UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

GRAFOS Y ÁRBOLES PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN REDES DE DISTRIBUCIÓN

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

WENDY SAYURI YARIHUAMÁN LIMA

Callao, 2019

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

GRAFOS Y ÁRBOLES PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN REDES DE DISTRIBUCIÓN

WENDY SAYURI YARIHUAMAN LIMA

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobada por:

____

Dr. Walter Flores Vega

Presidente

____

Lic. Elmer Alberto León Zarate

Secretario

____

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Vocal

____

Dr. Pedro Canales García

Asesor

Callao – 2019

PERÚ

DEDICATORIA

Esta tesis se la dedico a mis padres Héctor Yarihuamány Virginia Lima, por su apoyo incondicional, por su comprensión y motivación para seguir adelante y no rendirme frente a las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por permitirme lograr este objetivo en mi vida.

Agradezco a mis padres, Héctor y Virginia por la formación dada hacia mi persona, por el gran apoyo que siempre he tenido de ellos.

Agradezco a mi asesor Dr. Pedro Canales García, por ser mi guía, por la paciencia, por el apoyo y tiempo dedicado a este trabajo de tesis.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Figura 5.41. Red Representativa de tres fábricas y cuatro supermercados a donde se transportará el producto.

RESUMEN

GRAFOS Y ÁRBOLES PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE EN REDES DE DISTRIBUCIÓN

Wendy SayuriYarihuamán Lima

Diciembre – 2018

Asesor: Dr. Pedro Canales García

Título obtenido: Doctor en Ciencias de Ingeniería.

Esta investigación se representará utilizando la teoría básica de grafos y árboles, porque al utilizar redes de distribución mejora la eficiencia de los cálculos. La modelación de distribución de redes de transporte permite la resolución de múltiples problemas de programación lineal mediante la implementación de algoritmos especiales creados para tal fin. En particular nos enfocaremos en una de las primeras aplicaciones importantes de la programación lineal el problema de transporte.

El problema de transporte se utilizará en una situación en la cual se envía un bien desde cualquier grupo de centros de abastecimiento llamados orígenes, a cualquier grupo de recepción llamados destinos en la cual el objetivo es minimizar el costo de transporte al distribuir los bienes a la vez que satisfagan las restricciones de la oferta y demanda.

El método de transporte se basa en modelo balanceado o equilibrado esto quiere decir que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo esta desbalanceado se podrá aumentar una fuente ficticia o destino ficticio para restaurar el equilibrio o balance.

Palabras Claves: Grafos; problema de transporte; redes de distribución; Árboles; y Teoría de Grafos.

ABSTRACT

GRAPHS AND TREES FOR THE PROBLEM OF TRANSPORTATION IN DISTRIBUTION NETWORKS

Wendy SayuriYarihuaman Lima

December - 2018

Advisor: Dr. Pedro Canales García

Degree obtained: Doctor in Engineering Sciences.

This research will be represented using the basic theory of graphs and trees, because using distribution networks improves the efficiency of calculations. The modeling of distribution of transport networks allows the resolution of multiple linear programming problems through the implementation of special algorithms created for this purpose. In particular, we will focus on one of the first important applications of linear programming, the transport problem.

The transport problem will be used in a situation in which a good is sent from any group of supply centers called origins, to any reception group called destinations in which the objective is to minimize the cost of transport by distributing the goods to the once they satisfy the supply and demand constraints.

The transport method is based on a balanced or balanced model, which means that the total demand is equal to the total supply. If the model is unbalanced, a fictitious source or fictitious destination can be increased to restore balance or balance.

Keywords: Graphs; transportation problem; distribution networks; Trees and Graph Theory

Introducción

Existen muchos problemas de la vida real, algunos más complicados que otros. Entre ellos hay los que se pueden modelar y resolver usando la teoría básica de grafos y árboles lo cual presentaremos en este trabajo. Uno de estos problemas es el de distribución, en el cual se trata de distribuir bienes (comestibles, artefactos, equipos, personal, etc.), que se encuentran en centros de oferta, hacia centros donde se les requiera (demanda). Normalmente se emplea el método de transporte, el que consiste en usar una tabla o matriz de transporte en cuyas entradas se colocan oferta y demanda. El método es conocido y comienza con una solución factible básica, la cual se mejora hasta hallar la solución más óptima. En este trabajo, daremos una introducción de teoría de grafos, redes de transporte, árboles y árboles de expansión. A continuación emplearemos estos conceptos para fundamentar el método de transporte en la teoría de grafos y árboles.

El problema fundamental que abordaremos es determinar el costo mínimo de distribución de un bien hacia otros centros de demanda tal que la solución encontrada sea óptima. Este tipo de problema de transporte es una adaptación del método simplex. En este caso el objetivo es planificar redes de transporte que generen menor costo, obteniendo la solución factible básica inicial, calcularemos otra para que la función objetivo tome un valor más pequeño. Hay que realizar un cambio de base eligiendo una variable para entrar en la base y otra para salir. Esta selección se realiza siguiendo criterios para mejorar la solución y encontrar así la solución óptima que me llevará a obtener el costo mínimo de transporte.

En el capítulo I, evidenciaremos la descripción de la realidad problemática, el problema de investigación, los objetivos y algunas limitaciones del presente trabajo. En este primer capítulo declararemos la problemática a realizar a lo largo de toda nuestra investigación, así como el objetivo general y los objetivos específicos. En el capítulo II, evidenciaremos: los antecedentes siendo estos la base de nuestro trabajo, el marco teórico en el que presentaremos la parte central de nuestro trabajo y las definiciones previas que nos permitirán un mejor entendimiento de nuestro marco teórico. Con respecto al capítulo III y IV se evidencia: la hipótesis, la variable de estudio, la metodología, el tipo de diseño, la población y muestra y finalmente los métodos y técnicas de la investigación. Luego de ello, se manifiesta los resultados obtenidos y la discusión de los mismos en los capítulos V y VI respectivamente.

Finalmente, evidenciaremos las conclusiones y algunas recomendaciones para futuros trabajos.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática.

El problema a estudiar es el siguiente: ¿Se podrá encontrar el costo mínimo en un problema de distribución usando la teoría de grafos y árboles?, en los diversos libros de Investigación de Operaciones para ingenieros, el problema de distribución o transporte trata de distribuir un producto que se encuentra en m orígenes hacia "n" destinos, a un costo mínimo y de modo que se satisfaga dicha demanda que existe en aquellos destinos. En la mayoría de estos libros se representa el problema de transporte mediante una forma matricial o tabla de costos y se aplica distintos métodos para resolver la solución inicial por el método de Vogel, método de la esquina de noroeste, método de Russel, etc, Estos métodos son bastantes técnicos y no se da un fundamento matemático. En este trabajo se usa la teoría de grafos y árboles para sustentarlos.

Históricamente, el aprendizaje sobre la distribución de mercancías ha sido utilizado mediante técnicas de Programación dinámica y de la Investigación Operativa. En este trabajo nos enfocaremos en estructuras especiales de programación lineal, las cuales están orientadas a resolver y modelar, esto quiere decir, distribuir productos desde un origen o varios orígenes que ofertan bienes o servicios hacia un destino o varios destinos que tienen demandas de estos bienes o servicios. El objetivo de este problema es minimizar el costo del transporte de los bienes o servicios. Dicho por Hillier Frederick S. y Gerald J. Lieberman (1941), el punto de partida sería cómo hacer frente "a la distribución de cualquier mercancía desde cualquier grupo de centros de suministro, llamados orígenes a cualquier grupo de centros de recepción, llamados destinos, de tal manera que se minimicen los costos totales de distribución".

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

- ¿Será posible mostrar el costo mínimo en un problema de distribución usando la teoría de grafos y árboles?

1.2.2. Problema Específicos

- ¿Será posibleaplicar la teoría de grafos y árboles para representar esquemas económicos?
- ¿Será posible aplicar un algoritmo apropiado para resolver problemas de distribución de recursos usando la teoría de grafos?

1.3. Objetivos

En la presente investigación se plantean los siguientes objetivos:

1.3.1. Objetivo General

- Mostrar el costo mínimo en un problema de distribución usando la teoría de grafos y árboles.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Aplicar la teoría de grafos y árboles para representar esquemas económicos.
- Aplicar un algoritmo apropiado para resolver el problema de distribución de recursosusando la teoría de grafos.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Limitante Teórico:

El algoritmo de transporte es un método que se usa en la resolución de problemas de transporte que empleara el método simplex para resolverlo. Sin embargo, dada la estructura especial del modelo lineal, se puede construir un método más eficaz para su resolución (el método de transporte). Para ello debemos hacer un cambio de base eligiendo una variable para entrar y otra para salir. Asimismo esta elección se realiza según criterios para mejorar la solución y así encontrar la solución más óptima que me conduce a obtener el costo mínimo.

14.2. Limitante Temporal:

En la actualidad nuestro estudio no se encuentra en muchos trabajos de investigación que en su solución se fundamenten en la teoría de grafos y árboles para redes de distribución. Solo emplean para su resolución la manera mecánica, la tabla matricial o tabla de costos sin evidenciar que se pueden realizar mediante el uso de una red de distribución que se basa en la teoría de grafos y árboles.

En general, poca información donde empleen en su resolución el problema de transporte en redes de distribución que se fundamente en la teoría de grafos y árboles.

1.4.3. Limitante Espacial:

El conocimiento básico de la teoría de grafos es fundamental en aplicaciones de redes de transporte, de flujos de redes y problemas de distribución.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.2.1. Antecedente Internacional

Se considera como antecedentes los siguientes trabajos de investigación por la relación que tiene con el proyecto de investigación.

Woywood (2003),en la revista "Transporte Urbano: Un modelo a seguir", nos dice que el patrón de flujo definirá el comportamiento de los usuarios en las vías, el origen y destino de sus viajes, horarios y frecuencias con que los realiza, modo de transporte (caminata, auto particular, transporte público, transporte de carga, etc), flujos vehiculares y peatonales, tasa de ocupación de los vehículos, demoras que experimentan los usuarios, contaminación y consumo de combustible, longitud de colas vehiculares, grado de congestión, etc. Cuyo objetivo es transportar bienes en una ciudad mediante un modelo eficiente. Sus conclusiones es tener un concepto claro de funcionalidad de transporte urbano, ayuda a desarrollar proyectos con una actitud técnica frente a problemas cotidianos de saturación de sus calles.

El sistema de transporte representa la oferta de transporte que tiene la ciudad y el patrón de flujos su demanda, para satisfacer el sistema de actividades que ofrece la ciudad en estudio.

Hernán, Sánchez y Jairo (2004), en su artículo científico titulado "Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de Dijkstra para determinar las distancias y las rutasmás cortas en una ciudad", en este trabajo las intersecciones de las vías y las calles que unen estos nodos son los arcos, este algoritmo de Dijkstra nos determina las distancias más cortas entre los nodos y encontrando la ruta más corta de nodo a nodo. Cuyo objetivo es determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad. Los resultados del algoritmo se determinan distancias mínimas entre nodos. En cuanto a sus conclusiones se expresa una matriz denominada distancias mínimas entre nodos generados por el algoritmo Dijkstra.

Anaut, Di Mauro y Suárez (2006) en su artículo científico titulado “Configuración Óptima de Redes de Distribución Primaria. Método Simplex”, en el trabajo se presenta un problema de optimización entera no lineal con función cuadrática. Para resolver este problema se usa el método simplex, el cual me permitirá analizar diversas combinaciones posibles mediante la configuración de un sistema de redes. Los resultados que se obtienen por este método se corrobora que se puede reducir pérdidas en forma significativa. Su objetivo es optimizar las redes de distribución primaria mediante y su conclusión principal es que la aplicación de esta técnica permitió comprobar la posibilidad de reducir las pérdidas en forma significativa.

Puchades (2008), menciona en el presente artículo “Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática”, que la teoría de grafos les permitirá representar a través de esquemas y resolver diversos problemas de los campos de ciencia y tecnología. Su objetivo es planificar las rutas de trabajo de una empresa de distribución automática. En particular se utilizará dicha teoría para modelar y resolver diversos problemas acerca del transporte con el objetivo de minimizar los costos. Su conclusión es optimizar la ruta inicial a través del cambio de la secuencia de visitas planteada en el origen inicial, demostrando que se puede mejorar dicha ruta mediante el algoritmo del viajante.

Astete (2011), en su tesis titulada “Metodología para mejorar el proceso de asignación de tráfico a una red de transporte”, muestra el proceso de planificación del transporte que contaría de varias fases, lo que destaco es que los problemas de asignación donde su objetivo es optimizar los flujos en una red determinada de transporte para su resolución, a diferencia del algoritmo de transporte los de asignación se resuelven de un origen a varios orígenes. En cuanto a sus conclusiones nos dice que es ventajoso en los problemas de asignación de tráfico porque no necesita enumerar todas las rutas factibles entre orígenes y los destinos, que podría ser un trabajo muy pesado cuanto la red aumenta.

Eroglu(2013) en su artículo científico titulado “Una aplicación del método simplex para redes para problemas de flujo de costo mínimo” nos dice que el uso de redes es muy conveniente para modelar una estructura matemática simple, la cual se puede representar de una manera fácil mediante un grafo, por lo cual su objetivo será representar la estructura matemática mediante el uso de grafos. Nos menciona también que el problema de flujo se podrá definir por un conjunto de nodos y arcos con parámetros de costo que se establecerán para cada arco y un flujo externo fijo para cada nodo. Sus conclusiones serían que mediante la aplicación del método simplex para redes se logra obtener un costo mínimo.

2.2.2. Antecedente Nacional

Según Taha (2012), en el libro “Investigación de Operaciones”, menciona que se representará el problema de transporte en una red de distribución. Tienen “m” orígenes y “n” destinos, que se representa cada uno por un nodo. Las rutas que unen los orígenes con los destinos representaran los arcos. El objetivo de dicho modelo es disminuir el costo total del transporte al mismo tiempo que se satisfarán las restricciones de la oferta y la demanda. Nos habla del balance del modelo de transporte, la representación de la tabla de transporte diremos que el modelo esta balanceado si la demanda total es igual a la oferta total, si el modelo estuviera desbalanceado se podrá agregar un origen o destino ficticio para restaurar el balance.

2.2. Marco

2.2.1. Teórico

En esta sección presentamos el problema general de transporte, consideraremos m puntos de origen (ofertas), donde el origen *i* tiene oferta O_i, y n puntos de destino, donde *j* tiene la demanda D_j. Se asume que O_i; $D_j \geq 0$.

Con cada arco *(i,j)* está asociado un costo unitario c_{ij} de transporte. El problema consiste en determinarel patrón óptimo de unidades a transportar desde los orígenes a los destinos a un costo mínimo, de modo que se satisfaga las demandas.

Consideremos que se trata de un problema equilibrado, esto es, que se cumple: la oferta total es igual a la demanda total.

