UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EL GRUPO $K_0(A)$ ASOCIADO A UN C^*-ÁLGEBRA

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

JOHN BRYAN MENACHO VILCA

CALLAO, MARZO, 2019

PERÚ

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

EL GRUPO $K_0(A)$ ASOCIADO A UN C^*-ÁLGEBRA

JOHN BRYAN MENACHO VILCA

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por

Lic. Juan Benito Bernui Barros

Presidente

Lic. Moisés Simón Lázaro Carrión

Vocal

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Secretario

Lic. Sofía Irena Duran Quiñones

Suplente

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe

Asesor

Agradecimiento

Al llegar a concluir este trabajo que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

- A mis queridos padres por su apoyo en este tiempo de mi carrera universitaria, tanto a mi padre que se esfuerza cada día por nosotros y a mi madre, quien con su paciencia y amor me ayuda y forma con sus enseñanzas.

- A mi asesor de Tesis, el profesor Wilfredo Mendoza Quispe, por la ayuda al sugerirme el tema, sus consejos y correcciones durante el desarrollo del trabajo y más aún por la paciencia y el tiempo para concluir de una manera satisfactoria éste trabajo.

- A Indira, por su paciencia, afecto, ayuda y sobre todo su amor con mi persona durante todo este tiempo.

- A los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, que llegaron a formar mi carrera universitaria, a quienes los llegue a conocer en éste tiempo, por sus enseñanzas, historias, ejemplos transmitidos y sobre todo seguir aprendiendo mucho más de la Matemática.

- A todo el personal administrativo en general de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, ya que durante éste tiempo fueron amables y un gran apoyo con respecto a cualquier trámite académico o circunstancia que necesitaba de ayuda.

Dedicatoria

Al señor Ahnsahnghong y Zahn Gil Jah, que me permitieron conocer el camino de la verdad de la vida, lo que ocurrió, lo que ocurre y lo que vendrá, aunque no lo merezco; y sobre todo por su paciencia y su ayuda hacia mi persona, hasta hoy día.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

EL GRUPO $K_0(A)$ ASOCIADO A UN C^*-ÁLGEBRA

JOHN BRYAN MENACHO VILCA

MARZO – 2019

Asesor: Mg. Wilfredo Mendoza Quispe

Grado Obtenido: Licenciado en Matemática

La primera parte contiene algunos hechos acerca de C^*-*álgebras*, previamente a lo cual se ha revisado muy brevemente, los conceptos de categorías y funtores; así como también la Teoría de Homotopía.

La K-*Teoría* de un C^*-*álgebra* es definida en términos de clases de equivalencia de sus proyecciones y clases de equivalencia de sus elementos unitarios.

En la segunda parte estudiamos hechos necesarios acerca de las proyecciones y elementos unitarios, poniendo énfasis sobre la relación de equivalencia definida homotópicamente. Desarrollamos y estudiamos parte de la K-*Teoría* para C^*-*álgebras*, asociando a cada C^*-*álgebra* A, un grupo abeliano denotado por $K_0(A)$; el cual refleja propiedades importantes de A, la K-*Teoría* C^*-*algebraica* tiene un comportamiento funtorial de la categoría de C^*-*álgebras* a la categoría de grupos abelianos es decir:

$$K_0 : \mathcal{C}at(C^*) \longrightarrow \mathcal{C}at(\, grupos\ abelianos\,)$$

Finalmente se hace algunos cálculos de aplicación del grupo $K_0(A)$.

Palabras Claves:

- C^*-*álgebra*
- El grupo K_0
- El Funtor K_0

ABSTRACT

THE GRUPO $K_0(A)$ ASSOCIATED TO A C^*-ÁLGEBRA

JOHN BRYAN MENACHO VILCA

MARCH – 2019

Adviser: Mg. Wilfredo Mendoza Quispe

Title obtained : Licenciated in Mathematic

The first part contains some facts about C^**-álgebras,* previously to which the concepts of categories and functors have been reviewed very briefly; as well as the Homotopy Theory.

The K*-Theory* of a C^**-álgebra* is defined in terms of equivalence classes of its projections and equivalence classes of its unit elements.

In the second part, we study necessary facts about the projections and unitary elements, emphasizing the homotopically defined equivalence relation. We develop and study part of the K*-Theory* for C^**-álgebras*, associating to each C^**-álgebra* A, an abelian group denoted by $K_0(A)$; which reflects important properties of A, the K*-Theory* C^**-álgebraic* has a functorial behavior of the category of C^**-álgebras* to the category of abelian groups ie:

$$K_0 : \mathcal{C}at(C^*) \longrightarrow \mathcal{C}at(\, abelian\ groups\,)$$

Finally some application calculations of the group $K_0(A)$ are made.

Keywords:

- C^**-álgebras,*
- The group K_0
- The Funtor K_0

Capítulo 1

Planteamiento de la Investigación

1.1. Identificación del problema

En lo sucesivo escribiremos "A" para denotar a un C^*-álgebra, mientras que "K_0" representara un funtor que va de la categoría de C^*-álgebras a la categoría de grupos abelianos.

La K-teoría contiene mucha información acerca de las C^*-álgebras. Es así como se puede comprender la estructura de un C^*-álgebra conociendo su K-teoría, más aún, se puede distinguir dos C^*-álgebras distinguiendo su K-teoría. Como resulta muy natural al estudiar la estructura del grupo abeliano $K_0(A)$.

1.2. Formulación del problema

¿Será posible asociar a un C^*-álgebra, un grupo abeliano?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

1. Determinar la estructura del grupo abeliano $K_0(A)$, asociado a un C^*-álgebra "A".
2. Mostrar algunas aplicaciones de la K-teoría del funtor "K_0".

1.3.2. Objetivo específico

1. Estudiar detalladamente el grupo $K_0(A)$, vía la K-teoría algebraica.
2. Calcular el grupo $K_0(A)$, para C^*-álgebras específicas.

1.4. Importancia y Justificación de la investigación

El trabajo o proyecto propuesto se encuentra inmerso en el área de la $Topología\ Algebraica - K\ teoría\ algebraica$

Un trabajo no fácil es determinar la estructura del grupo abeliano $K_0(A)$ y alguna de sus propiedades, es un trabajo que se justifica por la necesidad de obtener información sobre los denominados C^*-álgebras.

Además el proyecto propuesto se justifica porque permite exhibir como un objeto matemático con una estructura de C^*-álgebra (estructura Topológica y algebraica) se puede estudiar como una simple estructura netamente algebraica (grupo).

Capítulo 2

Marco Teórico

En primer lugar, presentaremos los preliminares que consiste en definiciones, proposiciones y enunciados que harán posible la conclusión de éste trabajo como por ejemplo, la teoría general de C^*-álgebras; algunos resultados de Teoría Homotópica, seguido de una revisión previa sobre Categorías y funtores, etc. los cuáles serán usados posteriormente para generar los resultados. Todas estas definiciones y pruebas de los enunciados se encuentran de una forma explicada y detallada en los siguientes libros $[1]$, $[2]$ y $[3]$ citados en la bibliografía.

2.1. Definiciones Previas

Definición (Espacio topológico) 2.1.1.

Sea X un conjunto no vacío. Una colección ζ de subconjuntos de X se dice que es una $topología$ sobre X si:

a) X y ϕ están dentro de ζ.
b) La unión arbitraria (finita o infinita) de cualquier subcolección de ζ están en ζ.
c) La intersección finita de elementos de cualquier subcolección de ζ están en ζ.

El par (X, ζ) se llama $espacio\ topológico$.

Cada elemento de ζ será llamado $abierto$ de X. Ahora, si A es un abierto en X, entonces $X \setminus A$ será llamado $cerrado$ en X.

Definición 2.1.2. Sea (X, ζ) un espacio topológico y $E \subseteq X$.

d) Sea $x \in E$, es llamado un $punto\ interior$ de E si existe un abierto A en X, tal que $x \in A \subseteq E$. El conjunto de puntos interiores de E es llamado el $interior\ de\ E$ y denotado por $Int(E)$.

e) Sea $x \in E$, es llamado un $punto\ clausura$ de E, si para cada abierto A de X tal que $x \in A$, se tiene que $A \cap E \neq \phi$. El conjunto de puntos clausura de E es llamado $la\ clausura\ de\ E$ y denotado por $\overline{A}$.

f) Sea $x \in E$, es llamado un $punto\ frontera$ de E, si para cada abierto A de X tal que $x \in A$, se tiene que $A \cap E \neq \phi$ y $A \cap (X \setminus E) \neq \phi$. El conjunto de puntos frontera de E es llamado la $frontera$ de E y lo denotaremos por $Fr(E)$.

Definición (Espacio de Hausdorff) 2.1.3.

Un espacio topológico (X, ζ) será llamado de $Hausdorff$, si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos U_x, U_y que contienen a x e y, tal que $U_x \cap U_y = \emptyset$

Definición (Cubrimientos) 2.1.4.

Dado el espacio topológico (X, ζ) y $S \subseteq X$, un $cubrimiento$ del conjunto S es una colección de subconjuntos $\{U_j \ : \ j \in J\}$ en X tal que

$$S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

Los cubrimientos $\{U_j \ : \ j \in J\}$ en X, cumplen que

$$X = \bigcup_{j \in J} U_j$$

Si el conjunto de índices J es finito, entonces el cubrimiento se dice finito.

Si los subconjuntos U_j son abiertos, el cubrimiento se dice abierto.

Además, $\{U_k \ : \ k \in K\}$ es un subcubrimiento de $\{U_j \ : \ j \in J\}$ si para k existe j tal que $U_k = U_j$.

Definición (Espacio compacto) 2.1.5.

Un subconjunto E de un espacio topologico X se dirá $compacto$ si todo cubrimiento abierto de E, posee un subcubrimiento finito.

Definición 2.1.6.

Sean $(X, \zeta_1), (Y, \zeta_2)$ espacios topológicos, entonces una aplicación $f : (X, \zeta_1) \longrightarrow (Y, \zeta_2)$ se dirá que es $continua$, si para cada abierto B de Y, existe un abierto A en X, tal que $f(A) \subseteq B$.

Una aplicación $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ entre espacios métricos se dirá que es $continua$ si lo es, como una aplicación entre los espacios topológicos (X, ζ_{d_1}) y (Y, ζ_{d_2}).

Teorema 2.1.7.

Dado X, Y dos espacios topológicos, se cumple que:

1. $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es un abierto de X para todo B abierto en Y.
2. Una aplicación $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ entre espacios métricos es continua si y sólo si $x_n \longrightarrow x$ en X, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ en Y.

