el vector de posición de un punto de la curva (aprolate cycloid) descrita por un punto, que dista del centro de la circunferencia una distancia mayor que su radio de un circulo que rueda a lo largo de una línea recta.

Ejercicio 5. Demuestre que el vector $\|\bar{a}\|\bar{b} + \|\bar{b}\|\bar{a}$ es paralelo a la bisectriz del ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Hallar un vector unitario en la dirección de dicha bisectriz.

Ejercicio 6. Sean A, B y C vértices de un triángulo, el punto $M\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ es punto medio de $\overline{AC}$, el punto $N\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ es punto medio de $\overline{BC}$ y $P\left(2, \frac{3}{2}\right)$ punto medio de $\overline{AB}$. Expresar analíticamente, el lado $\overline{BC}$ como combinación lineal de los otros lados.

Ejercicio 7. Sean A, B y C vértices de un triángulo, $M(5,6)$ es punto medio de $\overline{AC}$, $P(8,2)$ es punto medio de $\overline{AB}$ y $Q(12,4)$ es punto medio de $\overline{BC}$. Expresar la mediana que parte de A, como combinación lineal de las otras dos medianas.

Ejercicio 8. Sea ABC un triángulo. Si $M(1,9)$ y $N(6,2)$ son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Hallar los vértices del triángulo.

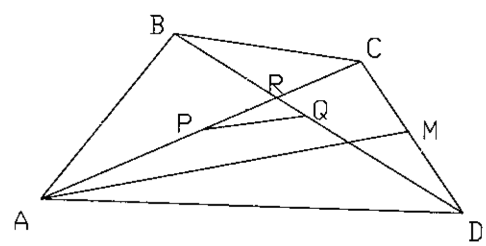
Ejercicio 9. Se tiene un trapecio escaleno ABCD cuya base mayor $\overline{AD}$ tiene el doble de longitud de la base menor $\overline{BC}$ Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las que se cortan en H y si $\overline{BH} + \overline{CH} = m(\overline{BC} + \overline{CD}) + n(\overline{CB} + \overline{BA})$Calcular $\frac{m}{n}$

Ejercicio 10. Sea ABCD un rectángulo, una de cuyas diagonales tiene por extremo a los puntos $A(3,4)$ y $C(9,16)$. Si los lados de mayor longitud son paralelos al vector $(1,1)$, determinar los vértices B y D.

Ejercicio 11. Los vectores $\overline{TP}$ y $\overline{OP}$ están en el primer cuadrante, de manera que $\overline{OT}$ forma con el eje Y un ángulo de 45° y $\overline{OP}$ forma con el eje X un ángulo de 30°. Si $\overline{TP} \,//\, \overline{OX}$, $\|\overline{OP}\| = 8$ y $\overline{OT} = m\overline{OP} + n\overline{OP}^{\perp}$ calcular m y n.

Ejercicio 12. Dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, forman entre si un ángulo de 45° y $\|\bar{a}\| = 3$. Halle el módulo del vector $\bar{b}$ para que la suma de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ forme un ángulo de 30° con el vector $\bar{a}$.

Ejercicio 13. En el trapecio ABCD, $A(0,1)$, $B(3,5)$, $C(8,7)$, $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ y Mes punto medio de $\overline{CD}$. Hallar P, Q y R si $\overline{AM} = 4\overline{PQ}$



Ejercicio 14. Un bote es arrastrado al sur por una corriente a razón de 15 km por hora respecto a aguas tranquilas. Allí también es arrastrado por una corriente de $5\sqrt{2}$ km por hora al sur este. ¿Cuál es la velocidad total del bote? Si el bote inicialmente estaba en el origen de coordenadas y ahora está en la posición $(20,-80)$, cuanto tiempo ha transcurrido?

Ejercicio 15. Demostrar la desigualdad de Cauchy Schwarz y la desigualdad Triangular.

Ejercicio 16. Si $\bar{u}$ es un vector unitario de R^2. Demuestre que se cumple la siguiente relación:

$$\|x\bar{u} + y\bar{u}^{\perp}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x\bar{u} - y\bar{u}^{\perp}\|$$

Ejercicio 17. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores de R^3 con $\bar{b} \neq \bar{0}$. De los puntos origen y extremo del vector $\bar{a}$ se proyecta una luz en forma perpendicular al vector $\bar{b}$. Hallar el vector proyección ortogonal de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$.

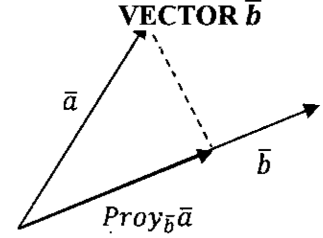
3.5 PROYECCIÓN ORTOGONAL Y COMPONENTE DE UN VECTOR EN R^n

3.5.1 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO VECTOR.

Definición. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b} \neq \bar{o}$ dos vectores en R^n. Se define la proyección ortogonal de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$, denotada por $Proy_{\bar{b}}\bar{a}$, como el vector dado por

$$Proy_{\bar{b}}\bar{a} = \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}\right)\bar{b}$$

FIGURA 3.6 PROYECCIÓN ORTOGONAL DEL VECTOR $\bar{a}$ SOBRE EL VECTOR $\bar{b}$



Fuente. Elaboración propia

Se observa que:

El vector $Proy_{\bar{b}}\bar{a}$ es paralelo al vector $\bar{b}$

El vector $\bar{a} - Proy_{\bar{b}}\bar{a}$ es ortogonal al vector $\bar{b}$

El vector $\bar{a} = Proy_{\bar{b}}\bar{a} + (\bar{a} - Proy_{\bar{b}}\bar{a})$ (STEWART, REDLIN, & WATSON, 2007)

3.5.2 COMPONENTE ORTOGONAL DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO VECTOR.

Definición. La componente de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b} \neq \bar{o}$, denotada $Comp_{\bar{b}}\bar{a}$, es el número dado por

$$Comp_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$$

La relación entre la proyección y la componente está dada por:

$$Proy_{\bar{b}}\bar{a} = \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}\right)\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = (Comp_{\bar{b}}\bar{a})\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|}$$

PROPIEDADES.

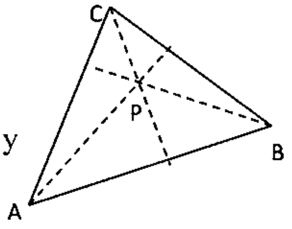
Sean $\bar{a}$, $\bar{b} \neq \bar{o}$ y $\bar{c}$ vectores de R^n

1. $Proy_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = Proy_{\bar{b}}\bar{a} + Proy_{\bar{b}}\bar{c}$
2. $Proy_{\bar{b}}(r\bar{a}) = rProy_{\bar{b}}\bar{a}\,; r \in R$
3. Si $\bar{b} \,//\, \bar{c}$, entonces $Proy_{\bar{b}}\bar{a} = Proy_{\bar{c}}\bar{a}$
4. $Comp_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = Comp_{\bar{b}}\bar{a} + Comp_{\bar{b}}\bar{c}$

5. $Comp_{\bar{b}}(r\bar{a}) = rComp_{\bar{b}}\bar{a}\,; r \in R$
6. Si $\bar{b} \,//\, \bar{c}$, entonces $Comp_{\bar{b}}\bar{a} = Comp_{\bar{c}}\bar{a}$
7. Sea θ el ángulo trazado desde $\bar{a}$ hasta $\bar{b}$
8. Si $Comp_{\bar{b}}\bar{a} > 0$ entonces θ es agudo y $Proy_{\bar{b}}\bar{a}$ tiene el mismo sentido que $\bar{b}$
9. Si $Comp_{\bar{b}}\bar{a} < 0$ entonces θ es obtuso y $Proy_{\bar{b}}\bar{a}$ tiene el sentido opuesto a $\bar{b}$
10. Si $Comp_{\bar{b}}\bar{a} = 0$ entonces $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales y $Proy_{\bar{b}}\bar{a} = \bar{o}$

Ejercicio 18. Sean A, B y C vértices de un triángulo. Demostrar que las alturas de dicho triángulo se intersecan en un punto P.

Solucion 18. Demostración.



Sea el triángulo ABC

Donde: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Se desea demostrar que; partiendo de cada vértice y desplazándose por la altura respectiva se llegue al punto P.

Partimos del vértice C

$P = C + r(-Proy_{\overline{AB}^{\perp}}\overline{AC})$

$= C + r\left(-Proy_{\overline{AB}^{\perp}}(\overline{AB} + \overline{BC})\right)$

$= C + r\left(-\frac{(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{AB}^{\perp}}{\|\overline{AB}^{\perp}\|^2}\right)\overline{AB}^{\perp}$

$= C + r\left(-\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}^{\perp}}{\|\overline{AB}^{\perp}\|^2}\right)\overline{AB}^{\perp}$

$= C + r(-Proy_{\overline{AB}^{\perp}}\overline{BC})$

$= P$

Partimos del vértice B

$P = B + s(-Proy_{-\overline{AC}^{\perp}}\overline{AB})$

$= B + s\left(Proy_{-\overline{AC}^{\perp}}(\overline{AC} - \overline{BC})\right)$

$= B + s\left(-\frac{(\overline{AC}-\overline{BC})\cdot-\overline{AC}^{\perp}}{\|-\overline{AC}^{\perp}\|^2}\right)-\overline{AC}^{\perp}$

$= B + s\left(-\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}^{\perp}}{\|-\overline{AC}^{\perp}\|^2}\right)-\overline{AC}^{\perp}$

$= B + s\left(-\frac{\overline{CB}\cdot -\overline{AC}^{\perp}}{\|-\overline{AC}^{\perp}\|^2}\right)-\overline{AC}^{\perp}$

$= B + s(-Proy_{-\overline{AC}^{\perp}}\overline{CB})$

$= P$

Partimos del vértice A

$P = A + t(-Proy_{\overline{BC}^{\perp}}\overline{BA})$

$= A + t\left(-Proy_{\overline{BC}^{\perp}}(\overline{BC}+\overline{CA})\right)$

$= A + t\left(-\frac{(\overline{BC}+\overline{CA})\cdot\overline{BC}^{\perp}}{\|\overline{BC}^{\perp}\|^2}\right)\overline{BC}^{\perp}$

$= A + t\left(-\frac{\overline{CA}\cdot\overline{BC}^{\perp}}{\|\overline{BC}^{\perp}\|^2}\right)\overline{BC}^{\perp}$

$= A + t(-Proy_{\overline{BC}^{\perp}}\overline{CA})$

$= P$

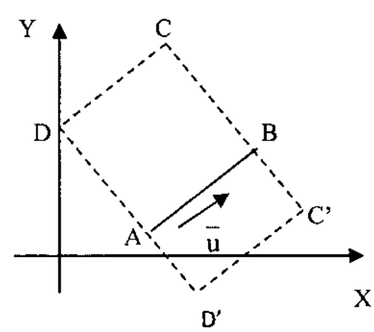
Ejercicio 19. Sean $A(3,1)$ y $B(6,4)$ vértices de un rectángulo de $36u^2$ de área. Halle los otros dos vértices (dos soluciones).

Solucion 19.

En la figura se desea hallar

$$C = B + \|\overline{BC}\|\bar{u}^{\perp}$$

$$D = A + \|\overline{AD}\|\bar{u}^{\perp}$$



De los datos se tiene: $\overline{AB} = (3,3)$, $\|\overline{AB}\| = 3\sqrt{2}$ y el vector unitario

$$\bar{u} = \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} = \frac{1}{\|(3,3)\|}(3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$\bar{u} = \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} = \frac{1}{\|(3,3)\|}(3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Del área del rectángulo se tiene: $\|\overline{AB}\|\|\overline{BC}\| = 36$

Hallamos los vértices:

$$C = B + \|\overline{BC}\|\bar{u}^{\perp}, \qquad \|\overline{BC}\| = 6\sqrt{2}$$

$$C = (6,4) + 6\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

$$C(0,10)$$

La gráfica está trazada a priori de los cálculos. Ahora hallamos el vértice

$$D = A + \|\overline{AD}\|\bar{u}^{\perp}\,,\ \|\overline{AD}\| = \|\overline{BC}\|$$

$$D = (3,1) + 6\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

$$D(-3,7)$$

La otra opción al resolver el problema es hallar los vértices C' y D'

$$C' = B + \|\overline{BC'}\|(-\bar{u}^{\perp})\,, \qquad \|\overline{BC'}\| = 6\sqrt{2}$$

$$C' = (6,4) + 6\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$C'(12,-2)$$

$$D' = A + \|\overline{AD'}\|(-\bar{u}^{\perp})\,, \|\overline{AD'}\| = \|\overline{BC'}\|$$

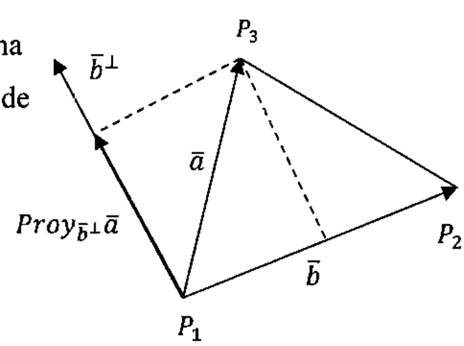
$$D' = (3,1) + 6\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$D'(9,-5)$$

Ejercicio 20. Sean P_1, P_2 y P_3 vértices de un triángulo. Determinar una expresión (en forma vectorial) para calcular el área de dicho triángulo.

Solucion 20.

Se desea determinar una expresión en forma vectorial para calcular el área del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3



Sean $\bar{a} = \overline{P_1P_2}$, $\bar{b} = \overline{P_1P_2}$

El área del triángulo está dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}(base)(altura)$$

Donde:

$$base = \|\bar{b}\|$$

$$altura = \|Proy_{\bar{b}^{\perp}}\bar{a}\|$$

Luego se tiene que:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\|\|Proy_{\bar{b}^{\perp}}\bar{a}\| = \frac{1}{2}\|\bar{b}\|\left\|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|^2}\bar{b}^{\perp}\right\|$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\| \left\| \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|} \frac{\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|} \right\|$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\| \left| \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|} \right| \left\| \frac{\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|} \right\|$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\| \left| \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}}{\|\bar{b}^{\perp}\|} \right|$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{b}\| \frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}|}{\|\bar{b}^{\perp}\|}$$

Finalmente

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}|$$

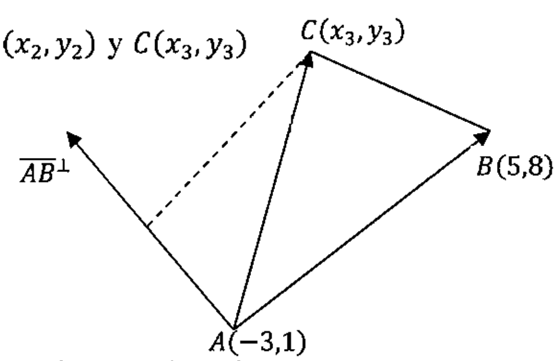
Expresión que sirve para calcular el área de un triángulo.

Ejercicio 21. Sean $A(-3,1)$, $B(5,8)$ y C los vértices de un triángulo de $5\ u^2$ de área, cuya abscisa de su baricentro es $\frac{1}{3}$. Determinar las coordenadas del vértice C.

Solucion 21.

En la figura se desea determinar el vértice y $C(x_3, y_3)$

Se conoce que las coordenadas del baricentro G de un triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ está dado por:



$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Donde la a abscisa del baricentro es

$$\frac{-3 + 5 + x_3}{3} = \frac{1}{3}$$

Despejando se tiene:

$x_3 = -1\ ,\ C(-1, y_3)$

Además, se conoce que el área del triángulo es:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}|\overline{AC} \cdot \overline{AB}^{\perp}| = 5$$

Dónde:

$$\overline{AC} = C - A = (2, y_3 - 1)$$

$$\overline{AB} = B - A = (8,7)$$

Luego remplazando en la expresión anterior se obtiene:

$$|(2, y_3 - 1) \cdot (-7,8)| = 10$$

$$|-14 + 8y_3 - 8| = 10$$

$$\begin{cases} -22 + 8y_3 = 10 \rightarrow y_3 = 4 \\ -22 + 8y_3 = -10 \rightarrow y_3 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Entonces

$\overline{AC} = (2,3) \rightsquigarrow C = A + (2,3) \rightsquigarrow C(-1,4)$

O también

$\overline{AC} = \left(2, \frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow C = A + \left(2, \frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 22. En el cuadrilátero convexo6 ABCD: $Proy_{\overline{AC}}\overline{AD} = (2,2)$, $Proy_{\overline{AB}}(Proy_{\overline{AC}}\overline{AD}) = \frac{2}{5}(3,-1)$ y $\overline{BC} = (-5,7)$. Si el área del cuadrilátero es $28\,u^2$ y $M\left(\frac{17}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto medio de $\overline{AB}$. Hallar los vértices o puntos A, B, C y D.

Solucion 22.

Sea el cuadrilátero ABCD

De $Proy_{\overline{AC}}\overline{AD} = (2,2)$ se tiene que

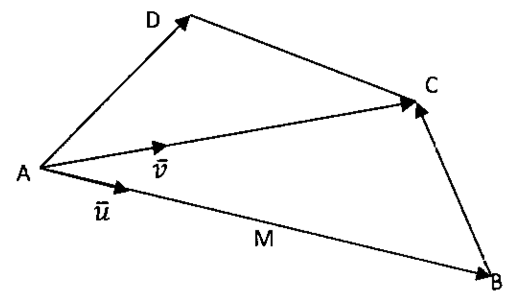
$\overline{AC} \mathbin{//} (2,2) \rightsquigarrow \overline{AC} = r(2,2)$

---

6 C es **convexo** si para cada par de puntos de C, el segmento que los une está totalmente incluido en C; es decir, un conjunto es convexo si se puede ir de cualquier punto a cualquier otro en línea recta, sin salir del mismo (APOSTOL, 1995).

De $Proy_{\overline{AB}}(Proy_{\overline{AC}}\overline{AD}) = \frac{2}{5}(3,-1)$ se tiene que

$\overline{AB} \ // \ (3,-1) \leadsto \overline{AB} = s(3,-1)$



De la figura:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$s(3,-1) + (-5,7) = r(2,2)$$

Multiplicando, producto escalar, primero por el vector $(-2,2)$ y luego por el vector $(1,3)$ en ambos miembros se tiene:

$s(-6-2) + (10+14) = 0 \leadsto s = 3 \rightarrow \overline{AB} = (9,-3), \|\overline{AB}\| = 3\sqrt{10}$

$(-5+21) = r(2+6) \leadsto r = 2 \rightarrow \overline{AC} = (4,4), \ \|\overline{AC}\| = 4\sqrt{2}$

Además, se conoce que:

$$A_{(ABCD)} = A_{\Delta(ADC)} + A_{\Delta(ACB)}$$

$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}|\overline{AD} \cdot \overline{AC}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{AC} \cdot \overline{AB}^{\perp}| = 28$$

$$\frac{1}{2}|\overline{AD} \cdot \overline{AC}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{AC} \cdot \overline{AB}^{\perp}| = 28$$

$$|\overline{AD} \cdot \overline{AC}^{\perp}| + |\overline{AC} \cdot \overline{AB}^{\perp}| = 56$$

Donde

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB}^{\perp} = (4,4) \cdot (3,9) = 48$$

Entonces

$$|\overline{AD} \cdot \overline{AC}^{\perp}| = 8$$

Sea $\overline{AD} = (a,b)$

Entonces

$$|\overline{AD} \cdot \overline{AC}^{\perp}| = |(a,b) \cdot (-4,4)| = 8$$

$|-4a + 4b| = 8 \leadsto \begin{cases} -a + b = 2 \\ -a + b = -2 \end{cases} (*)$

Ahora de:

$$Proy_{\overline{AC}}\overline{AD} = \frac{(a,b) \cdot (4,4)}{32}(4,4) = (2,2)$$

Se tiene: $\frac{8(a+b)}{32}(2,2) = (2,2) \leadsto a + b = 4$ (**)

De (*) y (**) se tiene: $b = 3, a = 1$ o también $b = 1\,, a = 3$ (se descarta, el cuadrilátero es convexo)

Entonces

$$\overline{AD} = (1,3), \qquad \|\overline{AD}\| = \sqrt{10}$$

Hallamos los vértices:

$A = M + \|\overline{AM}\|(-\overline{u})$

$\|\overline{AM}\| = \dfrac{1}{2}\|\overline{AB}\| = \dfrac{3}{2}\sqrt{10} = \|\overline{MB}\|, \qquad \overline{u} = \dfrac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$

$A = \left(\dfrac{17}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{3}{2}\sqrt{10}\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,-1) \;\rightsquigarrow\; A(4,1)$

$B = M + \|\overline{MB}\|\overline{u}$

$B = \left(\dfrac{17}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2}\sqrt{10}\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,-1) \;\rightsquigarrow\; B(13,-2)$

$C = A + \|\overline{AC}\|\overline{v}$

$\|\overline{AC}\| = 4\sqrt{2}, \qquad \overline{v} = \dfrac{\overline{AC}}{\|\overline{AC}\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(2,2)$

$C = (4,1) + 4\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2,2) \;\rightsquigarrow\; C(8,5)$

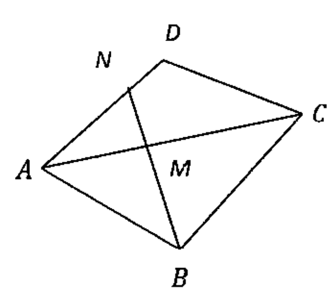
$D = A + \|\overline{AD}\|\dfrac{\overline{AD}}{\|\overline{AD}\|}$

$D = (4,1) + (1,3) \;\rightsquigarrow\; D(5,4)$

Ejercicio 23. Sean $A(1,-2)$, $B(5,-6)$, $C(6,2)$ y $D(3,6)$ vértices del cuadrilátero ABCD. Hallar el área del cuadrilátero MCDN, si $M \in \overline{AC}$, $N \in \overline{AD}$ y $\overline{BN} = \frac{3}{2}\overline{MN}$.

Solucion 23.

En la figura se tiene:



$$L_{\overline{AC}}: 4x - 5y - 14 = 0$$

Sea $M(m_1, m_2) \in \overline{AC}$ entonces

$$M\left(m_1, \frac{4m_1 - 14}{5}\right)$$

$$L_{\overline{AD}}: 4x - y - 6 = 0$$

Sea $N(n_1, n_2) \in \overline{AD}$ entonces $N(n_1, 4n_1 - 6)$

De $\overline{BN} = \frac{3}{2}\overline{MN}$ se tiene: $N - 3M = -2B$

De donde

$$\begin{cases} n_1 - 3m_1 + 10 = 0 \\ 5n_1 - 3m_1 - 12 = 0 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se tiene: $n_1 = \frac{11}{2}$ y $m_1 = \frac{31}{6}$

Entonces

$N\left(\frac{11}{2}, 16\right)$ y $M\left(\frac{31}{6}, 4\right)$

Luego

$\overline{MN} = \left(\frac{1}{3}, 12\right)$, $\overline{MD} = \left(-\frac{13}{6}, 2\right)$, $\overline{MD}^{\perp} = \left(-2, -\frac{13}{6}\right)$, $\overline{MC} = \left(\frac{5}{6}, -2\right)$, $\overline{MC}^{\perp} = \left(2, \frac{5}{6}\right)$

$$A_{MCDN} = A_{\Delta(NMD)} + A_{\Delta(MCD)} = \frac{1}{2}|\overline{MN} \cdot \overline{MD}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{MD} \cdot \overline{MC}^{\perp}|$$

$$A_{MCDN} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}, 12\right) \cdot \left(-2, -\frac{13}{6}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{13}{6}, 2\right) \cdot \left(2, \frac{5}{6}\right)\right|$$

$$A_{MCDN} = \frac{40}{3} + \frac{4}{3}$$

En consecuencia,

$$A_{MCDN} = \frac{44}{3}\, u^2$$

Ejercicio 24. Los vértices de un rectángulo ABCD son $A(-2, -6)$, $B(-6, -2)$, $C(2,6)$ y D. $E \in \overline{CD}$, $F \in \overline{AD}$, $G \in \overline{BC}$, $\overline{FG} \parallel (1, -3)$, $\overline{FG} + \overline{FE} = (4,14)$. Halle:

a) El vértice D

b) Los puntos E, F y G

Solucion 24.

a) Del rectángulo ABCD se tiene:

$$\overline{AB} = (-4,4) = \overline{DC}$$

$$D = C - (-4,4) \rightsquigarrow \boldsymbol{D(6,2)}$$

b) De la figura se tiene:

$$\overline{FG} = r(1, -3), r \in R$$

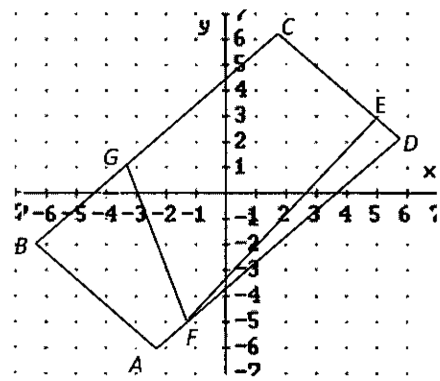
Remplazando en $Proy_{\overline{AB}}\overline{FG} = \overline{AB}$

Se tiene:

$$\frac{(r,-3r)\cdot(-4,4)}{\|(-4,4)\|^2}(-4,4)=(-4,4)$$

$$\frac{-4r-12r}{32}(-4,4)=(-4,4)$$

$$-16r=32 \rightsquigarrow r=-2$$



Entonces

$$\overline{FG}=(-2,6)$$

Se conoce

$$\overline{FG}+\overline{FE}=(4,14)$$

$$(-2,6)+\overline{FE}=(4,14) \rightsquigarrow \overline{FE}=(6,8)$$

Ahora hallamos los puntos E, F y G

Sea $F(f_1,f_2)$ y por ser un rectángulo $\overline{FD}\cdot\overline{DC}=0$

De donde

$$(6-f_1,2-f_2)\cdot(-4,4)=0 \rightsquigarrow f_1-f_2=4$$

Entonces

$$F(f_2+4,f_2)$$

Sea $E(e_1,e_2)$ y por ser un rectángulo $\overline{DE}\cdot\overline{AD}=0$

De donde

$$(e_1-6,e_2-2)\cdot(8,8)=0 \rightsquigarrow e_1+e_2=8$$

Entonces

$$E(8-e_2,e_2)$$

Pero

$$\overline{FE}=(8-e_2-f_2-4,e_2-f_2)=(6,8)$$

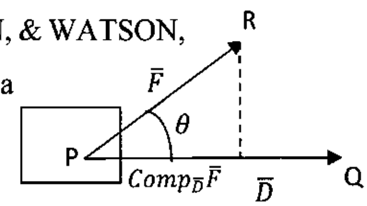
$$\begin{cases} e_2+f_2=-2 \\ e_2-f_2=8 \end{cases} \rightsquigarrow e_2=3, f_2=-5$$

Luego

$$\boldsymbol{F(-1,-5)}, \qquad \boldsymbol{E(5,3)}$$

Y de $\overline{FG}=(-2,6) \rightsquigarrow \boldsymbol{G(-3,1)}$

Ejercicio 25. Trabajo es la cantidad total de esfuerzo requerido para llevar a cabo una tarea (STEWART, REDLIN, & WATSON, 2007). En la figura, una fuerza constante actúa sobre un objeto a medida que este se desplaza. El trabajo realizado por la fuerza es el producto de la longitud del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.



Mostrar que el trabajo W realizado por una fuerza $\bar{F}$ en movimiento a lo largo de un vector $\bar{D}$ es determinado por:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{D}$$

Solucion 25.

De la figura se tiene:

$\bar{D} = \overline{PQ},\ \bar{F} = \overline{PR}$ y $Comp_{\bar{D}}\bar{F} = \frac{\bar{F}\cdot\bar{D}}{\|\bar{D}\|} = \frac{\|\bar{F}\|\|\bar{D}\|cos\theta}{\|\bar{D}\|} = \|\bar{F}\|cos\theta$

De donde $\|\bar{D}\|$ es la longitud del desplazamiento.

