

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**UNIDAD DE INVESTIGACION**



**INFORME FINAL DEL TEXTO**

**“TEXTO: SOLUCION NUMERICA DE  
ECUACIONES DIFERENCIALES CON  
HOJA DE CALCULO”**

**AUTOR: Mg. Jorge Luis Godier Amburgo.**

**(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de Setiembre del 2017 al 31 de  
Agosto del 2018)**

**(Resolución de aprobación N° 879-2017-R)**

**Callao, 2018**

6

## I. ÍNDICE

	Pág.
I. ÍNDICE	1
1.1 Tablas de contenido	2
1.1.1 Índice de figuras	2
1.1.2 Índice de tablas	3
II. PROLOGO	4
III. INTRODUCCIÓN	5
IV. CUERPO DEL TEXTO	6
CAPÍTULO I MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PRIMER ORDEN	6
1.1 Métodos de Euler	6
1.1.1 Método de Euler hacia adelante	7
1.1.2 Método de Euler modificado	10
CAPÍTULO II MÉTODOS DE SOLUCIÓN ORDEN SUPERIOR	19
2.1 Métodos de Runge - Kutta	19
2.1.1 Método de Runge - Kutta de segundo orden	19
2.1.2 Método de Runge - Kutta de tercer orden	24
2.1.3 Método de Runge - Kutta de cuarto orden	29
CAPÍTULO III SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE EDO	35
3.1 Solución de EDO de orden n	35
3.2 Codificaciones Fortran sugeridas	43
3.2.1 Codificación RK2	43
3.2.2 Codificación RK3	44
3.2.3 Codificación RK4	46
3.3 Problemas sugeridos	47
V. REFERENCIALES	50
VI. APÉNDICES	52
6.1 Discrepancia de resultados Euler - RK2	52
VII. ANEXOS	55
7.1 Estabilidad de los métodos Runge-Kutta	55
7.2 Espaciamiento de retícula en métodos de Euler	56

## 1.1 Tablas de contenido

### 1.1.1 Índice de figuras

FIGURA N°1.1 CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.1	9
FIGURA N°1.2 CAPTURA 1 DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.2	15
FIGURA N°1.3 CAPTURA 2 DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.2	16
FIGURA N°1.4 SOLUCIÓN GRÁFICA PROBLEMA 1.2	17
FIGURA N°1.5 ECUACIÓN DE EXCEL PROBLEMA 1.2	18
FIGURA N°1.6 ERROR ALCANZADO PROBLEMA 1.2	18
FIGURA N°2.1 CIRCUITO RL PROBLEMA 2.1	21
FIGURA N°2.2 CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.1	21
FIGURA N°2.3 RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 2.1	23
FIGURA N°2.4 CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.2	27
FIGURA N°2.5 SOLUCIÓN GRÁFICA PROBLEMA 2.2	28
FIGURA N°2.6 CIRCUITO RC PROBLEMA 2.3	30
FIGURA N°2.7 CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.3	32
FIGURA N°2.8 RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 2.3	34
FIGURA N°3.1 SISTEMA MASA-RESORTE PROBLEMA 3.2	39
FIGURA N°3.2 CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 3.2	41
FIGURA N°3.3 RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 3.2	42
FIGURA N°6.1 SUPERPOSICIÓN DE CURVAS GENERADAS	54
FIGURA N°7.1 DOMINIO DE ESTABILIDAD DE LOS METODOS RK	55

### 1.1.2 Índice de tablas

TABLA N°1.1 RESULTADOS MÉTODO DE EULER MODIFICADO	17
TABLA N°6.1 RESULTADOS METODO DE EULER	52
TABLA N°6.2 RESULTADOS METODO RK2	53
TABLA N°7.1 EFECTO DE ESPACIAMIENTO DE RETICULA	56

## II. PROLOGO

Desde 1972, cuando se creó el concepto de hoja de cálculo electrónica gracias a Dan Bricklin, considerado el inventor de las hojas de cálculo, que se convirtió luego en VisiCalc, paso a ser una herramienta en el ámbito educativo, los negocios y en las empresas.

Sin embargo, para todo tipo de aplicaciones educativas, estas herramientas son medios y no fines. Es decir, son materiales de construcción que facilitan el aprendizaje, el desarrollo de habilidades y distintas formas de aprender, estilos y ritmos de los aprendices.

En el mercado peruano se presentan textos con aplicaciones numéricas que utilizan únicamente lenguajes de programación estructurada y no estructurada como C++, Fortran o Matlab y están dirigidos a problemas específicos de ingeniería y dejan de lado aplicaciones importantes para la física.

Estos textos no hacen referencia a la forma mucho más accesible y sencilla de utilizar una hoja de cálculo en combinación con los métodos numéricos.

Este texto pretende contribuir a resolver esta situación presentado un texto que sirva como referencia a los estudiantes de ciencias, mostrando los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias aplicados con hoja de cálculo, de forma sistemática, concreta y que muestre además aplicaciones en física.

El autor.

### III. INTRODUCCIÓN

En el *primer capítulo* se explican los métodos de primer orden más importantes para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal es el caso del método de Euler simple hacia adelante y el método de Euler modificado, los cuales son adecuados para una programación rápida debido a su sencillez; sin embargo, a pesar de su gran estabilidad, requiere un tamaño de paso muy pequeño para alcanzar una precisión razonable.

En el *segundo capítulo* se tratan métodos de solución de orden superior, como el método de Runge-Kutta de segundo orden, tercer orden y cuarto orden, estos métodos tratan de obtener mayor precisión, y al mismo tiempo evitan la necesidad de derivadas de orden superior, calculando la función en puntos seleccionados de cada sub-intervalo.

En el *tercer capítulo*, aborda la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior, mediante el método de cambio de variable; para resolver esto se supone que una ecuación diferencial  $n$ -ésima se ha de expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden, luego para cada una de las ecuaciones de orden  $n$ , se puede emplear los métodos ya vistos.

El presente texto es importante ya que, permitirá complementar la formación del estudiante de las asignaturas de física computacional y métodos numéricos en las universidades a nivel nacional, mostrando una alternativa de mayor accesibilidad para solución de problemas físicos e ingeniería con herramientas numéricas y software.

Se justifica debido a que los textos encontrados no hacen referencia a la forma mucho más accesible y sencilla de utilizar una hoja de cálculo con los métodos numéricos; por lo antes mencionado, existe carencia de material bibliográfico del tipo propuesto en esta investigación.

## IV. CUERPO DEL TEXTO

### CAPÍTULO I METODOS DE SOLUCION DE PRIMER ORDEN

#### 1.1 Métodos de Euler

Si se tiene una función  $y = f(x)$ ; entonces, puede calcularse su derivada  $dy/dx$ , la cual se interpreta como la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ , esto es útil dado que en cualquier proceso natural, las variables incluidas y sus razones de cambio se relacionan entre sí, mediante estos símbolos matemáticos que en conjunto se denominan ecuación diferencial. (CHAPRA, 2013)

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO), de primer orden puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

Su solución general debe contener una constante arbitraria  $c$ , de modo que la función solución es:

$$f(x, y, c) = 0 \quad (1.2)$$

Donde para cada valor de  $c$ , existe una solución particular, analíticamente dicha constante se obtiene exigiendo que la solución de esa ecuación pase por algún punto  $(x_0, y_0)$ , es decir:

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.3)$$

Esto significa que la variable  $y$  vale  $y_0$ , cuando la variable  $x$  vale  $x_0$ .

Dado que en la práctica gran cantidad de ecuaciones no pueden resolverse analíticamente, se deberá recurrir a métodos numéricos. En lo que sigue veremos las dos variantes del método de Euler para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando se conocen las condiciones iniciales. (ARNAU, 2018).

### 1.1.1 Método de Euler hacia adelante

Una gran parte de los métodos numéricos para solucionar las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas e hiperbólicas que son mucho más complicadas que las ecuaciones diferenciales ordinarias se basan en los métodos de Euler y no en los métodos Runge-Kutta o predictor-corrector debido a su sencillez. (CHAPRA, 2013)

Este método se obtiene describiendo la aproximación por diferencias hacia adelante, lo cual matemáticamente se logra dividiendo el intervalo de análisis que va de  $x_0$  a  $x_f$  en  $n$  sub-intervalos de ancho  $h$ , es decir:

$$h = \frac{x_f - x_0}{n} \quad (1.4)$$

De manera que se obtiene un conjunto discreto de  $(n + 1)$  puntos en el intervalo de interés  $[x_0, x_f]$ ; así, para cualquiera de estos puntos se cumple que:

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{con: } 0 \leq i \leq n \quad (1.5)$$

La condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , representa el punto  $p_0 = (x_0, y_0)$  por donde pasa la curva solución de la ecuación diferencial. Con el punto  $p_0$  se puede evaluar la primera derivada de  $f(x)$  en ese punto, es decir:



$$f'(x) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{p_0} = f(x_0, y_0) \quad (1.6)$$

Con esa información se traza una recta, aquella que pasa por  $p_0$  y de pendiente  $f(x_0, y_0)$ , esta recta aproxima  $f(x)$  en una vecindad de  $x_0$ ,

Usando la definición de la pendiente y tomando al punto  $p_1$  que pertenece a la recta tangente a  $p_0$ , escribimos:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0) \quad (1.7)$$

Entonces:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) \quad (1.8)$$

ó bien:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (1.9)$$

Como el valor de  $y_1$  sirve para aproximar  $f(x)$  en el punto  $p_1 = (x_1, y_1)$ , es posible repetir el proceso anterior generando la sucesión de aproximaciones siguientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

El error local es proporcional a  $h^2$  y el error global es proporcional a  $h$ . De modo que mientras más pequeño sea el intervalo de avance mayor será la exactitud del método. (GARCIA Y MAZA, 2013).