Prueba

Ver [9]. (Kreyszig).

Definición 2.1.8.

Sea X un espacio topológico, un $camino$ en X de x_1 a x_2 donde $x_1, x_2 \in X$ es una función continua $f : I \longrightarrow X$, tal que $f(0) = x_1$ y $f(1) = x_2$. Donde $I = [0,1]$.

Cuando $f(0) = f(1) = x_0$, entonces el camino se dice cerrado con punto base x_0

Definición 2.1.9.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, es llamada $abierta$, si éste lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Observación 2.1.1:

Las aplicaciones abiertas, no necesariamente implican continuidad, ya que si X es la recta real con la topología usual y $Y = \{a, b\}$ con la topología discreta, entonces la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \geq 0 \\ b, & x < 0 \end{cases}$$

Es abierta, pero no es continua, ya que $f^{-1}(\{a\})$ no es abierto en X.

Definición 2.1.10.

Una biyección continua $f : X \longrightarrow Y$ cuya inversa $f^{-1} : X \longrightarrow Y$ también es continua, será llamada $homeomorfismo$, en éste caso se dirá que los espacios X y Y son $homeomorfos$, lo cual será denotado por $X \approx Y$.

Proposición 2.1.11

Dado $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua.

1. Si X es compacto y Y es un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva.
2. Sea $S \subseteq X$ un subespacio compacto, entonces $f(S)$ es compacto.
3. Sea $S \subseteq X$ un subespacio conexo, entonces $f(S)$ es conexo.

Prueba

Ver [2]. (Kosniowski).

Definición (Grupo) 2.1.11

Sea G un conjunto no vacio, y sea " $*$ " una operación binaria en G, es decir

$$\begin{aligned} *:\ G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

Se dice que el par $(G,*)$ es un $grupo$ si:

- $(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, b, c \in G$
- $\forall a \in G, \ \exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$.
  El elemento e es llamado el neutro o identidad de G, denotado a veces por 1_G.
- $\forall a \in G, \ \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = 1_G$.
  El elemento b es llamado el $inverso$ de a, y es denotado por a^{-1}.

Definición 2.1.12.

El grupo G es llamado $Abeliano$ o conmutativo si $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Definición 2.1.13

Un subconjunto no vacío H del grupo G, se dice que es un $subgrupo$, si con las operaciones heredadas de G también es un grupo.

Denotaremos por $H < G$, el cual denota H subgrupo de G.

Proposición 2.1.14.

Dado un grupo G y un subconjunto no vacío $H \subset G$, entonces

$$H < G \iff xy^{-1} \in H, \forall x, y \in H$$

Prueba.

Ver [2]. (Kosniowski).

Definición (Subgrupo generado) 2.1.15.

Dado el grupo G, el subconjunto $S \subset G$ y denotaremos por $S^{-1} = \{s^{-1} : \ s \in S\}$, entonces

$$\langle S \rangle = \{ s_1 s_2 \ldots s_k \ : n \in \mathbb{N}, s_i \in S \vee s_i \in S^{-1} \}$$
$$= \{ s_1^{r_1} \ldots s_k^{r_k} \ : k \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Z}, s_i \in S \}$$

Es un subgrupo de G llamado $subgrupo\ generado$ por S, mas aun es el menor subgrupo de G que contiene a S, es decir.

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H_i} H_i \ : \ H_i\ es\ subgrupo\ de\ G$$

Definición (Homomorfismo entre grupos) 2.1.16.

Dados G y G' dos grupos con sus respectivas operaciones, se dice que la aplicación $g : G \longrightarrow G'$ es un $homomorfismo\ de\ grupos$ si se cumple:

- $g(ab) = g(a)g(b)$
- $g(a^{-1}) = \left(g(a)\right)^{-1}$
- $g(1_G) = 1_{G'}$

El homomorfismo es llamado

- Monomorfismo si g es inyectivo.

- Epimorfismo si g es sobreyectivo.
- Isomorfismo si g es inyectivo y sobreyectivo.

Denotaremos por $G \cong G'$, cuando exista un f isomorfismo.

Cuando $G = G'$ el isomorfismo es llamado $Automorfismo$ de G, el conjunto de automorfismos de G con la operación de composición es un grupo, el cual es denotado por $A(G)$.

Definición 2.1.17.

Dado $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos, definamos por

$$Im(f) = \{\, y \in G' \;:\; f(x) = y \;, x \in G\}$$

$$Ker(f) = \{\, x \in G \;:\; f(x) = 1_{G'} \,\}$$

Definición (Categoría) 2.1.18.

Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de:

a) Una clase de $objetos\ A, B, C, .., (obj(\mathcal{C}))$.

b) Para cada par de objetos $A, B \in obj(\mathcal{C})$, un conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos se llaman $morfismos$ de A en B, denotados con $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ donde $f: A \longrightarrow B$.
Estos conjuntos son distintos dos a dos, es decir:

$$(A, B) \neq (A', B') \text{ implica } Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(A', B') = \phi$$

c) Para cada terna $A, B, C \in obj(\mathcal{C})$, se da una aplicación

$$\begin{array}{ccc} Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B, C) & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \longrightarrow & gf \end{array}$$

Llamada $composición\ de\ morfismos$.

d) Para cada objeto A se da un elemento, $1_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$, llamado el $morfismo\ identidad\ del\ objeto\ A$.

Satisfaciendo así los siguientes dos axiomas:

1. Si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$.

2. Si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ entonces $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$.

Observación 2.1.2:

El morfismo 1_A, cuya existencia está garantizada por (d), está determinado en forma única gracias al axioma 2.

En efecto, si $1_A{}'$ es un segundo morfismo con las mismas propiedades, entonces

$1_A = 1_A \circ 1_A{}' = 1_A{}'$.

Ejemplo 2.1.1.

La categoría $\mathcal{C}_{conj}$ cuyos objetos son los conjuntos y que tienen por morfismos, las aplicaciones entre conjuntos, con la composición usual.

Ejemplo 2.1.2.

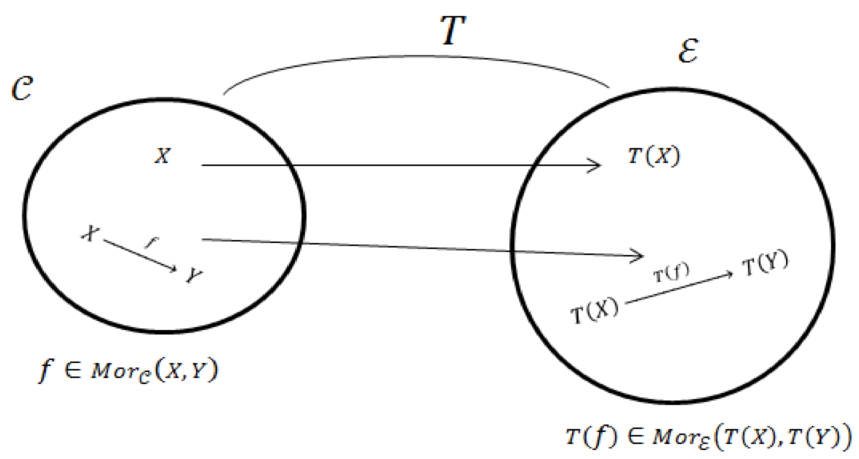
La categoría $\mathcal{C}_{grup}$ de los grupos tiene como objetos a los grupos y como morfismos a los homomorfismos de grupos con la composición usual de homomorfismos. Si sólo consideramos grupos abelianos obtenemos la categoría de los grupos abelianos.

Ejemplo 2.1.3.

La categoría $\mathcal{C}_{top}$ de los espacios topológicos, que tiene por objetos a los espacios topológicos y por morfismos, las aplicaciones continuas de espacios topológicos, con la composición habitual.

Definición (Funtores) 2.1.19.

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{E}$ dos categorías, una aplicación $T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ diremos que es un $funtor$, si para cada $x \in obj(\mathcal{C})$, se tiene que $T(x) \in obj(\mathcal{E})$, y para cada morfismo $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se tiene $T(f) \in Mor_{\mathcal{E}}\big(T(X), T(Y)\big)$



Observación 2.1.3:

- Si además se verifica:
  1. $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$
     donde:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

  2. $T(1_X) = 1_{T(X)}$

  Se dice que T es un $funtor\ Covariante$.

- Si en lugar de la condición (2) se verifica, la condición $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$
  Se dice que T es un $funtor\ Contravariante$.

Ejemplo 2.1.4.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría escribamos la aplicación $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ dado como $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ y $1_{\mathcal{C}}(f) = f$

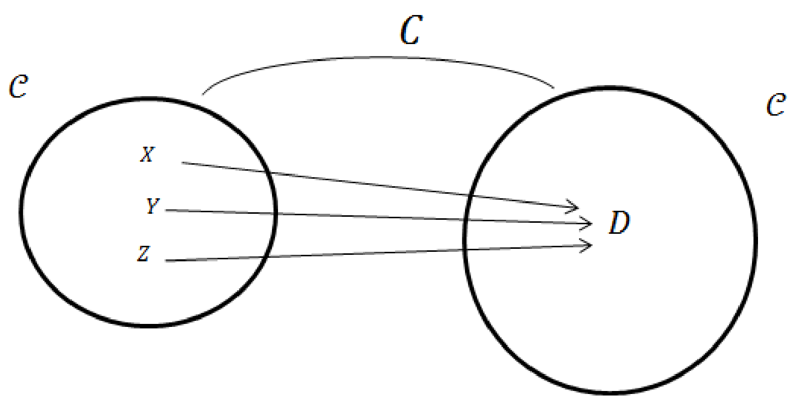
Se observa que verifica

- $1_{\mathcal{C}}(g \circ f) = g \circ f = 1_{\mathcal{C}}(g) \circ 1_{\mathcal{C}}(f)$
- $1_{\mathcal{C}}(1_X) = 1_X = 1_{1_{\mathcal{C}}(X)}$

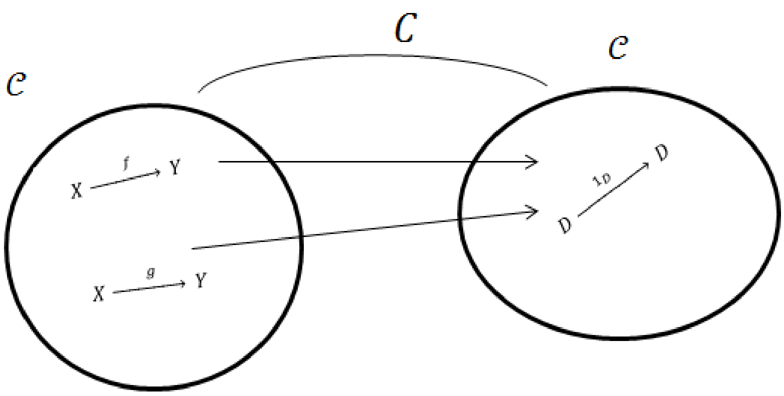
Así, se observa que $1_{\mathcal{C}}$ es un funtor covariante.