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

Costo unitario para transportar desde *i* a *j* es C_{ij}. Si la cantidad de unidades que se transporta desde *i* hasta *j* es x_{ij} unidades, entonces sabiendo que se tiene m orígenes y n destinos, el costo total de transporte será:

$$Z = C_{11}x_{11} + \ldots + C_{1n}x_{1n} +$$

$$C_{21}x_{21} + \ldots + C_{2n}x_{2n} +$$

$$\ddots$$

$$+ C_{m1}x_{m1} + \ldots + C_{mn}x_{mn}$$

Luego, el problema de programación lineal, considerando las restricciones de oferta y demanda es:

Minimizar Z

s.a

$$
\begin{array}{c:c:c:c|c}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} & & & & = O_1 \\
 & x_{21}+\ldots\ldots+x_{2n} & & & = O_2 \\
 & & \ddots & x_{21}+\ldots\ldots+x_{2n} & = O_m \\
\hdashline
x_{11} & x_{21} & \cdots\cdots & x_{m1} & = D_1 \\
\quad +x_{12} & \quad +x_{22} & & \quad +x_{m2} & = D_2 \\
\qquad \ddots & \qquad \ddots & & \qquad \ddots & \\
\qquad\quad +x_{1m} & \qquad\quad +x_{12} & & \qquad\quad +x_{mn} & = D_n \\
\hdashline
\end{array}
$$

$x_{11},\ldots\ldots, x_{1n},\ldots\ldots,x_{m1},\ldots\ldots x_{mn} \geq 0$

Si la oferta total excede a la demanda total, se dice que se trata de un problema no equilibrado. En este caso se puede introducir un destino ficticio con demanda. $D_{n+1}=\sum_i O_i-\sum_j D_j$ y $c_{i,\, n+1}=0$ $i=1,2,\ldots,m$.

2.2.2. Conceptual

En la presente investigación no se realiza un marco conceptual, porque es un estudio en ciencias básicas.

2.2.3. Teórico-conceptual

En este trabajo de investigación para su análisis y solución de problemas de transporte, es válido aplicar el método simplex, sin embargo métodos basados en el algoritmo simplex, sin embargo métodos basados en el algoritmo simplex especializados para redes es mucho más conveniente su aplicación, para esto utilizaremos las referencias como [1, 2, 3, 4, 5, 6].

2.3. Definición de términos básicos

Para ello presentamos algunas definiciones:

2.3.1. Red: Una red consiste en un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de puntos. Los puntos se llaman nodos (o vértices). Las líneas se llaman arcos (o ligaduras, aristas o ramas).

2.3.2. Arcos Dirigidos: Se dice que un arco es dirigido cuando el arco tiene flujo en una dirección (como en una calle de un sentido). La dirección se indica agregando una cabeza de flecha al final de la línea que representa el arco.

2.3.3. Arcos No Dirigidos: Si el flujo a través de un arco se permite en ambas direcciones (como una tubería que se puede usar para bombear fluido en ambas direcciones), se dice que es un arco no dirigido.

2.3.4. Grafo: Un grafo es un par de conjuntos, uno denotado por X es el conjunto de nodos, y el otro denotado por A es el conjunto de arcos. Un grafo se denota por G=(X,A).

2.3.5. Flujo: Se dice que una función φ, definida sobre el conjunto A de los arcos es un flujo si,

$$\boldsymbol{\varphi(a)\geq 0} \qquad \boldsymbol{\forall\ a \in A,}$$

$$\sum_{a\in w^{-}(v)} \varphi(a) = \sum_{a\in w^{+}(v)} \varphi(a)\,,$$

Donde $v\neq v_0, v\neq v_n$

$$\boldsymbol{\varphi(a)\leq c(a)} \qquad \boldsymbol{\forall\ a \in A.}$$

Es fácil ver que se cumple:

$$\sum_{a\in w^{+}(v_o)} \varphi(a) = \sum_{a\in w^{-}(v_n)} \varphi(a) = \varphi(v_n)$$

2.3.6. Lazo : Es un arco que tiene inicio y final en el mismo vértice.

2.3.7. Grafo completo : Se dice que un grafo G=(X,A) es completo, si se tiene que

$\forall$ x_i, x_j tal que si (x_i, x_j) $\notin$ A, implica (x_j, x_i) $\in$ A.

Esto quiere decir que un grafo es completo, si todo par de vértices de G están ligados al menos en una de las dos direcciones.

2.3.8. Grafo simétrico: Se dice que un grafo G=(X,A) es simétrico, si se tiene que

$\forall$ x_i, x_j en X tal que si (x_i, x_j) $\in$ A, implica (x_j, x_i) $\in$ A.

2.3.9. Trayectoria: Una trayectoria donde el nodo i_0 al nodo i_p, es una sucesión de arcos, todos orientados de i_0 a i_p. Una trayectoria también es llamada camino. Lo denotamos por:

$$\tau=\{(i_0,i_1),(i_0,i_2),\ldots\ldots., (i_{p-1},i_p)\}$$

Notesé que el nodo terminal de cada arco es el mismo que el nodo inicial del arco siguiente, en la sucesión.

En una trayectoria es de interés la orientación de los arcos, que es la misma para todos.

2.3.10. Cadena: Es una sucesión de arcos desde i_0 a i_p, donde los arcos no necesariamente están orientados de i_0 a i_p.

2.3.11. Circuito: Es una trayectoria cerrada. En un circuito se tiene, $i_0=i_p$.

2.3.12. Ciclo: Es una cadena cerrada finita que se inicia en un vértice i y termina en dicho vértice.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

De acuerdo a la naturaleza del problema:

3.1. Hipótesis

Hipótesis general

- Si es posible, mostrar el costo mínimo en un problema de distribución usando la teoría de grafos y árboles.

Hipótesis Específicas

- Si es posible,aplicar la teoría de grafos y árboles para representar esquemas económicos.
- Si es posible, aplicar unalgoritmo apropiado para resolver el problema de distribución de recursos usando la teoría de grafos.

3.1.1. Capítulos fuera de variables (cualitativo)

En esta investigación vamos a emplear una variable de tipo cualitativo nominal, ya que estudiaremos la distribución de bienes a un costo mínimo, usando la teoría de grafos y árboles.

3.1. Operacionalización de variables

A continuación, presentamos en el cuadro N°1 en el que veremos la variable, dimensión e indicadores empleados en nuestra investigación:

CUADRON° 1: OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Variable	Dimensiones	Indicadores
Encontrar el costo mínimo en un problema de distribución usando la teoría de grafos y átboles.	• Utilizar la teoría de grafos y árboles para representar esquemas económicos.	• Redes de distribución de bienes. • Costos de la red distribución. • Estrategias de envío.
	• Algoritmo para resolver el problema de distribución de recursos usando la teoría de grafos.	• Método simplex. • Método para el problema de transporte. • Solución óptima o costo mínimo.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

De acuerdo a la naturaleza del problema.

4.1. Tipo y diseño del problema.

Según Avila Acosta (1992) de acuerdo al propósito y naturaleza perseguida, la presente investigación es de tipo Básica, Pura o fundamental.

Siguiendo a Klimovsky, 2001 se utilizará el método deductivo.

En primer lugar revisaremos problemas de la vida real que se pueden modelar y resolver usando la teoría básica de redes.

Seguidamente, estudiaremos los grafos, redes de transporte y el método simplex. Daremos definiciones, formularemos el problema, veremos la matriz de incidencia como arco-ruta el proceso de crear árboles básicos iniciales, el método más eficaz para calcularlo es el modelo del algoritmo de transporte.

Luego de ello, nos centraremos en estudiar el problema que trata de una distribución de un producto utilizando rutas de transporte hacia donde existe demanda de dicho producto. En este caso se tendrá en cuenta los costos de transporte.

4.2. Población y muestra

4.2.1. Población: La conceptualización del presente trabajo nos expresa que no estudiaremos la población, nuestro trabajo se centrará en optimizar la función objetivo, minimizando costos en el modelo de programación lineal. Se estudiará las redes de distribución establecidas.

4.2.2. Muestra: Tamaño de la población.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización de nuestro trabajo se revisará bibliografía especializada y recopilación de información obtenida en el repositorio de la PUCP, repositorio de UNMSM de grafos y árboles para el algoritmo de transporte en redes de distribución.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo.

4.5. Análisis y procesamiento de datos.

La presente investigaciónno aplica plan de procesamiento estadístico y análisis de datos.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Capítulos fuera y dentro de variables, concerniente al contexto del problema, capitulo dentro de variable concerniente a la estructura de la hipótesis

5.1. Resultados de la Teoría de Grafos.

Existen muchos problemas de optimización en redes son tipos especiales de programación lineal. En este capítulo veremos algunos resultados sobre redes, las que se fundamentan en la teoría básica de grafos.Veremos algunas definiciones:

5.1.1. Grafo: Un grafo es un par de conjuntos, uno denotado por X es el conjunto de nodos, y otro denotado por A es el conjunto de arcos. Un grafo se denota por G=(X,A).

Luego podemos decir que una red es un grafo sin lazos (un arco que comienza y termina en el mismo nodo), tal que:

- Cada arco “a” tiene asociado un número C(a)≥0, llamado capacidad de arco.
- Existe un vértice (nodo) v_0 y uno solo, tal que $w^-(v_0)=\phi$, este vértice se llama fuente de la red.
- Existe un vértice v_n y uno solo tal que $w^+(v_n)=\phi$, este vértice se llama fuente de red. Denotaremos por $w^-(v)$ al conjunto de los arcos incidentes al vértice v hacia el interior, $w^+(v)$ al conjunto de arcos incidentes al vértice v hacia el exterior.

5.1.2. Flujo: Se dice que una función φ, definida sobre el conjunto A de los arcos es un flujo si,

$$\varphi(a) \geq 0 \qquad \forall\ a \in A,$$

$$\sum_{a \in w^-(v)} \varphi(a) = \sum_{a \in w^+(v)} \varphi(a)$$

Donde $v \neq v_0$, $v \neq v_n$

$$\varphi(a) \leq C(a) \qquad \forall\ a \in A,$$

Es fácil ver que se cumple:

$$\sum_{a \in w^-(v)} \varphi(a) = \sum_{a \in w^+(v)} \varphi(a) = \varphi(v_n)$$

Observación: A $\varphi(v_n)$ se llama el valor del flujo. Con frecuencia se está interesado en calcular el valor óptimo del flujo correspondiente a una determinada red de transporte.

Interpretación:

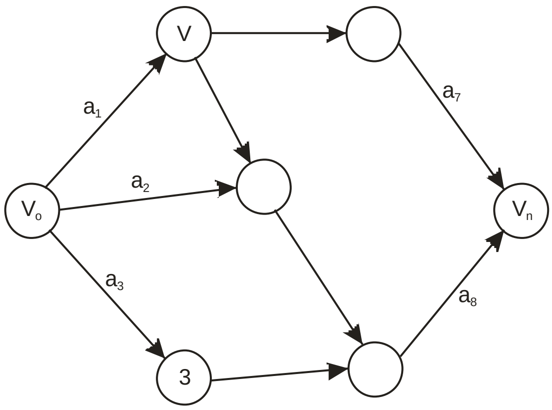


Figura5.1. Cálculo del valor óptimo del flujo

$$\varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\varphi(a_3)=\varphi(a_7)+ \varphi(a_8)$$

$$\sum_{a_i \in w^+(v)} \varphi(a_i) = \sum_{a_j \in w^-(v)} \varphi(a_j)$$

Sea C(a) la capacidad del arco a, entendiéndose como el máximo flujo que puede circular por el arco a.

Arco saturado, se dice que un arco $a_i \in A$ está saturado, si

$$\varphi(a)=C(a_i)$$

Esto es, un arco está saturado si el flujo que circula por dicho arco es igual a la capacidad de arco.

Si el flujo a través de un arco solo permite en un sentido (Ejemplo una calle de un solo sentido), se dice que el arco es un arco dirigido, lo cual se indica incluyendo una flecha. Para indicar que una calle es de doble sentido, se utilizan dos arcos con sentidos opuestos, o por un arco no orientado.

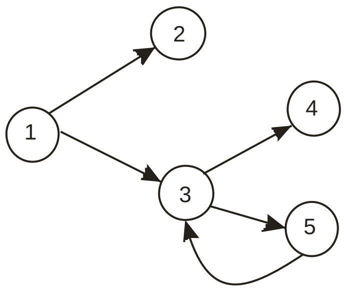


Figura5.2. Grafo orientado.

Un arco no dirigido se llama ligadura; se entiende que por él se permite el flujo en cualquier sentido.

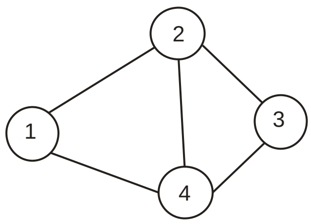


Figura 5.3. Grafo con ligaduras.

5.1.3. Lazo: Es un arco que tiene inicio y final en el mismo vértice.

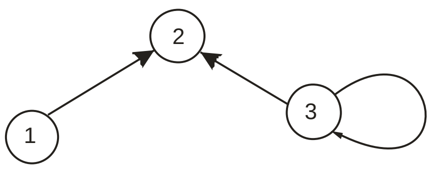


Figura 5.4. Grafo que contiene un lazo en el vértice 3.

5.1.4. Grafo completo: Se dice que un grafo G=(X,A) es completo, si se tiene que:

$$\forall x_i, x_j \text{ tal que si } (x_i, x_j) \notin A, \text{ implica } (x_j, x_i) \in A.$$

Esto quiere decir que un grafo es completo, si todo par de vértices de G están ligados al menos en una de las dos direcciones.

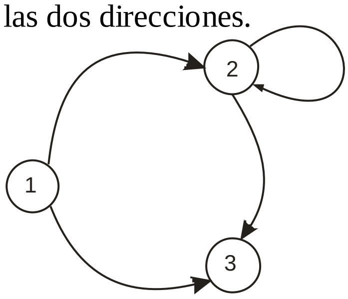


Figura 5.5. Grafo completo.

Un grafo es no completo. En efecto los vértices 2 y 4 están en X={1, 2, 3, 4}, pero no existe arco (2, 4) ó (4, 2).

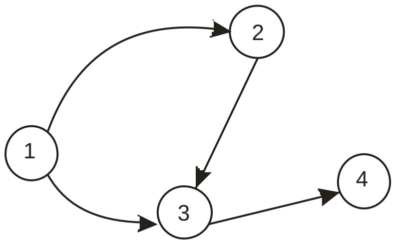


Figura 5.6. Grafo no completo.

5.1.5. Grafo simétrico: Se dice que un grafo G=(X,A) es simétrico, si se tiene que:

$\forall x_i, x_j$ en X tal que si $(x_i, x_j) \in A$, implica $(x_j, x_i) \in A$.

