UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD LOGARÍTMICA DE BRUNN-MINKOWSKI”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

FRANCO MANUEL DIAZ VEGA

CALLAO - PERU

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

Demostración de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski

FRANCO MANUEL DIAZ VEGA

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Universidad Nacional del Callao - Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, como parte de los requisitos necesarios para la obtención de Licenciado en Matemática.

Asesor: Edinson Raúl Montoro Alegre

Callao, Febrero del 2019

Hoja de Referencia del Jurado y Aprobación

Demostración de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski

FRANCO MANUEL DIAZ VEGA

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Universidad Nacional del Callao - Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, como parte de los requisitos necesarios para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
(Asesor)

Lic. Rodriguez Varillas Gabriel
(Presidente)

Lic. León Zárate Elmer Alberto
(Vocal)

Lic. Bernui Barros Juan Benito
(Secretario)

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe
(Suplente)

Callao-Perú 2019

Ficha Catalográfica

FRANCO MANUEL DIAZ VEGA

Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski

Alumno: FRANCO MANUEL DIAZ VEGA,

Callao, UNAC/FCNM, 2019

Asesor: Edinson Raúl Montoro Alegre

Tesis de Licenciatura - UNAC/FCNM/ Título profesional de Licenciado en Matemática.

Matemática,

1. Introdución.

2. Resultados Básicos.

3. Desigualdad Clásica de Brunn-Minkowski.

4. Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.

Dedicatoria

A mi familia
y a los matemáticos Minkowski y Lebesgue.

Agradecimentos

Agradesco primeramente a Dios por darme la vida y por darme fuerzas para concluir una etapa más de mis estudios.

A mi familia por el apoyo incondicional y por darme fuerzas para salir adelante.

Un agradecimento especial a mi asesor, Edinson Raúl Montoro Alegre, por su eficiente orientación, buenos consejos, paciencia, buena voluntad, sabiduría, por el ejemplo de dedicación y por haberme aceptado como asesor.

A la Universidad Nacional del Callao por el apoyo en los momentos difíciles.

A mis amigos de la UNAC y UFF Orlando, Gianfranco, Nina entre otros que de alguna forma me ayudaron a nunca rendirme.

A los funcionarios de la UNAC por la atención y convivencia amiga durante la realización de la carrera.

A mis profesores mi asesor Edinson Montoro, Aldo Bazán Pacoricona, Orlando Moreno Vega, Elsa Cárdenas por sus buenos consejos y motivación.

A mis profesores Wilfredo Mendoza Quispe, Sofía Durand, Ruth Medina, Mario Santiago, Cabanillas Lapa, Orlando Moreno Vega , entre otros por darme una buena formación como matemático y estoy eternamente agradecido.

Indice

Introducción

La desigualdad de Brunn-Minkowski es uno de los resultados fundamentales en la teoría de conjuntos convexos y núcleo fundamental de la geometría convexa. De esta desigualdad se puede sacar muchos resultados de gran profundidad e importancia, y continúa siendo un motivo de estudio e investigación. Tiene su origen en el trabajo de Hermann Brunn en 1887, quien probó la desigualdad de una forma inteligente, pero no tuvo las condiciones necesarias para mostrar la igualdad. Fue Minkowski quien dio una demonstración mejor y completa del resultado para cualquier dimensión, mostrando también la igualdad.

En las matemáticas, la desigualdad de Brunn-Minkowski es una desigualdad que relaciona el volumen (más comúnmente la medida de Lebesgue) de subconjuntos Lebesgue medibles del espacio euclidiano. La versión original del teorema de Brunn-Minkowski (Hermann Brunn 1887, Hermann Minkowski 1896) se aplica a conjuntos convexos. La generalización para considerar conjuntos no convexos se debe a L. Lyusternik (1935). Esta desigualdad tiene aplicaciones en análisis y geometría, y también tiene equivalencias con otras desigualdades como por ejemplo con la Desigualdad de Prekopa-Leindler ver ([8]) o también con la Desigualdad de Kneser-Suss [3] , entre otras.

La desigualdad de Brunn-Minkowski tiene aplicaciones en muchas áreas de la matemática como en el álgebra, geometría, análisis funcional, problemas isoperimétricos, etc.

Nuestro objetivo va ser demostrar una variante de la Desigualdad de Brunn-Minkowski llamada Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.

0.1 Tablas de Contenido

Índice de figuras

0.2 Resumen

Demostración de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski
FRANCO MANUEL DÍAZ VEGA
Octubre-2018
Asesor: Edinson Raúl Montoro Alegre

El objetivo principal de la tesis es demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski que enunciamos acontinuación:
Si K,L son 2 cuerpos convexos con origen simétrico en R^2 y $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$(1) \qquad V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda}$$

con igualdad si y solo si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos.
Donde V es la medida de Lebesgue y $+_0$ es L_0-suma de Minkowski.

La desigualdad (1) es equivalente a demostrar

$$(2) \qquad \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

con igualdad si y solo si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos. Es por esta razón que recibe el nombre de **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**.

Donde h_K y h_L son las funciones soportes de K y L respectivamente y V_K es la medida de cono-volumen.

El objetivo principal de la tesis es demostrar la desigualdad (2) en el espacio R^2 y por lo tanto hemos demostrado (1).

Palabras claves:

Cuerpo convexo, medida de Lebesgue, Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski, medida de Cono-Volumen, función soporte, suma de Minkowski.

0.3 Abstract

Demonstration of the Logarithmic Inequality of Brunn-Minkowski
FRANCO MANUEL DÍAZ VEGA
October-2018
Advisor: Edinson Raúl Montoro Alegre

The main objective of the thesis is to study the Logarithmic Inequality of Brunn-Minkowski: If K, L are 2 convex bodies in the plane with symmetric origin in R^2 and $0 \leq \lambda \leq 1$ then

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda} \tag{3}$$

with equality if and only if K and L are dilated or K and L are parallelograms with parallel sides.
Where V is the measure of Lebesgue and $+_0$ is L_0-sum of Minkowski.

Inequality (1) is equivalent to demonstrating

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

with equality if and only if K and L are dilated or K and L are parallelograms with parallel sides. It is for this reason that it receives the name of **Log-Brunn–Minkowski inequality**.

Where h_K and h_L are the supporting functions of K and L respectively and V_K is the measure of cone-volume.

The main objective of the thesis is to show the inequality (2) in the space R^2 and therefore we have shown (1).

Key words:

Convex body, Lebesgue measure, Log-Brunn–Minkowski inequality, measure cone-volume, support function, sum of Minkowski.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1 Determinación del problema

El objetivo principal es demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski que enunciamos acontinuación

Teorema 1.1. *Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano con origen simétrico entonces son equivalentes*

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda} \tag{1.1}$$

y

$$\int_{S^{n-1}} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.2}$$

1.2 Formulación del problema

En el área de Ecuaciones en Derivadas Parciales [3] uno se encuentra con algunos problemas interesantes e importantes. Muchos de estos problemas para ser resueltos ha sido necesario desarrollar y aplicar desigualdades como la de Holder [4], Minkowski [3], Young [4], etc y otras no muy conocidas pero que sin embargo para su demostración han sido necesarias usar otras desigualdades. Una de estas desigualdades es conocida como Desigualdad de Brunn-Minkowsi [4] y esta a su vez tiene varias variantes y versiones. Esto a ocurrido mucho en el área de Desigualdades de Sovolev [4].

