

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y**  
**MATEMÁTICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**“EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA**  
**UN PROBLEMA DE EVOLUCIÓN NO LINEAL**  
**DEL TIPO P-LAPLACIANO”**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PEDRO MIGUEL FAJARDO AMPUERO

Callao, Junio, 2019

PERÚ



# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

## OFICINA DE SECRETARÍA GENERAL

Callao, 27 de setiembre de 2019

Señor

Presente.-

Con fecha 27 de setiembre del dos mil diecinueve se ha expedido la siguiente Resolución. RESOLUCION DE CONSEJO UNIVERSITARIO N° 684 -19-CU-TP --- Callao, 27 de setiembre de 2019 el CONSEJO UNIVERSITARIO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el expediente N° 01078161 de fecha 08 de agosto de 2019 mediante el cual el Bachiller **FAJARDO AMPUERO PEDRO MIGUEL** solicita se le otorgue el TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA bajo la modalidad de SUSTENTACIÓN DE TESIS.

### CONSIDERANDO:

Que la Universidad Nacional del Callao confiere el Título Profesional de los programas de estudio que desarrolla a nombre de la Nación, realizándose la obtención de títulos de acuerdo a los reglamentos de estudios de pregrado de la Universidad; conforme a lo establecido en los Arts.87 y 89 de la norma estatutaria, concordante con los Arts. 44 y 45 de la Ley Universitaria N° 30220.

Que, por Resolución N° 245-18-CU de fecha 30-10-2018 se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de esta Casa Superior de Estudios, el mismo que en su Art. 9° establece que para la obtención del Título Profesional se requiere tener grado académico de Bachiller otorgado únicamente por esta Casa Superior de Estudios, la aprobación de una tesis o trabajo de suficiencia profesional y cumplir con los requisitos establecidos en el Reglamento de Grados y Títulos de la UNAC.

Que, asimismo el Art. 11 del referido Reglamento de Grados y Títulos establece que el Consejo Universitario confiere los títulos profesionales declarados expeditos por los Consejos de Facultad, expidiendo el diploma correspondiente el cual es firmado por el Rector, el Decano de la Facultad, el Secretario General y al interesado (a).

Que, así también en el Título IV Capítulo II del referido Reglamento se señala y detalla el trámite y procedimiento administrativo específico para obtener el título profesional.

Que, la Comisión de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática mediante Dictamen N° 037-2019-CGT-FCNM de fecha 06 de setiembre 2019, otorga la conformidad del cumplimiento de los requisitos para obtener el Título Profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICA al Bachiller **FAJARDO AMPUERO PEDRO MIGUEL**.

Que, asimismo, el Consejo de Facultad de Ciencias Naturales y Matemática mediante Resolución N° 196-2019-D-FCNM, de fecha 09 de setiembre de 2019, resuelve aprobar el Título Profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICA al Bachiller **FAJARDO AMPUERO PEDRO MIGUEL** bajo la modalidad de Sustentación de Tesis titulado: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UN PROBLEMA DE EVOLUCIÓN NO LINEAL DEL TIPO P - LAPLACIANO".





Estando a lo acordado por el Consejo Universitario en su Sesión de fecha 27 de septiembre de 2019 en uso de las atribuciones que le confieren los Arts. 59 y 62 de la Ley N° 30220 concordante con los Arts. 116, numeral 116.10 y 128 del Estatuto de la Universidad.

**RESUELVE**

- 1° OTORGAR el Título Profesional de **LICENCIADO EN MATEMÁTICA** al Bachiller **FAJARDO AMPUERO PEDRO MIGUEL** conforme a lo dispuesto en la Resolución N° 196-2019-D-FCNM de fecha 09 de septiembre de 2019 de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao y por las consideraciones expuestas en la presente Resolución.
- 2° Transcribir la presente Resolución al Vicerrector de Investigación, Facultad, Oficina de Archivo General y Registros Académicos, Unidad de Registros Académicos, así como al interesado ( a ) para conocimiento y fines consiguientes.  
Regístrese, comuníquese y archívese.

Fdo. Dr. BALDO ANDRÉS OLIVARES CHOQUE, Rector y Presidente del Consejo Universitario de la Universidad Nacional del Callao. Sello de Rectorado.

Fdo. Lic. CÉSAR GUILLERMO JÁUREGUI VILLAFUERTE -. Secretario General de la Universidad Nacional del Callao, Sello de Secretaria General.

Lo que transcribo a usted para conocimiento y fines consiguientes

cc.Rector, Facultad

cc.OAGRA, interesado



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO  
Oficina de Secretaría General

*César Jáuregui*  
Mg. César Guillermo Jáuregui Villafuerte  
Secretario General



## **Hoja de referencia del jurado y aprobación**

### **Existencia de soluciones débiles para un problema de evolución no lineal del tipo $p$ -Laplaciano**

Pedro Miguel Fajardo Ampuero

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en Matemática.

Aprobado por:

.....  
Mg. Wilfredo Mendoza Quispe  
Presidente

.....  
Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey  
Vocal

.....  
Lic. Elmer León Zarate  
Secretario

Callao-Perú  
2019

A Dios, por darme salud, fortaleza  
y perseverancia para lograr este  
objetivo.

A mis padres, Rubela y Pedro Pablo  
  
por el apoyo incondicional a cada uno de  
mis proyectos.

A mi asesor, Mg. Roel Vidal Guzmán por  
sus acertados consejos y por la constante  
motivación para culminar este trabajo de  
Tesis.

## **Reconocimientos**

A los profesores de la Facultad de Ciencias  
matemáticas de la Universidad nacional del Callao.

## Indice

Reconocimientos .....	iv
Indice.....	5
Lista de figuras .....	8
Resumen.....	9
Abstract .....	10
<b>I. Planteamiento de la investigación</b> .....	11
1.1 Determinación del problema .....	11
1.2 Formulación del problema .....	12
1.2.1 Problema general.....	12
1.2.2 Problemas específicos.....	12
1.3 Objetivos de la investigación .....	13
1.3.1 Objetivo General .....	13
1.3.2 Objetivos específicos .....	13
1.4 Justificación.....	13
1.5 Importancia .....	14
<b>II. Marco teórico</b> .....	15
2.1 Antecedentes de estudio .....	15
2.2 Preliminares.....	17
2.2.1 Notaciones.....	17
2.2.2 Transformaciones lineales.....	19
2.2.3 Topologías débil y débil estrella .....	20
2.2.4 Distribuciones .....	22
2.2.5 Espacios $L^p(\Omega)$ .....	24
2.2.6 Espacios de Sobolev.....	27
2.2.7 Inmersiones .....	28
2.2.8 Espacios $L^p(0, T, V)$ .....	29
2.2.9 Distribuciones Vectoriales. ....	31
2.2.10 Derivación en $D'(0, T, V)$ .....	32

2.2.11	Convergencia en $L^p(0, T, V)$ .....	33
2.2.12	Teoremas de Existencia .....	33
2.2.13	Desigualdades importantes .....	36
2.2.14	Teoremas de convergencia.....	36
2.3	El operador p –Laplaciano .....	43
2.4	Existencia de Soluciones Débiles.....	49
2.4.1	El modelo Matemático .....	49
2.4.2	Definición de solución débil .....	50
2.4.3	Algunos Resultados importantes.....	53
2.5	Etapas 1: Solución local.....	65
2.6	Etapas 2: Estimativas a priori .....	83
2.6.1	Estimativa I.....	83
2.6.2	Estimativa II .....	89
2.7	Etapas 3: Pasaje al límite .....	95
2.8	Etapas 4: Condiciones iniciales .....	117
2.9	Comportamiento Asintótico .....	123
2.10	Aplicaciones.....	141
<b>III.</b>	<b>Variables e Hipótesis</b> .....	<b>145</b>
3.1	Variables de la investigación.....	145
3.2	Operacionalización de variables.....	145
3.3	Hipótesis general .....	146
3.4	Hipótesis específicas .....	146
<b>IV.</b>	<b>Metodología</b> .....	<b>148</b>
4.1	Tipo de Investigación .....	148
4.2	Diseño de la investigación.....	148
4.3	Población y muestra. ....	149
4.4	Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	149
4.5	Plan de análisis estadísticos de datos .....	149
<b>V.</b>	<b>Resultados</b> .....	<b>150</b>



<b>VI. Discusión de resultados</b> .....	153
<b>VII. Conclusiones</b> .....	155
<b>VIII. Recomendaciones</b> .....	156
<b>IX. Referencias bibliográficas</b> .....	157
<b>Anexos:</b> .....	160
Apéndice A: .....	160
Matriz de Consistencia .....	160
Apéndice B: .....	161
Mapa conceptual del trabajo .....	161

## Lista de figuras

Figura 2.1 Modelo de Segal .....	141
Figura 2.2 Modelo de Segal Tridimensional.....	142
Figura 2.3 Modelo de Medeiros.....	142
Figura 2.4 Modelo de Medeiros Tridimensional: Caso 1 .....	143
Figura 2.5 Modelo de Medeiros Tridimensional: Caso 2 .....	143
Figura 2.6 Modelo de Medeiros Tridimensional: Caso 3 .....	144

## Resumen

# EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UN PROBLEMA DE EVOLUCIÓN NO LINEAL DEL TIPO P-LAPLACIANO

Pedro Miguel Fajardo Ampuero

Junio -2019

Asesor: Mg. Roel Vidal Guzmán

Titulo obtenido: Licenciado en Matemática

---

En la presente investigación se estudió de manera detallada la existencia de soluciones débiles del siguiente problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano.

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 \quad \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \\ \quad \quad \quad u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ \quad \quad \quad u'(0) = u_1, v'(0) = v_1 \\ u = v = 0, \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{array} \right. \quad \text{en } \Omega$$

Donde  $\Omega$  es un subconjunto de  $R^n$ , abierto, acotado y bien regular.

El cilindro en  $R^{n+1}$  con base en  $\Omega$  y altura  $T$ , denotado por  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ .

La frontera de dicho cilindro es definida y denotada por

$\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , con  $\Gamma$  frontera de  $\Omega$ .

$\Delta_p$  : representa el operador p-Laplaciano

### Palabras claves:

- Problema de evolución del tipo p-Laplaciano
- Método de Faedo-Galerkin
- Existencia local de soluciones
- Estimativas
- Paso al límite
- Condiciones iniciales
- Comportamiento asintótico

## Abstract

### WEAK EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A PROBLEM NONLINEAR EVOLUTION OF P- LAPLACIAN TYPE

Pedro Miguel Fajardo Ampuero

June-2019

Adviser: Mg. Roel Vidal Guzmán

Obtained title: Licenciado en Matemática

---

In this research, we studied in detail the existence of weak solutions of the following problem of non-linear evolution of the p-Laplacian type

$$\begin{cases} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1 \\ u = v = 0, \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad \text{en } \Omega$$

Where  $\Omega$  is a subset of  $R^n$  open, bounded and sufficiently smooth.

The cylinder in  $R^{n+1}$  based on  $\Omega$  and height T, denoted by

$Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ .

The border of the cylinder is defined and denoted by

$\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , With  $\Gamma$  border of  $\Omega$ .

$\Delta_p$  : It represents the operator p-Laplaciano

#### Keywords:

- Evolution problem of the p- Laplacian type
- Faedo Galerkin method
- Local existence of solutions
- Estimates
- Passage to the limit
- Initial conditions
- Asymptotic behavior

## Capítulo I

### Planteamiento de la investigación

#### 1.1 Determinación del problema

Actualmente las Ecuaciones en derivadas parciales forman parte importante en la formación tanto de matemáticos como de ingenieros. Los métodos mas comunes de resolución son el método de Rieman y el método de Fourier cada uno de ellos con ventajas y desventajas. Pero, ¿Qué hacer cuando ellos no funcionan adecuadamente? En la literatura de Edps. se tienen otros métodos que aseguran la existencia de soluciones, pero en ocasiones son poco estudiados y mas aún, son pocos los trabajos que desarrollan de manera detallada tales métodos. Uno de estos, es el de Faedo Galerkin. En el presente trabajo se realizará una exposición detallada del artículo desarrollado en forma resumida por Castro [6], cuyo principal objetivo es demostrar la existencia de soluciones globales débiles del siguiente problema de evolución no lineal del tipo p-

Laplaciano:

$$\begin{cases} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1 \\ u = v = 0, \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad \dots(1)$$

Siendo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto, acotado y bien regular.
- $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ . Un cilindro en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con base en  $\Omega$  y altura  $T$
- La frontera de este cilindro será:  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , con  $\Gamma$  frontera de  $\Omega$ .
- $\Delta_p$  el operador p-Laplaciano, definido del siguiente modo:

$$\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\Delta_p u = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), p \geq 2$$

Notemos que el operador p-Laplaciano se reduce al operador Laplaciano usual cuando  $p=2$ .

- $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
- $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  Son las funciones incógnitas.
- $u_0, v_0, u_1, v_1$  son los datos iniciales dados.

## 1.2 Formulación del problema

Los problemas de la investigación están formulados de la siguiente manera

### 1.2.1 Problema general

PG: ¿Será posible realizar una demostración detallada de la existencia de

soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)?

### 1.2.2 Problemas específicos

PE1: ¿Serán de utilidad las propiedades del operador p-Laplaciano en el

desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)?

PE2: ¿Será viable realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano, dado en (1).

### **1.3 Objetivos de la investigación**

#### **1.3.1 Objetivo General**

OG: Dar una demostración detallada de la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p –Laplaciano, dado en (1). Hecha de forma resumida en el artículo de Castro [6].

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

OE1: Demostrar que las propiedades del operador p-Laplaciano son importantes en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)?

OE2: Realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano, dado en (1)

### **1.4 Justificación**

Esta investigación se inició con la identificación una serie de eventos, fundamentalmente dos: La poca literatura acerca del operador p- Laplaciano en nuestro idioma, y los diferentes fenómenos modelados por este. En este contexto resulto sumamente tentador estudiar una ecuación envuelta por dicho operador.

## **1.5 Importancia**

Esta tesis tiene una importancia teórica, ya que nos da luces de cómo actuar frente a ecuaciones envueltas con operadores más generales pero con propiedades análogas al operador  $p$  – Laplaciano.



## Capítulo II

### Marco teórico

#### 2.1 Antecedentes de estudio

**Segal** (1970), propuso y estudio el siguiente modelo que describe el movimiento de los mesones (Partículas formadas por la colisión de un Protón y un neutrón) en un campo electromagnético.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0 \end{cases}$$

Siendo  $u$  y  $v$  campos escalares de masas  $\alpha$  y  $\beta$  con  $g$  y  $h$  constantes de integración.

**Tsutsumi** (1971), estudio la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} u'' + Au + Bu' &= f \\ u(0) = u_0, u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

Donde  $A$  es un operador no lineal con algunas propiedades fuertes y  $B$  es un operador lineal acotado asociado a una forma bilineal simétrica acotada.

**Medeiros-Miranda** (1987), estudio la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u - |v|^{\rho+2}|u|^\rho u = f_1 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + v - |u|^{\rho+2}|v|^\rho v = f_2 \end{cases}$$

Obteniendo lo siguiente: Existencia de soluciones para cualquier dimensión

( $n \geq 1$ ) y unicidad para  $n = 1, 2, 3$

**Biazutti** (1995), analizó la existencia de soluciones débiles y comportamiento asintótico del siguiente problema de evolución.

$$\begin{aligned} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + G_1(u', v') &= f_1 \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + G_2(u', v') &= f_2 \end{aligned}$$

Donde:  $p \geq 2$ ;  $G_1$  y  $G_2$  tienen algunas de las propiedades de  $u'$  y  $v'$ .

## 2.2 Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes. Sus demostraciones serán omitidas por que se tratan de resultados ya conocidos. Solo se citaran las referencias donde serán encontradas con sus respectivas demostraciones.

### 2.2.1 Notaciones

Consideremos :  $\Omega$  Subconjunto abierto, acotado y bien regular de  $R^n$

( $\Omega$  es bien regular si,  $\Omega$  es de clase  $C^m$  para todo  $m \in N$  )

$\hookrightarrow$  Inmersión continua y densa

$\hookrightarrow^c$  Inmersión compacta

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  Dualidad

$\| \cdot \|_X$  Norma asociada al espacio  $X$

$C(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow R; f \text{ continua}\}$

$C^k(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow R; f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable}\}$

$C^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow R; f \text{ infinitamente diferenciable}\}$

$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \text{sop}(f) \text{ es un compacto } \subset \Omega\}$

$E'$  : Dual topológico del espacio vectorial  $E$

$E^*$  : Dual algebraico del espacio vectorial  $E$

$\rightharpoonup$  Convergencia débil

$\rightharpoonup^*$  Convergencia débil estrella

▪ Consideremos Previas

i) Sea:  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

Entonces 
$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ii) Si  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\Omega$ , el gradiente de  $u$  será denotado por

$\nabla u$  y definido como un vector de  $\mathbb{R}^n$ , dado por:

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

iii) El Laplaciano de la función  $u$  está definido como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

iv) Sean  $u, v \in L^2(\Omega)$  entonces el producto interno entre  $u$  y  $v$  está definido por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

v) Las normas de  $u$  en  $L^2(\Omega)$  y  $v \in H_0^1(\Omega)$  son denotadas y definidas por:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \text{ y } \|v\| = \sqrt{((v, v))} \text{ respectivamente. Donde } ((\cdot, \cdot))$$

denota el producto interno en  $H_0^1(\Omega)$  y es definido por:  $((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ .

vi) La norma de  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  es denotada y definida por:  $\|u\|_0 = \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$

### 2.2.2 Transformaciones lineales

Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo  $IK$  ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ).

**Definición 2.1** Una aplicación  $f : E \rightarrow F$  se dice que es lineal si

(a)  $f$  es aditiva:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;  $\forall x, y \in E$

(b)  $f$  es homogénea:  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ;  $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$

**Definición 2.2** Si  $E$  y  $F$  son espacios vectoriales normados sobre un cuerpo  $IK$  y

$T : E \rightarrow F$  es una aplicación lineal, diremos que  $T$  es continua en un vector  $u_0 \in E$  si

dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|T(u) - T(u_0)\|_F < \varepsilon, \text{ siempre que } \|u - u_0\|_E < \delta$$

Diremos que  $T$  es continua en  $E$ , si  $T$  es continua en cada punto de  $E$ .

**Definición 2.3** Sea  $T$  una aplicación lineal definida sobre  $E$  y con valores en  $F$ . Diremos

que  $T$  es acotada, si existe una constante positiva  $C$  tal que

$$\|Tw\|_F \leq C \|w\|_E ; \forall w \in E$$

**Teorema 2.1** Si  $T : E \rightarrow F$  es una aplicación lineal. Son equivalentes

(i)  $T$  es continua en  $E$

(ii)  $T$  es continua en un punto de  $E$

(iii)  $T$  es acotada en  $E$

Demostración: Ver Lages [16]

**Teorema 2.2** Consideremos una función  $f$  continua en  $[a, b]$ . Entonces existe un

número  $c \in [a, b]$  tal que: 
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Demostración: Ver Hasser, [12]

**Teorema 2.3** Si  $T : E \rightarrow R$  es una aplicación lineal y continua, entonces

$$\|T\|_E = \sup \left\{ \frac{|Tu|}{\|u\|}, u \neq 0 \right\}$$

Demostración: Ver P. H. Rivera [28]

**Teorema 2.4 (Extensión de operadores lineales y acotados)**

Sea  $X$  un espacio normado,  $Y$  un espacio de Banach,  $T: M \rightarrow Y$  un operador lineal acotado sobre  $M$ , donde  $M$  es un subespacio denso en  $X$ . Entonces el operador  $T$  admite una extensión  $\bar{T}: X \rightarrow Y$  lineal y acotada tal que  $\bar{T} \mid M = T$  y  $\|\bar{T}\| = \|T\|$ .

Demostración: Ver Arguelles [2]

### 2.2.3 Topologías débil y débil estrella

Sea  $E$  un espacio de Banach,  $f \in E'$  y consideremos la aplicación  $\varphi_f: E \rightarrow R$  definida por  $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$  cuando  $f$  recorre  $E'$ , se tiene la familia  $(\varphi_f)_{f \in E'}$  de aplicaciones de  $E$  en  $R$ .

**Definición 2.4** La topología débil  $\sigma(E, E')$  sobre  $E$  es la topología menos fina sobre  $E$  que torna continua todas las aplicaciones  $(\varphi_f)_{f \in E'}$

Consideremos  $E$  espacio vectorial normado. Dada una sucesión  $(x_n) \subseteq E$ , la notación de la convergencia débil, será:  $x_n \rightarrow x$  en  $\sigma(E, E')$

**Proposición 2.1** Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $E$

i)  $x_n \rightarrow x$  en  $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$

ii) Si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $x_n \rightarrow x$

iii) Si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $\|x_n\|$  es acotada y  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$

iv) Si  $x_n \rightarrow x$  en  $E$  y  $f_n \rightarrow f$  en  $E'$ , entonces  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$

Demostración: ver Brezis [5]

**Proposición 2.2 (Unicidad del límite débil)**

Sea  $X$  un espacio de Banach y  $(x_n)$  una sucesión en  $X$  débilmente convergente a  $x$  en  $X$ . Entonces  $x$  es único.

Demostración: ver Limaco [18]

**Definición 2.5.**

Sea  $E$  un espacio de Banach,  $x \in E$  y consideremos la aplicación  $\varphi_x: E' \rightarrow R$ , definida por  $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$  cuando  $x$  recorre  $E$  se tiene la familia  $(\varphi_x)_{x \in E}$  de aplicaciones de  $E'$  en  $R$ .

La topología débil estrella  $\sigma(E', E)$  es la topología menos fina sobre  $E'$  que torna continuas todas las aplicaciones  $(\varphi_x)_{x \in E}$

Dada una sucesión  $(f_n) \subseteq E'$  la notación de la convergencia débil estrella, será:

$$f_n \rightharpoonup^* x \text{ en } \sigma(E', E)$$

**Proposición 2.3** Sea  $(f_n)$  una sucesión en  $E'$

$$i) f_n \rightharpoonup^* f \text{ en } \sigma(E', E) \leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle; \forall x \in E$$

$$ii) \text{ Si } f_n \rightarrow f \text{ en } \sigma(E', E), \text{ entonces } f_n \rightharpoonup^* f \text{ en } \sigma(E', E),$$

$$iii) \text{ Si } f_n \rightharpoonup^* f \text{ en } \sigma(E', E) \text{ y si } x_n \rightarrow x \text{ en } E, \text{ entonces } \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$$

Demostración: ver Brezis [5].

## 2.2.4 Distribuciones

**Definición 2.6.** Sea  $f: \Omega \rightarrow R$  una función. El soporte de  $f$ , sera denotado y definido por:

$$\text{Sop } f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

**Definición 2.7** Denotaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  el conjunto de las funciones  $g: \Omega \rightarrow R$ , cuyas derivadas parciales de todos los órdenes son continuas y con soporte compacto contenido en  $\Omega$ .



**Definición 2.8.** Convergencia en  $C_0^\infty(\Omega)$

Sea  $(\varphi_n)$  una sucesión en  $C_0^\infty(\Omega)$  y  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \leftrightarrow \begin{cases} \exists K: \text{compacto} \subset \Omega \text{ tal que } \text{Supp } \varphi_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha \varphi_n(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x), \forall x \in \Omega \end{cases}$$

El espacio vectorial  $C_0^\infty(\Omega)$  unido con el sentido de convergencia arriba mencionado es denotado por  $D(\Omega)$  y es denominado espacio de funciones prueba.

**Definición 2.9.** Se define como distribución sobre  $\Omega$  a toda forma lineal y continua definida en  $D(\Omega)$  y valorada en  $\mathbb{R}$ .

$$D'(\Omega) = \{T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} / T \text{ es lineal y continua}\}$$

El conjunto  $D'(\Omega)$  es un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial denominado el espacio de las distribuciones.