Ejemplo 5.1. Sea X={1,2,3}

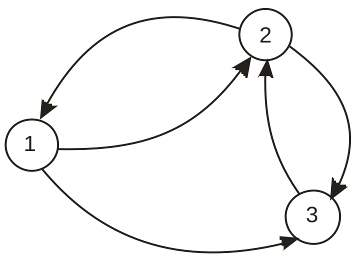


Figura 5.7. Grafo no simétrico

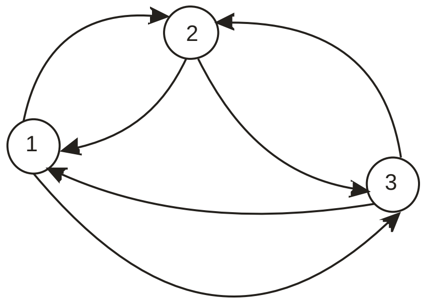


Figura 5.8. Grafo simétrico.

5.1.6. Trayectoria: Una trayectoria donde el nodo i_0 al nodo i_p, es una sucesión de arcos, todos orientados de i_0ai_p. Una trayectoria también es llamada camino. Lo denotamos por:

$$\tau=\{(i_0, i_p), (i_1, i_2), \ldots\ldots\ldots\ldots..,(i_{p-1}, i_p)\}.$$

Notesé que el modo terminal de cada arco es el mismo que el nodo inicial del arco siguiente, en la sucesión. En una trayectoria es de interés la orientación de los arcos, que es la misma para todos.

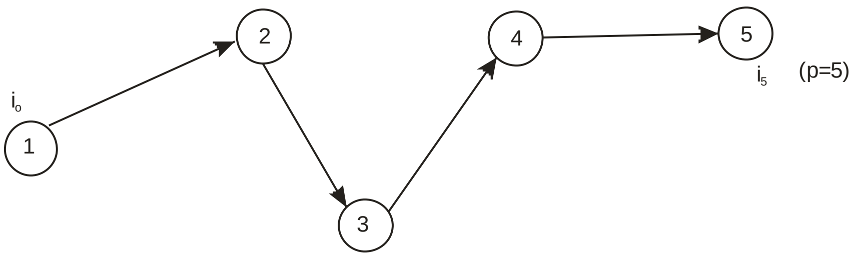


Figura 5.9. Trayectoria (o camino).

5.1.7. Cadena: Es una sucesión de arcos desde i_0ai_p,donde los arcos no necesariamente están orientados de i_0ai_p. En alguna bibliografía se les llama trayectorias no dirigidas.

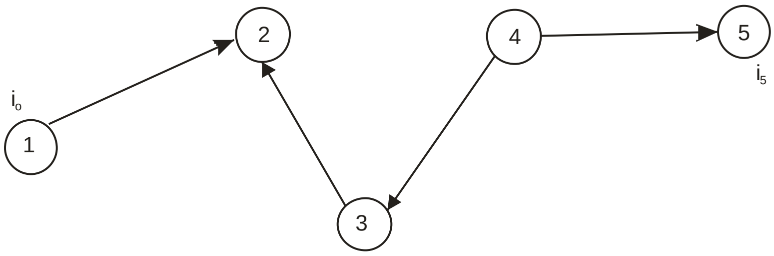


Figura 5.10. Cadena de i_0a i_5.

5.1.8. Circuito: Es una trayectoria cerrada. En un circuito se tiene, $i_0 = i_p$.

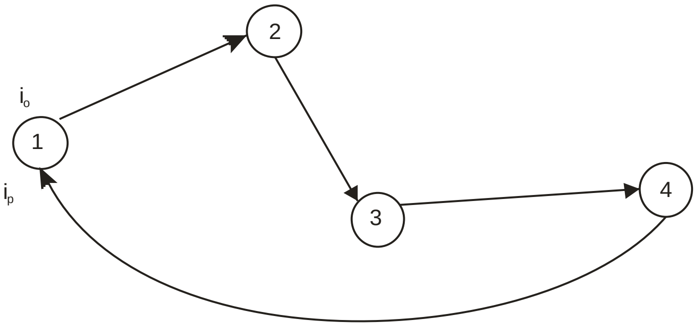


Figura 5.11. Circuito, dondei_0=i_p.

5.1.9. Ciclo: Es una cadena cerrada finita que se inicia en un vértice i y termina en dicho vértice.

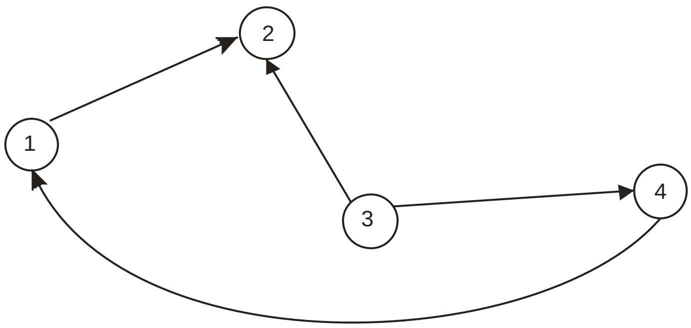


Figura 5.12. Ciclo.

Nota: Toda trayectoria es una cadena, pero no toda cadena es una trayectoria, y de todo circuito es un ciclo, lo recíproco no es necesariamente cierto.

5.1.10. Grafo orientado conexo (dígrafo orientado). Un grafo G=(X,A) se dice que es conexo, si para cada par de nodos x e y, existe una cadena desde x a y (con x≠y).

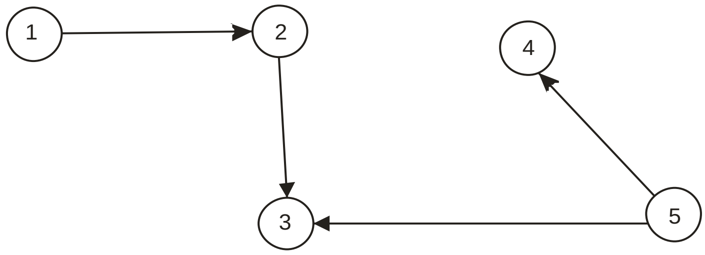


Figura 5.13. Grafo conexo.

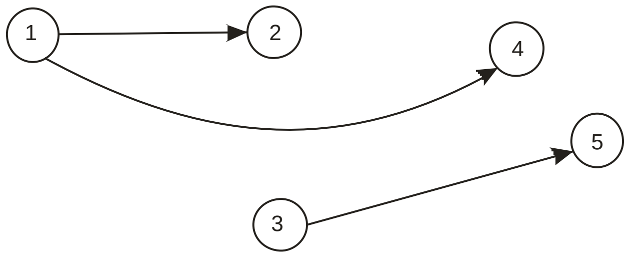


Figura 5.14. Grafo no conexo.

5.1.13. Árbol: Un árbol es un grafo conexo sin ciclos.

Árbol de expansión: Un árbol de expansión relativo al grafo G=(X,A), es un grafo que incluye a todos los vértices de G(también es conocido como árbol generada), y que obviamente es un árbol.

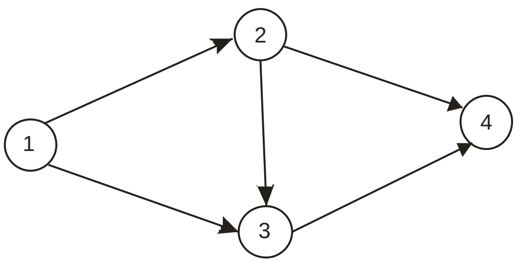


Figura 5.15. Se tiene un grafo G=(X,A), donde A={(1,2); (1.3); (2,3); (2,4); (3,4)}

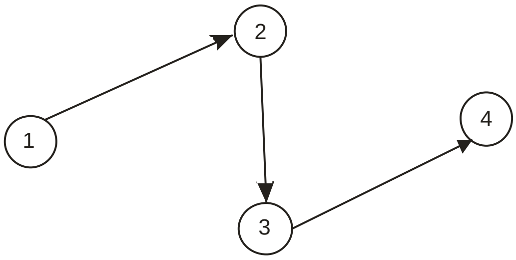


Figura 5.16. Se tiene un árbol de expansión G_{exp}=(X,A°), donde A°={(1,2); (2,3); (3,4)}

Ejemplo 5.2.Árboles y árbol generador.

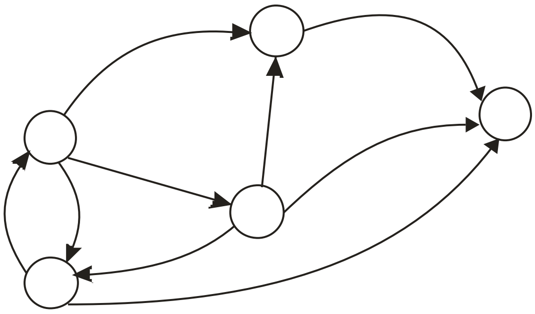


Figura 5.17. Grafo G=(X,A)

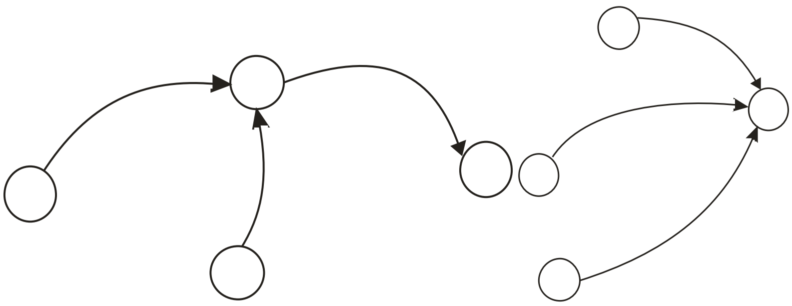


Figura 5.18. Árboles

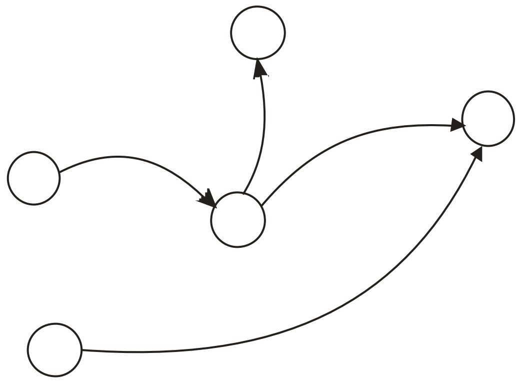


Figura5.19. Árbol de expansión relativo a G.

Observación: Notesé que el grafo G=(X,A) de la figura 5.19. es conexo.

5.1.14. Ciclo elemental: Es un ciclo, donde todos los vértices son distintos a excepción de los vértices inicial y final que coinciden.

Ejemplo 5.3. Dado el grafo siguiente:

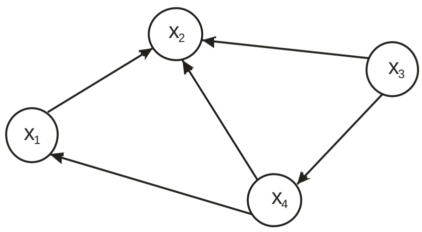


Figura 5.20. Grafo

En la**Figura5.20.** Dado el grafo se tiene que el conjunto (x_1, x_2, x_4, x_2, x_1) es un ciclo, y (x_1, x_2, x_4, x_1) es un ciclo elemental. Se puede decir que un ciclo es elemental si, y solo si no se puede deducir de otros suprimiendo arcos (aristas).

Observación: Dado el grafo G=(X,A), podemos, por la concavidad referirnos al grafo G, solo por el número de vértices o por el número de arcos. Así podemos decir sea X={ x_1, x_2, …….., x_k} un grafo de k vértices.

5.1.15. Definición: Dos vértices de un grafo son llamados adyacentes, si son extremos de un mismo arco (arista).

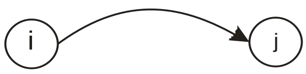


Figura 5.21. Vértices adyacentes.

5.1.16. Definición: Dos aristas de un grafo son adyacentes, si tienen un vértice común.

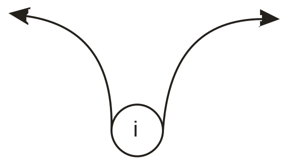


Figura 5.22. Arcos adyacentes.

5.1.17. Red de Distribución de Bienes.

Un problema simple consiste en la distribución de un producto que se encuentra almacenado en varios centros de distribución, hacia puntos donde se los demanda (en este problema no se consideran costos de transporte).Un esquema 1 representativo se muestra a continuación:

Centros de distribución (Ofertas)		Centros de demanda
Cantidades Ofertadas		**Cantidades Requeridas**
40: O_1		D_1: 25
20: O_2		D_2: 35
50: O_3		D_3: 15
25:O_4	Rutas de	D_4: 2
	Distribución	D_5: 30
		D_6: 10

El problema es distribuir la oferta hacia los centros donde se les requiera, de modo que se satisfaga la demanda.

Es frecuente valerse de una tabla matricial para esquematizar el problema de distribución. En esta tabla las entradas de filas se asocian a las ofertas y las entradas de columnas se asocian a las columnas demanda. En ella simulamos la distribución de las ofertas llevadas hacia los puntos de demanda, este proceso generan los flujos x_{ij}, donde el índice i representa el origen y j el destino.

Tabla matricial: Para el esquema anterior.

Ofertas:

						O_1
						O_2
		x_{ij}				**O_3**
						O_4
D_1	**D_2**	**D_3**	**D_4**	**D_5**	**D_6**	

Demandas

Notesé que la tabla es de orden 4x6. En general será de orden mxn, donde m es el número de centros de demanda.

Para el esquema, considerando las ofertas y demandas, y siguiendo el criterio de satisfacción de la demanda se obtiene la matriz de flujos:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**OFERTA**
1	x_{11} 25	x_{12} 15					40 – 15 - 0
2		x_{22} 20					20 - 0
3			x_{33} 15	x_{34} 20	x_{35} 15		50 – 35 - 15 - 0
4					x_{45}	x_{46}	25 – 10 - 0

					15	10	
DEMANDA	25/	35/	15/	20/	30/	10/	

Así, el esquema 1 de la red para el ejemplo, al hacer la de distribución, sería:

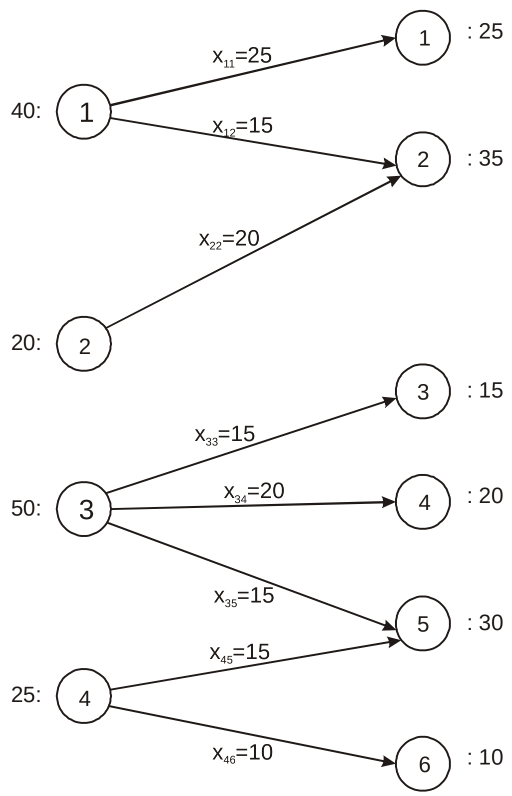


Figura 5.23. Red del esquema 1.