Recordamos también en Física. Si una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto por una distancia d de a lo largo de una recta, entonces el trabajo hecho es:

$$W = (\text{magnitud } F)(\ distancia\ d)$$

Donde:

$$\text{magnitud } F\ a\ lo\ largo\ de\ una\ recta = \|\bar{F}\|cos\theta$$

$$distancia\ d = \|\bar{D}\|$$

Luego

$$W = \|\bar{F}\|cos\theta\ \|\bar{D}\| = \|\bar{D}\|\|\bar{F}\|cos\theta$$

Recordamos

$$\bar{F} \cdot \bar{D} = \|\bar{D}\|\|\bar{F}\|cos\theta$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{W = \bar{F} \cdot \bar{D}}$$

También; por la definición:

El trabajo realizado por la fuerza es el producto de la longitud del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

Se obtiene:

$$W = \|\bar{D}\| Comp_{\bar{D}}\bar{F}$$

$$W = \|\bar{D}\| \frac{\bar{F} \cdot \bar{D}}{\|\bar{D}\|}$$

$$\boldsymbol{W = \bar{F} \cdot \bar{D}}$$

Ejercicio 26. Una persona jala un carro horizontalmente ejerciendo una fuerza de 20 lb en la manija. Si la manija forma un ángulo de 60° con la horizontal. Encuentre el trabajo hecho al mover el carro 100 $pies$.

Solucion 26.

De la figura

$$\bar{D} = \overline{PQ} = (100{,}0)$$

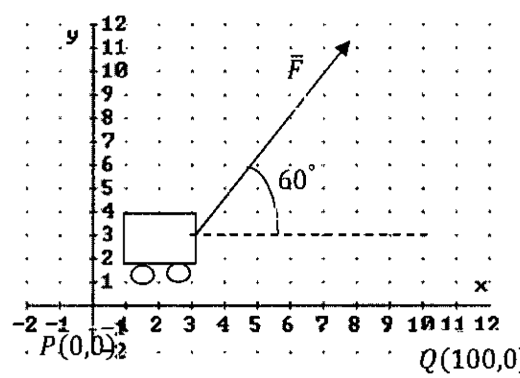
$$\|\bar{D}\| = \|\overline{PQ}\| = 100$$

El vector fuerza

$$\bar{F} = (\|\bar{F}\|cos\theta, \|\bar{F}\|sen\theta), \|\bar{F}\| = 20$$

$$\bar{F} = \left(20\, cos\frac{\pi}{3}, 20\, sen\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\bar{F} = \left(10{,}10\sqrt{3}\right)$$



El trabajo hecho este dado por:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{D} = \left(10{,}10\sqrt{3}\right) \cdot (100{,}0)$$

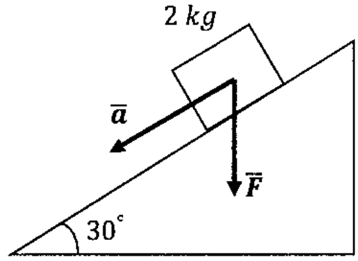
Finalmente,

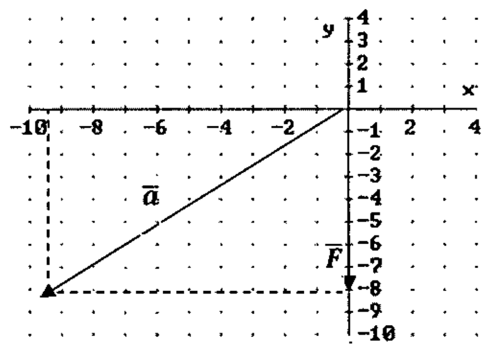
$$\boldsymbol{W = 1000\, pies - lb}$$

Ejercicio 27. Un objeto de 2 kg se desliza sobre una rampa que tiene un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. Si despreciamos la fricción y sólo actúa la fuerza gravitacional sobre el objeto, hallar la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del movimiento del objeto.

Solucion 27.

Representando gráficamente el ejercicio, se desea hallar: $Comp_{\bar{a}}\bar{F}$





De la figura se tiene:

$\bar{a} \, // \left(-\|\bar{a}\|cos(30^{\circ}), -\|\bar{a}\|sen(30^{\circ})\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\bar{F} = (0, -mg), g = 9.8 \ m/seg^2$

Entonces

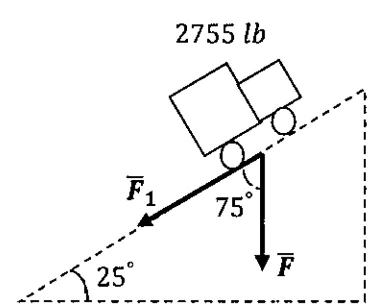
$$\bar{F} = (0, -2(9.8)) = (0, -19.6)$$

$$Comp_{\bar{a}}\bar{F} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{(0, -19.6) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{9.8}{1} \ kg \ m/seg^2$$

$$\boldsymbol{Comp_{\bar{a}}\bar{F} = 9.8 \ N}$$

Ejercicio 28. Un automóvil está sobre una entrada que esta inclinada 25° respecto a la horizontal. Si el automóvil pesa 2755 lb, encuentre la fuerza requerida para evitar que ruede hacia atrás.

Solucion 28.



De la figura se tiene:

$\bar{F} = (0, -2755), \|\bar{F}\| = 2755$

$\|\bar{F}_1\| = Comp_{\bar{F}_1}\bar{F} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{F}_1}{\|\bar{F}_1\|},$

Donde

$$\bar{F} \cdot \bar{F}_1 = \|\bar{F}\|\|\bar{F}_1\|cos(75)$$

Luego

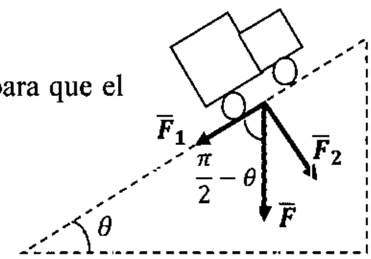
$$\|\bar{F}_1\| = \|\bar{F}\|cos(75)$$

$$\|\bar{F}_1\| = 2755 \cos(75)$$

Finalmente

$$\|\bar{F}_1\| = \mathbf{1164}\ \boldsymbol{lb}$$

NOTAS



1. $\|\bar{F}_1\| = Comp_{\bar{F}_1}\bar{F}$; es la fuerza que impide para que el automóvil ruede hacia atrás.
2. $\|\bar{F}_2\| = Comp_{\bar{F}_2}\bar{F}$; es la fuerza que el automóvil ejerce contra la superficie.

Ejercicio 29. Un automóvil esta sobre una entrada que esta inclinada 10° respecto a la horizontal. Se requiere una fuerza de $490\ lb$ para evitar que el automóvil ruede hacia atrás.

a) Determine el peso del automóvil

b) Calcule la fuerza que ejerce el automóvil contra la entrada

Ejercicio 30. Cierto automóvil es conducido $500\ pies$ sobre una carretera que esta inclinada 12° respecto de la horizontal. El automóvil pesa $2500\ lb$. Así, la gravedad actúa hacia abajo sobre el automóvil con una fuerza $\bar{F} = -2500j$. Encuentre el trabajo que realiza el automóvil para vencer la gravedad.

Ejercicio 31. Un paquete que pesa $200\ lb$ se coloca sobre un plano inclinado. Si una fuerza de $80\ lb$ es suficiente para evitar que se deslice el paquete, determine el ángulo de inclinación del plano (ignore los efectos de la fricción).

Ejercicio 32. Una cortadora de césped es empujada una distancia de $200\ pies$ a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza de $50\ lb$, La manija de la podadora se mantiene a un ángulo de 30° desde la horizontal. Encuentre el trabajo hecho.

Ejercicio 33. Cuanto trabajo se realiza al empujar un cajón cargado con 500 lb de bananas 40 pies sobre una rampa inclinado 30° con respecto a la horizontal.

Ejercicio 34. Para $a \in Z$, sean $A(a-1, a+1)$, $B(a+3, a-6)$, $C(10,8)$ y D vértices de un cuadrilátero. Además $Proy_{\overline{AM}}\overline{AD} = (2,-1)$, $Proy_{\overline{MN}}\overline{ND} = (3,1)$, y el área del triángulo NBM es de $25/4\ u^2$. Hallar los puntos A, B, M, N y D si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente.

Ejercicio 35. Tres vértices consecutivos de un rectángulo ABCD son $A(-4a, 2a)$, $B(a, -a)$ y $C(5,3)$. Si $a > 0, P \in \overline{AB},\ Q \in \overline{CD},\ R \in \overline{AD},\ \|\overline{RD}\| = \frac{2}{3}\sqrt{34}$, $\overline{PQ} \cdot (-6,7) = 0$ y $\frac{3}{5}(\overline{PQ} + \overline{PR}) = \left(1, \frac{3}{5}\right)$.

a) Calcular los vértices A, B, C, D y los puntos P, Q y R.

b) Calculara el área del cuadrilátero PARO.

Ejercicio 36. Sea ABCDE un pentágono irregular (los vértices ubicados en sentido horario). Si $A(1,1)$, $B(2,6)$, $C(c, 6)$, $c > 2$, $E(7, y)$, $Proy_{\overline{AE}}\overline{BC} = (9, -6)$, $\angle(\text{ABC}) = \angle(\text{BCD})$, $\|\text{AB}\| = \|\overline{\text{CD}}\|$. Hallar:

a) El área del triángulo ABE.

b) El área del triángulo BCD

Ejercicio 37. Para $a < 10$, sean $A(a-1, a+2)$, $B(a+2, a-3)$, $C(8,5)$ y D vértices de un cuadrilátero. El área del triángulo AMD y AMC son iguales a 7.5 u^2. Si $\overline{BD}$ es vector bisectriz del ángulo correspondiente al vértice B y $\overline{AM}$ es una mediana del triángulo ABC, hallar los puntos A, B, M y D.

CAPITULO IV. LA RECTA EN R^2

4.1 LA RECTA.

La recta L es el conjunto de puntos de R^2 definido por:

$$L = \{P \in R^2 / P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R\}$$

Dónde

P_0 ; es un punto de paso de la recta L

$\bar{a}$; es un vector direccional de la recta L

De la definición de la recta L se tiene

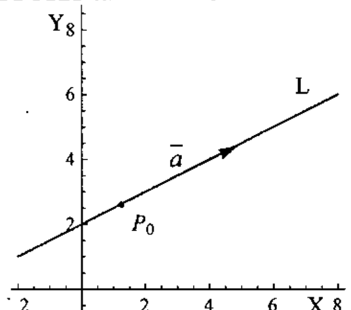
$$P \in L \Leftrightarrow P = P_0 + t\bar{a}\,, \qquad t \in R$$

Y la expresión

$$\boldsymbol{L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R}$$

Es llamada ecuación vectorial de la recta $\boldsymbol{L}$.

FIGURA 4.1 LA RECTA L EN R^2



Fuente: Elaboración propia

4.1.1 DIVERSAS ECUACIONES DE LA RECTA

Sean $P(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2)$ entonces la recta L resulta

$$L: (x,y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2), t \in R$$

De donde

$$L: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + ta_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + ta_2} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{t \in R}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica de la recta L.**

Despejando el parámetro $\boldsymbol{t}$ e igualando se obtiene

$$L: \frac{\boldsymbol{x - x_0}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{y - y_0}}{\boldsymbol{a_2}}$$

Expresión llamada **ecuación simétrica de la recta L.**

La recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ y un vector no nulo $\bar{n}$ son ortogonales si y sólo si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{n}$ son ortogonales.

4.1.1.1 VECTOR NORMAL DE UNA RECTA

A cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal a la recta L se le denomina vector normal a L y puede ser elegido como el vector $\bar{n} = \bar{a}^{\perp}$ o cualquier múltiplo de $\bar{a}^{\perp}$.

Un punto P pertenece a la recta L con punto de paso P_0 y vector normal $\bar{n}$, si y sólo si el vector $\overline{P_0P}$ es ortogonal al vector $\bar{n}$.

Es decir

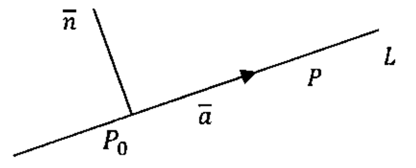
$$P \in L \Leftrightarrow \overline{P_0P} \cdot \bar{n} = 0$$

Luego la expresión

$$\boldsymbol{L: \overline{P_0P} \cdot \bar{n} = 0}$$

Es llamada **ecuación normal de la recta *L***

FIGURA 4.2 VECTOR NORMAL $\bar{n}$ A LA RECTA *L*



Fuente: Elaboración propia

Sean $\bar{n} = (a, b), P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$ y remplazando en la ecuación normal de la recta L se obtiene

$$L: (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

$$L: ax + by + \underbrace{(-ax_0 - by_0)}_{c} = 0$$

Finalmente, la expresión

$$\boldsymbol{L: ax + by + c = 0}$$

Es llamada **ecuación general de la recta *L*** con vector normal $\bar{n} = (a, b)$

4.1.2 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y Q un punto en R^2. Para hallar la distancia del punto Q a la recta L, denotada $d(Q, L)$, se sigue:

En la figura se tiene que:

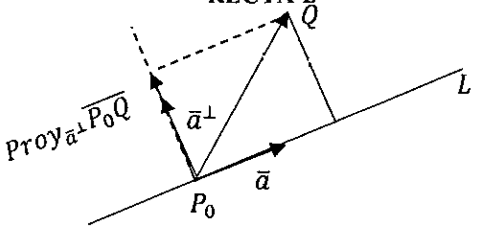
$$d(Q, L) = \|Proy_{\bar{a}^{\perp}} \overline{P_0Q}\|$$

$$d(Q, L) = \left\| \frac{\overline{P_0Q} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \right\|$$

$$d(Q, L) = \left| \frac{\overline{P_0Q} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \right| \left\| \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \right\|$$

$$\boldsymbol{d(Q, L) = \left| \frac{\overline{P_0Q} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \right|}$$

FIGURA 4.3 DISTANCIA DEL PUNTO *Q* A LA RECTA *L*



Fuente: Elaboración propia

Pues; $\left\| \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \right\| = 1$

Además, la ecuación normal de la recta está dada por

$$L: \overline{P_0P} \cdot \bar{a}^{\perp} = 0$$

Si $P_0(x_0, y_0)$, en particular $\bar{a}^{\perp} = (a, b)$ y $P(x, y)$, entonces se tiene la ecuación general de la recta

$$L: ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

Sea: $-ax_0 - by_0 = c$

$$L: ax + by + c = 0$$

Si $Q(x_Q, y_Q)$, entonces

$$d(Q,L) = \left|\frac{\overline{P_0Q} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}\right|$$

resulta

$$(Q,L) = \left|\frac{(x_Q - x_o, y_Q - y_0) \cdot (a,b)}{\|(a,b)\|}\right|$$

$$d(Q,L) = \left|\frac{ax_Q + by_Q + (-ax_0 - by_0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$\boldsymbol{d}(\mathrm{Q}, \boldsymbol{L}) = \left|\frac{\boldsymbol{ax_Q + by_Q + c}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}}\right|$$

4.1.3 PUNTO SIMETRÍCO CON RESPECTO A UNA RECTA[7].

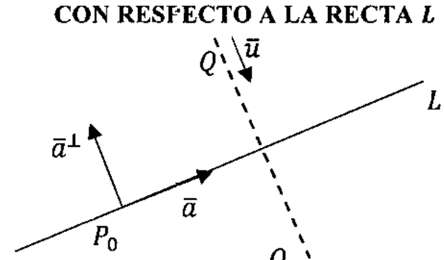
Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y Q un punto en R^2. Para hallar el punto simétrico de Q, denotado Q_S, con respecto a la recta L se sigue:

$$Q_S = Q + 2d(Q,L)\bar{u}$$

Donde

$$\bar{u} = -\frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$$

FIGURA 4.4 PUNTO SIMÉTRICO DE *Q* CON RESPECTO A LA RECTA *L*



Fuente: Elaboración propia

Ejercicio 1. Halle el punto simétrico de $Q(5,8)$ con respecto a la recta $L: P = (3,2) + t(2,1)\,; t \in R$.

Solucion 1. Se desea hallar el punto simétrico Q_s del punto $Q(5,8)$ con respecto a la recta L

Esto es

---

[7] Un punto es simétrico de otro respecto de una recta, si dicha recta es mediatriz del segmento que forman dichos puntos (LEHMAN, 1995).

$$Q_S = Q + 2d(Q,L)\bar{u}$$

Donde

$$\bar{u} = -\frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$$

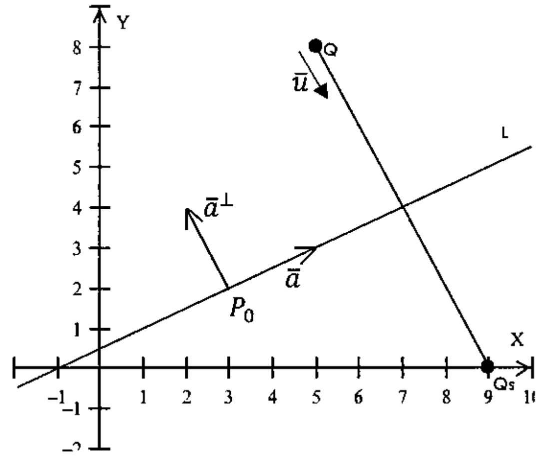
El vector $\bar{a} = (2,1)$ es el vector direccional de la recta L.

Por lo que; $\bar{a}^{\perp} = (-1,2)$

$$\bar{u} = -\frac{(-1,2)}{\|(-1,2)\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$$

Hallamos la distancia $d(Q,L)$

$$d(Q,L) = \|Proy_{\bar{a}^{\perp}}\overline{P_0Q}\|$$



Donde $\overline{P_0Q} = (2,6)$

$$d(Q,L) = \left\|\frac{(2,6)\cdot(-1,2)}{\|(-1,2)\|^2}(-1,2)\right\| = \left\|\frac{10}{5}(-1,2)\right\| = \sqrt{20}$$

Luego

$$Q_S = (5,8) + 2\sqrt{20}\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$$

Finalmente,

El punto simétrico de $Q(5,8)$ con respecto a la recta $L: P = (3,2) + t(2,1)\,; t \in R$ es $Q_S(9,0)$

4.1.4 FIGURAS SIMETRÍCAS CON RESPECTO A UNA RECTA.

Las figuras deben ser aquellas que se forman con segmentos de recta, es decir que se puedan triangular, de modo que se identifique los vértices de cada triangulo. De estos vértices, siguiendo el procedimiento anterior, se determinan los vértices simétricos, los cuales uniéndose con segmentos de recta se obtiene la figura simétrica de la figura dada con respecto a la recta dada.

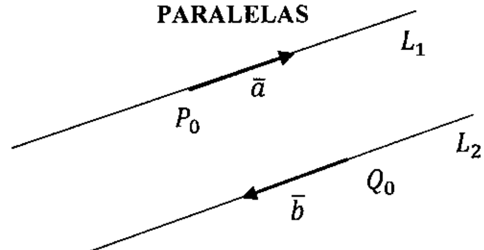
4.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

4.2.1 RECTAS PARALELAS

Las rectas $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$ son paralelas si sus vectores direccionales son paralelos. Es decir

$L_1 \,//\, L_2 \iff \bar{a} \,//\, \bar{b}$

FIGURA 4.5 LAS RECTAS L_1 Y L_2 SON PARALELAS



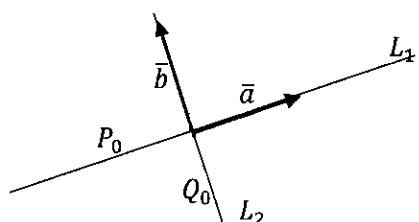
Fuente: Elaboración propia

4.2.2 RECTAS ORTOGONALES

Las rectas $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$ son ortogonales si sus vectores direccionales son ortogonales. Es decir

$L_1 \perp L_2 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$

FIGURA 4.6 LAS RECTAS L_1 Y L_2 SON ORTOGONALES



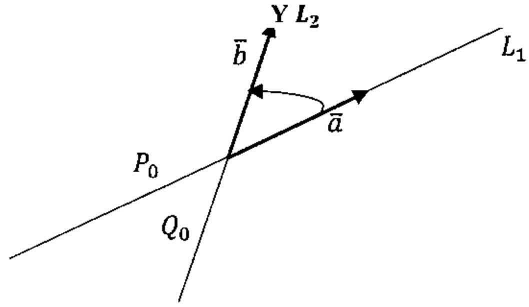
Fuente: Elaboración propia

4.2.3 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

El ángulo que forman las rectas $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$, denotado $\measuredangle(L_1, L_2)$[8], es igual al ángulo determinado por sus vectores direccionales. Es decir

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b})$$

FIGURA 4.7 ANGULO ENTRE LAS RECTAS L_1 Y L_2



Fuente: Elaboración propia

NOTAS

Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$

1. El ángulo de inclinación de un vector[9] $\bar{a}$, denotado θ, varia en $[0, 2\pi)$.

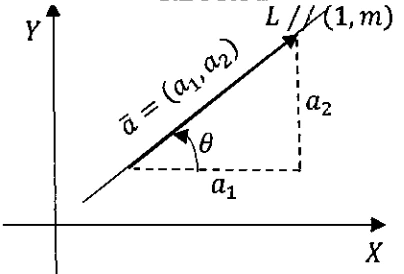
---

8 $\measuredangle(L_1, L_2)$ es el ángulo medido, en sentido antihorario, desde la recta L_1 hasta la recta L_2

9 El ángulo θ, es medido, en sentido antihorario, desde la parte positiva del eje de las abscisas hasta el vector.

2. El ángulo de inclinación de una recta[10] L, denotado θ, varia en $[0, \pi)$.
3. Si $\theta \in [0, \pi)$ es el ángulo de inclinación del vector $\bar{a}$, entonces se dice que θ es el ángulo de inclinación de la recta L.
4. Si $\theta \in [\pi, 2\pi)$ es el ángulo de inclinación del vector $\bar{a}$, entonces se dice que $\theta - \pi$ es el ángulo de inclinación de la recta L. Es decir $\theta - \pi$ es el ángulo de inclinación del vector $-\bar{a}$
5. Si $\bar{a} = (a_1, a_2) = a_1\left(1, \frac{a_2}{a_1}\right) // (1, m)$ es vector direccional de la recta L, Entonces el numero $m = \frac{a_2}{a_1} = tan\theta$ es llamado pendiente de la recta L y θ es su ángulo de inclinación.

FIGURA 4.8 PENDIENTE DE LA RECTA *L*

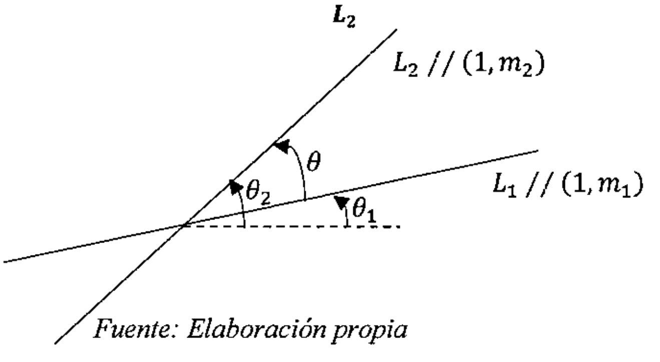


Fuente: Elaboración propia

6. Si $\measuredangle(L_1, L_2) = \theta$, entonces $tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de las rectas L_1 y L_2 respectivamente y

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2}$$

FIGURA 4.9 ANGULO FORMADO POR LAS RECTAS L_1 Y L_2



Fuente: Elaboración propia

4.3 SEGMENTO DE RECTA

Se define a un segmento cerrado de recta de extremos P_0 y P_1 como el conjunto de puntos de R^2 dado por:

$$[P_0, P_1] = \{P \epsilon R^2 / P = P_0 + t(P_1 - P_0), t \in [0,1]\}$$

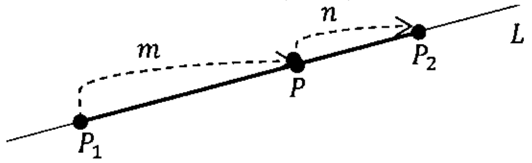
[10] El ángulo θ, es medido, en sentido antihorario, desde la parte positiva del eje de las abscisas hasta la recta.

Para referirnos al segmento cerrado $[P_0, P_1]$, es usual decir el segmento $\overline{P_0P_1}$

4.3.1 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA EN UNA RAZÓN DADA

Un punto P cualquiera sobre una recta L que pasa por los puntos P_1 y P_2, divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $\frac{m}{n}$ y está dado por $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{m}{n}$.

FIGURA 4.10 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA



Fuente: Elaboración propia

De donde

$$n\overline{P_1P} = m\overline{PP_2}$$

$$n(P - P_1) = m(P_2 - P)$$

$$(n + m)P = nP_1 + mP_2$$

$$P = \frac{n}{n+m}P_1 + \frac{m}{n+m}P_2 \;, n \neq -m$$

NOTAS[11]

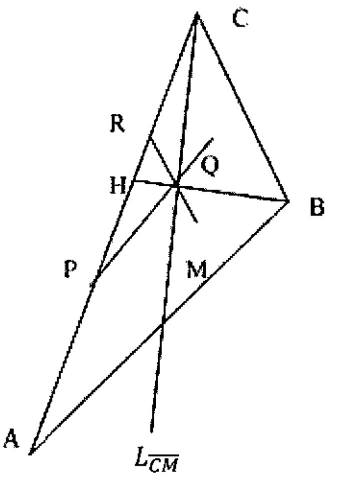
1. Si $n = m$, entonces $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$
2. Si m y n tienen el mismo signo, entonces P es un punto interior al segmento $\overline{P_1P_2}$
3. Si m y n tienen signos opuestos, entonces P es un punto exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$
4. Si $\left|\frac{m}{n}\right| < 1$, entonces P es un punto próximo del punto P_1.
5. Si $\left|\frac{m}{n}\right| > 1$, entonces P es un punto próximo del punto P_2.
6. Si $n = -m$, entonces $P = P_1 = P_2$

Ejercicio 2. Sea el triángulo ABC de vértices $A(-3,-4)$, $B(3,4)$ y $C(1,10)$. Hallar el área del triángulo formado por los puntos de trisección de $\overline{AC}$ y la intersección de la mediana trazada desde el vértice C con la altura trazada desde el vértice B.

---

[11] Para realizar el trazo, es importante empezar en el punto de inicio del segmento, de izquierda a derecha tienen signo positivo y de derecha a izquierda tienen signo negativo

Solucion 2. Se desea hallar el área del triángulo de vértices P, Q, R, como se observa en la figura, esto es: $A_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{PR} \cdot \overline{PQ}^\perp|$



Hallamos los puntos de trisección P y R de $\overline{AC}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{3}(2A + C) \rightsquigarrow P\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RC}} = \frac{2}{1}$$

$$R = \frac{1}{3}(2C + A) \rightsquigarrow R\left(-\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

M es punto medio de $\overline{AB}$, esto es $M = \frac{1}{2}(A + B) \rightsquigarrow M(0,0)$

Ahora, encontramos el punto Q intersección de la mediana $L_{\overline{CM}}$, trazada desde el vértice C y la altura $L_{\overline{BH}}$, trazada desde el vértice B. Es decir $Q = L_{\overline{CM}} \cap L_{\overline{BH}}$

Las rectas están dadas por:

$$L_{\overline{CM}}: P = (1,10) + t(1,10), t \in R$$

$$L_{\overline{BH}}: P = B + r(1, m), r \in R$$

Donde: $(1, m) // \overline{BH} \perp \overline{CH}, \overline{CH} = Proy_{\overline{CA}}\overline{CB}, \overline{CB} = (2, -6), \overline{CA} = (-4, -14)$

$$\overline{CH} = Proy_{\overline{CA}}\overline{CB} = \frac{(2, -6) \cdot (-4, -14)}{\|(-4, -14)\|^2}(-4, -14) = \frac{19}{14}(-2, -7)$$

$\overline{CH} = Proy_{\overline{CA}}\overline{CB}$

Como $\overline{CH} \perp \overline{BH}$, entonces $\overline{BH} // (7, -2) // (1, m)$

$$L_{\overline{BH}}: P = (3,4) + r(7, -2), r \in R$$

Interceptando las rectas

$$(1,10) + t(1,10) = (3,4) + r(7, -2)$$

Multiplicando (producto escalar) ambos miembros por el vector $(2,7)$ se obtiene:

$72 + 72t = 34 \rightsquigarrow t = -\frac{19}{36}$

Luego $Q = (1,10) + \left(-\frac{19}{36}\right)(1,10) \rightsquigarrow Q\left(\frac{17}{36}, \frac{170}{36}\right)$

Ahora calculamos el área del triángulo de vértices P, Q, R

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}|\overline{PR}\cdot\overline{PQ}^{\perp}|\,,\overline{PR} = \left(\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)\,,\overline{PQ} = \left(\frac{77}{36},\frac{146}{36}\right)$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)\cdot\left(-\frac{146}{36},\frac{77}{36}\right)\right| = \frac{247}{108}\,u^2$$

4.4 FAMILIA DE RECTAS.

Una familia de rectas F_L es un conjunto de rectas que cumplen una condición geométrica dada.

$$F_L = \{L/L\ es\ una\ recta\ y\ cumple\ una\ condicion\ geometrica\}$$

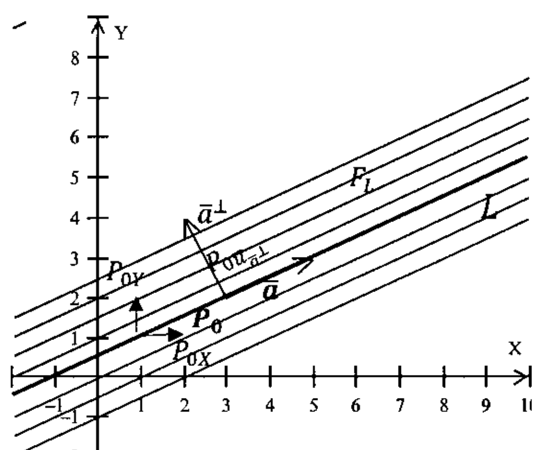
4.4.1 FAMILIAS DE RECTAS PARALELAS A UNA RECTA DADA.

Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$, la familia de rectas F_L paralelas a la recta dada, están dadas por: $F_L: P = P_{0X} + t\bar{a}\,, t \in R \ \leadsto\ P_{0X} = P_0 + k(1,0)\,, k \in R$

También $F_L: P = P_{0Y} + t\bar{a}\,, t \in R \ \leadsto\ P_{0Y} = P_0 + k(0,1)\,, k \in R$

$$F_L: P = P_{0\bar{u}_{\bar{a}^{\perp}}} + t\bar{a}\,, t \in R \ \leadsto\ P_{0\bar{u}_{\bar{a}^{\perp}}} = P_0 + k\bar{u}_{\bar{a}^{\perp}}\,, k \in R\,, \bar{u}_{\bar{a}^{\perp}} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$$

FIGURA 4.11 FAMILIA DE RECTAS PARALELAS A LA RECTA L



Fuente: Elaboración propia

4.4.2 FAMILIA DE RECTAS QUE PASAN POR UN PUNTO COMÚN A UNA RECTA DADA.

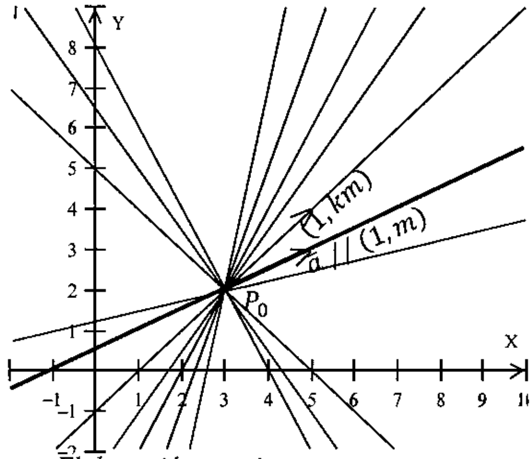
Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$. Si $\bar{a} \,//\, (1, m)$, entonces la familia de rectas F_L que pasan por un punto común a la recta dada están dadas por:

$$F_L: P = P_0 + t(1, km)\,, t \in R, k \in R$$

También $F_L: P = P_{0\bar{u}_{\bar{a}}} + t(1, km)\,, t \in R, k \in R$

Donde: $P_{0\bar{u}_{\bar{a}}} = P_0 + k_0\bar{u}_{\bar{a}}$, k_0 *el primer valor de* $k \in R$, $\bar{u}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$

FIGURA 4.12 FAMILIA DE RECTAS QUE TIENEN UN PUNTO COMÚN



Fuente: Elaboración propia

4.4.3 FAMILIA DE RECTAS ISOGONALES A UNA RECTA DADA.

Sea la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$. Si $\bar{a} \,//\, (1, m)$, entonces la familia de rectas isogonales[12] F_L que forman un ángulo constante θ con la recta L esta dada por: $F_L: P = P_{0X} + t\left(1, \frac{m+d}{1-md}\right)$, $t \in R, d = tg\theta$

Donde: $P_{0X} = P_0 + k(1,0)$, $k \in R$

También $F_L: P = P_{0Y} + t\left(1, \frac{m+d}{1-md}\right)$, $t \in R, d = tg\theta$

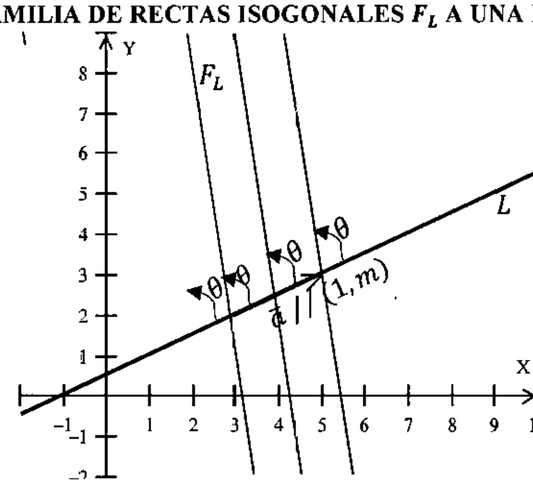
Donde: $P_{0Y} = P_0 + k(0,1)$, $k \in R$

$$F_L: P = P_{0\bar{u}_{\bar{a}}} + t\left(1, \frac{m+d}{1-md}\right) , t \in R, d = tg\theta$$

Donde: $P_{0\bar{u}_{\bar{a}}} = P_0 + k_0\bar{u}_{\bar{a}}$, $k \in R$, $\bar{u}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$

12 Son rectas que cortan a la recta dada formando un ángulo constante.

FIGURA 4.13 FAMILIA DE RECTAS ISOGONALES F_L A UNA RECTA DADA L



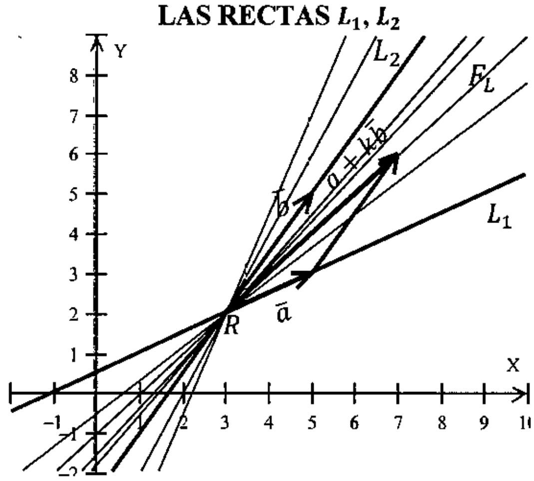
Fuente: Elaboración propia

4.4.4 FAMILIA DE RECTAS QUE PASAN POR LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS DADAS.

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$ dos rectas. La familia de rectas F_L que pasa por $R = L_1 \cap L_2$ (intercesión de las rectas L_1, L_2) está dada por:

$$F_L: P = R + t(\bar{a} + k\bar{b}); t \in R, k \in R$$

FIGURA 4.14 FAMILIA DE RECTAS F_L QUE PASA POR LA INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS L_1, L_2



Fuente: Elaboración propia

NOTA.

La familia de rectas F_L excluye a la recta L_2.

Ejercicio 3. Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$ dos rectas. Verificar que la familia de rectas F_L que pasa por $R = L_1 \cap L_2$ (intercesión de las rectas L_1, L_2) está dada por: $F_L: L_1 + kL_2 = 0\,, k \in R$

Solucion 3.

Se desea verificar que la familia de rectas rectas F_L que pasa por $R = L_1 \cap L_2$ (intercesión de las rectas L_1, L_2) está dada por: $F_L: L_1 + kL_2 = 0\,, k \in R$

Recordamos que la familia de rectas F_L que pasa por $R = L_1 \cap L_2$ (intercesión de las rectas L_1, L_2) está dada por:

$$F_L: P = R + t(\bar{a} + k\bar{b}); t \in R, k \in R$$

si

$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R$

Como $R \in L_1$ y $R \in L_2$ hallamos las ecuaciones normales de las rectas

$$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R \rightsquigarrow L_1: \overline{RP} \cdot \bar{a}^{\perp} = 0$$

$$L_2: P = Q_0 + r\bar{b}\,; r \in R \rightsquigarrow L_2: \overline{RP} \cdot \bar{b}^{\perp} = 0$$

$$F_L: P = R + t(\bar{a} + k\bar{b}); t \in R, k \in R \rightsquigarrow F_L: \overline{RP} \cdot (\bar{a} + k\bar{b})^{\perp} = 0\,, k \in R$$

$$F_L: \overline{\mathrm{RP}} \cdot (\bar{a} + k\bar{b})^{\perp} = 0\,, k \in R$$

$$F_L: \overline{RP} \cdot \bar{a}^{\perp} + k\,\overline{RP} \cdot \bar{b}^{\perp} = 0\,, k \in R$$

Finalmente,

$$F_L: L_1 + kL_2 = 0\,, k \in R$$

Ejercicio 4. Sean $L_1: P = (2,1) + t(1,2), t \in R$ y $L_2: P = (4,2) + r(3,2), r \in R$ dos rectas. $Q(6,6) \in L$ una recta de la familia de rectas que pasan por el punto $L_1 \cap L_2$.

a) Sin encontrar $L_1 \cap L_2$ halle la ecuación vectorial de L.

b) Encontrando $L_1 \cap L_2$ halle la ecuación vectorial de L.

Solucion 4. Se desea hallar la ecuación vectorial de la recta L. Es decir

$$\mathrm{L}: P = Q + t\bar{a}, t \in R$$

a) Recordamos

$$F_L: L_1 + kL_2 = 0\,, k \in R$$

Hallamos las ecuaciones generales de las rectas L_1 y L_2

De $L_1: P = (2,1) + t(1,2), t \in R \rightsquigarrow L_1: (x-2, y-1) \cdot (-2,1) = 0$

$$L_1: 2x - y - 3 = 0$$

De $L_2: P = (4,2) + r(3,2), r \in R \rightsquigarrow L_2: (x-4, y-2) \cdot (-2,3) = 0$

$$L_2: 2x - 3y - 2 = 0$$

$$Q(6,6) \in L \in F_L: L_1 + kL_2 = 0\,, k \in R$$

Entonces

$$Q(6,6) \in L \in F_L: 2x - y - 3 + k(2x - 3y - 2) = 0$$

$$2(6) - 6 - 3 + k(2(6) - 3(6) - 2) = 0 \rightsquigarrow k = \frac{3}{8}$$

Luego

$$L: 2x - y - 3 + \frac{3}{8}(2x - 3y - 2) = 0$$

$$L: 22x - 17y - 30 = 0$$

$$L: 22(x-1) - 17\left(y + \frac{8}{17}\right) = 0$$

$$L: 22(x-1) = 17\left(y + \frac{8}{17}\right)$$

$$L: \frac{x-1}{17} = \frac{y + \frac{8}{17}}{22}$$

Finalmente,

$$L: P = \left(1, -\frac{8}{17}\right) + t(17,22), t \in R$$

También

$$L: P = (6,6) + t(17,22), t \in R$$

b) Para hallar

$$L: P = Q + t\bar{a}, \text{t} \in R$$

Se necesita el vector direccional $\bar{a} \,//\, \overline{RQ}$, $R = L_1 \cap L_2$ Pues $Q(6,6)$

Hallamos el punto R intersecando las rectas

$$(2,1) + t(1,2) = (4,2) + r(3,2)$$

Multiplicando (producto escalar) ambos miembros por el vector $(-2,1)$ se obtiene

$$-3 = -6 - 4r \rightsquigarrow r = -\frac{3}{4}$$

Luego $R = (4,2) + \left(-\frac{3}{4}\right)(3,2) \rightsquigarrow R\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$

El vector direccional $\bar{a} // \overline{RQ} = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{2}\right) // (17,22)$

Finalmente,

$$L: P = (6,6) + t(17,22), t \in R$$

CAPITULO V. TRANSFORMACIONES DE TRASLACIÓN Y ROTACIÓN EN R^2

5.1 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE VECTORES

En la traslación y rotación de vectores, los ejes coordenados en R^2 permanecen fijos, son las coordenadas de los vectores las que se trasladan y rotan.

5.1.1 TRASLACIÓN DE VECTORES.

Se estudia la traslación de un vector, en una dirección, con respecto al origen de coordenadas y con respecto a un punto arbitrario.

5.1.1.1 TRASLACIÓN DE VECTORES CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS

La traslación de un vector, en una dirección, con respecto al origen de coordenadas es como si se trasladara el punto de inicio y final del vector, en dicha dirección, con respecto al origen de coordenadas obteniéndose el punto de inicio y final del vector trasladado.

5.1.1.1.1 TRASLACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS.

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ se trasladan en la dirección del vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$, con respecto al origen de coordenadas, obteniéndose las nuevas coordenadas del punto trasladado $P_T(x_T, y_T)$ ver FIGURA 5.1, Es decir;

$$\boldsymbol{P_T = P + t\bar{a}\,, t} \in \mathbb{R}$$

Se dice que P_T es el punto P trasladado t veces el vector $\bar{a}$.

También, de la figura se obtiene

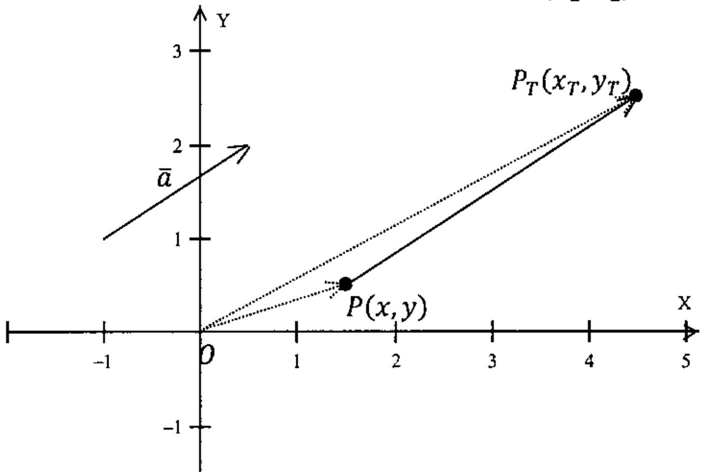
$$P_T = P + r\bar{u}_{\bar{a}}\ ;\ r \in R, \bar{u}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$$

Y se dice que P_T es el punto P trasladado r veces en la dirección del vector $\bar{a}$

Utilizando la representación del punto $P(x, y)$ y del vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$ en forma de vector columna se tiene:

$$P_T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

FIGURA 5.1 TRASLACIÓN DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO $P(x, y)$ EN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $\bar{a} = (a_1, a_2)$



Fuente. Elaboración propia

Luego las coordenadas del punto trasladado $P_T(x_T, y_T)$, en forma matricial, está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P_T = P + M_T \bar{a}}$$

Donde $M_T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ es llamada matriz de traslación (STEWART, REDLIN, & WATSON, 2007), t unidades el vector $\bar{a}$.

Ejercicio 1. Sea el punto $P(x, y)$. Halle el punto simétrico de P con respecto al eje de las X_s.

Solucion 1.

Hallar el punto simétrico de $P(x, y)$ con respecto al eje de las X_s, es equivalente a trasladar el punto $P(x, y)$, dos veces $d = d(P, Eje\ X)$ unidades, en la dirección del vector unitario $\bar{u} = (0, -1)$. Es decir; $P_s = P + 2d\bar{u}$, $d = d(P, Eje\ X) = y$

Por lo que:

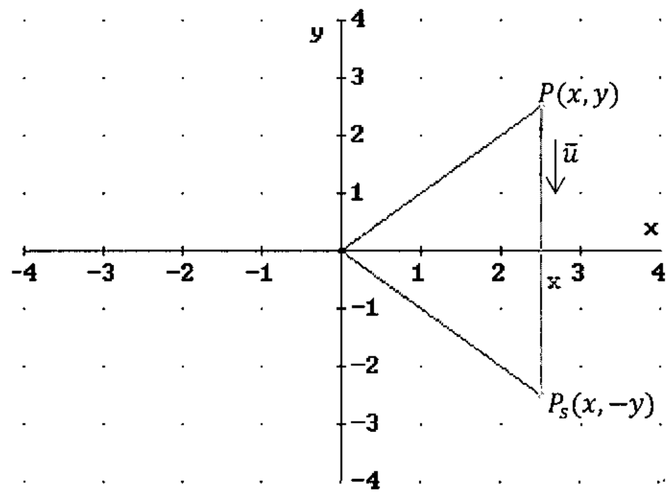
$$P_s = (x, y) + 2y(0, -1)$$

$$P_s = (x, y) + (0, -2y)$$

$$P_s = (x, y - 2y)$$

Finalmente, el punto simétrico de $P(x,y)$ con respecto al eje de las X_s es $\boldsymbol{P_s(x,-y)}$

Equivalentemente aplicando;



$P_T = P + M_T\bar{a}$

Donde

$M_T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$,

$t = 2d(P, EjeX) = 2y$,

$\bar{a} = \bar{u} = (0,-1)$

Se tiene el punto simétrico

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2y \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y-2y \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Finalmente, el punto simétrico de $P(x,y)$ con respecto al eje de las X_s es $\boldsymbol{P_s(x,-y)}$.

Ejercicio 2. Sea el punto $P(x,y)$. Halle el punto simétrico de P con respecto a la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in \mathbb{R}$.

Solucion 2.

Hallar el punto simétrico de $P(x,y)$ con respecto a la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in \mathbb{R}$, es equivalente a trasladar el punto $P(x,y)$, dos veces $d = d(P,L)$ unidades, en la dirección del vector unitario $\bar{u} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$

Es decir; $P_s = P + 2d\bar{u}$, donde $d = d(P,L) = \left|\frac{\overline{P_0P}\cdot\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}\right|$, $\bar{u} = (u_1, u_2)$

Por lo que;

$P_s = (x, y) + 2d(u_1, u_2)$

$P_s = (x, y) + (2du_1, 2du_2)$

$\boldsymbol{P_s(x + 2du_1, y + 2du_2)}$

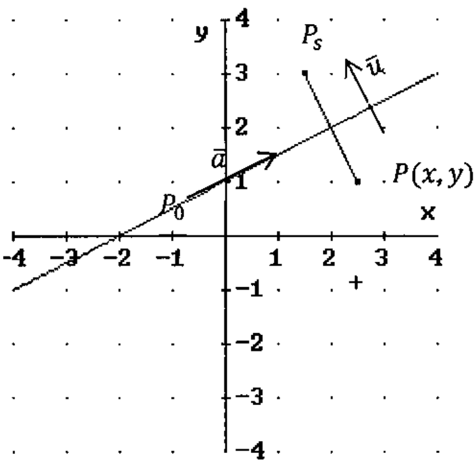
Equivalentemente aplicando;

$P_T = P + M_T\bar{a}$

Donde

$M_T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix},$

$t = 2d = 2d(P, L) = 2\left|\frac{\overline{P_0P}\cdot\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}\right|$, $\bar{a} =$



$\bar{u} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} = (u_1, u_2)$

Se tiene el punto simétrico

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 2d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2du_1 \\ 2du_2 \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2d\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$P_s = \begin{bmatrix} x + 2du_1 \\ y + 2du_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

El punto simétrico de $P(x, y)$ con respecto a la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in \mathbb{R}$ es $\boldsymbol{P_s(x + 2du_1, y + 2du_2)}$.

NOTAS

1. El punto simétrico de $P(x, y)$ con respecto a la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in \mathbb{R}$ En forma compacta es

   $\boldsymbol{P_s = P + 2d\bar{u}}$; $\boldsymbol{\bar{u}} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{d = d(P, L)}$, hay que tener cuidado con la dirección del vector $\bar{u}$.

2. Sean los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ y la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ para hallar los puntos simétricos de los puntos dados, reunidos en la matriz $P_s = [P_{s1}, P_{s2}, \dots, P_{sn}]$ con respecto a la recta dada, se sigue:

3. Se reúnen los puntos dados en la matriz de datos $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$

Se forma la matriz

$$2d\bar{u} = [2d_1\bar{u} \quad 2d_2\bar{u} \quad \ldots \quad 2d_n\bar{u}]\,,\, d_i = d(P_i, L), i = 1,2, \ldots, n$$

4. Finalmente, los puntos simétricos están dados por:

$$\boldsymbol{P_s = [P_1, P_2, \ldots, P_n] + [2d_1\bar{u} \quad 2d_2\bar{u} \quad \ldots \quad 2d_n\bar{u}]}$$

Ejercicio 3. Los vértices $P_1(1{,}0), P_2(0{,}0), P_3(0{,}2), P_4\left(\frac{3}{2}, 3\right), P_5(3{,}2)$, $P_6(3{,}0)$, $P_7(2{,}0), P_8(2{,}2), P_9(1{,}2)$ se unen con segmentos de recta formando una figura. Halle la figura simétrica con respecto a la recta $L: P = (4{,}0) + t(1{,}1)\,, t \in \mathbb{R}$.

Solucion 3.

Hallamos los puntos simétricos de los puntos dados, con respecto a la recta L, y luego los unimos con segmentos de recta.

Aplicando

$P_s = [P_1, P_2, \ldots, P_n] + [2d_1\bar{u} \quad 2d_2\bar{u} \quad \ldots \quad 2d_n\bar{u}]\,,\, d_i = d(P_i, L), i = 1,2, \ldots, n$

En forma compacta

$P_s = P + 2d_i\bar{u}\ ;\ \bar{u} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, d_i = d(P_i, L), i = 1,2, \ldots, n$

Los vértices en forma de vector columna los reunimos en la matriz de datos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La recta $L: P = (4{,}0) + t(1{,}1)\,, t \in \mathbb{R}$ en forma cartesiana es $L: x - y - 4 = 0$ y el vector $\bar{u} = -\frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ahora formamos el vector

$$2d_i\bar{u} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} & 2\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix}$$

$$2d_i\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 11/2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -6 & -11/2 & -3 & -1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

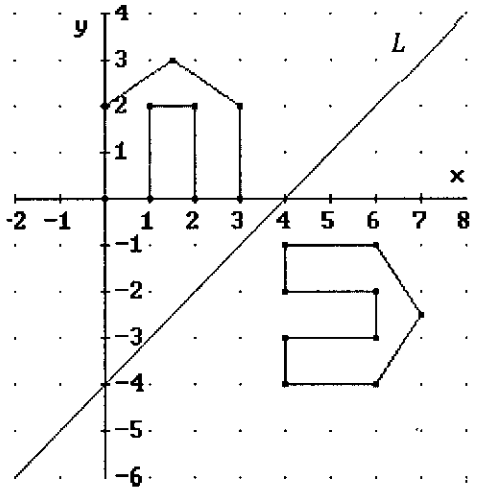
Luego

$$P_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 11/2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -6 & -11/2 & -3 & -1 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

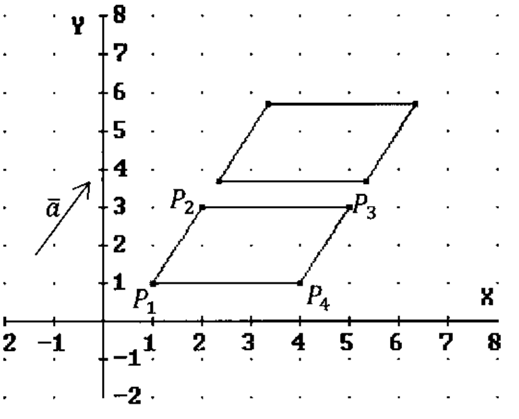
$$P_s = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 7 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -4 & -5/2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Finalmente se une con segmentos de recta estos vértices y se tiene la figura simétrica.



Ejercicio 4. Los vértices $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ unidos con segmentos de recta determinan una figura. Traslade la figura, t unidades en la dirección del vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y trace su gráfica.

Solucion 4.



Aplicando;

$P_T = P + M_T\bar{u}$, $\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Donde

$M_T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$, matriz de traslación t unidades en la dirección del vector $\bar{a}$.

Los vértices de la figura los representamos en forma de vector columna y los reunimos en la matriz de datos P.

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

Ahora los vértices de la figura trasladada están dados por:

$$P_T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_1 & u_1 & u_1 \\ u_2 & u_2 & u_2 & u_2 \end{bmatrix}$$

Se repite el vector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ tantas veces como vértices de la figura existan

$$P_T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tu_1 & tu_1 & tu_1 & tu_1 \\ tu_2 & tu_2 & tu_2 & tu_2 \end{bmatrix}$$

$$P_T = \begin{bmatrix} x_1 + tu_1 & x_2 + tu_1 & x_3 + tu_1 & x_4 + tu_1 \\ y_1 + tu_2 & y_2 + tu_2 & y_3 + tu_2 & y_4 + tu_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, los vértices trasladados se unen con segmentos de recta y se obtiene la figura trasladada.

Ejercicio 5. Los vértices $P_1(1{,}0), P_2(0{,}0), P_3(0{,}2), P_4\left(\frac{3}{2}, 3\right), P_5(3{,}2)$, $P_6(3{,}0)$, $P_7(2{,}0)$, $P_8(2{,}2), P_9(1{,}2)$ se unen con segmentos de recta formando una figura. Si la figura se traslada 4 unidades en la dirección del vector $\bar{a} = (1{,}1)$. Halle los vértices trasladados y trace la figura.

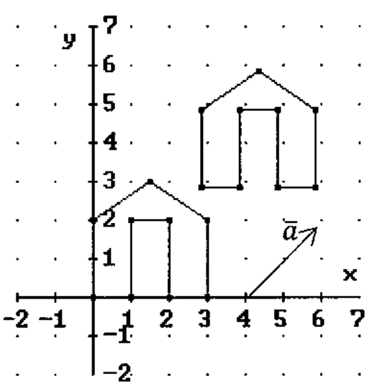
Solucion 5.

Trasladamos los vértices de la figura, 4 unidades en la dirección del vector

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{(1{,}1)}{\|(1{,}1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Aplicando para cada vértice de la figura

$P_T = P + M_T\bar{u}$, $M_T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$



Los vértices en forma de vector columna los reunimos en la matriz de datos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora formamos la matriz, repitiendo el vector $\bar{u}$ tantas veces como puntos dados exista.

$$M_T\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$M_T\bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P_T = \begin{bmatrix} 1+\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2}+\frac{4}{\sqrt{2}} & 3+\frac{4}{\sqrt{2}} & 3+\frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} & 1+\frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} & 3+\frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} & 2+\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Finalmente se une con segmentos de recta estos vértices y se tiene la figura trasladada.

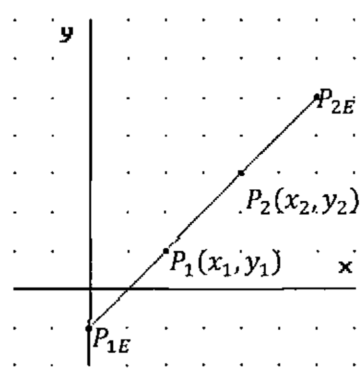
Ejercicio 6. Los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ determinan el segmento $\overline{P_1P_2}$. Halle el segmento expandido $\overline{P_{1E}P_{2E}}$ n veces el segmento $\overline{P_1P_2}$.

Solucion 6.