El valor de la distribución  $T$  en  $\varphi$  se representa también por  $\langle T, \varphi \rangle$  (dualidad entre  $D'(\Omega)$  y  $D(\Omega)$ )

Así mismo si  $T \in D'(\Omega)$  entonces  $D^\alpha T \in D'(\Omega)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

**Definición 2.10** Noción de convergencia

Diremos que la sucesión  $(T_\gamma)$  de elementos de  $D'(\Omega)$  converge para  $T$  en

$D'(\Omega)$ , cuando para toda función  $\varphi \in D(\Omega)$ , la sucesión  $\langle T_\gamma, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$  en  $\mathbb{R}$

### 2.2.5 Espacios $L^p(\Omega)$

**Definición 2.11.** Sea  $\Omega \subset R^n$  un conjunto medible y  $1 \leq p < \infty$ , definimos:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow R / u: \text{medible}, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

#### Proposición 2.4

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un número real,  $L^p(\Omega)$  se **torna** un espacio vectorial sobre R, con norma igual a:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ; u \in L^p(\Omega)$$

Demostración: Ver Medeiros A. & Milla Miranda M. [22]

**Definición 2.12** Sea  $\Omega \subset R^n$  un conjunto medible y  $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow R; \text{medibles y esencialmente acotadas}\}$$

#### Proposición 2.5

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un número real,  $L^\infty(\Omega)$

se **torna** un espacio vectorial sobre R, con norma igual a:

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| ; u \in L^\infty(\Omega)$$

Demostración: Ver Medeiros A. & Milla Miranda M. [23]

**Observación 2.1** Se dice que  $u = v$  casi siempre (c.s) en  $(\Omega)$  sí y solo si  $\exists M \subseteq \Omega$  tal que  $u(x) = v(x) \forall x \in \Omega \setminus M$  y  $\text{med}(M) = 0$

**Obs:** se considera la medida de Lebesgue.

**Definición 2.13.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible, diremos que  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente integrable, si es lebesgue integrable en todo compacto  $K \subset \Omega$

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{u \in L^1(K); K: \text{compacto} \subset \Omega\}$$

**Proposición 2.6**

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$  definimos la aplicación

$$T_u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx$$

Entonces  $T_u \in D'(\Omega)$

Demostración: Ver Cavalcanti [7]

**Proposición 2.7 (Du Bois Reymond)** Sea  $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$

para todo  $\varphi \in C^{\infty}_0(\Omega)$  entonces  $u(x) = 0$  c.s en  $\Omega$

Demostración: Ver Rivera P. H. [28]

**Proposición 2.8**  $C^{\infty}_0(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

Demostración: Ver Medeiros L.A. & Milla Miranda M. [23]

**Teorema 2.5 (Teorema de representación de Riesz para  $L^p(\Omega)$ )**

Sea  $1 < p < \infty$ , consideremos  $L \in [L^p(\Omega)]'$ . Entonces existe  $v \in L^{p'}(\Omega)$  tal que para todo  $u \in L^p(\Omega)$  se tiene que

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

Demostración: ver Adams [1]

**Teorema 2.6 (Teorema de representación de Riesz para  $L^1(\Omega)$ )**

Sea  $L \in [L^1(\Omega)]'$  entonces existe  $v \in L^\infty(\Omega)$  tal que para todo  $u \in L^1(\Omega)$

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad y \quad \|v\|_{\infty} = \left\| L; [L^1(\Omega)]' \right\|$$

$$\text{Así} \quad (L^1(\Omega))' \equiv L^\infty(\Omega)$$

Demostración:

Consideremos que  $L \neq 0$  y  $\|L; [L^1(\Omega)]'\| = 1$

Consideremos  $\Omega$  de dimensión finita si  $1 < p < \infty$

Entonces tendremos que  $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$

Además  $|L(u)| \leq \|u\|_1 \leq (Vol(\Omega))^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_p, \forall u \in L^p(\Omega)$

Teniendo  $L \in [L^p(\Omega)]'$  luego por el teorema 2.5 (Riesz)

$$\text{Existe } v_p \in L^{p'}(\Omega) \text{ tal que } L(u) = \int_{\Omega} u(x)v_p(x)dx, \forall u \in L^p(\Omega) \quad (2.6.1)$$

$$\text{Con} \quad \|v_p\|_{p'} \leq (Vol(\Omega))^{1-\frac{1}{p}} \quad (2.6.2)$$

Además como  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$  para  $1 < p < \infty$ , consideremos

$1 < p, q < \infty$  y  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , tendremos:

$$\int_{\Omega} \varphi(x)v_p(x)dx = L(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)v_q(x)dx$$

De ahí  $v_p = v_q$ , reemplazando en (2.6.1) con una función  $v \in L^p(\Omega)$  para cada  $p$  tal que

$1 < p < \infty$  Satisfaciendo (2.6.2). Se sigue que  $\|v\|_\infty \leq \lim_{p' \rightarrow \infty} [Vol(\Omega)]^{\frac{1}{p'}} = 1$  ■.

### 2.2.6 Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistos en las referencias A. Adams [1], H. Brezis [5], Kesavan [15], L.A. Medeiros y E.A de Mello [22], L.A. Medeiros & M. Milla Miranda [23] y P. H. Rivera [28].

**Definición 2.14.** Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , definiremos y denotaremos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

Al espacio de Sobolev de orden  $m$  relativo al espacio  $L^p(\Omega)$

### Proposición 2.9

Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , la Norma en  $W^{m,p}(\Omega)$  es denotada y definida por:

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, u \in W^{m,p}(\Omega),$$

Demostración: Ver Cavalcanti [7]

### Teorema 2.7 (derivación de un producto)

Sean  $f, g \in W^{1,p}(I); I \subset \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$  entonces  $fg \in W^{1,p}(I)$  y

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Además se verifica la integración por partes

$$\int_a^b f'g dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' dx ; \forall a, b \in \bar{I}$$

Demostración: Ver Brezis H. [5]

**Definición 2.15.** Definimos el espacio  $w_0^{m,p}(\Omega)$  como la cerradura de  $D(\Omega)$  en  $w^{m,p}(\Omega)$

**Definición 2.16.** Consideremos  $1 \leq p < \infty$  y  $q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  denotamos y definimos por  $w^{-m,q}(\Omega) = (w_0^{m,p}(\Omega))'$

### 2.2.7 Inmersiones

**Definición 2.17** Sean  $W$  y  $V$  espacios de Banach con  $W \subseteq V$  como subespacio vectorial. Consideremos la aplicación inclusión  $i: W \rightarrow V$  como  $i(v) = v$

Se dice que  $W$  esta inmerso continuamente en  $V$ , si la aplicación  $i: W \rightarrow V$  es continua. Siendo asi será denotada  $W \hookrightarrow V$

**Definición 2.18** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $R^n$ . Se dice que  $\Omega$  es bien regular si  $\Omega$  es de clase  $C^m$ ,  $m=1,2,3,\dots$

**Proposición 2.10** Consideremos  $\Omega \subset R^n$ , abierto, acotado y bien regular con  $1 \leq p \leq \infty$ , se tienen las siguientes inmersiones

- i) Si  $p < n$ , entonces  $w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega)$ , siempre en cuando  $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$
- ii) Si  $p=n$ , entonces  $w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega)$  donde  $1 \leq q < \infty$
- ii) Si  $p > n$ , entonces  $w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^\infty(\Omega)$

Demostración: Ver Stallbohm [31]

**Proposición 2.11** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , abierto, acotado y bien regular. Consideremos  $k \leq m$  y

$n > (m - k)p$ , entonces  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ , cuando  $q \leq \frac{np}{n-(m-k)p}$

Demostración: Ver Stallbohm. [31]

### 2.2.8 Espacios $L^p(0, T, V)$

En esta sección daremos las nociones básicas sobre los espacios de Banach

$L^p(0, T, V)$  esenciales en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de evolución.

**Definición 2.19** Decimos que  $u: (0, T) \rightarrow V$  es una función simple, si:

$$u(t) = \sum_{i=1}^m X_{A_i}(t)x_i$$

Donde  $x_i \in V$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $x_{A_i}$  es la función característica del conjunto medible según Lebesgue  $A_i$ .

**Definición 2.20** Decimos que  $u: (0, T) \rightarrow V$  es una función medible Bochner, si existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones simples tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u(t)\|_V = 0, \text{ ctp en } (0, T)$$

**Definición 2.20** Decimos que  $u: (0, T) \rightarrow V$  es de Bochner integrable, si existe una sucesión de funciones simples  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

i) La aplicación  $t \rightarrow \|u_n(t) - u(t)\|_V$  es Lebesgue integrable para todo  $n \in \mathbb{N}$

ii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_V dt = 0$

### Espacios $L^p(0, T, V)$

Dado un espacio de Banach  $V$ , denotaremos por  $L^p(0, T; V)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Al espacio de Banach de las clases de funciones  $u$ , definidas en  $(0, T)$  con valores en  $V$ , que son fuertemente medibles y  $\|u(t)\|_V^p$  es integrable según Lebesgue en  $(0, T)$ . Con la norma.

$$\|u\|_{L^p(0, T; V)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Representaremos por  $L^\infty(0, T; V)$  al espacio de Banach de todas las clases de funciones  $u$ , definidas en  $(0, T)$  con valores en  $V$ , que son fuertemente medibles y  $\|u(t)\|_V$  posee supremo esencial finito en  $(0, T)$ . Con norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; V)} = \text{Sup ess} \|u(t)\|_V$$

$$t \in ]0, T[$$

Cuando  $p = 2$  y  $V$  es un espacio de Hilbert, el espacio  $L^2(0, T; V)$  se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T; V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt$$

Consideremos el espacio  $L^p(0, T; V)$ ,  $1 < p < \infty$ , con  $V$  un espacio de Hilbert separable, entonces es válida la siguiente identificación

$$[L^p(0, T; V)]' \equiv L^q(0, T; V')$$

Con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , cuando  $p = 1$ , tendremos la siguiente identificación



$$[L^1(0, T; V)]' \equiv L^\infty(0, T; V')$$

### 2.2.9 Distribuciones Vectoriales.

Sea  $V$  un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre  $]0, T[$  con valores en  $V$ , a toda aplicación lineal y continua sobre  $D(0, T)$ . (Continua en el sentido de la convergencia definida en  $D(0, T)$ ). Dada una distribución  $T$  su valor en  $\varphi$  se representa por  $\langle T, \varphi \rangle$ .

#### Definición 2.21

Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre  $]0, T[$ , lo denotaremos por  $D'(0, T, V)$

#### Proposición 2.12

Sea  $u \in L^p(0, T, V)$ ;  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos:

$$T_u : D(0, T) \rightarrow V / \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \quad \text{En el sentido de Bochner}$$

Se puede verificar que  $T_u$  es lineal y continua en  $D(0, T)$

Demostración: Ver Stallbohm [31]

**Proposición 2.13.** Sea  $V$  un espacio de Banach si  $u \in L^1(0, T, V)$  y  $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$

para todo  $\varphi$  en  $D(0, T)$  entonces  $u(t) = 0$  casi siempre en  $]0, T[$

Demostración: Ver Zedler Eberhard [38]

**Proposición 2.14**  $T_u$  esta unívocamente determinado por  $u$  .

Demostración: Ver Ver Stallbohm [31]

**Corolario 2.1**

$L^p(0, T; V) \subseteq D'(0, T; V)$  , para  $1 \leq p \leq \infty$

**Definición 2.22.** Se dice que una sucesión  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de distribuciones sobre  $]0, T[$  con valores en  $V$ , converge para la distribución  $T$  en  $D'(0, T; V)$ , cuando  $\langle T_k, \varphi \rangle$  converge para  $\langle T, \varphi \rangle$  en  $V$  para todo  $\varphi$  en  $D(0, T)$

### 2.2.10 Derivación en $D'(0, T, V)$

Dada una distribución vectorial  $u$  definimos su derivada en el sentido de las

distribuciones vectoriales denotado por  $u'$  ó  $\frac{du}{dt}$  como

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(0, T)$$

En general la derivada de orden  $n$  se define como

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(0, T)$$

En particular todo elemento  $u \in L^p(0, T, V)$  posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre  $]0, T[$

### Definición 2.23

Sea  $V$  un espacio de Banach. Representaremos con  $C([0, T], V)$ . El espacio de las funciones que son continuas  $[0, T]$  en  $V$ .

### 2.2.11 Convergencia en $L^p(0, T, V)$

**Proposición 2.15** Sea  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $L^p(0, T, V)$  y  $u \in L^p(0, T, V)$  se dice que  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $u \in L^p(0, T, V)$  si:

$$\langle f, u_k \rangle_{L^p(0, T, V') \times L^p(0, T, V)} \rightarrow \langle f, u \rangle_{L^p(0, T, V') \times L^p(0, T, V)}$$

$$\forall f \in L^p(0, T, V'), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Demostración: Ver Stallbohm [31]

**Observación 2.2** En el caso  $V = H_0^1(\Omega)$  entonces  $V' = H^{-1}(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$\langle G, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = (G, v); \quad \forall G \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

### 2.2.12 Teoremas de Existencia

Sea  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  cuyos elementos son denotados por  $(t, x)$ . Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una

función no necesariamente continua. Consideremos la Ecuación Diferencial

Ordinaria:

$$x'(t) = f(t, x) \tag{2.1}$$

Resolver 2.1 es encontrar una función absolutamente continua  $x(t)$  definida en algún intervalo  $I$  de la recta tal que  $(t, x(t)) \in D; \forall t \in I$  y  $x'(t) = f(t, x)$

Sea  $(t_0, x_0) \in D$  consideremos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

**Definición 2.24.** Se dice que  $f$  satisface las condiciones de Caratheodory sobre  $D$  si:

(i)  $f(t, x)$  es medible en  $t$  para cada  $x$  fijo.

(ii)  $f(t, x)$  es continua en  $x$  para cada  $t$  fijo.

(iii) Para cada  $K \subset D$  compacto, existe una función real integrable  $m_k(t)$  tal

$$\text{que } |f(t, x)|_{R^n} \leq m_k(t), \forall (t, x) \in K$$

**Teorema (caratheodory) 2.8.**

Consideremos  $D = \{(t, x) \in R^{n+1}; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$  con  $a, b > 0$  y

$f: D \rightarrow R^n$  Satisfaciendo las condiciones de caratheodory sobre  $D$ , entonces existe

una solución  $x(t)$  de (2.2) en algún intervalo  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$

Demostración: ver Coddington [8]

### Definición 2.25 (Prolongamiento)

Consideremos  $\varphi$  una solución de (2.2) definida en  $[a; b]$ .  $\varphi$  si tiene un prolongamiento al intervalo  $[a; b + \beta]$ , si existe la función

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t); t \in [a, b] \\ \phi(t); t \in [b, b + \beta] \end{cases}$$

Tal que  $\bar{\varphi}$  es solución de (2.2)

### Teorema (prolongamiento) 2.9

Consideremos  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq c, c > 0\}$ , definamos: Sea  $D = [0, T] \times B$  con  $T > 0, \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq c$ , con  $f$  satisfaciendo las condiciones de Caratheodory en (2.2). Sea  $\varphi(t)$  una solución de (2.2) supongamos que en cualquier intervalo donde  $\varphi$  esta definido tenemos que  $\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k, \forall t \in I, k$ : independiente de  $I, k < c$ , entonces  $\varphi$  tiene un prolongamiento al intervalo  $[0, T]$

Demostración: ver Coddington [8]

### Resultados generales

#### Teorema 2.10 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)

Sea  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones integrables en un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  que converge casi siempre para una función  $u$ . Si existe una función  $u_0$  tal que  $|u_n| \leq u_0$  casi siempre para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

(a)  $u$  es integrable sobre  $\Omega$

$$(b) \int_{\Omega} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n$$

Demostración: Ver Brezis H. [5]

### 2.2.13 Desigualdades importantes

#### Proposición 2.16 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para funciones $L^2(\Omega)$ )

Sean  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones cuadrado integrables entonces:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Demostración: Ver Brezis H. [5]

#### Proposición 2.17 (Desigualdad de Young)

Sea  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  y  $1 < p, q < \infty$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  entonces  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Demostración: Ver Medeiros L. A. [23]

#### Proposición 2.18 (Desigualdad de Hölder)

Sean  $u \in L^p(\Omega)$  y  $v \in L^q(\Omega)$  con  $1 < p, q$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Entonces  $uv \in L^1(\Omega)$  y  $\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$ .

Demostración: Ver Medeiros L.A. y E.A de Mello [24].

### 2.2.14 Teoremas de convergencia

**Teorema 2.12 (Banach- Alouglu- Bourbacki)** Sea  $E$  un espacio de Banach separable y  $(f_n)_n$  una sucesión limitada en  $E'$ , entonces existe una subsucesion  $(f_{n_k})$  que converge para la topología  $\sigma(E', E)$

Demostración: ver Limaco [18]

**Teorema 2.13 (Kakutani)** Sea  $E$  un espacio de Banach reflexivo y  $(x_n)_n$  una sucesión acotada en  $E$  entonces existe una subsucesión  $(x_{n_k})$  que converge con la topología  $\sigma(E, E')$ .

Demostración: ver Limaco [18]

**Lema 2.1 (Lema de Lions).** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g$  y  $g_j$ , funciones de  $L^p(\Omega)$ ;  $1 < p < \infty$  tal que

$$\|g_j\|_{L^p(\Omega)} \leq C \text{ y } g_j \rightarrow g \text{ c.s en } \Omega$$

Entonces  $g_j \rightarrow g$ , en  $L^p(\Omega)$

Demostración: Ver Lions J. L. [19]

**Lema 2.2**

Sea  $A$  un espacio de Banach y  $B$  un espacio de Banach reflexivo tales que  $A \subset B$  con inclusión continua. Para cualquier  $1 \leq a, b \leq \infty$

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v \\ v'_n \rightarrow z \end{cases} \Rightarrow v' = z$$

Demostración: Ver Zheng.[39]

**Lema 2.3** Sean  $A, B$  y  $X$  espacios de Banach tales que

$A \subset X \subset B$  Supongamos que: la inclusión  $A \subset X$  es compacta  
la inclusión  $X \subset B$  es continua

Entonces, dado  $\eta > 0$ , existe una constante  $C_n > 0$  (que solo depende de  $\eta$ ) tal que

$$\|u\|_X \leq \eta \|u\|_A + C_n \|u\|_B, \forall u \in A$$

Demostración: Ver Zheng [39]

**Lema 2.4** Sean  $A$  y  $B$  espacios de Banach tales que  $A \subset B$  con inclusión continua.

Entonces, para cualquier  $1 \leq a, b \leq \infty$  se tendrá que  $W \subset C([0, T]; B)$  con inclusión continua. Considerando que:

$$W := \{v / v \in L^a(0, T, A), v' \in L^b(0, T, B)\}$$

Demostración: Ver Zheng [39]

**Lema 2.5** Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo con  $1 \leq p < \infty$ . Si  $u_n \rightarrow u$  en

$$L^p(0, T, X), \text{ entonces } \int_0^T \varphi u_n dt \rightarrow \int_0^T \varphi u dt \text{ en } X, \forall \varphi \in C[0, T]$$

Demostración: Zheng [39]

### **Teorema 2.14 (Aubin-Lions)**

Sean  $A, B$  e  $X$  espacios de Banach tales que  $A \subseteq X \subseteq B$  supongamos que:

$A$  y  $B$  reflexivos

$A \hookrightarrow X$  inclusión compacta

$X \hookrightarrow B$  inclusión continua

Entonces, para cualquier  $1 < a, b < \infty$ , la inclusión

$$W := \{v / v \in L^a(0, T, A), v' \in L^b(0, T, B)\} \subset L^a(0, T, X)$$

es compacta.

### **Observación 2.3**

El espacio  $W$  con la siguiente norma:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^a(0, T, A)} + \|v'\|_{L^b(0, T, B)}$$

Es un espacio de Banach.



### **Demostración:**

Sea  $(v_n)$  una sucesión acotada en  $W$ , luego existe una constante  $K$  tal que

$$\|v_n\|_{L^a(0,T,A)} + \|v'_n\|_{L^b(0,T,B)} \leq K, \forall n \in N$$

Se desea encontrar un  $v \in L^a(0, T, X)$  y una subsucesión  $(v_n)$  de la sucesión anterior denotada de la misma manera por comodidad, tal que  $v_n \rightarrow v$  en  $L^a(0, T, X)$  (2.3)

Como  $A$  y  $B$  son reflexivos luego  $L^a(0, T, A)$  y  $L^b(0, T, B)$  también lo son, luego por el teorema 2.13 y el lema 2.2 existen  $v \in W$  y una subsucesión  $(v_n)$  que será representada de la misma manera, tal que

$$v_n \rightarrow v \text{ en } L^a(0, T, A) \quad (2.4)$$

Definimos  $u_n = v_n - v$ , entonces  $(u_n)$  es una sucesión acotada en  $W$ , de ahí existe

$$M > \text{ tal que } \|u_n\|_W = \|u_n\|_{L^a(0,T,A)} + \|u'_n\|_{L^b(0,T,B)} \leq M, \forall n \in N$$

$$\text{Además por 2.4 } u_n \rightarrow 0 \text{ en } L^a(0, T, A)$$

### **Afirmación 2.1**

$$u_n \rightarrow 0 \text{ en } L^a(0, T, X)$$

Notar que demostrada la afirmación 2.1, esto a su vez implicara que 2.3 se cumplirá demostrando así el **teorema 2.14**.

En efecto: Por el lema 2.3, para cada  $\eta > 0$  existe  $C_\eta > 0$  tal que

$$\|u_n(t)\|_X \leq \eta \|u_n(t)\|_A + C_\eta \|u_n(t)\|_B, \forall t \in (0, T), n \in N \quad (2.5)$$

Elevando ambos lados a la potencia “ $a$ ” e integrando de  $(0, T)$  en 2.5 concluimos que para cada  $\delta > 0$ , existe  $C_\delta > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{L^a(0,T,X)}^a \leq \delta \|u_n\|_{L^a(0,T,A)}^a + C_\delta \|u_n\|_{L^a(0,T,B)}^a, \quad \forall n \in N$$

También tendremos que para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M^a}$  concluyendo que existe una constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|u_n\|_{L^a(0,T,X)}^a \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon \|u_n\|_{L^a(0,T,B)}^a, \quad \forall n \in N \quad (2.6)$$

De 2.6, si demostramos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_B^a dt = 0 \quad (2.7)$$

Se habrá demostrado la afirmación 2.1

Para Probar 2.7 se hizo uso del teorema 2.10 (TCDL) a la siguiente sucesión de funciones

$$f_n: (0, T) \rightarrow R \text{ Definida por: } f_n(t) = \|u_n(t)\|_B^a \quad n \in N$$

Requisitos para aplicar el TCDL (Teorema 2.10)

(i)  $f_n$  es integrable

En efecto, pues  $u_n \in L^a(0, T, B)$

(ii)  $f_n$  es dominada por una función integrable

En efecto, de acuerdo al lema 2.4, existe una constante  $R > 0$  tal que

$$\|u_n(t)\|_B \leq \max_{t \in [0, T]} \|u_n(t)\|_B = \|u_n\|_{C([0, T]; B)} \leq R \|u_n\|_W \leq RM$$

$$\forall n \in N$$

Por lo tanto  $|f_n(t)| = \|u_n(t)\|_B^a \leq (RM)^a, \forall n \in N$

(iii)  $f_n(s) \rightarrow 0$  casi siempre en  $(0, T)$

En efecto, sea  $s \in (0, T)$  fijaremos una función  $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$  tal que

$\varphi(0) = -1$  y  $\varphi(T) = 0$  tomaremos  $\lambda \in ]0, 1 - \frac{s}{T}[$  definimos:

$$w_n(t) := u_n(s + \lambda t)$$

Entonces  $u_n(s) = w_n(0)$

$$\begin{aligned} &= \varphi(t)w_n(t)|_0^T \\ &= \int_0^T (\varphi w_n)' dt = \int_0^T \varphi' w_n dt + \int_0^T \varphi w_n' dt := \alpha_n + \beta_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

En virtud de 2.8, Bastaría mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$n \geq n_0$  entonces  $\|\alpha_n + \beta_n\|_B < \epsilon$

Notar que  $\beta_n = \int_0^T \lambda \varphi(t) u_n'(s + \lambda t) dt = \int_s^{s+\lambda T} \varphi(\lambda^{-1}(\tau - s)) u_n'(\tau) d\tau$

Por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned} \|\beta_n\|_B &\leq C \int_s^{s+\lambda T} \|u_n'(\tau)\|_B d\tau \leq C(\lambda T)^{1-\frac{1}{b}} \left( \int_s^{s+\lambda T} \|u_n'(\tau)\|_B^b d\tau \right)^{\frac{1}{b}} \\ &\leq C(\lambda T)^{1-\frac{1}{b}} \left( \int_0^T \|u_n'(\tau)\|_B^b d\tau \right)^{\frac{1}{b}} \leq CT^{1-\frac{1}{b}} M \lambda^{1-\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos escoger  $\lambda$  suficientemente pequeño de tal forma que se obtenga

$$\|\beta_n\|_B \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

Además de como  $u_n \rightarrow 0$  en  $L^a(0, T, A)$

$$u_n|_{(s, s+\lambda T)} \rightarrow 0 \text{ en } L^a(s, s + \lambda T; A)$$

Luego de acuerdo al lema 2.5

$$\alpha_n = \int_0^T \varphi' w_n dt = \lambda^{-1} \int_s^{s+\lambda T} \varphi'(\lambda^{-1}(\tau - s)) u_n(\tau) d\tau \rightarrow 0 \text{ en } A$$

Esto a su vez implica que  $(\alpha_n)$  es acotada en A, como  $A \subset X$  es compacta y  $X \subset B$  es continua luego  $A \subset B$  es compacta, luego por compacidad  $(\alpha_n)$  posee una subsucesión que será denotada de la misma manera tal que  $\alpha_n \rightarrow 0$  en B.

De ahí que existe  $n_1 \in N$  tal que si  $n > n_1$  se tiene que  $\|\alpha_n\|_B \leq \frac{\epsilon}{2}$  (2.10)

De 2.9 y 2.10, tendremos que dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in N$  tal que

$$n \geq n_0 \text{ entonces } \|\alpha_n + \beta_n\|_B < \epsilon$$

Demostrando así (iii).

De esta manera cumpliéndose todas las hipótesis del teorema 2.10 (TCDL), podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_B^a dt = \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\|_B^a dt = \int_0^T 0 dt = 0$$

Terminando así nuestra prueba ■.

### 2.3 El operador p-Laplaciano

**Definición 2.26** El operador  $\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ , definido como:

$$\Delta_p u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

Es llamado el operador p-Laplaciano o Seudolaplaciano.

Nota:  $p$  y  $p'$  conjugados.

**Definición 2.27** sea  $V$  un espacio de Banach, consideremos el funcional  $J: V \rightarrow R$  y supongamos que existe el limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (J(u + \lambda v) - J(u)) \quad ; \quad \forall u, v \in V$$

Fijado  $u \in V$ , diremos que  $J$  es derivable en el sentido de Gateux, cuando existe

$$J'(u) \in V' \text{ tal que } \langle J'(u), v \rangle_{V', V} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (J(u + \lambda v) - J(u)) \text{ , } \forall v \in V$$

**Definición 2.28** Si  $J$  es derivable según Gateux en todo  $u \in V$ , se dice que  $J$  es derivable según Gateux en  $V$ . Siendo la derivada de  $J$  en  $u$  denotada como  $J'(u)$

**Proposición 2.19** Si  $J: V \rightarrow R$  es un funcional convexo y derivable en el sentido de Gateux, entonces el operador  $u \rightarrow J'(u)$  (derivada en el sentido de Gateux) de  $V$  en  $V'$  es monótono y hemicontinuo.