La Desigualdad de Brunn-Minkowski y en particular una variante de esta es conocida como **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**, nunca se a tratado o estudiado a profundidad en algún curso de pregrado de la carrera de Matemática lo que motiva a plantear el siguiente problema. Plantear y demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski, es decir, ¿Será posible demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski en el espacio R^2?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.

1.3.2 Objetivo específico

1. Estudiar resultados de análisis convexo.
2. Demostrar un lema que será usado para demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.
3. Estudiar la equivalencia de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.
4. Una vez demostrado la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski daré una aplicación de esta.

1.4 Justificación

Toda la investigación se desarrolla en el plano pero sería interesante analizarlo en R^n. Estudios recientes hacen sospechar que se cumple en R^n y sería interesante continuar esta investigación, que tiene aplicaciones en muchas áreas de la matemática como también en robótica, y en lo posible que sirva como una motivación para que se siga investigando en esta área de la matemática y se desarrollen nuevos métodos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Preliminares

2.1.1 Conjuntos Convexos

Estudiaremos los resultados de análisis convexo cuya referencia se sigue de [2] o cualquier libro de convexidad.

Definición 1.1: Un conjunto $A \subseteq R^n$ es **convexo** si, para todo $x, y \in A$, el segmento $[x, y] \subseteq A$.

Son ejemplos de conjuntos convexos:

1. Hiperplanos: $H_{\mu,\alpha} = \{x \in R^n : \langle x, \mu \rangle = \alpha\}$, donde $\mu \in R^n$ y $\alpha \in R$.

2. Semiespacios: $H^{-}_{\mu,\alpha} = \{x \in R^n : \langle x, \mu \rangle \leq \alpha\}$, donde $\mu \in R^n$ y $\alpha \in R$.

3. Un poliedro, que es la intersección finita de semiespacios.

Definición 1.2: Un conjunto $A \subseteq R^n$ es un **cuerpo convexo** si es convexo, compacto y con interior no vacío.

Son ejemplos: la bola cerrada, polígonos, poliedros, polítopos, etc.

2.1.2 Función Soporte

Definición 1.1: Si K es un cuerpo convexo, la **función soporte** $h(K, .) : R^n \longrightarrow R$ es definido por

$$h_K(u) = max \{x.u : x \in K\} \tag{2.1}$$

Definición 1.2: El cuerpo convexo K en R^n es de **origen simétrico** si y solamente si

$$h_K(u) = h_K(-u) \tag{2.2}$$

para todo $u \in S^{n-1}$.

Definición 1.3: Sea K un cuerpo convexo en R^n que contiene el origen en su interior, entonces la medida del cono-volumen, V_K, de K es la medida de Borel en la esfera unitaria S^{n-1} definida para conjunto de Borel $w \in S^{n-1}$, por

$$V_K(w) = \frac{1}{n}\int_{x \in v_K^{-1}(w)} x.v_K(x) dH^{n-1}(x) \tag{2.3}$$

Tenemos las fórmulas

$$V_K = \frac{1}{n} h_K S_K \tag{2.4}$$

y

$$V(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K(u) dS_K(u) \tag{2.5}$$

donde:
$V_K : \partial K \longrightarrow S^{n-1}$ es la aplicación de Gauss. Con cada cuerpo convexo K en R^n es la medida de Borel S_K en S^{n-1} llamado medida de area de Aleksandrov-Fenchel-Jessen de K, y es definido por:

$$S_K(w) = H^{n-1}(v_K^{-1}(w))$$

para cada conjunto de Borel $w \subseteq S^{n-1}$ y H^{n-1} es la (n-1) medida de Hausdorff dimensional. Se sigue de las referencias [1, 8]

Teorema 2.1. *Sean $K, L \subseteq R^n$ dos cuerpos convexos y si h_K, h_L son las 2 funciones soporte de K y L respectivamente, entonces*
a. $h_{K+L} = h_K + h_L$
b. $h_{\lambda K} = \lambda h_K$ *; para todo* $\lambda \geq 0$.

Prueba: Dado $u \in R^n$ entonces $h_{K+L}(u) = \sup_{a \in K+L} \langle a, u\rangle$. Como K+L es compacto se tiene que $a_0 = k_0 + l_0 \in K + L$ osea el máximo, luego

$$h_{K+L}(u) = \langle a_0, u\rangle = \langle k_0, u\rangle + \langle l_0, u\rangle \leq h_K(u) + h_L(u)$$

Recíprocamente, de la compacidad de K y L nos asegura que dado $u \in R^n$, existe $k_0' \in K$ y $l_0' \in L$ tal que $h_K(u) = \langle k_0', u \rangle$ y $h_L(u) = \langle l_0', u \rangle$ y por lo tanto

$$h_K(u) + h_L(u) = \langle k_0' + l_0', u \rangle \leq h_{K+L}(u)$$

Para la parte b:

$$h_{\lambda K}(u) = \sup_{a \in K} \langle \lambda a, u \rangle = \lambda \sup_{a \in K} \langle a, u \rangle = \lambda h_K(u)$$

2.1.3 Fórmulas de Minkowski-Steiner

Las fórmulas de Minkowski-Steiner son

$$V(K + tL) = \sum_{i=0}^{n} C_i^n V_i(K, L) t^i \tag{2.6}$$

En el caso planar ($n = 2$) tenemos

$$\begin{aligned} V(K + tL) &= \sum_{i=0}^{2} C_i^2 V_i(K, L) t^i \\ &= C_0^2 V_0(K, L) + C_1^2 V_1(K, L) t + C_2^2 V_2(K, L) t^2 \\ &= V(K) + 2V(K, L) t + V(L) t^2 \end{aligned}$$

Ahora si $t = 1$ entonces tenemos

$$V(K + L) = V(K) + 2V(K, L) + V(L) = V(L) + 2V(L, K) + V(K) = V(L + K)$$

y asi

$$V(K, L) = V(L, K)$$

y

$$V_i(K + tL, L) = \sum_{j=0}^{n-i} C_j^{n-i} V_{i+j}(K, L) t^j \tag{2.7}$$

donde $t \geq 0$ y

$$V_i(K, L) = V(\underbrace{K, ..., K}_{n-i}, \underbrace{L, ..., L}_{i}) \tag{2.8}$$

es llamado el **i-volumen mixto** de K y L. En particular $V_0(K, L) = V(K)$, $V_n(K, L) = V(L)$, $V_i(K, L) = V_{n-i}(L, K)$ y en el caso planar escribimos $V_1(K, L) = V(K, L)$. Diferenciando ambos lados de tenemos

$$V'(K + tL) = \sum_{i=1}^{n} i C_i^n V_i(K, L) t^{i-1} = n V_1(K + tL, L) \tag{2.9}$$

la última desigualdad se obtiene:
Paso 1:

$$\begin{aligned}
V'(K+tL) &= \sum_{i=1}^{n} iC_i^n V_i(K,L)t^{i-1} \\
&= C_1^n V_1(K,L) + 2C_2^n V_2(K,L)t + 3C_3^n V_3(K,L)t^2 + ... \\
&= \frac{n!}{(n-1)!}V_1(K,L) + \frac{n!}{(n-2)!}V_2(K,L)t + \frac{n!}{2(n-3)!}V_3(K,L)t^2 + ... \\
&= n\left[V_1(K,L) + (n-1)V_2(K,L)t + \frac{(n-1)(n-2)}{2}V_3(K,L)t^2 + ...\right]
\end{aligned}$$