De la gráfica se tiene que:

$$P_{1E} = P_1 - \left(\frac{n-1}{2}\right) t\,\bar{u}\,;\ t = \|\overline{P_1P_2}\|\,, n = 1,2,3,4,\ldots$$

$$P_{2E} = P_2 + \left(\frac{n-1}{2}\right) t\,\bar{u}\ ;\ \ t = \|\overline{P_1P_2}\|, n = 1,2,3,4,\ldots$$



Donde; $\bar{u} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\|\overline{P_1P_2}\|} = (u_1, u_2)$

Reemplazando los puntos y el vector en forma de vector columna se tiene

$$P_{1E} = P_1 - \begin{bmatrix} \left(\frac{n-1}{2}\right)t & 0 \\ 0 & \left(\frac{n-1}{2}\right)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, n = 1,2,3,4,\ldots$$

$$P_{2E} = P_2 + \begin{bmatrix} \left(\frac{n-1}{2}\right)t & 0 \\ 0 & \left(\frac{n-1}{2}\right)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, n = 1,2,3,4,\ldots$$

Finalmente se tiene el segmento expandido $\overline{P_{1E}P_{2E}}$

En general, los vértices $P_1, P_2, \ldots, P_m$ forma una figura. Los vértices de la figura cuyos lados son expandidos n veces, en forma de vector columna, están dados por:

$$[P_{iEI}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iED}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Luego, la figura expandida n veces la longitud de sus lados tiene los vértices dados por:

$$[P_{iEIA}] = [P_{iEI}] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iEDA}] = [P_{iED}] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Finalmente

$$[P_{iEIA}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iEDA}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

En general, los vértices $P_1, P_2, \ldots, P_m$ forma una figura. Los vértices de la figura cuyos lados con contraídos n veces, en forma de vector columna, están dados por:

$$[P_{iCI}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iCD}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Luego, la figura contraída n veces la longitud de sus lados tiene los vértices dados por:

$$[P_{iCIA}] = [P_{iCI}] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iCDA}] = [P_{iCD}] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Finalmente

$$[P_{iCIA}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i\right] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iCDA}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Ejercicio 7. Sean $P_1(1,1), P_2(2,1), P_3(2,2), P_4(1,2)$ vértices de una figura. Halle los vértices de la figura cuyos lados son expandidos 3 veces.

Solucion 7.

Aplicando

$$[P_{iEIA}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_i P_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_i P_{i+1}}}{\|P_i P_{i+1}\|}, i = 1,3, \ldots$$

$$[P_{iEDA}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right],$$

$$t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1} P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1} P_i}}{\|P_{i-1} P_i\|}, i = 2,4, \ldots$$

Reunimos los vértices de la figura en forma de vector columna en la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallamos

$$t_1 = \|\overline{P_1 P_2}\| = \|(1,0)\| = 1, \bar{u}_1 = \frac{\overline{P_1 P_2}}{\|\overline{P_1 P_2}\|} = (1,0), \ \bar{u}_1^{\perp} = (0,1)$$

$$t_3 = \|\overline{P_3 P_4}\| = \|(-1,0)\| = 1, \bar{u}_3 = \frac{\overline{P_3 P_4}}{\|\overline{P_3 P_4}\|} = (-1,0), \ \bar{u}_3^{\perp} = (0,-1)$$

Formamos las matrices

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ i = 1,3$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ i = 1,3$$

$$-\left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right] = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, i = 1,3$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 2,4$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, i = 2,4$$

$$\left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, i = 2,4$$

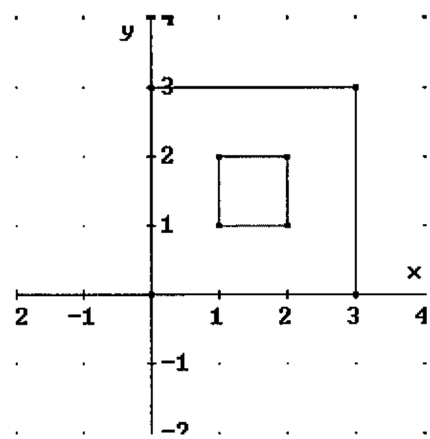
Luego los vértices de la figura extendida en forma de vector columna los reunimos en la adición de matrices

$P_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} +$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Finalmente, los vértices de la figura expandida están dados en la matriz

$$P_E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$



5.1.1.1.2 TRASLACIÓN DE VECTORES CON RESPECTO A UN PUNTO ARBITRARIO.

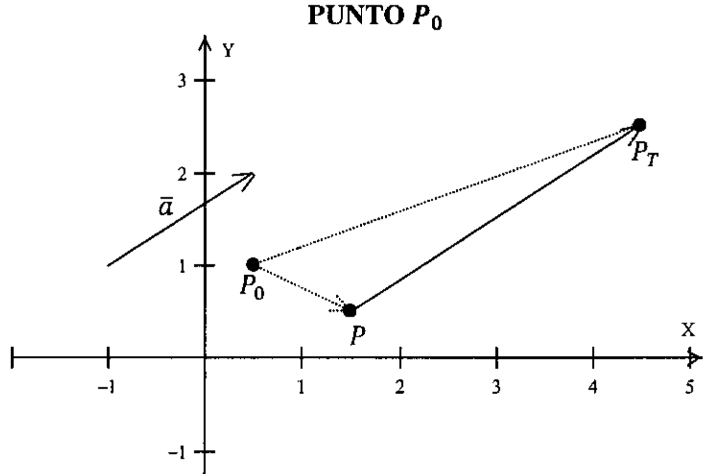
La traslación de un vector, en una dirección, con respecto a un punto arbitrario es como si se trasladara el punto de inicio y final del vector, en dicha dirección, con respecto a dicho punto arbitrario obteniéndose el punto de inicio y final del vector trasladado.

5.1.1.1.3 TRASLACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO A UN PUNTO ARBITRARIO.

En la figura se observa que:

$$\overline{P_0P_T} = \overline{P_0P} + \overline{PP_T}$$

FIGURA 5.2 TRASLACIÓN DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO $P(x, y)$ EN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $\bar{a} = (a_1, a_2)$ CON RESPECTO AL PUNTO P_0



Fuente. Elaboración propia

Donde:

$$\overline{PP_T} = t\bar{a}\,, t \in R$$

Luego

$$P_T - P_0 = P - P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$$

$$P_T = P + t\bar{a}\,, t \in R$$

Obteniéndose, el punto trasladado P_T del punto P igual como si hubiéramos trasladado con respecto al origen de coordenadas.

NOTAS

1. Trasladar un punto, en una dirección, con respecto a un punto arbitrario es como si trasladáramos dicho punto, en dicha dirección, con respecto al origen de coordenadas.
2. Trasladar un vector, en una dirección, con respecto a un punto arbitrario es como si trasladáramos dicho vector, en dicha dirección, con respecto al origen de coordenadas.
3. Trasladar un vector, en una dirección, con respecto al origen de coordenadas o con respecto a un punto arbitrario es el mismo vector dado, localizado a un múltiplo real en la dirección dada.

5.1.2 ROTACIÓN DE VECTORES.

Es de interés estudiar la rotación de un vector con respecto al origen de coordenadas y con respecto a un punto arbitrario.

5.1.2.1 ROTACIÓN DE VECTORES CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS.

La rotación de un vector con respecto al origen de coordenadas es como si rotáramos el punto de inicio y final de dicho vector con respecto al origen de coordenadas, obteniéndose el punto de inicio y final del vector rotado.

5.1.2.1.1 ROTACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ se rotan, en sentido antihorario, un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas, obteniéndose las nuevas coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ ver FIGURA 5.3, Es decir;

$$\overline{OP_R} = \|\overline{OP_R}\|\big(cos(\theta + \alpha), sen(\theta + \alpha)\big)$$

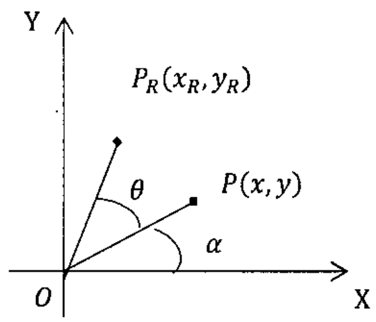


FIGURA 5.3 ROTACIÓN DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO P(x,y), EN SENTIDO ANTI HORARIO, DE UN ÁNGULO θ CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS O

Fuente. Elaboración propia

Donde;

$\|\overline{OP_R}\| = \|\overline{OP}\|, x = \|\overline{OP}\|cos\alpha\ , y = \|\overline{OP}\|sen\alpha$

Entonces

$$\overline{OP_R} = \|\overline{OP}\|(cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha, cos\theta sen\alpha + sen\theta cos\alpha)$$

$$\overline{OP_R} = (\|\overline{OP}\|cos\alpha cos\theta - \|\overline{OP}\|sen\alpha sen\theta, \|\overline{OP}\|sen\alpha cos\theta + \|\overline{OP}\|cos\alpha sen\theta)$$

$$\overline{OP_R} = (xcos\theta - ysen\theta, ycos\theta + xsen\theta)$$

$$\overline{OP_R} = (xcos\theta, xsen\theta) + (-ysen\theta, ycos\theta)$$

$$\overline{OP_R} = x(cos\theta, sen\theta) + y(-sen\theta, cos\theta)$$

Si $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$ entonces

$$\boldsymbol{P_R = x\bar{u} + y\bar{u}^{\perp}}$$

Utilizando la representación del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta\,)$ en forma de vector columna

$$P_R = x\begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} xcos\theta \\ xsen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ysen\theta \\ ycos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + ycos\theta \end{bmatrix}$$

Finalmente, las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ en forma matricial está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sen\theta} \\ \boldsymbol{sen\theta} & \boldsymbol{cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P_R = M_{R(\theta)}P}$$

Donde $M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ es llamada matriz de rotación del punto P , en sentido anti horario, de un ángulo θ.

NOTA

La rotación del punto $P(x, y)$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas es equivalente a la rotación del vector de posición $\overline{OP}$ del punto P, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas.

Ejercicio 8. Halle las coordenadas del punto $P(x, y)$ después de sufrir una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ con respecto al origen de coordenadas.

Solucion 8.

Aplicando

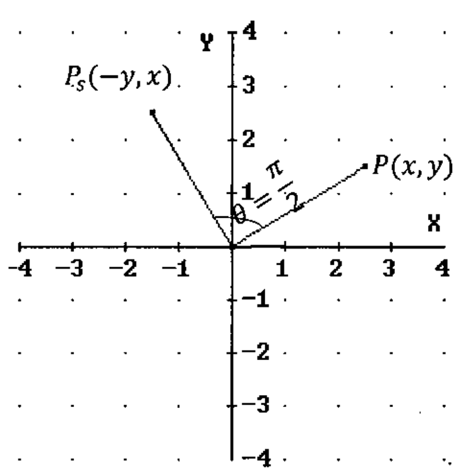
$P_R = x\bar{u} + y\bar{u}^{\perp}$

Donde; $\bar{u} = \left(cos\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$

$P_R = x(0,1) + y(-1,0)$

$P_R = (0, x) + (-y, 0)$

$\boldsymbol{P_R(-y, x)}$

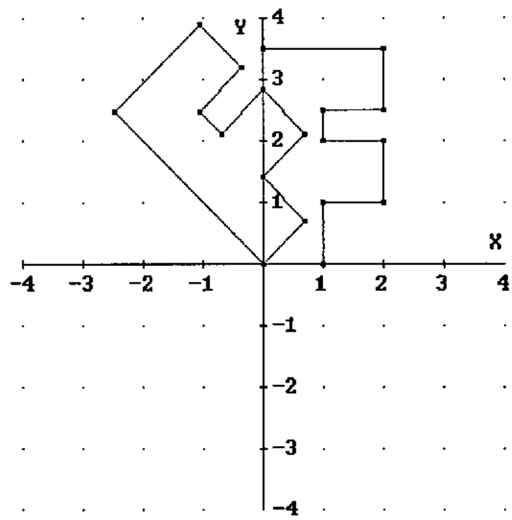


Finalmente, el punto $P(x, y)$ después de sufrir una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ con respecto al origen de coordenadas es $\boldsymbol{P_R(-y, x)}$.

Ejercicio 9. Los vértices $(0,0), \left(0, \frac{7}{2}\right), \left(2, \frac{7}{2}\right), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(1, \frac{5}{2}\right), (1,2), (2,2), (2,1), (1,1), (1,0)$ de una figura sufren una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$. Halle los vértices rotados y trace la figura rotada.

Solucion 9.

Ubicando los vértices y uniéndolos con segmentos de recta se tiene la figura:



Aplicando

$$P_R = M_{R(\theta)}P$$

Donde

$$M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Para cada uno de los vértices de la figura.

Los vértices de la figura los representamos en forma de vector columna y los reunimos en la matriz de datos P.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/2 & 5/2 & 2/5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de rotación

$$M_{R\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} cos\dfrac{\pi}{4} & -sen\dfrac{\pi}{4} \\ sen\dfrac{\pi}{4} & cos\dfrac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Los vértices rotados están dados por

$$P_R = M_{R\left(\frac{\pi}{4}\right)}P$$

$$P_R = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/2 & 5/2 & 2/5 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{7\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{7\sqrt{2}}{4} & \dfrac{11\sqrt{2}}{4} & \dfrac{9\sqrt{2}}{4} & \dfrac{7\sqrt{2}}{4} & \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} & \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, estos vértices rotados se unen con segmentos de recta y se obtiene la figura rotada.

5.1.2.2 ROTACIÓN DE VECTORES CON RESPECTO A UN PUNTO ARBITRARIO.

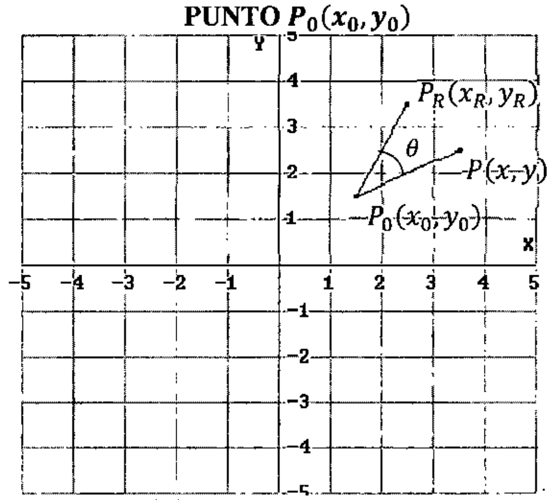
La rotación de un vector con respecto a un punto arbitrario es como si rotáramos el punto de inicio y final de dicho vector con respecto al punto arbitrario, obteniéndose el punto de inicio y final del vector rotado.

5.1.2.2.1 ROTACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO A UN PUNTO ARBITRARIO.

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ se rotan, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto $P_0(x_0, y_0)$, obteniéndose las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$, ver FIGURA 5.4. Es decir;

$$\overline{P_0P_R} = \|\overline{P_0P_R}\|\left(cos(\theta + \alpha), sen(\theta + \alpha)\right)$$

FIGURA 5.4 ROTACIÓN DE COORDENADAS DEL PUNTO P(x, y), EN SENTIDO ANTI HORARIO, DE UN ÁNGULO Θ CON RESPECTO AL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$



Fuente. Elaboración propia

Dónde:

α es el ángulo formado por el semieje positivo de las X_s y el vector $\overline{P_0P}$,

$\|\overline{P_0P_R}\| = \|\overline{P_0P}\|$, $x - x_0 = \|\overline{P_0P}\|cos\alpha$, $y - y_0 = \|\overline{P_0P}\|sen\alpha$

Desarrollando y reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\overline{P_0P_R} = \|\overline{P_0P}\|(cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha, cos\theta sen\alpha + sen\theta cos\alpha)$$

$$\overline{P_0P_R} = \left(\underbrace{\|\overline{P_0P}\|cos\alpha}_{x-x_0} cos\theta - \underbrace{\|\overline{P_0P}\|sen\alpha}_{y-y_0} sen\theta, \underbrace{\|\overline{P_0P}\|sen\alpha}_{y-y_0} cos\theta + \underbrace{\|\overline{P_0P}\|cos\alpha}_{x-x_0} sen\theta\right)$$

$\overline{P_0P_R} = \big((x - x_0)cos\theta - (y - y_0)sen\theta, (y - y_0)cos\theta + (x - x_0)sen\theta\big)$

$\overline{P_0P_R} = \big((x - x_0)cos\theta, (x - x_0)sen\theta\ \big) + (-(y - y_0)sen\theta, (y - y_0)cos\theta)$

$\overline{P_0P_R} = (x - x_0)(cos\theta, sen\theta\ ) + (y - y_0)(-sen\theta, cos\theta)$

Si $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta\ )$, entonces

$\overline{P_0P_R} = (x - x_0)\bar{u} + (y - y_0)\bar{u}^{\perp}$

$P_R - P_0 = (x - x_0)\bar{u} + (y - y_0)\bar{u}^{\perp}$

Finalmente, el punto rotado está dado por:

$$\boldsymbol{P_R = P_0 + (x - x_0)\bar{u} + (y - y_0)\bar{u}^{\perp}}$$

Utilizando la representación del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta\ )$ en forma de vector columna

$$P_R = P_0 + (x - x_0)\begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + (y - y_0)\begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} (x - x_0)cos\theta \\ (x - x_0)sen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(y - y_0)sen\theta \\ (y - y_0)cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} (x - x_0)cos\theta - (y - y_0)sen\theta \\ (x - x_0)sen\theta + (y - y_0)cos\theta \end{bmatrix}$$

Aplicando la multiplicación de matrices

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ en forma matricial está dado por:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P_R = P_0 + M_{R(\theta)}\overline{P_0P}}$$

Donde $M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ es llamada matriz de rotación del vector $\overline{P_0P}$, en sentido antihorario, de un ángulo θ.

NOTA

La rotación del punto $P(x, y)$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto P_0 es equivalente a la rotación del vector $\overline{P_0P}$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto P_0.

Ejercicio 10. El punto $P_1(3, \frac{7}{2})$ sufre una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{4}$ con respecto al punto $P_0(2, \frac{3}{2})$. Halle las coordenadas del punto rotado.

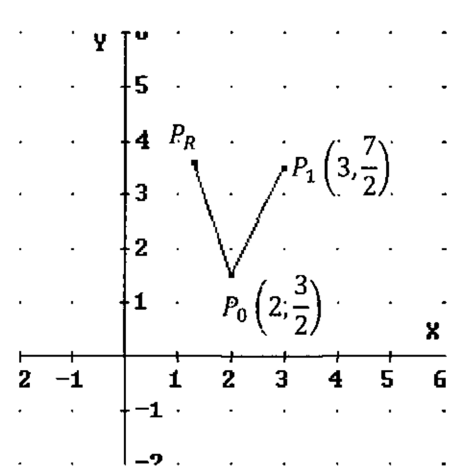
Solucion 10.

Aplicando

$$P_R = P_0 + M_{R(\theta)}\overline{P_0P}$$

Donde

$$M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$



Para el punto P_1.

El vector $\overline{P_0P_1} = P_1 - P_0$ se representa en forma de vector columna

$$\overline{P_0P_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de rotación

$$M_{R\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sen\frac{\pi}{4} \\ sen\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Luego el vector $\overline{P_0P_1}$ rotado está dado por

$$M_{R(\theta)}\overline{P_0P_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Esto es

$$\overline{P_0P_R} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el punto $P_0(2, \frac{3}{2})$ rotado es:

$$P_R = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Es decir;

$$P_R\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ejercicio 11.

Los vértices $(2,1), \left(2, \frac{9}{2}\right), \left(4, \frac{9}{2}\right), \left(4, \frac{7}{2}\right), \left(3, \frac{7}{2}\right), (3,3), (4,3), (4,2), (3,2), (3,1)$ de una figura sufren una rotación, en sentido anti horario, de un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ con respecto al punto $P_0(1,1)$. Halle los vértices rotados y trace la figura rotada.

Solucion 11.

Aplicando

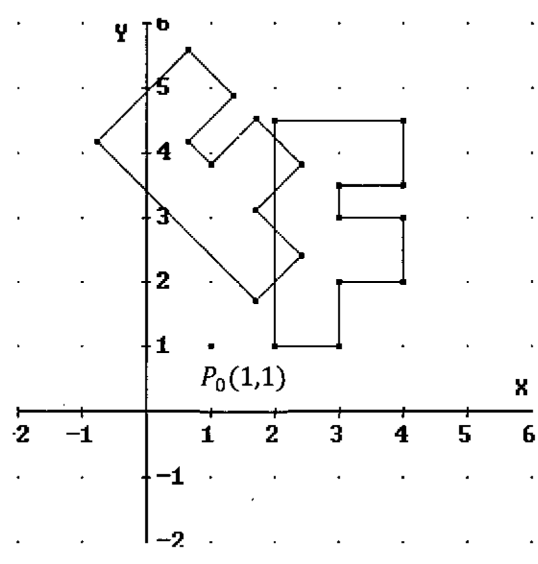
$$P_R = P_0 + M_{R(\theta)}\overline{P_0P}$$

Donde

$$M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Para cada uno de los vértices de la figura.

Los vértices de la figura los representamos en forma de vector columna y los reunimos en la matriz de datos P.



$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 9/2 & 9/2 & 7/2 & 7/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de rotación

$$M_{R\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sen\frac{\pi}{4} \\ sen\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz del vector $\overline{P_0P} = P - P_0$ queda representada por

$$\overline{P_0P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 9/2 & 9/2 & 7/2 & 7/2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P_0P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 7/2 & 7/2 & 5/2 & 5/2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego los vértices rotados están dados por

$$P_R = P_0 + M_{R(\theta)}\overline{P_0P}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 7/2 & 7/2 & 5/2 & 5/2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_R =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 1-\frac{5\sqrt{2}}{4} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & 1-\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \sqrt{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \sqrt{2}+1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 1+\frac{9\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{13\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{11\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{9\sqrt{2}}{4} & 1+2\sqrt{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2}+1 & 2\sqrt{2}+1 & \frac{3\sqrt{2}}{2}+1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, estos vértices rotados se unen con segmentos de recta y se obtiene la figura rotada.

Ejercicio 12. Utilizando la rotación de un vector con respecto a un punto. Halle el punto simétrico de $Q(5,8)$ con respecto a la recta

$$L: P = (3,2) + t(2,1)\,; t \in R.$$

Solucion 12.

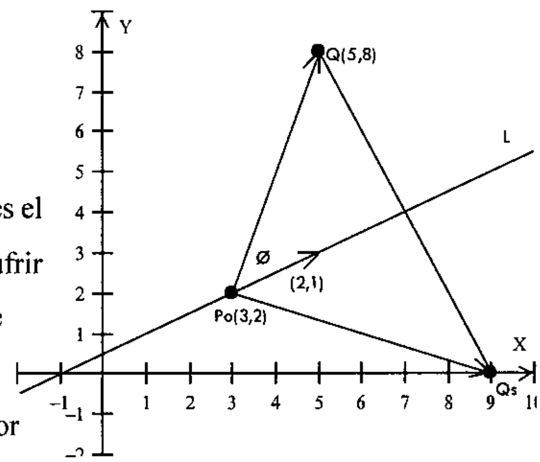
Se desea hallar el punto simétrico de $Q(5,8)$, con respecto a la recta L, esto es Q_S, utilizando la rotación de un vector con respecto a un punto.

Recordamos que, la rotación de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$, en sentido antihorario, de un ángulo θ, con respecto al origen de coordenadas o con respecto a un punto arbitrario esta dado por:

$$\bar{a}_r = a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^{\perp}\,, \bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$$

De donde se obtiene:

$$\begin{cases} a_1 = \bar{a}_r \cdot \bar{u} \\ a_2 = \bar{a}_r \cdot \bar{u}^{\perp} \end{cases}$$



En la figura;

se observa que el vector $\overline{P_0Q} = (2,6)$ es el vector $\overline{P_0Q_s} = (a_1, a_2)$ después de sufrir una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo $2\emptyset$.

Ahora hallamos el ángulo $\emptyset$ formado por el vector direccional $(2,1)$ de la recta L y el vector $\overline{P_0Q} = (2,6)$.

$$cos\emptyset = \frac{(2,1)\cdot(2,6)}{\|(2,1)\|\|(2,6)\|} = \frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \emptyset = \frac{\pi}{4}$$

Entonces

$$\bar{u} = (cos2\emptyset, sen2\emptyset) = \left(cos\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{2}\right) \rightsquigarrow \bar{u} = (0,1)$$

Luego las coordenadas del vector $\overline{P_0Q_s} = (a_1, a_2)$ están dadas por

$$\begin{cases} a_1 = (2,6)\cdot(0,1) = 6 \\ a_2 = (2,6)\cdot(-1,0) = -2 \end{cases} \rightsquigarrow \overline{P_0Q_s} = (6,-2)$$

$$Q_s = P_0 + (6,-2)$$

$$Q_s = (3,2) + (6,-2)$$

Finalmente, el punto simétrico de $Q(5,8)$ con respecto a la recta L es $Q_s = (9,0)$

Ejercicio 13. Utilizando la rotación de un vector con respecto a un punto. Halle el punto simétrico de $Q(4,8)$ con respecto a la recta

$L{:}\, P = (3,1) + t(3,1)\,; t \in R.$

Solucion 13.

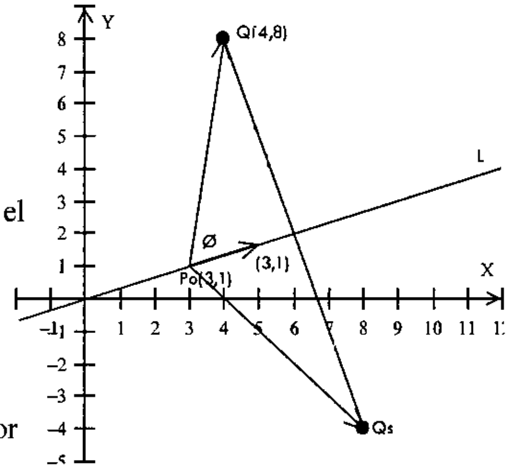
Se desea hallar el punto simétrico de $Q(4,8)$ con respecto a la recta L, esto es Q_s utilizando la rotación de un vector con respecto a un punto.

Recordamos que, la rotación de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$, en sentido antihorario, de un ángulo θ, con respecto al origen de coordenadas o con respecto a un punto arbitrario este dado por:

$$\bar{a}_r = a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^{\perp}\,, \bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$$

De donde se obtiene:

$$\begin{cases} a_1 = \bar{a}_r \cdot \bar{u} \\ a_2 = \bar{a}_r \cdot \bar{u}^{\perp} \end{cases}$$



En la figura;

se observa que el vector $\overline{P_0Q} = (1,7)$ es el vector $\overline{P_0Q_s} = (a_1, a_2)$ después de sufrir una rotación, en sentido antihorario, de un ángulo $2\emptyset$.

Ahora hallamos el ángulo $\emptyset$ formado por el vector direccional $(3,1)$ de la recta L y el vector $\overline{P_0Q} = (1,7)$.

$$cos\emptyset = \frac{(3,1)\cdot(1,7)}{\|(3,1)\|\|(1,7)\|} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Recordamos:

$$cos\emptyset = \sqrt{\frac{1+cos2\emptyset}{2}} \rightsquigarrow cos2\emptyset = 2cos^2\emptyset - 1 \rightsquigarrow cos2\emptyset = 2\frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$sen\emptyset = \sqrt{\frac{1-cos2\emptyset}{2}}$$

$$sen2\emptyset = 2sen\emptyset cos\emptyset \rightsquigarrow sen2\emptyset = 2\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

Entonces

$$\bar{u} = (cos2\emptyset, sen2\emptyset) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Luego las coordenadas del vector $\overline{P_0Q_s} = (a_1, a_2)$ están dadas por

$$\begin{cases} a_1 = (1,7)\cdot\frac{1}{5}(-3,4) = 5 \\ a_2 = (1,7)\cdot\frac{1}{5}(-4,-3) = -5 \end{cases} \rightsquigarrow \overline{P_0Q_s} = (5,-5)$$

$$Q_s = P_0 + (5, -5)$$
$$Q_s = (3,1) + (5, -5)$$

Finalmente, el punto simétrico de $Q(4,8)$ con respecto a la recta L es

$$Q_s = (8, -4)$$

5.2 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES COORDENADOS EN R^2

En la traslación y rotación de ejes coordenados en R^2, los vectores permanecen fijos, no se mueven, obteniéndose nuevos sistemas de ejes coordenados y los vectores tienen coordenadas en términos de las coordenadas que poseen en los nuevos sistemas de ejes coordenados.

5.2.1 TRASLACIÓN DE EJES COORDENADOS

El par de ejes coordenados X , Y perpendiculares determinan el sistema de coordenadas XY. La intersección de los ejes coordenados X e Y determinan el origen $O(0,0)$ del sistema de coordenadas XY.