Demostración: Ver Lions J. L. [19]

**Definición 2.29** Sea  $V$  un espacio de Banach reflexivo y  $A: V \rightarrow V'$  un operador. Se dice que el operador  $A$  es monótono si  $\langle Au - Av, u - v \rangle_{V' \times V} \geq 0$  ;  $\forall u, v \in V$

**Definición 2.30** Sea  $V$  un espacio de Banach reflexivo y  $A: V \rightarrow V'$  un operador. Se dice que el operador  $A$  es hemicontinuo, si dada toda aplicación  $\lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V' \times V}$  es una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , para todo  $u, v \in V$ .

**Definición 2.31** Sea  $V$  un espacio de Banach reflexivo y  $A: V \rightarrow V'$  un operador. Se dice que el operador  $A$  es coercivo si

$$\frac{\langle Au, u \rangle_{V' \times V}}{|u|_V} \rightarrow +\infty, \text{ cuando } |u|_V \rightarrow +\infty$$

**Definición 2.32** Sea  $V$  un espacio de Banach reflexivo y  $A: V \rightarrow V'$  un operador. Se dice que el operador  $A$  es acotado si,

Dado el conjunto  $B \subseteq V$ , acotado en  $V$  entonces  $A(B)$  es acotado en  $V'$

**Teorema 2.15 (Propiedades del operador p-Laplaciano)**

El operador p-Laplaciano  $\Delta_p$  tiene las siguientes propiedades:

- (i) Monótono y Hemicontinuo
- (ii) Acotado
- (iii) Coercivo.

**Demostración:**

**Prueba de (i)**, En efecto, previamente definamos el operador  $J: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow R$  como

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \frac{1}{p} \|u\|_0^p$$

**Afirmación 2.2** El operador J es convexo

Demostración:

Sean  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y  $\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned} J((1-\theta)u + \theta v) &= \frac{1}{p} \|(1-\theta)u + \theta v\|_0^p \\ &\leq \frac{1}{p} \left( (1-\theta)\|u\|_0 + \theta\|v\|_0 \right)^p \\ &\leq \frac{1}{p} (1-\theta)\|u\|_0^p + \frac{\theta}{p} \|v\|_0^p = (1-\theta)J(u) + \theta J(v) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Estas desigualdades se obtuvieron haciendo uso de propiedades de norma y en virtud a que la función  $f: R \rightarrow R$  definida por:  $f(t) = t^p$ ;  $p > 2$  es convexa.

De 2.11, tendremos

$$J((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v)$$

Por lo tanto el operador J es convexo ■.

En virtud de la Proposición 2.19, como J es convexo y derivable en el sentido de Gateux entonces su derivada en el sentido de Gateux es monótona y hemicontinua. Y al ser el operador p Laplaciano tal derivada hemos concluido la demostración de (i). ■.

**Prueba (ii)**

En efecto, sea  $B$  un conjunto acotado de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , consideremos  $\varphi \in D(\Omega)$ , con

$$u \in B \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_p u, \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\Omega)}^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_0^{p-1} \|\varphi\|_0, \forall \varphi \in D(\Omega) \end{aligned}$$

Luego

$$|\langle \Delta_p u, \varphi \rangle| \leq \|u\|_0^{p-1} \|\varphi\|_0, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Por argumentos de densidad y continuidad, tendremos que

$$|\langle \Delta_p u, v \rangle| \leq \|u\|_0^{p-1} \|v\|_0, \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

De ahí que 
$$\frac{|\langle \Delta_p u, v \rangle|}{\|v\|_0} \leq \|u\|_0^{p-1}$$

Siendo así 
$$|\Delta_p u|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|u\|_0^{p-1}$$

Finalmente concluimos que, dado  $u \in B \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\|u\|_0 \leq M$  se tiene que

$$|\Delta_p u|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \quad \blacksquare.$$



### Prueba (iii)

En efecto, dado  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se verifica que

$$\langle \Delta_p u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \|u\|_0^p$$

Obteniendo así

$$\frac{\langle \Delta_p u, u \rangle}{\|u\|_0^p} = \|u\|_0^{p-1} \text{ de ahí } \lim_{\|u\|_0 \rightarrow +\infty} \frac{\langle \Delta_p u, u \rangle}{\|u\|_0^p} = \lim_{\|u\|_0 \rightarrow +\infty} \|u\|_0^{p-1} = +\infty$$

Terminando nuestra demostración. ■.

### Proposición 2.20

$$\langle \Delta_p u(t), u'(t) \rangle = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^p$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^p &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{-1} \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx \\ &= \langle \Delta_p u(t), u'(t) \rangle \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

**Teorema 2.16** El conjunto de combinaciones lineales finitas de productos de tipo  $\theta w$

con  $\theta \in C^1[0, T]$  y  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  es denso en el espacio

$$V = \left\{ v \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) \right\}$$

Demostración: Ver Tsutsumi [33]

**Teorema 2.17** (Helinger Toeplitz) Sea  $T$  un operador lineal definido en un espacio de Hilbert  $H$ . Satisfaciendo  $(T(x), y) = (x, T(y))$ ,  $\forall x, y \in H$ , entonces  $T$  es acotada

Demostración: Ver Teman [32]

**Teorema 2.18** (Gronwall) Sea  $Z(t)$  una función real absolutamente continua en  $[0, a[$  tal que para todo  $t \in [0, a[$  Si se tiene que

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s) ds$$

Entonces  $z(t) \leq Ce^t$ , para todo  $t \in [0, a[$ , Consecuentemente  $Z(t)$  es acotada.

Demostración: Ver Medeiros [24]

**Teorema 2.19 (Nakao)**

Sea  $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$  una función acotada con  $\varphi(0) > 0$  y supongamos que existe  $M > 0$  y  $\alpha > 0$  tal que  $Sup_{s \in [t; t+1]} [\varphi(s)]^{\alpha+1} \leq M\{\varphi(t) - \varphi(t+1)\}$ ,  $t \geq 0$

Entonces existen  $M_1 > 0$  tal que

$$\varphi(t) \leq M_1 t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall t : grande$$

Esto quiere decir que  $\varphi(t)$  decae polinomicamente a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$

Demostración: Ver Nakao [25]

## 2.4 Existencia de Soluciones Débiles

### 2.4.1 El modelo Matemático

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1 \\ u = v = 0, \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad \text{en } \Omega$$

Donde  $\Omega \subseteq R^n$ , Abierto, acotado, y suficientemente regular. Consideremos

$T > 0$ , Definimos:  $Q = \Omega \times (0, T)$  como el cilindro en  $R^{n+1}$  con base en  $\Omega$  y altura

$T$ . Definimos su frontera por:  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$

Siendo:  $\Gamma$  frontera de  $\Omega$ .

$\Delta$ : Es el operador Laplaciano

$\Delta_p$ : Es el operador  $p$ -Laplaciano.

Satisfaciendo lo siguiente:

$n \in N$ ,  $p \in R$  tal que  $2 < p < n$

$\rho \in R$  tal que  $-1 \leq \rho \leq \frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np}$

## 2.4.2 Definición de solución débil

Deducción formal del concepto de solución débil. Consideremos el problema de valores iniciales y de frontera del siguiente sistema de evolución

$$u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2}|u|^\rho u = f_1 \quad (2.4.2)$$

$$v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2}|v|^\rho v = f_2 \quad (2.4.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad (2.4.4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad , \quad v'(x, 0) = v_1(x) \quad (2.4.5)$$

$$u = v = 0 \quad , \quad \text{en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \quad (2.4.6)$$

Multiplicando (2.4.2) por  $\Psi(x, t) = \varepsilon(t)w(x)$ , con  $\varepsilon \in D(0, T)$ ,  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$u''\Psi + \Delta_p u\Psi - \Delta u'\Psi + |v|^{\rho+2}|u|^\rho u\Psi = f_1\Psi$$

Integrando en  $Q$ , tenemos

$$\int_Q u''\Psi dQ + \int_Q \Delta_p u\Psi - \int_Q \Delta u'\Psi dQ + \int_Q |v|^{\rho+2}|u|^\rho u\Psi dQ = \int_Q f_1\Psi dQ$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u'' \varepsilon w dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta_p u \varepsilon w dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u' \varepsilon w dx dt + \int_0^T \int_\Omega |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \varepsilon w dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f_1 \varepsilon w dx dt \quad (2.4.7) \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\int_0^T \int_\Omega u'' \varepsilon w dx dt = - \int_0^T \varepsilon'(t) (u', w) dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta_p u \varepsilon(t) w(t) dx dt = \int_0^T \varepsilon(t) \langle \Delta_p u, w \rangle dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta u' \varepsilon(t) w(x) dx dt = - \int_0^T \varepsilon(t) \langle (u', w) \rangle dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u \varepsilon w dx dt = \int_0^T \varepsilon(t) \langle |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u, w \rangle dt$$

Reemplazando lo de arriba en (2.4.7)

$$\begin{aligned} - \int_0^T \varepsilon'(t) \langle (u', w) \rangle dt + \int_0^T \varepsilon(t) \langle \Delta_p u, w \rangle dt + \int_0^T \varepsilon(t) \langle (u', w) \rangle dt + \int_0^T \varepsilon(t) \langle |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u, w \rangle dt \\ = \int_0^T (f_1, w) \varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

Usando notación distribucional

$$- \langle (u', w), \frac{d}{dt} \varepsilon \rangle + \langle \langle \Delta_p u, w \rangle, \varepsilon \rangle + \langle \langle (u', w) \rangle, \varepsilon \rangle + \langle \langle |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u, w \rangle, \varepsilon \rangle = \langle (f_1, w), \varepsilon \rangle$$

Haciendo uso de la derivada distribucional

$$\left\langle \frac{d}{dt} (u', w), \varepsilon \right\rangle + \langle \langle \Delta_p u, w \rangle, \varepsilon \rangle + \langle \langle (u', w) \rangle, \varepsilon \rangle + \langle \langle |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u, w \rangle, \varepsilon \rangle = \langle (f_1, w), \varepsilon \rangle$$

$$\forall \varepsilon \in D(0, T)$$

Luego

$$\frac{d}{dt} (u', w) + \langle \Delta_p u, w \rangle + ((u', w)) + \langle |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, w \rangle = (f_1, w) \text{ En } D'(0, T),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.4.8)$$

Análogamente, obtendremos:

$$\frac{d}{dt} (v', w) + \langle \Delta_p v, w \rangle + ((v', w)) + \langle |u|^{\rho+2} |v|^\rho v, w \rangle = (f_2, w) \text{ En } D'(0, T),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.4.9)$$

**Definición 2.4.1 (Solución débil)**

Sea  $T > 0$ , un par de funciones  $u, v : Q \rightarrow R$  satisfaciendo:

$$u, v \in L^\infty(0, T, w_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u', v' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$$

Es llamada **Solución Débil del problema 2.4.1**, si se verifican las siguientes condiciones:

$$\frac{d}{dt} (u'(t), w) + \langle \Delta_p u(t), w \rangle + ((u'(t), w)) + \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle = (f_1, w),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T)$$

$$\frac{d}{dt} (v'(t), w) + \langle \Delta_p v(t), w \rangle + ((v'(t), w)) + \langle |u(t)|^{\rho+2} |v(t)|^\rho v(t), w \rangle = (f_2, w),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T)$$

Además de:  $u(0) = u_0$ ,  $v(0) = v_0$   
 $u'(0) = u_1$ ,  $v'(0) = v_1$

### **Teorema 2.4.1 (Existencia de Soluciones Débiles)**

Asumiendo  $u_0, v_0 \in w_0^{1,p}(\Omega)$  y  $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ , con  $f_1, f_2 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ,

entonces el problema (2.4.1) admite Soluciones Débiles.

#### **Demostración:**

El método usado fue el de **Faedo-Galerkin**, el cual consta de 4 etapas:

Etapa 1: Solución local

Etapa 2: Estimativas a priori

Etapa 3: Pasaje al límite

Etapa 4: Condiciones iniciales

### **2.4.3 Algunos Resultados importantes**

#### **Proposición 2.4.1**

Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $2 < p < n$ , Además  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $-1 \leq \rho \leq \frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np}$

Entonces 
$$\rho < \frac{4}{np-2}$$

Demostración:

Se puede ver que:  $np(n-p) > 0$  (De  $2 < p < n$ )

Haciendo cuentas

$$4np(p-n) < 0$$

$$4np^2 - 4n^2p + 8n - 8 - 8p + 4np < 8n - 8 - 8p + 4np$$

$$(4 - 4n + 4p)(np - 2) < 8(n - 1 - p) + 4np$$

$$4(1 - n + p)(np - 2) < 4[2(n - 1 - p) + np]$$

$$\rho \leq \frac{4(1 - n + p)}{[2(n - 1 - p) + np]} < \frac{4}{np - 2} \quad \blacksquare.$$

### Proposición 2.4.2

Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ,  $\frac{4n+2}{4+n} < p < n$ , entonces  $\frac{4}{np-2} \leq \frac{1}{n-p}$

Demostración:

De la hipótesis, tenemos

$$\frac{4n + 2}{4 + n} < p$$

Luego

$$4n + 2 < p(4 + n)$$

$$4(n - p) < pn - 2$$

$$\frac{4}{np - 2} < \frac{1}{n - p} \quad \blacksquare.$$



### Proposición 2.4.3

Definamos

$$\theta = \frac{2np(\rho + 2)}{(np - 2)(\rho + 2) + 2np(\rho + 1)} \quad , \quad \delta = \frac{2np(\rho + 2)}{(np + 2)(\rho + 2) - 2np(\rho + 1)}$$

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\text{I) } 1 < \theta < \frac{\rho+2}{\rho+1} \quad \text{II) } 1 < \delta \leq \frac{np}{n-p} \quad \text{III) } \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = 1$$

Demostración:

**En primer lugar demostraremos I**, por la Proposición 2.4.1

$$\rho < \frac{4}{np - 2}$$

Haciendo cuentas

$$\rho + 2 < \frac{4}{np - 2} + 2 = \frac{2np}{np - 2}$$

$$(np - 2)(\rho + 2) < 2np$$

$$(np - 2)(\rho + 2) + 2np(\rho + 1) < 2np + 2np(\rho + 1) = 2np(\rho + 2)$$

$$\frac{1}{(np - 2)(\rho + 2) + 2np(\rho + 1)} > \frac{1}{2np(\rho + 2)}$$

De ahí

$$\frac{2np(\rho + 2)}{(np - 2)(\rho + 2) + 2np(\rho + 1)} > \frac{2np(\rho + 2)}{2np(\rho + 2)} = 1$$

Obteniendo

$$\theta > 1 \quad (2.4.10)$$

Por otro lado, escribiendo convenientemente

$$\theta = \frac{\rho+2}{\frac{(np-2)(\rho+2)}{2np} + (\rho+1)} < \frac{\rho+2}{\rho+1} \quad (2.4.11)$$

Concluyendo de 2.4.10 y 2.4.11 que

$$1 < \theta < \frac{\rho + 2}{\rho + 1} \quad \blacksquare.$$

## Demostrando II

$$\delta = \frac{2np(\rho + 2)}{(np + 2)(\rho + 2) - 2np(\rho + 1)} > \frac{2np(\rho + 2)}{(np + 2)(\rho + 2)} = \frac{2np}{np + 2} \quad (2.4.12)$$

Usando el hecho que  $2 < p < n$

Obtendremos  $2pn > 2 + pn > 0$  entonces  $\frac{1}{2pn} < \frac{1}{2+pn}$

$$\text{De ahí} \quad 1 = \frac{2pn}{2pn} < \frac{2pn}{2+pn} \quad (2.4.13)$$

Usando 2.4.13 en 2.4.12 obtenemos  $\delta > 1$  (2.4.14)

Por otro lado

Sabemos que

$$\rho \leq \frac{4(1 - n + p)}{2(n - p - 1) + np}$$

Luego, haciendo unos cálculos

$$\rho[2(n - p - 1) + np] \leq 4(1 - n + p)$$

$$2n\rho + 4n - 2p\rho - 4p \leq -np\rho + 2\rho + 4$$

$$2(\rho + 2)(n - p) \leq (np + 2)(\rho + 2) - 2np(\rho + 1)$$

$$\frac{2(\rho + 2)}{(np + 2)(\rho + 2) - 2np(\rho + 1)} \leq \frac{1}{n - p}$$

Multiplicando por  $np > 0$

$$\delta = \frac{2(\rho + 2)np}{(np + 2)(\rho + 2) - 2np(\rho + 1)} \leq \frac{np}{n - p}$$

Obteniendo así

$$\delta \leq \frac{np}{n - p} \tag{2.4.15}$$

Finalmente de 2.4.14 y 2.4.15 concluimos que  $1 < \delta \leq \frac{np}{n - p}$  ■.

### Demostrando III

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} &= \frac{(np-2)(\rho+2) + 2np(\rho+1)}{2np(\rho+2)} + \frac{(np+2)(\rho+2) - 2np(\rho+1)}{2np(\rho+2)} \\ &= \frac{(np-2)(\rho+2) + 2np(\rho+1) + (np+2)(\rho+2) - 2np(\rho+1)}{2np(\rho+2)} = 1 \blacksquare.\end{aligned}$$

### Proposición 2.4.4

Definamos:  $\alpha = \frac{\rho+2}{(\rho+1)\theta}$     $\beta = \frac{\rho+2}{(\rho+2)-(\rho+1)\theta}$

Se tienen las siguientes relaciones:

I)  $\alpha, \beta > 1$                       II)  $\theta\beta = \frac{2np}{np-2}$                       III)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

### Demostración:

#### En primer lugar, demostremos I

Por la Prop. 2.4.3

$1 < \theta < \frac{\rho+2}{\rho+1}$     De ahí     $0 < \rho+1 < (\rho+1)\theta < \rho+2$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho+1} &> \frac{1}{(\rho+1)\theta} > \frac{1}{\rho+2} \\ \alpha &= \frac{\rho+2}{(\rho+1)\theta} > \frac{\rho+2}{\rho+2} = 1\end{aligned}$$

De esto último  $\alpha > 1$  ■.

Ahora para  $\beta$

$$\beta = \frac{\rho + 2}{(\rho + 2) - (\rho + 1)\theta} > \frac{\rho + 2}{\rho + 2} = 1$$

Así  $\beta > 1$  ■.

Demostrando así (I)

### **Demostrando II**

Nuestro objetivo es probar que:  $\theta\beta = \frac{2np}{np-2}$

Dividiendo convenientemente

$$\theta\beta = \frac{\theta(\rho+2)}{(\rho+2)-(\rho+1)\theta} = \frac{\frac{\theta(\rho+2)}{\theta}}{\frac{(\rho+2)-(\rho+1)\theta}{\theta}} = \frac{\rho+2}{\frac{\rho+2}{\theta} - (\rho+1)} \quad (2.4.16)$$

Por otro lado

$$\frac{\rho+2}{\theta} = \frac{(np-2)(\rho+2)+2np(\rho+1)}{2np} \quad (2.4.17)$$

Reemplazando 2.4.17 en 2.4.16

$$\theta\beta = \frac{2np}{np-2} \quad \blacksquare.$$

### Demostrando III

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{(\rho + 1)\theta}{\rho + 2} + \frac{(\rho + 2) - (\rho + 1)\theta}{\rho + 2} = 1 \quad \blacksquare.$$

### Teorema 2.4.2

Sean  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  entonces

I)  $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$

II)  $|v|^{\rho+2}|u|^\rho u \in L^\theta(\Omega)$  ;  $|u|^{\rho+2}|v|^\rho v \in L^\theta(\Omega)$

Demostración:

### Primero demostraremos I

$$uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$$

En efecto: Por la Prop 2.4.1

$$-1 \leq \rho < \frac{4}{np-2}$$

De ahí

$$1 \leq \rho + 2 < \frac{4}{np-2} + 2 = \frac{2np}{np-2}$$

Multiplicando por 2 la desigualdad anterior

$$1 < 2 \leq 2(\rho + 2) < \frac{4np}{np-2} \Rightarrow 1 < 2(\rho + 2) < \frac{4np}{np-2}$$

Asumiendo  $\frac{4n+2}{4+n} < p < n$  luego por la Prop. 2.4.2

$$1 < 2(\rho + 2) < \frac{4np}{np - 2} \leq \frac{np}{n - p}$$

$$1 < 2(\rho + 2) < \frac{np}{n - p}$$

De la desigualdad anterior y por la Proposición 2.10, tendremos que:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$$

Luego como  $u, v \in w_0^{1,p}(\Omega)$  de ahí que  $|u|^{\rho+2}, |v|^{\rho+2}$  pertenecen a  $L^2(\Omega)$ .

Además por Holder.

$$\int_{\Omega} |uv|^{\rho+2} dx \leq \left( \int_{\Omega} |u|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \blacksquare.$$

**En segundo lugar, demostremos II**

$$|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u \in L^{\theta}(\Omega)$$

En efecto:

Basta mostrar que

$$\int_{\Omega} ||v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u|^{\theta} dx < \infty$$

Desarrollando la integral

$$\int_{\Omega} ||v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u|^{\theta} dx = \int_{\Omega} ||uv|^{\theta(\rho+1)} |v|^{\theta}| dx \quad (2.4.18)$$

**Afirmación 2.4.1**

$$|uv|^{(\rho+1)\theta} \in L^{\alpha}(\Omega)$$

Prueba:

$$\int_{\Omega} ||uv|^{(\rho+1)\theta}|^{\alpha} dx = \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} dx = \int_{\Omega} |uv|^{\rho+2} dx < \infty$$

Esto último por el teorema 2.4.2 parte I. Probando así la afirmación 2.4.1.

**Afirmación 2.4.2**

$$|v|^{\theta} \in L^{\beta}(\Omega)$$

Prueba:

Basta mostrar que

$$\int_{\Omega} ||v|^{\theta}|^{\beta} dx < \infty$$

Equivalentemente



$$\int_{\Omega} ||v|^{\theta}|^{\beta} dx = \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx$$

De la Prop. 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4

$$1 < \theta\beta = \frac{2np}{np-2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{np}{n-p} \right) < \frac{np}{n-p}$$

De la desigualdad anterior y por la proposición 2.10

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta\beta}(\Omega)$$

En virtud de esta última inmersión continua:  $\int_{\Omega} ||v|^{\theta}|^{\beta} dx = \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx < \infty$

Demostrando así la afirmación 2.4.2.

Teniendo presente las afirmaciones 2.4.1 y 2.4.2 en 2.4.18, luego por Holder tendremos

$$\int_{\Omega} ||v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u|^{\theta} dx = \int_{\Omega} ||\mathbf{uv}|^{\theta(\rho+1)} |v|^{\theta}| dx \left( \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \left( \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx \right)^{1/\beta} < \infty$$

Demostrando así que

$$|v|^{\rho+2}|u|^{\rho}u \in L^{\theta}(\Omega)$$

Terminando así nuestra demostración. ■.

#### 2.4.4 Construcción del espacio $V_m$

Consideremos:

$$\frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad p, q_k > 0$$

Luego en virtud a las inmersiones de Sobolev, tendremos

$$w_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow w_0^{m-k, q_k}(\Omega); m \geq 1$$

Tomando en particular  $p = 2$ ,  $q_k = p$ ,  $k = m - 1$

$$w_0^{m,2}(\Omega) \hookrightarrow w_0^{1,p}(\Omega) \quad ; \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{(m-1)}{n}$$

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow w_0^{1,p}(\Omega) \quad ; \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{(m-1)}{n} \quad \leftrightarrow \quad m = n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) + 1$$

De ahí que

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow w_0^{1,p}(\Omega) \quad ; \quad m = n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) + 1 > 0$$

Consideremos  $s > m$

$$w_0^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow w_0^{m,2}(\Omega)$$

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

Luego  $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , con inmersión continua, densa y compacta

De ahí existe una base Hilbertiana de  $H_0^S(\Omega)$ , ortonormal completa en  $L^2(\Omega)$

Sea  $\{w_j\}$  dicha base

Consideremos los  $m$  primeros  $w_j$

Entonces  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subset H_0^S(\Omega)$

Denotemos por  $V_m = L\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  el espacio vectorial de dimensión finita denso en  $H_0^S(\Omega)$ .