### Problema 1.1

Se conoce la ecuación diferencial de movimiento de un bloque con 100 Kg. de masa que se desliza por un plano inclinado 0.5235 radianes respecto a la horizontal; adicionalmente, se sabe que la fuerza de rozamiento  $f$  que se opone al movimiento es 85 N y la resistencia del aire  $R$  es 0.05 veces la velocidad. La ecuación diferencial es:

$$100 \frac{dv}{dt} + 0.05v + 85 - 490 = 0$$

Resuelva para velocidad desde 0 hasta 10 segundos con un total de 10 pts., considere que  $v = 0$  en  $t = 0$ .

**Solución en hoja de cálculo:**

FIGURA N°1.1  
CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.1

Metodo de Euler hacia adelante			
Condiciones Iniciales y parametros			
T0	0.000	V0	0.000
Tf	10.000	N	10.000
		H	1.000
Resultados			
K	Tk	Vk	
0	0.000	0.000	
1	1.000	4.050	
2	2.000	8.098	
3	3.000	12.144	
4	4.000	16.188	
5	5.000	20.230	
6	6.000	24.270	
7	7.000	28.308	
8	8.000	32.343	
9	9.000	36.377	
10	10.000	40.409	

Fuente: Elaboración propia.

La ecuación utilizada en la celda D2 y que se copia a las demás es:

$$=D11+\$E\$7*(4.05-0.0005*D11+0*C11)$$

Nótese que la celda que contiene al valor de H se le coloca el símbolo ( \$ ) para que quede fija y no sea desplazada.

### 1.1.2 Método de Euler modificado

La modificación realizada al método de Euler incrementa su precisión y estabilidad, se obtiene aplicando la Regla del Trapecio para integrar la ecuación (8.1), desde  $x_n$  hasta  $x_{n+1}$ , es decir:

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$
$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

Lo que nos lleva a la ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(y_{n+1}, x_{n+1}) + f(y_n, x_n)] \quad (1.11)$$

La ecuación (8.11), requiere un valor estimado de  $y_{n+1}$  al lado derecho; en primera instancia este valor puede ser  $y_n$  y luego reemplazarse por valores calculados de  $y_{n+1}$ , para refinar el resultado, así:

Para el caso de  $n = 0$ , la primera iteración se escribirá como:

$$y_1^1 \approx y_0 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_0) + f(x_0, y_0)] \quad (1.12)$$

La segunda aproximación se escribe usando el valor ya calculado en la ecuación (6.12), el superíndice de e indica el orden de aproximación.

$$y_1^2 \approx y_0 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1^1) + f(x_0, y_0)] \quad (1.13)$$

Este proceso deberá repetirse hasta que se cumpla la siguiente condición de convergencia:

$$\left| \frac{y_{n+1}^{k+1} - y_n^k}{y_{n+1}^{k+1}} \right| * 100 = e_a \% \leq e_s \%$$

Donde  $e_a\%$  es el error porcentual relativo alcanzado y  $e_s\%$  es el error porcentual relativo solicitado. Luego de esto puede cambiar el subíndice n y repetir el esquema hasta alcanzar el total de puntos requeridos. (TORREGROSA, 2018).

### Problema 1.2

La ecuación diferencial que permite conocer la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre, es enunciada en la “*Ley de enfriamiento de Newton*”, la cual afirma que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio circundante; matemáticamente, se escribe como:

$$\frac{dT}{dt} + k(T - T_a) = 0$$

Dónde: T, es la temperatura de la sustancia en el instante t.

$T_a$ , es la temperatura del medio circundante.

K, es una constante de proporcionalidad (depende de la sustancia).

Resuelva la ecuación diferencial considerando  $T_a = 20\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $K = 0.7$  y  $T = 50\text{ }^\circ\text{C}$ , para  $t = 0$  seg. Obtenga valores para  $t$  desde 0 hasta 5 seg. con un total de 5 puntos y un error porcentual de 0.1%.

Los resultados computacionales son los siguientes:

SOLUCION DE E.D.O. METODO EULER MODIFICADO

=====

INGRESO DE DATOS

-----

INGRESE EL TOTAL DE PUNTOS (N)

5

INGRESE LOS LIMITES DE OPERACION [A,B]

0 5

INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)

0 50

INGRESE ERROR PORCENTUAL SOLICITADO (ES)

0.1

-----

RESULTADOS POR ITERACION

-----

PUNTO NRO. 2

ITERACION NRO. 1

1.000000 29.000000 72.413800

ITERACION NRO. 2

1.000000 36.350000 20.220080

ITERACION NRO. 3

1.000000 33.777500 7.616012

ITERACION NRO. 4

1.000000 34.677880 2.596397

ITERACION NRO. 5

1.000000	34.362740	.917075
ITERACION NRO.		6
1.000000	34.473040	.319955
ITERACION NRO.		7
1.000000	34.434440	.112111
ITERACION NRO.		8
1.000000	34.447950	.039223
PUNTO NRO.		3
ITERACION NRO.		1
2.000000	24.339120	41.477770
ITERACION NRO.		2
2.000000	27.872480	12.676880
ITERACION NRO.		3
2.000000	26.635800	4.642914
ITERACION NRO.		4
2.000000	27.068640	1.599040
ITERACION NRO.		5
2.000000	26.917140	.562820
ITERACION NRO.		6
2.000000	26.970170	.196603
ITERACION NRO.		7
2.000000	26.951610	.068859
PUNTO NRO.		4
ITERACION NRO.		1
3.000000	22.078990	22.153100
ITERACION NRO.		2
3.000000	23.790900	7.195667
ITERACION NRO.		3
3.000000	23.191730	2.583553
ITERACION NRO.		4
3.000000	23.401440	.896138
ITERACION NRO.		5
3.000000	23.328040	.314629
ITERACION NRO.		6

3.000000	23.353730	.109996
ITERACION NRO.		7
3.000000	23.344740	.038515
PUNTO NRO.		5
ITERACION NRO.		1
4.000000	21.000270	11.206790
ITERACION NRO.		2
4.000000	21.823980	3.774331
ITERACION NRO.		3
4.000000	21.535690	1.338697
ITERACION NRO.		4
4.000000	21.636590	.466360
ITERACION NRO.		5
4.000000	21.601270	.163493
ITERACION NRO.		6
4.000000	21.613640	.057193
PUNTO NRO.		6
ITERACION NRO.		1
5.000000	20.488420	5.431644
ITERACION NRO.		2
5.000000	20.877920	1.865615
ITERACION NRO.		3
5.000000	20.741590	.657258
ITERACION NRO.		4
5.000000	20.789310	.229513
ITERACION NRO.		5
5.000000	20.772610	.080398

RESULTADOS

```

=====
X      Y(X)
=====
.000000  50.000000
1.000000  34.447950
2.000000  26.951610
3.000000  23.344740
4.000000  21.613640
5.000000  20.772610
=====
    
```

Solución en hoja de cálculo:

FIGURA N°1.2  
CAPTURA 1 DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.2

	A	B	C	D	E	F
24		Metodo de Euler Modificado				
25						
26		Condiciones Iniciales y parametros				
27		t0	0.000	T0	50.000	
28		tf	5.000	N	5.000	
29				H	1.000	
30				ES	0.10%	
31		Resultados				
32		K	tk	Tk	EA	Condicion
33		0	0.000	50.000		
34		Iteracion 1		29.000	72.41	No Cumple
35		Iteracion 2		36.350	20.22	No Cumple
36		Iteracion 3		33.778	7.62	No Cumple
37		Iteracion 4		34.678	2.60	No Cumple
38		Iteracion 5		34.363	0.92	No Cumple
39		Iteracion 6		34.473	0.32	No Cumple
40		Iteracion 7		34.434	0.11	No Cumple
41		Iteracion 8		34.448	0.04	Cumple
42		1	1.000	34.448		

Fuente: Elaboración propia



FIGURA N°1.3  
CAPTURA 2 DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 1.2

43		Iteracion 1	24.334	41.56	No Cumple
44		Iteracion 2	27.874	12.70	No Cumple
45		Iteracion 3	26.635	4.65	No Cumple
46		Iteracion 4	27.069	1.60	No Cumple
47		Iteracion 5	26.917	0.56	No Cumple
48		Iteracion 6	26.970	0.20	No Cumple
49		Iteracion 7	26.952	0.07	Cumple
50	2	2.000	26.952		
51		Iteracion 1	22.085	22.03	No Cumple
52		Iteracion 2	23.789	7.16	No Cumple
53		Iteracion 3	23.193	2.57	No Cumple
54		Iteracion 4	23.401	0.89	No Cumple
55		Iteracion 5	23.328	0.31	No Cumple
56		Iteracion 6	23.354	0.11	No Cumple
57		Iteracion 7	23.345	0.04	Cumple
58	3	3.000	23.345		
59		Iteracion 1	21.003	11.15	No Cumple
60		Iteracion 2	21.823	3.76	No Cumple
61		Iteracion 3	21.536	1.33	No Cumple
62		Iteracion 4	21.636	0.46	No Cumple
63		Iteracion 5	21.601	0.16	No Cumple
64		Iteracion 6	21.614	0.06	Cumple
65	4	4.000	21.614		
66		Iteracion 1	20.484	5.51	No Cumple
67		Iteracion 2	20.879	1.89	No Cumple
68		Iteracion 3	20.741	0.67	No Cumple
69		Iteracion 4	20.789	0.23	No Cumple
70		Iteracion 5	20.773	0.08	Cumple
71	5	5.000	20.773		

Fuente: Elaboración propia

*b*

Los resultados finales son:

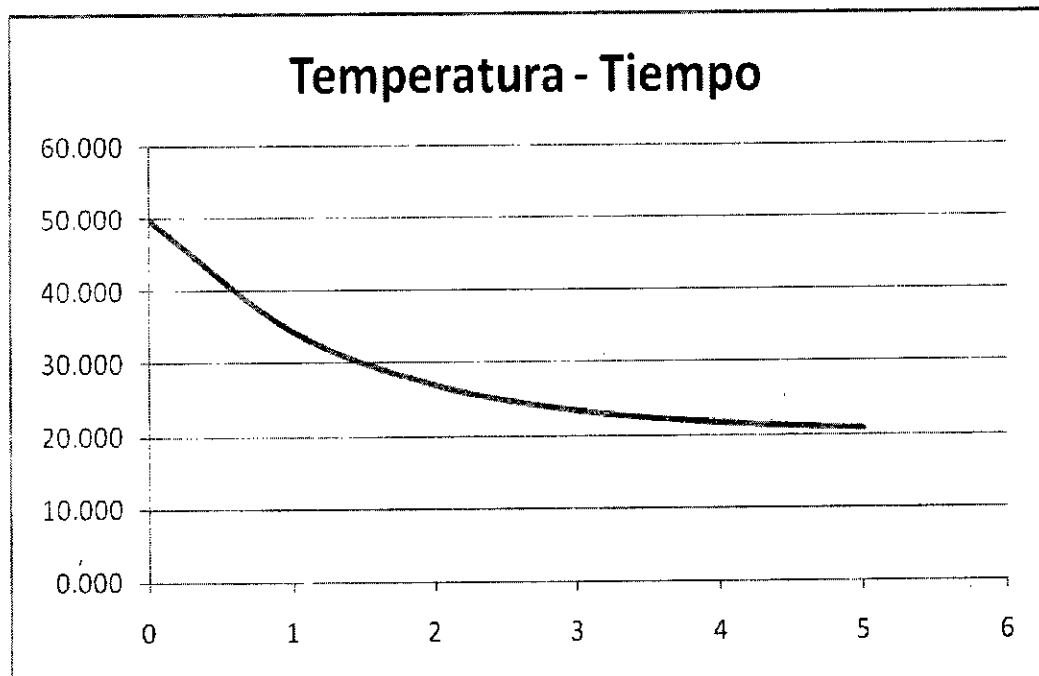
TABLA N°1.1  
RESULTADOS MÉTODO DE EULER MODIFICADO

k	tk	Tk
0	0	50.000
1	1.000	34.448
2	2.000	26.952
3	3.000	23.345
4	4.000	21.614
5	5.000	20.773

Fuente: Elaboración propia

La grafica generada es la siguiente:

FIGURA N°1.4  
SOLUCIÓN GRÁFICA PROBLEMA 1.2



Fuente: Elaboración propia

La ecuación recurrente utilizada en la iteración 1 celda D34, es la siguiente:

FIGURA N°1.5  
ECUACIÓN DE EXCEL PROBLEMA 1.2

D34							= \$E\$27 + (\$E\$29 * 0.5) * ((-0.7 * (E27 - 20)) + (-0.7 * (E27 - 20)))									
	A	B	C	D	E	F	G									
30				ES	0.10%											
31		Resultados														
32		K	tk	Tk	EA	Condicion										
33		0	0.000	50.000												
34		Iteracion 1		29.000	72.41	No Cumple										

Fuente: Elaboración propia

$$= \$E\$27 + (\$E\$29 * 0.5) * ((-0.7 * (E27 - 20)) + (-0.7 * (E27 - 20)))$$

Dicha ecuación se repite considerando en la iteración siguiente el valor obtenido en la celda actual.

La convergencia se evalúa en la celda E34, con la ecuación:

FIGURA N°1.6  
ERROR ALCANZADO PROBLEMA 1.2

E34							= (ABS(D34 - D33) / D34) * 100									
	A	B	C	D	E											
30				ES	0.10%											
31		Resultados														
32		K	tk	Tk	EA	C										
33		0	0.000	50.000												
34		Iteracion 1		29.000	72.41	No Cu										

Fuente: Elaboración propia



## CAPÍTULO II

### MÉTODOS DE SOLUCION ORDEN SUPERIOR

#### 2.1 Métodos de Runge - Kutta

Los métodos de Runge-Kutta tratan de obtener mayor precisión, y al mismo tiempo evitan la necesidad de derivadas de orden superior, calculando la función  $f(x,y)$  en puntos seleccionados de cada sub-intervalo. Una mayor precisión ocasiona que los errores de redondeo decrezcan más rápido al reducir  $h$ ; una desventaja fundamental de los métodos de Euler consiste en que los órdenes de precisión son bajos, esto implica que para mantener una precisión aceptable se requiere un  $h$  pequeño, lo que aumenta el tiempo de cálculo y provoca errores de redondeo considerables. (JORQUERA Y GELMI, 2013).

##### 2.1.1 Método de Runge - Kutta de segundo orden

Los métodos Runge-Kutta se obtienen aplicando la Regla del Trapecio para integrar desde  $x_n$  hasta  $x_{n+1}$ , es decir:

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \quad (2.1)$$
$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

Lo que puede escribirse como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(y_{n+1}, x_{n+1}) + f(y_n, x_n)] \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2)  $y_{n+1}$  es una incógnita, y aparece en el segundo término al lado derecho de la ecuación por lo que lo aproximamos

mediante  $f(x_{n+1}, \langle y_{n+1} \rangle)$ , donde  $\langle y_{n+1} \rangle$  es la primera estimación de  $y_{n+1}$  obtenida mediante el método de *Euler hacia adelante*. Este esquema se conoce como el método de *Runge-Kutta de segundo orden* y se resume como:

$$\begin{aligned} \langle y_{n+1} \rangle &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \langle y_{n+1} \rangle)] \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned} \quad (2.3)$$

En este caso el error local es proporcional a  $h^2$  y el error global proporcional a  $h^3$ .

### Problema 2.1

Una resistencia de  $5 \Omega$  y un inductor de 1 Henrio se conectan en serie con un generador de corriente alterna  $E = 10\cos(5t)$  voltios. Si la corriente es 0 en  $t = 0$ ; calcule la corriente para  $t$  desde 0 hasta 1.0 segundos, considerando 15 puntos.

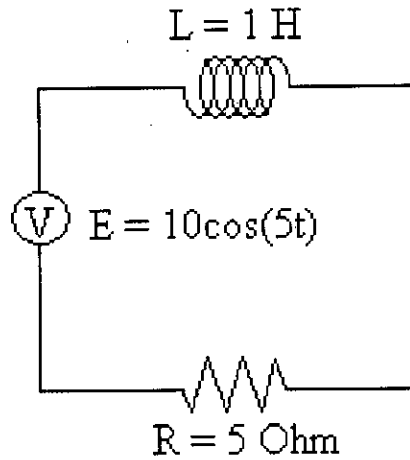
Usando la Ley de Kirchhoff modelamos la situación anterior con el siguiente problema de valor inicial:

$$L \frac{di}{dt} = E - Ri$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\frac{di}{dt} = 10 \cos(5t) - 5i$$

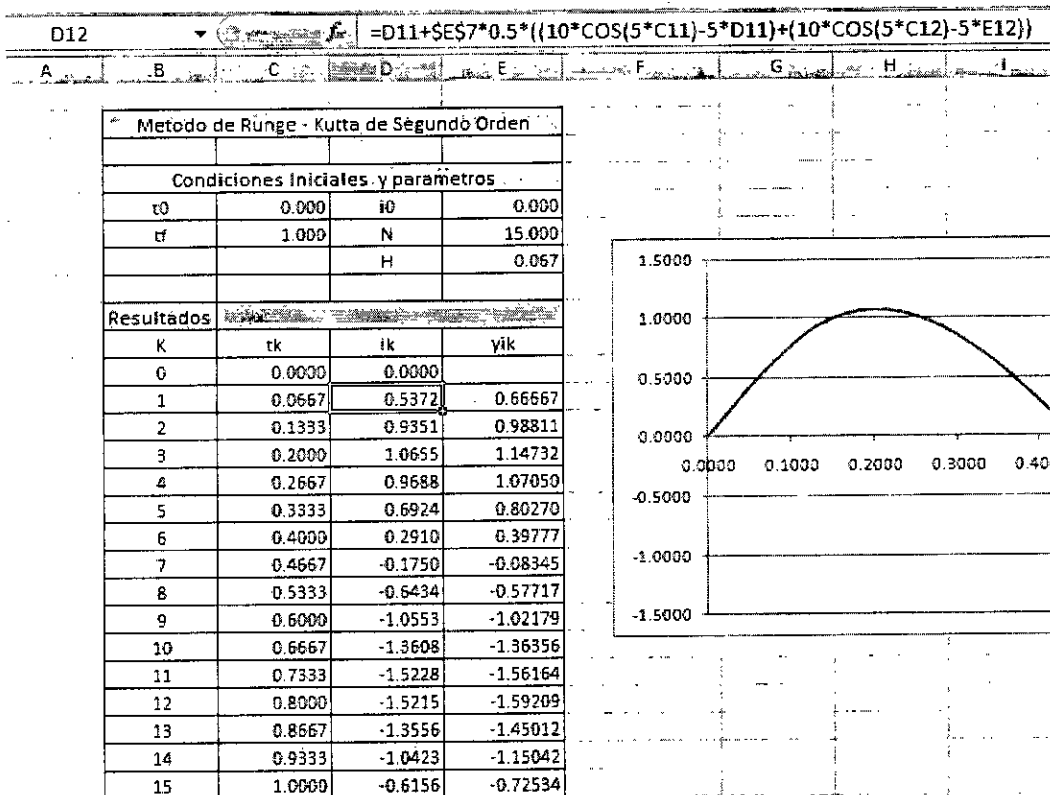
FIGURA N°2.1  
CIRCUITO RL PROBLEMA 2.1



Fuente: Elaboración propia.

Solución en hoja de cálculo:

FIGURA N°2.2  
CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.1



Fuente: Elaboración propia.