Ejemplo 2.1.5.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $D \in obj(\mathcal{C})$ (fijo), escribamos la aplicación $C : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ dado como $C(X) = D$ y $C(f) = 1_D$. En un diagrama se tiene:



O más precisamente:



Se observa que:

- $C(g \circ f) = 1_D = 1_D \circ 1_D = C(g)C(f) \vee C(f)C(g)$
- $C(1_X) = 1_D = 1_{1_{\mathcal{C}(X)}}$

Donde C es un funtor constante, el cual es covariante y contravariante.

Definición (Homotopía de aplicaciones) 2.1.20.

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es $homotópica$ a g, si existe una aplicación continua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad H(x,1) = g(x)$$

para cada $x \in X$, y para todo $t \in I = [0,1]$.

La aplicación H es llamado $homotopía$ entre f y g. Si f es Homotópica a g, lo denotaremos por $f \sim_h g$.

Observación 2.1.4:

Para cada $x \in X, t \in I$ denotemos por:

$$h_t(x) = H(x,t)$$

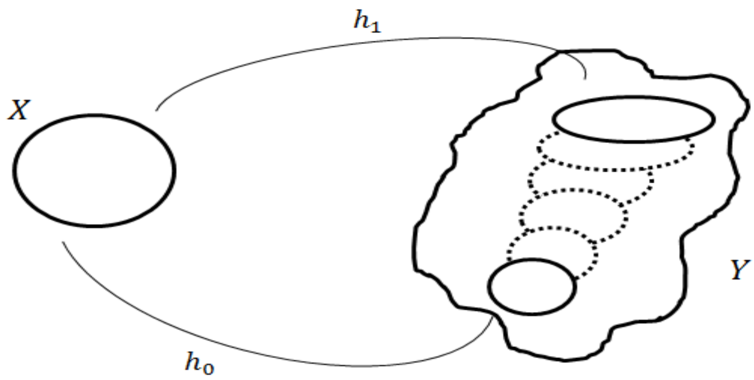
De modo que

$$h_t : X \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow h_t(x) = H(x,t)$$

Así, H podemos verlo como una familia $\{h_t\}_{t\in I}$ de funciones parametrizadas, de modo que:

$$h_0(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad h_1(x) = g(x)$$



Definición 2.1.21.

Se dice que dos espacios X e Y son del mismo tipo de homotopía, si existen aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y \;\wedge\; g : Y \longrightarrow X$ tal que:

$$g \circ f \sim_h 1_X \qquad\qquad f \circ g \sim_h 1_Y$$

Las aplicaciones f y g se llaman entonces, equivalencias homotópicas. También decimos que X e Y son $homotópicamente\ equivalentes$.

Proposición 2.1.22.

La relación de homotopía es de equivalencia en $C(X, Y)$.

Prueba.

- Reflexiva: $f \sim_h f$, para todo $f \in C(X, Y)$.

  Definamos $H : X \times I \longrightarrow Y$

  $$(x, t) \longrightarrow H(x, t) = f(x)$$

  Donde se observa que; $H(x, 0) = f(x) \quad \wedge \quad H(x, 1) = f(x)$

  Es decir, $f \sim_h f$.

- Simétrica: si $f \sim_h g$ entonces $g \sim_h f$.

  Como $f \sim_h g$, entonces existe una aplicación continua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

  $$H(x, 0) = f(x) \wedge H(x, 1) = g(x).$$

  Ahora, definamos una aplicación continua

  $$G : X \times I \longrightarrow Y$$

  $$(x, t) \longrightarrow G(x, t) = H(x, 1 - t)$$

  Tal que, $G(x, 0) = H(x, 1) = g(x) \quad \wedge \quad G(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$.

Por lo tanto, se concluye que $g \sim_h f$

- Transitiva: si $f \sim_h g$ y $g \sim_h j$ entonces $f \sim_h j$.

  $f \sim_h g \implies \exists\, H : X \times I \longrightarrow Y \;/\; H(x,0) = f(x) \;\wedge\; H(x,1) = g(x)$

  $g \sim_h j \implies \exists\, G : X \times I \longrightarrow Y \;/\; G(x,0) = g(x) \;\wedge\; G(x,1) = j(x)$

  Ahora, definamos la aplicación:

$$L : X \times I \longrightarrow Y$$

$$(x,t) \longrightarrow L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & , \quad 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & , \; 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Donde L es continua en $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y también en $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Por lo tanto L es continua en $X \times I$

Ahora, se observa que

$$L(x,0) = H(x,0) = f(x) \;\wedge\; L(x,1) = g(x,1) = h(x)$$

Por lo tanto, $f \sim_h j$.

Proposición 2.1.23.

Sea X un espacio topológico arbitrario, y sea Y un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas tales que para todo $x \in X$, se tiene que $f(x)$ y $g(x)$ pueden ser unidos por un segmento de recta, entonces $f \sim_h g$.

Prueba.

Ver [2]. (Kosniowski).

Teorema 2.1.24.

Sean X, Y, Z tres espacios topológicos y sean las aplicaciones continuas siguientes:

$$f_1, g_1 : X \longrightarrow Y \;/\; f_1 \sim_h g_1$$

$$f_2, g_2 : Y \longrightarrow Z \;/\; f_2 \sim_h g_2$$

Entonces, se cumple que $f_2 \circ f_1 \sim_h g_2 \circ g_1$

Prueba.

Ver [2]. (Kosniowski).

Definición (Caminos) 2.1.25.

Sea $x_0, x_1 \in X$, decimos que $f: [0,1] \longrightarrow X$ una aplicación continua es un camino en X, desde x_0 hasta x_1 si se tiene que

$$f(0) = x_0 \quad \wedge \quad f(1) = x_1$$

También decimos que x_0 es el *punto inicial* y x_1 es el *punto final* del camino f.

Definición 2.1.26.

Dos caminos f y f', que aplican el intervalo I en X, se dice que son homotópicos por caminos, si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una aplicación continua $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$F(s,0) = f(s) \quad \wedge \quad F(s,1) = f'(s)$$

$$F(0,t) = x_0 \qquad \wedge \qquad F(1,t) = x_1$$

Para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de homotopía de caminos entre f y f'.

Observación:

La primera condición dice simplemente de F es una homotopía entre f y f', y la segunda dice que, para cada t, la aplicación f_t, definida por la ecuación $f_t(s) = F(s,t)$, es un camino desde x_0 hasta x_1. Es decir, la primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f', y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

2.2. Introducción a los C^*-álgebras

Definición 2.2.1. Un álgebra $\boldsymbol{A}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, tal que para cada par de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}$, el producto $\boldsymbol{xy} \in \boldsymbol{A}$, con las propiedades:

- $(xy)z = x(yz)$ Asociatividad
- $(x + y)z = xz + yz$ Distribuidad a izquierda
- $x(y + z) = xy + xz$ Distribuidad a derecha
- $(\alpha x)y = \alpha(xy)$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$, entonces A es real o complejo, respectivamente.

Definición 2.2.2. Un algebra A es unital si existe un elemento $1_A \in A$ tal que

$$1_A x = x 1_A = x, \quad \forall x \in A$$

Definición 2.2.3. Un álgebra normada A, es un espacio normado que a la vez es un álgebra, que satisfaga la siguiente desigualdad.

$$\|xy\| \leq \|x\|. \|y\|, \ \forall x, y \in A$$

Si A es unital, entonces $\|1_A\| = 1$

Definición 2.2.4. Un Álgebra de Banach, es un álgebra normada compleja que es completa, considerando como un espacio normado.

Definición 2.2.5. Un álgebra * de Banach es un álgebra de Banach A dotada de un operador involución

$$* : A \longrightarrow A \ / \ x \longrightarrow x^*, \text{ el cual satisface:}$$

- $(x^*)^* = x$
- $(xy)^* = y^* x^*$
- $(\alpha x + y)^* = \bar{\alpha} x^* + y^*$
- $\|x^*\| = \|x\|, \quad \forall x \in A$

Ejemplo 2.2.1.

Sea $B(X) = \{T: X \longrightarrow X \quad tal\ que\ \ T\ es\ lineal\ y\ acotado\}$, donde X es un espacio de Banach Complejo.

Definamos el producto en éste espacio como la composición de operadores y bajo la norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \right\}$$

Claramente $B(X)$ es álgebra de Banach unitaria no conmutativo.

Veamos la condición submultiplicativa ($\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$).

En efecto, sabemos que:

$$\|T_1T_2(x)\| \leq \|T_1T_2\|\|x\|$$

$$\left\|T_1\big(T_2(x)\big)\right\| \leq \|T_1\|\|T_2(x)\| \leq \|T_1\|\|T_2\|\|x\|$$

$$\frac{\|T_1T_2(x)\|}{\|x\|} \leq \|T_1\|\|T_2\|$$

Aplicando supremo, concluimos $\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$.

Más aún, $1_{B(x)} = I$ tiene norma $\|I\| = 1$.

Definición 2.2.6. Un álgebra C^* es una álgebra * de Banach A, que cumpla

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad \forall x \in A$$

Ejemplo 2.2.2.

Tomando $B(H)$ donde H es un espacio de Hilbert, bajo la involución como la adjunta es decir:

$$\forall\, f \in B(H) \quad existe \quad f^* : H \longrightarrow H \quad tal\ que \quad < f(x), y > = < x,\ f^*(y) >$$

Se tiene que $B(H)$ es un C^*-algebra

Primero veamos si $\|f^*\| = \|f\|$

$$\|f\| = \sup_{x,y \neq 0} \left\{ \frac{|< f(x), y >|}{\|x\|\|y\|} \right\} = \sup_{x,y \neq 0} \left\{ \frac{|< x\ , f^*(y) >|}{\|x\|\|y\|} \right\} = \|f^*\|$$

Más aún, si

$$< f^{**}(x), y > = \overline{< y, f^{**}(x) >} = \overline{< f^*(y), x >} = < x, f^*(y) > = < f(x), y >$$

Por lo tanto $f^{**} = f$.