## 2.5 Etapa 1: Solución local

Consideremos el PVI y de frontera aproximado

$$\begin{aligned} (u''_m(t), w) + \langle \Delta_p u_m(t), w \rangle + ((u'_m(t), w)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle \\ = (f_1(t), w), \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$\begin{aligned} (v''_m(t), w) + \langle \Delta_p v_m(t), w \rangle + ((v'_m(t), w)) + \langle |u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), w \rangle \\ = (f_2(t), w), \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ en } w_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.5.3)$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.5.4)$$

$$v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0 \text{ en } w_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.5.5)$$

$$v'_m(0) = v_{1m} \rightarrow v_1 \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.5.6)$$

La función  $u_m$  es definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_m &: [0, T_m[ \rightarrow V_m \\ t &\rightarrow u_m(t) = \sum_{i=1}^m k_{im}(t)w_i, \quad k_{im} \in C^\infty[0, T] \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Análogamente, definimos la función  $v_m$

$$\begin{aligned} v_m &: [0, T_m[ \rightarrow V_m \\ t &\rightarrow v_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t)w_i, \quad l_{im} \in C^\infty[0, T] \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Además

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^m k_{0im}(t)w_i; \quad k_{0im} \in C^\infty[0, T] \quad (2.5.9)$$

$$u'_m(0) = \sum_{i=1}^m k_{1im}(t)w_i; \quad k_{1im} \in C^\infty[0, T] \quad (2.5.10)$$

$$v_m(0) = \sum_{i=1}^m l_{0im}(t)w_i; \quad l_{0im} \in C^\infty[0, T] \quad (2.5.11)$$

$$v'_m(0) = \sum_{i=1}^m l_{1im}(t)w_i; \quad l_{1im} \in C^\infty[0, T] \quad (2.5.12)$$

De (2.5.7) y (2.5.9) tenemos

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^m k_{im}(0)w_i = \sum_{i=1}^m k_{0im}(t)w_i$$

Agrupando convenientemente

$$\sum_{i=1}^m k_{im}(0)w_i - \sum_{i=1}^m k_{oim}(t)w_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^m [k_{im}(0) - k_{oim}(t)]w_i = 0$$

Como  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  es LI

Entonces  $k_{im}(0) - k_{oim}(t) = 0$  ;  $\forall i \in I_m$

$$k_{im}(0) = k_{oim}(t); \quad \forall i \in I_m$$

Por otro lado, en 2.5.1 hacemos  $w = w_j$  , para  $j = 1, \dots, m$  , obteniendo así

$$\sum_{i=1}^m k''_{im}(t)(w_i, w_1) + \langle \Delta_p u_m(t), w_1 \rangle + \sum_{i=1}^m k'_{im}(t) ((w_i, w_1)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w_1 \rangle = (f_1(t), w_1)$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^m k''_{im}(t)(w_i, w_m) + \langle \Delta_p u_m(t), w_m \rangle + \sum_{i=1}^m k'_{im}(t) ((w_i, w_m)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w_m \rangle = (f_1(t), w_m)$$

Como  $\{w_1, \dots, w_m\}$  es un conjunto ortonormal en  $L^2(\Omega)$  el sistema anterior se reduce a

$$k''_{jm}(t) + \langle \Delta_p u_m(t), w_j \rangle + \sum_{i=1}^m k'_{im}(t) ((w_i, w_j)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j \rangle = (f_1(t), w_j) \quad (2.5.13)$$

Para  $j = 1, \dots, m$

De 2.5.13 equivalentemente tendremos

$$k''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m k'_{im}(t) \left( (w_i, w_j) \right) = (f_1(t), w_j) - \bar{P} \left( k_{jm}(t) \right) - \bar{F} \left( k_{jm}(t), l_{jm}(t) \right) \quad (2.5.14)$$

Para  $j = 1, \dots, m$

Donde:

$$\bar{P} \left( k_{jm}(t) \right) = \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right), w_j \rangle$$

$$\bar{F} \left( k_{jm}(t), l_{jm}(t) \right) = \left\langle \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle$$

De 2.5.1.4 obtenemos

$$k''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m k'_{im}(t) \left( (w_i, w_j) \right) = H_j \left( t, k_{jm}(t), l_{jm}(t) \right), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.5.15)$$

Donde:

$$H_j \left( t, k_{jm}(t), l_{jm}(t) \right) = (f_1(t), w_j) - \bar{P} \left( k_{jm}(t) \right) - \bar{F} \left( k_{jm}(t), l_{jm}(t) \right)$$

De 2.5.15 para  $j = 1, \dots, m$ . Luego escribiendo matricialmente

$$\begin{bmatrix} k''_{1m}(t) \\ \vdots \\ k''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_1, w_m)) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ ((w_m, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_{1m}(t) \\ \vdots \\ k'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(t, k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ H_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \end{bmatrix}$$

Haciendo

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{1m}(t) \\ \vdots \\ k_{mm}(t) \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_1, w_m)) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ ((w_m, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} ; \quad L(t) = \begin{bmatrix} l_{1m}(t) \\ \vdots \\ l_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$H(t, K(t), L(t)) = \begin{bmatrix} H_1(t, k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ H_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \end{bmatrix}$$

Obteniendo así

$$K''(t) + BK'(t) = H(t, K(t), L(t))$$

Hacemos un cambio de variable

$$X(t) = K'(t) \tag{2.5.16}$$

De ahí, derivando respecto de “t” en 2.5.16

$$X'(t) = H(t, K(t), L(t)) - BK'(t) \tag{2.5.17}$$

Análogamente en 2.5.2 (Segunda ecuación del sistema aproximado), resulta

$$l''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m l'_{im}(t) ((w_i, w_j)) = (f_2(t), w_j) - \bar{Q} (l_{jm}(t)) - \bar{G} (k_{jm}(t), l_{jm}(t)) \tag{2.5.18}$$

$$j = 1, \dots, m$$

Donde:

$$\bar{Q}(l_{jm}(t)) = \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right), w_j \rangle$$

$$\bar{G}(k_{jm}(t), l_{jm}(t)) = \left\langle \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle$$

De 2.5.18 obtenemos

$$l''_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m l'_{im}(t) ((w_i, w_j)) = R_j(t, k_{jm}(t), l_{jm}(t)), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.5.19)$$

Donde:

$$R_j(t, k_{jm}(t), l_{jm}(t)) = (f_2(t), w_j) - \bar{Q}(l_{jm}(t)) - \bar{G}(k_{jm}(t), l_{jm}(t))$$

De 2.5.19 para  $j = 1, \dots, m$ . Luego escribiendo matricialmente

$$\begin{bmatrix} l''_{1m}(t) \\ \vdots \\ l''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_1, w_m)) \\ \vdots & & & & \cdot \\ \vdots & & & & \cdot \\ \vdots & & & & \cdot \\ ((w_m, w_1)) & \cdot & \cdot & \cdot & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l'_{1m}(t) \\ \vdots \\ l'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(t, k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ R_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \end{bmatrix}$$

Haciendo

$$R(t, K(t), L(t)) = \begin{bmatrix} R_1(t, k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ R_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \end{bmatrix}$$

Obteniendo así



$$L''(t) + BL'(t) = R(t, K(t), L(t))$$

Hacemos un cambio de variable

$$Y(t) = L'(t) \tag{2.5.20}$$

Derivando respecto de “t” en 2.5.20

$$Y'(t) = R(t, K(t), L(t)) - BL'(t) \tag{2.5.21}$$

De 2.5.16, 2.5.17, 2.5.20 y 2.5.21

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K'(t) \\ X'(t) \\ L'(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X(t) \\ H(t, K(t), L(t)) - BX(t) \\ Y(t) \\ R(t, K(t), L(t)) - BY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) \\ -BX(t) \\ Y(t) \\ -BY(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ H(t, K(t), L(t)) \\ \theta \\ R(t, K(t), L(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta & I & \theta & \theta \\ \theta & -B & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & I \\ \theta & \theta & \theta & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(t) \\ X(t) \\ L(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ H(t, K(t), L(t)) \\ \theta \\ R(t, K(t), L(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hacemos:

$$z(t) = \begin{bmatrix} K(t) \\ X(t) \\ L(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} \theta & I & \theta & \theta \\ \theta & -B & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta & I \\ \theta & \theta & \theta & -B \end{bmatrix} ; \quad M(t, Z(t)) = \begin{bmatrix} \theta \\ H(t, K(t), L(t)) \\ \theta \\ R(t, K(t), L(t)) \end{bmatrix}$$

Obteniendo así

$$Z'(t) = DZ(t) + M(t, Z(t))$$

Probaremos que:

$$\varphi : [0, T] \times R^{4m} \rightarrow R^{4m}$$

$$(t, z) \rightarrow \varphi(t, z) = Dz + M(t, z) \quad (2.5.22)$$

Satisface las condiciones de **Caratheodory**

Reescribiendo  $\varphi$  definida en 2.5.22, buscando una forma equivalente para la

función M.

Como  $z \in R^{4m}$  luego  $z = (k, x, l, y)$  ;  $k, x, l, y \in R^m$

$$M(t, z) = \begin{bmatrix} \theta \\ H(t, k(t), l(t)) \\ \theta \\ R(t, k(t), l(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ H_1(t, k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ H_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \\ \theta \\ R_1(t, l_{1m}(t), k_{1m}(t)) \\ \vdots \\ R_m(t, k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ (f_1(t), w_1) - \bar{P}(k_{1m}(t)) - \bar{F}(k_{1m}(t), l_{1m}(t)) \\ \vdots \\ (f_1(t), w_m) - \bar{P}(k_{mm}(t)) - \bar{F}(k_{mm}(t), l_{mm}(t)) \\ \theta \\ (f_2(t), w_1) - \bar{Q}(l_{1m}(t)) - \bar{G}(l_{1m}(t), k_{1m}(t)) \\ \vdots \\ (f_2(t), w_m) - \bar{Q}(l_{mm}(t)) - \bar{G}(l_{mm}(t), k_{mm}(t)) \end{bmatrix}$$

Resultando así que:

$$M(t, z) = \begin{bmatrix} \theta \\ (f_1(t), w_1) \\ \vdots \\ (f_1(t), w_m) \\ \theta \\ (f_2(t), w_1) \\ \vdots \\ (f_2(t), w_m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right), w_m \rangle \\ \theta \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right), w_m \rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta \\ \left\langle \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i, w_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i, w_m \right\rangle \\ \theta \\ \left\langle \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_m \right\rangle \end{bmatrix}$$

Sea:

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ (f_1(t), w_1) \\ \vdots \\ (f_1(t), w_m) \\ \theta \\ (f_2(t), w_1) \\ \vdots \\ (f_2(t), w_m) \end{bmatrix} ; \quad \tilde{P}(k, l) := \begin{bmatrix} \theta \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right), w_m \rangle \\ \theta \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right), w_m \rangle \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}(k, l) := \begin{bmatrix} \langle \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i, w_m \rangle \\ \theta \\ \langle \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \left| \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_m \rangle \end{bmatrix}$$

Donde:

$$k = (k_{1m}, \dots, k_{mm}) \in R^m \quad ; \quad l = (l_{1m}, \dots, l_{mm}) \in R^m$$

Entonces

$$M(t, z) = \beta(t) - \tilde{P}(k, l) - \tilde{F}(k, l) \tag{2.5.23}$$

Reemplazando 2.5.23 en 2.5.22

$$\varphi(t, z) = Dz + \beta(t) - \tilde{P}(k, l) - \tilde{F}(k, l) \quad (2.5.24)$$

Donde:  $z = (k, x, l, y) \in R^{4m}$

### **Afirmación 2.5.1**

La función  $\varphi$  satisface las condiciones de Caratheodory.

#### **Demostración:**

**En primer lugar** demostramos que  $\varphi$  es medible respecto de  $t$ , para  $z$  fijo. En efecto, esto se da por las hipótesis de trabajo. ■.

**En segundo lugar** demostramos que  $\varphi$  es continua en relación a la variable  $z$ , para  $t$ : fijo

En efecto, Dada  $z_n = (k_n, x_n, l_n, y_n) \in R^{4m}$  con  $k_n, x_n, l_n, y_n \in R^m$  tal que

$$z_n = (k_n, x_n, l_n, y_n) \rightarrow (a, b, c, d) = z \text{ en } R^{4m} \text{ Cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.5.25)$$

Por demostrar que  $\varphi(t, z_n) \rightarrow \varphi(t, z)$  en  $R^{4m}$

De (2.5.25)

$$\begin{array}{l} k_n \rightarrow a \\ x_n \rightarrow b \\ l_n \rightarrow c \\ y_n \rightarrow d \end{array} \quad \text{En } R^m \quad (2.5.26)$$

Considerando

$$\begin{aligned}
 k_n &= (k_{n1}, \dots, k_{nm}) ; & k &= (a_1, \dots, a_m) \\
 x_n &= (x_{n1}, \dots, x_{nm}) ; & x &= (b_1, \dots, b_m) \\
 l_n &= (l_{n1}, \dots, l_{nm}) ; & l &= (c_1, \dots, c_m) \\
 y_n &= (y_{n1}, \dots, y_{nm}) ; & y &= (d_1, \dots, d_m)
 \end{aligned} \tag{2.5.27}$$

De 2.5.26 y 2.5.27

$$\begin{aligned}
 k_{ni} &\rightarrow a_i \text{ en } R : i = 1, 2, \dots, m \\
 x_{ni} &\rightarrow b_i \text{ en } R : i = 1, 2, \dots, m \\
 l_{ni} &\rightarrow c_i \text{ en } R : i = 1, 2, \dots, m \\
 y_{ni} &\rightarrow d_i \text{ en } R : i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

De 2.5.28 y la regularidad de  $(w_i)$ , se sigue que

$$\sum_{i=1}^m k_{ni} w_i \rightarrow \sum_{i=1}^m a_i w_i \quad , \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Usando el Teorema 2.15, obtenemos la continuidad del operador p-Laplaciano. Es decir,  $\Delta_p$  es contínuo de  $(W_0^{1,p}(\Omega), \tau_{fuerte})$  en  $(W^{-1,p'}(\Omega), \tau_{débil*})$ . De este modo

$$\langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m k_{ni} w_i \right), w_j \rangle \rightarrow \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right), w_j \rangle \text{ en } R, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{2.5.29}$$

Análogamente, obtenemos

$$\langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m l_{ni} w_i \right), w_j \rangle \rightarrow \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right), w_j \rangle \text{ en } R, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{2.5.30}$$

Teniendo en cuenta 2.5.29 y 2.5.30, resulta que

$$\tilde{P}(k_n, l_n) \rightarrow \tilde{P}(a, c) \text{ en } R^{4m}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.5.31)$$

Por otro lado, usando los argumentos mostrados en [20], las funciones:

$$f, g : R^2 \rightarrow R \text{ tales que } f(x, y) = |y|^{\rho+2}|x|^\rho ; g(x, y) = |x|^{\rho+2}|y|^\rho$$

Tienen las siguientes propiedades, La función  $f$  es Lipchitziana respecto a la primera variable y continua respecto de la segunda variable. La función  $g$  es Lipchitziana respecto a la segunda variable y continua respecto de la primera variable. Además

$$f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

Consecuencia de ello resulta la siguiente desigualdad

$$| |y|^{\rho+2}|x|^\rho x - |b|^{\rho+2}|a|^\rho a | \leq |y|^{\rho+2} |x|^\rho |x - a| + (\rho + 2)|a| |x|^\rho (|y|^{\rho+1} + |b|^{\rho+1})|y - b| + k|x - a|$$

$$\forall x, y, a, b \in R, \text{ donde } k > 0 \quad (2.5.32)$$

De 2.5.28 y la regularidad de  $(w_i)$

$$w_n := \sum_{i=1}^m k_{ni} w_i \rightarrow \sum_{i=1}^m a_i w_i := w \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.5.33)$$

Análogamente

$$j_n := \sum_{i=1}^m l_{ni} w_i \rightarrow \sum_{i=1}^m c_i w_i := j \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.5.34)$$

De 2.5.32, para  $y = j_n$ ,  $x = w_n$ ,  $b = j$ ,  $a = w$

En lo que sigue  $\mathbf{k}$  representará una constante positiva que no necesariamente tiene el mismo valor en todos los casos.

$$\begin{aligned}
& | |j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w - |j|^{\rho+2} |w|^\rho w | \\
& \leq |j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho |w_n - w| + (\rho + 2) |w| |w_n|^\rho (|j_n|^{\rho+1} + |j|^{\rho+1}) |j_n - j| + k |w_n - w| \\
& \leq |j_n|_\infty^{\rho+2} |w_n|_\infty^\rho |w_n - w| + (\rho + 2) |w|_\infty |w_n|_\infty^\rho (|j_n|_\infty^{\rho+1} + |j|_\infty^{\rho+1}) |j_n - j| + k |w_n - w| \\
& \leq k \{ |w_n - w| + |j_n - j| \} \quad k > 0 \tag{2.5.35}
\end{aligned}$$

De 2.5.35

$$| |j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w - |j|^{\rho+2} |w|^\rho w | \leq k \{ |w_n - w| + |j_n - j| \} \tag{2.5.36}$$

De 2.5.36 elevando al cuadrado e integrando sobre  $\Omega$ . Resulta

$$\| |j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w_n - |j|^{\rho+2} |w|^\rho w \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \{ \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|j_n - j\|_{L^2(\Omega)}^2 \} \tag{2.5.37}$$

Usando las convergencias dadas en 2.5.33, 2.5.34 obtendremos

$$|j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w_n \rightarrow |j|^{\rho+2} |w|^\rho w \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } n \rightarrow \infty \tag{2.5.38}$$

Consecuencia directa de 2.5.38

$$(|j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w_n, w_j) \rightarrow (|j|^{\rho+2} |w|^\rho w, w_j) \text{ en } \mathbb{R}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ ;  $w_j \in L^2(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, m$

Siendo así

$$\langle |j_n|^{\rho+2} |w_n|^\rho w_n, w_j \rangle \rightarrow \langle |j|^{\rho+2} |w|^\rho w, w_j \rangle \text{ en } \mathbb{R}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  ;  $w_j \in L^2(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, m$

Teniendo en consideración 2.5.33 y 2.5.34

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^m l_{ni} w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m k_{ni} w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m k_{ni} w_i, w_j \right\rangle \rightarrow \left\langle \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m a_i w_i, w_j \right\rangle$$

En  $\mathbb{R}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  ;  $w_j \in L^2(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, m$  (2.5.39)

Análogamente

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^m k_{ni} w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m l_{ni} w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m l_{ni} w_i, w_j \right\rangle \rightarrow \left\langle \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m c_i w_i, w_j \right\rangle$$

En  $\mathbb{R}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  ;  $w_j \in L^2(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, m$  (2.5.40)

Por lo tanto

$$\tilde{F}(k_n, l_n) \rightarrow \tilde{F}(a, c) \quad (2.5.41)$$

Por tanto, para t fijo, las convergencias 2.5.31 y 2.5.41 nos permiten concluir que

$$\varphi(z_n) \rightarrow \varphi(z) \text{ en } \mathbb{R}^{4m}$$

Es decir, la función  $\varphi$  es continua en la variable  $z$ . ■.



**En tercer lugar demostramos que:**

Dado  $\mathbf{R} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{4m}$  un conjunto compacto cualesquiera, buscamos una función

$I(t)$  integrable según Lebesgue tal que  $\|\varphi(t, z)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq I(t), \quad \forall (t, z) \in \mathbf{R}$

En efecto:

Dado  $(t, z) = (t, k, x, l, y) \in \mathbf{R} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{4m}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, z)\|_{\mathbb{R}^{4m}} &= \|Dz + \beta(t) - \tilde{P}(k, l) - \tilde{F}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \\ &\leq \|Dz\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\beta(t)\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\tilde{P}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\tilde{F}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \\ &\leq |D| \|z\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\tilde{P}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\tilde{F}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}} + \|\beta(t)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \quad (2.5.42) \end{aligned}$$

En lo que sigue, estimaremos los términos del lado derecho de 2.5.42

Usaremos el argumento de proyección mostrado en [14]. Siendo así, La  $\text{Proy } R$  es  $\mathbb{R}^{4m}$

un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^{4m}$ , Ahora como  $z \in \text{Proy } R$  se sigue que  $\mathbb{R}^{4m}$

$$|D| \|z\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq C_1 \quad (2.5.43)$$

Estimando el segundo término de 2.5.42

$$\|\tilde{P}(k, l)\|_{\mathbb{R}^{4m}}^2 = \sum_{j=1}^m \left| \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right), w_j \rangle \right|^2 + \sum_{j=1}^m \left| \langle \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right), w_j \rangle \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^m \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \right\|_{1,p'}^2 \|w_j\|_0^2 + \sum_{j=1}^m \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right) \right\|_{-1,p'}^2 \|w_j\|_0^2 \\
&= \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \right\|_{-1,p'}^2 \cdot \sum_{j=1}^m \|w_j\|_0^2 + \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right) \right\|_{-1,p'}^2 \cdot \sum_{j=1}^m \|w_j\|_0^2 \quad (2.5.44)
\end{aligned}$$

De 2.5.44 se tiene

$$\|\tilde{P}(k, l)\|_{R^{4m}}^2 = \left[ \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \right\|_{-1,p'}^2 + \left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right) \right\|_{-1,p'}^2 \right] \cdot \sum_{j=1}^m \|w_j\|_0^2 \quad (2.5.45)$$

Observemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right\|_0 \leq \sum_{i=1}^m |a_i| \|w_i\|_0 < \infty \quad (2.5.46)$$

Además, como el operador  $\Delta_p$  es acotado y a la luz de 2.5.46, resulta

$$\left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \right\|_{-1,p'} \leq k \left\| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right\|_0 < \infty \quad (2.5.47)$$

Análogamente, obtendremos

$$\left\| \Delta_p \left( \sum_{i=1}^m c_i w_i \right) \right\|_{-1,p'} \leq k \left\| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right\|_0 < \infty \quad (2.5.48)$$

Juntado las acotaciones obtenidas en 2.5.47, 2.5.48 y usando dichas acotaciones en 2.5.45, resulta

$$\left\| \tilde{P}(k, l) \right\|_{R^{4m}} \leq C_2 \quad (2.5.49)$$

Estimando el tercer término de 2.5.42

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{F}(k, l) \right\|_{R^{4m}}^2 &= \sum_{j=1}^m \left| \left\langle \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m a_i w_i, w_j \right\rangle \right|^2 + \sum_{j=1}^m \left| \left\langle \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m c_i w_i, w_j \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \left| \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

Tomando,  $j = \sum_{i=1}^m c_i w_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^m a_i w_i$  y usando 2.5.37 con  $j_n \equiv 0$ ,  $w_n \equiv 0$

$$\left| \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 = K \left[ \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq K_1 \quad (2.5.51)$$

Análogamente obtenemos que:

$$\left| \left| \sum_{i=1}^m a_i w_i \right|^{\rho+2} \left| \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m c_i w_i \right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \quad (2.5.52)$$

Usando 2.5.51, 2.5.52 en 2.5.50 y luego de un pequeño cálculo, obtendremos

$$\|\tilde{F}(k, l)\|_{R^{4m}} \leq C_3 \quad (2.5.53)$$

Estimando el último término de 2.5.42

$$\begin{aligned} \|\beta(t)\|_{R^{4m}}^2 &= \sum_{j=1}^m |(f_1(t), w_j)|^2 + \sum_{j=1}^m |(f_2(t), w_j)|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \sum_{j=1}^m |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \sum_{j=1}^m |w_j|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left[ |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] M, \quad M \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

De 2.5.54 obtenemos

$$\|\beta(t)\|_{R^{4m}}^2 \leq \left[ |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} C_4, \quad C_4 > 0 \quad (2.5.55)$$

Combinando las estimativas 2.5.43, 2.5.49, 2.5.53, 2.5.55, concluimos que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\varphi(t, z)\|_{R^{4m}} \leq C \left( 1 + \left[ |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right), \quad \forall (t, z) \in \mathbf{R} \subset [0, T] \times \mathbf{R}^{4m}$$

Recordando que, por hipótesis del Teorema 2.4.1 (Existencia de soluciones débiles)

$|f_1(t)|_{L^2(\Omega)}, |f_2(t)|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0, T)$ . Resultando así que la función

$$I(t) := C \left( 1 + \left[ |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \text{ es integrable sobre } [0, T] \quad \blacksquare.$$

Culminando de esta manera la demostración de la afirmación 2.5.1 ■.

En virtud de la afirmación 2.5.1 podemos usar el Teorema 2.8 (Caratheodory). Siendo

así, existe una solución  $Z(t)$  sobre el intervalo  $[0, t_m)$  ■. (2.5.56)

## 2.6 Etapa 2: Estimativas a priori

### 2.6.1 Estimativa I

Afirmamos que:  $t_m = T$

De la ecuación aproximada 2.5.1, hacemos  $w = u'_m(t)$

$$(u''_m, u'_m(t)) + \langle \Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle + ((u'_m(t), u'_m(t))) + \langle |v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m, u'_m(t) \rangle = (f_1(t), u'_m(t))$$

(2.6.1)

#### Lema 2.6.1

$$I. (u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \quad (2.6.2)$$

$$II. \langle \Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|^p_0 \quad (2.6.3)$$

$$III. \langle |v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m, u'_m(t) \rangle = \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} |v_m|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx \quad (2.6.4)$$

Demostración: Ver [14] y [20].