La ecuación utilizada en la celda D12 (ecuación 2.2) y que se copia a las demás es:

$$=D11+\$E\$7*0.5*((10*\text{COS}(5*C11))-5*D11)+(10*\text{COS}(5*C12))-5*E12))$$

La ecuación utilizada en la celda E12 corresponde al método de Euler Simple:

$$=D11+\$E\$7*((10*\text{COS}(5*C11))-5*D11)$$

Nótese que la celda que contiene al valor de H se le coloca el símbolo ( \$ ) para que quede fija y no sea desplazada.

Los resultados computacionales con Fortran son los siguientes:

SOLUCION DE E.D.O. METODO RUNGE KUTTA 2 ORDEN

=====

INGRESO DE DATOS

-----

INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)

15

INGRESE LOS LIMITES DE OPERACION [A,B]

0.0 1.0

INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)

0.0 0.0

-----

RESULTADOS

=====

X	F(X)
---	------

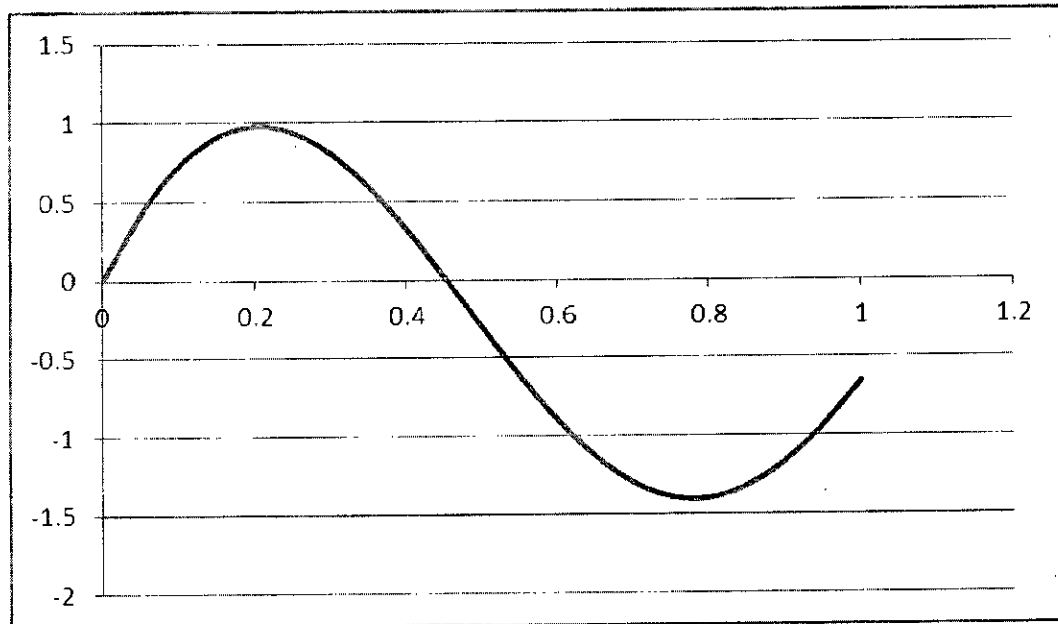
=====

.0000	.000000
.0667	.537208
.1333	.859936
.2000	.975807

.2667	.903230
.3333	.672700
.4000	.325851
.4667	-.087393
.5333	-.513061
.6000	-.898170
.6667	-1.195901
.7333	-1.370285
.8000	-1.399818
.8667	-1.279581
.9333	-1.021609
1.0000	-.653432

=====

FIGURA N°2.3  
RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 2.1



Fuente: Elaboración propia.



### 2.1.2 Método de Runge - Kutta de tercer orden

Es el resultado de aplicar un esquema de integración numérica de orden superior; la modificación realizada al método incrementa su precisión y estabilidad y se obtiene aplicando la Regla 1/3 de Simpson. (CHAPRA, 2013).

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(\langle x \rangle) + f(b)]$$

Dónde:  $h$ , es el intervalo de avance numéricamente igual a  $(b-a)/2$

En este caso la función a integrar es dependiente de dos variables:

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

Por lo cual se tiene que:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}, \langle y_{n+\frac{1}{2}} \rangle) + f(x_{n+1}, \langle y_{n+1} \rangle)] \quad (2.4)$$

Donde  $\langle y_{n+1} \rangle$  y  $\langle y_{n+1/2} \rangle$ , son estimaciones, que pueden obtenerse mediante el método de *Euler hacia adelante*; entonces, para el caso de  $\langle y_{n+1/2} \rangle$ , se aplica la siguiente fórmula recursiva:

$$\langle y_{n+\frac{1}{2}} \rangle = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \quad (2.5)$$

Esta fórmula considera la mitad de un intervalo normal ( $h/2$ ). La aproximación para  $\langle y_{n+1} \rangle$  es:

$$\langle y_{n+1} \rangle = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}} \langle y_{n+\frac{1}{2}} \rangle) \quad (2.6)$$

Este esquema se denomina Método de *Runge-Kutta de tercer orden*.

### Problema 2.2

En organismos con eventos reproductivos continuos, la tasa de recambio poblacional se denomina tasa de crecimiento innato o *capacidad innata de aumento*  $r$ ; esta cantidad se puede calcular mediante la ecuación:

$$r = \frac{\ln(R_0)}{T}$$

Donde,  $R_0$ , es la tasa de reproducción neta de la población (constante) y  $T$  es el tiempo de generación. Se desea calcular el crecimiento poblacional de una ciudad en un periodo de 10 años, con intervalos de 6 meses; la ecuación diferencial de crecimiento, está dada por:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Si se sabe que  $N = 2200$  individuos para  $t = 1$  año, con  $R_0 = 500$  individuos/año y  $T = 60$  años.

Los resultados computacionales son:

SOLUCION DE E.D.O. METODO RUNGE KUTTA 3 ORDEN

=====

INGRESO DE DATOS

-----

INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)

20

INGRESE LOS VALOR INICIAL Y FINAL DEL DOMINIO

1 10

INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)

1.0 2200

-----

RESULTADOS

=====

t (años)	Población en Individuos
----------	----------------------------

=====

1.000000	2200.000000
1.450000	2409.737000
1.900000	2639.470000
2.350000	2891.104000
2.800000	3166.728000
3.250000	3468.628000
3.700000	3799.311000
4.150000	4161.518000
4.600000	4558.257000
5.050000	4992.819000
5.500000	5468.810000
5.949999	5990.180000
6.399999	6561.254000
6.849999	7186.772000
7.299999	7871.924000
7.749999	8622.396000
8.199999	9444.413000
8.649999	10344.800000
9.099998	11331.020000
9.549998	12411.260000
9.999998	13594.490000

=====

Solución en hoja de cálculo:

FIGURA N°2.4  
CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.2

	D39		$f_x$	=D38+\$E\$34*0.33333*((0.1035*D38)+4*(0.1035*E39)+(0.1035*F39))				
26	A	B	C	D	E	F	G	H
27		15	1.0000	-0.6156	-0.72534			
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								
41								
42								
43								
44								
45								
46								
47								
48								
49								
50								
51								
52								
53								
54								
55								
56								
57								
58								

Metodo de Runge - Kutta de Tercer Orden				
Condiciones Iniciales y parametros				
t0	1.000	i0	2200.000	
tf	10.000	N	20.000	
		H	0.450	
Resultados				
K	tk	ik	A	B
0	1.0000	2200.0000		
1	1.4500	2409.7373	2251.23250	2304.85115
2	1.9000	2639.4698	2465.85401	2524.58441
3	2.3500	2891.1040	2700.93649	2765.26595
4	2.8000	3166.7277	2958.43058	3028.89290
5	3.2500	3468.6281	3240.47291	3317.65276
6	3.7000	3799.3101	3549.40377	3633.94157
7	4.1500	4161.5178	3887.78658	3980.38381
8	4.6000	4558.2566	4258.42917	4359.85416
9	5.0500	4992.8185	4664.40701	4775.50136
10	5.5000	5468.8095	5109.08879	5230.77434
11	5.9500	5990.1790	5596.16436	5729.45082
12	6.4000	6561.2535	6129.67534	6275.66868
13	6.8500	7186.7713	6714.04865	6873.96028
14	7.3000	7871.9230	7354.13326	7529.29008
15	7.7500	8622.3937	8055.24040	8247.09582
16	8.2000	9444.4166	8823.18768	9033.33365
17	8.6500	10344.7946	9664.34730	9894.52756
18	9.1000	11331.0168	10585.69897	10837.82350
19	9.5500	12411.2606	11594.88781	11871.04866
20	10.0000	13594.4895	12700.28778	13002.77646

Fuente: Elaboración propia

La ecuación utilizada en la celda D39 (ecuación 2.4) y que se copia a las demás es:

$$=D38+$E$34*0.33333*((0.1035*D38)+4*(0.1035*E39)+(0.1035*F39))$$

La ecuación utilizada en la celda E39 corresponde a la ecuación (2.5)