Veamos si satisface la condición de C^x es decir $\|f^*f\| = \|f\|^2$

Sea $\|x\| \leq 1$

$$\|f(x)\|^2 = < f(x), f(x) > = < x, f^*f(x) > \leq \|f^*f\|$$

Lo cual es análogo a

$$\|f\|^2 \leq \|f^*f\|$$

Por otro lado tenemos

$$|< f(x), f(x) >| \leq \|f(x)\|\|f(x)\| \leq \|f\|^2\|x\|^2$$

De esta forma, obtenemos

$$\|f^*f\| = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{|< f^*f(x), x >|}{\|x\|\|x\|}\right\} = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{|< x, f^*f(x) >|}{\|x\|\|x\|}\right\} = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{|< f(x), f(x) >|}{\|x\|\|x\|}\right\} \leq \|f\|^2$$

Por lo tanto

$$\|f^*f\| = \|f\|^2$$

Definición 2.2.7. Un subconjunto B de un álgebra A se dice un subálgebra de A, si es un subespacio vectorial de A cerrado bajo el producto algebraico.

Definición 2.2.8. Sea A una C^*-álgebra, un subconjunto $B \subset A$ es llamado C^*-subálgebra, si B es una C^*-álgebra respecto a las operaciones dadas en A.

Definición 2.2.9. Un ideal I en una C^*-álgebra A, es un ideal a derecha e izquierda cerrado bajo la norma. Más aún es autoadjunto, por lo que es una C^*-subálgebra.

Afirmación.

Si I es un ideal en una C^*-álgebra A, el espacio cociente $\frac{A}{I}$ es una C^*-álgebra con respecto a la norma:

$$\|a + I\| = inf\{\ \|a + x\|\ :\ x \in I\,\}$$

Y la involución en $\frac{A}{I} = \{a + I\ :\ a \in A\}$ está dado por $(a + I)^* = a^* + I$

Prueba. Ejercicio

Definición 2.2.10. (Homomorfismo entre C^*-álgebras)

Sea A, B dos C^*-álgebra con unidad, un *-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, es una aplicación lineal, que para todo $x, y \in A$, se cumple

- $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
- $\varphi(x^*) = [\varphi(x)]^*$
- $\varphi(1_A) = 1_B$

Ejemplo 2.2.3

Sea A un C^*-álgebra, el espacio $M_n(A) = \left\{ (a_{ij})_{nxn} : \quad a_{ij} \in A \right\}$ con las operaciones usuales de espacio vectorial, multiplicación de matrices y la operación * dada como la transpuesta es decir, $(a_{ij})^*_{nxn} = (a^*_{ji})_{nxn}$ es también una C^*-álgebra.

Definamos la norma en $M_n(A)$ tomando un espacio de Hilbert H y un *-homomorfismo inyectivo $\varphi : \ A \longrightarrow B(H)$.

Sea $a = (a_{ij})_{nxn}$ y $x_j \in H$.

$$
\begin{aligned}
\varphi' : \ M_n(A) \ &\longrightarrow \ B(H^n) \\
a \ &\longrightarrow \varphi'(a) : \ H^n \ \longrightarrow \ H^n \\
& \qquad\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi'(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})x_1 + \cdots + \varphi(a_{1n})x_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})x_1 + \cdots + \varphi(a_{nn})x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

De tal forma que $\|a\| = \sup \|\varphi'(a)\|$.

Se observa que se cumple la siguiente desigualdad.

$$\max_{i,j} \|a_{ij}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|$$

Para mayor detalle de la misma ver el libro M. Rϕrdam $[10]$.

Observación 2.2.1.

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo entre dos C^*-álgebras, entonces definamos la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M_n(A) & \longrightarrow & M_n(B) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

El cual es un *-homomorfismo, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Téngase en cuenta que hemos utilizado la misma notación para las dos aplicaciones relacionadas, pero siendo en realidad, aplicaciones diferentes, entendiéndose de ésta forma a partir de entonces.

Definición 2.2.11. (Sucesiones exactas cortas)

Una sucesión de C^*-álgebra y *-homomorfismos.

$$\ldots \longrightarrow A_k \xrightarrow{\varphi_k} A_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} A_{k+2} \longrightarrow \ldots$$

Se dice que es exacta si: $Im(\varphi_k) = Ker(\varphi_{k+1}), \ \forall k \in \mathbb{N}$

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\omega} B \longrightarrow 0$$

Se dice que es exacta corta.

Se prueba fácilmente que si $I \subseteq A$ es un ideal, entonces la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{I} \longrightarrow 0$$

Donde i es la aplicación inclusión y π es la aplicación cociente.

Ahora, si tenemos una sucesión exacta corta, entonces $\varphi(I)$ es un ideal en A, $\frac{A}{\varphi(I)} \cong B$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\wedge"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varphi(I) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "\pi"] & \frac{A}{\varphi(I)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si para una sucesión exacta corta existe, $\lambda : B \longrightarrow A$ con $\omega\lambda = I_B$, entonces se dice que la sucesión exacta $escinde$ y λ se dice que es un $levantamiento$ de ω.

El diagrama en éste caso es:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\xleftarrow[\lambda]{}}{\xrightarrow{\omega}} B \longrightarrow 0$$

Sin embargo, no todas las sucesiones exacta corta es $escindible$.

Definición 2.2.12. Sea A una C^*-álgebra, $x \in A$ será llamado

- Normal: $xx^* = x^*x$
- Autoadjunto: $x^* = x$
- Unitario: $x^*x = xx^* = 1_A$ donde A posee unidad.
- Proyección: $x^2 = x^* = x$

Definición 2.2.13. (Elemento positivo)

Un elemento $a \in A$ de un C^*-álgebra es llamado positivo si y sólo si $a = n^2$, donde $n \in A$ es un elemento autoadjunto.

Denotaremos por $a \geq 0$ en éste caso. Ahora si $a - b \geq 0$, lo escribiremos $a \geq b$.

Definición 2.2.14.

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es una aplicación lineal entre C^*-álgebras. Decimos que φ es positiva si $\varphi(A^+) \subseteq (B^+)$; donde

$$A^+ = \{\, conjunto\ de\ elementos\ de\ A\}$$

Un funcional lineal positiva también se llama $estado$.

Si A tiene unidad con $\varphi(1_A) = 1_B$, $\varphi : A \longrightarrow B$ es un estado si

1. φ es lineal
2. Sea $a \in A$, donde $a \geq 0$ entonces $\varphi(a) \geq 0$
3. $\varphi(1) = 1$

2.3. La adjunción de la unidad para un álgebra

Sea A una *-álgebra sin unidad, podemos sumergirlo en un álgebra con unidad, definamos $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ (suma directa de espacios vectorial) donde:

$$\widetilde{A} = \{(a, \alpha) : \quad a \in A \ \wedge \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Con las operaciones

- $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$
- $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$
- $\gamma(a, \alpha) = (\gamma a, \gamma\alpha)$
- $(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha})$

$$\forall a, b \in A \ \wedge \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

Además definamos

$$i : A \longrightarrow \widetilde{A} \qquad\qquad \pi : \quad \widetilde{A} \quad \longrightarrow \quad A$$

$$a \longrightarrow i(a) = (a, 0) \qquad\qquad (a, \alpha) \longrightarrow \pi(a, \alpha) = \alpha$$

Donde se tiene que i es un *-homomorfismo inyectivo y π es suryectivo.

Proposición 2.3.1.

Con las operaciones definidas, $\widetilde{A}$ es un *-álgebra de Banach con unidad, la cual es definida como $1_{\widetilde{A}} = (0,1)$.

Prueba.

Sea $x = (a, \alpha)$, $y = (b, \beta) \in \widetilde{A}$

- $(xy)^* = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)^* = (b, \beta)^*(a, \alpha)^* = y^* x^*$
- $(x^*)^*((a, \alpha)^*)^*(a^*, \overline{\alpha})^* = (a^{**}, \overline{\overline{\alpha}}) = (a, \alpha) = x$

También se observa

$$x(0,1) = (a, \alpha)(0,1) = (a, \alpha) = x$$

Bajo éstas premisas, se concluye que $\widetilde{A}$ es un *-álgebra con identidad $1_{\widetilde{A}} = (0,1) = 1$.

Observación 2.3.1

1. Sea $x = (a, \alpha)$ un elemento de $\widetilde{A}$, se observa

$$x = (a, \alpha) = (a, 0) + \alpha(0,1)$$

$$x = (a, \alpha) = i(a) + \alpha 1_{\widetilde{A}}$$

Cómo $a \in A$; podemos escribir $a = i(a) = (a, 0)$ asi

$$x = a + \alpha 1 \text{ más aún } \quad a = a + 01 \in \widetilde{A}$$

Por tanto $A \subset \tilde{A} = \{\, a + \alpha 1 \;:\; a \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\,\}$.

2. En $\widetilde{A}$ establecemos una norma, $\|(a, \alpha)\|_{\widetilde{A}} = \|a\|_A + \|\alpha\|$

En la cual cumple que si A es *-álgebra de Banach, entonces $\widetilde{A}$ también lo es.

Prueba.

Sea $x = (a, \alpha) \in \widetilde{A}$ entonces demostremos que $\|x^*\|_{\widetilde{A}} = \|x\|_{\widetilde{A}}, \quad \forall x \in \widetilde{A}$

$$\|(a, \alpha)^*\|_{\widetilde{A}} = \|(a^*, \overline{\alpha})\|_{\widetilde{A}} = \|a^*\|_A + \|\alpha\| = \|a\|_A + \|\alpha\| = \|(a, \alpha)\|_{\widetilde{A}}$$

Afirmación. $\widetilde{A}$ es completo con respecto a $\|.\|_{\widetilde{A}}$

Prueba.