Ahora, reemplazando 2.6.2 - 2.6.4 en 2.6.1, tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|^p_0 + \| |u'_m(t)| \|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} |v_m|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx = (f_1(t), u'_m(t))$$

(2.6.5)

Por otro lado

$$(f_1(t), u'_m(t)) \leq |(f_1(t), u'_m(t))| \leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{|u'_m(t)|^2}{2} \quad (2.6.6)$$

De 2.6.5 y 2.6.6 por transitividad, tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|_0^p + \| |u'_m(t)| \|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} |v_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx \leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{|u'_m(t)|^2}{2} \quad (2.6.7)$$

Análogamente, hacemos  $w = v'_m(t)$  en 2.5.2, obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |v_m(t)| \|_0^p + \| |v'_m(t)| \|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} |u_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2} dx \leq \frac{|f_2(t)|^2}{2} + \frac{|v'_m(t)|^2}{2} \quad (2.6.8)$$

Sumando 2.6.7-2.6.8, luego agrupando los términos del lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{p} \left[ \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|_0^p + \frac{d}{dt} \| |v_m(t)| \|_0^p \right] + \left[ \| |u'_m(t)| \|^2 + \| |v'_m(t)| \|^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\rho+2} \left[ \int_{\Omega} \left[ |v_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2} dx \right] \right] \leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{|u'_m(t)|^2}{2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2} + \frac{|v'_m(t)|^2}{2} \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

De 2.6.9, buscando una forma equivalente para

$$M := \frac{1}{\rho+2} \left[ \int_{\Omega} \left[ |v_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2} \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2} dx \right] \right]$$

$$M = \frac{1}{\rho + 2} \left[ \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|u_m(t)|^{\rho+2} \cdot |v_m(t)|^{\rho+2}) dx \right]$$

$$M = \frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^{\rho+2} \cdot |v_m(t)|^{\rho+2} dx$$

$$M = \frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)v_m(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \quad (2.6.10)$$

Reemplazando 2.6.10 en 2.6.9

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{p} \left[ \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|_0^p + \frac{d}{dt} \| |v_m(t)| \|_0^p \right] + [ \|u'_m(t)\|^2 + \|v'_m(t)\|^2 ] + \\ & + \frac{1}{\rho + 2} \cdot \frac{d}{dt} \| |u_m(t)v_m(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{|u'_m(t)|^2}{2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2} + \frac{|v'_m(t)|^2}{2} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Integrando de 0 a t en 2.6.11 con  $t < t_m$  (ie)  $t \in [0, t_m[$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [ \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|v'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 ] + \\ & + \frac{1}{p} [ \| |u_m(t)| \|_0^p - \| |u_m(0)| \|_0^p + \| |v_m(t)| \|_0^p - \| |v_m(0)| \|_0^p ] + \\ & + \int_0^t ( \|u'_m(s)\|^2 + \|v'_m(s)\|^2 ) ds + \frac{1}{\rho + 2} [ \| |u_m(t)v_m(t)| \|_{\rho+2}^{\rho+2} - \| |u_m(0)v_m(0)| \|_{\rho+2}^{\rho+2} ] \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t ( |f_1(s)|_2^2 + |f_2(s)|_2^2 ) ds + \frac{1}{2} \int_0^t ( \|u'_m(s)\|_2^2 + \|v'_m(s)\|_2^2 ) ds \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

De 2.6.12, agrupando convenientemente, tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 ] + \frac{1}{p} [ \| |u_m(t)|_0^p + \| |v_m(t)|_0^p ] + \int_0^t ( \| |u'_m(t)|^2 + \| |v'_m(t)|^2 ) ds + \frac{1}{\rho+2} \| |u_m(t)v_m(t)|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t ( |f_1(t)|_2^2 + |f_2(t)|_2^2 ) ds + \frac{1}{2} \int_0^t ( |u'_m(t)|_2^2 + |v'_m(t)|_2^2 ) ds + \frac{1}{2} [ |u'_m(0)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(0)|_{L^2(\Omega)}^2 ] + \\
& + \frac{1}{p} [ \| |u_m(0)|_0^p + \| |v_m(0)|_0^p ] + \frac{1}{\rho+2} \| |u_m(0)v_m(0)|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \tag{2.6.13}
\end{aligned}$$

De 2.6.13, se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 ] & \leq \frac{1}{2} \int_0^t ( |f_1(t)|_2^2 + |f_2(t)|_2^2 ) ds + \frac{1}{2} \int_0^t ( |u'_m(t)|_2^2 + |v'_m(t)|_2^2 ) ds + \\
& + \frac{1}{2} [ |u'_m(0)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(0)|_{L^2(\Omega)}^2 ] + \frac{1}{p} [ \| |u_m(0)|_0^p + \| |v_m(0)|_0^p ] + \\
& + \frac{1}{\rho+2} \| |u_m(0)v_m(0)|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \tag{2.6.14}
\end{aligned}$$

Por hipótesis del Teorema 2.4.1 (Existencia de soluciones débiles)

se concluye que

$$\int_0^t ( |f_1(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |f_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ) ds < M_1 \tag{2.6.15}$$

De las convergencias dadas en 2.5.3 y 2.5.5

$$\| |u_m(0)|_0 \leq k_1 \quad ; \quad \| |v_m(0)|_0 \leq k_2 \tag{2.6.16}$$

De 2.6.16, tenemos



$$\frac{1}{p} \left[ \|u_m(0)\|_0^p + \|v_m(0)\|_0^p \right] \leq M_2 \quad (2.6.17)$$

De las convergencias dadas en 2.5.4 y 2.5.6

$$\|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq k_3 \quad , \quad \|v'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq k_4 \quad (2.6.18)$$

De 2.6.18, resulta

$$\frac{1}{2} \left[ \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq M_3 \quad (2.6.19)$$

**Lema 2.6.2**

si  $u_m(0) \rightarrow u_0 \wedge v_m(0) \rightarrow v_0$  en  $w_0^{1,p}(\Omega)$

Entonces  $u_m(0)v_m(0) \rightarrow u_0v_0$  en  $L^{\rho+2}(\Omega)$

Demostración: Ver [19]

Ahora, usando el lema 2.6.2 se concluye que:

$$\frac{1}{\rho+2} \|u_m(0)v_m(0)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq M_4 \quad (2.6.20)$$

Teniendo en cuenta las estimativas trabajadas en 2.6.15, 2.6.17, 2.6.19, 2.6.20 en

2.6.14. Tendremos

$$\frac{1}{2} \left[ \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq M_1 + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds + M_3 + M_2 + M_4$$

$$(2.6.21)$$

De 2.6.21, resulta

$$\frac{1}{2} \left[ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq M + \int_0^t \frac{1}{2} \left( |u'_m(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(s)|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds$$

$$\forall t \in [0, t_m[ \quad (2.6.22)$$

Usando el Teorema 2.18 (Gromwall), para

$$g(t) := \frac{1}{2} \left[ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

Se obtiene que  $g(t) \leq Ce^t$ , para todo  $t \in [0, t_m[$ . Consecuentemente  $g(t)$  es acotada. Siendo así

$$\frac{1}{2} \left[ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq K \quad (2.6.23)$$

De 2.6.23, integrando de 0 a  $t$ , con  $t < t_m$

$$\int_0^t \frac{1}{2} \left[ |u'_m(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(s)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds \leq K \int_0^t ds = Kt \leq K \cdot t_m = R \quad (2.6.24)$$

Teniendo presente las acotaciones obtenidas en 2.6.15, 2.6.24, 2.6.19, 2.6.17, 2.6.20 y usándolas en 2.6.13

$$\frac{1}{2} \left[ |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |v'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{p} \left[ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p \right] +$$

$$+ \int_0^T (||u'_m(s)||^2 + ||v'_m(s)||^2) ds + \frac{1}{\rho + 2} ||u_m(t)v_m(t)||_{\rho+2}^{\rho+2} \leq N, N > 0 \quad (2.6.25)$$

Por otro lado, notar que:

La solución  $Z = Z(t)$  encontrada en 2.5.56, es decir, Solución del PVI

$$\begin{cases} Z'(t) = \varphi(t, z(t)) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

$$\text{Cumple que: } ||Z(t)||_{R^{4m}} \leq C, C > 0, \text{ en } [0, t_m) \quad (2.6.26)$$

De 2.6.26 y vía el Teorema 2.9 (prolongamiento), podemos extender la solución al

intervalo  $[0, T]$ .

De 2.6.25, obtenemos las siguientes estimativas

$$(u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, w_0^{1,p}(\Omega)) ; (v_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, w_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.6.27)$$

$$(u'_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) ; (v'_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.6.28)$$

$$(u'_m) \text{ es acotada en } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) ; (v'_m) \text{ es acotada en } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \quad (2.6.29)$$

$$(u_m v_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, L^{\rho+2}(\Omega)) ; (|v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, L^\theta(\Omega)) \quad (2.6.30)$$

## 2.6.2 Estimativa II

Estimaremos  $u''_m, v''_m$

Se usó argumentos de proyección

Se define

$$\begin{aligned} P_m: H_0^s(\Omega) &\rightarrow H_0^s(\Omega) \\ u &\rightarrow P_m(u) = \sum_{j=1}^m \left( (u, w_j) \right)_{H_0^s(\Omega)} \cdot w_j \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

**Nota:** En la estimativa II, denotaremos el producto interno de  $H_0^s(\Omega)$  como

$$\left( (\cdot, \cdot) \right)_{H_0^s(\Omega)} \quad \text{ó} \quad (\cdot, \cdot).$$

**Lema 2.6.2**

$$P_m(u) = u, \forall u \in V_m$$

En efecto:

Sea  $u \in V_m$ , de ahí,  $P_m(u) = \sum_{j=1}^m \left( (u, w_j) \right) w_j$

Por hipótesis  $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$ , teniendo ello presente

$$P_m(u) = \sum_{j=1}^m \left( \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, w_j \right) \right) w_j$$

$$P_m(u) = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( (w_i, w_j) \right) w_j \right]$$

$$P_m(u) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( (w_i, w_1) \right) w_1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( (w_i, w_2) \right) w_2 + \dots + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( (w_i, w_m) \right) w_m$$

$$P_m(u) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i = u \quad \square.$$

### Lema 2.6.3

i)  $P_m$  : Lineal

ii)  $P_m$ : Autoadjunta

**Demostración:**

**Demostración de (i)**

Dados  $u, v \in H_0^S(\Omega)$ , tendremos que:

$$P_m(u + v) = \sum_{i=1}^m ((u + v, w_j)) w_j$$

$$P_m(u + v) = \sum_{i=1}^m [((u, w_j)) + ((v, w_j))] w_j$$

$$P_m(u + v) = \sum_{i=1}^m [((u, w_j)) w_j + ((v, w_j)) w_j]$$

$$P_m(u + v) = \sum_{i=1}^m ((u, w_j)) w_j + \sum_{i=1}^m ((v, w_j)) w_j$$

$$P_m(u + v) = P_m(u) + P_m(v) \quad \blacksquare$$

**Demostración de (ii)**

Basta mostrar que

$$((P_m(u), v))_{H_0^S(\Omega)} = ((u, P_m(v)))_{H_0^S(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H_0^S(\Omega)$$

En efecto:

$$((P_m(u), v)) = \left( \left( \sum_{j=1}^m ((u, w_j)) w_j, v \right) \right)$$

$$((P_m(u), v)) = \sum_{j=1}^m \left( \left( (u, w_j) w_j, v \right) \right)$$

$$((P_m(u), v)) = \sum_{j=1}^m ((u, w_j)) ((w_j, v))$$

$$((P_m(u), v)) = \sum_{j=1}^m \left( \left( u, ((v, w_j)) w_j \right) \right)$$

$$((P_m(u), v)) = \left( \left( u, \sum_{j=1}^m ((v, w_j)) w_j \right) \right) = ((u, P_m(v))) \quad \blacksquare.$$

#### Lema 2.6.4

$$P_m \in L(H_0^S(\Omega))$$

#### Demostración:

A la luz del Lema 2.6.3 y vía el Teorema 2.17 (Helinger toeplitz), concluimos que  $P_m$  es acotada. Por lo tanto  $P_m \in L(H_0^S(\Omega))$  ■.

De la ecuación aproximada 2.5.1

$$(u_m''(t), w) + \langle \Delta_p u_m(t), w \rangle + ((u_m'(t), w)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle = (f_1(t), w) \\ \forall w \in V_m \quad (2.6.32)$$

Teniendo en cuenta la cadena de inmersiones continuas y densas

$$V_m \subset H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \langle u_m''(t) + \Delta_p u_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t), w \rangle_{H^{-s}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} &= 0 \\ \forall w \in H_0^1(\Omega) & \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

Por su definición,  $P_m: H_0^s(\Omega) \rightarrow H_0^s(\Omega)$  Además, a la luz del Lema 2.6.4 el operador  $P_m$  es lineal y acotado, con  $H_0^s(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$ . Luego, vía el Teorema 2.4 (Extensión de operadores lineales y acotados). El operador  $P_m$  admite una extensión

$T: H^{-s}(\Omega) \rightarrow H^{-s}(\Omega)$  lineal y acotada tal que  $T|_{H_0^s(\Omega)} = P_m$ .

De 2.6.33

$$u_m''(t) + \Delta_p u_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t) = 0 ; \text{ en } H^{-s}(\Omega) \quad (2.6.34)$$

Aplicando la extensión T, en 2.6.34

$$T\left(u_m''(t) + \Delta_p u_m(t) - \Delta u_m'(t) + |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t) - f_1(t)\right) = 0 \quad (2.6.35)$$

Usando la linealidad del operador T, en 2.6.35

$$T(u_m''(t)) + T(\Delta_p u_m(t)) - T(\Delta u_m'(t)) + T(|v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t)) - T(f_1(t)) = 0 \quad (2.6.36)$$

De 2.6.36, y teniendo en cuenta que  $T(u_m''(t)) = u_m''(t)$ , esto último en virtud del

Lema 2.6.2

$$u_m''(t) = -T(\Delta_p u_m(t)) + T(\Delta u_m'(t)) - T(|v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t)) + T(f_1(t)) \quad (2.6.37)$$

De 2.6.37, aplicando la norma en  $H^{-s}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} &\leq \left\| T(\Delta_p u_m(t)) \right\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|T(\Delta u_m'(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \\ &\quad + \|T(|v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|T(f_1(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

Por otro lado, teniendo presente las siguientes observaciones

Primero:  $T \in L(W^{-1,p'}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ , siendo así:

$$\left\| T(\Delta_p u_m(t)) \right\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq K \left\| \Delta_p u_m(t) \right\|_{-1,p'} \leq KC \|u_m(t)\|_0^{p-1} \leq R_1; \quad (2.6.39)$$

Segundo:  $T \in L(H^{-1}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ , siendo así:

$$\|T(\Delta u_m'(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq K \|\Delta u_m'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq KC \|u_m'(t)\| \leq R_2 \quad (2.6.40)$$

Tercero:  $T \in L(L^\theta(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ , siendo así:

$$\|T(|v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq K \| |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t) \|_{L^\theta(\Omega)} \leq R_3 \quad (2.6.41)$$

Además

$$\|T(f_1(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq M_1 \|f_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq R_4 \quad (2.6.42)$$

De las acotaciones 2.6.39 – 2.6.42 en 2.6.38, se concluye que:



$$\|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq R \quad (2.6.43)$$

De 2.6.43, concluimos finalmente una estimativa para  $u_m''$

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T,H^{-s}(\Omega))} \leq R \quad (2.6.44)$$

Por esto último,  $u_m''$  es acotada en  $L^2(0,T,H^{-s}(\Omega))$  (2.6.45)

Análogamente se demuestra que  $v_m''$  es acotada en  $L^2(0,T,H^{-s}(\Omega))$  (2.6.46) ■

### 2.7 Etapa 3: Pasaje al límite

Usando las estimativas obtenidas en 2.6.27 - 2.6.30 y 2.6.45- 2.6.46. Además de usar el Teorema 2.12 (Banach Alouglu B.) junto con el Teorema 2.13 (Kakutani), tenemos que existen subsucesiones

$$(u_v)_v \subset (u_m)_m \quad y \quad (v_v)_v \subset (v_m)_m \quad \text{tales que}$$

$$u_v \rightarrow^* u \text{ en } L^\infty(0,T,w_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.7.1) \qquad v_v \rightarrow^* v \text{ en } L^\infty(0,T,w_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.7.2)$$

$$u'_v \rightarrow^* u' \text{ en } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \quad (2.7.3) \qquad v'_v \rightarrow^* v' \text{ en } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \quad (2.7.4)$$

$$u'_v \rightarrow^* u' \text{ en } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \quad (2.7.5) \qquad v'_v \rightarrow^* v' \text{ en } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \quad (2.7.6)$$

$$\Delta_p u_v \rightarrow^* x_1 \text{ en } L^\infty(0,T,w^{-1,p'}(\Omega)) \quad (2.7.7) \qquad \Delta_p v_v \rightarrow^* x_2 \text{ en } L^\infty(0,T,w^{-1,p'}(\Omega)) \quad (2.7.8)$$

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightarrow^* x_3 \text{ en } L^\infty(0,T,L^\theta(\Omega)) \quad (2.7.9) \qquad |u_v|^{\rho+2}|v_v|^\rho v_v \rightarrow^* x_4 \text{ en } L^\infty(0,T,L^\theta(\Omega)) \quad (2.7.10)$$

$$u''_v \rightarrow u'' \text{ en } L^2(0,T,H^{-s}(\Omega)) \quad (2.7.11) \qquad v''_v \rightarrow v'' \text{ en } L^2(0,T,H^{-s}(\Omega)) \quad (2.7.12)$$

$$u_v v_v \rightarrow^* uv \text{ en } L^\infty(0,T,L^{\rho+2}(\Omega)) \quad (2.7.13)$$

En la ecuación aproximada 2.5.1, pasando a una subsucesión. Para ello hacemos  $m=v$

$$(u_v''(t), w) + \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle + ((u_v'(t), w)) + \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle = (f_1(t), w) \\ \forall w \in V_m \quad (2.7.14)$$

Multiplicando por  $\psi \in D(0, T)$  en 2.7.14

$$(u_v''(t), w)\psi(t) + \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \psi(t) + ((u_v'(t), w))\psi(t) + \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi(t) \\ = (f_1(t), w)\psi(t) \quad \forall w \in V_m \quad (2.7.15)$$

De 2.7.15, Integramos de 0 a T respecto de t.

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \psi(t)dt + \int_0^T ((u_v'(t), w))\psi(t)dt + \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi(t)dt \\ = \int_0^T (f_1(t), w)\psi(t)dt, \forall w \in V_m \quad (2.7.16)$$

Buscando una expresión equivalente para el primer término de 2.7.16

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\psi(t)dt \\ = \int_0^T \left[ \int_{\Omega} u_v''(t) w dx \right] \psi(t)dt = \int_0^T \left[ \int_{\Omega} \frac{d}{dt} [u_v'(t)] w dx \right] \psi(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} u_v'(t) w dx \right] \psi(t)dt \\ = \int_0^T \frac{d}{dt} [(u_v'(t), w)] \psi(t)dt = \int_0^T \psi(t) \frac{d}{dt} [(u_v'(t), w)] dt \quad (2.7.17)$$

En 2.7.17, haciendo uso de integración por partes y aprovechando que

$\psi(0) = \psi(T) = 0$ . Pues  $\psi \in D(0, T)$ , el último término de la expresión de arriba toma la siguiente forma:

$$\int_0^T \psi(t) \frac{d}{dt} [ (u'_v(t), w) ] dt = - \int_0^T (u'_v(t), w) \psi'(t) dt \quad (2.7.18)$$

De 2.7.17 y 2.7.18, concluimos que:

$$\int_0^T (u''_v(t), w) \psi(t) dt = - \int_0^T (u'_v(t), w) \psi'(t) dt \quad (2.7.19)$$

Sustituyendo 2.7.19 en 2.7.16, resulta

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u'_v(t), w) \psi'(t) dt + \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \psi(t) dt + \int_0^T ((u'_v(t), w)) \psi(t) dt + \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi(t) dt \\ = \int_0^T (f_1(t), w) \psi(t) dt \quad \forall \psi \in V_m \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

### Lema 2.7.1

Se tienen las siguientes convergencias

$$\text{i) } \int_0^T (u'_v(t), w) \psi'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w) \psi'(t) dt \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } \int_0^T \langle \Delta_p u_v, w \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \psi(t) dt \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\text{(iii) } \int_0^T ((u'_v(t), w)) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T ((u'(t), w)) \psi(t) dt \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\text{iv) } \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \psi(t) dt \quad \text{en } \mathbb{R}$$

### Demostración:

#### Demostración de (i)

De 2.7.3,  $u'_v \rightarrow^* u'$  en  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \equiv \left( L^1(0, T, L^2(\Omega)) \right)'$ . Siendo así

$$\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u', \phi \rangle, \forall \phi \in L^1(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.7.21)$$

De 2.7.21, tomando la integral de 0 a T respecto de t

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi(t) \rangle dt \quad (2.7.22)$$

Haciendo  $\phi(t) = \alpha(t)w$ ,  $\alpha \in L^1(0, T)$ ,  $w \in L^2(\Omega)$  y reemplazando esto, en 2.7.22

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \alpha(t) dt, \quad \forall \alpha \in L^1(0, T), \forall w \in L^2(\Omega) \quad (2.7.23)$$

Notemos que:  $\psi' \in D(0, T) \subset L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$

Entonces  $\psi' \in L^1(0, T)$

En particular, para  $\alpha = \psi'$ . Finalmente, reemplazando ello en 2.7.23 se obtiene:

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \psi'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \psi'(t) dt \quad \text{en } \mathbb{R} \quad \blacksquare.$$

#### Demostración de (ii)

Por 2.7.7. Se tiene,  $\Delta_p u_v \rightarrow^* x_1$  en  $L^\infty(0, T, w^{-1, p'}(\Omega)) \equiv \left( L^1(0, T, w_0^{1, p}(\Omega)) \right)'$ , siendo así

$$\langle \Delta_p u_v, \phi \rangle \rightarrow \langle x_1, \phi \rangle, \forall \phi \in L^1(0, T, w_0^{1, p}(\Omega)) \quad (2.7.24)$$

De 2.7.24, integrando respecto de t, de 0 a T

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle x_1(t), \phi(t) \rangle dt, \quad \forall \phi \in L^1(0, T, w_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.7.25)$$

Hacemos:  $\phi(t) = \alpha(t)w$ ,  $\alpha \in L^1(0, T)$ ,  $w \in w_0^{1,p}(\Omega)$ , reemplazando esto en 2.7.25

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \alpha(t) dt, \quad \forall \alpha \in L^1(0, T), \forall w \in w_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.7.26)$$

Como  $\psi \in D(0, T) \subset L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$

Entonces  $\psi \in L^1(0, T)$

A La luz de ello, tomando en particular  $\alpha = \psi$  y sustituyendo ello en 2.7.26

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v, w \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle x_1(t), w(x) \rangle \psi(t) dt \quad \blacksquare.$$

### **Demostración de (iii)**

De 2.7.5, tenemos  $u'_v \rightarrow^* u'$  en  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \equiv (L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)))'$ , siendo así

$$\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u', \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \quad (2.7.27)$$

De 2.7.27, tenemos

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi(t) \rangle dt \quad (2.7.28)$$

Tomemos  $\phi(t) = \alpha(t)\beta$ ;  $\alpha \in L^2(0, T)$ ,  $\beta \in H^{-1}(\Omega)$  y reemplazando ello en 2.7.28

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \beta \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \beta \rangle \alpha(t) dt$$

$$\int_0^T (u'_v(t), \beta) \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \beta) \alpha(t) dt, \forall \alpha \in L^2(0, T), \forall \beta \in H^{-1}(\Omega) \quad (2.7.29)$$

Tomando en particular,  $\beta = -\Delta w$ ,  $w \in V_m$  y reemplazándolo en 2.7.29

$$\int_0^T (u'_v(t), -\Delta w) \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), -\Delta w) \alpha(t) dt \quad (2.7.30)$$

De 2.7.30, resulta

$$\int_0^T ((u'_v(t), w)) \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T ((u'(t), w)) \alpha(t) dt, \forall \alpha \in L^2(0, T) \quad (2.7.31)$$

Como  $\psi \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$ , entonces  $\psi \in L^2(0, T)$

Tomando en particular,  $\alpha = \psi$  y sustituyendo esto en 2.7.31

$$\int_0^T ((u'_v(t), w)) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T ((u'(t), w)) \psi(t) dt \quad \blacksquare.$$

### Demostración de (iv)

$$\text{Analizaremos: } \int_0^T (|v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w) \psi(t) dt$$

De 2.6.30, tenemos la siguiente acotación

$$(|v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m)_m \text{ es acotada en } L^\infty(0, T, L^\theta(\Omega))$$

De ahí que,  $(|v_v|^{\rho+2} |u_v|^\rho u_v)_v$  también es acotada en  $L^\infty(0, T, L^\theta(\Omega)) \hookrightarrow L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega))$

Siendo así,  $(|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v)_v$  es acotada en  $L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega))$ . Como  $L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega))$  es un espacio de Banach reflexivo. Vía el teorema 2.13 (kakutani), existe una subsucesión  $(|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v)_v$  la cual denotaremos del mismo modo tal que

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightharpoonup \beta_1 \text{ en } L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega)) \quad (2.7.32)$$

Por otro lado, de 2.7.9 tenemos:

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightharpoonup^* x_3 \text{ en } L^\infty(0, T, L^\theta(\Omega)) \quad (2.7.33)$$

De 2.7.32-2.7.33, por unicidad del límite en el sentido de las distribuciones vectoriales, tendremos:

$$\beta_1 = x_3$$

Teniendo presente lo anterior y reemplazándolo en 2.7.32

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightharpoonup x_3 \text{ en } L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega)) \quad (2.7.34)$$

De la estimativa I , 2.6.27 - 2.6.28

$(u_m)$  acotada en  $L^2(0, T, w_0^{1,p}(\Omega))$

$(u'_m)$  acotada en  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$

Teniendo en cuenta la Prop. 2.4.2 trabajaremos con  $\frac{4n+2}{n+4} < p < n$  (2.7.35)

De 2.7.35 y luego de unos cálculos, obtendremos que  $1 < 2 < \frac{np}{n-p}$

Entonces Por la Prop. 2.10

$$w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

En virtud del Teorema. 2.14 (Lions), existe una subsucesión  $(u_v) \subset (u_m)$

Tal que  $u_v \rightarrow u$  en  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$

Como  $L^2(0, T, L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$ , luego  $u_v \rightarrow u$  en  $L^2(Q)$

De esto último tendremos que  $u_v \rightarrow u$  ctp en  $Q$  (2.7.36)

Análogamente se estudiara el caso para la sucesión  $(v_m)$  llegando a la siguiente conclusión  $\exists(v_v) \subset (v_m)$  tal que  $v_v \rightarrow v$  ctp en  $Q$  (2.7.37)

De 2.7.36 – 2.7.37

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightarrow |v|^{\rho+2}|u|^\rho u \quad \text{ctp en } Q \quad (2.7.38)$$

Recordar que:

$$(|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v)_v \text{ es acotada en } L^\theta(0, T, L^\theta(\Omega)) \equiv L^\theta(Q) \quad (2.7.39)$$

De 2.7.38- 2.7.39, aplicando el Lema 2.1 (Lions), tendremos que

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightharpoonup |v|^{\rho+2}|u|^\rho u \text{ en } L^\theta(Q) \quad (2.7.40)$$

De 2.7.34 y 2.7.40, por unicidad del límite débil, resulta:

$$x_3 = |v|^{\rho+2}|u|^\rho u \quad (2.7.41)$$

Reemplazando 2.7.41 en 2.7.33

$$|v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v \rightharpoonup^* |v|^{\rho+2}|u|^\rho u \quad \text{en } L^\infty(0, T, L^\theta(\Omega)) = \left( L^1(0, T, L^\delta(\Omega)) \right)' \quad (2.7.42)$$

De 2.7.42, luego de unos cálculos tendremos

$$\int_0^T \langle |v_v|^{\rho+2}|u_v|^\rho u_v, \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle |v|^{\rho+2}|u|^\rho u, \phi(t) \rangle dt ; \forall \phi \in L^1(0, T, L^\delta(\Omega))$$