Paso 2:

$$\begin{aligned}
V_1(K+tL,L) &= \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{n-1} V_{1+j}(K,L)t^j \\
&= C_0^{n-1}V_1(K,L) + C_1^{n-1}V_2(K,L)t + C_2^{n-1}V_3(K,L)t^2 + ... \\
&= V_1(K,L) + (n-1)V_2(K,L)t + \frac{(n-1)(n-2)}{2}V_3(K,L)t^2 + ...
\end{aligned}$$

comparando estos dos últimos resultados tenemos la igualdad deseada.

$$\begin{aligned}
V_1(K+tL,L) &= \sum_{j=0}^{1} C_j^1 V_{1+j}(K,L)t^j \\
&= C_0^1 V_1(K,L) + C_1^1 V_2(K,L)t \\
&= V(K,L) + V(L)t
\end{aligned}$$

y

$$V'(K+tL) = 2V(K,L) + 2tV(L) = 2(V(K,L) + tV(L))$$

De estos dos últimos resultados tenemos

$$V'(K+tL) = 2V(K+tL,L) \tag{2.10}$$

2.1.4 La Suma de Minkowski

Definición 1.2: Dados dos conjuntos $A, B \subseteq R^n$, definimos la **suma de Minkowski de** A **y** B como el conjunto de todas las sumas de elementos de A y B, es decir:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

De las propiedades de la suma usual en R^n, es inmediato que la suma de Minkowski es associativa, comutativa y tiene elemento neutro (el conjunto unitario 0), asumiendo que

$\phi + A = A + \phi = \phi$ para todo $A \subseteq R^n$. Note que $A + B = \bigcup_{a \in A}(a + B) = \bigcup_{b \in B}(A + b)$. A partir de esta observación, tenemos las siguientes propiedades:

- Si A o B es abierto, A + B es aberto.
- Si A y B son conexos, A + B es conexo.
- Si A y B son compactos, A + B es compacto.
- Si A y B son convexos, A + B es convexo.

Otra operación de conjuntos que podemos considerar es el producto por escalares. Este se puede entender como una homotecia, es decir, dados $A \subseteq R^n$ y $\lambda \in R$, definimos

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

En particular, el conjunto $-A = (-1)A$ es simétrico de A, en relación al origen. Algunos ejemplos de la suma de Minkowski y el producto por escalares, son los siguientes:

1. Dados $x \in R^n$ y $A \subseteq R^n$, el conjunto $x + A = x + A = \{x + a : a \in A\}$ es el transladado de A con respecto al vector x.

2. Cualquier bola abierta $B_r(x)$ se puede escribir en términos de la bola unidad como $B_r(x) = x + rB_1(0)$ y el resultado es similar para bolas cerradas. Generalmente, si $x, y \in R^n; \lambda, \mu \in R$ e $r, s \geq 0$, entonces

$$\lambda B_r(x) + \mu B_s(y) = B_{\lambda r + \mu s}(\lambda x + \mu s)$$

$$\lambda \overline{B}_r(x) + \mu \overline{B}_s(y) = \overline{B}_{\lambda r + \mu s}(\lambda x + \mu s)$$

El resultado para combinaciones lineales de mas de dos bolas es inmediato.

3. Dado un conjunto A y $r \geq 0$, la suma $A + B_r(0)$ tiene una interpretación especial ya que consiste en colocar la bola $B_r(0)$ centrada en cada punto de A:

$$A + B_r(0) = \bigcup_{a \in A} B_r(a) = \{x \in R^n : dist(x, A) < r\}$$
$$A + \overline{B}_r(0) = \bigcup_{a \in A} \overline{B}_r(a) = \{x \in R^n : dist(x, A) \leq r\}; \text{ desde que A sea cerrado.}$$

4. Si h_K y h_L son las funciones soportes de K y L, la **combinación de Minkowski** $(1-\lambda)K+\lambda L$ es dado por la intersección de semiespacios,

$$(1-\lambda)K+\lambda L=\bigcap_{u\in S^{n-1}}\{x\in R^n : x.u\leq(1-\lambda)h_K(u)+\lambda h_L(u)\} \tag{2.11}$$

donde $x.u$ denotan el producto interno de x y u en R^n.

5. Asuma que K y L son dos cuerpos convexos que contienen el origen en sus interiores, entonces la **combinación logarítmica de Minkowski** $(1-\lambda)K+_0\lambda L$ es definido por

$$(1-\lambda)K+_0\lambda L=\bigcap_{u\in S^{n-1}}\left\{x\in R^n : x.u\leq h_K(u)^{1-\lambda}h_L(u)^{\lambda}\right\} \tag{2.12}$$

Usando la media aritmética-geométrica se muestra que para cuerpos convexos K,L y $\lambda\in[0,1]$,

$$(1-\lambda)K+_0\lambda L\subseteq(1-\lambda)K+\lambda L \tag{2.13}$$

y así

$$|(1-\lambda)K+_0\lambda L|\leq|(1-\lambda)K+\lambda L| \tag{2.14}$$

2.1.5 Algunos lemas importantes

Acontinuación enunciaremos algunos lemas que nos servirá para la demostración del lema 3.2 en donde gracias a este nuevo lema se demostrará la **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**.

Lema 2.2. *Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano entonces para $r(K,L)\leq t\leq R(K,L)$ tenemos,*

$$V(K)-2tV(K,L)+t^2V(L)\leq 0$$

Prueba: ver [1]

Donde el inradio $r(K,L)$ y el circunradio $R(K,L)$ de K con respecto a L son definidos por:

$$r(K,L)=sup\{t>0 : x+tL\subseteq K; x\in R^n\}$$

$$R(K,L)=inf\{t>0 : x+tL\supseteq K; x\in R^n\}$$

Lema 2.3. *Sea $K(t,u) : I \times S^{n-1} \longrightarrow (0,+\infty)$ continua donde $I \subseteq R$ un intervalo abierto. Si se tiene*

$$\frac{\partial K(t,u)}{\partial t} = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{K(t+s,u) - K(t,u)}{s}$$

es uniformemente en S^{n-1}. Si $K_{t t\in I}$ es una familia de sahpes de Wulff asociados con k_t entonces

$$\frac{dV(K_t)}{dt} = \int_{S^{n-1}} \frac{\partial k(t,u)}{\partial t} dS_{K_t}(u)$$

Prueba: ver [1]

2.2 Desigualdad Clásica de Brunn-Minkowski

Primeramente se va estudiar la **desigualdad clásica de Brunn-Minkowski** como base para poder entender mejor la **desigualdad logarítmica de Brunn-Minkowski** que mejora la desigualdad en el sentido clásico.