Sea $(a_n, \lambda_n) \in \widetilde{A}$ una sucesión de Cauchy, entonces se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall m, n \geq n_0 \implies \|(a_n, \lambda_n) - (a_m, \lambda_m)\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon$$

$$\|(a_n - a_m, \lambda_n - \lambda_m)\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon \text{ por definición } \|a_n - a_m\|_A + \|\lambda_n - \lambda_m\| < \varepsilon$$

Lo cual muestra que $a_n \subset A$, $\lambda_n \subset \mathbb{C}$ son de Cauchy, es decir

$$\exists a \in A, \text{ tal que } a_n \longrightarrow a \implies \|a_n - a\|_A < {}^{\varepsilon}/_{2}$$

$$\exists \lambda \in A, \text{ tal que } \lambda_n \longrightarrow \lambda \implies \|\lambda_n - \lambda\|_{\mathbb{C}} < {}^{\varepsilon}/_{2}$$

Es decir $\|a_n - a\|_A + \|\lambda_n - \lambda\| < \varepsilon$

$$\|(a_n - a, \lambda_n - \lambda)\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon$$

$$\|(a_n, \lambda_n) - (a, \lambda)\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon$$

Lo cual nos muestra que $\exists (a, \lambda) \in \widetilde{A}$ tal que $(a_n, \lambda_n) \longrightarrow (a, \lambda)$ en $\widetilde{A}$.

Observación 2.3.2.

Bajo la norma $\|.\|_{\widetilde{A}}$ no garantiza que $\widetilde{A}$ es un C^*-álgebra. Por ejemplo si $A = \mathbb{C}$ y $x = (-2,1)$ tenemos que

$$\|x^*x\|_{\widetilde{A}} = \|(-2,1)^*(-2,1)\|_{\widetilde{A}} = \|(0,1)\|_{\widetilde{A}} = 1$$

$$\|x\|_{\widetilde{A}}^2 = \|(-2,1)\|_{\widetilde{A}}^2 = (\|-2\| + \|1\|)^2 = 9$$

Es decir $\|x^*x\|_{\widetilde{A}} \neq \|x\|_{\widetilde{A}}^2$

Sin embargo, podemos dotar a $\widetilde{A}$ con una norma para hacerla una C^*-álgebra.

Proposición 2.3.2. Si A es una C^*-álgebra, se introduce una norma en $\widetilde{A}$ para todo $x = (a, \lambda) \in \widetilde{A}$

$$\|x\|_{\widetilde{A}} = \sup\{\|xb\|_A : \ b \in A, \|b\| \leq 1\}$$

Es decir:

$$\|(a, \lambda)\|_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ab + \lambda b\|_A : \ b \in A, \|b\| \leq 1\}$$

Bajo esta norma, $\widetilde{A}$ es una C^*-álgebra con unidad.

Prueba.

Sea $x_n \in \widetilde{A}$ una sucesión de Cauchy, entonces se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall m, n \geq n_0 \implies \|x_m - x_n\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon$$

$$\sup\{\|x_m b - x_n b\|_A : \ b \in A, \|b\| \leq 1\} < \varepsilon$$

Es decir

$$\|x_m b - x_n b\|_A < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0, b \in A, \|b\| \leq 1$$

De aquí podemos observar que $(x_n b)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a la norma en A, y como esta es de Banach, entonces esta sucesión es convergente, es decir a un $(xb) \in A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0 \implies \|x_n b - xb\|_A < \varepsilon$$

$$\sup\{\|x_n b - xb\|_A : \ b \in A, \|b\| \leq 1\} < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|x_n - x\|_{\widetilde{A}} < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Concluyendo así que x_n es completo respecto a la norma en $\widetilde{A}$

Probemos ahora, la condición de C^*

Sea $x = (a, \lambda)$ entonces,

$$\|x\|^2 = \|(a,\lambda)\|^2 = \sup\left\{\|ab + \lambda b\|^2{}_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$$

Como A es una C^*-álgebra, se tiene

$= \sup\{\|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\}$

$= \sup\left\{\left\|\left(b^*a^* + \bar{\lambda}b^*\right)(ab + \lambda b)\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$= \sup\left\{\left\|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \bar{\lambda}b^*ab + \bar{\lambda}\lambda b^*b\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$= \sup\left\{\left\|b^*\left(a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + \bar{\lambda}\lambda b\right)\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$\leq \sup\{\|b^*\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\} \sup\left\{\left\|a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + \bar{\lambda}\lambda b\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$= \|b^*\|. \sup\left\{\left\|a^*ab + \lambda a^*b + \bar{\lambda}ab + \bar{\lambda}\lambda b\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$\leq \sup\left\{\left\|\left(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a, \lambda\bar{\lambda}\right)\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$= \sup\left\{\left\|\left(a^*, \bar{\lambda}\right)(a, \lambda)\right\|_A : \ b \in A , \|b\| \leq 1\right\}$

$= \|x^*x\|$

Sin embargo, también se tiene $\|x^*x\| \leq \|x\|^2$, esto nos da la propiedad necesaria para ser C^*.

2.4. Teoría espectral

Definición 2.4.1.

Sea A una álgebra unital, el espectro de $a \in A$ se define como

$$\sigma_A(a) = \sigma(a) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; a - \lambda.1_A \;\; no\; es\; invertible\; en\; A \,\}$$

el conjunto resolvente de a denotado por $\rho_A(a)$ está definido como el complemento del espectro de a. Es decir:

$$\rho_A(a) = \mathbb{C} - \sigma_A(a)$$

Definición 2.4.2.

Se define el radio espectral de $a \in A$, como

$$r_A(a) = \sup\, \{|\lambda| \;:\; \lambda \in \sigma_A(a)\,\}$$

Afirmación.

Si $a, b \in A$ son elementos de un álgebra unital, entonces $1 - ab$ es invertible, si y sólo si $1 - ba$ es invertible.

En efecto, se prueba que si $1 - ab$ tiene inversa c, entonces $1 - ba$ tiene inversa $1 - bca$.

Proposición 2.4.3.

Sea A un álgebra de Banach unital, se cumple las siguientes afirmaciones acerca del espectro de $a, b \in A$.

1. Si $A = \{0\}$, entonces $\sigma_A(0) = \emptyset$
2. $\sigma_A(\lambda.1_A) = \{\lambda\},\;\; donde\; \lambda \in \mathbb{C}$
3. Si $a \in A$ es inversible si y solo si $0 \notin \sigma_A(a)$

Prueba.

1. Es inmediato.
2. Sea $\xi \in \sigma_A(\lambda.1_A)$, entonces $\lambda 1_A - \xi 1_A \notin inv(A)$ lo cual implica que $\lambda = \xi$.
3. Si $0 \in \sigma_A(a)$, entonces esto implicaría que; $a - 0.1_A \notin inv(A)$ es decir $a \notin inv(A)$ lo cual sería una contradicción.

Proposición 2.4.4.

Sea A un álgebra de Banach unital, y sea $a \in A$.

1. Si a es inversible, entonces $\sigma_A(a^{-1}) = \sigma_A(a)^{-1}$
2. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un *-homomorfismo, entonces $\sigma_B\big(\varphi(a)\big) \subseteq \sigma_A(a)$

Prueba.

1. Sea $\lambda \in \sigma_A(a^{-1})$, entonces $a^{-1} - \lambda 1_A \notin inv(A)$ más aún

   $-\lambda^{-1}a(a^{-1} - \lambda 1_A) \notin inv(A)$ es decir, $a - \lambda^{-1}1_A \notin inv(A)$, lo cual implica $\lambda^{-1} \in \sigma_A(a)$,

   entonces $\lambda \in \sigma_A(a)^{-1}$. Análogo para la otra inclusión.

2. Sea $\lambda \notin \sigma_A(a)$ entonces, se tiene que $a - \lambda 1_A \in inv(A)$, más aún, evaluando en "φ " se

   obtiene $\varphi(a) - \lambda 1_B \in inv(B)$ lo cual implica que $\lambda \notin \sigma_B\big(\varphi(a)\big)$.

Teorema 2.4.5.

Sea A un álgebra de Banach, a ∈ A tal que $\|\mathrm{a}\| < 1$, entonces $(1 - \mathrm{a})$ es inversible, donde

$$(1 - \mathrm{a})^{-1} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{a}^{\mathrm{n}}$$

Prueba.

Se sabe que siendo $\|a\| < 1$, $1 - a$ es invertible, además

$$\frac{1}{1 - a} = 1 + a + a^2 + a^2 + a^3 + \ldots.$$

Ahora

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|} = (1 - \|a\|)^{-1} < \infty$$

Así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ es convergente en A, supongamos que converge a $b \in A$, y como

$(1 - a)(1 + a + \cdots + a^n) = 1 - a^{n+1}$ converge tanto a $(1 - a)b = b(1 - a)$ y a 1

cuando $n \to \infty$; teniendo así que $b = (1 - a)^{-1}$.

Proposición 2.4.6.

Si A es un álgebra de Banach unital, entonces el conjunto $inv(A)$ es abierto en A.

Prueba.

Probemos que $inv(A) \subset \overset{\circ}{\overline{inv(A)}}$

Sea $x \in inv(A)$ pdq $B_\varepsilon(x) \subset inv(A)$

Sea $y \in B_\varepsilon(x)$, entonces $\|y - x\| \leq \|x^{-1}\|^{-1}$ para $\varepsilon = \|x^{-1}\|^{-1}$

Es decir, $\|y - x\|\|x^{-1}\| < 1$

$$\|1 - yx^{-1}\| = \|yx^{-1} - 1\| < 1$$

Entonces por el Teorema anterior, se tiene que yx^{-1} es invertible en A, lo cual nos concluye que $y \in inv(A)$.

Teorema 2.4.7.

Para cualquier a en un álgebra de Banach unital, el espectro $\sigma(a)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq \|a\| \}$

Prueba.

Demostremos por contradicción, sea $|\lambda| > \|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, de ésta forma por el Teorema 2.4.5. se tiene que $1 - \lambda^{-1}a$ es invertible y por lo tanto $\lambda \notin \sigma(a)$.

Ahora, por la Proposición 2.4.6. $\mathbb{C} - \sigma_A(a)$ es abierto, porque $inv(A)$ es abierto en A, entonces el conjunto $\sigma_A(a)$ es cerrado.

Teorema 2.4.8. (Beurling)

Si a es un elemento de un álgebra unital de Banach, entonces se cumple que

$$r(a) = \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Prueba.

La demostración del teorema está basado en el libro [1]. Murphy G.J.