En el análisis de redes de transporte, los árboles tienen un papel fundamental. En especial al aplicar el método simplex para redes, los árboles de expansión (generadores) corresponden a las soluciones básicas factibles. Esto veremos en detalle más adelante.

Otras definiciones importantes:

5.1.18. Capacidad de un arco: Es la cantidad máxima del flujo (posiblemente infinita) que pueden circular en un arco.

5.1.19. Nodos fuente(origen): Son aquellos que generan flujo.

5.1.20. Nodos demanda (destino): Son aquellos donde se consume flujo (oferta)

5.1.21. Nodos de transbordo (intermedio): Son aquellos que cumplen el principio de conservación del flujo.

En la vida real se pueden identificar nodos, arcos y flujos.

NODOS	ARCOS	FLUJO
• Terminales (terrestres, aéreos, marítimos, etc) • Paraderos, intercambio de líneas de tren, metro. • Centros comerciales.	• Carreteras, calles, avenidas. • Rutas de distribución, tuberías y cables.	• Vehículos • Personas • Líquidos, etc

5.2. Resultados Grafos, Redes de transporte y el Método Simplex.

5.2.1. Definiciones:

Denotaremos por G=(X,A) a un grafo, donde X representa el conjunto de nodos (vértices), X={1,2,….,m}, y A es el conjunto de arcos (lados), así

A={(i,j),……….(s,t)} es una manera de representar los arcos. En general, una red tiene m nodos y n arcos.

Ejemplo 5.4. Consideremos la siguiente red.

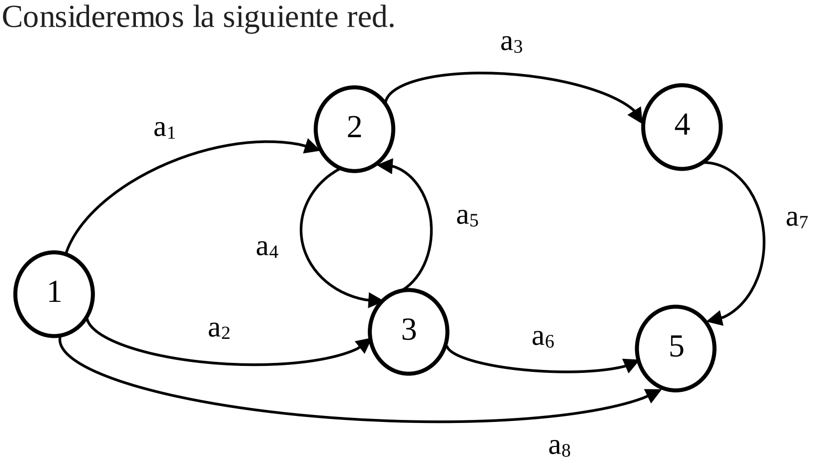


Figura 5.24.

En la **Figura5.24.** m=5 y n=8. Como vemos, aquí también se usa la notación válida para los arcos a_j, también se puede escribir e=(i,j), y se entiende que "e" es el arco incidente con los nodos i, j.

A cada nodo i se le puede asociar un número b_i.

Si $b_i>0$; se dice que en el nodo i existe oferta (o recursos disponibles).

Si$b_i<0$; se dice que el nodo i existe demanda y

Si$b_i=0$; se dice que i es un nodo de transbordo.

A cada arco (i,j) se le asocian dos números; uno x_{ij}es la cantidad de flujo sobre el arco (i,j), así podemos expresar$x_{ij}\leq\varphi(a)$, donde $\varphi(a)$ es la capacidad del arco a, donde a es el arco que incide en los vértices i y j; otro es el número c_{ij}, que representa el costo unitario de transporte en el arco.

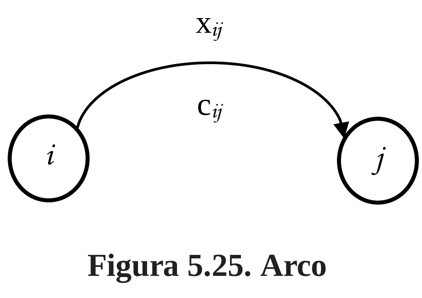


Figura 5.25. Arco

En el supuesto que la oferta total es igual a la demanda total, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$$

Se trata de la suma algebraica ya que para *i* (b_i>0, =0 ó <0).

Si $\sum_{i=1}^{m} b_i > 0$, se añade un nodo ficticio m+1 con demanda $b_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} b_i$, y con costo cero desde cada nodo de recursos hacia un nuevo nodo.

Ejemplo 5.5.

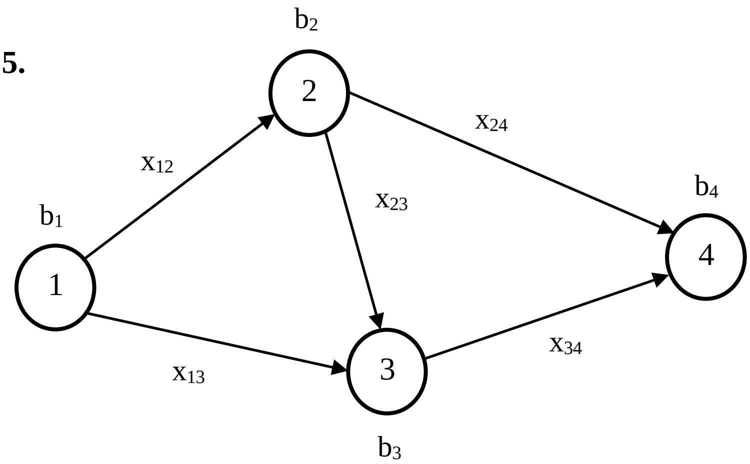


Figura 5.26.

Supongamos que x_{12}=18, x_{13}=9, x_{23}=85, x_{24}=70, x_{34}=40.

Calculemos los b_i, *i*=1, 2, 3, 4.

i=1: $b_1=x_{12}+x_{13}$=27 (En este nodo la suma se puede interpretar como siendo igual a los recursos disponibles, es decir, flujo que sale = recursos disponibles).

i=2: $b_2=\underbrace{x_{23}+x_{24}}_{\text{flujo que sale}} - \underbrace{x_{12}}_{\text{flujo que entra}}$ =155 - 18=137>0 (existe oferta)

i=3: $b_3=\underbrace{x_{34}}_{\text{F. sale}} - \underbrace{(x_{13}+x_{23})}_{\text{F. entra}}$ = -110<0 (existe demanda)

i=4: b_4= $-(x_{24}+x_{34})$=-110<0 (existe demanda)

$\sum_{i=1}^{4} b_i = b_1+b_2+b_3+b_4 = 27+137-54-110=0$. Así, en este problema se tiene equilibrio, en el sentido que la oferta total es igual a la demanda total.

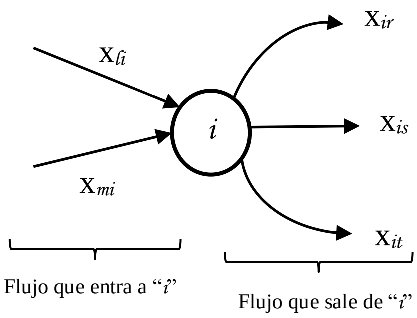


Figura 5.27.

5.2.2. Formulación del problema

PT: $\quad$ **min** $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$, $\quad x_{ij} \geq 0$…………………………..….(1)

$$\text{s.a.} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}_{\text{flujo que sale del nodo i}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} x_{ki}}_{\text{flujo que llega del nodo i}} = b_i \qquad i=1,2,\ldots..,m$$

j=1,2,…,m…...(2)

Para la Figura 5.28. se cumple, con referencia al nodo i,

$$x_{i1} + x_{i2} - x_{3i} - x_{4i} - x_{5i} = b_i$$

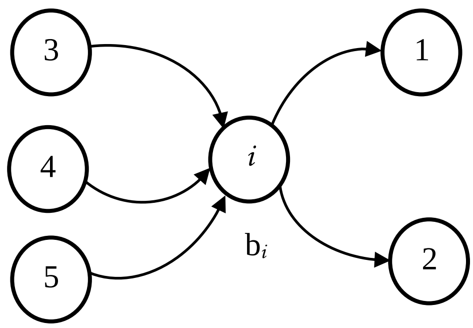


Figura 5.28.

Interpretación de la ecuación 2:

Si el flujo total que sale del nodo i es mayor que el flujo total que entra, quiere decir que en el nodo i existe oferta; de otro modo no podría salir más de lo que entra. Así en este caso $b_i>0$. Igualmente, si el flujo que sale es menor que el total que entra, que sale es menor que el total que entra. Así, en este caso $b_i>0$. Igualmente, si el flujo que sale es menor que el total que entra, quiere decir que en el nodo i existe demanda, por eso en i se queda parte de lo que entra para satisfacer, y así $b_i<0$.

Una primera matriz que aparece asociada a las redes, es conocida como matriz de incidencia.

Sea G=(X,A) un grafo que representa a una red conexa con m nodos (número de filas) y con n arcos(número de columnas).

Notación:

Sea $X=(i)_{i=\overline{1,m}}=\{1,2,\ldots\ldots,m\}$, y $A=(a_k)_{k=\overline{1,n}}=\{(i,j),\quad i\in\{1,\ldots.,m\},$ $j\in\{1,....,m\}\}$

En lo que sigue, por facilidad y para no recargar la notación, podemos usar las notaciones siguientes para un arco.

Arco: a_k, (i,j) ó $\widehat{k}$.

La matriz asociada al grafo lo seguiremos representando por la letra mayúscula A.

5.2.3. Matriz incidencia:

Sea $A=[a_{ij}]$ la matriz de un grafo, entonces se define:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ si i es nodo inicial del arco } \widehat{j}. \\ -1, \text{ si i es nodo final del arco } \widehat{j}. \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 5.6. Sea el grafo G con m=5 y n=8.

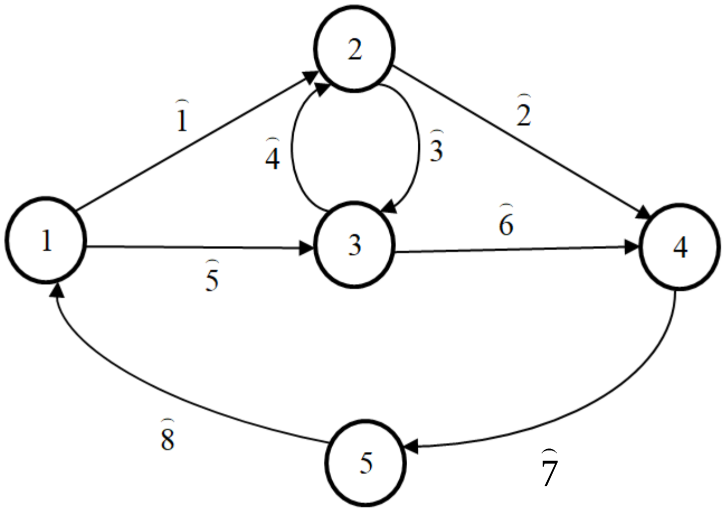


Figura 5.29.

Determinemos de la Figura5.29. la matriz de incidencia del grafo G.

De la definición se obtiene:

$$A_{5x8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede determinar con facilidad que el rango A es 4 (4=m-1. m=5). Es decir la matriz del grafo es de rango incompleto.

Esta matriz, debido a su relación con las redes y por la forma de obtenerla, también se le conoce como matriz de incidencia "nodo-arco".

5.2.4 Matriz de incidencia Arco-Ruta:

Es otra matriz relacionada a una red. Se define considerando la pertenencia o no de un arco a una ruta O-D.

Así, si denotamos por $A = [\delta_{\hat{i},r}]$, definimos por

$$\delta_{\hat{i},r} = \begin{cases} 1, \text{ Si } \quad r \text{ (ruta r).} \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $\hat{i}$ es el arco i-ésimo y r es una ruta $r \in R$.

Ejemplo 5.7. Considere el grafo G siguiente:

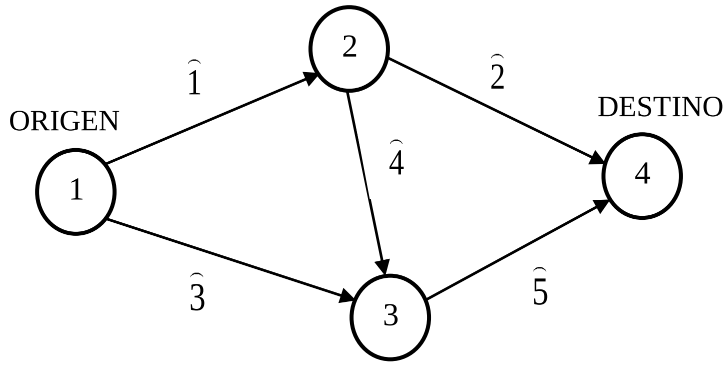


Figura 5.30.

Consideremos las rutas Origen- Destino:

$r_1 : \hat{1}, \hat{2}$ $\qquad$ $r_3 : \hat{3}, \hat{5}$ $\qquad$ $r_2 : \hat{1}, \hat{4}, \hat{5}$

Se tiene:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3 \leftarrow \text{Rutas} \end{array} \\
A= & \begin{array}{c} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \\ \hat{4} \\ \hat{5} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \text{Arcos}\uparrow &
\end{array}
$$

En el ejemplo 5.8. ilustraremos como el vector de costos de ruta se puede expresar en función del vector de costo en arcos, conocida la matriz arco-ruta.

Ejemplo 5.8. Sea el par w(O-D), con origen i=1 y destino j=6 y las rutas.

$r_1 : \hat{1}, \hat{3}, \hat{7}$ $\quad ; \quad$ $r_2 : \hat{1}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}$ $\quad ; \quad$ $r_3 : \hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}$;

$r_4 : \widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{7}$; $r_5 : \widehat{2}, \widehat{6}, \widehat{8}$.

Los costos de viaje en los arcos representan en la red siguiente:

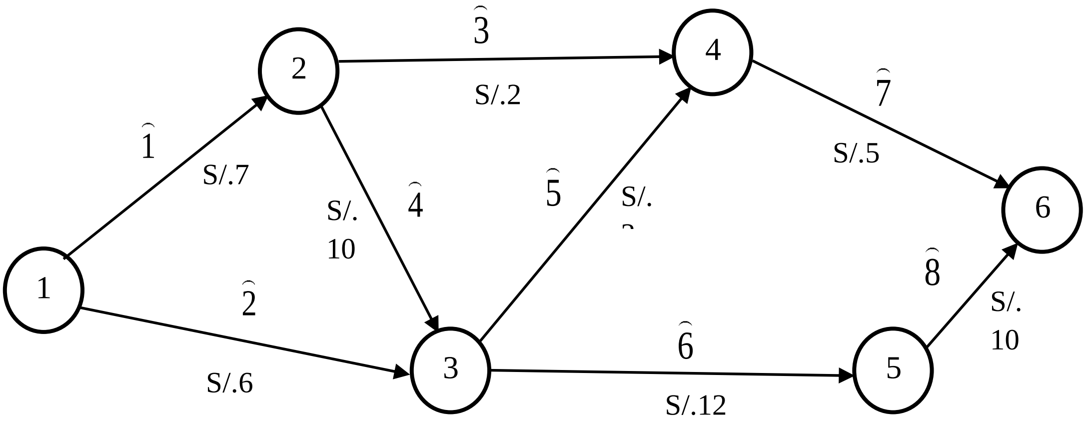


Figura 5.31.