Si trasladamos el punto origen $O(0,0)$ del sistema de coordenadas XY en la dirección del vector $\overline{OP_0}$ se obtiene el punto $P_0(h,k)$ origen del nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$. Equivalentemente, trasladamos el origen $O(0,0)$ del sistema de coordenadas XY, h unidades en la dirección del vector $\bar{u} = (1,0)$ y luego, k unidades en la dirección del vector $\bar{u}^{\perp} = (0,1)$ obteniéndose el punto $P_0(h,k)$ origen del nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$. Es decir;

$$P_0 = O + h\bar{u} + k\bar{u}^{\perp}$$

Equivalentemente

$$\boldsymbol{P_0 = h\bar{u} + k\bar{u}^{\perp}}$$

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, las coordenadas del p unto $P(x,y)$ en términos de las coordenadas que posee en el sistema $X'Y'$ esta dado por:

$$P = O + h\bar{u} + k\bar{u}^{\perp} + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$$
$$P = \underbrace{h\bar{u} + k\bar{u}^{\perp}}_{P_0} + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$$
$$\boldsymbol{P = P_0 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}\ ,\ \bar{u} = (1,0)}$$

Reemplazando las coordenadas en forma de vector columna se tiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + x' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En forma matricial;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

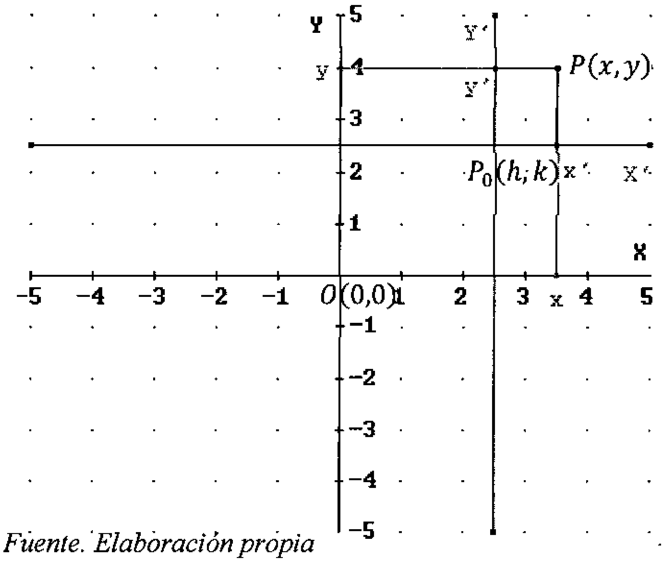
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (h + x') \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (k + y') \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h + x' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k + y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h + x' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k + y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{k} + \boldsymbol{y'} \end{bmatrix}$$

FIGURA 5.5 COORDENADAS DEL PUNTO $P(x, y)$ EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS QUE POSEE EN EL SISTEMA TRASLADADO $X'Y'$



Fuente. Elaboración propia

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P'}$$

$$\boldsymbol{P'} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0$$

Donde $P'(x', y')$ son las coordenadas del punto $P(x, y)$ en el sistema $X'Y'$

NOTA.

Al referirnos al sistema de coordenadas XY o al sistema de coordenadas $X'Y'$ será simplemente como, el sistema XY o el sistema $X'Y'$ respectivamente.

Ejercicio 14. El origen del sistema XY se traslada al punto $P_0(2,3)$y los ejes de coordenadas no sufren rotación alguna. Halle la ecuación de la recta $L: P = (3,2) + t(2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$ en el nuevo sistema.

Solucion 14.

Se desea hallar la recta $L: P = (3,2) + t(2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$ en el nuevo sistema. Es decir;

$$L': P' = Q'_0 + r\bar{a}\,, r \in \mathbb{R}$$

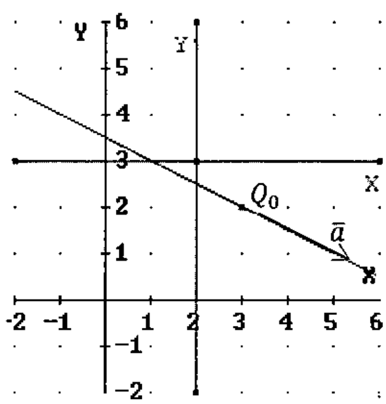
Recordamos

$$P' = P - P_0$$

Llevamos el punto de paso $Q_0(3,2)$ al nuevo sistema

$Q'_0 = (3,2) - (2,3) \;\leadsto\; Q'_0(1,-1)$

Como los ejes de coordenadas no han sufrido rotación alguna el vector direccional de la recta L' es el mismo que para L , esto es $\bar{a} = (2,-1)$



Finalmente, la recta L en el nuevo sistema es:

$$L': P' = (1,-1) + r(2,-1)\,, r \in \mathbb{R}$$

5.2.2 ROTACIÓN DE EJES COORDENADOS

Si fijamos el origen de coordenadas $O(0,0)$ y rotamos el sistema XY, en sentido antihorario un ángulo θ, se obtiene el sistema $X'Y'$ de modo que el semieje positivo de las X'_s está en la dirección del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$.

En la FIGURA 5.6 se observa que las coordenadas del punto $P(x,y)$ están dadas por:

$$P = O + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$$

$$\boldsymbol{P = x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}}$$

Reemplazando las coordenadas en forma de vector columna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x' \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

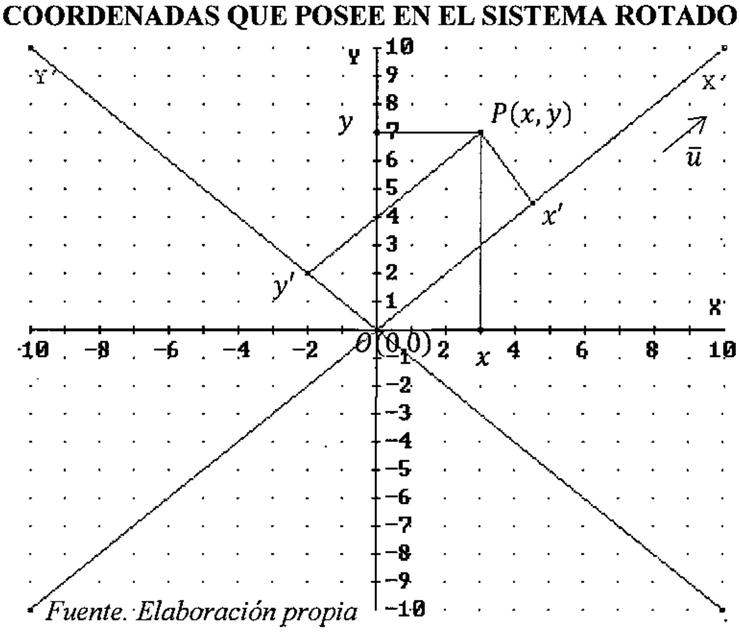
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'cos\theta \\ x'sen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y'sen\theta \\ y'cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x'cos\theta - y'sen\theta} \\ \boldsymbol{x'sen\theta + y'cos\theta} \end{bmatrix}$$

Si $\bar{u} = (u_1, u_2)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'u_1 - y'u_2 \\ x'u_2 + y'u_1 \end{bmatrix}$$

FIGURA 5.6 COORDENADAS DEL PUNTO $P(x, y)$ EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS QUE POSEE EN EL SISTEMA ROTADO $X'Y'$



Fuente. Elaboración propia

Llamadas ecuaciones de rotación.

Aplicando multiplicación escalar en la ecuación $P = x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}$ por el vector $\bar{u}$ y por el vector $\bar{u}^{\perp}$ se tiene:

$(P) \cdot \bar{u} = (x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}) \cdot \bar{u} \quad \rightsquigarrow \quad x' = (P) \cdot \bar{u}$

$(P) \cdot \bar{u}^{\perp} = (x'^{\bar{u}} + y'^{\bar{u}^{\perp}}) \cdot \bar{u}^{\perp} \quad \rightsquigarrow \quad y' = (P) \cdot \bar{u}^{\perp}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = (P) \cdot \bar{u}} \\ \boldsymbol{y' = (P) \cdot \bar{u}^{\perp}} \end{cases}$$

Expresión que permite obtener las coordenadas del punto $P(x, y)$ en el sistema rotado $X'Y'$.

NOTAS.

1. El sistema $X'Y'$ es llamado sistema rotado.
2. El vector $\bar{u} = (u_1, u_2)$ es llamado vector de rotación del sistema XY.
3. El Origen de coordenadas $O(0,0)$ es el mismo en ambos sistemas.

Ejercicio 15. El sistema XY sufre una rotación, en sentido anti horario, de modo que su vector de rotación es paralelo al vector $(1,1)$. Halle la ecuación de la recta $L: P = (3,2) + t(2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$ en el nuevo sistema.

Solucion 15.

Se desea hallar la recta $L: P = (3,2) + t(2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$ en el nuevo sistema. Es decir;

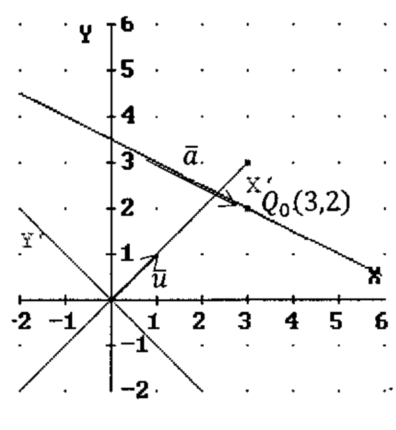
$$L': P' = Q'_0 + r\bar{a}\,', r \in \mathbb{R}$$

Recordamos

$$x' = (P) \cdot \bar{u}$$
$$y' = (P) \cdot \bar{u}^{\perp}$$

Donde;

$$\bar{u} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Llevamos el punto de paso $Q_0(3,2)$ al nuevo sistema

$$Q'_0 = \left((3,2) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (3,2) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \rightsquigarrow\ Q'_0\left(\tfrac{5}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Llevamos el vector direccional $\bar{a} = (2,-1)$ de la recta L al nuevo sistema

$$\bar{a}\,' = \left((2,-1) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ (2,-1) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \rightsquigarrow\ \bar{a}\,' = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente;

$$\boldsymbol{L': P' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\,, r \in \mathbb{R}}$$

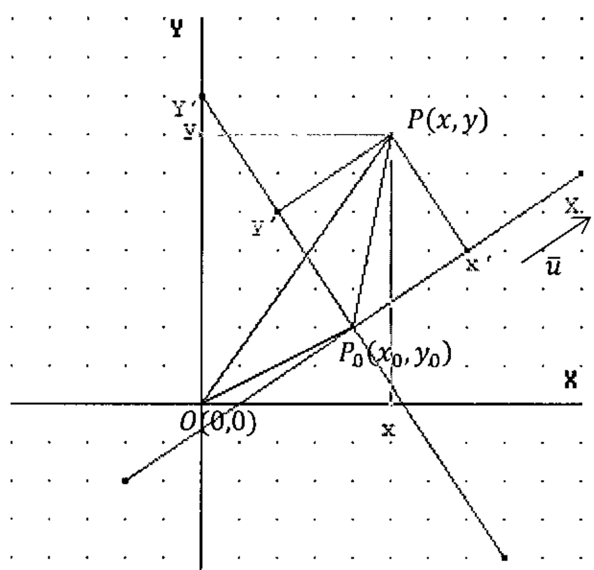
Equivalentemente;

$$L': P' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k\,(1,-3)\,, r \in \mathbb{R}$$

5.2.3 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES COORDENADOS.

Si trasladamos el origen de coordenadas $O(0,0)$ al punto $P_0(x_0, y_0)$ origen del nuevo sistema y luego rotamos los ejes coordenados, en sentido anti horario un ángulo θ, se obtiene el sistema $X'Y'$ de modo que el semieje positivo de las X'_s está en la dirección del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$.

FIGURA 5.7 COORDENADAS DEL PUNTO $P(x,y)$ EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS QUE POSEE EN EL SISTEMA TRASLADADO Y ROTADO $X'Y'$



Fuente. Elaboración propia

En la FIGURA 5.7, se observa que

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}$$

Donde

$\overline{P_0P} = x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}\,, \|\bar{u}\| = 1$

Por lo que las coordenadas del punto $P(x,y)$ están dadas por:

$\boldsymbol{P = P_0 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp}\,, \|\bar{u}\| = 1}$

Formula que permite obtener las coordenadas del punto $P(x,y)$ en términos de las coordenadas que posee en el sistema $X'Y'$.

Reemplazando las coordenadas en forma de vector columna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + x' \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'cos\theta \\ x'sen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y'sen\theta \\ y'cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_0 + x'cos\theta - y'sen\theta} \\ \boldsymbol{y_0 + x'sen\theta + y'cos\theta} \end{bmatrix}$$

Si $\overline{u} = (u_1, u_2)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x'u_1 - y'u_2 \\ y_0 + x'u_2 + y'u_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando multiplicación escalar en la ecuación $P = P_0 + x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}$ por el vector $\overline{u}$ y por el vector $\overline{u}^{\perp}$ se tiene:

$(P - P_0) \cdot \overline{u} = (x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}) \cdot \overline{u} \quad \rightsquigarrow \quad x' = (P - P_0) \cdot \overline{u}$

$(P - P_0) \cdot \overline{u}^{\perp} = (x'\overline{u} + y'\overline{u}^{\perp}) \cdot \overline{u}^{\perp} \quad \rightsquigarrow \quad y' = (P - P_0) \cdot \overline{u}^{\perp}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = (P - P_0) \cdot \overline{u}} \\ \boldsymbol{y' = (P - P_0) \cdot \overline{u}^{\perp}} \end{cases}$$

Expresión que permite obtener las coordenadas del punto $P(x, y)$ en el sistema trasladado y rotado $X'Y'$.

NOTAS.

1. El sistema $X'Y'$ es llamado sistema trasladado y rotado.
2. El vector $\overline{u} = (u_1, u_2)$ es llamado vector de rotación del sistema XY.
3. El punto $P_0(x_0, y_0)$ es origen del sistema $X'Y'$.

Ejercicio 16. El vector (3,4) es paralelo al vector de rotación del sistema XY cuyo origen ha sido trasladado al punto $P_0(4,2)$. En el nuevo sistema, halle la ecuación vectorial de la recta $L: P = (1,2) + t(1,2), t \in \mathbb{R}$

Solucion 16.

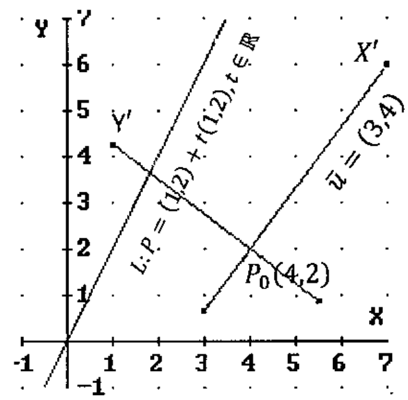
Se desea hallar la recta $L: P = (1,2) + t(1,2), t \in \mathbb{R}$ en el sistema $X'Y'$

Recordamos

$$x' = (P - P_0) \cdot \overline{u}$$
$$y' = (P - P_0) \cdot \overline{u}^{\perp}$$

Dónde: $P_0(4,2)$, $\bar{u} = \frac{1}{5}(3,4)$

Llevamos el punto de paso (1,2) de la recta L al sistema $X'Y'$.



$$x' = ((1,2) - (4,2)) \cdot \frac{1}{5}(3,4)$$

$$x' = (-3,0) \cdot \frac{1}{5}(3,4) = -\frac{9}{5}$$

$$y' = ((1,2) - (4,2)) \cdot \frac{1}{5}(-4,3)$$

$$y' = (-3,0) \cdot \frac{1}{5}(-4,3) = \frac{12}{5}$$

Luego el punto $\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ es punto de paso de la recta L'

Llevamos el vector direccional (1,2) de la recta L al sistema $X'Y'$.

$$x' = (1,2) \cdot \frac{1}{5}(3,4) = \frac{11}{5}$$

$$y' = (1,2) \cdot \frac{1}{5}(-4,3) = \frac{2}{5}$$

Luego el vector direccional de la recta L' es $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ paralelo al vector $(11,2)$.

Finalmente, la recta L' esta dada por

$$L': P' = \left(-\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right) + t(11,2)\,, t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 17. Sean $P_1(4,2), P_2\left(\frac{38}{5}, \frac{34}{5}\right), P_3\left(\frac{8}{5}, \frac{44}{5}\right)$ vértices de un triángulo. Halle la ecuación del lugar geométrico, descrito por los puntos de intersección de las diagonales de los rectángulos inscritos en el triángulo, si uno de los lados siempre está sobre $\overline{P_1P_2}$.

Solucion 17.

Para hallar la ecuación del lugar geométrico, de los puntos de intersección de las diagonales de los rectángulos inscritos en un triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 si uno de los lados siempre está sobre $\overline{P_1P_2}$, se sigue:

El sistema XY se traslada y se rota; el origen se traslada al punto P_1 y el vector de rotación es paralelo al vector $\overline{P_1P_2}$.

Es decir, todo punto de $\mathbb{R}^2$ esta dado por:

$$P = P_1 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^{\perp} \,,\ \bar{u} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\|\overline{P_1P_2}\|} \,,\ \overline{P_1P_2} = (3{,}4)$$

De donde se obtiene

$$\begin{cases} x' = (P - P_1) \cdot \bar{u} \\ y' = (P - P_1) \cdot \bar{u}^{\perp} \end{cases} ,\ P_1(4{,}2) \,,\ \bar{u} = \frac{1}{5}(3{,}4)$$

Llevamos los vértices del triángulo dado al sistema $X'Y'$.

El vértice $P_1(4{,}2)$, es el origen del nuevo sistema $X'Y'$.

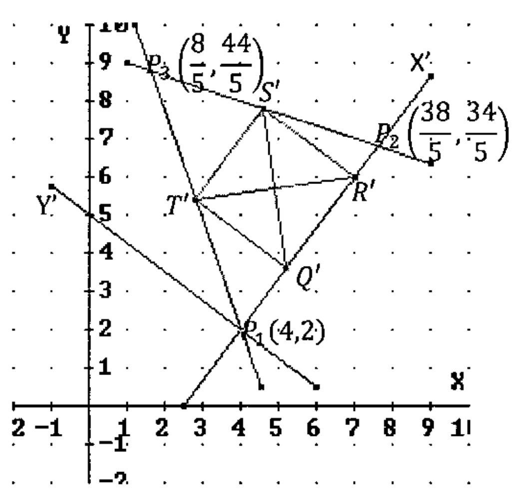
El vértice $P_2\left(\frac{38}{5},\frac{34}{5}\right)$

$$\begin{cases} x' = \left(\left(\frac{38}{5},\frac{34}{5}\right) - (4{,}2)\right) \cdot \frac{1}{5}(3{,}4) = \left(\frac{18}{5},\frac{24}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}(3{,}4) = 6 \\ y' = \left(\left(\frac{38}{5},\frac{34}{5}\right) - (4{,}2)\right) \cdot \frac{1}{5}(-4{,}3) = \left(\frac{18}{5},\frac{24}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}(-4{,}3) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow P'_2(6{,}0)$$

El vértice $P_3\left(\frac{38}{5},\frac{34}{5}\right)$

$$\begin{cases} x' = \left(\left(\frac{8}{5},\frac{44}{5}\right) - (4{,}2)\right) \cdot \frac{1}{5}(3{,}4) = \left(-\frac{12}{5},\frac{34}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}(3{,}4) = 4 \\ y' = \left(\left(\frac{8}{5},\frac{44}{5}\right) - (4{,}2)\right) \cdot \frac{1}{5}(-4{,}3) = \left(-\frac{12}{5},\frac{34}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}(-4{,}3) = 6 \end{cases} \rightsquigarrow P'_3(4{,}6)$$

En la figura se traza el rectángulo de vértices $Q'(x'_Q,0), R'(x'_R,0), T'(x'_Q,y'_T)$, $S'(x'_R,y'_T)$.



Pero

$$T'(x'_Q, y'_T) \in L_1: 3x' - 2y' = 0 \rightsquigarrow y'_T = \frac{3}{2}x'_Q \rightsquigarrow T'\left(x'_Q, \frac{3}{2}x'_Q\right)$$

Pero

$$S'(x'_R, y'_T) \in L_2: 3x' + y' - 18 = 0 \rightsquigarrow y'_T = -3x'_Q + 18$$

$$\rightsquigarrow S'(x'_R, -3x'_R + 18)$$

La intersección de las diagonales de un rectángulo es punto medio de sus correspondientes vértices.

Si (x', y')son las coordenadas genéricas del lugar geométrico descrito por la intersección de las diagonales de los rectángulos, entonces

$$(x', y') = \frac{1}{2}(Q' + S') \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x'_Q + x'_R) & (1) \\ y' = \frac{1}{2}(-3x'_R + 18) & (2) \end{cases}$$

$$(x', y') = \frac{1}{2}(R' + T') \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x'_Q + x'_R) & (1) \\ y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x'_Q\right) & (3) \end{cases}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}y' + \left(-\frac{2}{3}y' + 6\right)\right)$$

Luego, la ecuación del lugar geométrico en el sistema $X'Y'$ esta dado por:

$$\mathbf{3x' - y' - 9 = 0}$$

Llevando esta ecuación al sistema XY, utilizando

$$\begin{cases} x' = (P - P_1) \cdot \bar{u} = (x - 4, y - 2) \cdot \frac{1}{5}(3,4) = \frac{1}{5}(3x + 4y - 20) \\ y' = (P - P_1) \cdot \bar{u}^{\perp} = (x - 4, y - 2) \cdot \frac{1}{5}(-4,3) = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 10) \end{cases}$$

Se tiene

$$3\frac{1}{5}(3x + 4y - 20) - \frac{1}{5}(-4x + 3y + 10) - 9 = 0$$

Finalmente, la ecuación del lugar geométrico en el sistema XY esta dado por:

$$\mathbf{13x + 9y - 115 = 0}$$

CAPITULO VI. VECTORES EN EL ESPACIO R³

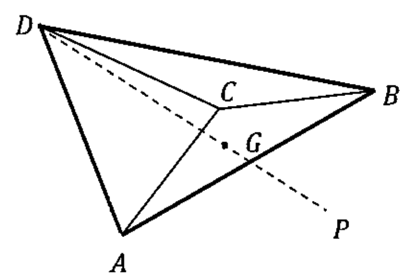
6.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE VECTORES EN R^3

Los vectores en el espacio vectorial R^3, son aquellos vectores de R^n con $n = 3$. Las definiciones y propiedades de vectores son las mismas, sólo que los vectores ahora presentan tres componentes. Se hace notar, que la construcción de un vector ortogonal a partir de un vector dado, en R^3 no es posible.

Antes de continuar con algunas definiciones y propiedades propias de R^3, veamos algunos ejercicios con vectores en R^3.

Ejercicio 1. Los puntos $A(1,1,1)$, $B(5,7,9)$, $C(6,7,8)$ y $D(7,5,9)$ determinan un tetraedro. Si desde los vértices A y D parten simultáneamente dos móviles con dirección al baricentro de la cara ABC, cada uno con una velocidad de $\sqrt{2}$ unidades por segundo. Cuál es el punto en el que se encuentra el móvil que partió de D, cuando el móvil que partió de A llega al baricentro.

Solucion 1. Se desea hallar el punto P en el que se encuentra el móvil que partió del vértice D, en la figura, cuando el móvil que parte del vértice A llega al baricentro $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$



Es decir;

$G = \frac{1}{3}\big((1,1,1) + (5,7,9) + (6,7,8)\big) \rightsquigarrow G = (4,5,6)$ Hallemos el tiempo en el que el móvil que parte de A llega a G

$$t = \frac{Distancia\ de\ A\ a\ G}{velocidad} = \frac{\|\overline{AG}\|}{\sqrt{2}}$$

Donde; $\overline{AG} = G - A = (4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$, $\|\overline{AG}\| = 5\sqrt{2}$

Luego $t = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$ segundos, tiempo en el cual el móvil que parte de A llega a G.

Ahora, el móvil que parte de D en 5 segundos se encuentra en el punto P.

Esto es;

$$P = D + \|\overline{DP}\|\bar{u}$$

Donde;

$$\|\overline{DP}\| = (velocidad)(tiempo) = 5\sqrt{2}$$

$\bar{u} \,//\, \overline{DP} \,//\, \overline{DG} = G - D = (4,5,6) - (7,5,9) = (-3,0,-3)$, $\|\overline{DG}\| = 3\sqrt{2}$

Entonces

$$\bar{u} = \frac{\overline{DG}}{\|\overline{DG}\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,0,3)$$

Por lo que;

$$P = (7,5,9) + 5\sqrt{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,0,3) = (2,5,4)$$

Finalmente, el móvil que partió del vértice D, cuando el que partió del vértice A llega al baricentro G, se encuentra en el punto $P(2,5,4)$.

Ejercicio 2. Sean los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en R^3 con $\|\bar{a}\| = 4$ y $\|b\| = 3$. El ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es $\frac{\pi}{3}$. Halle:

a) $Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b})$

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a} - 3\bar{b}$ y $3\bar{a} + 2\bar{b}$.

c) $Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b})$

Solucion 2.

a) Recordamos la definición de la componente de un vector en la dirección de otro vector no nulo. Es decir;

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{(2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot \bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{2\bar{a} \cdot \bar{a} - 3\bar{b} \cdot \bar{a}}{\|\bar{a}\|}$$

También recordamos; $\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta$, entonces

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{2\|\bar{a}\|^2 - 3\left(\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\|\bar{a}\|} = \frac{2(4)^2 - 3\left(4(3)\frac{1}{2}\right)}{4}$$

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{7}{2}$$

b) Recordamos que el área de un paralelogramo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ esta dado por:

$$A = \sqrt{\|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2}$$

Ahora el área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a} - 3\bar{b}$ y $3\bar{a} + 2\bar{b}$ es;

$$A = \sqrt{\left\|2\bar{a} - 3\bar{b}\right\|^2 \left\|3\bar{a} + 2\bar{b}\right\|^2 - \left((2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot (3\bar{a} + 2\bar{b})\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\left(4\|\bar{a}\|^2 - 12\bar{a}\cdot\bar{b} + 9\left\|\bar{b}\right\|^2\right)\left(9\|\bar{a}\|^2 + 12\bar{a}\cdot\bar{b} + 4\left\|\bar{b}\right\|^2\right) - \left(6\|\bar{a}\|^2 - 5\bar{a}\cdot\bar{b} - 6\left\|\bar{b}\right\|^2\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\left(4(4)^2 - 12(4)(3)\frac{1}{2} + 9(3)^2\right)\left(9(4)^2 + 12(4)(3)\frac{1}{2} + 4(3)^2\right) - \left(6(4)^2 - 5(4)(3)\frac{1}{2} - 6(3)^2\right)^2}$$

$$A = \sqrt{18252}$$

c) $Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})}{\|\bar{a}+\bar{b}\|} = \frac{3\bar{a}\cdot\bar{a}-2\bar{a}\cdot\bar{b}+3\bar{a}\cdot\bar{b}-2\bar{b}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}+\bar{b}\|}$

$$Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{3\|\bar{a}\|^2 + \bar{a}\cdot\bar{b} - 2\left\|\bar{b}\right\|^2}{\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\|}$$

$$= \frac{3\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{a}\|\|\bar{a}\|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\left\|\bar{b}\right\|^2}{\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\|}$$

Donde:

$\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\|^2 = (\bar{a} + \bar{b})\cdot(\bar{a} + \bar{b}) = \|\bar{a}\|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \left\|\bar{b}\right\|^2$

$= \|\bar{a}\|^2 + 2\|\bar{a}\|\left\|\bar{b}\right\|cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left\|\bar{b}\right\|^2$

$= 4^2 + 2(4)(3)\frac{1}{2} + 3^2$

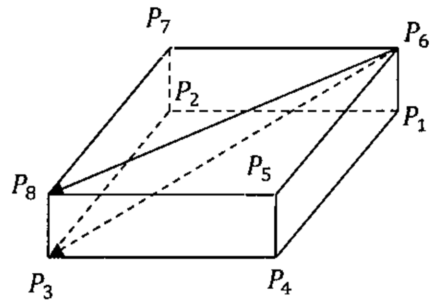
$\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\|^2 = 37 \rightsquigarrow \left\|\bar{a} + \bar{b}\right\| = \sqrt{37}$

Entonces

$$Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{3(16) + 4(3)\left(\frac{1}{2}\right) - 2(9)}{\sqrt{37}} = \frac{36}{\sqrt{37}}$$

Ejercicio 3. Los puntos $P_3(13,8,5)$ y $P_4(5,8,13)$ son extremos de una arista de una de las bases de un paralelepípedo rectangular, siendo $P_6(-5,-20,3)$ y P_8 los extremos de una diagonal en la base opuesta. Si $\overline{P_3P_8}$ es una arista lateral y $\overline{P_6P_8} = r(6,3,2), r \in R$. Cuáles son los otros cinco vértices.