En la matemática, la desigualdade de Brunn-Minkowski es una desigualdad que relaciona el volumen (o mas generalmente las medidas de Lebesgue) de subconjuntos Lebesgue medibles del espacio euclidiano. La versión original del teorema de Brunn-Minkowski (Hermann Brunn 1887, Hermann Minkowski 1896) aplicado a conjuntos convexos. La generalización para considerar conjuntos no convexos se debe a L. A. Lyusternik (1935). Esta desigualdad tiene aplicaciones en análisis y geometría y también tiene equivalencias con otras desigualdades como por ejemplo con la desigualdad de Prekopa-Leindler [3, 9].

La **desigualdad clásica de Brunn-Minkowski** es la siguiente:

Si K y L son dos cuerpos convexos en R^n, y $0 < \lambda < 1$ entonces

$$|(1-\lambda)K + \lambda L|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\,|K|^{\frac{1}{n}} + \lambda\,|L|^{\frac{1}{n}} \tag{2.15}$$

donde $|.|$ y $+$ denotan la medida de Lebesgue y la suma de Minkowski, respectivamente. La igualdad se da si, y solamente si, los cuerpos convexos K y L son homotéticos, es decir:

$$\exists \lambda > 0, x_0 \in R^n : K = x_0 + \lambda L$$

La demostración se sigue de la referencia [3]. Acontinuación daremos algunos ejemplos cuya demostración se sigue de las referencias $[3, 4]$:

1. Sean $K, L \subset R^2$ tales que K es un quadrado centrado en el origen, cuyo lado tiene longitud l, y un disco de centro $(0,0)$ y radio $\epsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |K+B| &= |K| + 4l\epsilon + |B| \geq |K| + 2l\epsilon\sqrt{\pi} + |B| \\ &= |K| + 2\sqrt{|K|\,|B|} + |B| = \left(|K|^{\frac{1}{2}} + |B|^{\frac{1}{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|K+B|^{\frac{1}{2}} \geq |K|^{\frac{1}{2}} + |B|^{\frac{1}{2}}$.

2. Sean X y Y cubos en R^n con aristas de tamaño x_i y y_i en la dirección de la i-ésima coordenada. Entonces $X+Y$ es el cubo de arista $x_i + y_i$. Asi,

$$|X| = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad |Y| = \prod_{i=1}^{n} y_i \;\text{ y }\; |X+Y| = \prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i).$$

Ahora, usando la desigualdad aritmética-geométrica tenemos

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i+y_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i+y_i}\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i+y_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i+y_i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+y_i}{x_i+y_i} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Sean $A, B \subset R^2$ definidos por

$$\begin{aligned} A &= [a,b] \times \{a\} \\ B &= \{a\} \times [a,b] \end{aligned}$$

Note que $|A| = |B| = 0$, y

$$A + B = [a,b] \times \{a\} + \{a\} \times [a,b] = [a,b] \times [a,b] \Rightarrow |A+B| = (b-a)^2.$$

Entonces

$$|A+B|^{\frac{1}{2}} = b - a > 0 + 0 = |A|^{\frac{1}{2}} + |B|^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto para los segmentos A y B en R^2 tenemos la desigualdad estricta.

4. Sea $C \subseteq R^n$ un subconjunto compacto. Definimos el *contenido exterior de Minkowski* de la frontera de C de la forma siguiente:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|C+tB|-|C|}{t} =: M(\partial C)$$

siendo B la bola unitaria de R^n. En el caso de la frontera regular, el contenido de Minwkoski coincide con el volumen. Ahora, como en el ejemplo 1, sea K un cuadrado de lado l, y B_ϵ una bola de centro $(0,0)$ y radio ϵ. Recordemos que $B_\epsilon = \epsilon B$, donde B es la bola unitaria. Sabemos que

$$|K+B_\epsilon| = |K+\epsilon B| = |K| + 4l\epsilon + |\epsilon B| = |K| + 4l\epsilon + \epsilon^2 |B| .$$

Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{|K+\epsilon B|-|K|}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} (4l + \epsilon |B|) = 4l$$

5. Sea $\omega_n := |B|$, donde B es la bola unitaria de R^n. Entonces, el volumen de la frontera de B es el menor entre todos los volumenes de las fronteras de los subconjuntos A de R^n compactos, convexos, con interior no vacio, y con frontera regular, de volumen ω_n. En efecto, sea $A \subseteq R^n$ con $|A| = \omega_n$. Definimos $f(t) := |A+tB|$ para todo $t \geq 0$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(f(t)^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} f(0)^{\frac{1}{n}-1} f'(0) = \frac{1}{n}|A|^{\frac{1}{n}-1} H^{n-1}(A)$$

Note que:

$$f'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|A+tB_n|-|A|}{t} = H^{n-1}(A)$$

cuando A tiene frontera regular. Por otro lado

$$\frac{d}{dt}(f(t)^{\frac{1}{n}}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)^{\frac{1}{n}} - f(0)^{\frac{1}{n}}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|A+tB|^{\frac{1}{n}} - |A|^{\frac{1}{n}}}{t}$$

Usando la desigualdad de Brunn-Minkowski tenemos

$$|A+tB|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |tB|^{\frac{1}{n}} = |A|^{\frac{1}{n}} + t|B|^{\frac{1}{n}}$$

de donde

$$\frac{1}{n}|A|^{\frac{1}{n}-1} H^{n-1}(A) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|A+tB|^{\frac{1}{n}} - |A|^{\frac{1}{n}}}{t} \geq |B|^{\frac{1}{n}}$$

y asi

$$H^{n-1}(A) \geq n|B|^{\frac{1}{n}}|A|^{1-\frac{1}{n}} = n\omega_n^{\frac{1}{n}}\omega_n^{1-\frac{1}{n}} = n\omega_n = H^{n-1}(B).$$

Por lo tanto $H^{n-1}(A) \geq H^{n-1}(B)$.

6. Usando el contenido exterior de Minkowski y la desigualdad de Brunn-Minkowski, podemos probar la desigualdad Isoperimétrica

$$\left(\frac{|K|}{|B|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{H^{n-1}(K)}{H^{n-1}(B)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

donde K es un conjunto compacto, simplemente conexo, co interior no vacio, y frontera suave; y B es la bola unitaria n-dimensional. En efecto, sabemos que

$$H^{n-1}(K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|K + \epsilon B| - |K|}{\epsilon}$$

Por la desigualdad de Brunn-Minkowski y por el binomio de Newton tenemos

$$S(K) \geq \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\left(|K|^{\frac{1}{n}} + \epsilon\,|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n - |K|}{\epsilon} = n\,|K|^{\frac{n-1}{n}}\,|B|^{\frac{1}{n}}.$$