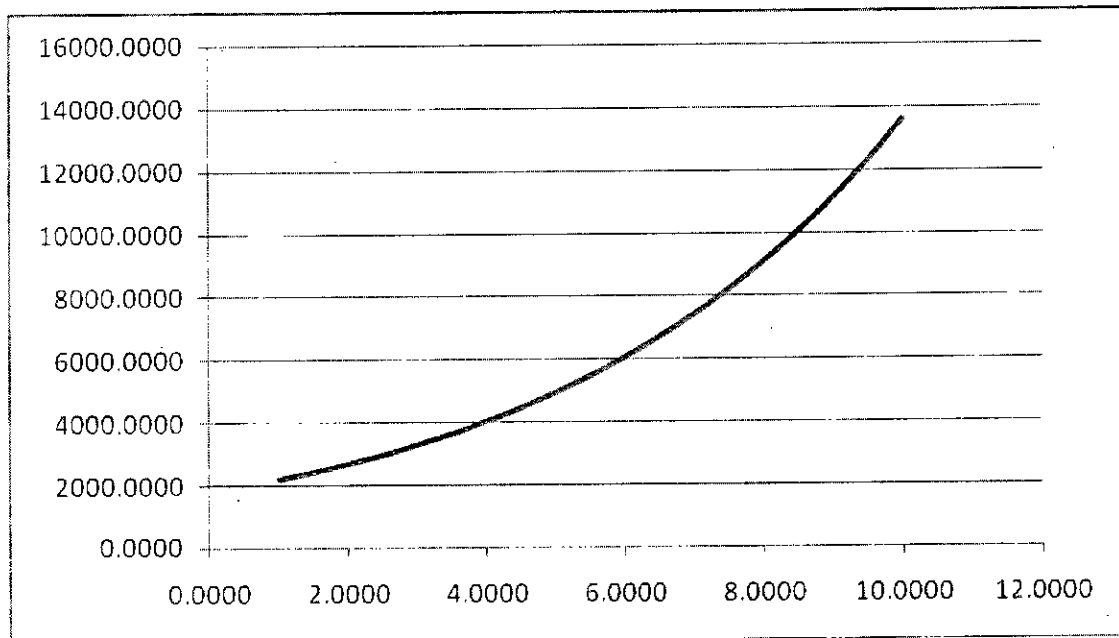
$$=D38+\$E\$34*0.5*(0.1035*D38)$$

La ecuación utilizada en la celda F39 corresponde a la ecuación (2.6)

$$=D38+\$E\$34*(0.1035*E39)$$

La grafica generada es la siguiente:

FIGURA N°2.5  
SOLUCIÓN GRÁFICA PROBLEMA 2.2



Fuente: Elaboración propia

### 2.1.3 Método de Runge - Kutta cuarto orden

El método de Runge - Kutta de cuarto orden es más eficiente debido a su bajo error local de truncamiento ( $h^5$ ); no obstante, su error de discretización es favorable, requiere cuatro evaluaciones funcionales por cada paso, lo cual aumenta considerablemente el tiempo de cálculo. Este método tiene la ventaja adicional de que se auto inicia, es decir se requiere solo el valor de  $y$  en un punto  $x = x_n$  para hallar  $y'$  e  $y$  en  $x = x_{n+1}$ . (GARCIA Y MAZA, 2013).

La fórmula computacional se obtiene aplicando la regla 3/8 de Simpson para resolver la integral. La fórmula de recursión es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \quad (2.7)$$

Dónde:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{1}{3}k_1\right)$$

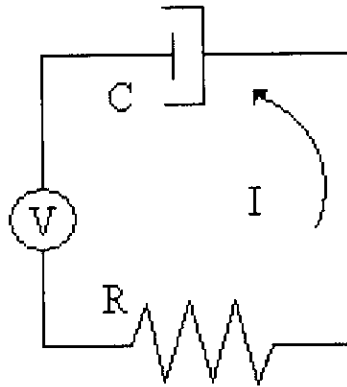
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3)$$

### Problema 2.3

Los circuitos RC son arreglos que están compuestos por una resistencia y un condensador. Se caracteriza por que la corriente puede variar con el tiempo. Cuando el tiempo es igual a cero, el condensador está descargado, en el momento que empieza a correr el tiempo, el condensador comienza a cargarse ya que hay una corriente en el circuito.

FIGURA N°2.6  
CIRCUITO RC PROBLEMA 2.3



Fuente: Elaboración propia.

La ecuación diferencial que determina la variación de carga respecto al tiempo para este tipo de circuitos (durante el proceso de carga), es:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC}$$

Determine la variación de carga para  $t$  desde 0 hasta 1 seg. Si se sabe que cuando  $t = 0$ ,  $q = 0$ ; además:  $V = 10$  Voltios,  $C = 2200 \mu\text{F}$  y  $R = 100\Omega$ . (Obtenga 15 puntos de gráfica).

Los resultados computacionales arrojan lo siguiente:

SOLUCION DE E.D.O. METODO RUNGE KUTTA 4 ORDEN

=====

INGRESO DE DATOS

-----

INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)

15

INGRESE LOS VALOR INICIAL Y FINAL DEL DOMINIO

0.0 1.0

INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)

0.0 0.0

-----

RESULTADOS

=====

X	F(X)
.00000	.00000
.06667	.00038
.13333	.00075
.20000	.00112
.26667	.00148
.33333	.00184
.40000	.00219
.46667	.00253
.53333	.00286
.60000	.00320
.66667	.00352
.73333	.00384
.80000	.00415
.86667	.00446
.93333	.00477
1.00000	.00506

=====





Solución en hoja de cálculo:

FIGURA N°2.7  
CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 2.3

	A	B	C	D	E	F	G	H
28								
29		Metodo de Runge - Kutta de Cuarto Orden.						
30								
31		Condiciones Iniciales y parametros						
32		t0	0.000	q0	0.000		Ecuación	
33		tf	1.000	N	15.000		$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC}$	
34				H	0.0667			
35								
36		Resultados						
37		K	tk	qk	k1	k2	k3	k4
38		0	0.0000	0.0000	0.0057	0.005993266	0.005387886	0.004829913
39		1	0.0667	0.0057	0.0049	0.004439102	0.003990708	0.003577428
40		2	0.1333	0.0099	0.0037	0.003287961	0.002955844	0.002649735
41		3	0.2000	0.0131	0.0027	0.002435332	0.002189339	0.00196261
42		4	0.2667	0.0154	0.0020	0.001803806	0.001621603	0.001453659
43		5	0.3333	0.0171	0.0015	0.001336046	0.001201092	0.001076706
44		6	0.4000	0.0184	0.0011	0.000989585	0.000889627	0.000797496
45		7	0.4667	0.0193	0.0008	0.000732967	0.00065893	0.000590691
46		8	0.5333	0.0200	0.0006	0.000542895	0.000488057	0.000437514
47		9	0.6000	0.0205	0.0004	0.000402113	0.000361495	0.000324059
48		10	0.6667	0.0209	0.0003	0.000297837	0.000267753	0.000240024
49		11	0.7333	0.0212	0.0002	0.000220603	0.00019832	0.000177782
50		12	0.8000	0.0214	0.0002	0.000163396	0.000146892	0.000131679
51		13	0.8667	0.0216	0.0001	0.000121025	0.0001088	9.75326E-05
52		14	0.9333	0.0217	0.0001	8.96408E-05	8.05861E-05	7.22406E-05
53		15	1.0000	0.0218	0.0001	6.63953E-05	5.96887E-05	5.35073E-05
54								

Fuente: Elaboración propia.

En la celda D38, se indica la condición inicial de la variable dependiente carga (q)

A partir de la celda D39 en adelante, se coloca la ecuación correspondiente al método RK-4 ecuación (2.7), según se indica:

$$=D38+(1/8)*(E38+3*F38+3*G38+H38)$$

La ecuación utilizada en la celda E38, correspondiente al parámetro k1 es:

$$=E\$34*(0.1-(D38/0.22))$$

La ecuación utilizada en la celda F38, correspondiente al parámetro k2 es:

$$=E\$34*(0.1-((D38+(1/3)*E38)/0.22))$$

La ecuación utilizada en la celda G38, correspondiente al parámetro k3 es:

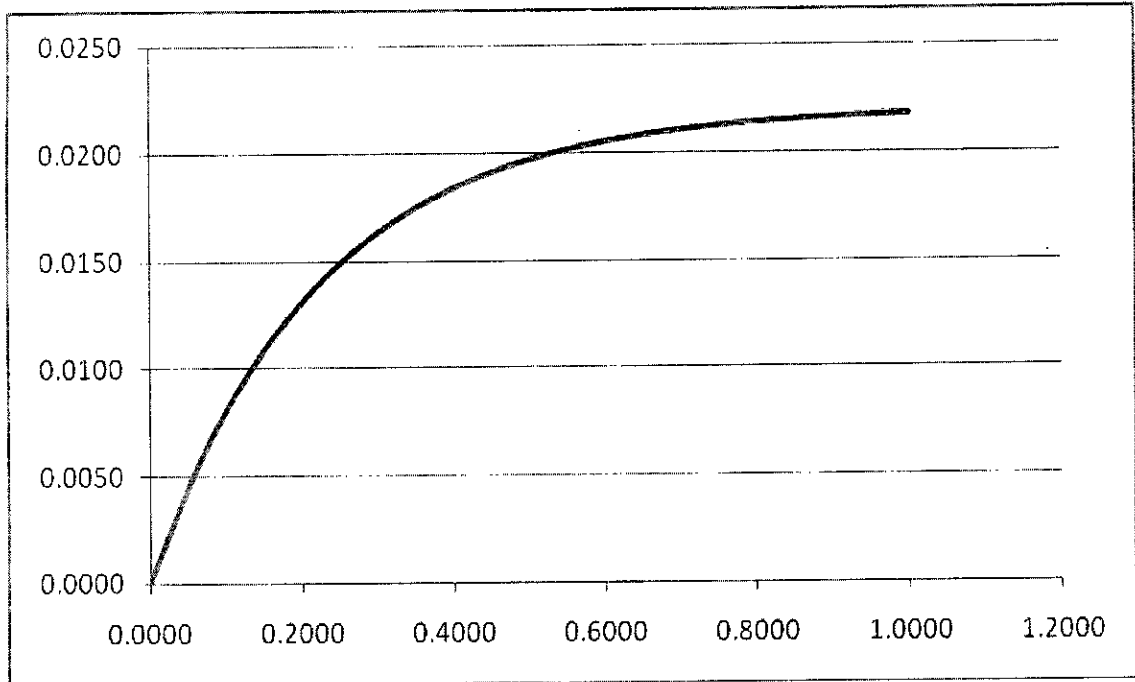
$$=E\$34*(0.1-((D38+(1/3)*E38+(1/3)*F38)/0.22))$$

La ecuación utilizada en la celda H38, correspondiente al parámetro k4 es:

$$=E\$34*(0.1-((D38+E38-F38+G38)/0.22))$$

Nótese que la celda E34 que contiene al valor de H se le coloca el símbolo ( \$ ) para que quede fija y no sea desplazada.