Si $\lambda \in \sigma(u)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(u^n)$, con lo cual $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$, entonces

$$r(a) \leq \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \to \infty} \inf \|a^n\|^{1/n}$$

Sea Δ un disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro 0 y de radio $1/r(a)$ (usamos la convención usual $1/0 = \infty$)

Si $\lambda \in \Delta$, entonce $1 - \lambda a \in Inv(A)$. Si $r \in A^*$ entonces la aplicación

$$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \lambda \longrightarrow r((i - \lambda a)^{-1})$$

Es analitica, asi que que existen números complejos únicos λ_n tal que

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n \quad (\lambda \in \Delta)$$

Sin embargo, si $|\lambda| < {}^{1}/_{\|a\|} \left(\leq {}^{1}/_{r(a)}\right)$, entonces $\|\lambda a\| < 1$, así

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n$$

Y por lo tanto

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n r(a^n)$$

De esto se sigue que $\lambda_n = r(a^n)$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto la sucesión $(r(a^n)\lambda^n)$ converge a 0 para todo $\lambda \in \Delta$, con lo cual, a fortiori, es acotada. Dado que esto se cumple para cada $r \in A^*$, se sigue del principio de acotación uniforme que $\lambda^n a^n$ es una sucesión acotada. Por lo tanto existe un número positivo M (que depende de λ por supuesto) tal que $\|\lambda^n a^n\| \leq M$ para todo $n \geq 0$, y por lo tanto $\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} / |\lambda|$ si $(\lambda \neq 0)$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|a^n\|^{1/n} \leq {}^{1}/_{|\lambda|}$$

Tenemos que mostrar, entonces que si

$$r(a) < |\lambda^{-1}| \implies \lim_{n\to\infty} \sup \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda^{-1}|$$

Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|a^n\|^{1/n} \leq r(a)$$

Y como

$$r(a) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|a^n\|^{1/n}$$

tenemos que

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Teorema 2.4.9.

Si $u \in A$ es unitario, donde A es C^*-álgebra de Banach unital, entonces $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$, donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \|z\| = 1\}$

Prueba.

Como $u \in A$ es unitario entonces $\|u\| = 1$, ya que $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$.

Ahora, sea $\lambda \in \sigma(u)$, entonces también se cumple que $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$, y por el Teorema 2.4.7. Obtenemos $|\lambda| \leq 1$ y $|\lambda^{-1}| \leq 1$, con lo cual se prueba que $|\lambda| = 1$.

Teorema 2.4.10.

Si a es un elemento autoadjunto de una C^*-álgebra, entonces $r(a) = \|a\|$.

Prueba.

A partir de $\|a^*a\| = \|a\|^2$ se obtiene, $\|a^2\| = \|a\|^2$ con el cual, por inducción lograremos obtener $\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n}$, entonces por el Teorema de Beurling, obtenemos:

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left\|a^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|a\|$$

Proposición 2.4.11.

La norma que hace que A sea una C^*-álgebra, es única.

Prueba.

Sea A una C^*-álgebra bajo la norma $\|.\|_1$, y sea otra norma $\|.\|_2$ entonces

$$\|x\|_1^2 = \|x^*x\|_1 = r(x^*x) = \|x^*x\|_2 = \|x\|_2^2$$

Teorema 2.4.12.

Si A es una C^*-álgebra con unidad y $a \in A$ es autoadjunto, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Prueba.

Recordemos primeramente que $e^{ia} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!}$, claramente vemos que e^{ia} es unitario, entonces por el Teorema 2.4.9. se tiene que $\sigma(e^{ia}) \subseteq \mathbb{T}$.

Ahora, sea $\lambda \in \sigma(a)$ entonces $a - \lambda \notin inv(A)$. Denotemos $b = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(a-\lambda)^{n-1}}{n!}$

Se observa que: $e^{ia} - e^{i\lambda} = \left(e^{i(a-\lambda)} - 1\right)e^{i\lambda} = (a-\lambda)be^{i\lambda}$

Por hipótesis tenemos que:

$$\lambda \in \sigma(a) \implies (a-\lambda)b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!} \notin inv(A)$$

$$\lambda \in \sigma(a) \implies e^{i\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \notin inv(A)$$

Es decir $e^{ia} - e^{i\lambda} \notin inv(A)$ o también $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$, entonces $e^{i\lambda} \in \mathbb{T}$.

Recordemos que, si $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ entonces $e^{i\lambda} = e^{-b+ai} = e^{-b}(\cos a + i \sin a)$

Más aún $\|e^{i\lambda}\| = |e^{-b}| = 1$, concluyendo así que $b = 0$.

Por lo tanto $\lambda = a \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.4.13.

Sea A un C^*-álgebra con identidad, entonces se cumple las siguientes afirmaciones

1. Si $a \in A$ es un elemento normal y $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$ entonces a es unitario
2. Si $p \in A$ es una proyección, entonces $\sigma(p) \subseteq \{0,1\}$
3. Sea $a \in A$ un elemento normal tal que $\sigma(a) \subseteq \{0,1\}$, entonces a es una proyección.

Prueba.

Ver [1]. (Murphy G.J).

Definición 2.4.14.

Sea A es un álgebra de Banach. Un homomorfismo $h : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $h \neq 0$ es llamado un carácter (o funcional lineal multiplicativo)

Definición 2.4.15.

El conjunto de caracteres de un álgebra de Banach con unidad conmutativa A es llamado el espectro de A y es denotado por $S_p(A)$ es decir

$$S_p(A) = \{\, h : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad tal\ que \quad h\ es\ un\ car\acute{a}cter\}$$

2.5. Elementos proyección y unitarios

Definición 2.5.1.

Sea X un espacio topológico. Se dice que $x, y \in X$ son homotópicos en X $(x \sim_h y \; en \, X)$ si existe una aplicación continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que

$$f(0) = x \quad \wedge \quad f(1) = y$$

Se prueba fácilmente que la relación $\sim_h$ es una relación de equivalencia sobre X.

Definición 2.5.2. Sea A una C^*-álgebra con unidad, denotemos por

$$\mathcal{U}(A) = \{ u \in A : \; u \;\; es \; unitario\}$$

$$\mathcal{U}_0(A) = \{ u \in \mathcal{U}(A) \;:\; u \sim_h 1_A \;\; en \;\; \mathcal{U}(A)\}$$

Definición 2.5.3. Sea A una C^*-álgebra con unidad, denotemos por

$$GL(A) = \{ a \in A : \; a \;\; es \; inversible\}$$

$$GL_0(A) = \{ a \in GL(A) \;:\; a \sim_h 1_A \;\; en \; GL(A) \}$$

Observación 2.5.1.

Sea $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{U}(A)$ tal que $u_i \sim_h v_i$, $\forall i = 1,2$, entonces $u_1 u_2 \sim_h v_1 v_2$.

Es decir; si $t \to w_i(t)$ son caminos que unen u_i con v_i , entonces $t \to w_1(t) w_2(t)$ es un camino continuo que conecta $u_1 u_2$ con $v_1 v_2$ $\big(todos \; en \;\; \mathcal{U}(A)\big)$.

Observación 2.5.2.

- $\mathcal{U}(A)$ es un subgrupo de $GL(A)$.
- Sea $a \in A$, entonces definamos por $|a| = (a^* a)^{1/2}$, el cual llamaremos valor absoluto de a.

Proposición 2.5.4. Sea A una C^*-álgebra con unidad

1. Si $a \in GL(A)$, entonces, $|a| \in GL(A)$ y $a|a|^{-1} \in \mathcal{U}(A)$.

2. Sea $\varphi : GL(A) \longrightarrow \mathcal{U}(A)$ definida por $\varphi(a) = a|a|^{-1}$, entonces φ es continua, $\varphi(u) = u \;\; \forall u \in \mathcal{U}(A)$ y $\varphi(a) \sim_h a$ en $GL(A)$, $\forall a \in GL(A)$

3. Sea $u, v \in \mathcal{U}(A)$ tal que $u \sim_h v$ en $GL(A)$, entonces $u \sim_h v$ en $\mathcal{U}(A)$.

Prueba.

Ver [10]. M. Rϕrdam.

Proposición 2.5.5. Sea A una C^*-álgebra con unidad

1. Si $h \in A$ es Autoadjunto, entonces $e^{ih} \in \mathcal{U}_0(A)$
2. Si $u \in \mathcal{U}(A)$ y $\sigma(a) \neq \mathbb{T}$ entonces $u \in \mathcal{U}_0(A)$
3. Si $u, v \in \mathcal{U}(A)$ y $\|u - v\| < 2$ entonces $u \sim_h v$.

Prueba.

Ver [10]. (M. Rϕrdam).

Lema 2.5.6. (Whitehead)

Sea A una C^*-álgebra unital y $u, v \in \mathcal{U}(A)$, entonces

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{U}(M_2(A)).$$

En particular, se tiene

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{U}(M_2(A))$$

Prueba.

Se observa que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(M_2(A))$ y también que $\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{1, -1\}$, más aún se tiene que $\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{T}$

Lo cual, por la Proposición anterior, se concluye que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(M_2(A))$ es decir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahora se observa que:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego a partir de

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente para $u = v$

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, para

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} 0 & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poniendo $u = 1$, se observa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, a partir de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Y como

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \ \wedge \ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, a partir de

$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Para $v = u$ se obtiene $\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces por transitividad,

$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim_h \ \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

Lo cual, nos concluye la prueba.

Proposición 2.5.7.

Sea A un C^*-álgebra unitario, si $a \in GL(A)$ y $b \in A$ tal que $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ entonces $b \in GL(A)$, $\left\|b^{-1}\right\|^{-1} \geq \|a^{-1}\|^{-1} - \|a - b\|$ y $a \sim_h b$ en $GL(A)$.

Prueba.

Tenemos que $\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a - b\| < 1$

Luego $a^{-1}b$ es inversible, es decir

$$(a^{-1}b)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - a^{-1}b)^k$$

Es absolutamente convergente, con norma

$$\|(a^{-1}b)^{-1}\| = \sum_{k=0}^{\infty}\|1 - a^{-1}b\|^k = (1 - \|1 - a^{-1}b\|)^{-1}$$

Luego $b \in GL(A)$ con inversa $b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$, y

$$\|b^{-1}\|^{-1} \geq \|(a^{-1}b)^{-1}\|^{-1}\|a^{-1}\|^{-1} \geq (1 - \|1 - a^{-1}b\|)\|a^{-1}\|^{-1} \geq \|a^{-1}\|^{-1} - \|a - b\|$$

Para esto último, tomemos $c_t = (1-t)a + tb$ para $t \in [0,1]$.

Luego $\|a - c_t\| = t\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, luego $c_t \in GL(A)$ por la primera parte de la demostración.

Definición 2.5.8.

El conjunto de proyecciones de una C^*-álgebra A, se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Lema 2.5.9.

Sea $p, q \in \mathcal{P}(A)$, las siguientes relaciones son de equivalencia.