Solucion 3. De la figura se tiene que:



$$\overline{P_3P_4} = (-8,0,8) = \overline{P_7P_6}$$

De donde

$$P_7 = P_6 - (-8,0,8)$$
$$= (-5,-20,3)$$
$$-(-8,0,8)$$

Luego el vértice es:

$$\boldsymbol{P_7(3,-20,-5)}$$

Además, en la figura se aprecia que;

$$Proy_{\overline{P_6P_8}}\overline{P_6P_3} = \overline{P_6P_8}$$

Donde;

$\overline{P_6P_8} = r(6,3,2)\,, r \in R$ y $\overline{P_6P_3} = (18,28,2)$

Luego,

$Proy_{\overline{P_6P_8}}\overline{P_6P_3} = Proy_{(6,3,2)}(18,28,2) = \frac{(18,28,2)\cdot(6,3,2)}{\|(6,3,2)\|}(6,3,2) = r(6,3,2) \quad \rightsquigarrow r = 4$

Entonces

$$\overline{P_6P_8} = 4(6,3,2) \rightsquigarrow P_8 = P_6 + (24,12,8) = (-5,-20,3) + (24,12,8)$$

Obteniéndose el otro vértice

$$\boldsymbol{P_8(19,-8,11)}$$

Se observa que;

$P_5 = P_4 + \overline{P_4P_5} = P_4 + \overline{P_3P_8}\,, \qquad \overline{P_3P_8} = (19,-8,11) - (13,8,5) = (6,-16,6)$

$P_5 = (5,8,13) + (6,-16,6) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_5(11,-8,19)}$

$P_1 = P_6 + \overline{P_6P_1} = P_6 + \overline{P_8P_3}\,,$

$$\overline{P_8P_3} = (13,8,5) - (19,-8,11) = (-6,16,-6)$$

$P_1 = (-5,-20,3) + (-6,16,-6) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_1(-11,-4,-3)}$

$P_2 = P_3 + \overline{P_3P_2} = P_3 + \overline{P_4P_1}\,,$

$$\overline{P_4P_1} = (-11,-4,-3) - (5,8,13) = (-16,-12,-16)$$

$P_2 = (13,8,5) + (-16,-12,-16) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_2(-3,-4,-11)}$

Verificando el vértice hallado anteriormente,

$P_7 = P_8 + \overline{P_8P_7} = P_8 + \overline{P_3P_2}$, $\overline{P_3P_2} = (-3,-4,-11) - (13,8,5)$

$= (-16,-12,-16)$

$P_7 = (19,-8,11) + (-16,-12,-16) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_7(3,-20,-5)}$

6.2 PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Las definiciones y propiedades para el paralelismo y ortogonalidad de vectores en R^3 son análogas a las presentadas para R^n con $n = 3$.

6.3 PRODUCTO ESCALAR

La definición y propiedades son análogas a las presentadas para R^n, sólo que ahora se tiene $n = 3$.

6.4 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ solo en R^3, denotado por $\bar{a} \times \bar{b}$, se define como el vector dado por:

$$\boldsymbol{\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$\bar{a} \times \bar{b}$: Se lee "el producto vectorial de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$

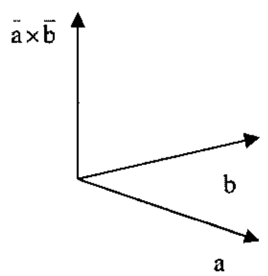


FIGURA 6.1 PRODUCTO VECTORIAL DE LOS VECTORES ā y b̄

Fuente: Elaboración Propia

OBSERVACIONES.

1. $\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$
   significa que $\bar{a} \perp (\bar{a} \times \bar{b})$
2. $\bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$
   significa que $\bar{b} \perp (\bar{a} \times \bar{b})$

6.4.1 PROPIEDADES

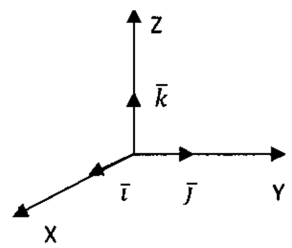
Sean lo vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en R^3 y cualesquiera escalares $r \in R$, se tiene

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
2. $(r\bar{a}) \times \bar{b} = r(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (r\bar{b})$
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
4. $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$
5. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{o}$ para todo vector $\bar{a} \in R^3$
6. $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$
7. $\bar{a} \times \bar{o} = \bar{o} \times \bar{a} = \bar{o}$
8. $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

Según las propiedades se tiene

$$\bar{\imath} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath} \times \bar{\jmath} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{o}$$
$$\bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k}, \qquad \bar{\jmath} \times \bar{\imath} = -\bar{k}$$
$$\bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath}, \qquad \bar{k} \times \bar{\jmath} = -\bar{\imath}$$
$$\bar{k} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath}, \qquad \bar{\imath} \times \bar{k} = -\bar{\jmath}$$

FIGURA 6.2 PRODUCTO VECTORIAL DE LOS VECTORES $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ y $\bar{k}$



Fuente: Elaboración Propia

Ejercicio 4. Demostrar la identidad de Lagrange

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

Solucion 4. Demostración.

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\|^2$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$
$$= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

Finalmente,

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

O también

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$
$$= \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times (\bar{a} \times \bar{b})\right), \qquad (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$
$$= \bar{a} \cdot [(\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b}], \; \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

$= \|\bar{b}\|^2 \bar{a}\cdot\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{a}\cdot\bar{b})$

$= \|\bar{b}\|^2 \|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$

Finalmente,

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

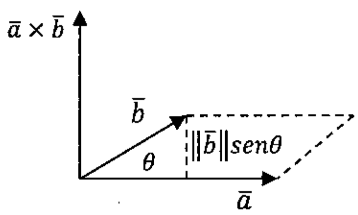
Ejercicio 5. Determinar una fórmula para calcular el área de un paralelogramo cuyos lados están representados por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.de R^3.

Solucion 5. Recordamos que el área del paralelogramo es el producto de la base por la altura, por lo que en la figura se observa

$$A_{Paralelogramo} = \|\bar{a}\|\|b\|sen\theta$$

Recordamos

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta\,, 0 \le \theta \le \pi$$



Y de la identidad de Lagrange

$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 &= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta)^2\\ &= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 cos^2\\ &= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2(1 - cos^2)\\ &= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 sen^2\theta\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 sen^2\theta$$

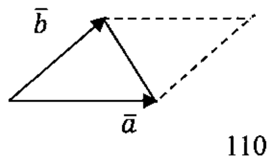
Con lo cual se ha demostrado que el área del paralelogramo es la norma o longitud del vector $\bar{a}\times\bar{\mathrm{b}}$.

Es decir

$$A_{Paralelogramo} = \|\bar{a}\times\bar{b}\|$$

Y el área del triángulo cuyos lados están representados por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ está dado por

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\bar{a}\times\bar{b}\|$$



NOTA.

Dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de R^3 son paralelos si y sólo si $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

6.5 PRODUCTO MIXTO O TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El producto mixto o triple producto escalar de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de R^3, denotado por $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]$, se define como es número dado por:

$$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

NOTA.

La expresión $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c}$ no tiene significado alguno

6.5.1 PROPIEDADES.

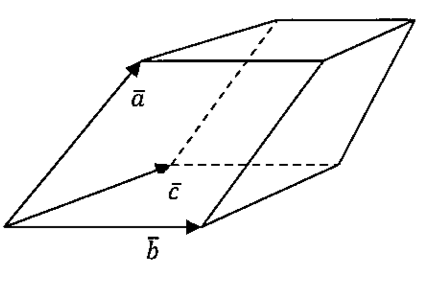
1. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = [\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}] = [\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}]$
2. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$
3. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \|\bar{b} \times \bar{c}\| Comp_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}$

NOTAS.

1. Tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de R^3 son linealmente dependientes si y sólo si
$$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$$
2. La dependencia lineal de tres vectores es equivalente a que los tres vectores sean paralelos a un mismo plano.

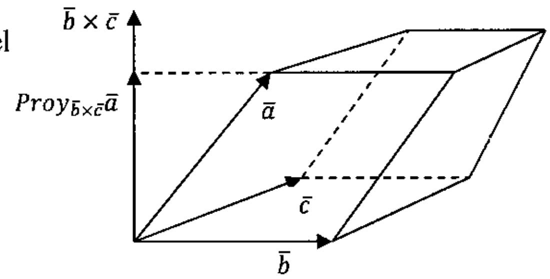
6.5.2 VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO

Consideremos que; los vectores $\bar{b}$, $\bar{c}$ representan las aristas de la base de un paralelepípedo y el vector $\bar{a}$ la arista lateral. El propósito es determinar una expresión para calcular su volumen.



Ejercicio 6. Determinar una fórmula para calcular el volumen del paralelepípedo de arista lateral el vector $\bar{a}$ y cuya base tiene lados representados por los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

Solucion 6. En la figura, el volumen del paralelepípedo es el producto del área de la base por la altura (SAAL RIQUEROS, CAMPOS, & AZNARAN, 1990).



$$V = (\acute{a}rea\ de\ la\ base)(altura)$$

El área de la base es el área del paralelogramo determinado por los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$

$$\acute{a}rea\ de\ la\ base = \|\bar{b} \times \bar{c}\|$$

La altura del paralelepípedo es la norma, de la proyección ortogonal del vector $\bar{a}$ sobre el vector $\bar{b} \times \bar{c}$

$$altura = \|Proy_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}\|$$

Luego, el volumen del paralelepípedo está dado por

$$V = \|\bar{b} \times \bar{c}\|\|Proy_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}\|$$

$$V = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \left\| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \right\|$$

$$V = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \left| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \right| \left\| \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \right\|$$

$$V = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \left| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \right| \ , \ \left\| \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} \right\| = 1$$

$$V = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \frac{1}{\|\bar{b} \times \bar{c}\|} |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})|$$

$$V = |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})|$$

Finalmente, el volumen del paralelepípedo es

$$\boldsymbol{V} = |[\bar{\boldsymbol{a}}\, \bar{\boldsymbol{b}}\, \bar{\boldsymbol{c}}]|$$

6.5.3 TORQUE

Al aplicar una fuerza en una llave inglesa al final del brazo lo más lejos del perno causa el movimiento de atornillar en dirección perpendicular al plano determinado por el brazo de la llave y la dirección de tu fuerza (se asume que el plano existe). Para medir cuanto atornillamos, necesitamos la noción de **torque** (o fuerza de torsión) (COLLEY, 1998).

En particular, si el vector $\bar{F}$ representa a la fuerza aplicada a la llave inglesa, Se tiene

$$Cantidad\ de\ torque = \begin{pmatrix} longitud\ de\ la \\ llave\ inglesa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} componente\ de\ \bar{F}\ perpendicular \\ a\ la\ llave\ inglesa \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{a}$ el vector que representa, desde el centro de la cabeza del perno hasta el final del brazo de la llave inglesa. Entonces

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| Comp_{\bar{a}^{\perp}} \bar{F}$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \frac{\bar{F} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \frac{1}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \|\bar{F}\| \|\bar{a}^{\perp}\| cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),\ \measuredangle(\bar{a}, \bar{F}) = \theta$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \|\bar{F}\| sen(\theta)$$

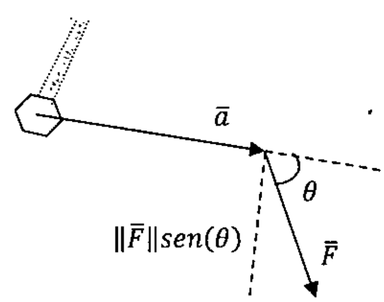
Recordamos que

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{b}\| \|\bar{a}\| sen\theta$$

Por lo que

$$\boldsymbol{Cantidad\ de\ torque} = \|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{F}}\|$$

FIGURA 6.3 EL VECTOR TORQUE SOBRE EL PERNO ES $\bar{a} \times \bar{F}$



Fuente: Elaboración Propia

Se observa que la dirección de $\bar{a} \times \bar{F}$ es igual a la dirección en la que se está atornillando el perno (se asume la regla de la mano derecha sobre el perno). Por consiguiente, es completamente natural definir el vector torque $\bar{\boldsymbol{T}}$ como:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{F}}$$

El vector torque $\bar{T}$ es la manera precisa de representar la situación física.

NOTA.

Si $\bar{F}$ es paralelo al vector $\bar{a}$, entonces $\bar{T} = \bar{o}$. Lo cual indica que por más que presionemos la llave inglesa el perno no gira.

Ejercicio 7. Arturo está cambiando un neumático. La llave es posicionada en uno de los pernos de la rueda y hace un ángulo de 30° con la horizontal. Arturo ejerce una fuerza de 40 lb hacia abajo para aflojar el perno.

a) Si la longitud del brazo de la llave es un pie, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?

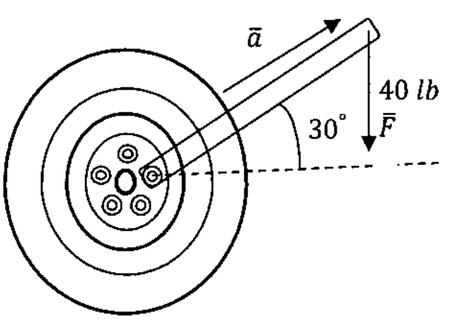
b) Si se cambia la llave por una de 18 pulgadas de longitud, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?

Solucion 7. En la figura, el brazo de la llave es paralelo al vector

$$\bar{a} = (\|\bar{a}\|cos\theta, \|\bar{a}\|sen\theta, 0)$$

Y la fuerza está representada por el vector

$$\bar{F} = \|\bar{F}\|(0,1,0) = 40(0,1,0)$$
$$= (0,40,0)$$



Se desea hallar la cantidad de torque que se imparte al perno.

$$\boldsymbol{Cantidad\ de\ torque} = \|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{F}}\|$$

a) La longitud del brazo de la llave es $\|\bar{a}\| = 1\,pie$, entonces

$$\bar{a} = \left((1)cos\left(\frac{\pi}{6}\right), (1)sen\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Luego

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a} \times \bar{F}\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \times (0,40,0)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(0,0, \frac{40\sqrt{3}}{2}\right)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = 20\sqrt{3}\,pie - lb$$

b) La longitud del brazo de la llave es $\|\bar{a}\| = 18\,pulgadas$, entonces

$$\bar{a} = \left((18)cos\left(\frac{\pi}{6}\right), (18)sen\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right) = (9\sqrt{3}, 9, 0)$$

Luego

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a} \times \bar{F}\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|(9\sqrt{3}, 9, 0) \times (0,40,0)\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|(0,0,360\sqrt{3})\|$$

$Cantidad\ de\ torque = 360\sqrt{3}\,pulgadas - lb$

$Cantidad\ de\ torque = 30\sqrt{3}\,pies - lb$

Ejercicio 8. Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en R^3. Demostrar que:

$$\left[\bar{a}\;\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})\;\bar{c}\right] = -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}\right]$$

Solucion 8. Demostración.

$\left[\bar{a}\;\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})\;\bar{c}\right] = \bar{a}\cdot\left(\left(\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})\right)\times\bar{c}\right)$ pues$\left[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}\right] = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$

$= \bar{a}\cdot\left(\left((\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{b}\right)\times\bar{c}\right)$ pues $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$

$= \bar{a}\cdot\left((\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{a}\times\bar{c} - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{b}\times\bar{c}\right)$ pues $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}$

$= (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{c}) - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ pues $\begin{cases}(r\bar{a})\times\bar{b} = r(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{a}\times(r\bar{b})\\ \bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\end{cases}$

$= -(\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ pues $\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{c}) = 0$

$= -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}\right]$

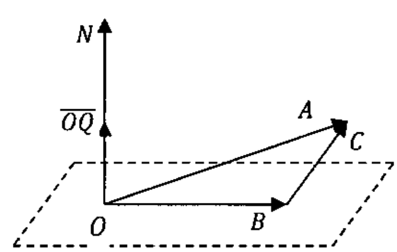
Por lo tanto,

$$\left[\bar{a}\;\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})\;\bar{c}\right] = -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}\right]$$

Ejercicio 9. Sean A, B y C vectores en R^3 tales que $A = B + C$, donde B pertenece al plano que pasa por el origen O y tiene normal N. Si $\overline{OQ}$ es el vector proyección de $\overline{OA}$ sobre N, demostrar que $\|\overline{OQ}\| \leq \|\overline{OC}\|$.

Solucion 9. Demostración.

En la figura



$$A = B + C$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC}$$

$$\overline{OQ} = Proy_N\overline{OA} = \frac{\overline{OA}\cdot N}{\|N\|^2}N$$

$$\overline{OQ} = Proy_N(\overline{OB} + \overline{OC})$$

$$= Proy_N\overline{OB} + Proy_N\overline{OC}$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OB}\cdot N}{\|N\|^2}N + \frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|^2}N$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OC} \cdot N}{\|N\|^2} N\,, \qquad \overline{OB} \perp N \leftrightsquigarrow \overline{OB} \cdot N = 0$$

Sacamos norma en ambos miembros se tiene;

$$\|\overline{OQ}\| = \left\| \frac{\overline{OC} \cdot N}{\|N\|^2} N \right\| = \left| \frac{\overline{OC} \cdot N}{\|N\|} \right| \left\| \frac{N}{\|N\|} \right\| = \left| \frac{\overline{OC} \cdot N}{\|N\|} \right| = \frac{1}{\|N\|} |\overline{OC} \cdot N|$$

$\|\overline{OQ}\| = \frac{1}{\|N\|} |\overline{OC} \cdot N| \leq \frac{1}{\|N\|} \|\overline{OC}\| \|N\|$, por la desigualdad de Schwarz

Finalmente,

$$\|\overline{OQ}\| \leq \|\overline{OC}\|$$

CAPITULO VII. LA RECTA EN R^3

7.1 LA RECTA EN R^3

DEFINICIÓN. La recta L es un conjunto de puntos en R^3 que consta de un punto de paso y de un vector direccional.

Esto es;

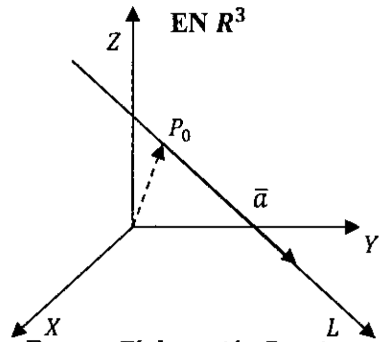
$$L = \{P \in R^3 / P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R\}$$

Dónde

P_0 ; es un punto de paso de la recta L

$\bar{a}$; es un vector direccional de la recta L

FIGURA 7.1. LA RECTA L EN R^3



Fuente: Elaboración Propia

7.1.1 DIVERSAS DENOMINACIONES DE LAS ECUACIONES DE RECTA

De la definición de la recta L se tiene

$$P \in L \iff P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$$

Y la expresión

$$\boldsymbol{L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R}$$

Es llamada **ecuación vectorial de la recta L.**

Sean $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces la recta L resulta

$$L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), t \in R$$

De donde

$$L: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + ta_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + ta_2}\,, \\ \boldsymbol{z = z_0 + ta_3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{t \in R}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica de la recta** L.

Despejando el parámetro t e igualando se obtiene

$$L: \boldsymbol{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$$

Expresión llamada **ecuación simétrica de la recta L** (PURCELL & VARBERG, 1992).

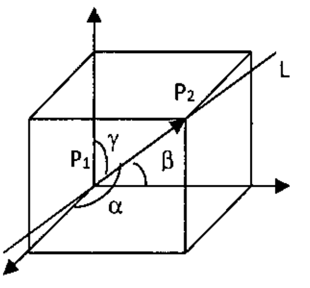
Los números a_1, a_2, a_3 se llaman números directores de la recta L.

En la figura; sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntos de paso de la recta L, de donde se obtiene:

$$cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}$$

$$cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}$$

$$cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}$$



Llamados los cosenos directores de la recta L determinada por los puntos P_1 y P_2. Además α, β y γ son llamados los ángulos directores de la recta L.

Ejercicio 1. Halle las ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de la recta L que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene sus tres ángulos directores iguales.

Solucion 1.

Consideremos el vector unitario $\bar{u} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ como vector direccional de la recta L.

Se conoce que; $\alpha = \beta = \gamma$ y $\|\bar{u}\| = 1$

Luego,

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

De donde se obtiene

$$3cos^2\alpha = 1 \rightsquigarrow cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces

$$\bar{u} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) // (1,1,1)$$

Luego;

$L: P = (1,1,1) + t(1,1,1), t \in R$, Ecuación vectorial de la recta.

$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in R$, Ecuación paramétrica de la recta

$L: x - 1 = y - 1 = z - 1$, Ecuación simétrica de la recta

Además, la recta pasa por el origen de coordenadas, pues el origen pertenece a la recta L para $t = -1$

7.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}$, $s \in R$ dos rectas en R^3. Se presentan las siguientes posiciones relativas:

7.2.1 RECTAS PARALELAS

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, denotado $L_1 \ // \ L_2$ sí y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos. Es decir;

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \bar{a} \ // \ \bar{b}$$

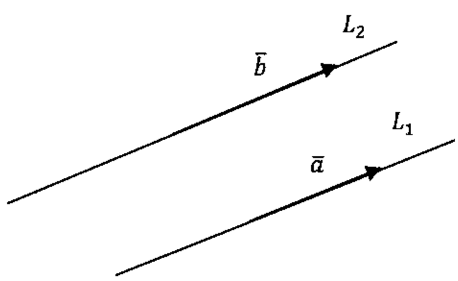


FIGURA 7.2 RECTAS PARALELAS

Fuente: Elaboración Propia

7.2.2 RECTAS ORTOGONALES

Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales($L_1 \perp L_2$) si y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales. Es decir;

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$

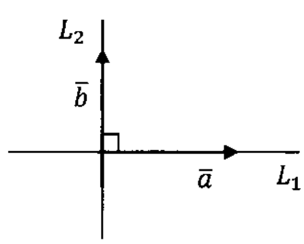


FIGURA 7.3 RECTAS ORTOGONALES

Fuente: Elaboración Propia

7.2.3 RECTAS QUE SE INTERSECTAN EN UN PUNTO

Las rectas L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$

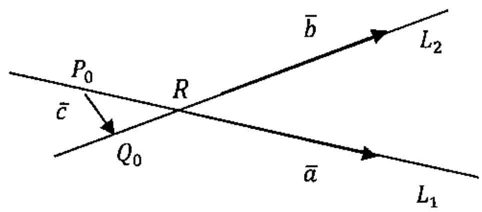


FIGURA 7.4 RECTAS QUE SE INTERSECAN EN UN PUNTO

Fuente: Elaboración Propia

7.2.4 RECTAS QUE SE CRUZAN

Las rectas L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] \neq 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$

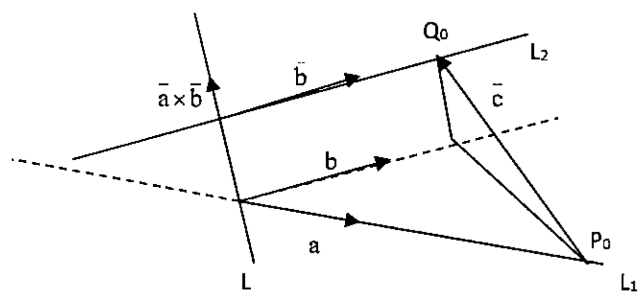


FIGURA 7.5 RECTAS QUE SE CRUZAN

Fuente: Elaboración Propia

La recta L tiene como vector direccional al vector $\bar{a} \times \bar{b}$ y es ortogonal a las rectas L_1 y L_2.

Ejercicio 2. Dadas las rectas

$$L_1: P = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$$

$$L_2: x = t, y = t, z = 0$$

Determinar si las rectas se interceptan o se cruzan. Si se interceptan hallar el punto de intersección, si se cruzan hallar la recta ortogonal a L_1 y a L_2.

Solucion 2.

De L_1 se tiene: $\bar{a} = (1,1,1), P_0(0,1,2)$

De L_2 se tiene: $\bar{b} = (1,1,0)\,, Q_0(0,0,0)$

Obteniéndose: $\bar{c} = \overline{P_0Q_0} = (0,-1,-2)$

Luego

L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = 0$

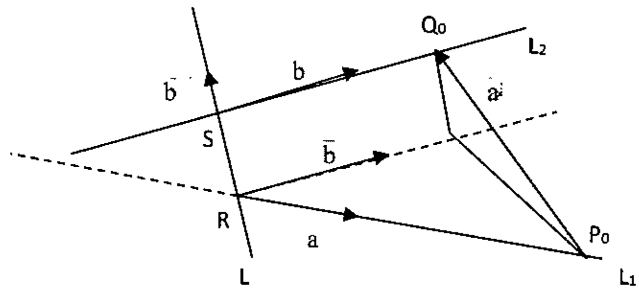
L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] \neq 0$

Veamos,

$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = (1,1,1) \cdot \big((1,1,0) \times (0,-1,-2)\big) = (1,1,1) \cdot (-2,2,-1) = -1 \neq 0$

Por lo que L_1 y L_2 se cruzan.

Ahora, hallemos la recta L ortogonal a las rectas L_1 y L_2



En la figura

$$L: P = R + r(\bar{a} \times \bar{b})\,, r \in R$$

Donde

$R = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R \rightsquigarrow\ R = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$

$S = Q_0 + s\bar{b}\,, s \in R \rightsquigarrow S = (0,0,0) + s(1,1,0)\ s \in R$

Entonces

$$\overline{RS} = Proy_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0} = \frac{(0,-1,-2)\cdot(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) = -\frac{1}{2}(-1,1,0)$$

Luego

$$s(1,1,0) - (0,1,2) - t(1,1,1) = \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$s(1,1,0) - t(1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,4)$$

$$\begin{cases} s - t = \dfrac{1}{2} \\ s - t = \dfrac{1}{2} \\ -t = 2 \end{cases} \rightsquigarrow\ t = -2,\ \ s = -\frac{3}{2}$$

Obteniéndose los puntos

$$R = (0,1,2) + (-2)(1,1,1) = (-2,-1,0)$$

$$S = (0,0,0) + \left(-\frac{3}{2}\right)(1,1,0) = \left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)$$

Finalmente, la recta L esta dada por;

$$L: P = (-2,-1,0) + r(1,1,1) \times (1,1,0), r \in R$$

$$\boldsymbol{L: P = (-2,-1,0) + r(-1,1,0), r \in R}$$

7.3 ANGULO ENTRE RECTAS

Sean

$$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R \text{ y } L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\,, s \in R$$

Dos rectas en R^3. Se define el ángulo entre las rectas como aquel ángulo que forman sus vectores direccionales.

Es decir,

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) = \theta$$

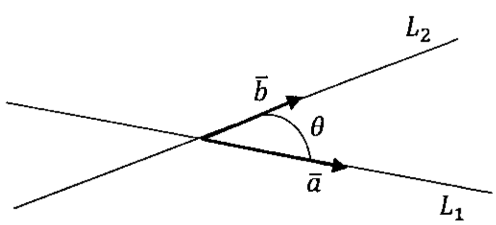


FIGURA 7.6 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Fuente: Elaboración Propia

Y queda completamente determinado por:

$$cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$$

NOTA. Si L_1 y L_2 se cruzan, el ángulo entre ellas se determina trazando una recta L, paralela a cualquiera de ellas y que pase por un punto cualquiera de la otra recta, luego el ángulo está formado por la recta L y la recta con la que tienen el punto común.

7.4 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L: $P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ una recta y Q un punto en R^3, para determinar la distancia del punto Q a L se sigue;

En la figura, el área del paralelogramo está dado por

$$A = \|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\|\|\overline{P_0Q}\|sen\theta$$

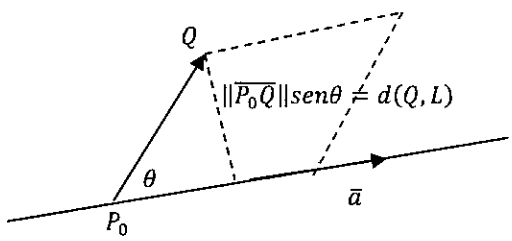


FIGURA 7.7 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Fuente: Elaboración Propia

De donde

$$\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\| d(Q,L)$$

Finalmente;

$$\boldsymbol{d(Q,L) = \frac{\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}}$$

Ejercicio 3. Halle la distancia entre las rectas:

$$L_1: x - \mathbf{1} = 7(z-3), y = 6$$
$$L_2: P = (4,2,7) + t(-7,0,-1), t \in R$$

Solucion 3.