Conjunto de rutas R={ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 }. Se asume que el costo de viaje en una ruta es la suma de los costos unitarios en los arcos. Esto es, si C: vector de costo de ruta y c: vector de costos en arcos, entonces

$$C=A^Tc$$

Donde A es la matriz de incidencia arco – ruta.

Matriz arco- ruta para la red del ejemplo 5.8.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
$\widehat{1}$	1	1	1	0	0
$\widehat{2}$	0	0	0	1	1
$\widehat{3}$	1	0	0	0	0
$\widehat{4}$	0	1	1	0	0
$\widehat{5}$	0	1	0	1	0

$\widehat{6}$	0	0	1	0	1
$\widehat{7}$	1	1	0	1	0
$\widehat{8}$	0	0	1	0	1

Esta es la matriz A de 8x5 (8: número de arcos; 5: número de rutas).

Podemos verificar que: $$C = \begin{pmatrix} C_{r_1} \\ C_{r_2} \\ C_{r_3} \\ C_{r_4} \\ C_{r_5} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 10 \\ 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \ldots\ldots.(*)$$

De la ecuación(*) podemos obtener, por ejemplo el costo de ruta

$r_3 : C_{r3} = 7+10+12+10=39$

5.2.5. Matriz de incidencia Origen-Destino/Ruta:

Esta matriz aparece cuando se distribuye flujo de viaje en rutas que conectan pares origen-destino w.

Denotamos por $\psi=[\rho_{w,r}]$ la matriz O-D/ ruta, se define como:

$$\rho_{w,r} = \begin{cases} 1, \text{ si la ruta r conecta el par w-origen/destino} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

El orden de ψ es mxn, donde m es el número de pares O/D w y n es el número total de rutas que conectan O-D.

Ejemplo 5.9.

Sea G el grafo con cinco nodos (m=5) y seis arcos (n=6), dando el nodo (1) es un origen, y los nodos (4) y (5) son destinos.

Representación

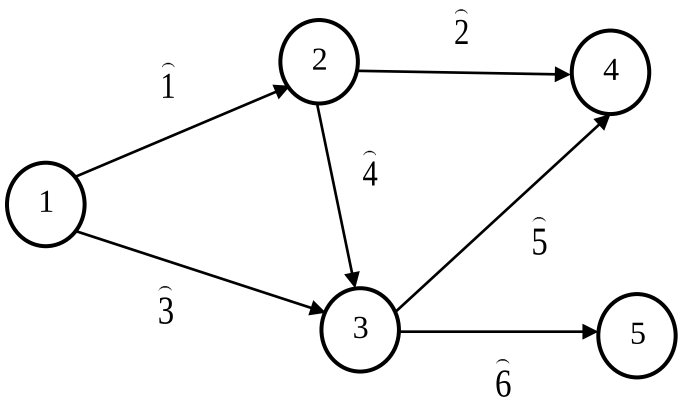


Figura 5.32.

Tenemos dos pares w-origen/destino: $w_1 \cong$ (1-4), $w_2 \cong$ (1-5).

Rutas

$$\text{Para } w_1 : \begin{cases} r_1 : \widehat{1}, \widehat{2} \\ r_2 : \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{5} \\ r_3 : \widehat{3}, \widehat{5} \end{cases}$$

$$\text{Para } w_2 : \begin{cases} r_4 : \widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{6} \\ r_5 : \widehat{3}, \widehat{6} \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{array}{cc} & \text{rutas}: \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \\ \psi = & \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & w \end{array}$$

Observación: Una matriz A' equivalente a la matriz A se puede obtener para el grafo del siguiente modo.

El grafo anterior es:

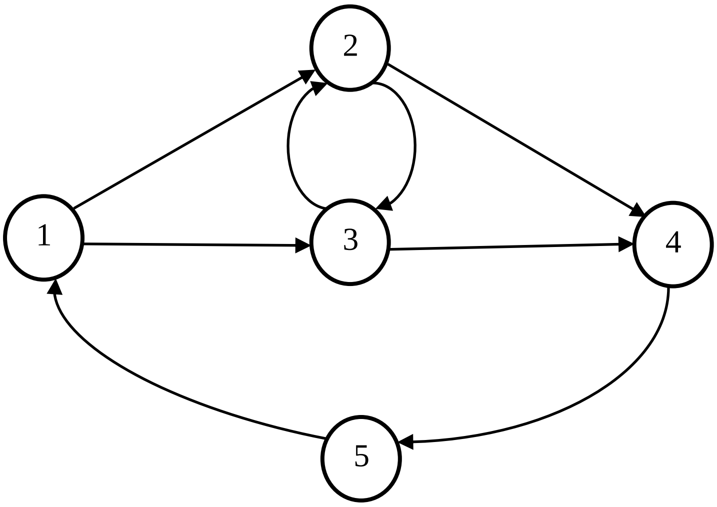


Figura 5.33.

Para este grafo obtendremos una matriz equivalente a la matriz de incidencia obtenida anteriormente en el ejemplo 5.8.

Procedimiento: Para cada $i \in$ X se consideran los arcos de salida. Estos arcos de salida serán las columnas de A' que se va a formar y que resultará equivalente a la matriz A.

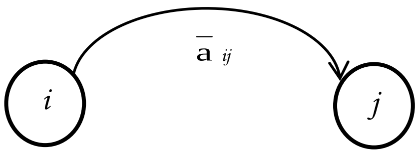


Figura 5.34.

$\bar{a}_{ij}$: Notación para el arco de salida desde el nodo *i* hasta *j*.

Cada columna de la matriz A' es dada por:

$$\bar{a}_{ij} = e_i - e_j$$

Donde e_j es el *j*-ésimo vector canónico. Con frecuencia y por facilidad al arco de salida $\bar{a}_{ij}$ se puede denotar simplemente (*i,j*).

Ahora tenemos:

$$\begin{array}{cc} \text{Arcos:} & \begin{array}{cccccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,2) & (3,4) & (4,5) & (5,1) \end{array} \\ A' = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 5.10.

$$(1,2) = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3,2) = e_3 - e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y A' son equivalentes. Se tiene

$$r(A') = m - 1 = r(A),$$

En general, para grafos de redes (en particular para problemas de flujo con costo mínimo), se tiene: $r(A) = m - 1$,

donde A es una matriz de orden mxn ($m \leq n$).

Como ya fue definido, un árbol es un grafo conexo sin ciclos, y un árbol de expansión o también llamado generador, de un grafo G=(X, A) es un árbol que contiene al conjunto X de vértices de G (donde A es el conjunto de arcos del grafo).

Ejemplo 5.11.

Sea G=(X, A) el grafo de la figura 5.35. siguiente:

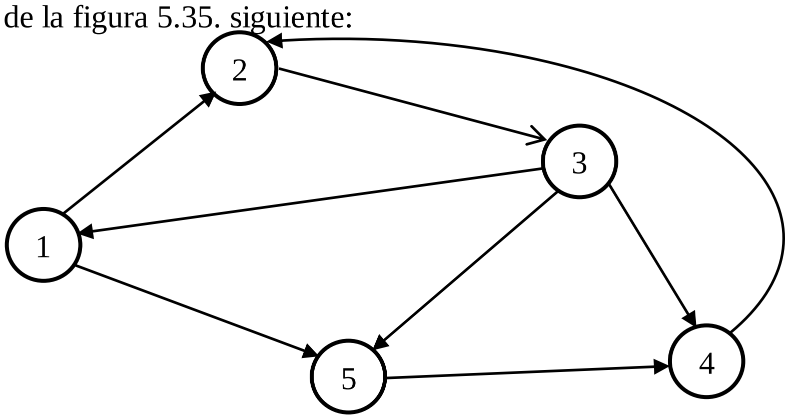
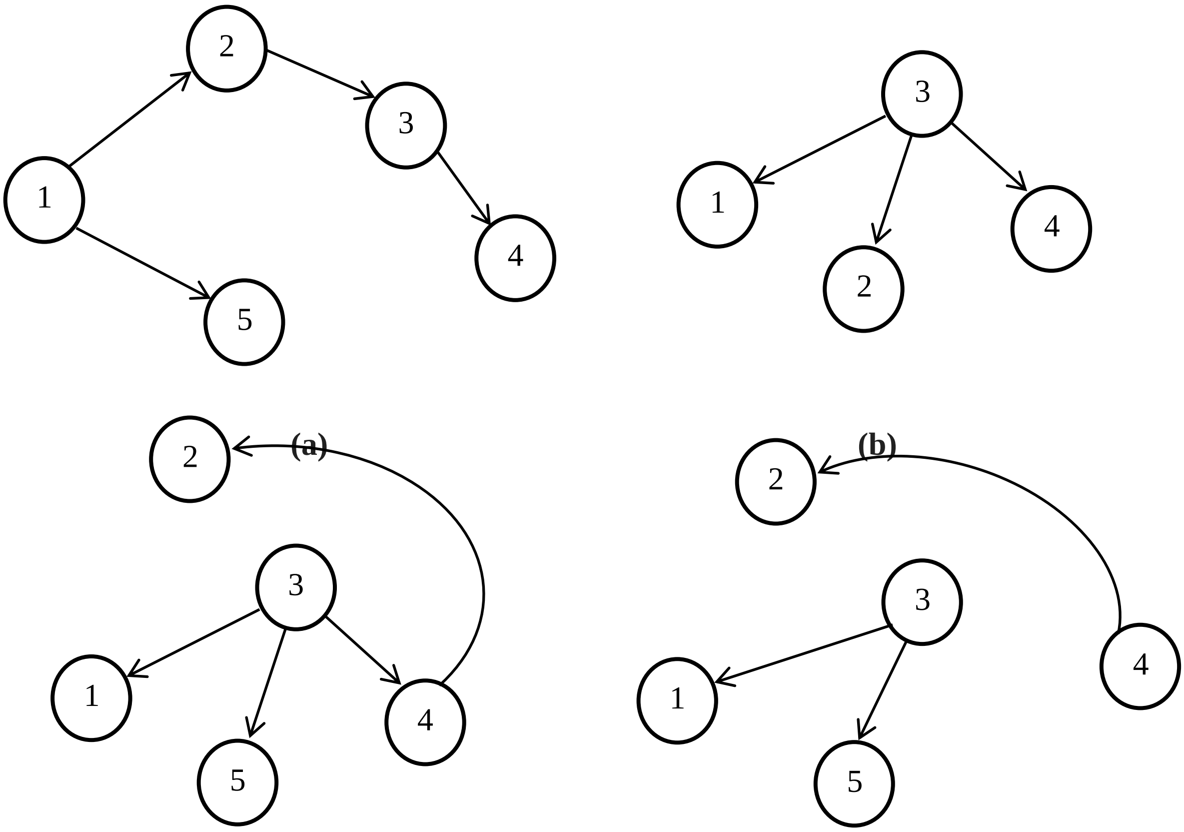


Figura 5.35. Grafo con 5 nodos y 7 arcos.

De los siguientes grafos, sólo (a) y (c) son árboles generadores.



(c) (d)

Figura 5.36.

Notesé que el grafo (d) contiene los cinco vértices del grafo G pero no es un árbol.

5.2.6. El método simplex y árboles de expansión con Raíz

Sabemos de programación lineal, que un formato muy familiar es el siguiente:

PL: minimizar $Z = C^T x$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

donde A es una matriz mxn ($m \leq n$), $b \in \mathbb{R}^m$.

El método simplex desarrolla todo un procedimiento matemático que da fundamento a un algoritmo, llamado "algoritmo simplex" el cual encuentra una solución (caso factible) para el problema de programación lineal (PL).

El algoritmo simplex comienza con la matriz A obtenida de las restricciones del problema, suponiendo que r(A) = m.

Luego, encuentra una matriz básica factible inicial. En el caso de redes, sabemos que la matriz A que representa al grafo de la red es el rango incompleto, esto es

$$r(A) = m - 1$$

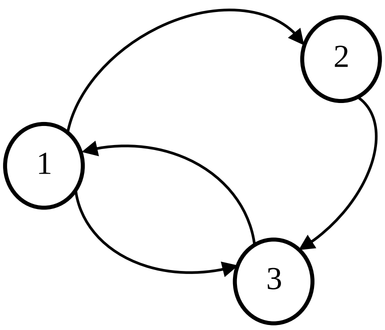
Para lograr r(A) = m se introduce una variable artificial que corresponde a un arco que sale del nodo i=m y no tiene extremo final (se puede tomar cualquier otro nodo $i \neq$m, y se le llama arco raíz).

Así, se genera la nueva matriz

$$A = [A_0 \vdots e_m]; \text{ tal que}$$

$r(A) = r(A_0, e_m) = m$, donde A_0 es la matriz tal que $r(A_0) = m-1$.

Ejemplo 5.12. Sea G el grafo de la figura:



$$A_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (3,1) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 5.37.

Notesé que el número de nodos del grafo da el número de filas de A_0, además

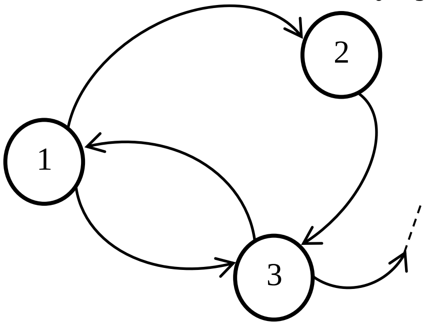
$$r(A_0) = 2 = m - 1 = 3 - 1$$

El nodo al cual se asocia una raíz, se llama nodo raíz.

Observación: La matriz dada en A_0 es equivalente a la matriz de incidencia. Así, se le puede obtener usando dicha definición.

Observación: Un grafo con un arco raíz se llama grafo con raíz.

A continuación formamos $A = [A_0 \vdots e_3]$



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (3,1) & (3,\infty) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

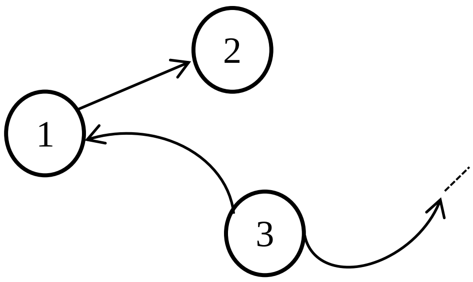
Figura 5.38.