FIGURA N°2.8  
RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 2.3



Fuente: Elaboración propia.

### CAPÍTULO III

#### SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE EDO

##### 3.1 Solución de EDO de orden n

Cuando se tiene una EDO de orden n, con n condiciones especificadas en un punto  $x_0$  y un punto  $x_f$  donde hay que encontrar  $f(x_f)$ , esto es lo que normalmente definimos como “*el problema de valor inicial general*” o con “*condiciones iniciales*” (CHAPRA, 2013), de manera que se cumple lo siguiente:

$$\text{PVIG, C.I.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(x_0) = y^{n-1}_0 \\ y(x_f) = ? \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Para resolver (3.1) la mayor parte de las subrutinas de propósito general para ecuaciones diferenciales suponen que una ecuación diferencial n-ésima se ha de expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden, luego para una ecuación de orden n dada en la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \quad (3.2)$$

Se efectúa el siguiente cambio de variables.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y \\
 y_2 &= y' \\
 y_3 &= y'' \\
 y_4 &= y''' \\
 &\vdots \\
 y_n &= y^{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

A continuación se deriva miembro a miembro la primera y se sustituye en la segunda, y así sucesivamente, con lo que se tiene un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden.

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2 \\
 y_2' &= y_3 \\
 y_3' &= y_4 \\
 &\vdots \\
 y_{n-1}' &= y_n
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$y_n' = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

De modo general, un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
 y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &\vdots \\
 y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Todos los métodos numéricos analizados previamente (Euler y Runge-Kutta) se pueden adaptar al sistema (3.5), y se pueden expresar en forma más compacta como vectores, es decir:

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad (3.6)$$

Dónde:  $y'$ ,  $f$  e  $y$  son vectores con  $n$  componentes.

### Problema 3.1

Usando el cambio de variables, deduzca la fórmula computacional del método de Euler hacia adelante y Runge-Kutta de 2do Orden, para solucionar una ecuación diferencial de 2do. Orden con condiciones iniciales.

Una EDO de 2do. Orden de forma general se escribe de la siguiente forma:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) se convierte en dos ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ y'' &= z' \end{aligned} \quad (3.8)$$

La solución de las ecuaciones (3.8) con el método de Euler, generan las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h(z_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las fórmulas (3.9) deben resolverse simultáneamente, en conjunto con la ecuación de avance del dominio.

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (3.10)$$

Donde  $n$  avanza desde 0 hasta  $N$  (número de puntos requeridos del dominio). La solución de la ecuación (3.9) requiere de dos condiciones iniciales, los puntos  $x_0, y_0$  y  $x_0$  y  $y'_0 = z_0$ .

Con el método de Runge - Kutta de Segundo Orden, la solución de las ecuaciones (3.8), es la siguiente:

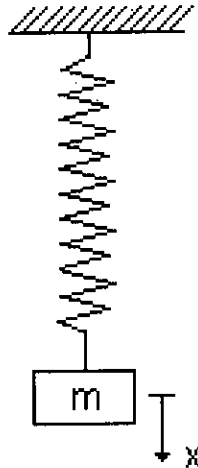
$$\begin{aligned} A &= z_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ B &= y_n + h(z_n) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, B, A)] \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [z_n + A] \end{aligned} \quad (3.11)$$

### Problema 3.2

Usando el método de Euler hacia Adelante de 2do. Orden obtenga la gráfica de la solución de la ecuación diferencial de movimiento del sistema masa-resorte.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho^2 x = 0$$

FIGURA N°3.1  
 SISTEMA MASA-RESORTE PROBLEMA 3.2



Fuente: Elaboración propia.

Donde  $\rho^2 = \kappa/m$ . El peso de la masa es 10 kg, la constante del resorte,  $\kappa = 1.5 \text{ kg/m}$ ; las condiciones iniciales son:  $t_0 = 0$ ,  $x'_0 = 0$  y  $x_0 = 5 \text{ m}$ . Calcule un total de 20 puntos para un tiempo desde 0 hasta 5 segundos de oscilación. En este caso el avance o ancho de paso será de 0.25.

Los resultados computacionales obtenidos usando el método de Euler hacia adelante para una EDO de Segundo Orden son los siguientes:

SOLUCION DE E.D.O. METODO EULER HACIA ADELANTE

=====

(SEGUNDO ORDEN)

INGRESO DE DATOS

-----

INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)

20

INGRESE LOS LIMITES DE OPERACION [A,B]

0.0 5.0



INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0, Z0)

0.0 5.0 0.0

RESULTADOS

```
=====
X      Y(X)    Z(X)
=====
```

.000000	5.000000	.000000
.250000	5.000000	-.187500
.500000	4.953125	-.375000
.750000	4.859375	-.560742
1.000000	4.719190	-.742969
1.250000	4.533447	-.919938
1.500000	4.303463	-1.089943
1.750000	4.030977	-1.251323
2.000000	3.718146	-1.402484
2.250000	3.367525	-1.541915
2.500000	2.982046	-1.668197
2.750000	2.564997	-1.780024
3.000000	2.119991	-1.876211
3.250000	1.650939	-1.955711
3.500000	1.162011	-2.017621
3.750000	.657606	-2.061196
4.000000	.142306	-2.085856
4.250000	-.379158	-2.091193
4.500000	-.901956	-2.076975
4.750000	-1.421200	-2.043151
5.000000	-1.931987	-1.989856

```
=====
```

Solución en hoja de cálculo:

FIGURA N°3.2  
CAPTURA DE HOJA DE CÁLCULO PROBLEMA 3.2

	A	B	C	D	E	F	G
2		Metodo de Euler Hacia Adelante para EDO de Segundo Orden					
3							
4		Condiciones Iniciales y parametros					
5		t0	0.000	x0	5.000	x'0	0.000
6		tf	5.000	N	20.000		
7				H	0.250		
8							
9		Resultados					
10		K	tk	xk	x'k		
11		0	0.0000	5.0000	0.000		
12		1	0.2500	5.0000	-0.188		
13		2	0.5000	4.9531	-0.375		
14		3	0.7500	4.8594	-0.561		
15		4	1.0000	4.7192	-0.743		
16		5	1.2500	4.5334	-0.920		
17		6	1.5000	4.3035	-1.090		
18		7	1.7500	4.0310	-1.251		
19		8	2.0000	3.7181	-1.402		
20		9	2.2500	3.3675	-1.542		
21		10	2.5000	2.9820	-1.668		
22		11	2.7500	2.5650	-1.780		
23		12	3.0000	2.1200	-1.876		
24		13	3.2500	1.6509	-1.956		
25		14	3.5000	1.1620	-2.018		
26		15	3.7500	0.6576	-2.061		
27		16	4.0000	0.1423	-2.086		
28		17	4.2500	-0.3792	-2.091		
29		18	4.5000	-0.9020	-2.077		
30		19	4.7500	-1.4212	-2.043		
31		20	5.0000	-1.9320	-1.990		

Fuente: Elaboración propia.

La ecuación utilizada en la celda D12 y que se copia a las demás es:

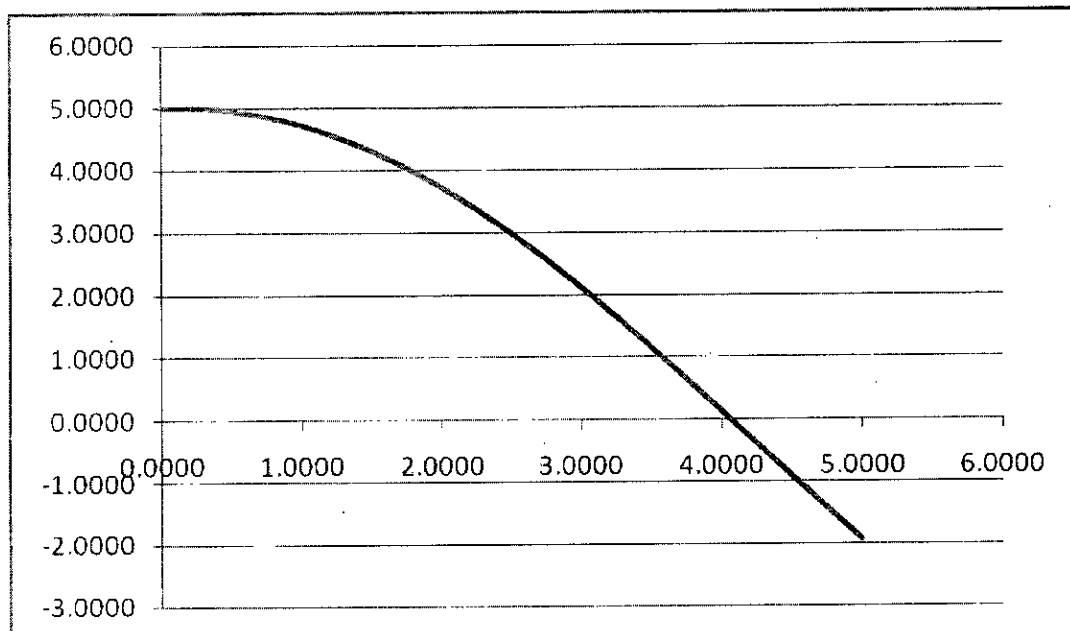
$$=D11+SE$7*E11$$

La ecuación utilizada en la celda E12 corresponde al método de Euler Simple ecuación (3.9) en la variable Z:

$$=E11+\$E\$7*(-0.15*D11)$$

Nótese que la celda que contiene al valor de H (E7) se le coloca el símbolo ( \$ ) para que quede fija y no sea desplazada.