De L_1 se tiene que su vector direccional es $\bar{a} = (7,0,1)$ y su punto de paso es $P_0(1,6,3)$.

De L_2 se tiene que su vector direccional es $\bar{b} = (-7,0,-1)$ y su punto de paso es $Q(4,2,7)$

Como $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ entonces $L_1 \,//\, L_2$.

Luego la distancia de L_1 a L_2 esta dado por la distancia del punto $Q(4,2,7)$ a L_1

Es decir;

$d(Q, L_1) = \frac{\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}, \overline{P_0Q} = (3,-4,4)$

$$d(Q, L_1) = \frac{\|(3,-4,4) \times (7,0,1)\|}{\|(7,0,1)\|} = \frac{\|(-4,25,28)\|}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{57}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{114}$$

7.5 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}, s \in R$ dos rectas que se cruzan.

$$d(L_1, L_2) = \|\overline{PQ}\|$$

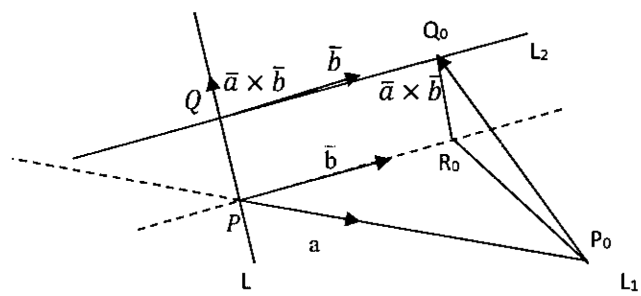


FIGURA 7.8 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Fuente: Elaboración Propia

En la figura, la distancia (mínima) de L_1 a L_2 es medida a lo largo de la recta L perpendicular a ellas.

Es decir,

$$\|\overline{PQ}\| = \|\overline{R_0Q_0}\| = |Comp_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0}| = \left|\frac{\overline{P_0Q_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}\right| = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{d(L_1, L_2) = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}}$$

Ejercicio 4. Sean las rectas

$$L_1: P = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$$
$$L_2: x = t, y = t, z = 0$$

Determinar la distancia (mínima) de L_1 a L_2.

Solucion 4.

De la recta L_1 se tiene el vector direccional $\bar{a} = (1,1,1)$ y punto de paso $P_0(0,1,2)$

De la recta L_2 se tiene el vector direccional $\bar{b} = (1,1,0)$ y punto de paso $Q_0(0,0,0)$

De donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0} = (0,-1,-2)$ y $\bar{a}\times\bar{b} = (-1,1,0)$

Luego $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = (0,-1,-2)\cdot((1,1,1)\times(1,1,0)) = -1$

Por lo que las recta L_1 y L_2 se cruzan

$$d(L_1, L_2) = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|} = \frac{|(0,-1,-2)\cdot(-1,1,0)|}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

CAPITULO VIII. EL PLANO EN R3

DEFINICIÓN. El Plano es un conjunto de puntos P en R^3 que tiene un punto de paso P_0 y dos vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ no paralelos en R^3 tal que

$$\boldsymbol{P} = \{P \in R^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r, s \in R\}$$

De donde

$$P \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r, s \in R$$

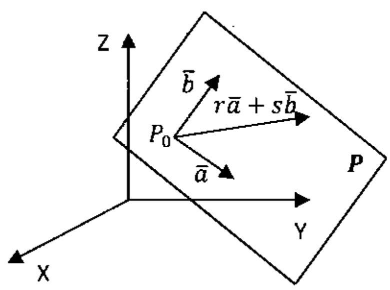


FIGURA 8.1 EL PLANO P EN R³

Fuente: Elaboración Propia

Luego, la expresión

$$\boldsymbol{P}: P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r, s \in R$$

Es llamada la **ecuación vectorial del plano P** que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

8.1 TIPOS DE ECUACIONES DE PLANOS

Sean $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces la ecuación del plano resulta

$$P: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3); r, s \in R$$

De donde

$$P: \begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases} ; r, s \in R$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica del plano** P.

Cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal al plano P, es ortogonal a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama **vector normal** al plano P.

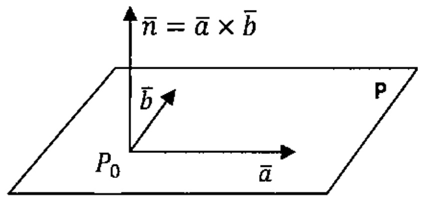


FIGURA 8.2 VECTOR NORMAL $\bar{n}$ AL PLANO P

Fuente: Elaboración Propia

En particular un vector normal al plano P es

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$$

Si P_0 es un punto fijo del plano $\boldsymbol{P}$ y P es un punto cualquiera de $\boldsymbol{P}$, entonces el vector $\overline{P_0P}$ es ortogonal al vector normal $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$

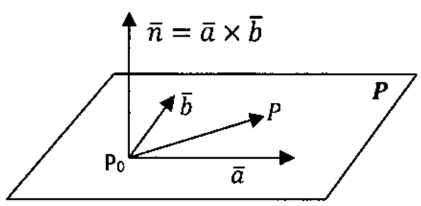


FIGURA 8.3 ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

Fuente: Elaboración Propia

Luego la ecuación del plano está dada por

$$P\colon (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$$

Expresión llamada **ecuación normal del plano P** con punto de paso P_0 y vector normal $\bar{n}$.

Ahora si $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{n} = (a, b, c)$ se tiene que la ecuación del plano esta dada por

$$P\colon (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Operando se obtiene,

$$\boldsymbol{P\colon ax + by + cz + d = 0\ ,\ d = -ax_0 - by_0 - cz_0}$$

Expresión llamada **ecuación general del plano P** con vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$ y punto de paso P_0.

Ejercicio 1. Halle la ecuación; vectorial, paramétrica y general del plano **P** que pasa por el punto $P_0(1,2,3)$ y es paralelo a las rectas

$$L_1\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}, \qquad L_2\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{-3}$$

Solucion 1.

De la recta L_1 se tiene el vector direccional $\bar{a} = (3, -1,2)$

De la recta L_2 se tiene el vector direccional $\bar{b} = (2,5, -3)$

De donde se aprecia que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son no paralelos, por lo que:

La expresión

$$\boldsymbol{P: P = (1, 2, 3) + r(3, -1, 2) + s(2, 5, -3); r, s \in R}$$

Es la ecuación vectorial del plano **P**.

De aquí se obtiene;

$$\boldsymbol{P: \begin{cases} x = 1 + 3r + 2s \\ y = 2 - r + 5s \\ z = 3 + 2r - 3s \end{cases} ; r, s \in R}$$

Expresión llamada ecuación paramétrica del plano **P**.

En la ecuación normal del plano

$$P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$$

$\overline{P_0P} = (x - 1, y - 2, z - 3)$ y $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (3, -1,2) \times (2,5, -3) = (-7,13,17)$

Luego se tiene

$$P: (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (-7,13,17) = 0$$

$$\boldsymbol{P: 7x - 13y - 17z + 70 = 0}$$

Expresión llamada la ecuación general del plano **P**.

8.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

8.2.1 PARALELISMO DE PLANOS

DEFINICIÓN. Dos planos $P_1: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son paralelos si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son paralelos.

Es decir,

$$P_1 \,//\, P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \,//\, \bar{n}_2$$

NOTAS.

1. Si P_1 y P_2 son paralelos entonces $P_1 = P_2$(coincidentes) o $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (intersección nula)
2. Si P_1 y P_2 no son paralelos entonces su intersección es una recta

8.2.2 ORTOGONALIDAD DE PLANOS

DEFINICIÓN. Dos planos $P_1: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son ortogonales si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son ortogonales.

Es decir,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$$

8.2.3 ANGULO ENTRE DOS PLANOS

El ángulo entre los planos $P_1: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ se define como el ángulo entre sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$.

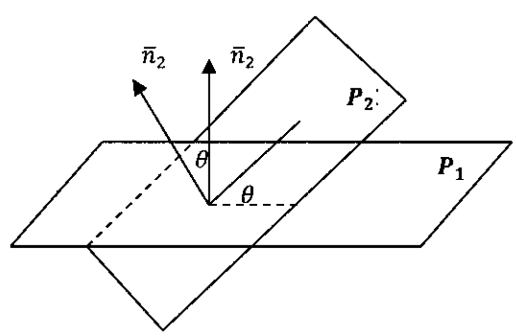


FIGURA 8.4 ANGULO ENTRE DOS PLANOS

Fuente: Elaboración Propia

Es decir,

$$\measuredangle(P_1, P_2) = \measuredangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \ \rightsquigarrow\ cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\|\|\bar{n}_2\|}$$

8.3 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$, $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ y el punto Q de R^3. Para hallar la distancia del punto Q al plano P se sigue;

En la figura

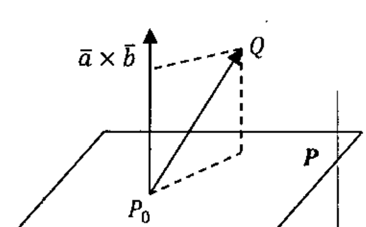


FIGURA 8.5 DISTANCIA DEL PUNTO Q AL PLANO P

Fuente: Elaboración Propia

$$d(Q,P) = \|Proy_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q}\|$$

$$d(Q,P) = \left\| \frac{\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2} \right\|$$

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})|}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}$$

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}$$

Si $Q(x_1, y_1, z_1)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{n} = (a, b, c)$ y $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, entonces

$$d(Q,P) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boldsymbol{d(Q,P) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

8.4 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$. Se cumple:

8.4.1 PARALELISMO DE UNA RECTA Y UN PLANO

La recta L es paralela al plano P si y sólo si $\bar{n} \perp \bar{a}$

O también, la recta L es paralela al plano P si y sólo si $\bar{n} \cdot \bar{a} = 0$ y puede suceder que $L \cap P = L$ ó $L \cap P = \phi$. Es decir

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{n}$$

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{n} = 0$$

8.4.2 PERPENDICULARIDAD DE UNA RECTA Y UN PLANO

La recta L es perpendicular al plano P si y sólo si $\bar{n} \parallel \bar{a}$

O también, la recta L es perpendicular al plano P si y sólo si $\bar{n} \cdot \bar{a} \neq 0$.

Es decir

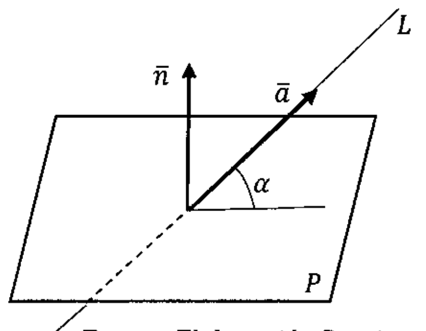
$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{n}$$

$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{n} \neq 0$$

8.4.3 ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

En ángulo entre el plano P y la recta L, denotado $\measuredangle(P, L)$, está dado por

$$\measuredangle(P,L) = \alpha = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\bar{a},\bar{n})$$



Fuente: Elaboración Propia

FIGURA 8.6 ANGULO ENTRE EL PLANO *P* Y LA RECTA *L*

8.4.4 NO PARALELISMO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

La recta L no es paralela al plano P si y sólo si $\bar{a}$ no es ortogonal a $\bar{n}$

O también, la recta L no es paralela al plano P si y sólo si $\bar{n} \cdot \bar{a} \neq 0$, por lo que se interceptan en un punto. Es decir

$$L \nparallel P \Leftrightarrow \bar{a} \not\perp \bar{n}$$

$$L \nparallel P \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{n} \neq 0$$

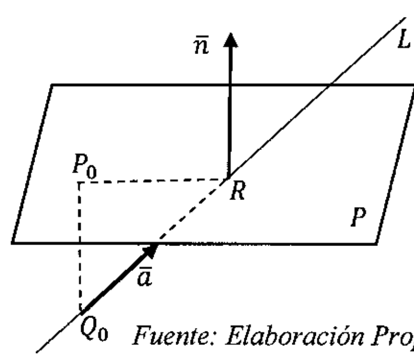
$$L \cap P = R \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{n}$$

$$L \cap P = R \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{n} \neq 0$$

8.5 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELOS

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ no paralelos. Se desea hallar el punto de intersección $L \cap P = R$

Para ello se sigue;



Fuente: Elaboración Propia

FIGURA 8.7 INTERSECCIÓN DE LA RECTA L Y EL PLANO P

En la figura FIGURA 8.7 se tiene

$$\overline{Q_0R} = t\bar{a}\,, t \in R$$

$$\overline{Q_0P_0} + \overline{P_0R} = \overline{Q_0R}$$

Multiplicando, producto escalar, ambos miembros a la ecuación anterior por el vector $\bar{n}$ resulta

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} + \overline{P_0R} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n}$$

Pero $\bar{n} \perp \overline{P_0R}$, es decir $\bar{n} \cdot \overline{P_0R} = 0$,

Entonces

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n} \rightsquigarrow \overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = t\bar{a} \cdot \bar{n} \rightsquigarrow t = \frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}}$$

Luego la ecuación anterior resulta

$$\overline{Q_0R} = \left(\frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}}\right) \bar{a}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{R = Q_o + \left[\frac{(P_0 - Q_0) \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}}\right] \bar{a}}$$

8.6 DISTANCIA ENTRE PLANOS

Sean los planos paralelos dados en su forma general por:

$$\wp_1 : Ax + By + Cz = D_1$$

$$\wp_2 : Ax + By + Cz = D_2$$

Para hallar la distancia entre estos planos se sigue;

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \wp_1$ y $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \wp_2$

$$d(\wp_1, \wp_2) = |Comp_{\bar{n}} \overline{P_1P_2}|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{\overline{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|}\right|$$

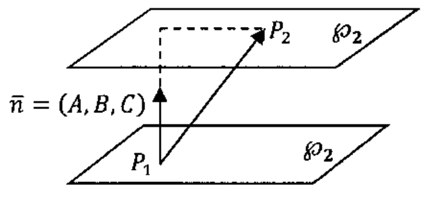


FIGURA 8.8 DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (A; B; C)}{\|(A, B, C)\|}\right|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Ax_1 - By_1 - Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Finalmente,

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

8.7 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$. La proyección ortogonal de la recta L sobre el plano P, denotada $Proy_P L$, es la recta dada por

$$Proy_P L: P = R_0 + t\big(\bar{n} \times (\bar{a} \times \bar{n})\big)\,; t \in R$$

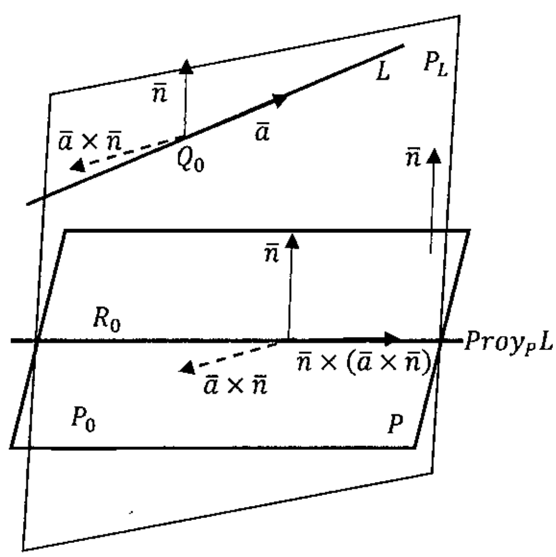


FIGURA 8.9 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE LA RECTA *L* SOBRE EL PLANO *P*

O también,

$$Proy_P L = P \cap P_L = \{(\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0\} \cap \{(\overline{Q_0P}) \cdot (\bar{a} \times \bar{n})\}$$

Donde:

$$P_L: (\overline{Q_0P}) \cdot (\bar{a} \times \bar{n})$$

Es el plano perpendicular al plano dado P que contiene a la recta dada L.

NOTA

1. El plano P_L contiene a la recta L
2. El plano P_L es ortogonal al plano P
3. La recta $Proy_P L$ se obtiene interceptando el plano P_L con el plano P.

Ejercicio 2. Sea la recta $L: P = (2,-1,2) + t(1,-1,2)\,; t \in R$ y el plano dado por $P: 2x + 3y + z - 2 = 0$. Halle la proyección ortogonal de la recta L sobre el plano P.

Solucion 2.

Recordamos

$$Proy_P L: P = R_0 + t(\bar{n} \times (\bar{a} \times \bar{n}))\,; t \in R$$

$$Proy_P L = P \cap P_L$$

Donde:

$$P_L: (\overline{Q_0 P}) \cdot (\bar{a} \times \bar{n})$$

De $L: P = (2,-1,2) + t(1,-1,2)\,; t \in R$ se tiene $\bar{a} = (1,-1,2)$, $Q_0(2,-1,2)$

De $P: 2x + 3y + z - 2 = 0$ se tiene $\bar{n} = (2,3,1)$

Por lo que:

$$\bar{a} \times \bar{n} = (1,-1,2) \times (2,3,1) = (-7,3,5)$$

$$\bar{n} \times (\bar{a} \times \bar{n}) = (2,3,1) \times (-7,3,5) = (12,-17,27)$$

Hallamos el plano P_L que contiene a la recta L

$$P_L: ((x,y,z) - (2,-1,2)).((1,-1,2) \times (2,3,1)) = 0$$

$$P_L: (x-2, y+1, z-2).(-7,3,5) = 0$$

$$P_L: -7x + 3y + 5z + 7 = 0$$

$$P_L: 7x - 3y - 5z - 7 = 0$$

Ahora hallamos el punto de paso $R_0(x_0, y_0, z_0)$ de $Proy_P L = P \cap P_L$

$$Proy_P L: \begin{cases} 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ 7x - 3y - 5z - 7 = 0 \end{cases}$$

Sea $x_0 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} 3y_0 + z_0 - 2 = 0 \\ 3y_0 - 5z_0 - 7 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow y_0 = \frac{17}{12}, z_0 = -\frac{9}{4} \Longrightarrow R_0\left(0, \frac{17}{12}, -\frac{9}{4}\right)$

Finalmente,

$$Proy_P L: P = \left(0, \frac{17}{12}, -\frac{9}{4}\right) + t(12,-17,27)\,; t \in R$$

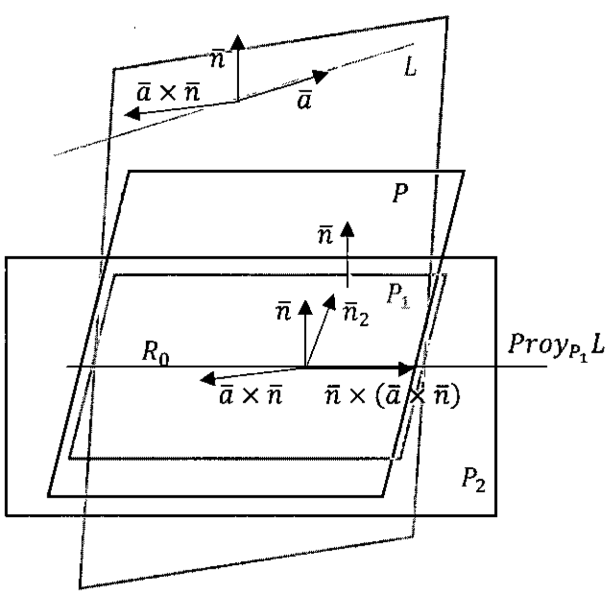
Ejercicio 3. Halle la ecuación vectorial del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la proyeccion otogonal de la recta $L: P = (2,3,4) + t(2,3,-4)\,;t \in R$ sobre el plano $P_1: x + y - z + 1 = 0$ y es perpendicular al plano $P_2: x + 2y + 3z + 1 = 0$

Solucion 3. La ecuación vectorial del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la proyeccion otogonal de la recta $L: P = (2,3,4) + t(2,3,-4)\,;t \in R$ sobre el plano $P_1: x + y - z + 1 = 0$ tiene como uno de sus vectores generadores al vector direccional $\bar{n}_1 \times (\bar{a} \times \bar{n}_1)$ de la recta

$$Proy_P L: P = R_0 + t\big(\bar{n}_1 \times (\bar{a} \times \bar{n}_1)\big)\,; t \in R$$

Y el otro vector generador del plano $\mathcal{P}$ es el vectro normal $\bar{n}_2$ del plano P_2 es decir la ecuacion vectorial del plano $\mathcal{P}$ que se busca es de la forma

$$\mathcal{P} : P = R_0 + t\big(\bar{n}_1 \times (\bar{a} \times \bar{n}_1)\big) + r\,\bar{n}_2\,; t, r \in R$$



Donde:

De $L: P = (2,3,4) + t(2,3,-4)\,; t \in R$ se tiene $\bar{a} = (2,3,-4)$, $Q_0(2,3,4)$

De $P_1: x + y - z + 1 = 0$ se tiene $\bar{n}_1 = (1,1,-1)$

$$\bar{n}_1 \times (\bar{a} \times \bar{n}_1) = (1,1,-1) \times \big((2,3,-4) \times (1,1,-1)\big)$$

$$\bar{n}_1 \times (\bar{a} \times \bar{n}_1) = (1,1,-1) \times (1,-2,-1) = (-3,0,-3) \parallel (-1,0,-1)$$

De $P_2: x + 2y + 3z + 1 = 0$ se tiene $\bar{n}_2 = (1,2,3)$

$R_0 = L \cap P_1$, $R_0 = Q_o + \left[\frac{(P_0 - Q_0)\cdot \bar{n}_1}{\bar{a} \cdot \bar{n}_1}\right] \bar{a}$, O tambien, $R_0 = L \cap P_1: \begin{cases} L: P = (2,3,4) + t(2,3,-4)\ ; t \in R \\ \quad P_1: x + \ y - \ z + 1 = 0 \end{cases}$

Reemplazando $P = (2 + 2t, 3 + 3t, 4 - 4t)$ en el plano P_1 se tiene:

$$(2 + 2t) + (3 + 3t) - (4 - 4t) + 1 = 0 \ \rightsquigarrow t = -\frac{2}{9}$$

Entonces $R_0\left(2 + 2\left(-\frac{2}{9}\right), 3 + 3\left(-\frac{2}{9}\right), 4 - 4\left(-\frac{2}{9}\right)\right) \rightsquigarrow R_0\left(\frac{14}{9}, \frac{21}{9}, \frac{44}{9}\right)$

Finalmente, la ecuacion vectorial del plano $\mathcal{P}$ esta dada por:

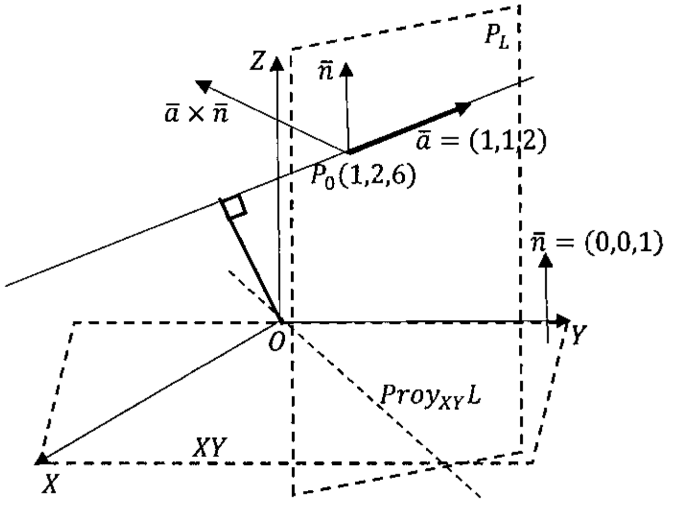
$$\mathcal{P} : P = \left(\frac{14}{9}, \frac{21}{9}, \frac{44}{9}\right) + t(-1,0,-1) + r(1,2,3) \ ; t, r \in R$$

Ejercicio 4. Sea la recta $L: P = (1,2,6) + t(1,1,2); t \in R$. Halle

a) La distancia del origen a la recta L.

b) La proyección ortogonal de la recta L sobre el plano XY.

Solucion 4. Trazamos el grafico del ejercicio

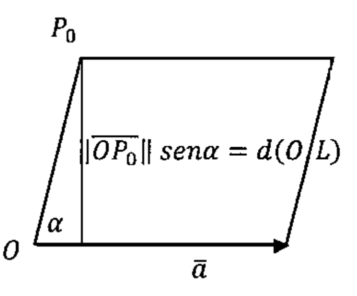


a) Recordamos el área del paralelogramo $\|\bar{a} \times \overline{OP_0}\| = \|\bar{a}\|\|\overline{OP_0}\| sen\alpha$.

Entonces

$$\|\bar{a} \times \overline{OP_0}\| = \|\bar{a}\| \, d(O, L)$$

$$d(O, L) = \frac{1}{\|\bar{a}\|} \|\bar{a} \times \overline{OP_0}\|$$



De la recta $L: P = (1,2,6) + t(1,1,2); t \in R$ se tiene: $P_0(1,2,6)$, $\bar{a} = (1,1,2)$

En la figura

$$\overline{OP_0} = (1,2,6),\ \|\bar{a}\| = \|(1,1,2)\| = \sqrt{6}$$

$$\bar{a} \times \overline{OP_0} = (1,1,2) \times (1,2,6) = (2,-4,-1)$$

Finalmente,

$$d(O,L) = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\|\bar{a} \times \overline{OP_0}\| = \frac{\|(2,-4,-1)\|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

b) La proyección ortogonal de la recta L sobre el plano XY esta dada por la recta

$$Proy_{XY}L = P_L \cap \{XY\}$$

Hallamos el plano $P_L: \overline{P_0P} \cdot (\bar{a} \times \bar{n}) = 0$

Donde: $\bar{a} \times \bar{n} = (1,1,2) \times (0,0,1) = (1,-1,0),\ P_0(1,2,6)$

$$P_L: (x-1, y-2, z-6) \cdot (1,-1,0) = 0$$

$$P_L: x - y + 1 = 0$$

Ahora, hallamos

$$Proy_{XY}L = P_L \cap \{XY\}: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{sea } y = t \rightsquigarrow x = -1 + t$$

$$Proy_{XY}L: P = (-1+t, t, 0) = (-1,0,0) + t(1,1,0); t \in R$$

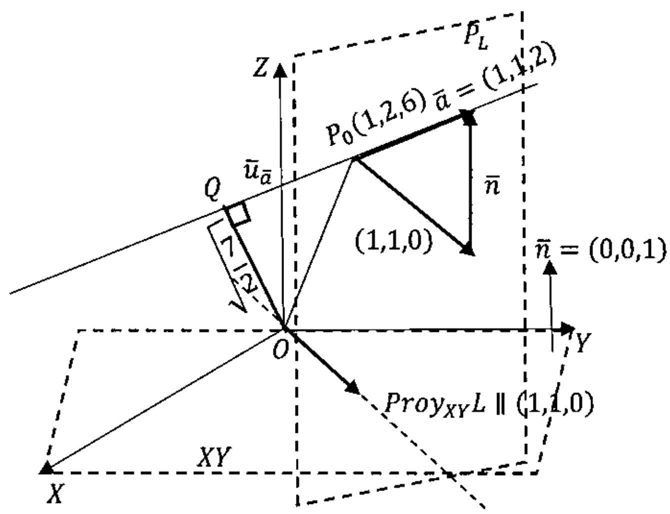
Ejercicio 5. La recta L pasa por el punto $P_0(1,2,6)$ cuya proyección ortogonal sobre el plano XY tiene la dirección del vector $(1,1,0)$ y dista del origen de coordenadas $\sqrt{\frac{7}{2}}$ unidades. Halle la ecuación vectorial de las rectas L

Solucion 5. Graficamo los datos del ejercicio, se puede observar que la ecuacion vectorial de la recta L esta dada por:

$$L: P = P_0 + t\bar{a}\,; t \in R$$

Enla figura se tiene que : $\bar{a} = t(1,1,0) + r(0,0,1)$

$$\bar{a} = (t,t,r) \parallel (1,1,k) \rightsquigarrow \bar{u}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2+k^2}}(1,1,k)$$



En la grafica se observa que:

$$\overline{OQ} + \overline{QP_0} = \overline{OP_0}$$

$$\|\overline{OQ}\|\bar{u}^{\perp}{}_{\bar{a}} + \|\overline{QP_0}\|\bar{u}_{\bar{a}} = \overline{OP_0}$$

Donde: $\overline{OP_0} = (1,2,6) \rightsquigarrow \|\overline{OP_0}\| = \sqrt{41}$ y $\|\overline{OQ}\| = \sqrt{\frac{7}{2}}$

$$\|\overline{QP_0}\| = \sqrt{\|\overline{OP_0}\|^2 - \|\overline{OQ}\|^2} = \sqrt{41 - \frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{75}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{7}{2}}\bar{u}^{\perp}{}_{\bar{a}} + \sqrt{\frac{75}{2}}\bar{u}_{\bar{a}} = (1,2,6)$$

Multiplicamos, producto escalar, ambos miembros por el vector $\bar{u}_{\bar{a}}$

$$\sqrt{\frac{7}{2}}\bar{u}^{\perp}{}_{\bar{a}} \cdot \bar{u}_{\bar{a}} + \sqrt{\frac{75}{2}}\bar{u}_{\bar{a}} \cdot \bar{u}_{\bar{a}} = (1,2,6) \cdot \bar{u}_{\bar{a}}.$$

$$\sqrt{\frac{75}{2}} = (1,2,6) \cdot \frac{1}{\sqrt{2+k^2}}(1,1,k)$$

$$\sqrt{\frac{75}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+k^2}}(3+6k)$$

$$\frac{75}{2}(2+k^2) = (3+6k)^2$$

$$k^2 - 24k + 44 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} k = 22 \rightsquigarrow \bar{a} \parallel (1,1,22) \\ k = 2 \rightsquigarrow \bar{a} \parallel (1,1,2) \end{cases}$$

Finalmente,

$$L: P = (1,2,6) + t(1,1,22)\ ; t \in R$$

$$L: P = (1,2,6) + t(1,1,2)\ ; t \in R$$

Ejercicio 6. Halle la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Y es perpendicular al plano $P_1: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Solucion 6.