- $p \sim q \iff \exists v \in A \,/\, p = v^*v \wedge q = vv^*$ (Equivalencia Murray Von Neumann)
- $p \sim_u q \iff \exists u \in \mathcal{U}(A) \,/\, q = upu^*$ (Equivalencia unitaria)

Prueba.

La primera relación lo demostraremos en la Sección 5.1 de una forma detallada y con respecto a la relación $\sim_u$ solo probaremos para la transitividad ya que las demás salen por la propia definición.

Es decir, sea $p \sim_u q \wedge q \sim_u r$ para demostrar, $p \sim_u r$

$$p \sim_u q \iff \exists u \in \mathcal{U}(A) \,/\, q = upu^*$$

$$q \sim_u r \iff \exists n \in \mathcal{U}(A) \,/\, r = nqn^*$$

Entonces, sea $s = nu \in \mathcal{U}(A)$, lo cual nos prueba que $r = sps^*$ es decir $p \sim_u r$.

Proposición 2.5.10. Sea $p, q \in \mathcal{P}(A)$, donde A es una C^*-álgebra unital, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. $\exists u \in \mathcal{U}(\widetilde{A}) \ / \ q = upu^*$
2. $\exists u \in \mathcal{U}(A) \ / \ q = upu^*$
3. $p \sim q \quad \wedge \quad 1_A - p \sim 1_A - q$

Prueba.

Sea $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A = (-1_A, 1)$. Luego $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$ además $fa = af = 0$, $\forall a \in A$.

$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2})$:
Sea $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$ se observa que $u^*u = 1_{\widetilde{A}}$. Donde $u = a + \lambda f = (a - \lambda 1_A, \lambda)$

Es decir $(a - \lambda 1_A, \lambda)^*(a - \lambda 1_A, \lambda) = (0,1)$

$$[(a^* - \overline{\lambda} 1_A)(a - \lambda 1_A) + \lambda(a^* - \overline{\lambda} 1_A) + \overline{\lambda}(a - \lambda 1_A), \overline{\lambda}\lambda] = (0,1)$$

Donde se obtiene que $a^*a = 1_A$, es decir que $\exists a \in \mathcal{U}(A)$, más aún como $q = upu^*$

Se tiene que

$$q = (a - \lambda 1_A, \lambda)(p, 0)(a - \lambda 1_A, \lambda)^*$$

$$q = \big((a - \lambda 1_A)p + \lambda p\big)\big(a^* - \overline{\lambda} 1_A, \overline{\lambda}\big) = (ap, 0)\big(a^* - \overline{\lambda} 1_A, \overline{\lambda}\big)$$

$$q = (apa^*, 0)$$

Es decir: $q = apa^*$.

$(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3})$:
Sea $q = upu^*$ para $u \in \mathcal{U}(A)$. Tomando $v = up$ y $w = u(1_A - p)$. Se observa que $v^*v = p$, $vv^* = q$ es decir $p \sim q$. Y más aún, $w^*w = 1_A - p$,

$ww^* = 1_A - q$ lo cual nos concluye que $1_A - p \sim 1_A - q$.

$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1})$:

$$\text{Como} \qquad p \sim q \quad \Rightarrow v^*v = p, \ \ vv^* = q$$

$$1_A - p \sim 1_A - q \Rightarrow w^*w = 1_A - p, \ \ ww^* = 1_A - q$$

Lo cual también podemos obtener:

$$(1_A - q)w = w(1_A - p) = (1_A - q)w(1_A - p) = w$$

$$w(1_A - p) = w \ \Rightarrow \ wp = 0 \ \Rightarrow wv^* = 0$$

$$w(1_A - q) = w \ \Rightarrow \ qw = 0 \ \Rightarrow v^*w = 0$$

Tomando $u = v + w + f$, se observa que:

$$uu^* = (v + w + f)(v + w + f)^* = vw^* + wv^* + 1_{\widetilde{A}} = 1_{\widetilde{A}}$$

$$u^*u = (v+w+f)^*(v+w+f) = wv^* + vw^* + 1_{\widetilde{A}} = 1_{\widetilde{A}}$$

Lo cual nos muestra que $\exists u \in \mathcal{U}(\widetilde{A}) \;/\; (v+w+f)p(v+w+f)^* = vv^* = q$

Es decir $q = upu^*$.

Observemos que podemos probar $(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{2})$ usando $u = v + w \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$.

Proposición 2.5.11.

Sea $p, q \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\|p - q\| < 1$, entonces $p \sim_h q$.

Prueba.

Ver [10]. (M. Rϕrdam).

Proposición 2.5.12. Sea $p, q \in \mathcal{P}(A)$, donde A es una C^*-álgebra

$$p \sim_h q \text{ en } \mathcal{P}(A) \iff \exists u \in \mathcal{U}_0(\widetilde{A}) \;/\; q = upu^*$$

Prueba.

Ver [10]. (M. Rϕrdam).

Proposición 2.5.13. Sea $p, q \in \mathcal{P}(A)$, donde A es una C^*-álgebra

1. $p \sim_h q \implies p \sim_u q$
2. $p \sim_u q \implies p \sim q$

Prueba.

1. Como $p \sim_h q$, entonces por la proposición anterior se obtiene que $\exists u \in \mathcal{U}_0(\widetilde{A}) \;/$ $q = upu^*$ y más aún por la Proposición 2.5.10, obtenemos que $\exists u \in \mathcal{U}_0(A) \;/\; q = upu^*$ es decir, $p \sim_u q$.

2. Si $q = upu^*$ para $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$, entonces para $v = up \in A$, se cumple que $v^*v = p$, $vv^* = q$ es decir $p \sim q$.

Proposición 2.5.14. Sea A una C^*-álgebra y $p, q \in \mathcal{P}(A)$

1. $p \sim q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$.

2. $p \sim_u q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{P}(M_2(A))$.

Prueba.

La demostración del teorema está basado en el libro [10]. (M. Rϕrdam).

1. Sea $v \in A$, tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$ además $v = qv = vp = qvp$,
   En efecto, se observa que:

$$(vv^*v - v)^*(vv^*v - v) = (v^* - v^*vv^*)^*(vv^*v - v)$$
$$= v^*vv^*v - v^*v - v^*vv^*vv^*v + v^*vv^*v = 0$$

Es decir: $vv^*v = qv = 0$

Por otro lado, podemos probar que

$$u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \in \mathcal{U}\left(M_2(\widetilde{A})\right)$$

Donde

$$wu\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*w^* = w\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$wu = \begin{pmatrix} v + (1-q)(1-p) & (1-q)v^* \\ q(1-p) & 1-q+qv^* \end{pmatrix} \in \widetilde{M_2(A)}$$

De ésta forma queda probado.

Notemos que $\widetilde{M_2(A)}$ está considerado como una subálgebra unital de $M_2(\widetilde{A}\,)$ vía la aplicación

$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \alpha\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} (a,\alpha) & (b,0) \\ (c,0) & (d,\alpha) \end{pmatrix}$ y que wu, que en principio está en $M_2(\widetilde{A}\,)$ está dentro de $\widetilde{M_2(A)}$.

2. A partir de la hipótesis, se observa que existe $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A}\,)$ tal que $q = upu^*$. Ahora por el Lema de Whitehead, se tiene que existe una aplicación continua $v : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(\widetilde{A}\,)$ que conecta $v(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $v(1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

   Tomando $w(t) = v(t)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v(t)^*$

Se observa que $w(t)$ en $\mathcal{P}\big(M_2(A)\big)$ para cualquier "t", la aplicación $w(t)$ es continua, y más aún , se tiene que:

$$w(0) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\wedge\; w(1) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Variables e Hipótesis

3.1. Variables de la investigación

Nuestras variables a estudiar son:

- El grupo abeliano $K_0(A)$.
- La K-teoría del álgebra de Cuntz "$\mathcal{O}_n$".

3.2. Operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Dimensiones	Indicadores
$K_0(A)$	El funtor covariante "K_0".	Vacío	Aplicación entre las categorías de C^*-álgebras y la categoría de grupos
	El espacio cociente $\mathcal{D}(A)$.	No vacío	Semigrupo conmutativo
	El grupo abeliano $K_0(A)$ asociado al C^*-álgebra "A".	No vacío	Es parcialmente la K-teoría de un C^*-álgebra "A".
$\mathcal{O}_n$	Sub C^*-álgebra de operadores $B(H)$; generada por n-isometrias $s_1, s_2, \ldots, s_n$	El álgebra $\mathcal{O}_n$ es simple con la propiedad universal: Si $t_1, \ldots, t_n$ son elementos de un C^*-álgebra "A" tal que $t_j{}^* t_j = 1 = \sum_{i=1}^{n} t_j t_j{}^*$ entonces Existe un *-homomorfismo $\varphi: \mathcal{O}_n \longrightarrow A$ tal que $\varphi(s_j) = t_j$.	El álgebra de Cuntz, la cual es propiamente infinita

3.3. Hipótesis general e Hipótesis especifica

3.3.1. Hipótesis general

Basado en un C^*-álgebra "A", y considerando parcialmente su K-teoría algebraica (el funtor K_0), logramos estudiar el grupo asociado a "A" mediante dicho funtor.

3.3.2. Hipótesis específica

- Basado parcialmente en la K-teoría algebraica (funtor K_0) para C^*-álgebras logramos estudiar detalladamente el grupo asociado $K_0(A)$.

- Basado en el estudio del grupo asociado $K_0(A)$, calculamos la K-teoría para álgebras específicas.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico: teórico-constructivo y la metodología usada es de tipo; inductivo – deductivo, tratando de ser lo más exhaustivo posible en la demostración de las proposiciones, teoremas, etc.

4.2. Diseño de la investigación

1. Para el desarrollo del trabajo propuesto usaremos el material bibliográfico siguiente [3], [5], [6] y [8].

2. Conociendo la teoría de C^*-álgebras y la noción de funtores pasamos a estudiar el grupo abeliano $K_0(A)$, para un C^*-álgebra "A" arbitraria.

3. Finalmente se determina el grupo asociado para C^*-álgebras especiales.

4.3. Población y muestra

Por la naturaleza del trabajo que es abstracto, no hay población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de dos áreas de la matemática; la Topología y el Algebra.

4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

- Recolección de textos y artículos de matemática pura y matemática aplicada.
- Clasificación de textos y artículos recopilados por materias.
- Clasificación cronológica por materias del material recopilado.

4.5. Procedimientos de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo abstracto, no se necesitó procedimiento alguno de recolección de datos más que la revisión bibliográfica (libros, artículos, tesis, páginas web, etc.)

4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

El trabajo de investigación no requiere un análisis de datos.