Hacemos  $\phi(t) = \alpha(t)w$ ;  $\alpha \in L^1(0, T)$ ,  $w \in L^\delta(\Omega)$

$$\int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \alpha(t) dt \quad (2.7.43)$$

$$\forall \alpha \in L^1(0, T), \forall w \in L^\delta(\Omega)$$

Notar que, como  $\psi \in D(0, T) \subset L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$

De Ahí,  $\psi \in L^1(0, T)$ , Tomando en particular  $\alpha = \psi$  en 2.7.43

$$\int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \psi(t) dt \quad \blacksquare.$$

**Quedando así demostrado el Lema 2.7.1.**

En 2.7.20, tomando límite cuando  $v \rightarrow \infty$  y usando las convergencias dadas en el

**Lema 2.7.1.** Resulta

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \psi'(t) dt + \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \psi(t) dt \\ & = \int_0^T \langle f_1(t), w \rangle \psi(t) dt, \quad \forall w \in V_m, \quad \psi \in D(0, T) \quad (2.7.44) \end{aligned}$$

Por argumentos de densidad, la igualdad dada en 2.7.44 se cumple  $\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega)$

Es decir:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \psi'(t) dt + \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \psi(t) dt \\ & = \int_0^T \langle f_1(t), w \rangle \psi(t) dt, \quad \forall w \in w_0^{1,p}(\Omega), \quad \psi \in D(0, T) \quad (2.7.45) \end{aligned}$$

Análogamente, se tendrá la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \langle v'(t), w \rangle \psi'(t) dt + \int_0^T \langle x_2(t), w \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle (v'(t), w) \rangle \psi(t) dt + \int_0^T \langle |u(t)|^{\rho+2} |v(t)|^\rho v(t), w \rangle \psi(t) dt \\
& = \int_0^T \langle f_2(t), w \rangle \psi(t) dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \psi \in D(0, T)
\end{aligned} \tag{2.7.46}$$

**Proposición 2.7.1**

$$x_1 = \Delta_p u \quad \text{y} \quad x_2 = \Delta_p v$$

**Demostración:**

Usando la monotonidad del operador  $\Delta_p$

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t) - \Delta_p w, u_v(t) - w \rangle dt \geq 0, \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.7.47}$$

Desarrollando convenientemente 2.7.47

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t) - \Delta_p w, u_v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t) - \Delta_p w, w \rangle dt \geq 0$$

Luego de unos cálculos

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta_p w, u_v(t) \rangle dt - \left[ \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta_p w, w \rangle dt \right] \geq 0$$

Continuando con dichos cálculos, se tiene

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle dt + \int_0^T \langle \Delta_p w, -u_v(t) + w \rangle dt \geq 0 \tag{2.7.48}$$

Aplicando el límite superior en 2.7.48, obtendremos

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \text{Sup} \left[ \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt \right] - \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle dt + \int_0^T \langle \Delta_p w, -u(t) + w \rangle dt \geq 0, \\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.7.49)$$

Por otro lado, del problema aproximado 2.5.1, pasando a una subsucesión para ello hacemos,  $m = v$  y además hacemos  $w = u_v(t)$

$$\langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle = - \left( (u'_v(t), u_v(t)) \right) - (u''_v(t), u_v(t)) - \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle + (f_1(t), u_v(t)) \\ (2.7.50)$$

Integrando respecto de t, de 0 a T en 2.7.50

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt = - \int_0^T \left( (u'_v(t), u_v(t)) \right) dt - \int_0^T (u''_v(t), u_v(t)) dt + \\ - \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle dt + \int_0^T (f_1(t), u_v(t)) dt \quad (2.7.51)$$

### Lema 2.7.2

Haciendo cuentas, obtenemos

- i)  $\left( (u'_v(t), u_v(t)) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| |u_v(t)| \|^2$
- ii)  $(u''_v(t), u_v(t)) = \frac{d}{dt} (u'_v(t), u_v(t)) - \| u'_v(t) \|_{L^2(\Omega)}^2$
- iii)  $\langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle = \| |v_v(t) u_v(t) \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}$

**Demostración:** Ver [14] y [20].

Reemplazando las igualdades del Lema 2.7.2 en 2.7.51, obtendremos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt &= \frac{1}{2} \left[ -\|u_v(T)\|^2 + \|u_v(0)\|^2 \right] - (u'_v(T), u_v(T)) + (u'_v(0), u_v(0)) + \\
&+ \int_0^T |u'_v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \int_0^T \|v_v(t)u_v(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u_v(t)) dt
\end{aligned}
\tag{2.7.52}$$

### Lema 2.7.3

Se tienen las siguientes convergencias

- i)  $(u_v(T), u'_v(T)) \rightarrow (u(T), u'(T))$  en R.
- ii)  $(u'_v(0), u_v(0)) \rightarrow (u_1, u_0)$  en R.
- iii)  $\int_0^T |u'_v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \rightarrow \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt$  en R.
- iv)  $\|u_v(0)\|^2 \rightarrow \|u(0)\|^2$  ;  $\|u_v(T)\|^2 \rightarrow \|u(T)\|^2$  en R.

### Demostración:

#### Demostración de (i)

Por 2.6.25,  $(u'_m(T))_m$  es acotada en  $L^2(\Omega)$  y como  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Banach reflexivo, luego por el Teorema 2.13 (Kakutani). Existe una subsucesión  $(u'_v(T)) \subset (u'_m(T))$  tal que  $u'_v(T) \rightarrow u'(T)$  en  $L^2(\Omega)$ . Por otro lado  $(u_m(T))_m$  es acotada en  $w_0^{1,p}(\Omega)$ , esto por 2.6.25 y como  $w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^2(\Omega)$  luego existe una subsucesión  $(u_v(T)) \subset (u_m(T))$  tal que  $u_v(T) \rightarrow u(T)$  en  $L^2(\Omega)$ . A la luz de las convergencias, podemos concluir que:

$$(u_v(T), u'_v(T)) \rightarrow (u(T), u'(T)) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad \blacksquare.$$

**Demostración de (ii)**

Siendo  $(u'_v(0))_v$  una subsucesión de  $(u'_m(0))_m$

$$\text{Luego por 2.5.4, } u'_v(0) \rightarrow u_1 \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.7.53)$$

Por otro lado, por un razonamiento análogo tenemos por 2.5.3 que  $u_v(0) \rightarrow u_0$  en  $w_0^{1,p}(\Omega)$  y como  $w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  de ahí que  $u_v(0) \rightarrow u_0$  en  $L^2(\Omega)$  (2.7.54)

$$\text{Finalmente, notemos que: } (u'_v(0), u_v(0)) \rightarrow (u_1, u_0)$$

En efecto: Basta mostrar que:  $|(u'_v(0), u_v(0)) - (u_1, u_0)| \rightarrow 0$  Cuando  $v \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |(u'_v(0), u_v(0)) - (u_1, u_0)| &= |(u'_v(0), u_v(0)) - (u_1, u_v(0)) + (u_1, u_v(0)) - (u_1, u_0)| \\ &= |(u'_v(0) - u_1, u_v(0)) + (u_1, u_v(0) - u_0)| \\ &\leq |(u'_v(0) - u_1, u_v(0))| + |(u_1, u_v(0) - u_0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz junto con los resultados obtenidos en 2.7.53-2.7.54, resulta

$$(u'_v(0), u_v(0)) \rightarrow (u_1, u_0) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad \blacksquare.$$

**Demostración de (iii)**

Observe que, como  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow^c L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$  y además de 2.6.29 y 2.6.45, tenemos que:

$(u'_m)$  es acotada en  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$

$(u'_m)'$  es acotada en  $L^2(0, T, H^{-s}(\Omega))$

Luego por el Teorema 2.14 (Lions), existe una subsucesión  $(u'_v)_v \subset (u'_m)_m$  tal que  $u'_v \rightarrow u'$  en  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$

Siendo así

$$\|u'_v\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))} \rightarrow \|u'\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))} \quad (2.7.55)$$

De 2.7.55, se concluye que:

$$\int_0^T |u'_v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \rightarrow \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad \text{en } \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

#### **Demostración de (iv)**

Por 2.5.3, sabemos  $u_v(0) \rightarrow u_0$  en  $w_0^{1,p}(\Omega)$  y como  $w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ , luego

$u_v(0) \rightarrow u_0$  en  $H_0^1(\Omega)$ , siendo así  $\|u_v(0)\| \rightarrow \|u_0\|$  en  $\mathbb{R}$

De ahí que:  $\|u_v(0)\|^2 \rightarrow \|u_0\|^2 = \|u(0)\|^2$

Finalmente resulta que:  $\|u_v(0)\|^2 \rightarrow \|u(0)\|^2$

Análogamente, obtendremos:  $\|u_v(T)\|^2 \rightarrow \|u(T)\|^2 \quad \blacksquare$

#### **Observación 2.7.1:**

$$-\lim_{v \rightarrow +\infty} \text{Inf} \int_0^T \|v_v(t)u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq - \int_0^T \|v(t)u(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt$$

#### **Veamos:**

Por el pasaje al límite 2.7.13

$$u_v v_v \rightharpoonup^* uv \text{ en } L^\infty(0, T, L^{\rho+2}(\Omega)) \equiv L^\infty(Q) \quad (2.7.56)$$

De 2.7.56, obtenemos que

$$\|vu\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2} \leq \lim_{v \rightarrow +\infty} \text{Inf} \|v_v u_v\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2} \quad (2.7.57)$$

De 2.7.57, integrando respecto de t, de 0 a T

$$\int_0^T \|v(t)u(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq \lim_{v \rightarrow +\infty} \text{Inf} \int_0^T \|v_v(t)u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \quad (2.7.58)$$

Luego de un cálculo (Se multiplico por -1 en ambos lados), obtendremos

$$-\int_0^T \|v(t)u(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \geq -\lim_{v \rightarrow +\infty} \text{Inf} \int_0^T \|v_v(t)u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \quad (2.7.59)$$

Demostrando así la observación 2.7.1 ■.

Por otro lado, al tomar Límite superior en 2.7.52 resulta

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \frac{1}{2} \left[ -|u_v(T)|^2 + |u_v(0)|^2 \right] - \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} (u'_v(T), u_v(T)) + \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} (u'_v(0), u_v(0)) + \\ &+ \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T |u'_v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \|v_v(t)u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T (f_1(t), u_v(t)) dt \end{aligned} \quad (2.7.60)$$

De 2.7.60 y las convergencias obtenidas en el Lema 2.7.3 se obtiene

$$\begin{aligned}
& \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\|u(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 \right] - (u'(T), u(T)) + (u'(0), u(0)) + \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \\
& - \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \| |v_v(t) u_v(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt \tag{2.7.61}
\end{aligned}$$

De 2.7.61 y de la observación 2.7.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ -\|u(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 \right] - (u'(T), u(T)) + (u'(0), u(0)) + \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \| |v_v(t) u_v(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ -\|u(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 \right] - (u'(T), u(T)) + (u'(0), u(0)) + \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Inf} \int_0^T \| |v_v(t) u_v(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ -\|u(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 \right] - (u'(T), u(T)) + (u'(0), u(0)) + \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \int_0^T \| |v(t) u(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt
\end{aligned} \tag{2.7.62}$$

De 2.7.61 y 2.7.62 resulta que:

$$\begin{aligned}
\lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt & \leq \frac{1}{2} \left[ -\|u(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 \right] - (u'(T), u(T)) + (u'(0), u(0)) + \\
& + \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \int_0^T \| |v(t) u(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt
\end{aligned} \tag{2.7.63}$$

### Observación 2.7.2

Por conveniencia, se buscó una expresión equivalente para el último término de 2.7.63, es

decir para:

$$\int_0^T (f_1(t), u(t)) dt$$



Se procedió de la siguiente manera: Del problema aproximado 2.5.1, se multiplicó

por  $\gamma \in C^1[0, T]$  y pasando a una subsucesión (Es decir:  $m = v$ )

$$(u_v''(t), w)\gamma(t) + \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \gamma(t) + ((u_v'(t), w))\gamma(t) + \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \gamma(t) = (f_1(t), w)\gamma(t) \quad (2.7.64)$$

De 2.7.64, integrando de 0 a T respecto de t

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\gamma(t) dt + \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt + \int_0^T ((u_v'(t), w))\gamma(t) dt + \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt = \int_0^T (f_1(t), w)\gamma(t) dt \quad , \quad \forall \gamma \in C^1([0, T]), \forall w \in V_m \quad (2.7.65)$$

Luego de unos cálculos tendremos que el primer término de 2.7.65 queda como:

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\gamma(t) dt = \gamma(T)(u_v'(T), w) - \gamma(0)(u_v'(0), w) - \int_0^T (u_v'(t), w)\gamma'(t) dt \quad (2.7.66)$$

Reemplazando 2.7.66 en 2.7.65, se tiene

$$\begin{aligned} & \gamma(T)(u_v'(T), w) - \gamma(0)(u_v'(0), w) - \int_0^T (u_v'(t), w)\gamma'(t) dt + \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt + \\ & + \int_0^T ((u_v'(t), w))\gamma(t) dt + \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt = \int_0^T (f_1(t), w)\gamma(t) dt \\ & \forall \gamma \in C^1([0, T]) \quad , \quad \forall w \in V_m \quad (2.7.67) \end{aligned}$$

#### Lema 2.7.4

Se tienen las siguientes convergencias

$$i) \quad \int_0^T (u_v'(t), w)\gamma'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w)\gamma'(t) dt \quad \text{en } R$$

$$\text{ii) } \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle x_2(t), w \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R$$

$$\text{iii) } \int_0^T \langle (u'_v(t), w) \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R$$

$$\text{iv) } \int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R$$

**Demostración:**

Notar que, como  $\gamma \in C^1[0, T] \rightarrow \gamma' \in C^0[0, T] \subset L^1(0, T)$

Entonces  $\gamma' \in L^1(0, T)$

**Demostración de (i)**

De 2.7.23. Tomando en particular  $\alpha = \gamma' \in L^1(0, T)$ ,  $w \in V_m$ , se obtiene

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \gamma'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \gamma'(t) dt \quad \text{en } R \quad \blacksquare.$$

**Demostración de (ii)**

De 2.7.26. Tomando en particular  $\alpha = \gamma \in L^1(0, T)$ ,  $w \in V_m$ , se obtiene

$$\int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle x_2(t), w \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R \quad \blacksquare.$$

**Demostración de (iii)**

De 2.7.31. Tomando en particular  $\alpha = \gamma \in C^1[0, T] \subset L^2(0, T)$ ,  $\forall w \in V_m$ , se obtiene

$$\int_0^T \langle (u'_v(t), w) \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R \quad \blacksquare.$$

**Demostración de (iv)**

De 2.7.43. Tomando en particular para

$$\alpha = \gamma \in C^1[0, T] \subset L^2(0, T) \subset L^1(0, T), \forall w \in V_m$$

$$\int_0^T \langle |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \gamma(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \gamma(t) dt \quad \text{en } R \quad \blacksquare.$$

Culminando así la demostración del Lema 2.7.4  $\blacksquare$ .

Por otro lado. En virtud del Lema 2.7.4, podemos tomar límite en 2.7.67

$$\begin{aligned} & (u'(T), w)\gamma(T) - (u'(0), w)\gamma(0) - \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma'(t) dt + \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \gamma(t) dt + \\ & + \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma(t) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \gamma(t) dt = \int_0^T \langle f_1(t), w \rangle \gamma(t) dt \\ & \forall \gamma \in C^1[0, T], w \in V_m \end{aligned} \quad (2.7.68)$$

De 2.7.68. Por argumentos de densidad tendremos

$$\begin{aligned} & (u'(T), w)\gamma(T) - (u'(0), w)\gamma(0) - \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma'(t) dt + \int_0^T \langle x_1(t), w \rangle \gamma(t) dt + \\ & + \int_0^T \langle (u'(t), w) \rangle \gamma(t) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \gamma(t) dt = \int_0^T \langle f_1(t), w \rangle \gamma(t) dt \\ & \forall \gamma \in C^1[0, T], \forall w \in w_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.7.69)$$

Hacemos:  $m(t) := w \gamma(t)$  en 2.7.69

$$\begin{aligned} & (u'(T), m(T)) - (u'(0), m(0)) - \int_0^T (u'(t), m'(t)) dt + \int_0^T \langle x_1(t), m(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^T ((u'(t), m(t))) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), m(t) \rangle dt = \int_0^T (f_1(t), m(t)) dt \quad (2.7.70) \end{aligned}$$

Notar que la función  $\mathbf{m}(t)$  pertenece al conjunto de combinaciones lineales finitas del tipo  $rs$ , con  $r \in w_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $s \in C^1[0, T]$ .

Por el Teorema 2.16, el conjunto de combinaciones lineales finitas del tipo  $rs$ , con  $r \in w_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $s \in C^1[0, T]$  es denso en

$$V = \left\{ v \in L^2(0, T, w_0^{1,p}(\Omega)) / v' \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) \right\}$$

Luego, por argumentos de densidad, 2.7.70 se cumplirá  $\forall m \in V$ . Es decir:

$$\begin{aligned} & (u'(T), m(T)) - (u'(0), m(0)) - \int_0^T (u'(t), m'(t)) dt + \int_0^T \langle x_1(t), m(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^T ((u'(t), m(t))) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), m(t) \rangle dt = \int_0^T (f_1(t), m(t)) dt \quad (2.7.71) \end{aligned}$$

$$\forall m \in V$$

Por otro lado

Del pasaje al límite, 2.7.1 y 2.7.3

$$u \in L^\infty(0, T, w_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^2(0, T, w_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T, L^2(\Omega))$$

Por lo anterior podemos afirmar que  $u \in V$  (2.7.72)

Teniendo en cuenta 2.7.72 y 2.7.71, tomando en particular  $m=u$

$$\begin{aligned} & (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T (u'(t), u'(t)) dt + \int_0^T \langle x_1(t), u(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^T ((u'(t), u(t))) dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), u(t) \rangle dt = \int_0^T (\mathbf{f}_1(t), \mathbf{u}(t)) dt \end{aligned} \quad (2.7.73)$$

Por lo tanto, en 2.7.73 tenemos una expresión equivalente para:

$$\int_0^T (\mathbf{f}_1(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

Usando el lema 2.7.2 en 2.7.73 resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{f}_1(t), \mathbf{u}(t)) dt &= (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T |u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \langle x_1(t), u(t) \rangle dt + \\ &+ \frac{1}{2} [ \|u(T)\|^2 - \|u(0)\|^2 ] + \int_0^T \| |v(t)u(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \end{aligned} \quad (2.7.74)$$

Reemplazando 2.7.74 en 2.7.63

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \text{Sup} \int_0^T \langle \Delta_p u_v(t), u_v(t) \rangle dt \leq \int_0^T \langle x_1(t), u(t) \rangle dt \quad (2.7.75)$$

De 2.7.75 y 2.7.49, se obtuvo que:

$$0 \leq \int_0^T \langle \Delta_p w, -u(t) + w \rangle dt + \int_0^T \langle x_1(t), u(t) - w \rangle dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.7.76)$$

De 2.7.76, en particular para  $w = u(t) + rv(t)$ ,  $r \in R$

$$0 \leq \int_0^T \langle \Delta_p(u(t) + rv(t)), rv(t) \rangle dt + \int_0^T \langle x_1(t), -rv(t) \rangle dt \quad (2.7.77)$$

Consideremos  $r > 0$ , multiplicando por  $1/r$ , se obtuvo que

$$0 \leq \int_0^T \langle \Delta_p(u(t) + rv(t)), v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle x_1(t), v(t) \rangle dt \quad (2.7.78)$$

Por la Hemicontinuidad del operador  $\Delta_p$ , hacemos  $r \rightarrow 0^+$ , luego

$$0 \leq \int_0^T \langle \Delta_p u(t), v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle x_1(t), v(t) \rangle dt \quad (2.7.79)$$

De 2.7.79

$$0 \leq \int_0^T \langle \Delta_p u(t) - x_1(t), v(t) \rangle dt$$

Análogamente, obtendremos

$$\int_0^T \langle \Delta_p u(t) - x_1(t), v(t) \rangle \leq 0$$

De estas dos desigualdades se concluye que:

$$\int_0^T \langle \Delta_p u(t) - x_1(t), v(t) \rangle dt = 0$$

Siendo así

$$\langle \Delta_p u(t) - x_1(t), v(t) \rangle = 0, \text{ cs en } (0, T)$$

De ahí tendremos

$$\Delta_p u(t) = x_1(t) \quad \text{cs en } (0, T) \quad \blacksquare.$$

Análogamente, se obtuvo  $\Delta_p v(t) = x_2(t)$  cs en  $(0, T)$   $\blacksquare$ .

Quedando así demostrada la proposición 2.7.1  $\blacksquare$ .

Reemplazando los resultados de la proposición 2.7.1 en 2.7.45 - 2.7.46, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{d}{dt} \langle u'(t), w \rangle + \langle \Delta_p u(t), w \rangle + \langle (u'(t), w) \rangle + \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle &= f_1 \\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T) & \quad (2.7.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{d}{dt} \langle v'(t), w \rangle + \langle \Delta_p v(t), w \rangle + \langle (v'(t), w) \rangle + \langle |u(t)|^{\rho+2} |v(t)|^\rho v(t), w \rangle &= f_2 \\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T) & \quad (2.7.81) \end{aligned}$$

## 2.8 Etapa 4: Condiciones iniciales

**Primero vamos a mostrar que:**

$$u(0) = u_0$$

**En efecto:**

Del pasaje al límite 2.7.1, obtenemos la siguiente convergencia

$$u_v \rightharpoonup^* u \text{ en } L^\infty(0, T, W_0^{1,p}(\Omega)) \equiv \left( L^1(0, T, W^{-1,p'}(\Omega)) \right)'$$

De ahí se tiene que

$$\langle u_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle \text{ en } R, \forall \phi \in L^1(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$$

Asimismo

$$\int_0^T \langle u_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), \phi(t) \rangle dt, \forall \phi \in L^1(0, T, w^{-1, p'}(\Omega))$$

Considerando  $\phi(t) = \alpha(t)w, \forall \alpha \in L^1(0, T), \forall w \in W^{-1, p'}(\Omega)$

$$\int_0^T \langle u_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), w \rangle \alpha(t) dt \quad (2.8.1)$$

En 2.8.1, tomando en particular  $w \in L^2(\Omega)$

$$\int_0^T (u_v(t), w) \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), w) \alpha(t) dt, w \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in L^1(0, T) \quad (2.8.2)$$

Consideremos

$\tau \in C^1[0, T]$  de modo que  $\tau(0) = 1, \tau(T) = 0$

De ahí  $\tau' \in C^0[0, T] \subset L^1(0, T)$ , tomando en particular  $\alpha = \tau'$  en 2.8.2

Tendremos

$$\int_0^T (u_v(t), w) \tau'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), w) \tau'(t) dt \quad (2.8.3)$$

Por el pasaje al límite 2.7.3

$$u'_v \rightarrow^* u' \text{ en } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \equiv (L^1(0, T, L^2(\Omega)))'$$

Entonces  $\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u', \phi \rangle$  en  $R, \forall \phi \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$

Asimismo



$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi(t) \rangle dt$$

Tomando  $\phi(t) = \alpha(t)w$ ,  $\forall \alpha \in L^1(0, T)$ ,  $\forall w \in L^2(\Omega)$

De ahí

$$\int_0^T (u'_v(t), w) \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w) \alpha(t) dt \quad (2.8.4)$$

En 2.8.4, Tomando en particular  $\alpha = \tau \in C^1[0, T] \subset L^1(0, T)$

$\tau$  : anteriormente definido

$$\int_0^T (u'_v(t), w) \tau(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w) \tau(t) dt \text{ en } R, \forall w \in L^2(\Omega), \tau \in C^1[0, T]$$

$$\int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u_v(t), w) \right] \tau(t) dt \rightarrow \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u(t), w) \right] \tau(t) dt, \forall w \in L^2(\Omega), \tau \in C^1[0, T] \quad (2.8.5)$$

Sumando 2.8.3 y 2.8.5 obtendremos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [(u_v(t), w) \tau(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [(u(t), w) \tau(t)] dt \quad (2.8.6)$$

De 2.8.6 resulta

$$(u_v(T), w) \tau(T) - (u_v(0), w) \tau(0) \rightarrow (u(T), w) \tau(T) - (u'(0), w) \tau(0)$$

Teniendo en cuenta que:  $\tau(0) = 1$ ,  $\tau(T) = 0$ , obtenemos

$$(u_v(0), w) \rightarrow (u(0), w) \text{ en } R, \forall w \in L^2(\Omega)$$

De ahí

$$u_v(0) \rightharpoonup u(0) \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.8.7)$$

Del problema aproximado 2.5.3

$$u_v(0) \rightarrow u_0 \text{ en } w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

Luego

$$u_v(0) \rightarrow u_0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

Finalmente tendremos

$$u_v(0) \rightharpoonup u_0 \text{ en } L^2(\Omega) \quad (2.8.8)$$

De 2.8.7 - 2.8.8 y por la Prop. 2.2 (Unicidad del límite débil)

$u(0) = u_0$ , terminando así nuestra demostración. ■.

Análogamente, mostraremos que:  $v(0) = v_0$  ■.