La recta L es intersección de dos planos con vectores normales

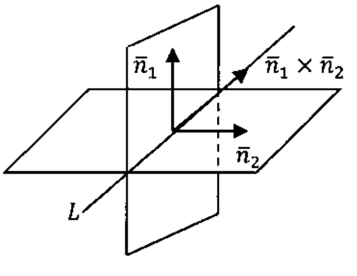
$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \rightsquigarrow \bar{n}_1 = (2,-1,-4) \\ 3x + 2y + z = 0 \rightsquigarrow \bar{n}_2 = (3,2,1) \end{cases}$$

Tales que $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, por lo que los planos son ortogonales.

En la figura, la recta L tiene como vector direccional al vector $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (7,-14,7)$, por lo que

$$L: P = P_0 + t(1,-2,1)\ , t \in R$$

Donde $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$



Sea $x_0 = 0$, entonces

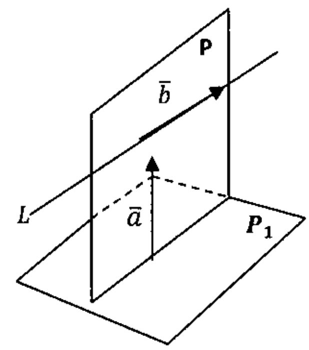
$$P_0(0, y_0, z_0) \in L: \begin{cases} y_0 - 4z_0 + 7 = 0 \\ 2y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $y_0 = -1$, $z_0 = 2$

Luego el punto de paso es $P_0(0,-1,2)$ y la recta es;

$$L: P = (0,-1,2) + t(1,-2,1)\ , t \in R$$

Ahora el plano P es generado por el vector $\bar{a} = (2,1,-2)$ normal a P_1 y el vector $\bar{b} = (1,-2,1)$ vector direccional de L.



Es decir

$$P: P = (0,-1,2) + r\bar{a} + s\bar{b}; r,s \in R$$

$$P: P = (0,-1,2) + r(2,1,-2) + s(1,-2,1); r,s \in R$$

De

$$P: \overline{P_0P} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$$

Se obtiene la ecuación general del plano P

$$P: (x, y+1, z-2) \cdot ((2,1,-2) \times (1,-2,1)) = 0$$

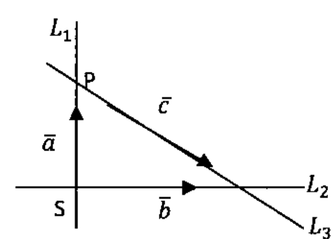
$$P: (x, y+1, z-2) \cdot (-3,-4,-3) = 0$$

$$\boldsymbol{P: 3x + 4y + 3z - 2 = 0}$$

Ejercicio 7. Las rectas L_1 y L_2 tienen vectores direccionales $\bar{a} = (4,0,3)$ y $\bar{b} = (-3,\sqrt{11},4)$ respectivamente. Su intersección es el punto $S(3,2,1)$. Cual es la recta L_3 que pasa por el punto $P(15,2,10)$ y determina con L_1 y L_2 un triángulo de $6u^2$ de área.

Solucion 7.

Haciendo un esbozo de las rectas se tiene



En la figura se tiene

$$\bar{a} \,//\, \overline{SP} = (12,0,9) = 3(4,0,3)$$

Se verifica que

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (4,0,3) \cdot (-3,\sqrt{11},4) = 0$$

Por lo que las rectas L_1 y L_2 son ortogonales. Y el área del triángulo es;

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|(t\bar{b}) \times \overline{SP}\| = 12$$

$$\|t(-3,\sqrt{11},4) \times (12,0,9)\| = 24$$

$$\|t(9\sqrt{11}, 75, -12\sqrt{11})\| = 24$$

$$|t|\sqrt{(9\sqrt{11})^2 + (75)^2 + (-12\sqrt{11})^2} = 24$$

$$90|t| = 24 \;\leadsto\; t = \pm\frac{4}{15}$$

Luego el vector base del triángulo es: $t\bar{b} = \frac{4}{15}\left(-3, \sqrt{11}, 4\right)$

Sea $\bar{c}$ el vector direccional de la recta $L_3: P = (15,20,10) + r\bar{c}, r \in R$ tal que

$$\bar{c} = t\bar{b} - \overline{SP}$$

$$\bar{c} = \frac{4}{15}\left(-3, \sqrt{11}, 4\right) - (12,0,9)$$

$$\bar{c} = \left(-\frac{64}{5}, \frac{4}{15}\sqrt{11}, -\frac{119}{15}\right)$$

Finalmente, la recta pedida es;

$$\boldsymbol{L_3: P = (15, 2, 10) + r\left(-192, 4\sqrt{11}, -119\right), r \in R}$$

Ejercicio 8. Sean los puntos $R(2,3,4)$ y $S(3,1,6)$ y el plano $P_1: x + y - 4z = 3$. Hallar la ecuación de un plano P que pasa por R, S y que forma con P_1 un ángulo de 45°.

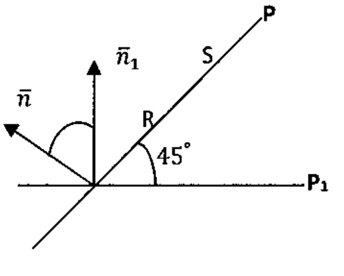
Solucion 8.

Se desea hallar el plano

$$P: P = R + t\bar{a} + s\bar{b}\,; t, s \in R$$

O también

$$P: P = S + t\bar{a} + s\bar{b}\,; t, s \in R$$



Donde

$$\bar{a} = \overline{RS} = (1, -2, 2)$$

Cuyo vector normal es

$$\bar{n} = (1, -2, 2) \times (b_1, b_2, b_3) = (-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1)$$

Además, el ángulo entre los planos P y P_1 es el ángulo formado por sus vectores normales.

Es decir

$$\measuredangle(P, P_1) = \measuredangle(\bar{n}, \bar{n}_1) = 45^{\circ}, \qquad \bar{n}_1 = (1, 1, -4)$$

Entonces

$$cos(45) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{n}_1}{\|\bar{n}\| \|\bar{n}_1\|} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1).(1,1,-4)}{\|\bar{n}\| \|(1,1,-4)\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2b_3 - 2b_2 + 2b_1 - b_3 - 4b_2 - 8b_1}{3\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3b_3 - 6b_2 - 6b_1}{3\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-b_3 - 2b_2 - 2b_1}{\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$

Luego

$$\|\bar{n}\|^2 = (-b_3 - 2b_2 - 2b_1)^2$$

Es decir,

$$\|(-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1)\|^2 = (-b_3 - 2b_2 - 2b_1)^2$$

Desarrollando se tiene

$$4b_3^2 + b_2^2 + 4b_1^2 + 4b_2b_3 - 8b_1b_3 - 4b_1b_2 = 0$$
$$(2b_3 - 2b_1 + b_2)^2 = 0 \rightsquigarrow 2b_3 - 2b_1 = -b_2$$

Entonces el vector normal

$$\bar{n} = (-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1) = (2b_3 - 4b_1, 2b_1 - b_3, 4b_1 - 2b_3)$$
$$\bar{n} = (2b_1 - b_3)(-2,1,2)$$

Luego basta considerar como vector normal

$$\bar{n} = (-2,1,2)$$

De la ecuación normal del plano

$P: (P - R) \cdot \bar{n} = 0, \quad R(2,3,4)$

$P: \big((x, y, z) - (2,3,4)\big) \cdot (-2,1,2) = 0$

$P: (x - 2, y - 3, z - 4) \cdot (-2,1,2) = 0$

$P: 2x - y - 2z + 7 = 0$

Ejercicio 9. Justificando debidamente su proceso, demostrar:

Si $X = A \times B, Y = B \times C, Z = C \times A$, entonces

$$[XY\ Y \times Z\ Z \times X] = [A\ B\ C]^4$$

Ejercicio 10. Demostrar la identidad de Jacobi:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = 0$$

Ejercicio 11. Sean A, B y C vectores en R^3 talque

$$\measuredangle(A, B) = \frac{\pi}{4} \text{ y } \|C\| = \|B\| = 1 = \frac{1}{2}\|A\|$$

Ejercicio 12. Demostrar que:

$$[A\ B\times(B\times C\ )\ A\times(A\times C)]=-2\sqrt{2}[A\ B\ C]$$

Ejercicio 13. Sean los puntos $A(1,2,3)$, $B(1,3,0), C(1+\sqrt{5},4,2)$ y $D(1+\sqrt{5},1,1)$. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las diagonales de dos caras opuestas de un cubo. Hallar sus vértices.

Ejercicio 14. Hallar el ángulo que forman los vectores $\overline{AF}$ y $\overline{AC}$ si $\overline{PF}=\mathrm{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF}=(3,-6,3)$, $\overline{CP}=(-1,3,7)$. Donde $A(4,0,-1)$ y $F(a,b,0)$ son vértices de un paralelepípedo ABCDEFGH.

Ejercicio 15. Sean A, B y C vectores en R^3. Si, $X=A\times B$, $Y=B\times C$, $Z=C\times A$ Y $[A\,B\,C]=\sqrt{2}$ hallar: $[X\times Y\ Y\times Z\ Z\times X]$

Ejercicio 16. Los puntos A y H, B y E, C y F, D y G son respectivamente vértices opuestos de las caras ABCD y HEFG (opuestas) de un paralelepípedo. Halle su volumen si se sabe que $A(4,0,-1)$, $F(f_1,f_2,0)$, $\overline{CP}=(-1,3,7)$, $\overline{BD}=(13,-1,-21)$ y $\overline{PF}=\mathrm{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF}=(3,-6,3)$

Ejercicio 17. Un objeto de 2 kg se desliza por una rampa que tiene un ángulo de 30° con la horizontal. Se desprecia la fricción, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravitacional. ¿Cuál es la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del movimiento del objeto?

Ejercicio 18. En un paralelepípedo rectangular, ABCD y EFGH son caras opuestas y AH, BG, CF y DE son aristas. Sean los vértices $A(13,8,5)$, $B(5,8,13)$ y $F(-5,-20,3)$. Si $\overline{FH}$ es paralelo al vector $\bar{v}=(6,3,2)$. Hallar el vértice H y el volumen del paralelepípedo.

Ejercicio 19. Sea la recta

$$L:\begin{cases}3x+y-z+1=0\\2x-y+2z-1=0\end{cases}$$

y el plano $P:3x+2y-z-2=0$

a) Determinar si L y P son paralelos o se interceptan

b) Si son paralelos halle la distancia de L a P

c) Si se interceptan halle el punto de intersección.

Ejercicio 20.

a) Sea F una fuerza aplicada en uno de los extremos de un brazo que tiene fijo el otro. Determine una formula vectorial para:

$$\text{cantidad de torque} = (\text{longitud del brazo})(\text{componente de F} \perp \text{al brazo})$$

b) Melisa está cambiando un neumático. La llave es posicionada en uno de los pernos de la rueda formando un ángulo de $53°$ con la horizontal y aplica una fuerza de 40 lb. hacia abajo para aflojar el perno. Si la longitud de la llave es un pie, cual es el torque que imparte al perno.

Ejercicio 21. Dadas las rectas:

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x = y - 1 = z - 2 \\ L_2 &: \quad x = t, \quad y = t, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Determinar si se intersecan o se cruzan. Si se intersecan hallar el punto de intersección, de lo contrario la distancia de L_1 a L_2 y la recta L perpendicular a ambas.

Ejercicio 22. Los puntos $A(1,1,1)$, $B(5,7,9)$, $C(6,7,8)$ y $D(7,5,9)$ determinan un tetraedro. Si desde A y D parten simultáneamente dos móviles con dirección al baricentro de la cara ABC, cada uno con una velocidad de $\sqrt{2}$ u/seg. En qué punto se encuentra el móvil que partió de D, cuando el que partió de A llega al baricentro.

Ejercicio 23. Sea la recta

$$L: \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

y el plano $P: \; 3x + 2y - z - 2 = 0$

Determine sí L y P son paralelos o se interceptan. Si son paralelos halle la distancia de L a P, Si se interceptan halle el punto de intersección.

Ejercicio 24. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores de R^3 con longitudes $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ y que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes. Hallar

a) $\operatorname{Proy}_{\bar{a}}(2\bar{a}-\bar{b})$

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a}-\bar{b}$ y $\bar{a}+2\bar{b}$

Ejercicio 25. La longitud de las aristas laterales de un paralelepípedo P es $4\sqrt{\frac{3}{2}}$ la longitud de las aristas de las bases. Hallar el mínimo volumen de P si $L_1:(0,1,2)+r(1,1,1);\ r\in R$ contiene una arista lateral y $L_2:\{x=t,\ y=t,\ z=0\};\ t\in R$ contiene una arista en la base.

Ejercicio 26. Hallar la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L:\ \begin{cases}-2x+y+4z-7=0\\ 3x+2y+z=0\end{cases}$$

y es perpendicular al plano $P_1:\ 2x+y-2z+1=0$

Ejercicio 27. Los puntos $A(6,-6,8), B, C$ y D son vértices de un paralelogramo siendo $\overline{AB}=(1,7,3)$ una de las diagonales. Si $\operatorname{Proy}_{3\overline{CA}}\overline{AB}=\overline{AC}$, encuentre el área del paralelogramo que se construye con auxilio del punto Q de modo que $\overline{AQ}=(1,4,4)$ sea una de sus aristas, $\overline{AD}$ una de sus diagonales y $\operatorname{Proy}_{\frac{45}{7}\overline{BC}}\overline{BQ}=-\frac{7}{45}(2,4,5)$

Ejercicio 28. Hallar las rectas que pasan por el punto (3,4,0) y cortan al eje Z, sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dichas rectas es 4 unidades.

V. REFERENCIALES

APOSTOL, T. M. (1995). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introduccion al algebra lineal* (Vol. 1). Mexico: Reverte Ediciones, S.A. de C.V.

COLLEY, S. J. (1998). *Vector Calculus.* Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

KOLMAN, B. (1999). *Algebra lineal con aplicaciones y Matlab* (SEXTA EDICION ed.). Mexico: PRENTICE HALL.

LEHMAN, C. (1995). *Geometria Analítica.* México: Limusa.

PURCELL, E. J., & VARBERG, D. (1992). *Cálculo con Geometria Analítica.* México: Prentice Hall Inc.

SAAL RIQUEROS, C., CAMPOS, P., & AZNARAN, J. (1990). *Matemáticas Básicas II.* Lima: Gomez.

STEWART, J., REDLIN, L., & WATSON, S. (2007). *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* (Quinta Edición ed.). México: International Thomson Editores, S. A.

VI. APÉNDICE

APÉNDICE 1. TRASLACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS EN FORMA MATRICIAL.

Las coordenadas del punto $P(x,y)$ se trasladan en la dirección del vector $\bar{a} = (a_1, a_2)$, con respecto al origen de coordenadas, obteniéndose las nuevas coordenadas del punto trasladado $P_T(x_T, y_T)$ ver FIGURA 5.1, Es decir;

$$\boldsymbol{P_T = P + t\bar{a}\,, t} \in \mathbb{R}$$

$$P_T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Se dice que P_T es el punto P trasladado t veces el vector $\bar{a}$.

También, de la figura se obtiene

$$P_T = P + r\bar{u}_{\bar{a}}\ ;\ r \in R, \bar{u}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$$

$$P_T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathrm{r}\frac{1}{\|\bar{a}\|}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Y se dice que P_T es el punto P trasladado r veces en la dirección del vector $\bar{a}$

Luego las coordenadas del punto trasladado $P_T(x_T, y_T)$, en forma matricial, está dado por:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_T} \\ \boldsymbol{y_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \boldsymbol{t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P_T = P + M_T\bar{a}}$$

Donde $M_T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ es llamada matriz de traslación (STEWART, REDLIN, & WATSON, 2007), t unidades el vector $\bar{a}$.

APÉNDICE 2. PUNTO SIMÉTRICO CON RESPECTO A UNA RECTA EN FORMA MATRICIAL

1. El punto simétrico de $P(x,y)$ con respecto a la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in \mathbb{R}$
   En forma compacta es

$\boldsymbol{P_s = P + 2d\bar{u}}$; $\boldsymbol{\bar{u} = \frac{\bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{d = d(P, L)}$, hay que tener cuidado con la dirección del vector $\bar{u}$.

2. Sean los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ y la recta $L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ para hallar los puntos simétricos de los puntos dados, reunidos en la matriz $P_s = [P_{s1}, P_{s2}, \dots, P_{sn}]$ con respecto a la recta dada, se sigue:
3. Se reúnen los puntos dados en la matriz de datos $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$

   Se forma la matriz

   $2d\bar{u} = [2d_1\bar{u} \quad 2d_2\bar{u} \quad \dots \quad 2d_n\bar{u}]$, $d_i = d(P_i, L), i = 1,2, \dots, n$
4. Finalmente, los puntos simétricos están dados por:

$$\boldsymbol{P_s = [P_1, P_2, \dots, P_n] + [2d_1\bar{u} \quad 2d_2\bar{u} \quad \dots \quad 2d_n\bar{u}]}$$

APÉNDICE 3. EXPANSIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA EN FORMA MATRICIAL

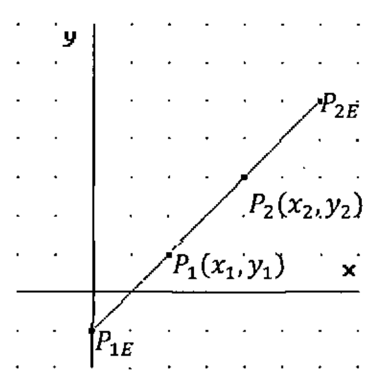
Los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ determinan el segmento $\overline{P_1P_2}$. Halle el segmento expandido $\overline{P_{1E}P_{2E}}$ n veces el segmento $\overline{P_1P_2}$.

De la gráfica se tiene que:

$$P_{1E} = P_1 - \left(\frac{n-1}{2}\right) t\,\bar{u} \; ; \; t = \|\overline{P_1P_2}\|, n = 1,2,3,4, \dots$$

$$P_{2E} = P_2 + \left(\frac{n-1}{2}\right) t\,\bar{u} \; ; \; t = \|\overline{P_1P_2}\|, n = 1,2,3,4, \dots$$

Donde; $\bar{u} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\|\overline{P_1P_2}\|} = (u_1, u_2)$



Reemplazando los puntos y el vector en forma de vector columna se tiene

$$P_{1E} = P_1 - \begin{bmatrix} \left(\frac{n-1}{2}\right)t & 0 \\ 0 & \left(\frac{n-1}{2}\right)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, n = 1,2,3,4, \dots$$

$$P_{2E} = P_2 + \begin{bmatrix} \left(\frac{n-1}{2}\right)t & 0 \\ 0 & \left(\frac{n-1}{2}\right)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, n = 1,2,3,4, \dots$$

Finalmente se tiene el segmento expandido $\overline{P_{1E}P_{2E}}$

En general, los vértices $P_1, P_2, \dots, P_m$ forma una figura. Los vértices de la figura cuyos lados son expandidos n veces, en forma de vector columna, están dados por:

$$[P_{iEI}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iED}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \dots$$

Luego, la figura expandida n veces la longitud de sus lados tiene los vértices dados por:

$$[P_{iEIA}] = [P_{iEI}] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iEDA}] = [P_{iED}] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \dots$$

Finalmente

$$[P_{iEIA}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iEDA}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right] - \left[\left(\frac{n-1}{2}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \dots$$

En general, los vértices $P_1, P_2, \dots, P_m$ forma una figura. Los vértices de la figura cuyos lados con contraídos n veces, en forma de vector columna, están dados por:

$$[P_{iCI}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iCD}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \dots$$

Luego, la figura contraída n veces la longitud de sus lados tiene los vértices dados por:

$$[P_{iCIA}] = [P_{iCI}] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iCDA}] = [P_{iCD}] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1} \bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4, \dots$$

Finalmente

$$[P_{iCIA}] = [P_i] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i\right] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_i \bar{u}_i^{\perp}\right], t_i = \|\overline{P_iP_{i+1}}\|, \bar{u}_i = \frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\|P_iP_{i+1}\|}, i = 1,3, \dots$$

$$[P_{iCDA}] = [P_i] - \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1}\bar{u}_{i-1}\right] + \left[\left(\frac{n-1}{2n}\right) t_{i-1}\bar{u}_{i-1}^{\perp}\right], t_{i-1} = \|\overline{P_{i-1}P_i}\|, \bar{u}_{i-1} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{\|P_{i-1}P_i\|}, i = 2,4,\ldots$$

APÉNDICE 4. ROTACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS EN FORMA MATRICIAL

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ se rotan, en sentido antihorario, un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas, obteniéndose las nuevas coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ ver FIGURA 5.3, Es decir;

$$\overline{OP_R} = \|\overline{OP_R}\|\big(cos(\theta + \alpha), sen(\theta + \alpha)\big)$$

Donde;

$\|\overline{OP_R}\| = \|\overline{OP}\|, x = \|\overline{OP}\|cos\alpha\ , y = \|\overline{OP}\|sen\alpha$

Entonces

$$\overline{OP_R} = \|\overline{OP}\|(cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha, cos\theta sen\alpha + sen\theta cos\alpha)$$

$$\overline{OP_R} = (\|\overline{OP}\|cos\alpha cos\theta - \|\overline{OP}\|sen\alpha sen\theta, \|\overline{OP}\|sen\alpha cos\theta + \|\overline{OP}\|cos\alpha sen\theta)$$

$$\overline{OP_R} = (xcos\theta - ysen\theta, ycos\theta + xsen\theta)$$

$$\overline{OP_R} = (xcos\theta, xsen\theta) + (-ysen\theta, ycos\theta)$$

$$\overline{OP_R} = x(cos\theta, sen\theta) + y(-sen\theta, cos\theta)$$

Si $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$ entonces

$$\boldsymbol{P_R = x\bar{u} + y\bar{u}^{\perp}}$$

Utilizando la representación del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta\,)$ en forma de vector columna

$$P_R = x\begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} xcos\theta \\ xsen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ysen\theta \\ ycos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + ycos\theta \end{bmatrix}$$

Finalmente, las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ en forma matricial está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sen\theta} \\ \boldsymbol{sen\theta} & \boldsymbol{cos\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

En forma compacta

$$P_R = M_{R(\theta)}P$$

Donde $M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ es llamada matriz de rotación del punto P , en sentido anti horario, de un ángulo θ.

La rotación del punto $P(x,y)$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas es equivalente a la rotación del vector de posición $\overline{OP}$ del punto P, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al origen de coordenadas.

APÉNDICE 5. ROTACIÓN DE COORDENADAS DE UN PUNTO CON RESPECTO A UN PUNTO ARBITRARIO EN FORMA MATRICIAL

Las coordenadas del punto $P(x,y)$ se rotan, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto $P_0(x_0, y_0)$, obteniéndose las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$, ver FIGURA 5.4. Es decir;

$$\overline{P_0P_R} = \|\overline{P_0P_R}\|\big(cos(\theta+\alpha), sen(\theta+\alpha)\big)$$

Dónde:

α es el ángulo formado por el semieje positivo de las X_s y el vector $\overline{P_0P}$, $\|\overline{P_0P_R}\| = \|\overline{P_0P}\|$, $x - x_0 = \|\overline{P_0P}\|cos\alpha$, $y - y_0 = \|\overline{P_0P}\|sen\alpha$

Desarrollando y reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\overline{P_0P_R} = \|\overline{P_0P}\|(cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha, cos\theta sen\alpha + sen\theta cos\alpha)$$

$$\overline{P_0P_R} = \left(\underbrace{\|\overline{P_0P}\|cos\alpha}_{x-x_0} cos\theta - \underbrace{\|\overline{P_0P}\|sen\alpha}_{y-y_0} sen\theta, \underbrace{\|\overline{P_0P}\|sen\alpha}_{y-y_0} cos\theta + \underbrace{\|\overline{P_0P}\|cos\alpha}_{x-x_0} sen\theta\right)$$

$$\overline{P_0P_R} = \big((x-x_0)cos\theta - (y-y_0)sen\theta, (y-y_0)cos\theta + (x-x_0)sen\theta\big)$$

$$\overline{P_0P_R} = \big((x-x_0)cos\theta, (x-x_0)sen\theta\big) + (-(y-y_0)sen\theta, (y-y_0)cos\theta)$$

$$\overline{P_0P_R} = (x-x_0)(cos\theta, sen\theta) + (y-y_0)(-sen\theta, cos\theta)$$

Si $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta)$, entonces

$$\overline{P_0P_R} = (x-x_0)\bar{u} + (y-y_0)\bar{u}^{\perp}$$

$$P_R - P_0 = (x-x_0)\bar{u} + (y-y_0)\bar{u}^{\perp}$$

Finalmente, el punto rotado está dado por:

$$\boldsymbol{P_R = P_0 + (x - x_0)\bar{u} + (y - y_0)\bar{u}^{\perp}}$$

Utilizando la representación del vector $\bar{u} = (cos\theta, sen\theta\ )$ en forma de vector columna

$$P_R = P_0 + (x - x_0)\begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + (y - y_0)\begin{bmatrix} -sen\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} (x - x_0)cos\theta \\ (x - x_0)sen\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(y - y_0)sen\theta \\ (y - y_0)cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} (x - x_0)cos\theta - (y - y_0)sen\theta \\ (x - x_0)sen\theta + (y - y_0)cos\theta \end{bmatrix}$$

Aplicando la multiplicación de matrices

$$P_R = P_0 + \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las coordenadas del punto rotado $P_R(x_R, y_R)$ en forma matricial está dado por:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}$$

En forma compacta

$$\boldsymbol{P_R = P_0 + M_{R(\theta)}\overline{P_0P}}$$

Donde $M_{R(\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ es llamada matriz de rotación del vector $\overline{P_0P}$, en sentido antihorario, de un ángulo θ.

La rotación del punto $P(x, y)$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto P_0 es equivalente a la rotación del vector $\overline{P_0P}$, en sentido anti horario, de un ángulo θ con respecto al punto P_0.

VII. ANEXOS

ANEXO A. AXIOMAS PARA EL SISTEMA DE NÚMEROS REALES (AXIOMAS DE CUERPO) (APOSTOL, 1995)

Junto con los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas de adición y multiplicación, tales que para cada par de números reales xe y se puede formar la suma de xe y, que es otro número real denotado $x + y$ y el producto de xe y, denotado xy.

Axiomas:

A1. Conmutatividad

$$x + y = y + x, xy = yx$$

A2. Asociatividad

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A3. Distributividad

$$x(y + z) = xy + xz$$

A4. Existencia de elementos neutros (0: número cero, 1: número uno)

$$x + 0 = 0 + x = x, x1 = 1x = x$$

A5. Existencia de negativos. Para cada número real x existe un número real $-x$ tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

A6. Existencia del reciproco. Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real $\frac{1}{x}$ tal que

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)x = 1$$

De los axiomas anteriores se puede deducir todas las leyes usuales del Algebra Elemental.