Se cumple que r(A) = 3.

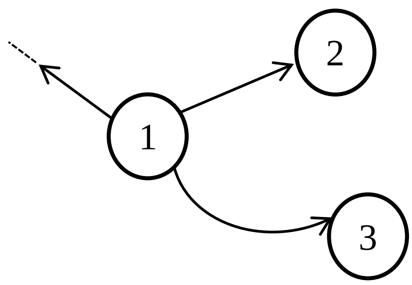
5.2.7. Caracterización de una matriz básica.

Una matriz básica de A es caracterizada por un árbol de expansión con raíz.

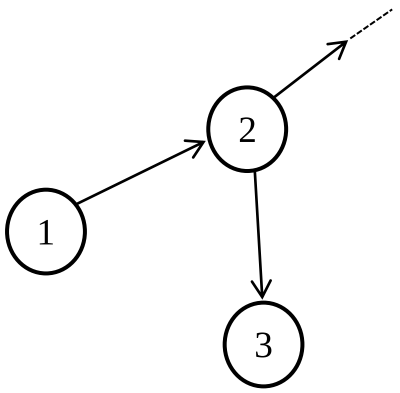
Ejemplo 5.13. En el ejemplo 5.11, se tienen las siguientes matrices básicas, correspondientes a árboles con raíz.



$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1,2) & (3,1) & (3,\infty) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1,2) & (1,3) & (1,\infty) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$
B_3 = \begin{array}{ccc} (1,2) & (2,3) & (1,\infty) \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ B_3 = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} (1,2) & (2,3) & (1,\infty) \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Arboles con raíz $\underset{\text{caracterizan a}}{\leftrightarrow}$ Matrices básicas.

Figura 5.39.

Vemos que cada matriz básica tiene asociado un árbol de expansión con raíz que lo caracteriza. Es decir una matriz básica es caracterizada por un árbol de expansión (árbol generador) y una raíz.

Triangularidad: Cada matriz básica B es triangular, o puede ser llevada a tal forma por operaciones elementales.

Como los valores de los elementos de B son +1,-1 ó 0, entonces cada una de las variables básicas tomará valores enteros siempre que los b_i sean enteros ($b=[b_i]$).

5.2.8. Aplicación: Método simplex para problemas de flujos en redes.

Vamos a considerar el caso de minimización en programación lineal.

Recordemos que (z_j- c_j) son los coeficientes de las variables no básicas. Además, cuando se tiene un problema de minimización, el criterio de parada es:

"z_j- $c_j \leq 0$ para todo j" (son los coeficientes en la fila de la función objetivo).

En general, el método se puede expresar como sigue:

Paso 1°. Encuentre una solución básica factible inicial.

Paso 2°. Calculese (z_j- c_j) para cada variable no básica X_j.

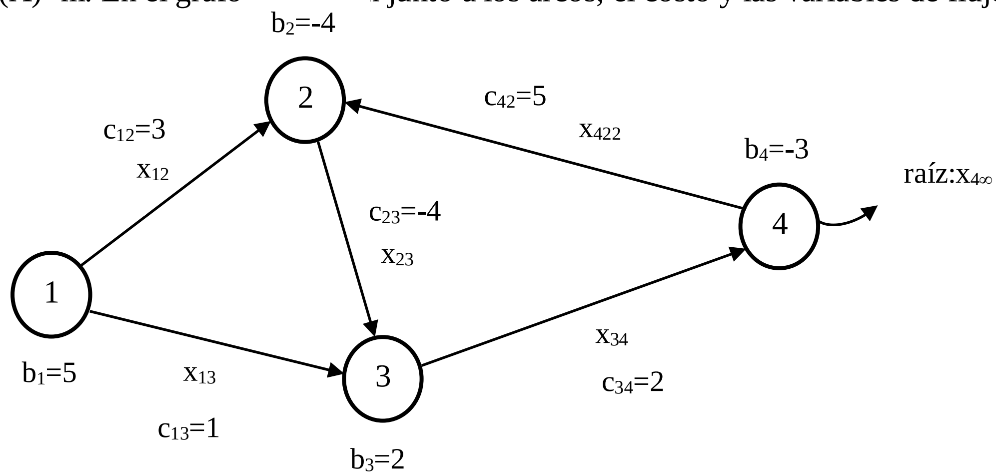
Si z_j- $c_j \leq 0$, $\forall j$, el proceso termina.

Si existe j tal que z_j-c_j> 0, escoger la variable no básica que entra a la base, y la variable básica que sale. Luego se realiza el pivoteo.

Apliquemos estos pasos al problema 5.2.9.en redes. Sea dado el siguiente problema presentado en el ejemplo 5.4, pero aquí incluimos una serie de precisiones para mayor entendimiento.

5.2.9. Problema de transporte fundamentado en la teoría de grafos y árboles.

Considere el siguiente grafo con raíz. La raíz se añade al grafo para lograr que r(A)=m. En el grafo se indican junto a los arcos, el costo y las variables de flujo.



La matriz asociada a este problema es de orden 4x6.

$$
\begin{array}{rcccccc}
\text{Arcos:} & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (3,4) & (4,2) & (4,\infty) \\
A = & \multicolumn{6}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Es fácil ver que esta matriz tiene r(A)=4 y que cada columna ha sido obtenida por la diferencia de dos vectores canónicos. Por ejemplo, la columna (2,3) es:

$$(2,3)= e_2 - e_3$$

La formulación del problema es:

Minimizar $Z = 3x_{12} + x_{13} - 4x_{23} + 2x_{34} + 5x_{42}$

s.a.

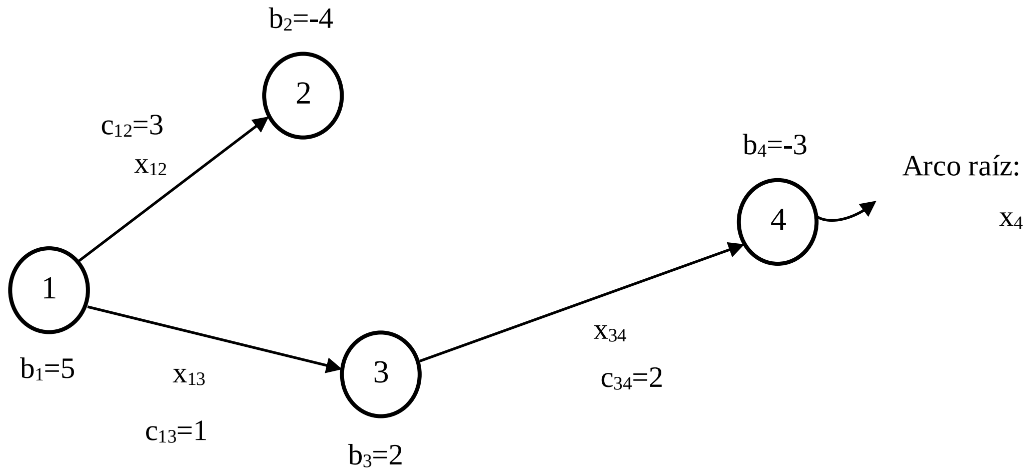
$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} &= 5 \\ x_{23} - x_{12} - x_{42} &= -4 \\ x_{34} - x_{13} - x_{23} &= 2 \\ x_{42} - x_{34} &= -3 \end{aligned}$$

Vamos a obtener el flujo que debe circular por la red a un costo mínimo.

Así, resolvemos el problema formulado; lo cual haremos usando árboles generados del grafo.

Procedimiento:

Paso 1: Elegimos un árbol generador inicial con raíz en i=4 (la elección es arbitraria, pero debe contener al arco raíz).



La matriz básica asociada es una submatriz de A,

$$
\begin{array}{cccc} (1,2) & (1,3) & (3,4) & (4,\infty) \end{array}
$$

$$
B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Se tiene la siguiente ecuación:

$$
B_0 x_B = b
$$

Donde x_B es la solución básica y b es el vector asociado a los nodos.

Como $B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos

$$
x_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Es la solución básica inicial.

Nota:

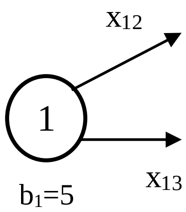
Esta solución también puede ser obtenida directamente a partir del árbol básico generador con raíz; para esto, en cada nodo “*i*” debe cumplirse:

$$
\sum x_{ij} - \sum x_{ki} = b_i
$$

Donde x_{ij} representa los flujos que salen del nodo *i* y x_{ki} representa el flujo que llega al nodo *i*.

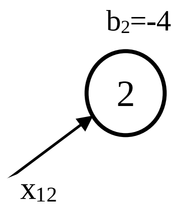
Procedemos a efectuar para el problema.

1. Para i=1:



$$x_{12} + x_{13} = 5 = b_1$$

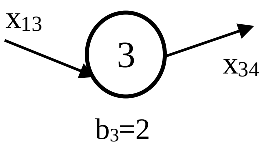
2. Para i=2:



$$-x_{12} = -4 = -b_2$$

Entonces x_{12} =4 y x_{13} =1

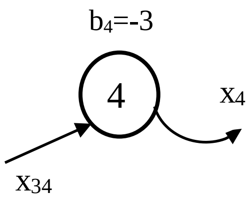
3. Para i=3:



$$x_{34} - x_{13} = 2 = b_3$$

Entonces x_{34} =3

4. Para i=4:



$$x_4 - x_{34} = -3$$

Entonces $x_4 = 0$

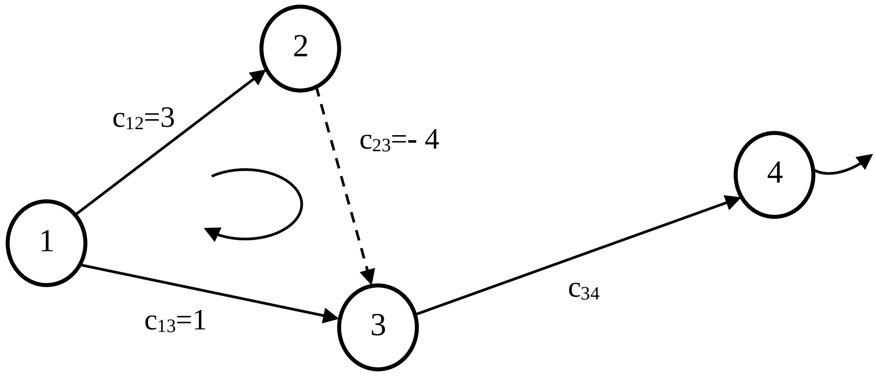
Por tanto, tenemos $x_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{34} \\ x_4 \end{bmatrix}$

Para ver si esta solución es óptima, vamos al paso 2, en el que analizamos el signo de los coeficientes de las variables no básicas: x_{23} y x_{42}.

Paso 2:Cálculo de los coeficientesz_{ij}-c_{ij}para cada variable no básica; es decir; de

$$z_{23} - c_{23} \qquad y \qquad z_{42} - c_{42}$$

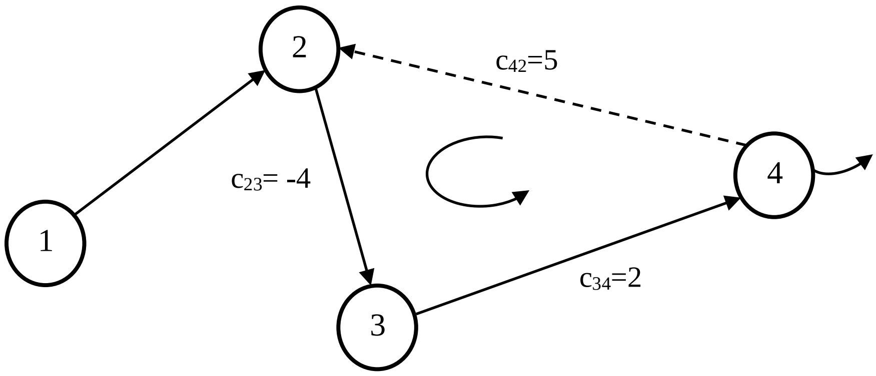
a. Para x_{23}. Si ingresa x_{23}, entrará al árbol generador el arco (2,3) y se formará un ciclo.



Cálculo de z_{23}= c_{13} - c_{12} = 1 – 3 = -2 . Luego,

$$z_{23} - c_{23} = -2 - (-4) = 2 > 0$$

b. Para x_{42}. Si ingresa x_{42}, entrará al árbol generador el arco (4,2) y se forma un ciclo.



Cálculo de z_{42}

$$z_{42} = -c_{23} - c_{34} = -(-4) - 2 = 2 \text{ . Luego,}$$

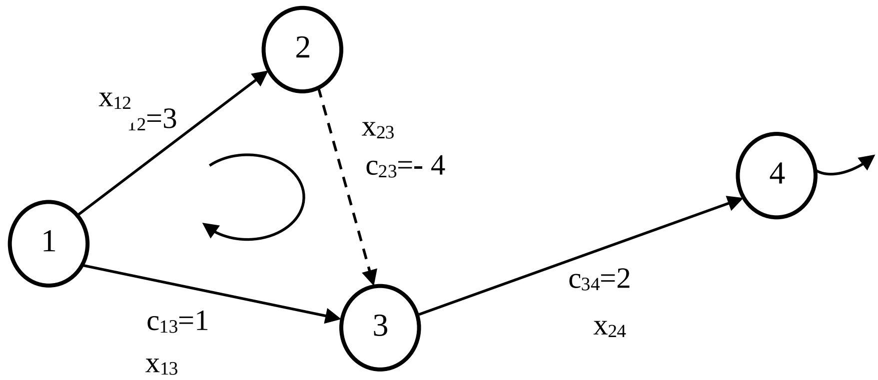
$$z_{42} - c_{42} = 2 - 5 = -3 < 0$$

Vemos que solo el coeficiente de x_{23} es positivo. Debemos realizar un cambio de base (cambio de variable básica).

Como $z_{23} - c_{23} = 2 > 0$ (único), entonces x_{23} será la variable que debe ENTRAR en la base y por consiguiente el arco (2,3) será el que ingrese en el árbol y la columna (2,3) entrará en la matriz básica.

Variable que SALE. Notemos que debe salir una variable básica, con lo que saldrá un arco del árbol generador para que no se forme un ciclo.

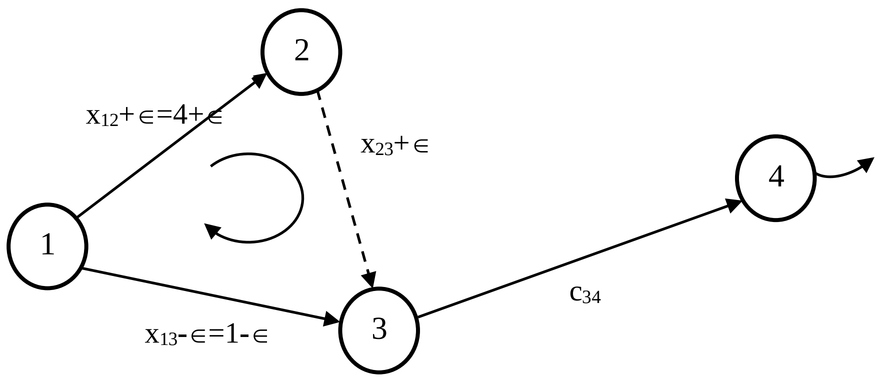
Observe la figura siguiente, donde entra x_{23}.