**En segundo lugar demostraremos que:**

$$u'(0) = u_1$$

En efecto: Por el pasaje al límite 2.7.11, obtenemos

$$u_v'' \rightharpoonup u'' \text{ en } L^2(0, T, H^{-s}(\Omega)) \equiv \left( L^2(0, T, H_0^s(\Omega)) \right)'$$

Siendo así tendremos

$$u_v'' \rightharpoonup^* u'' \text{ en } \left( L^2(0, T, H_0^s(\Omega)) \right)'$$

De esto último resulta

$$\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u'', \phi \rangle, \forall \phi \in L^2(0, T, H_0^s(\Omega)) \quad (2.8.9)$$

De 2.8.9 se tiene

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), \phi(t) \rangle dt, \forall \phi \in L^2(0, T, H_0^s(\Omega)) \quad (2.8.10)$$

En 2.8.10, hacemos  $\phi(t) = \alpha(t)w$ ,  $\forall \alpha \in L^2(0, T)$ ,  $\forall w \in H_0^s(\Omega)$ , resultando

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), w \rangle \alpha(t) dt, \alpha \in L^2(0, T), \forall w \in H_0^s(\Omega) \quad (2.8.11)$$

Como  $\tau \in C^1[0, T] \subset L^2(0, T)$ , tomando en particular:  $\alpha = \tau$  en 2.8.11

De ahí

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \tau(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), w \rangle \tau(t) dt, \tau \in C^1[0, T], w \in H_0^s(\Omega) \quad (2.8.12)$$

Por otro lado, por el pasaje al límite 2.7.3 obtendremos

$$u'_v \rightharpoonup^* u' \text{ en } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \equiv (L^1(0, T, L^2(\Omega)))'$$

De ahí resulta que

$$\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u', \phi \rangle \text{ en } R, \forall \phi \in L^1(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.8.13)$$

De 2.8.13, se tiene

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi(t) \rangle dt, \forall \phi \in L^1(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.8.14)$$

En 2.8.14, hacemos

$$\phi(t) = \alpha(t)w, \forall \alpha \in L^1(0, T), \forall w \in L^2(\Omega)$$

Resultando

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \alpha(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \alpha(t) dt, \forall \alpha \in L^1(0, T), w \in L^2(\Omega) \quad (2.8.15)$$

Sabemos que

$$\tau \in C^1[0, T] \rightarrow \tau' \in C^0[0, T] \subset L^1(0, T)$$

En particular, para  $\alpha = \tau'$  en 2.8.15

$$\int_0^T \langle u'_v(t), w \rangle \tau'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w \rangle \tau'(t) dt, \tau \in C^1[0, T], w \in L^2(\Omega) \quad (2.8.16)$$

Sumando 2.8.12 y 2.8.16

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [\langle u'_v(t), w \rangle \tau(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [\langle u'(t), w \rangle \tau(t)] dt \quad (2.8.17)$$

De 2.8.17, se obtiene

$$\langle u'_v(T), w \rangle \tau(T) - \langle u'_v(0), w \rangle \tau(0) \rightarrow \langle u'(T), w \rangle \tau(T) - \langle u'(0), w \rangle \tau(0)$$

Teniendo en cuenta que:  $\tau(0) = 1$ ,  $\tau(T) = 0$ , obtenemos

$$u'_v(0) \rightharpoonup^* u'(0) \text{ en } H^{-s}(\Omega)$$

Concluimos que

$$u'_v(0) \rightharpoonup u'(0) \text{ en } H^{-s}(\Omega) \quad (2.8.18)$$

Por otro lado, del problema aproximado 2.5.4, tendremos la siguiente convergencia

$$u'_v(0) \rightarrow u_1 \text{ en } L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$$

Entonces

$$u'_v(0) \rightarrow u_1 \text{ en } H^{-s}(\Omega)$$

De ahí

$$u'_v(0) \rightharpoonup u_1 \text{ en } H^{-s}(\Omega) \quad (2.8.19)$$

De 2.8.18-2.8.19 y por la Prop. 2.2 (Unicidad del límite débil), resulta finalmente

$$\text{que: } u'(0) = u_1 \quad \blacksquare.$$

$$\text{Análogamente, mostraremos que: } v'(0) = v_1 \quad \blacksquare.$$

## 2.9 Comportamiento Asintótico

### Definición 2.9.1

La energía asociada al Problema de evolución no lineal del tipo  $p$ -Laplaciano, viene dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} [ |u'(t)|^2 + |v'(t)|^2 ] + \frac{1}{p} [ \| |u(t)| \|_0^p + \| |v(t)| \|_0^p ] + \frac{2}{\rho+2} [ \| |u(t)v(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} ] \quad (2.9.1)$$

### Definición 2.9.2 (Energía aproximada)

La energía asociada al problema aproximado viene dada por:

$$E_m(t) = \frac{1}{2} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] + \frac{1}{p} [ \| |u_m(t)| \|_0^p + \| |v_m(t)| \|_0^p ] + \frac{2}{\rho + 2} [ \| |u_m(t)v_m(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} ] \quad (2.9.2)$$

### Lema 2.9.1

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + \| |u'_m(t)| \|^2 + \| |v'_m(t)| \|^2 = 0 \quad (2.9.3)$$

### Demostración:

De la ecuación aproximada 2.5.1 para  $w = u'_m(t)$

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + \langle \Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle + ((u'_m(t), u'_m(t))) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t) \rangle = 0$$

### Observación 2.9.1

$$i) (u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| |u'_m(t)| \|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.9.4.a)$$

$$ii) \langle \Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|_0^p \quad (2.9.4.b)$$

$$iii) ((u'_m(t), u'_m(t))) = \| |u'_m(t)| \|^2 \quad (2.9.4.c)$$

$$iv) \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t) \rangle = \frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \| |v_m(t)u_m(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \quad (2.9.4.d)$$

Usando 2.9.4.a , 2.9.4.b, 2.9.4.c, 2.9.4.d, tendremos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| |u'_m(t)| \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \| |u_m(t)| \|_0^p + \| |u'_m(t)| \|^2 + \frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \| |v_m(t)u_m(t)| \|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = 0$$

Análogamente de la ecuación aproximada 2.5.2, hacemos  $w = v'_m(t)$  obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|_0^p + \|v'_m(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = 0$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [ |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} ] + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} [ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p ] + [ \|u'_m(t)\|^2 + \\ + \|v'_m(t)\|^2 ] + \frac{2}{\rho+2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = 0 \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [ |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} ] + \frac{1}{p} [ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p ] + \frac{2}{\rho+2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \right\} + \\ + [ \|u'_m(t)\|^2 + \|v'_m(t)\|^2 ] = 0 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{d}{dt} [E_m(t)] + \|u'_m(t)\|^2 + \|v'_m(t)\|^2 = 0$$

Finalizando así nuestra demostración. ■.

### Observación 2.9.2

Como consecuencia directa del lema 2.9.1 se obtiene que:

$$\frac{d}{dt} E_m(t) < 0, \text{ además } E_m(t) \leq E_m(0), \forall t \geq 0, \text{ i.e. } E_m \text{ esta acotada y es}$$

decreciente.

**Probaremos que,  $\exists M > 0$  y  $\alpha > 0$  tal que**

$$\sup_{s \in [t, t+1]} E(s)^{\alpha+1} \leq M \{E(t) - E(t+1)\}, \forall t \geq 0$$

Luego el Teorema 2.19 (Nakao), nos permitirá obtener  $M_1 > 0$  tal que

$$E(t) \leq M_1 t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall t : \text{grande}$$

**Observación 2.9.3**

Integrando ( 2.9.3) **respecto de t** de “t” a “t+1” , donde  $t \in R$ , fijo y arbitrario.

$$E_m(t) - E_m(t + 1) = \int_t^{t+1} (|u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2) ds$$

Teniendo presente la inmersión  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

**Nota:** Por simplicidad y para no sobrecargar de notaciones, **la letra C**

representara una constante que no necesariamente tiene el mismo valor en todos los casos.

$$C[E_m(t) - E_m(t + 1)] \geq \int_t^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds$$

Definimos:

$$B_m^2(t) = C[E_m(t) - E_m(t + 1)] \tag{2.9.5}$$

De ahí tendremos

$$B_m^2(t) \geq \int_t^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds$$

Particionando el intervalo  $[t, t + 1]$  en cuatro partes iguales y trabajando en los extremos.



Extremo izquierdo  $\left[ t; t + \frac{1}{4} \right]$

$$B_m^2(t) \geq \int_t^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds \geq \int_t^{t+\frac{1}{4}} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds$$

$$B_m^2(t) \geq \int_t^{t+\frac{1}{4}} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds$$

Por el Teorema 2.2 (Teorema de valor medio para integrales)

$$\exists t_1 \in \left[ t, t + \frac{1}{4} \right] \text{ tal que } B_m^2(t) \geq \frac{1}{4} ( |u'_m(t_1)|^2 + |v'_m(t_1)|^2 )$$

Como consecuencia directa tenemos

$$|u'_m(t_1)| \leq 2B_m(t) \quad (2.9.6.a)$$

$$|v'_m(t_1)| \leq 2B_m(t) \quad (2.9.6.b)$$

Extremo derecho  $\left[ t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$

Procedemos de manera análoga y usando el Teorema 2.2 como en el caso anterior,

resulta que:  $\exists t_2 \in \left[ t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$  tal que

$$|u'_m(t_2)| \leq 2B_m(t) \quad (2.9.7.a)$$

$$|v'_m(t_2)| \leq 2B_m(t) \quad (2.9.7.b)$$

En el problema aproximado 2.5.1, hacemos  $w = u_m(t)$ , además de usar las siguientes identidades.

$$i) (u''(t), u(t)) = \frac{d}{dt} (u'(t), u(t)) - \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.9.8.a)$$

$$ii) \langle \Delta_p u(t), u(t) \rangle = \|u(t)\|_0^p \quad (2.9.8.b)$$

$$iii) \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), u(t) \rangle = \|u(t)v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \quad (2.9.8.c)$$

Resultando que

$$\|u_m(t)\|_0^p + \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = -\frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t))] + |u'_m(t)|^2 - ((u'_m(t), u_m(t)))$$

Análogamente, hacemos  $w = v_m(t)$  en el problema aproximado 2.5.2

$$\|v_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = -\frac{d}{dt} [(v'_m(t), v_m(t))] + |v'_m(t)|^2 - ((v'_m(t), v_m(t)))$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p + 2\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\ &= -\frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t)) + (v'_m(t), v_m(t))] + |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 - ((u'_m(t), u_m(t))) + \\ & \quad - ((v'_m(t), v_m(t))) \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

Integrando respecto de "t" de  $t_1$  a  $t_2$  (2.9.9)

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} [\|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p] dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t)) + (v'_m(t), v_m(t))] dt + \int_{t_1}^{t_2} [|u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2] dt + \\ & \quad - \int_{t_1}^{t_2} [((u'_m(t), u_m(t))) + ((v'_m(t), v_m(t)))] dt \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
 I := & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t)) + (v'_m(t), v_m(t))] dt + \int_{t_1}^{t_2} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt + \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} [ ((u'_m(t), u_m(t))) + ((v'_m(t), v_m(t))) ] dt \quad (2.9.11)
 \end{aligned}$$

Ahora estimaremos **I**.

### Estimando el Primer sumando de 2.9.11

Observe que podemos obtener la siguiente estimativa

$$\begin{aligned}
 - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t))] dt & \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t))] dt \right| \\
 & = |(u'_m(t_2), u_m(t_2)) - (u'_m(t_1), u_m(t_1))| \\
 & \leq |(u'_m(t_2), u_m(t_2))| + |(u'_m(t_1), u_m(t_1))| \\
 & \leq |u'_m(t_2)| |u_m(t_2)| + |u'_m(t_1)| |u_m(t_1)| \\
 & \leq 2B_m(t) [ |u_m(t_2)| + |u_m(t_1)| ]
 \end{aligned}$$

Notar que esto último como consecuencia directa de (2.9.7.a) y (2.9.6.a)

Además usando la inmersión  $w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  obtendremos

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(u'_m(t), u_m(t))] dt \leq 2CB_m(t) [ \|u_m(t_1)\|_0 + \|u_m(t_2)\|_0 ] \quad (2.9.12)$$

C: constante de la inmersión

Análogamente mostramos que

$$\begin{aligned}
 - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [(v'_m(t), v_m(t))] dt &\leq 2B_m(t)[|v_m(t_1)| + |v_m(t_2)|] \\
 &\leq 2CB_m(t) \left[ \|v_m(t_1)\|_0 + \|v_m(t_2)\|_0 \right] \quad (2.9.13)
 \end{aligned}$$

**Lema 2.9.2**

$$\{pE_m(t_i)\}^{1/p} \geq \|u_m(t_i)\|_0, \quad \text{para } i = 1, 2$$

**Demostración:**

Por definición de energía:

$$\begin{aligned}
 E_m(t_i) &= \frac{1}{2} [|u'_m(t_i)|^2 + |v'_m(t_i)|^2] + \frac{1}{p} \left[ \|u_m(t_i)\|_0^p + \|v_m(t_i)\|_0^p \right] + \\
 &\quad + \frac{2}{\rho + 2} \left[ \|u_m(t_i)v_m(t_i)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \right]
 \end{aligned}$$

Multiplicando por "**p**" en ambos lados de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 pE_m(t_i) &= \frac{p}{2} [|u'_m(t_i)|^2 + |v'_m(t_i)|^2] + \|u_m(t_i)\|_0^p + \|v_m(t_i)\|_0^p \\
 &\quad + \frac{2p}{\rho + 2} \left[ \|u_m(t_i)v_m(t_i)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \right] \geq \|u_m(t_i)\|_0^p
 \end{aligned}$$

De ahí

$$pE_m(t_i) \geq \|u_m(t_i)\|_0^p, \text{ entonces } \{pE_m(t_i)\}^{1/p} \geq \|u_m(t_i)\|_0, i = 1, 2 \quad (2.9.14)$$

Análogamente

$$pE_m(t_i) \geq \|v_m(t_i)\|_0^p \geq 0 ; i = 1,2$$

Operando convenientemente, resulta

$$\{pE_m(t_i)\}^{1/p} \geq \|v_m(t_i)\|_0, i = 1,2 \quad (2.9.15)$$

Finalizando nuestra demostración del Lema ■.

De (2.9.14)

$$\|u_m(t_1)\|_0 \leq \{pE_m(t_1)\}^{1/p}$$

$$\|u_m(t_2)\|_0 \leq \{pE_m(t_2)\}^{1/p}$$

De ahí

$$\|u_m(t_1)\|_0 + \|u_m(t_2)\|_0 \leq \{pE_m(t_1)\}^{1/p} + \{pE_m(t_2)\}^{1/p} \quad (2.9.16)$$

De (2.9.16) en (2.9.12)

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (u'_m(t), u_m(t)) dt &\leq 2CB_m(t) [\{pE_m(t_1)\}^{1/p} + \{pE_m(t_2)\}^{1/p}] \\ &= 2Cp^{1/p}B_m(t) [E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p}] \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

Análogamente tendremos

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (v'_m(t), v_m(t)) dt \leq 2Cp^{1/p}B_m(t) [(E_m(t_1))^{1/p} + (E_m(t_2))^{1/p}] \quad (2.9.18)$$

### Estimando el Tercer sumando de 2.9.11

Usando propiedades de integrales y la desigualdad de Schwartz, obtendremos

$$\begin{aligned}
 - \int_{t_1}^{t_2} ((u'_m(t), u_m(t))) dt &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} ((u'_m(t), u_m(t))) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |((u'_m(t), u_m(t)))| dt \\
 &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(t)\| \|u_m(t)\| dt \quad (2.9.19)
 \end{aligned}$$

De la inmersión continua  $w_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$

$$\|u_m(t)\| \leq C \|u_m(t)\|_0$$

$$\|u'_m(t)\| \|u_m(t)\| \leq C \|u'_m(t)\| \|u_m(t)\|_0 \quad (2.9.20)$$

Considerando (2.9.20) en (2.9.19)

$$- \int_{t_1}^{t_2} ((u'_m(t), u_m(t))) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} C \|u'_m(t)\| \|u_m(t)\|_0 dt$$

Ahora usando la Prop. 2.17 (Young) en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
 - \int_{t_1}^{t_2} ((u'_m(t), u_m(t))) dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{(C \|u'_m(t)\|)^{p'}}{p'} + \frac{\|u_m(t)\|_0^p}{p} \right] dt \\
 &= \frac{C^{p'}}{p'} \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(t)\|^{p'} dt + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)\|_0^p dt
 \end{aligned}$$

Análogamente tendremos

$$\begin{aligned}
-\int_{t_1}^{t_2} \left( (v'_m(t), v_m(t)) \right) dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{(C \|v'_m(t)\|)^{p'}}{p'} + \frac{\|v_m(t)\|_0^p}{p} \right] dt \\
&= \frac{C^{p'}}{p'} \int_{t_1}^{t_2} \|v'_m(t)\|^{p'} dt + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|v_m(t)\|_0^p dt
\end{aligned}$$

De ahí, sumando resulta

$$\begin{aligned}
&-\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( (u'_m(t), u_m(t)) \right) + \left( (v'_m(t), v_m(t)) \right) \right] dt \\
&\leq \frac{C^{p'}}{p'} \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(t)\|^{p'} dt + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)\|_0^p dt + \frac{C^{p'}}{p'} \int_{t_1}^{t_2} \|v'_m(t)\|^{p'} dt + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|v_m(t)\|_0^p dt \quad (2.9.21)
\end{aligned}$$

### Estimando el Segundo termino de 2.9.11

$$\int_{t_1}^{t_2} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt \leq \int_t^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds \leq B_m^2(t) \quad (2.9.22)$$

Teniendo en cuenta (2.9.17), (2.9.18), (2.9.21) y (2.9.22) en (2.9.11)

$$\begin{aligned}
I &\leq 4CB_m(t) \{ E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p} \} + B_m^2(t) + \frac{C^{p'}}{p'} \int_{t_1}^{t_2} [ \|u'_m(t)\|^{p'} + \|v'_m(t)\|^{p'} ] dt + \\
&\quad + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} ( \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p ) dt
\end{aligned}$$

Teniendo presente (2.9.10)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p ] dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt$$

Al agrupar convenientemente y luego multiplicar por  $p'$  en ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p \right] dt + 2p' \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \\ & \leq 4CB_m(t) \left\{ E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p} \right\} + p'B_m^2(t) + C^{p'} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \|u'_m(t)\|^{p'} + \|v'_m(t)\|^{p'} \right\} dt \quad (2.9.23) \end{aligned}$$

Además

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(t)\|^{p'} dt \leq C \left( \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(t)\|^2 dt \right)^{\frac{p'}{2}} \quad (2.9.24. a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v'_m(t)\|^{p'} dt \leq C \left( \int_{t_1}^{t_2} \|v'_m(t)\|^2 dt \right)^{\frac{p'}{2}} \quad (2.9.24. b)$$

Por otro lado, **Definamos:**

$$J := \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \|u'_m(t)\|^{p'} + \|v'_m(t)\|^{p'} \right\} dt$$

**Lema 2.9.3**

$$J \leq 2 B_m^{p'}(t)$$

**Demostración:**

De 2.9.5 y de la observación 2.9.2



$$\begin{aligned}
B_m^2(t) &= C[E_m(t) - E_m(t+1)] = C \int_t^{t+1} (||u'_m(s)||^2 + ||v'_m(s)||^2) ds \\
&\geq C \int_{t_1}^{t_2} (||u'_m(t)||^2 + ||v'_m(t)||^2) dt \\
&= C \int_{t_1}^{t_2} ||u'_m(t)||^2 dt + C \int_{t_1}^{t_2} ||v'_m(t)||^2 dt
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior y de (2.9.24), tendremos

$$B_m^2(t) \geq C \int_{t_1}^{t_2} ||u'_m(t)||^2 dt \geq \left\{ \int_{t_1}^{t_2} ||u'_m(t)||^{p'} dt \right\}^{2/p'} \geq 0$$

Elevando a la  $\frac{p'}{2}$  en ambos lados en la desigualdad anterior

$$B_m^{p'}(t) \geq \int_{t_1}^{t_2} ||u'_m(t)||^{p'} dt \tag{2.9.25}$$

Análogamente, obtenemos

$$B_m^{p'}(t) \geq \int_{t_1}^{t_2} ||v'_m(t)||^{p'} dt \tag{2.9.26}$$

De 2.9.25 y 2.9.26 tenemos

$$J \leq 2 B_m^{p'}(t)$$

De esta forma tenemos demostrado el Lema ■.

Ahora, teniendo presente el lema 2.9.3 en 2.9.23

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left[ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p \right] dt + 2p' \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \\
& \leq C \left\{ B_m(t) \left[ E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p} \right] + B_m^2(t) + 2 B_m^{p'}(t) \right\} \quad (2.9.27)
\end{aligned}$$

Integrando respecto a “t” de  $t_1$  a  $t_2$  en 2.9.2

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 \right] dt + \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p \right] dt + \\
& \quad + \frac{2}{\rho+2} \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} dt \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \|u_m(t)\|_0^p + \|v_m(t)\|_0^p \right] dt + \\
& \quad + 2 p' \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(t)v_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} dt \quad (\Psi)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.9.22), (2.9.27) y usándolos en  $(\Psi)$ , resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt \leq \frac{1}{2} B_m^2(t) + C \left\{ B_m(t) \left[ E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p} \right] + B_m^2(t) + 2 B_m^{p'}(t) \right\} \quad (2.9.28)$$

Buscando una estimativa para  $E_m(s)$ ,  $s \in [t, t+1]$

**Lema 2.9.4**

$$E_m(t) \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \frac{1}{C} B_m^2(t) \quad (2.9.29)$$

**Demostración:**

Por el Teorema 2.2 (Teorema de valor medio para integrales), existe  $t_3 \in (t_1; t_2)$

$$\int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt = (t_2 - t_1) E_m(t_3) \geq \frac{1}{2} E_m(t_3) \quad (2.9.30)$$

Integrando respecto a “t” de  $s$  a  $t_3$  en 2.9.3

$$E_m(t_3) - E_m(s) = - \int_s^{t_3} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt$$

Entonces

$$E_m(t_3) + \int_s^{t_3} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt = E_m(s) \quad (2.9.31)$$

De 2.9.31 y usando 2.9.30

$$\begin{aligned} E_m(s) &= E_m(t_3) + \int_s^{t_3} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt \\ &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \int_s^{t_3} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \int_s^{t_3} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \int_t^{t+1} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt \\
&= 2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \frac{1}{C} B_m^2(t)
\end{aligned}$$

Terminando así la demostración del Lema. ■.

Por otro lado de 2.9.29 y usando 2.9.28, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
E_m(t) &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E_m(t) dt + \frac{1}{C} B_m^2(t) \\
&\leq B_m^2(t) + 2C \{ B_m(t) [ E_m(t_1)^{1/p} + E_m(t_2)^{1/p} ] + B_m^2(t) + 2 B_m^{p'}(t) \} + \frac{1}{C} B_m^2(t)
\end{aligned}$$

De la observación 2.9.2 ( $E_m$  es una función decreciente), de ahí resulta que

$$\begin{aligned}
E_m(t) &\leq B_m^2(t) + 2C \{ B_m(t) (2) E_m(t)^{1/p} + B_m^2(t) + 2 B_m^{p'}(t) \} + \frac{1}{C} B_m^2(t) \\
&= B_m^2(t) \left\{ 1 + 2C + \frac{1}{C} \right\} + 4C B_m(t) E_m^{1/p}(t) + 4C B_m^{p'}(t) \tag{2.9.32}
\end{aligned}$$

Usando la Prop. 2.17 (Young) en 2.9.32

$$\text{Para: } a = 4C B_m(t) \quad \gamma \quad b = E_m(t)^{1/p}$$

Resultando que

$$\begin{aligned}
E_m(s) &\leq B_m^2(t) \left\{ 1 + 2C + \frac{1}{C} \right\} + \frac{(4C)^{p'}}{p'} B_m^{p'}(t) + \frac{1}{p} E_m(t) + 4C B_m^{p'}(t) \\
&\leq B_m^2(t) \left\{ 1 + 2C + \frac{1}{C} \right\} + \frac{(4C)^{p'}}{p'} B_m^{p'}(t) + \frac{1}{p} E_m(s) + 4C B_m^{p'}(t) \\
&= B_m^2(t) \left\{ 1 + 2C + \frac{1}{C} \right\} + B_m^{p'}(t) \left\{ \frac{(4C)^{p'}}{p'} + 4C \right\} + \frac{1}{p} E_m(s)
\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente

$$\frac{1}{p'} E_m(s) \leq B_m^2(t) \{1 + 2C + 1/C\} + B_m^{p'}(t) \left\{ \frac{(4C)^{p'}}{p'} + 4C \right\}$$

$$\text{Tomando } C_1 = \max \left\{ (1 + 2C + 1/C)p' ; \left( \frac{(4C)^{p'}}{p'} + 4C \right) p' \right\}$$

Resulta que:

$$E_m(s) \leq C_1 [B_m^2(t) + B_m^{p'}(t)] = C_1 B_m^{p'}(t) [B_m^{2-p'}(t) + 1] \quad (2.9.33)$$

**Estimaremos  $B_m^{2-p'}(t)$**

De 2.9.5 y de la observación 2.9.3

$$\begin{aligned} B_m^2(t) &= C[E_m(t) - E_m(t+1)] = C \int_t^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds \\ &\leq C \int_0^{t+1} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt \quad (2.9.34) \end{aligned}$$

Ahora en 2.9.1, integramos respecto a  $s$  de 0 a  $t+1$

$$E_m(t+1) - E_m(0) = - \int_0^{t+1} [ |u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 ] ds$$

Entonces

$$\int_0^{t+1} [ |u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 ] dt = E_m(0) - E_m(t+1) \leq E_m(0) \quad (2.9.35)$$

Usando 2.9.35 en 2.9.34

$$B_m^2(t) \leq C E_m(0) \leftrightarrow B_m^{2-p'}(t) \leq [C_2 E_m(0)]^{\frac{2-p'}{2}} = K_1$$

De ahí

$$B_m^{2-p'}(t) \leq K_1 \tag{2.9.36}$$

Teniendo cuenta 2.9.36 en 2.9.33

$$E_m(s) \leq C_1(K_1 + 1)B_m^{p'}(t) = K_2 B_m^{p'}(t), \quad K_2 > 0 \tag{2.9.37}$$

De 2.9.37

$$E_m^{2/p'}(s) \leq K_3 B_m^2(t) = K_3 C \{E_m(t) - E_m(t+1)\} = K_4 [E_m(t) - E_m(t+1)]$$

$$K_3, K_4 > 0$$

Entonces

$$E_m^{\left(\frac{2}{p'}-1\right)+1}(s) \leq K_4 [E_m(t) - E_m(t+1)]$$

Tomando supremo

$$\sup_{s \in [t; t+1]} E_m^{\left(\frac{2}{p'}-1\right)+1}(s) \leq K_4 [E_m(t) - E_m(t+1)]$$

Considerando

$$\alpha = \frac{2}{p'} - 1 > 0 \text{ y } M = K_4 > 0$$

En virtud del Teorema 2.19 (Nakao), existe  $M_1 > 0$  tal que

$$E_m(t) \leq M_1 \cdot t^{-1/\alpha}, \quad \forall t : \text{grande}$$

Tomando límite inferior ( $m \rightarrow \infty$ ) en ambos lados de la desigualdad de arriba, resulta finalmente que:

$$E(t) \leq M_1 \cdot t^{-1/\alpha}, \quad \forall t: \text{grande} \quad \blacksquare.$$

## 2.10 Aplicaciones

En esta sección presentamos algunas graficas implementadas por medio del software (WOLFRAM MATHEMATICA 11).