Por otro lado

$$H^{n-1}(B) = n\,|B| \Rightarrow n\,|B|^{\frac{1}{n}} = n\,|B|\,|B|^{\frac{1}{n}-1} = H^{n-1}(B)\,|B|^{\frac{1}{n}-1},$$

entonces tenemos

$$H^{n-1}(K) \geq H^{n-1}(B)\,|B|^{\frac{1}{n}-1}\,|K|^{\frac{n-1}{n}}$$

y esta desigualdad implica que

$$\frac{H^{n-1}(K)}{H^{n-1}(B)} \geq \left(\frac{|K|}{|B|}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Ahora presentamos algunas equivalencias:

Teorema 2.4. ***(Equivalencia entre las desigualdades de Brunn-Minkowski).*** *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

a. $|(1-\lambda)K + \lambda L| \geq |K|^{1-\lambda}\,|L|^{\lambda}$ *; para todo K,L cuerpos convexos en* R^n *y* $0 \leq \lambda \leq 1$.

b. $|K + L|^{\frac{1}{n}} \geq |K|^{\frac{1}{n}} + |L|^{\frac{1}{n}}$ *; para todo K,L cuerpos convexos en* R^n.

c. $|(1-\lambda)K+\lambda L|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\,|K|^{\frac{1}{n}}+\lambda\,|L|^{\frac{1}{n}}$, *para todo K,L cuerpos convexos en* R^n *y* $0 \leq \lambda \leq 1$.

Prueba: Probaremos las equivalencias dadas en el teorema.
a) $\Rightarrow$ *b)* Sustituyendo K , L y definiendo λ por:

$$|K|^{\frac{-1}{n}} K \quad , \quad |L|^{\frac{-1}{n}} L \;\; y \;\; \lambda = \frac{|L|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}+|L|^{\frac{1}{n}}}$$

Obtenemos

$$\left|(1-\lambda)\,|K|^{\frac{-1}{n}} K+\lambda\,|L|^{\frac{-1}{n}} L\right| = \left|\frac{K+L}{|K|^{\frac{1}{n}}+|L|^{\frac{1}{n}}}\right| = \frac{|K+L|}{\left(|K|^{\frac{1}{n}}+|L|^{\frac{1}{n}}\right)^n} \geq 1$$

Por lo tanto: $|K+L|^{\frac{1}{n}} \geq |K|^{\frac{1}{n}}+|L|^{\frac{1}{n}}$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Para $0 \leq \lambda \leq 1$ tomamos $K' = (1-\lambda)K$ y $L' = \lambda L$ cuerpos convexos.

$$\begin{aligned}|(1-\lambda)K+\lambda L|^{\frac{1}{n}} = |K'+L'|^{\frac{1}{n}} \geq |K'|^{\frac{1}{n}}+|L'|^{\frac{1}{n}} &= |(1-\lambda)K|^{\frac{1}{n}}+|\lambda L|^{\frac{1}{n}} \\ &= (1-\lambda)\,|K|^{\frac{1}{n}}+\lambda\,|L|^{\frac{1}{n}}\,.\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ *a)* Usando la propiedad $|aX| = a^n|X|$ tenemos

$$\begin{aligned}|(1-\lambda)K+\lambda L|^{\frac{1}{n}} \geq |(1-\lambda)K|^{\frac{1}{n}}+|\lambda L|^{\frac{1}{n}} &= (1-\lambda)\,|K|^{\frac{1}{n}}+\lambda\,|L|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq |K|^{(1-\lambda)\frac{1}{n}}\,|L|^{\lambda\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Elevando a la n obtenemos

$$|(1-\lambda)K+\lambda L| \geq |K|^{1-\lambda}\,|L|^{\lambda}$$

Esta última desigualdad es conocida como la **forma multiplicativa de Brunn-Minkowski** y nos vamos a centrar en el estudio de esta última desigualdad con la diferencia de cambiar $+$ por $+_0$ que por ser equivalente a una desigualdad logarítmica, recibe el nombre de **desigualdad lorarítmica de Brunn-Minkowski** que será demostrado en el capítulo 3.

2.3 Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski

El objetivo principal es demostrar la **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski** que mejora la Desigualdad Clásica de Brunn-Minkowski es decir encontrar una mejor estimativa y por último daremos una aplicación teórica a nuestra desigualdad.

Lema 2.5. *Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano con origen simétrico en R^n entonces son equivalentes*

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda} \tag{2.16}$$

$$\int_{S^{n-1}} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K)Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.17}$$

Prueba: Supongamos que (2.17) es verdad entonces nuestro objetivo es probar (2.16). Para $0 \leq \lambda \leq 1$ sea

$$Q_\lambda = (1-\lambda)K +_0 \lambda L$$

con shape de Wulff asociado con la función $q_\lambda = h_K^{1-\lambda}h_L^{\lambda}$ donde:

- **a.** $q_0 = h_K$ es la función soporte de $Q_0 = K$
- **b.** $q_1 = h_L$ es la función soporte de $Q_1 = L$

Luego

$$h_{Q_\lambda} = h_K^{1-\lambda}h_L^{\lambda}$$

integrando con respecto a S_{Q_λ}, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{nV(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda} Ln\frac{h_K^{1-\lambda}h_L^{\lambda}}{h_{Q_\lambda}} dS_{Q_\lambda} \\
&= \frac{1}{nV(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda} Ln\left(\left[\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}\right]^{1-\lambda}\left[\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\right]^{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{nV(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda}\left((1-\lambda)Ln(\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}}) + \lambda\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}}\right) \\
&= (1-\lambda)\frac{1}{nV(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda}Ln(\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}})dS_{Q_\lambda} + \lambda\frac{1}{nV(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} h_{Q_\lambda}Ln(\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}})dS_{Q_\lambda} \\
&= (1-\lambda)\frac{1}{V(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} Ln(\frac{h_K}{h_{Q_\lambda}})dV_{Q_\lambda} + \lambda\frac{1}{V(Q_\lambda)}\int_{S^{n-1}} Ln(\frac{h_L}{h_{Q_\lambda}})dV_{Q_\lambda} \\
&\geq (1-\lambda)\frac{1}{V(Q_\lambda)}V(Q_\lambda)Ln\left(\frac{V(K)}{V(Q_\lambda)}\right)^{\frac{1}{n}} + \lambda\frac{1}{V(Q_\lambda)}V(Q_\lambda)Ln\left(\frac{V(L)}{V(Q_\lambda)}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= (1-\lambda)\frac{1}{n}Ln\left(\frac{V(K)}{V(Q_\lambda)}\right) + \lambda\frac{1}{n}Ln\left(\frac{V(L)}{V(Q_\lambda)}\right) \\
&= \frac{1}{n}Ln\left(\frac{V(K)}{V(Q_\lambda)}\right)^{1-\lambda} + \frac{1}{n}Ln\left(\frac{V(L)}{V(Q_\lambda)}\right)^{\lambda} \\
&= \frac{1}{n}Ln\left[\frac{V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda}}{V(Q_\lambda)}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[Ln(V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda}) - Ln(V(Q_\lambda))\right]
\end{aligned}$$

Luego

$$Ln(V(Q_\lambda)) = Ln(V((1-\lambda)K +_0 \lambda L)) \geq Ln\left(V(K)^{1-\lambda}V(L)^\lambda\right)$$

y como la función exponencial es creciente entonces

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda}V(L)^\lambda$$

Supongamos que (2.16) es verdad entonces nuestro objetivo es mostrar (2.17). En efecto, sea el cuerpo Q_λ asociado a la función $q_\lambda = h_K^{1-\lambda}h_L^\lambda$.