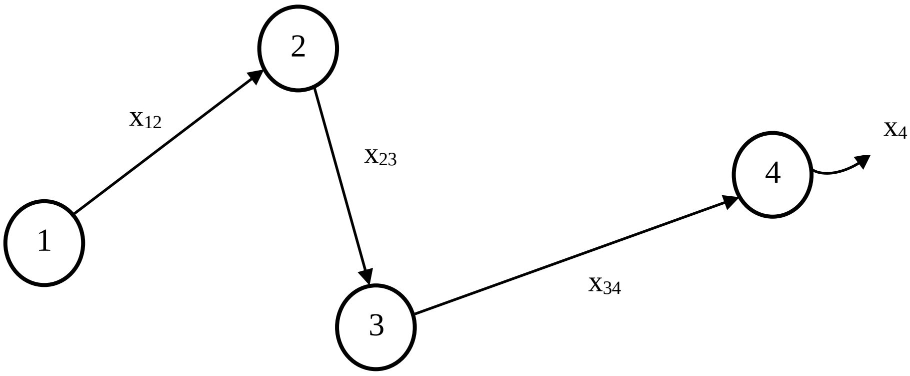
Vemos que al entrar x_{23} debe salir x_{12} ó x_{13}.

¿Qué hacer? Veamos:

1. El ciclo tiene la orientación del arco que ingresa.
2. Como la variable que ingresa estaba fuera de la base tenía valor cero. Entonces, lo incrementamos en un valor positivo $\in$>0, y para balancear el ciclo, incrementamos en el mismo valor los arcos que tienen mismo sentido del arco que ingresa (2,3) y disminuimos a los arcos de sentido contrario (ver figura).

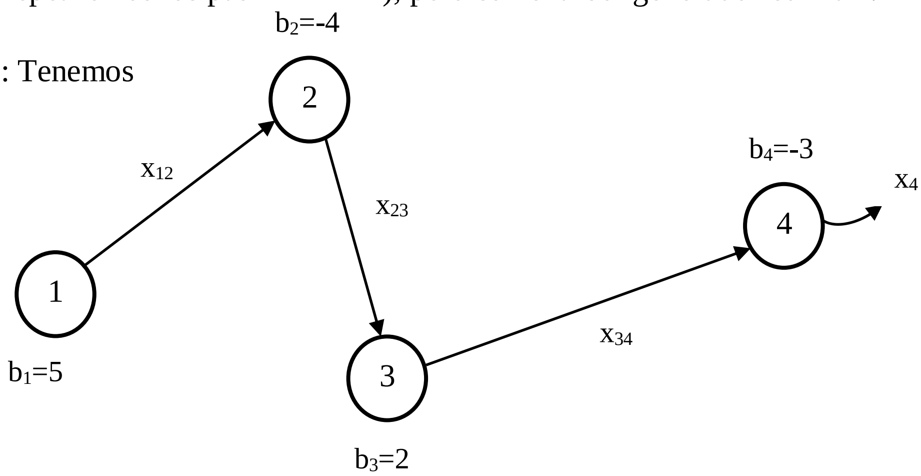


3. Sale la variable que más rápidamente se anula con el ingreso de x_{23} y $\in$>0. Así, como la variable x_{13} es la que anula más rápidamente, será esta la que SALE de la base, equivalentemente sale el arco (1,3). El nuevo árbol generador básico es:



Ahora repetiremos los pasos (1) y (2), pero con el árbol generador con raíz.

Paso 1: Tenemos



La matriz correspondiente es una submatriz de A,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} (1,2) & (1,3) & (3,4) & (4,\infty) \end{array} \\
B = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Luego, la solución básica inicial se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix};$$

Como $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

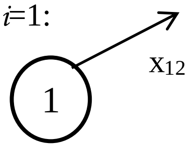
$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

Obtenemos la solución básica inicial $\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esta solución también se puede obtener del árbol básico con raíz, para lo cual en cada nodo "*i*" debe cumplirse:

$$\sum x_{ij} - \sum x_{ki},$$

Donde x_{ij} representa los flujos que salen del nodo *i* y x_{ki} el flujo que llega al nodo *i*. Así;

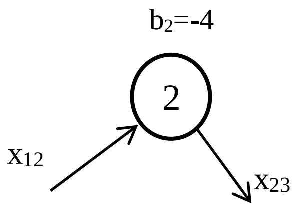
1. Para *i*=1:



Entonces $x_{12} = 5 = b_1$,

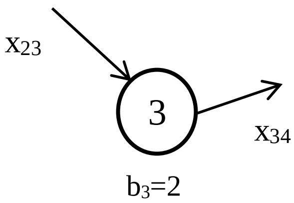
Luego $x_{12}=5$.

2. Para *i*: $b_1=5$



, entonces $x_{23} - x_{12} = -4 = b_2$, Luego $x_{23} = 1$

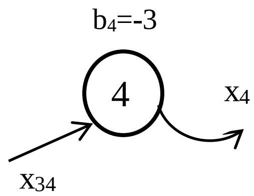
3. Para i=3:



, entonces $x_{34} - x_{23} = 2 = b_3$,

Luego x_{34} =3

4. Para i=4:



,entonces $x_4 - x_{34} = 3 = b_4$,

Luego x_4 =0

Se ha obtenido la solución básica

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que es la misma ya obtenida. Veamos si esta solución es la óptima.

Paso 2: Procederemos a calcular "z_{ij}-c_{ij}" para cada variable no básica, la expresión anterior es el coeficiente de la variable x_{ij} no básica.

En el problema, las variables no básicas corresponden a los arcos no básicos (no pertenecen al árbol generador). Esto son:

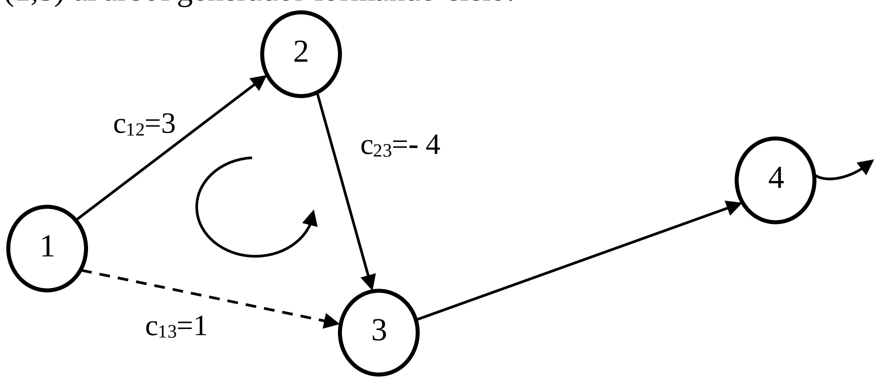
$$x_{13} \quad y \quad x_{42}$$

Por lo tanto, calcularemos $(z_{13} - c_{13})$ y $(z_{42} - c_{42})$ y veremos que signo tienen. Luego, si

"$\forall i,j$ con $i\in$ {1,4} y $j\in${3,2} se tiene que z_{ij}-c_{ij}≤0, entonces el proceso TERMINA"

En caso contrario, ENTRA en la base la variable no básica tal que z_{ij}-c_{ij}≥0 Es claro que en el último caso esto equivale al ingreso de un arco no básico a árbol generador, veremos que con esto se formará un ciclo, por esta razón, tendrá que salir del árbol generador un arco básico.

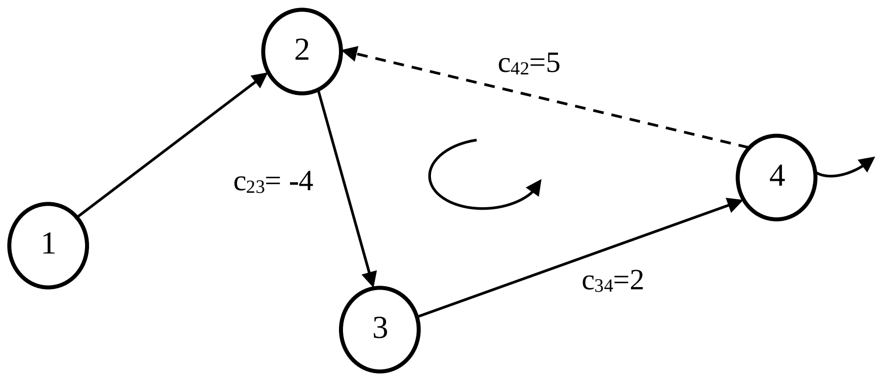
Iniciamos con la variable no básica x_{13}. Si x_{13} ingresa, significa que entra el arco (1,3) al árbol generador formando ciclo.



Se expresa z_{13} en función de los costes básicos.

$$z_{13} = c_{23} + c_{12} = -4 + 3 = -1 \qquad \text{y} \qquad z_{13} - c_{13} = -1 - 1 = 2 < 0$$

Para x_{42}, al ingresar también debe ingresar el arco (4,2) generando ciclo.



Tenemos

$$z_{42} = c_{23} - c_{34} = -(-4) - 2 = 2 \qquad y \qquad z_{42} - c_{42} = 2 - 5 = -3 < 0$$

Por lo tanto, la solución actual es óptima.

5.3. Flujo con costo mínimo en una red.

El problema que estudiaremos trata de una distribución de un producto utilizando rutas en una red de transporte, hacia destinos donde existe demanda de dicho producto. En este caso, a diferencia del caso tratado al final del capítulo uno, se tendrá en cuenta los costos de transporte.

5.3.1. El problema general de transporte

Consideremos m puntos de origen (ofertas), donde el origen i tiene la oferta O_i y n puntos de destino, donde j tiene la demanda D_j. Se asume que $O_i, D_j \geq 0$.

Con cada arco (i,j) estaasociada un costo unitario C_{ij} de transporte. El problema consiste en determinar el patrón óptimo de unidades a transportar desde los orígenes a los destinos a un costo mínimo, de modo que se satisfaga las demandas.

Esquema

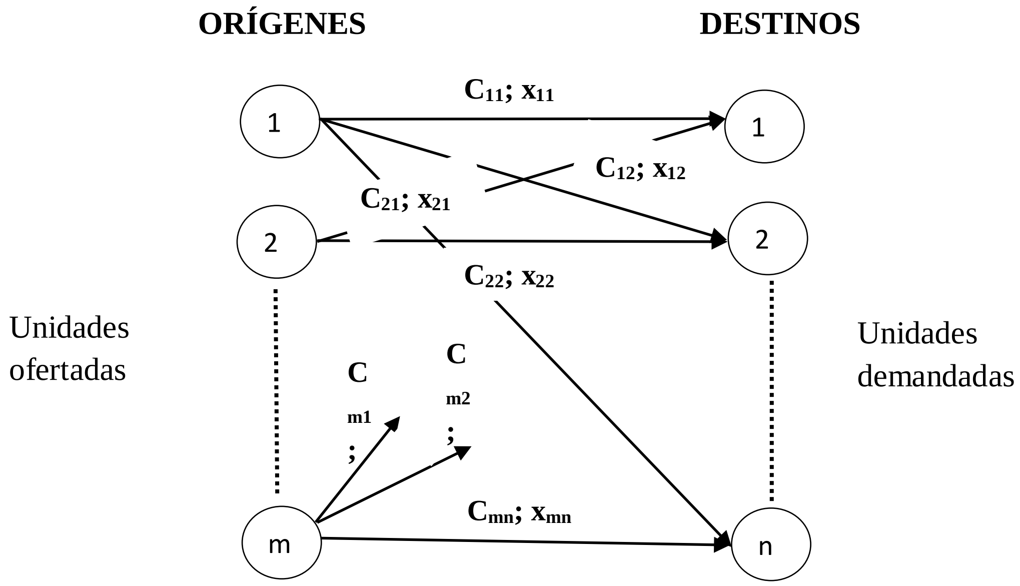


Figura 5.39. Esquema de la oferta y demanda

Consideremos que se trata de un problema equilibrado, esto es, que se cumple: la oferta total es igual a la demanda total:

$$\sum_{i=1}^{m} O_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

5.3.2. Algoritmo de transporte

Método de costo mínimo se trata de transportar (o distribuir) un producto que se encuentra en m orígenes hacia n destinos a un costo mínimo y de modo que se satisfaga la demanda que existe en aquellos destinos.

Vamos a detallar como actúa uno de los métodos llamado transporte. Este método en una primera fase halla una solución inicial (asignación inicial). Está solución inicial puede hallarse por el método del costo menor, o también de la esquina noroeste o el método de Vogel. Nosotros asumiremos el de costo menor.

Ejemplo5.14. Se tienen tres almacenes de un mismo producto que van a ser transportadas a cuatro tiendas. El transporte debe ser efectuado a un menor costo posible.Así, se tiene la siguiente red:

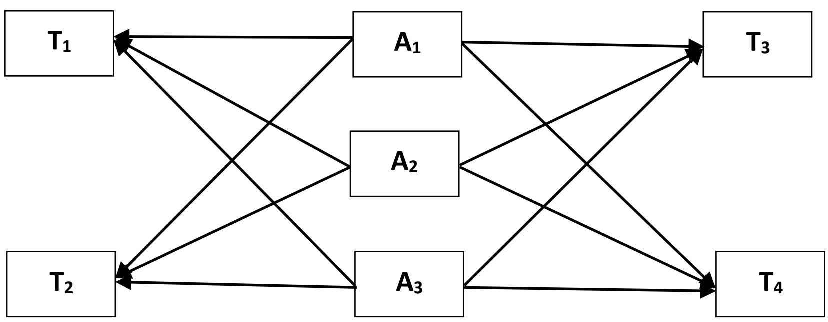


Figura 5.40.Red Representativa de tres almacenes y cuatro tiendas a donde se transportará el producto.

El método simplex para problemas de transporte, en general opera como sigue:

Paso 1: Se encuentra una solución básica factible inicial.

Paso 2: Se calcula (z_{ij}-c_{ij}) para cada variable no básica. Parar o seleccionar una columna que entra a la base (variable).

Paso 3: Determinar la columna (variable) que sale de la base.