FIGURA N°3.3  
RESULTADOS COMPUTACIONALES PROBLEMA 3.2



Fuente: Elaboración propia.

## 3.2 Codificaciones Fortran sugeridas

### 3.2.1 Codificación RK2

```
PROGRAM RUNGEKUTTA_2ORDEN
```

```
REAL(4) N,X0,Y0,A,B,H,YK(1000),XK(1000)
```

```
10  WRITE(*,*)"  
    WRITE(*,*)' SOLUCION METODO RUNGE KUTTA 2  
    ORDEN'  
    WRITE(*,*)' ====='  
    WRITE(*,*)"  
    WRITE(*,*)' INGRESO DE DATOS'  
    WRITE(*,*)' -----'  
    WRITE(*,*)' INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)'  
    READ(*,*)N  
    WRITE(*,*)' INGRESE LIMITES DE OPERACION [A,B]'  
    READ(*,*)A,B  
    WRITE(*,*)' CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)'  
    READ(*,*)X0,Y0  
    WRITE(*,*)' -----'  
    WRITE(*,*)"  
    XK(1)=X0  
    YK(1)=Y0  
    H=(B-A)/N  
    DO I=1,N+1  
    XK(I+1)=XK(I)+H  
    YY=YK(I)+H*F(XK(I),YK(I))  
    YK(I+1)=YK(I)+(0.5)*H*(F(XK(I),YK(I))+F(XK(I+1),YY))  
    END DO  
    OPEN(1,FILE='RK2.TXT')
```

```

WRITE(*,*) ' RESULTADOS'
WRITE(*,*) ' -----'
WRITE(*,*) ' ====='
WRITE(*,*) ' X      F(X)'
WRITE(*,*) ' ====='
DO I=1,N+1
WRITE(*,20)XK(I),YK(I)
WRITE(1,20)XK(I),YK(I)
END DO
20  FORMAT(2X,F9.4,3X,F10.6)
WRITE(*,*) ' ====='
END

```

```

FUNCTION F(X,Y)
F=10*COS(5*X)-5*Y
RETURN
END

```

### 3.2.2 Codificación RK3.

```
PROGRAM RUNGEKUTTA_3ORDEN
```

```
REAL(4) N,X0,Y0,A,B,H,Y(1000),X(1000)
```

```

10  WRITE(*,*)"
WRITE(*,*) ' SOLUCION DE E.D.O. METODO RUNGE KUTTA 3
ORDEN'
WRITE(*,*) ' ====='
WRITE(*,*)"
WRITE(*,*) ' INGRESO DE DATOS'
WRITE(*,*) ' -----'
WRITE(*,*) ' INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)'

```

```

READ(*,*)N
WRITE(*,*)' INGRESE LOS VALOR INICIAL Y FINAL DEL
DOMINIO'
READ(*,*)A,B
WRITE(*,*)' INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)'
READ(*,*)X0,Y0
WRITE(*,*)' -----'
WRITE(*,*)"
X(1)=X0
Y(1)=Y0
H=(B-A)/N
DO I=1,N+1
X(I+1)=X(I)+H
A=Y(I)+H*0.5*F(X(I),Y(I))
B=Y(I)+H*F(X(I)+H*0.5,A)
Y(I+1)=Y(I)+H*0.33333*(F(X(I),Y(I))+4*F(X(I)+0.5*H,A)+F(X(I+1),B))
END DO
WRITE(*,*)' RESULTADOS'
WRITE(*,*)' -----'
WRITE(*,*)' ====='
WRITE(*,*)'  X      F(X)'
WRITE(*,*)' ====='
DO J=1,N+1
WRITE(*,20)X(J),Y(J)
ENDDO
20  FORMAT(2X,F9.4,3X,F10.3)
WRITE(*,*)' ====='
END

```



```

FUNCTION F(X,Y)
F=0.1035*Y+0.0*X
RETURN
END

```

### 3.2.3 Codificación RK4

```
PROGRAM RUNGEKUTTA_4ORDEN
```

```
REAL(4) N,X0,Y0,A,B,H,Y(1000),X(1000)
```

```

10  WRITE(*,*)"
    WRITE(*,*) ' SOLUCION DE E.D.O. METODO RUNGE KUTTA 4
    ORDEN'
    WRITE(*,*) ' ====='
    WRITE(*,*)"
    WRITE(*,*) ' INGRESO DE DATOS'
    WRITE(*,*) ' -----'
    WRITE(*,*) ' INGRESE EL NUMERO DE PUNTOS (N)'
    READ(*,*)N
    WRITE(*,*) ' INGRESE LOS VALOR INICIAL Y FINAL DEL
    DOMINIO'
    READ(*,*)A,B
    WRITE(*,*) ' INGRESE LAS CONDICIONES INICIALES (X0,Y0)'
    READ(*,*)X0,Y0
    WRITE(*,*) ' -----'
    WRITE(*,*)"
    X(1)=X0
    Y(1)=Y0
    H=(B-A)/N
    DO I=1,N+1
    X(I+1)=X(I)+H

```

```

A=H*F(X(I),Y(I))
B=H*F(X(I)+H*0.333333,Y(I)+A*0.333333)
C=H*F(X(I)+H*0.666666,Y(I)+A*0.333333+B*0.333333)
D=H*F(X(I)+H,Y(I)+A-B+C)
Y(I+1)=Y(I)+H*0.125*(A+3*B+3*C+D)
END DO
WRITE(*,*)' RESULTADOS'
WRITE(*,*)' -----'
WRITE(*,*)' ====='
WRITE(*,*)'  X      F(X)'
WRITE(*,*)' ====='
DO J=1,N+1
WRITE(*,20)X(J),Y(J)
ENDDO
20  FORMAT(2X,F9.5,3X,F9.5)
WRITE(*,*)' ====='
END
FUNCTION F(X,Y)
F=0.0*X+0.1-Y/0.22
RETURN
END

```

### 3.3 Problemas sugeridos

1. Una pieza metálica con una masa de 0.1Kg y 200°C (o 473 K) se coloca en cierto momento dentro de un cuarto con una temperatura de 25°C (es decir  $T=297$  K para  $t = 0$  seg.), donde está sujeta al enfriamiento por convección natural y la transferencia de calor por radiación. Se sabe que la distribución de temperatura es uniforme en el metal, entonces la ecuación de temperatura se puede escribir como:



$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{\rho c V} [\epsilon \sigma (T_a^4 - T^4) + h_c (T_a - T)]$$

Dónde: T es la temperatura en grados Kelvin y las constantes son:

$\rho = 300 \text{ Kg/m}^3$	(densidad del metal)
$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ w/m}^2\text{K}^4$	(Constante de Stefan-Boltzmann)
$\epsilon = 0.8$	(Emisividad del metal)
$T_a = \text{Temperatura Ambiente en grados Kelvin}$	
$V = 0.001 \text{ m}^3$	(Volumen del metal)
$A = 0.25 \text{ m}^2$	(Área de la superficie del metal)
$c = 900 \text{ J/KgK}$	(Calor específico del metal)
$h_c = 30 \text{ J/m}^2\text{K}$	(coef. de transferencia de calor)

Obtener la gráfica temperatura vs. tiempo para 60 puntos con t desde 0 hasta 60 segundos.

2. Cierta material de forma cúbica, con una masa M de 0.6 Kg se pone en el extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una estructura en reposo. El cubo recibe una resistencia de  $R = -Bdy/dt$  del aire, donde B es una constante de amortiguamiento, la ecuación de movimiento es:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Donde: y es el desplazamiento desde la posición estática,  $k = 100 \text{ Kg/seg}^2$  es la constante del resorte y  $B = 1.5 \text{ Kg/seg}$ . Calcule 600 datos de posición y velocidad para t desde 0 hasta 30 segundos, considerando que para  $t = 0$ ,  $y = 0$  y  $y' = 0$ .

3. Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, si se conoce la ecuación diferencial de la corriente  $i(t)$  y si  $R = 10\Omega$ ,  $L = 0.15$  henrios,  $S_1$  está cerrado,  $S_2$  abierto y  $E = 15\text{sen}2.5t$  (fuente de

corriente alterna). Grafique la variación de corriente y carga en intervalos de 0.01 s para un intervalo desde 0 hasta 50.0 seg. siendo que  $i = 0$  y  $q = 0$  en  $t = 0$ .

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = E$$

Donde:  $E$ , es la fuente de corriente alterna.

4. El imán permanente A ejerce una fuerza sobre el peso W, que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $x$  entre el centro de masa del imán y el centro de masa de W. Si el coeficiente de fricción entre W y la superficie es  $\mu$ , y la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{mx^2} - \mu g = 0$$

Determine la posición y velocidad para el bloque W si se sabe que en  $t = 0$ ,  $x = 12$  cm.  $x' = 0$ . Hasta un tiempo de 10 segundos con un total de 30 puntos. Como datos adicionales se sabe que  $k/m = 7200$  cm<sup>3</sup>/seg<sup>2</sup>,  $\mu = 0.1$  y  $g = 360$  cm/seg<sup>2</sup>.

## V. REFERENCIALES

ARNAU MARTÍNEZ, FRANCISCO JOSÉ. **Métodos numéricos para el modelado unidimensional del proceso de renovación de la carga.** Lerez. Editorial Reverté. 2018.

AKAI, T. J. **Métodos numéricos aplicados a la ingeniería.** México. Editorial Limusa. Primera edición. 1998.

CURTIS, F. Gerald, WHEATLEY, O. Patrick. **Análisis numérico con aplicaciones.** México. Editorial Pearson. Sexta edición. 2000.

CHAPRA, S. C. **Métodos numéricos para ingeniería.** México. Editorial Universidad Autónoma de México. Séptima edición. 2013.

CONTE, S. y BOOR, C. **Análisis Numérico.** México. Segunda edición, Editorial McGraw-Hill. 1985.

DIETER, Heerman. **Computer Simulation Methods.** Berlin. Editorial Springer. Primera edición. 1990.