Afirmación:

$$\frac{q_\lambda - q_0}{\lambda} \longrightarrow h_K Ln\frac{h_L}{h_K}$$

es uniforme en S^{n-1}

En efecto: Sea $a = h_K$ y $b = h_L$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{q_\lambda - q_0}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{a^{1-\lambda}b^\lambda - a}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\left[(-a^{1-\lambda}Ln(a))b^\lambda + a^{1-\lambda}b^\lambda Ln(b)\right] \\
&= -aLn(a) + aLn(b) \\
&= aLn\left(\frac{b}{a}\right) \\
&= h_K Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right)
\end{aligned}$$

Por el lema 2.3 tenemos

$$\frac{dV(Q_\lambda)}{d\lambda} = \int_{S^{n-1}} h_K Ln\frac{h_L}{h_K} dS_K \tag{2.18}$$

Luego

$$\frac{1}{V(Q_0)}V'(Q_0) = \frac{1}{V(Q_0)}\int_{S^{n-1}} h_K Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dS_K \tag{2.19}$$

Consideremos la función cóncava

$$f(\lambda) = LnV(Q_\lambda)$$

Derivando con respecto en $\lambda = 0$

$$f'(0) = \frac{1}{V(Q_0)}V'(Q_0)$$

Por ser f una función cóncava tenemos

$$f(\lambda) = f((1-\lambda)0 + \lambda 1) \geq (1-\lambda)f(0) + \lambda f(1)$$

Luego

$$f(\lambda) - f(0) \geq \lambda(f(1) - f(0))$$

y asi tenemos

$$f'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \geq f(1) - f(0)$$

Luego

$$\frac{1}{V(Q_0)} V'(Q_0) = f'(0) \geq f(1) - f(0) = LnV(L) - LnV(K) \tag{2.20}$$

De (2.19) y (2.20) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(Q_0)} \int_{S^{n-1}} h_K Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dS_K &\geq LnV(L) - LnV(K) \\ &= Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right) \end{aligned}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{n}$ a ambos lados de la desigualdad

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_K Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dS_K \geq \frac{1}{n} V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)$$

Por lo tanto

$$\int_{S^{n-1}} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Como ya demostramos la equivalencia, ahora enunciaremos y demostraremos un lema que va ser muy util en la demostración de nuestra desigualdad.

Lema 2.6. *Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano con origen simétrico entonces*

$$\int_{S^1} \left(\frac{h_K}{h_L}\right) dV_K \leq \frac{V(K)V(L,K)}{V(L)} \tag{2.21}$$

con igualdad si y solamente si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos.

Prueba: Nuestra desigualdad que vamos a demostrar es equivalente a

$$\int_{S^1} \left(\frac{h_K}{h_L}\right) dV_K \leq \frac{V(K)}{V(L)} \int_{S^1} \frac{h_L}{h_K} dV_K$$

equivale a

$$\int_{S^1}\left(\frac{h_K}{h_L}\right)h_K dS_K \leq \frac{V(K)}{V(L)}\int_{S^1} h_L dS_K,$$

y equivale a

$$\int_{S^1}\left(\frac{h_K^2}{h_L}\right)dS_K \leq \frac{V(K)}{V(L)}\int_{S^1} h_L dS_K, \tag{2.22}$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar (2.22). En efecto, como K y L son de origen simétrico tenemos que

$$r(K,L) = min_{u\in S^{n-1}}\frac{h_K(u)}{h_L(u)} \quad \wedge \quad R(K,L) = max_{u\in S^{n-1}}\frac{h_K(u)}{h_L(u)}$$

y eso implica que

$$r(K,L) \leq \frac{h_K(u)}{h_L(u)} \leq R(K,L)$$

para todo $u \in S^1$. Por el lema 1.2 tenemos

$$V(K) - 2\frac{h_K(u)}{h_L(u)}V(K,L) + \left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right)^2 V(L) \leq 0$$

integrando ambos lados en relación a $h_L dS_K$:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{S^1}\left(V(K) - 2\frac{h_K(u)}{h_L(u)}V(K,L) + \left(\frac{h_K(u)}{h_L(u)}\right)^2 V(L)\right)h_L(u)dS_K(u)\\
&= V(K)\int_{S^1} h_L(u)dS_K(u) - 2\int_{S^1} h_K(u)V(K,L)dS_K(u) + \int_{S^1}\frac{h_K^2(u)}{h_L(u)}V(L)dS_K(u)\\
&= 2V(K)\frac{1}{2}\int_{S^1} h_L(u)dS_K(u) - 4V(K,L)\frac{1}{2}\int_{S^1} h_K(u)dS_K(u) + \int_{S^1}\frac{h_K^2(u)}{h_L(u)}V(L)dS_K(u)\\
&= 2V(K)V(K,L) - 4V(K,L)V(K) + \int_{S^1}\frac{h_K^2(u)}{h_L(u)}V(L)dS_K(u)\\
&= -2V(K)V(K,L) + \int_{S^1}\frac{h_K^2(u)}{h_L(u)}V(L)dS_K(u)
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{S^1}\frac{h_K^2}{h_L}V(L)dS_K \leq 2V(K)V_1(K,L)$$

eso implica

$$\int_{S^1}\frac{h_K^2}{h_L}dS_K \leq 2\frac{V(K)}{V(L)}V_1(K,L) = 2\frac{V(K)}{V(L)}\frac{1}{2}\int_{S^1} h_L dS_K$$

por lo tanto

$$\int_{S^1}\frac{h_K^2}{h_L}dS_K \leq \frac{V(K)}{V(L)}\int_{S^1} h_L dS_K$$

El caso de igualdad se sigue de la referencia [1]. Nuestro objetivo principal es demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.

Teorema 2.7. *Si K,L son cuerpos convexos en R^2 con origen simétrico entonces*

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda} \tag{2.23}$$

con igualdad si y solo si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos.
Es equivalente a demostrar

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

con igualdad si y solo si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos.