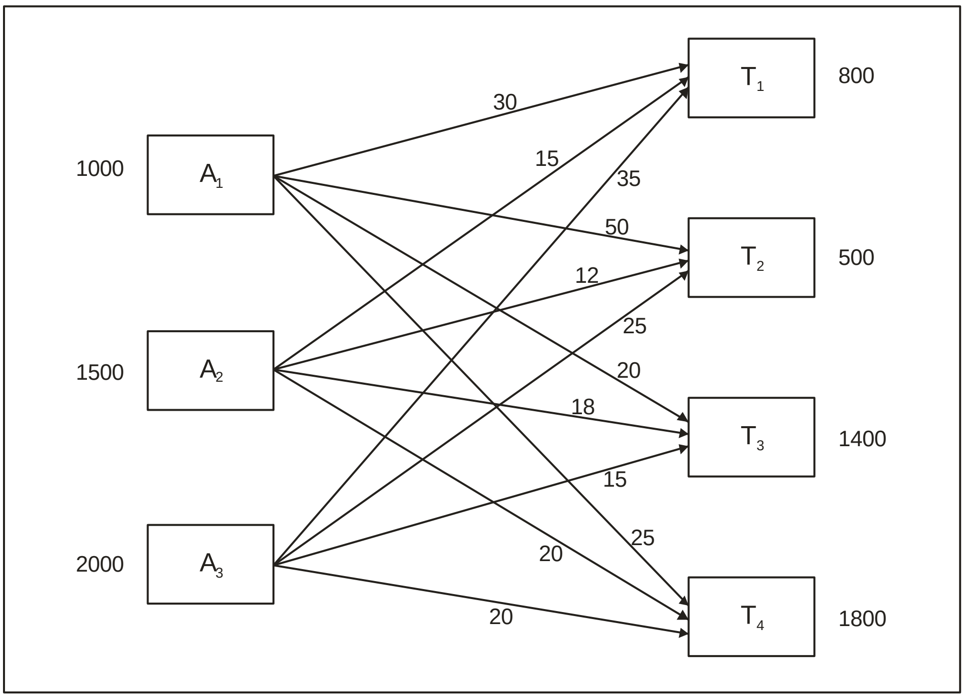
Paso 4: Obtener la nueva solución básica factible y repetir el paso 2.

En el ejemplo5.14.El grafo da lugar a una tabla matricial de orden 3x4 (número de filas por número de columnas). Esta tabla representará los tres almacenes y las cuatro tiendas.

En el problema 5.2.3. se representará la siguiente matriz con 3 filas y 4 columnas representamos los almacenes y las tiendas respectivamente.

5.2.3. Problema

Supongamos que una empresa productora de "Jeans" tiene tres almacenes A_1, A_2 y A_3, desde los cuales debe enviar Jeans a cuatro tiendas T_1, T_2, T_3 y T_4. Las ofertas, las demandas y los costos de envío se dan en el siguiente grafo.



Para planear un modelo lineal que representa el problema definimos.

x_{ij}: Cantidad de jeans que se envía desde el origen A_i, i=1, 2, 3 a cada destino T_j, j=1, 2, 3, 4.

El modelo lineal para este problema es el siguiente:

$$\min Z= 30x_{11}+ 50x_{12}+ 20x_{13}+ 25x_{14}+ 15x_{21}+ 12x_{22}+ 18x_{23}+ 20x_{24}+ 35x_{31}+ 25x_{32}+ 15x_{33}+ 20x_{34}$$

sujeto a.

$$\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & & & & & & & & & & =1\,000 \\
 & & & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & & & & & & & =1\,500 \\
 & & & & & & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & & & & = 2\,000 \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & & = 800 \\
x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & & & = 500 \\
x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & & & & = 1\,400 \\
x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & & & & & = 1800
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

En este caso las restricciones se pueden escribir con igualdad porque la suma de ofertas es igual a la suma de demandas.

Para observar la estructura de la matriz A escribimos el modelo de la siguiente forma:

$$\min Z = (30, 50, 20, 25, 15, 12, 18, 20, 35, 25)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}$$

sujeto a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 2000 \\ 800 \\ 500 \\ 1400 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i=1,2,3 \; ; \; j=1,2,3,4$$

En este problema hay 3 orígenes, m=3 y 4 destinos, n=4. La matriz A tiene 3+4 filas y 3x4 columnas. Se puede comprobar que el rango de la matriz es m+n-1=3+4-1=6.

La forma matricial para el problema es la siguiente:

	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**OFERTA**
A_1	30	50	20	25	1 000
A_2	15	12	18	20	1 500
A_3	35	25	15	20	2 000
DEMANDA	800	500	1 400	1 800	

El siguiente cuadro resume el procedimiento, este cuadro, es llamado "cuadro de transporte". Donde cada célula está asociada a un costo C_{ij}, a una variable x_{ij} y a una columna a_{ij} de la matriz de transporte.

En cada casilla, en la parte derecha se indican los costos unitarios de transportar desde la fábrica *i* al supermercado *j*, *j*=1,2,3,4. Además, se indica la cantidad que produce cada fábrica y la demanda en cada destino (mercado).

	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	
A_1	30	50	20	25 x_{14}=1000	1000/0
A_2	15 x_{21}=800	12 x_{22}=500	18 x_{23}=200	20	1500/1000/200/0
A_3	35	25	15 x_{33}=1200	20 x_{34}=800	2000/800/0

	800 0	500 0	1400 1200 0	1800 1000 0	

Asignación inicial (solución inicial)

Variables Básicas

x_{14}=1000

x_{21}=800

x_{22}=500

x_{23}=200

x_{33}=1200

x_{34}=800

Variables no básicas

$x_{11}=x_{12}=x_{13}=0$

$x_{24}=0$

$x_{31}=x_{32}=0$

Costo inicial de transporte:

25x1000 =2 5000

15x800 =1 2000

12x500 =6 000

18x200 =3 600

15x1200 =1 8000

20x800 =1 6000

Total : S/. 80 600

El costo anterior corresponde a la solución básica inicial.

Debe analizarse si está es óptima. Si en caso fuera la óptima, el problema estaría resuelto; caso contrario, debe pasarse a la etapa de mejoramiento de la solución.

Ahora continuamos analizando el método simplex para el problema de transporte, en la etapa de mejoramiento. Recordemos los pasos del método simplex para un programa lineal ya que de allí se deriva los fundamentos para el método práctico.

Paso 1: Encontrar una solución básica inicial factible.

Paso 2: Calcular (z_j-c_j) para cada variable no básica.

Terminar o elegir la variable que entra a la base.

Paso 3: Determinar la variable que sale de la base.

Paso 4: Obtener la nueva solución básica factible, y repetir el paso 2.

Recordemosque tratándose del problema de transporte y siendo éste de minimización se tiene que: "Si ocurre que z_{ij}-c_{ij}≤0 para toda variable x_{ij} no básica, entonces la solución actual será óptima".

Veamos si la solución anterior es óptima.

Para las variables básicas, usando el sistema, tenemos:

$$\boxed{x_{ij} : u_i + v_j = c_{ij}}$$

$$x_{14} : u_1 + v_4 = c_{14} \Rightarrow u_1 + v_4 = 25$$

$$x_{21} : u_2 + v_1 = c_{21} \Rightarrow u_2 + v_1 = 15$$

$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} \Rightarrow u_2 + v_2 = 12$$

$$x_{33} : u_3 + v_3 = c_{33} \Rightarrow u_3 + v_3 = 15$$

$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} \Rightarrow u_3 + v_4 = 20$$

Como es un sistema con 7 incógnitas y se tiene 6 ecuaciones, entonces

Si $u_1 = 0$

$$u_2 = -2, \quad u_3 = -5; \quad v_1 = 17, \quad v_2 = 14, \quad v_3 = 20, \quad v_4 = 25$$

Con estos valores calculamos:

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Para las variables no-básicos.

$$x_{11} : u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 17 - 30 = -13$$

$$x_{12} : u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 14 - 15 = -1$$

$$x_{13} : u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 20 - 20 = 0$$

$$x_{24} : u_2 + v_4 - c_{24} = -2 + 25 - 20 = 3$$

$$x_{31} : u_3 + v_1 - c_{31} = -5 + 17 - 35 = -23$$

$$x_{32} : u_3 + v_2 - c_{32} = -5 + 14 - 25 = -16$$

Vemos que no se cumple que:

$z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ para toda variable no-básica.

Así, la solución inicial no es óptima; como existe una variable no básica con coeficiente positivo igual x_{24}, elegimos esa variable x_{24} para entrar a la base.

Variable que sale de la base

Como x_{24} era no básica tenía valor cero, supongamos que ingresa con un valor θ positivo, es decir x_{24} se incrementa; $x_{24} + \theta$ (esto significa que iniciamos un ajuste de valores en la celda (2,4)).

En el ajuste de valores se formará una cadena cerrada con las otras celdas básicas, equilibrando el valor de θ. Veamos el siguiente cuadro:

	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**
A_1				
A_2			$x_{23}-\theta$ → $200-\theta$ ↑	$x_{24}+\theta$ ↓
A_3			$x_{33}+\theta$ → $1200+\theta$	$x_{34}-\theta$ $800-\theta$

$$x_{24}+\theta=0+\theta$$

$$x_{34}-\theta=800-\theta$$

$$x_{33}+\theta=1200+\theta$$

$$x_{23}-\theta=200-\theta$$

Vemos que si x_{24} entrará con valor θ=200, la variable básica en anularse sería x_{23}, por tanto está base SALE de la base.

Se obtiene:

SALE ↑

		$x_{23}=0$	$x_{24}=200$
		$x_{33}=1\,400$	$x_{34}=600$

Las otras variables no se modifican. Así, la nueva solución es:

Variables básicas

$x_{14} = 1000$

$x_{21} = 800$

$x_{22} = 500$

$x_{24} = 200$

$x_{33} = 1400$

Variables no-básicas

$x_{11} = 0$

$x_{12} = 0$

$x_{13} = 0$

$x_{23} = 0$

$x_{31} = 0$

$x_{32} = 0$

El costo de transporte para esta solución es:

ALMACENES	TIENDAS	CANTIDAD	COSTO UNITARIO	MONTO
A_1	**T_4**	1 000	25	25 000
A_2	**T_1**	800	15	12 000
A_2	**T_2**	500	12	6 000
A_2	**T_4**	200	20	4 000
A_3	**T_3**	500	15	21 000
A_3	**T_4**	200	20	12 000
			TOTAL:	**S/. 80 000**

Veamos si la solución actual es óptima

En realidad, lo que se va hacer es repetir los pasos desde la aplicación del sistema.

Para las variables básicas.

$$x_{14}: u_1 + v_4 = c_{14} \Rightarrow u_1 + v_4 = 25$$

$$x_{21}: u_2 + v_1 = c_{21} \Rightarrow u_2 + v_1 = 15$$

$$x_{22}: u_2 + v_2 = c_{22} \Rightarrow u_2 + v_2 = 12$$

$$x_{24}: u_2 + v_4 = c_{22} \Rightarrow u_2 + v_4 = 20$$

$$x_{33}: u_3 + v_3 = c_{33} \Rightarrow u_3 + v_3 = 15$$

$$x_{34}: u_3 + v_4 = c_{34} \Rightarrow u_3 + v_4 = 20$$

Se obtiene:

$u_1 = 0$, $u_2 = -5$, $u_3 = -5$; $v_1 = 20$, $v_2 = 17$,

$v_3 = 20$, $v_4 = 25$

Ahora calculamos $z_{ij} - c_{ij}$ usando la fórmula para cada variable no-básica.

$$x_{14}: u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 25 - 25 = 0$$

$$x_{21}: u_2 + v_1 - c_{21} = -5 + 20 - 15 = 0$$

$$x_{22}: u_2 + v_2 - c_{22} = -5 + 17 - 12 = 0$$

$$x_{24}: u_2 + v_4 - c_{24} = -5 + 25 - 20 = 0$$

$$x_{33}: u_3 + v_3 - c_{33} = -5 + 20 - 15 = 0$$

$$x_{34} : u_3 + v_4 - c_{34} = -5 + 25 - 20 = 0$$

Vemos que se cumple $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ para todas las variables no-básicas. Por tanto, la solución encontrada actual es óptima, y el costo total de S/. 80 000 es óptimo.

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

6.1. Contrastación de la hipótesis.

6.2. Contrastación de los resultados con estudios similares.

El problema de redes de distribución, según Taha (2012), nos enfatiza lo siguiente:

La red representará el problema. Hay m orígenes y n destinos, cada uno representado por un nodo. Los arcos representan las rutas que unen los orígenes con los destinos. El arco *(i,j)* que une el origen i con el destino j transporta dos piezas de información: el costo de transporte por unidad, C_{ij} y la cantidad transportada x_{ij}. La cantidad de la oferta en el origen i es a_i y la cantidad de la demanda en el destino j es b_j. El objetivo del modelo es minimizar el costo de transporte total al mismo tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y demanda.

Puchades (2008) busca la solución óptima mediante aplicaciones informáticas de Grafos y Rutas, basadas en la teoría de grafos y árboles, donde el objetivo al igual de Taha (2012) es minimizar los costos que implica el problema distribución de redes.

Por otro lado, Eroglu (2013) nos menciona lo siguiente que los problemas de redes de distribución se pueden representar de una manera fácil usando la teoría de grafos. Donde este problema se usara el método simplex para obtener costos mínimos.

Astete (2011), nos menciona que el problema de asignación se debe resolver optimizando los flujos de una red, que la diferencia del algoritmo de transporte con el de asignación se modela y resuelve de un origen a varios orígenes.

6.3. Responsabilidad ética.

En nuestra investigación tiene como responsabilidad ética fomentar el estudio, lo cual brinda un gran aporte a nuestra sociedad que puede ser utilizado para futuras investigaciones. Asimismo, se manifiesta que el presente trabajo es auténtico, usando como antecedentes los textos mencionados en las referencias bibliográficas.

CONCLUSIONES

- Explica o fundamenta el método de transporte que es el más usado en varias carreras de ingeniería en donde se determina flujos óptimos a través de una red y con costo mínimo.
- Que da una visión amplia del uso de la teoría de grafos a diferentes problemas de aplicación.
- La simplicidad del proceso permite usar cualquier software que haya sido preparado para resolver problemas lineales.

RECOMENDACIONES

- Modelar y resolver problemas de distribución usando la teoría básica de grafos y árboles.
- En trabajos futuros se desearía presentar problemas de programación lineal de distribuciónen el software TORA que se fundamenten en la teoría de grafos y árboles.
- Hacer un proyecto de investigación para aplicar a la solución de problemas no lineales.
- Finalmente, es posible resolver y modelar problemas de distribución fundamentado en la teoría de grafos y árboles.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

[1] Taha H.(2012), *Investigación De Operaciones*. Ed. Alfaomega. CuartaEdición.

[2] Puchades (2008). *Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática*. Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa (6). pp. 7–22.

[3] Yévenes, M. W. (2003). Transporte urbano: un modelo a seguir. *Revista urbano*, 24-30. Universidad del Bio Bio.

[4] Ergun, E. (2013). Una aplicación del método simplex para redes para problemas de flujo de costo mínimo. *Balkan Journal of Mathematics BALKANJM*.

[5] Chuquichaico, R. A. (2011). Metodología para mejorar el proceso de asigancción de tráfico a una red de transporte. Universidad Nacional de Ingeniería (Facultad de Ingeniería Civil).

[6] Daniel O. Anaut, G. F. (2006). Configuración Óptima de Redes de Distribución Primaria. Método Simplex. Revista *scielo*.