FINK, KURTIS D.; MATHEWS, JOHN H. **Métodos Numéricos Con MATLAB - 3.** San Diego. Editorial Prentice Hall. 2013.

GARCIA ISAAC A; MAZA, SUSANA. **Métodos Numéricos problemas resueltos.** Madrid. Editorial AbeBooks Seller. 2013.

IRIARTE, R. y BALDERRAMA, V. **Métodos numéricos.** México. Editorial Trillas. Primera edición. 1990.

JORQUERA, H. Y GELMI, C. **Métodos numéricos aplicados a la ingeniería**. Madrid. Editorial Alfaomega. 2013.

MARON, J. y LOPEZ, J. **Análisis Numérico un Enfoque Práctico**. México. Editorial Continental S.A. Primera edición. 1995.

NAKAMURA, Shoishiro. **Métodos Numéricos Aplicados con Software**. México. Editorial Hispanoamericana. Segunda edición. 1992.

NIEVES, Antonio y DOMÍNGUEZ, Felipe. **Métodos numéricos Aplicados a la ingeniería**. México. Editorial Continental S.A. Segunda edición. 1998.

QUINTANA, PEDRO. **Métodos numéricos con aplicaciones en Excel**. Madrid. Editorial Reverté. 2015.

SEARS, W. y ZEMANSKY, W. **Física General**. Madrid. Editorial McGraw-Hill. Quinta edición. 1981.

SERWAY Raymond y VUILLE. **Fundamentos de Física**. México. Editorial Cengage Learning. Novena edición. 2012.

TIPLER, Paul y MOSCA, Gene. **Física para la ciencia y la tecnología**. España. Editorial Reverte. Sexta edición. 2010.

TORREGROSA, JUAN RAMON. **Problemas resueltos de métodos numéricos**. Madrid. Editorial Paraninfo. 2018.

## VI. APÉNDICES

### 6.1 Discrepancia de resultados Euler - RK2

Utilizando Fortran fue posible evaluar la discrepancia entre ambos métodos; a continuación se muestran los resultados.

TABLA N°6.1  
RESULTADOS METODO DE EULER

X	Y(X)	Z(X)
.000000	5.000000	.000000
.250000	5.000000	-.187500
.500000	4.953125	-.375000
.750000	4.859375	-.560742
1.000000	4.719190	-.742969
1.250000	4.533447	-.919938
1.500000	4.303463	-1.089943
1.750000	4.030977	-1.251323
2.000000	3.718146	-1.402484
2.250000	3.367525	-1.541915
2.500000	2.982046	-1.668197
2.750000	2.564997	-1.780024
3.000000	2.119991	-1.876211
3.250000	1.650939	-1.955711
3.500000	1.162011	-2.017621
3.750000	.657606	-2.061196
4.000000	.142306	-2.085856
4.250000	-.379158	-2.091193
4.500000	-.901956	-2.076975
4.750000	-1.421200	-2.043151
5.000000	-1.931987	-1.989856

Fuente: Elaboración propia

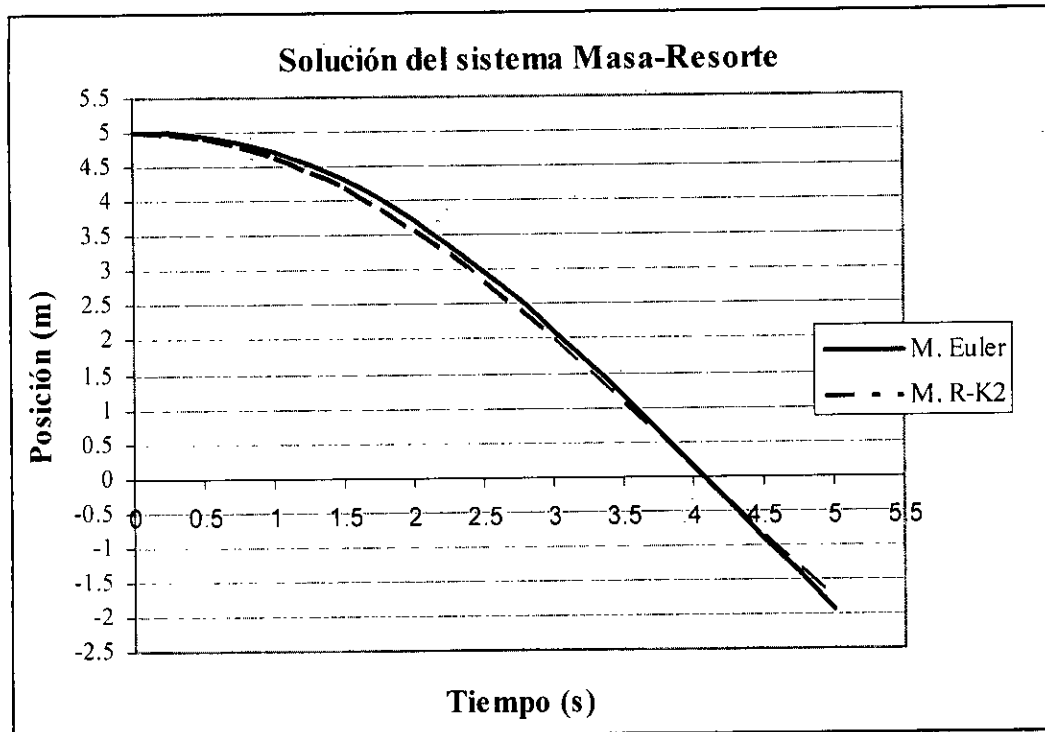
TABLA N°6.2  
RESULTADOS METODO RK2

X	Y(X)	Z(X)
.000000	5.000000	.000000
.250000	4.976563	-.187500
.500000	4.906360	-.373242
.750000	4.790051	-.555481
1.000000	4.628727	-.732504
1.250000	4.423904	-.902648
1.500000	4.177505	-1.064313
1.750000	3.891845	-1.215981
2.000000	3.569607	-1.356225
2.250000	3.213818	-1.483728
2.500000	2.827821	-1.597291
2.750000	2.415243	-1.695847
3.000000	1.979960	-1.778469
3.250000	1.526061	-1.844381
3.500000	1.057813	-1.892963
3.750000	.579613	-1.923758
4.000000	.095957	-1.936476
4.250000	-.388612	-1.930997
4.500000	-.869539	-1.907372
4.750000	-1.342306	-1.865824
5.000000	-1.802470	-1.806741

Fuente: Elaboración propia



FIGURA N°6.1.  
SUPERPOSICIÓN DE CURVAS GENERADAS



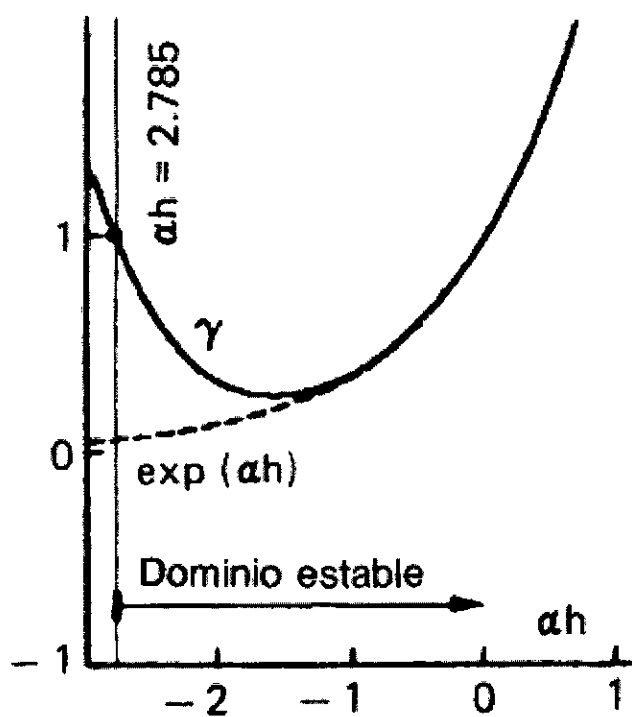
Fuente: Elaboración propia.

## VII. ANEXOS

### 7.1 Estabilidad de los métodos Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta se vuelven inestables, debido a que el módulo de la solución numérica crece a cada paso, mientras que el módulo de la solución verdadera decrece en cada paso por un factor exponencial. (NAKAMURA, 1992).

FIGURA N°7.1  
DOMINIO DE ESTABILIDAD DE LOS METODOS RK



Fuente: NAKAMURA, 1992. p.310.



## 7.2 Espaciamiento de retícula en métodos de Euler

La exactitud del método de Euler hacia adelante aumenta al disminuir el intervalo de retícula  $h$ ; las magnitudes de los errores son aproximadamente proporcionales a  $h$ . (NAKAMURA, 1992).

TABLA N°7.1  
EFECTO DE ESPACIAMIENTO DE RETICULA

$t$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$
0.01	4.07000 ( 8.693)	4.14924 (0.769)	4.15617 (0.076)
0.02	3.32565 (14.072)	3.45379 (1.259)	3.46513 (0.124)
0.03	2.72982 (17.085)	2.88524 (1.544)	2.89915 (0.153)
0.04	2.25282 (18.440)	2.42037 (1.684)	2.43554 (0.167)
0.05	1.87087 (18.658)	2.04023 (1.722)	2.05574 (0.171)
0.06	1.56497 (18.125)	1.72932 (1.690)	1.74454 (0.168)
0.07	1.31990 (17.119)	1.47496 (1.613)	1.48949 (0.160)
0.08	1.12352 (15.839)	1.26683 (1.507)	1.28041 (0.150)
0.09	0.96607 (14.427)	1.09646 (1.387)	1.10895 (0.138)
0.10	0.83977 (12.979)	0.95696 (1.261)	0.96831 (0.126)

Fuente: NAKAMURA, 1992. p.293