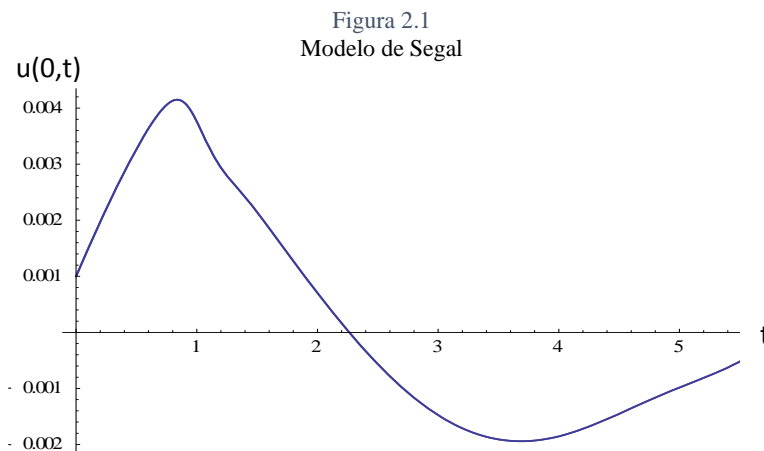
Primer Modelo: Fue propuesto por Segal (2000). El cual describe el movimiento de los mesones (Partículas formadas por la colisión de un Protón y un neutrón) en un campo electromagnético. Esto, para dimensiones superiores a 3, es decir

$$(n > 3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0 \end{cases}$$

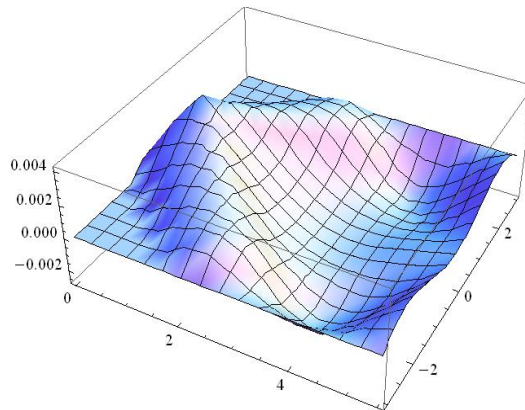
Siendo  $u$  y  $v$  campos escalares de masas  $\alpha$  y  $\beta$  con  $g$  y  $h$  constantes de integración.

Se considero  $\Omega = ]-3; 3[$  y el intervalo de tiempo  $[0; 5.5]$



Fuente: Elaboración Propia

Figura 2.2  
Modelo de Segal Tridimensional



Fuente: Elaboración Propia

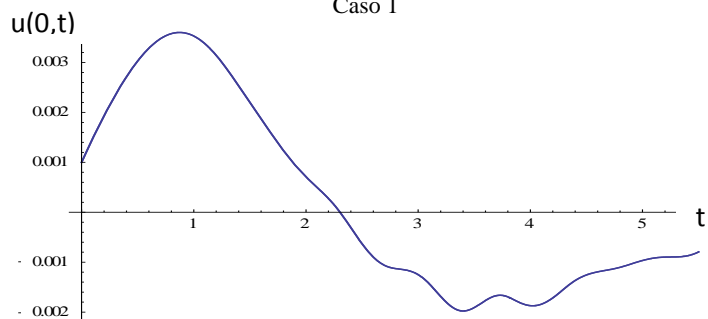
Segundo Modelo: Propuesto por Medeiros (1987). Busca generalizar la ecuación dada por Segal. De hecho logra demostrar existencia y unicidad de soluciones considero débiles para cualquier dimensión ( $n \geq 1$ ) y unicidad para  $n = 1, 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u - |v|^{\rho+2}|u|^\rho u = f_1 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + v - |u|^{\rho+2}|v|^\rho v = f_2 \end{cases}$$

Se  $\Omega = ]-3; 3[$  y el intervalo de tiempo  $[0;5.5]$

**Caso 1:** Considerando  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $n = 1$ ,  $\rho = 0$

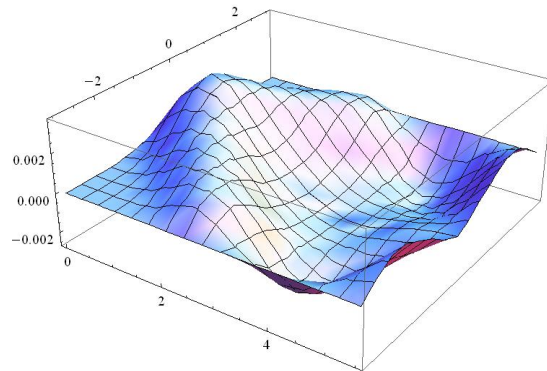
Figura 2.3  
Modelo de Medeiros  
Caso 1



Fuente: Elaboración Propia



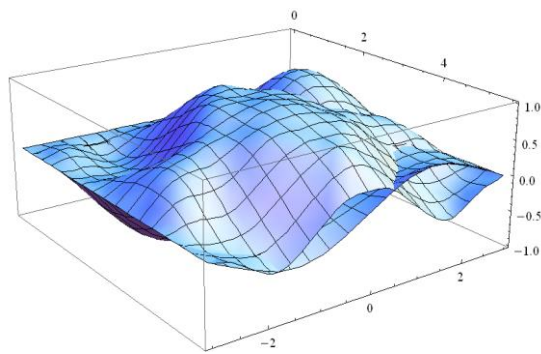
Figura 2.4  
Modelo de Medeiros Tridimensional  
Caso 1



Fuente: Elaboración Propia

**Caso 2:** Considerando  $f_1 = \text{Sen}(x)$  ,  $f_2 = \text{Cos}(x^2)$  ,  $n = 1$  ,  $\rho = 0$

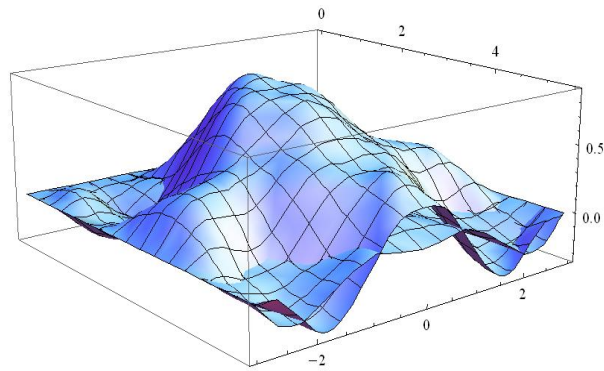
Figura 2.5  
Modelo de Medeiros Tridimensional  
Caso 2



Fuente: Elaboración Propia

**Caso 3:** Considerando  $f_1 = \text{Sen}(x^8)$  ,  $f_2 = \text{Cos}(x^2)$  ,  $n = 1$  ,  $\rho = 0$

Figura 2.6  
Modelo de Medeiros Tridimensional  
Caso 3



Fuente: Elaboración Propia

## Capítulo III

### Variables e Hipótesis

#### 3.1 Variables de la investigación

Las variables de la investigación son las series:  $u_m(t) = \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i$  y

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i$$

#### 3.2 Operacionalización de variables

Para la demostración del **Teorema 4.1 (Existencia de Soluciones débiles)**, se usó

El Método de Faedo – Galerkin, Limaco (2016) señala que “Se trata de un método ideado para solucionar problemas de evolución desarrollado por Sandro-Faedo. El cual consiste en proyectar el problema original a subespacios de dimensión finita”

En nuestro caso, los subespacios de dimensión finita son los  $V_m$ .

Ahora, como  $H_0^S(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , con inmersión continua, densa y compacta

De ahí, existe una base hilbertiana  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $H_0^S(\Omega)$  tal que

1.  $|w_i| = 1, \forall i \in \mathbb{N}, (w_i, w_j) = 0, \forall i, j; \text{ tal que } i \neq j$
2. El subespacio generado por el conjunto  $\{w_1, \dots, w_m\} \quad m \in \mathbb{N}$  es denso en  $H_0^S(\Omega)$ .

Consideremos  $V_m = L\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$  el subespacio generado por los primeros “m” vectores de la base  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , queremos determinar las funciones:

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i \in V_m$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \in V_m$$

tal que:

$$(u''_m(t), w) + \langle \Delta_p u_m(t), w \rangle + ((u'_m(t), w)) + \langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle = (f_1(t), w)$$

$$\forall w \in V_m$$

$$(v''_m(t), w) + \langle \Delta_p v_m(t), w \rangle + ((v'_m(t), w)) + \langle |u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), w \rangle = (f_2(t), w)$$

$$\forall w \in V_m$$

(3.1)

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ en } w_0^{1,p}(\Omega)$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0 \text{ en } w_0^{1,p}(\Omega)$$

$$v'_m(0) = v_{1m} \rightarrow v_1 \text{ en } L^2(\Omega)$$

Haciendo  $w = w_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , se buscara demostrar que el problema aproximado (3.1) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Esto forma parte de la primera etapa del método de Faedo-Galerkin.

### 3.3 Hipótesis general

HG: Es posible demostrar de manera detallada la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano, dado en (1).

### 3.4 Hipótesis específicas

HE1: Las propiedades del operador p-Laplaciano son importantes en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano (1).

HE2: Es posible Realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en (1).

## **Capítulo IV**

### **Metodología**

#### **4.1 Tipo de Investigación**

Según su finalidad, Hernández (1998) las clasifica en: investigación básica o teórica. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él. Su finalidad radica en incrementar los conocimientos científicos pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico. (p.91)

Investigación aplicada. Se caracteriza porque busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se adquieren. La investigación aplicada se encuentra estrechamente vinculada con la investigación básica, pues depende de los resultados y avances de esta última. (p.92).

La presente investigación es de tipo Mixta, pues involucró tanto la parte teórica como la aplicada. Debido a que se dio una demostración detallada de la existencia de soluciones débiles asociadas al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano (1) y además se realizaron algunas simulaciones con el software Mathematica 11.

#### **4.2 Diseño de la investigación**

Hernández (1998) lo define como, “El plan que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación”. (p.183). En cuanto al diseño de investigación nuestro trabajo se enmarca en un diseño no experimental.

### **4.3 Población y muestra.**

Por la naturaleza de este trabajo de tesis no corresponde determinar población y muestra.

### **4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos.**

Nuestra principal técnica de recolección de datos fue la observación.

Hernández (1998) señala que, “De acuerdo con los medios utilizados y con el grado de participación del observador, la observación se puede clasificar en observación directa, indirecta, participante, etc.”. (p.163).

El presente trabajo de tesis hizo uso de la Observación indirecta, pues, entramos en conocimiento del hecho o fenómeno de estudio a través de las observaciones realizadas anteriormente por otras personas, en nuestro caso a partir de las investigaciones contenidas en libros y artículos científicos de la especialidad. En particular en [6].

### **4.5 Plan de análisis estadísticos de datos**

La presente investigación no requiere plan de análisis estadísticos de datos.

## Capítulo V

### Resultados

El objetivo principal de esta tesis fue el de realizar una exposición detallada del artículo presentado en forma resumida por Castro [6]. El cual tiene por objetivo, demostrar la existencia de soluciones débiles del siguiente PVIF en el cual está presente **el operador  $p$ -Laplaciano**.

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} u'' + \Delta_p u - \Delta u' + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 \\ v'' + \Delta_p v - \Delta v' + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1 \\ u = v = 0, \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases}$$

Con todas las especificaciones técnicas presentadas en la Pág. [49]

La presente investigación se enfocó en dar una demostración detallada del siguiente resultado el cuál es enunciado en la Pág. [53]

#### **Teorema 2.4.1 (Existencia de Soluciones Débiles)**

Asumiendo  $u_0, v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y  $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ , con  $f_1, f_2 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ , entonces el problema (2.4.1) admite Soluciones Débiles. Es decir, tenemos que garantizar que:

Dado  $T > 0$ , Existen un par de funciones  $u, v : Q \rightarrow R$  satisfaciendo:

$$u, v \in L^\infty(0, T, W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.5.1)$$

$$u', v' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \quad (2.5.2)$$



Igualdades en el sentido de las distribuciones

$$\frac{d}{dt}(u'(t), w) + \langle \Delta_p u(t), w \rangle + ((u'(t), w)) + \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle = (f_1, w),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T) \quad (2.5.3)$$

$$\frac{d}{dt}(v'(t), w) + \langle \Delta_p v(t), w \rangle + ((v'(t), w)) + \langle |u(t)|^{\rho+2} |v(t)|^\rho v(t), w \rangle = (f_2, w),$$

$$\forall w \in w_0^{1,p}(\Omega), \text{ en el sentido de } D'(0, T) \quad (2.5.4)$$

Además de condiciones iniciales

$$u(0) = u_0 \quad , \quad v(0) = v_0 \quad (2.5.5)$$

$$u'(0) = u_1 \quad , \quad v'(0) = v_1 \quad (2.5.6)$$

### **Demostración:**

El método usado fue el de **Faedo-Galerkin**, el cual consta de 4 etapas:

Etapa 1: Solución local

Etapa 2: Estimativas a priori

Etapa 3: Pasaje al límite

Etapa 4: Condiciones iniciales

Por la Etapa 3: Pasaje al límite, garantizamos la existencia de las funciones

$u, v : Q \rightarrow R$  , además de 2.7.1 - 2.7.2. Pág. [95], resulta **(2.5.1)**.

Asimismo de 2.7.3, 2.7.5 y 2.7.4, 2.7.6. Pág. [95], se obtiene **(2.5.2)**.

Por otro lado, nuevamente por el Pasaje al límite 2.7.80 - 2.7.81. Pág. [117] se garantiza las igualdades en el sentido de las distribuciones **(2.5.3)** y **(2.5.4)**.

Finalmente las condiciones iniciales (2.5.5) y (2.5.6) se obtienen de la Etapa 4

Págs. [117-123]

Demostrando así el **Teorema 2.4.1** ■.

## **Capítulo VI**

### **Discusión de resultados**

#### **6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados**

##### **En relación a la Hipótesis General**

Es posible demostrar de manera detallada la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo  $p$ -Laplaciano, dado en (2.4.1).

Efectivamente, se logró demostrar de manera detallada la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo  $p$ -Laplaciano, dado en (2.4.1).

Para lograr ello, se hizo una revisión de la bibliografía pertinente presente tanto en libros como en resúmenes de seminarios en la rama de las ecuaciones en derivadas parciales. Teniendo como resultado final una presentación didáctica del Teorema 2.4.1 (Existencia de Soluciones Débiles).

##### **En relación a la Hipótesis Especifica 1**

Efectivamente, las propiedades del operador  $p$ -Laplaciano resultaron importantes en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo  $p$ -Laplaciano (2.4.1). Se hizo frecuente el uso de su Hemicontinuidad, monotonía, acotación y coercividad. Esto se dio en cada etapa del método pudiendo mencionar algunos momentos claves como los dados en las Págs. 104 y 116.

## **En relación a la Hipótesis Especifica 2**

Efectivamente, se logró realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en (2.4.1). Para ello se hizo uso del Teorema de Nakao siguiendo las líneas de generales de [6] y [14].

### **6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares**

En el caso de la investigación realizada por Tsutsumi (1971), este estudia la existencia de soluciones débiles para una ecuación de onda usando el Método de Faedo Galerkin. Para ello, se hizo uso del Teorema del punto fijo junto con argumentos de compacidad, estos garantizan la existencia local de soluciones. Por el contrario, en la presente demostración detallada se prescinde de estos argumentos al usar directamente el Teorema de Caratheodory para garantizar la primera Etapa del método (Existencia local de soluciones).

En el caso de la investigación realizada por Medeiros (1987), éste estudia el comportamiento asintótico de la energía asociada a una ecuación de onda. Para tal objetivo hace uso del Método de la Energía. Por el contrario, en la presente demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en la Pág. [49], se trabajó con el Metodo de Nakao, el cual además de darnos el decaimiento de la energía nos brinda la tasa con la que se da este proceso.

## Capítulo VII

### Conclusiones

1. Se expuso de manera detallada la demostración de “existencia de soluciones débiles para el problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en (2.4.1)”. Se usó el **método de Faedo-Galerkin**, el cual consta de las 4 etapas ya mencionadas.
2. **Las propiedades del operador p-Laplaciano** resultaron esenciales para la lograr el resultado de existencia de soluciones débiles. Se hizo frecuente el uso de su **Hemicontinuidad, Monotonía, Acotación y Coercividad**. Esto se dio en cada etapa del método.
3. Se desarrolló una demostración **detallada del comportamiento asintótico** de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en (2.4.1).”

## **Capítulo VIII**

### **Recomendaciones**

1. Se espera que el presente trabajo pueda ser complementado y perfeccionado con otros trabajos de investigación en la línea de análisis funcional.
2. Estudiar el presente problema de evolución no lineal de tipo  $p$ -Laplaciano modificando algunos términos y trabajando con operadores más generales.
3. El principal objetivo de esta tesis fue dar una exposición detallada de lo demostrado en forma resumida por Castro en [6]. Por ello, se recomienda la lectura de dicho artículo junto con los artículos dados en [3], [19], [25] y [33].
4. Implementar animaciones haciendo uso de otros programas distintos al Mathematica 11, pudiendo ser uno de estos el Matlab.

## Capítulo IX

### Referencias bibliográficas

- [1] Adams, R.A. “Sobolev Spaces”, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Arguelles L., Fúster Alejandro, “Teoría, procedimientos de demostración de análisis funcional” Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba 2005.
- [3] Biazutti, A.C.,”On nonlinear evolution and its applications, Nonlinear “Anal.T.M.A.24, 1995.
- [4] Biazutti A. “Sobre uma equação não-linear de vibrações. Existência de soluções Fracas e comportamento assintótico”. Tese de Doutorado – IMUFRJ.
- [5] Brézis, Haim, “Análisis funcional y aplicaciones”. Alianza editorial, España, 1983.
- [6] Castro Nelson Nery, “Existence and asymptotic behavior of solutions of a nonlinear evolution problem”. Brasil, 1997.
- [7 ] Cavalcanti. M. “Teoria das distribuicoes e aos espacos de Sobolev”,Editora da Universidade Estadual de Maringá, Brasil 2009.
- [8] Coddington E. A. ami Levinson N., “Theory of ordinary differential equations”. McGraw-Rill New York, 1955.
- [9] Dunford. N. J. T. “Schwartz; Linear Operators”. Interscience Publishers - New York -1958
- [10] Gao Hongjun and Zhang Hui .“Global Nonexistence of the solutions for a Nonlinear wave equation with the Q-Laplacian Operator”. Department of Mathematic sand Institute of Mathematics, Nanjing Normal University, Jul. 7, 2006
- [11] Gao H, Ma T F. “Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-Laplacian Operator”. Electronic Journal of Qualitative Differential Equations, 1999.

- [12] Hasser Norman B. "Análisis Matemático, curso de introducción" colección Matemática superior, editorial Trillas , México (1992)
- [13] Hernández, Roberto. "Metodología de la investigación" .McGraw-Hill Interamericana editores, S.A. México, (1998).
- [14] Jorge da silva Marcio. "Estabilidade assintotica para alguns modelos dissipativos de equacoes de placas". Instituto de Ciencias Matemáticas e de Computacao. Universidade de Sao Paulo, Brasil, (2012)
- [15] Kesavan S. "Topics in functional analysis and Applications" .Wiley Eastern Limited Bangalore, 1989.
- [16] Lages, Lima "Espacios Métricos" .Instituto de Matemática Pura y Aplicada. Projeto Euclides. Río de Janeiro 1983
- [17] Limaco J. , and S. Becerra; "Vibration of Elastic String". Atas do 48°. Seminario Brasileiro de analice (1998), 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear)
- [18] Limaco, juan. "Análisis Funcional". Universidad nacional mayor de san marcos. Notas de un curso de verano. (2016)
- [19] Lions, J. L. "Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux limites non- lineares". Dunod. Paris. (1969).
- [20] Louredo A. "Weak solutions for strongly-coupled nonlinear system" Electronic journal of Differential Equations Vol 2006 , Texas State University.
- [21]Medeiros, L. A., Milla M. "Remarks on a nonlinear model vibration of string with damping". 30° Seminario Brasileiro de Analise. L.N.C.C. - R.J. (1989).
- [22] Medeiros, L. A., Milla M "Espacos de Sobolev"(iniciacao aos problemas eliticos nao homogéneos),instituto de matemática ,Rio de Janeiro (2000)
- [23] Medeiros L.A. & M. Milla Miranda; Introdução aos Espaços de Sobolev y as Equações Diferenciáis Parciais, Río de Janeiro, 1989.
- [24] Medeiros, L. A., Milla M. "Solutions for the Equation of Nonlinear Vibrations. L.A. Medeiros & M. Milla Miranda, Río de Janeiro, 1987.
- [25] Nakao M., Ono K. "Existence of Global Solutions to the Cauchy problem"
- [26] Patcheau S. I.; On a class of quasilineaire, C.R Acad. Sci. Paris, T.322, Serie I. 631-632 The semilinear dissipative wave equations". Math. Z. 214 (1993).



- [27] Perla, G. "On classical solutions of quasilinear hyperbolic equations". *Nonlinear Analysis*. Vol. 3 (1979).
- [28] Rivera P. H.; *Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales, textos avanzados*, LNCC, Rio de Janeiro 1999.
- [29] Segal Irving. "A mathematical approach to elementary particles and their fields" Notes on Lectures, Department of Mathematics, and University of Chicago. Given in 1955.
- [30] Segal Irving "Nonlinear partial differential equations in quantum field theory" *Sympos. Appl. Math.*, Vol. XVII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [31] Stallbohm Volker, "Problema periódico asociado a la ecuación KdV", Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Medellin-Colombia 1989.
- [32] Teman R. *Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holland, Amsterdam 1979.
- [33] Tsutsumi M.: "nonlinear evolution equations of second order". *Proc. Jap. Acad.* 47 (1971), 950–955.
- [34] Yang, Z and Chen. G., "Global existence of solutions for quasi-Linear wave equations with viscous damping", *Journal Mathematical Analysis and Applications* 285 (2003) 601-618.
- [35] Wu, S.-T. and Tsai, L.-Y, "On a system of nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation, Tarnkang" *Journal of Mathematics* Volume: 38, Number 1. 1-20, Spring 2007.
- [36] Yamada, Y. "Some Nonlinear Degenerate Wave Equations" *Non Linear Analysis*, 10 (11) (1987).
- [37] Yosida, K. "Functional Analysis". 6. ed. Berlin: Springer, 1965.
- [38] Zeidler, Eberhard *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* Vol. II/A, Vol. II/ B, 1989
- [39] Zheng, s. "Nonlinear evolutions equations" Chapman & Hall/RCR FL 2014.

**Anexos:**

**Apéndice A:**  
Matriz de Consistencia

**TÍTULO: EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA UN PROBLEMA DE EVOLUCIÓN NO LINEAL DEL TIPO P-LAPLACIANO**

PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPOTESIS GENERAL	VARIABLES/ DIMENSIONES	METODOLOGIA	POBLACIÓN
PG: ¿Será posible realizar una demostración detallada de la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)?	OG: Dar una demostración detallada de la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p – Laplaciano, dado en (1).	HG: Es posible demostrar de manera detallada la existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p –Laplaciano, dado en (1).	Las variables de la investigación son las series: $u_m(t) = \sum_{i=1}^m k_{im}(t) w_i$ y $v_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i$	Tipo de investigación  La presente investigación es de tipo Mixta, pues involucra tanto la parte teórica como la aplicada Método: inductivo-deductivo  Diseño:  En cuanto al diseño de investigación nuestro trabajo se enmarca en un diseño no experimental.	Por la naturaleza de este trabajo de tesis no corresponde determinar población y muestra.
<b>PROBLEMAS ESPECIFICOS</b>	<b>OBJETIVOS ESPECIFICOS</b>	<b>HIPÓTESIS ESPECIFICAS</b>			
PE1: ¿Serán de utilidad las propiedades del operador p-Laplaciano en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)? PE2: ¿Será viable realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano, dado en (1).	OE1: Demostrar que las propiedades del operador p-Laplaciano son importantes en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano, dado en (1)?  OE2: Realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano, dado en (1)	HE1: Las propiedades del operador p-Laplaciano son importantes en el desarrollo de la demostración de existencia de soluciones débiles del problema de evolución no lineal del tipo p Laplaciano (1).  HE2: Es posible Realizar una demostración detallada del comportamiento asintótico de la energía asociada al problema de evolución no lineal del tipo p-Laplaciano dado en (1)	que pertenecen a sub espacios de dimensión finita $V_m \subset H_0^s(\Omega)$ . Donde los $w_i$ son vectores de la base hilbertiana de $H_0^s(\Omega)$ . Pues, $H_0^s(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ son espacios con una inmersión continua, densa y compacta  $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$		

## **Apéndice B:**

Mapa conceptual del trabajo