Prueba: Consideremos la función

$$F(t) = \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\right) dV_K - V(K) Ln\left(\frac{V(L+tK)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

Derivando con respecto de t

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L + th_K}{h_K}\right) dV_K - V(K) Ln\left(\frac{V(L) + 2tV(L,K) + t^2V(K)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L + th_K} dV_K - V(K)\frac{d}{dt}\left[Ln\left(\frac{V(L) + 2tV(L,K) + t^2V(K)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L + th_K} dV_K - \frac{V(K)}{2}\left(\frac{V(K)}{V(L) + 2V(L,K)t + V(K)t^2}\right)\frac{2V(L,K) + 2V(K)t}{V(K)} \\
&= \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L + th_K} dV_K - \frac{V(K)\left[V(L,K) + V(K)t\right]}{V(L) + 2V(L,K)t + V(K)t^2} \\
&= \int_{S^1} \frac{h_K}{h_L + th_K} dV_K - \frac{V(K)V(L+tK,K)}{V(L+tK)}
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6:

$$F'(t) = \int_{S^1} \frac{h_K(u)}{h_{L+tK}(u)} dV_K - \frac{V(K)V(L+tK,K)}{V(L+tK)} \leq 0 \tag{2.26}$$

eso muestra que F es decreciente en $[0, +\infty)$. Ahora

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\right) dV_K - \int_{S^1} Ln\left(\frac{V(L+tK)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} dV_K \\
&= \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\right) dV_K - \int_{S^1} Ln\left(\frac{V(L+tK)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} dV_K \\
&= \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\left(\frac{V(K)}{V(L+tK)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) dV_K
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe $\xi \in S^1$ tal que:

$$\begin{aligned}
F(t) &= V(K)Ln\left(\frac{h_{L+tK}(\xi)}{h_K(\xi)}\left(\frac{V(K)}{V(L+tK)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= V(K)Ln\left(\frac{h_L(\xi)+th_K(\xi)}{h_K(\xi)}\left(\frac{V(K)}{V(L)+2V(L,K)t+V(K)t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

tomando límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} F(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left[V(K)Ln\left(\frac{h_L(\xi)+th_K(\xi)}{h_K(\xi)}\left(\frac{V(K)}{V(L)+2V(L,K)t+V(K)t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\
&= V(K)Ln\left[\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{h_L(\xi)+th_K(\xi)}{h_K(\xi)}\left(\frac{V(K)}{V(L)+2V(L,K)t+V(K)t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Afirmación

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{h_L(\xi)+th_K(\xi)}{h_K(\xi)}\left(\frac{V(K)}{V(L)+2V(L,K)t+V(K)t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

En efecto:
Sea $a = \frac{h_L(\xi)}{h_K(\xi)}$, $b = V(K)$, $c = V(L)$, $d = V(L,K)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\left((a+t)\left(\frac{b}{c+dt+bt^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \lim_{t\to+\infty}\left((a+t)^2\frac{b}{c+dt+bt^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{a^2b+2abt+bt^2}{c+dt+bt^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{b}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

volviendo a la prueba

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = V(K)Ln(1) = 0$$

y como F es decreciente en $[0, +\infty)$ entonces

$$F(t) \geq 0 \tag{2.27}$$

y en particular

$$F(0) \geq 0 \tag{2.28}$$

De (2.25) y (2.28) tenemos:

$$F(0) = \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K - V(K)Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \tag{2.29}$$

Por lo tanto

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K)Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Estudiemos el caso de igualdad en (2.25). Sea

$$F(t) = \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\right) dV_K - V(K)Ln\left(\frac{V(L+tK)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

entonces

$$F'(t) = \int_{S^1} \frac{h_K}{h_{L+tK}} dV_K - \frac{V(K)V(K, L+tK)}{V(L+tK)} = 0 \tag{2.30}$$

Reciprocamente si $F'(t) = 0$ entonces existe una constante C tal que $F(t) = C$ y tenemos

$$0 = \lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} C = C$$

Luego

$$F(t) = \int_{S^1} Ln\left(\frac{h_{L+tK}}{h_K}\right) dV_K - V(K)\left(\frac{V(L+tK)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} = C = 0 \tag{2.31}$$

De (2.30) y (2.31) tenemos:

$$F(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F'(t) = 0$$

y del lema 2.3 tenemos que K y L+tK son dilatados o K y L+tK son paralelogramos con lados paralelos. En particular para $t = 0$ tenemos $F(0) = 0$ si y solo si K y L son dilatados o K y L son paralelogramos con lados paralelos.
Apliquemos nuestra desigualdad demostrada a un resultado de **medida de cono-volumen**.

Teorema 2.8. ***(Aplicación)*** *Si K,L son cuerpos convexos en el plano con origen simétrico que tienen la misma medida de cono volumen entonces $K = L$ o K y L son paralelogramos con lados paralelos.*

Prueba: Supongamos por el absurdo que $K \neq L$. Por hipótesis tenemos que $V_K = V_L$ entonces:

$$\frac{1}{n}h_K dS_K = dV_K = dV_L = \frac{1}{n}h_L dS_L$$

integrando

$$V(K) = \frac{1}{2}\int_{u\in S^1} h_K(u)dS_K(u) = \frac{1}{2}\int_{u\in S^1} h_L(u)dS_L(u) = V(L)$$

se sigue que $V(K) = V(L)$. Asi, desde que $K \neq L$, los cuerpos convexos no pueden dilatarse. En efecto, supongamos que los cuerpos convexos si pueden dilatarse entonces existe $\lambda > 0$ tal que $K = \lambda L$, eso implica que $V(K) = V(\lambda L) = \lambda^2 V(L)$ y por lo tanto $\lambda = 1$ lo cual es una contradicción.

Por la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski tenemos:

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K)Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Luego

$$\int_{S^1} (Lnh_L - Lnh_K)\, dV_K \geq 0$$

y asi tenemos

$$\int_{S^1} Lnh_L dV_K \geq \int_{S^1} Lnh_K dV_K \tag{2.32}$$

y

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_K}{h_L}\right) dV_L \geq V(L)Ln\left(\frac{V(K)}{V(L)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Luego

$$\int_{S^1} (Lnh_K - Lnh_L)\, dV_L \geq 0$$

y asi tenemos

$$\int_{S^1} Lnh_K dV_L \geq \int_{S^1} Lnh_L dV_L \tag{2.33}$$

con igualdad, en ambas desigualdades si y solo si K y L son paralelogramos con lados paralelos. Usando (2.32), $V_K = V_L$, (2.33) y $V_L = V_K$

$$\begin{aligned}\int_{S^1} Lnh_L dV_K \geq \int_{S^1} Lnh_K dV_K &= \int_{S^1} Lnh_K dV_L \\ &\geq \int_{S^1} Lnh_L dV_L \\ &= \int_{S^1} Lnh_L dV_K\end{aligned}$$

y así tenemos las igualdades en (2.32) y (2.33). La condición de igualdad en (2.32) y (2.33), podemos concluir que K y L son paralelogramos con lados paralelos.

Capítulo 3

Variables e Hipótesis

3.1 Variable de la investigación

Nuestro desigualdad que vamos a demostrar es

Teorema 3.1. *Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano con origen simétrico en* R^2 *entonces*

$$V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda} \tag{3.1}$$

que es equivalente a demostrar

$$\int_{S^1} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K) Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Y asi recibe el nombre Desigualdad Logarítmica de Brunn-Munkowski. Ahora se tienen las siguientes variables:

- h_L e h_K son las funciones soporte de L y K respectivamente.
- $V(L)$ e $V(K)$ son los volúmenes de L y K respectivamente.
- V_K es la medida de cono volumen de K.
- $+_0$ es L_0 suma de Minkowski.

3.2 Operacionalización de Variables

Variables	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
Variables Independientes K y L son cuerpos convexos	**Cuerpo Convexo:** es un conjunto convexo, compacto y con interior no vacio.	$+$ **Suma de Minkowski** es el conjunto de toda las sumas de elementos de A y B	R^2	Relación entre cuerpos Convexos
Variables Dependientes h_K y h_L funciones soportes. $V(K)$ y $V(L)$ volúmenes de los cuerpos convexos. V_K es la medida de cono volumen de K.	**Función soporte** es el $max\{x.u\}$; $\forall u \in S^{n-1}$. **Volumen del cuerpo convexo** es la medida del cuerpo en R^2. **Medida de Cono Volumen** $V_K = \frac{1}{n}h_K dS_K$ es una fórmula	$+_0$ L_0 **suma de Minkowski** es la intersección de semiespacios de la suma de elementos de A y B	R^2	Relación entre funciones soportes. Relación entre volúmenes de cuerpos convexos.

3.3 Hipótesis general e Hipótesis específica

3.3.1 Hipótesis general

Usando técnicas de análisis convexo se demuestra la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski.

3.3.2 Hipótesis específica

1) Usando la teoría de análisis convexo se demuestra un lema importante.
2) Usando el lema se demuestra la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski en el plano.
3) Usando la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski se demuestra un resultado de medida de cono-volumen.

Capítulo 4

Metodología

4.1 Tipo de investigación

El estudio de la investigación es de carácter teórico-básico. En el desarrollo del trabajo, si se obtienen los resultados deseados, esto será un nuevo aporte científico muy significativo en análisis convexo.

4.2 Diseño de la investigación

Durante el desarrollo del proyecto hemos construido una función para demostrar nuestra desigualdad en la cual derivamos con respecto de t, luego usamos nuestro lema y por último usamos los resultados clásicos de análisis convexo y en R^n.
Para tal objetivo en la primera parte estudiamos las preliminares que son la base para nuestra investigación.
En la segunda parte estudiamos la desigualdad clásica de Brunn-Minkowski y algunos resultados.
En la tercera parte demostramos la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski y algunas consecuencias.

4.3 Población y Muestra

Nuestro trabajo es teórico, a pesar de ello se busca estudiar de forma general la medida de la suma de dos conjuntos en R^n. Nuestro trabajo se encuentra dentro del universo del análisis convexo.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de nuestro trabajo de tesis se revisará bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet, libros, proyectos y artículos relacionados al tema de interes.

4.5 Plan de análisis estadístico de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis estadístico.

Capítulo 5

Resultados

1) Se probó el lema 2.6 para poder demostrar la **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**.

2) Se probó una equivalencia entre la forma multiplicativa de Brunn-Minkowski y una desigualdad logarítmica que por esa razón recibe el normbre de **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**.

3) Se demostró la **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski**.

4) Aplicamos nuestra desigualdad a un problema de **medida de cono-volumen**.

Capítulo 6

Discusiones

1) La **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski** mejora la **Desigualdad Clásica de Brunn-Minkowski** en el plano, es decir existe una mejor estimativa.

2) También se puede estudiar la **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski** en R^n y otras desigualdades de Brunn-Minkowski como la **refinada** que mejora la clásica y donde ahi pueden surgen problemas abiertos y sería interesante trabajar en esa area.

Capítulo 7

Conclusiones

1) La **Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski** mejora la **Desigualdad Clásica de Brunn-Minkowski** en el plano, es decir existe una mejor estimativa y que eso nos permite resolver el problema de **medida de cono-volumen** como ejemplo de aplicación teórica.

2) La desigualdad de Brunn-Minkowski es un resultado muy importante en el análisis, ya que tiene aplicaciones teóricas en análisis funcional, álgebra, geometría (¿si un cuerpo convexo y la bola unitaria tienen igual area en el plano entonces como son sus perímetros?), problemas isoperimétricos (como se pudo ver en el capitulo 2), entre otras.

Capítulo 8

Recomendaciones

1) Dado a la gran importancia del análisis convexo, se recomienda la tesis a futuros estudiantes en la linea de investigación de análisis convexo para un mejor entendimiento de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski y la clásica con otras desigualdades equivalentes a ellas.

2) Como la tesis es una exposición detallada de lo demostrado ver [1,2], se recomienda las lecturas de dichos artículos donde se exponen diversos estudios de la Desigualdad de Brunn-Minkowski (clásica, logarítmica, refinada, etc).

Capítulo 9

Referencias Bibliográficas

[1] Boroczky, Lutwak, Yang, Zhang, - *The log-Brunn-Minkowski inequality* , received 30 April 2012; accepted 18 July 2012, pp 1974-1997.

[2] Boroczky, Lutwak, Yang, Zhang, - *A new proof of the Log-Brunn-Minkowski inequality*, published 8 April 2014, pp 75-82.

[3] Díaz Vega Franco Manuel, *A Desigualdade de Brunn-Minkowski*, Tesis de Maestría, Universidade Federal Fluminense, 2017

[4] Gardner, R. -*The Brunn-Minkowski inequality*, Article electronically published on April 8, 2002. Pages 355-405.

[5] Lages Lima, E.- *Análisis Real, Volumen 1*, IMCA, 1997.

[6] Lages Lima, E.- *Análise Real, vol. 2*, Décima primeira edição, IMPA, 2015.

[7] Pardo Ortiz, A. Alonso Gutierrez, D., Bastero, J., *Convexidad y la desigualdad de Brunn-Minkowski*, Trabajo de fin de grado, Universidad de Zaragoza, 2016.

[8] Rockafellar, T.- *Convex Analysis*, Princeton Univ Press., Second edition, 1972.

[9] Schneider, R. *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol.44, Cambridge University Press, Cambridge,(1993).

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
1.1 Determinación del problema El objetivo principal es demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski que enunciamos acontinuación: Si K,L son 2 cuerpos convexos en el plano con origen simétrico entonces son equivalentes $V((1-\lambda)K +_0 \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda}$ y $\int_{S^{n-1}} Ln\left(\frac{h_L}{h_K}\right) dV_K \geq V(K)Ln\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$ **1.2 Formulación del problema** Plantear y demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski, es decir, ¿Será posible demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski en el espacio R^2?	**Objetivo general** Demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski. **Objetivo específico** 1. Estudiar resultados de análisis convexo. 2. Demostrar un lema que será usado para demostrar la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski. 3. Estudiar la equivalencia de la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski. 4. Una vez demostrado la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski daré una aplicación de esta.	**Hipótesis general** Usando técnicas de análisis convexo se demuestra la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski. **Hipótesis específica** 1) Usando la teoría de análisis convexo se demuestra un lema importante. 2) Usando el lema se demuestra la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski en el plano. 3) Usando la Desigualdad Logarítmica de Brunn-Minkowski se demuestra un resultado de medida de cono-volumen.	**4.1 Tipo de investigación** El estudio de la investigación es de carácter teórico. **Diseño.** Durante el desarrollo del proyecto hemos construido una función para demostrar nuestra desigualdad en la cual derivamos con respecto de t, luego usamos nuestro lema y por último usamos los resultados clásicos de análisis convexo y en R^n.	Nuestro trabajo es teórico, a pesar de ello se busca estudiar de forma general la medida de la suma de dos conjuntos en R^n. Nuestro trabajo se encuentra dentro del universo del análisis convexo.

ANEXO 2: Mapa Conceptual del trabajo