Capítulo 5

Resultados

A continuación resaltaremos la forma como asociar a un C*-álgebra A cualquiera, su grupo abeliano asociado $K_0(A)$ y sobre todo sus propiedades, todo esto a través de la construcción de Grothendieck, además, veremos que K_0 se puede ver como un funtor covariante de la categoría de C^*-álgebras a la categoría de grupos; cabe resaltar que serán usadas las definiciones y propiedades estudiadas en el capítulo 2.

5.1. La Construcción de Grothendieck

Empecemos ésta primera parte analizando la construcción dada por Grothendieck el cual nos permite asociar a un semigrupo abeliano cualquiera, un grupo abeliano. Por ejemplo así como se logra obtener los números enteros (un grupo abeliano) por medio de los naturales (un semigrupo abeliano).

Detallemos esto de una forma precisa.

Sea $(S,+)$ un semigrupo abeliano, definamos una relación de equivalencia ¨ $\sim$ ¨ sobre $S \times S$, de la siguiente forma.

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff m \in S \ / \ x_1 + y_2 + m = x_2 + y_1 + m$$

Afirmación. (La relación ¨ $\sim$ ¨ es de equivalencia)

- **Reflexiva.** Debemos demostrar que $(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

  Sea $m \in S$ (fijo pero arbitrario) se cumple que $x_1 + y_1 + m = x_1 + y_1 + m$ es decir, $(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$.

- **Simétrica.** Si $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ para demostrar que $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$

  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \ \rightarrow \ \exists\, m \in S \ / \ x_1 + y_2 + m = x_2 + y_1 + m$

  $$x_2 + y_1 + m = y_2 + x_1 + m$$

  es decir, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.

- **Transitiva.** Si $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ entonces $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$

  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \ \rightarrow \ \exists\, m \in S \ / \ x_1 + y_2 + m = x_2 + y_1 + m$

  $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3) \ \rightarrow \ \exists\, h \in S \ / \ x_2 + y_3 + h = x_3 + y_2 + h$

  Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

  $$x_1 + y_3 + x_2 + y_2 + m + h \ = \ x_3 + y_1 + x_2 + y_2 + m + h$$

  $$x_1 + y_3 + (x_2 + y_2 + m + h) \ = \ x_3 + y_1 + (x_2 + y_2 + m + h)$$

  denotando $w = x_2 + y_2 + m + h$ obtenemos que

  $x_1 + y_3 + w = \ x_3 + y_1 + w$ es decir, $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Entonces, podemos particionar nuestro conjunto, por medio de la relación ¨ $\sim$ ¨ que es de equivalencia.

Notación:

$$\mathcal{G}(S) = \frac{SxS}{\sim} = \{ [(x,y)] \ / \ (x,y) \in SxS \}$$

Dónde:

$$[(x,y)] = \{(a,b) \ \in SxS \ / \ (a,b) \sim (x,y)\}$$

Ahora, en tal conjunto, es decir en $\mathcal{G}(S)$ definamos una operación binaria.

$$+ : \quad \boldsymbol{\mathcal{G}(S) \ x \ \mathcal{G}(S)} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{G}(S)}$$

$$([x_1, y_1], [x_2, y_2]) \ \longrightarrow \ [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2 \ , y_1 + y_2]$$

Esta operación ¨ $+$ ¨ , está bien definida, es decir si:

$$\left(\left[x_1, y_1\right], \left[x_2, y_2\right]\right) = \left(\left[x_3, y_3\right], \left[x_4, y_4\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \ [x_1, y_1] = [x_3, y_3] \ \wedge \ \left[x_2, y_2\right] = \left[x_4, y_4\right]$$

$$\Leftrightarrow \ [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_3, y_3] + [x_4, y_4]$$

Lo cual era lo que queríamos demostrar.

Observación 5.1.1.

Podemos observar que $(\mathcal{G}(S), +)$ es un grupo abeliano, el cual es llamado el Grupo de Grothendieck de S.

En efecto:

Sea $m = [x_1, y_1]$, $n = [x_2, y_2]$, $p = [x_3, y_3]$

- Asociatividad.

$$m + (n + p) = [x_1, y_1] + ([x_2, y_2] + [x_3, y_3])$$

$$= [x_1, y_1] + [x_2 + x_3 \ , y_2 + y_3] = [x_1 + (x_2 + x_3) \ , y_1 + (y_2 + y_3)]$$

$$= [(x_1 + x_2) + x_3 \ , (y_1 + y_2) + y_3] = [x_1 + x_2 \ , y_1 + y_2] + [x_3, y_3]$$

$$= ([x_1, y_1] + [x_2, y_2]) + [x_3, y_3] = (m + n) + p$$

- Elemento neutro.

$$\forall m \in \mathcal{G}(S), \exists \ \theta \in \mathcal{G}(S) \ \ tal \ que \quad m + \theta = m$$

Sea $\theta = [a, b]$ y $m = [x_1, y_1]$ entonces

$$[x_1, y_1] + [\mathrm{a}, \mathrm{b}] = [x_1, y_1]$$

$$\Leftrightarrow [x_1 + a\ , y_1 + b] = [x_1, y_1]$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + a\ , y_1 + b)\ \sim\ (x_1, y_1)$$

$$\Leftrightarrow\ x_1 + a + y_1 + m = y_1 + b + x_1 + m$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{a} = \mathrm{b}$$

Entonces $\theta = [a, a]$ donde $a \in S$ (fijo pero arbitrario).

- Elemento inverso

$$\forall m \in \mathcal{G}(S), \exists\ -m \in \mathcal{G}(S)\ \ tal\ que\quad m + (-m) = \theta$$

Sea $m = [x_1, y_1]$ ^ $-m = [\mathrm{p}\ , \mathrm{q}]$ entonces

$$[x_1, y_1] + [\mathrm{p}, \mathrm{q}] = [\mathrm{a}, \mathrm{a}]$$

$$\Leftrightarrow [x_1 + p\ , y_1 + q] = [\mathrm{a}, \mathrm{a}]$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + p\ , y_1 + q)\ \sim\ (\mathrm{a}, \mathrm{a})$$

$$\Leftrightarrow\ x_1 + p + a + m = y_1 + q + a + m$$

$$\Leftrightarrow\ q = x_1\ \ \wedge\ \ p = y_1$$

Entonces $-m = [y_1, x_1]$

- Conmutativo

Sea $m = [x_1, y_1]$, $n = [x_2, y_2]$

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2\ , y_1 + y_2]$$
$$= [x_2 + x_1\ , y_2 + y_1] = [x_2, y_2] + [x_1, y_1]$$

Es decir a través de nuestro semigrupo abeliano "S" logramos obtener un grupo abeliano el cual está netamente relacionado con "S", por eso es denotado como $\mathcal{G}(S)$.

Definición 5.1.1. (Morfismo de Grothendieck)

Sea $y \in S$ (fijo). Definamos un morfismo

$$\begin{aligned} \gamma_s :\quad & S \quad\longrightarrow\quad \mathcal{G}(S) \\ & x \quad\longrightarrow\quad \gamma_s(x) = [(x + y, y)]\quad \forall x \in S \end{aligned}$$

Afirmación: γ_s es aditiva e independiente de y

Prueba: Sea $y \in S$ un elemento fijo y arbitrario, se observa que

$$\gamma_s(x+z) = [(x+z)+y, y] = [(x+z)+y, y] + [y,y] = [(x+z)+2y, 2y]$$

$$= [x+y, y] + [z+y, y] = \gamma_S(x) + \gamma_S(z)$$

El morfismo γ_s se llama Morfismo de Grothendieck, el cual nos permite asociar un elemento de "S" hacia un elemento de su grupo asociado $\mathcal{G}(S)$.

Definición 5.1.2.

El semigrupo $(S,+)$ se dice que tiene la propiedad de cancelación si dado $x, y \in S$ tal que $x+z = y+z$ entonces $x = y$.

Proposición 5.1.3.

La construcción de Grothendieck posee las siguientes propiedades.

1. Sea G un grupo abeliano y $\varphi : S \longrightarrow G$ una función aditiva, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\omega : \mathcal{G}(S) \longrightarrow G$ tal que $\omega\gamma_S = \varphi$.

2. Sea una función aditiva $f : S \longrightarrow A$ entre semigrupos entonces, existe un homomorfismo de grupos $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(S) \longrightarrow \mathcal{G}(A)$ de tal forma que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & A \arrow[d, "\gamma_A"] \\ \mathcal{G}(S) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd}$$

3. $\mathcal{G}(S) = \{\, \gamma_S(x) - \gamma_S(z) \;\; donde \;\; x, z \in S \,\}$

4. Para $x, y \in S$, $\gamma_s(x) = \gamma_s(z) \iff \exists\, z \in S \;/\; x+z = y+z$

5. Sea $(H,+)$ un grupo abeliano, $S \neq \emptyset$ subconjunto de H. Si S es cerrado bajo la operación "+", entonces $(S,+)$ es un semigrupo abeliano con la propiedad cancelativa y $\mathcal{G}(S)$ es isomorfo al subgrupo H_0 generado por S, dónde:

$$H_0 = \{x - y \; : \; x, y \in S\}$$

6. La aplicación $\gamma_S : S \longrightarrow \mathcal{G}(S)$ es inyectivo si y sólo si S tiene la propiedad cancelativa.

Prueba:

1. Primeramente definamos

$$\begin{aligned} \omega : \quad & \mathcal{G}(S) \quad \longrightarrow \quad G \\ & [(x,y)] \quad \longrightarrow \quad \omega([(x,y)]) = \varphi(x-y) \end{aligned}$$ Para algún $y \in S$.

En la cual se observa que ω es un homomorfismo

$$\omega([x,y]+[m,n]) = \omega([x+m, y+n]) = \varphi\big(x+m-(y+n)\big)$$

$$= \varphi\big((x-y)+(m-n)\big) = \varphi(x-y)+\varphi(m-n)$$

$$= \omega([x,y])+\omega([m,n]).$$

Gráficamente,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & G \\ \mathcal{G}(S) \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

$$\omega\gamma_s = \varphi$$

Observamos que:

$\omega\gamma_S(x) = \omega[x+y,y] = \varphi(x+y-y) = \varphi(x)$ donde $y \in S$.

2. Se prueba que $\tau = \gamma_A \mathscr{f}$ es aditiva, donde:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathscr{f}"] \arrow[dr, "\tau"'] & A \arrow[d, "\gamma_A"] \\ & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd}$$

Entonces por la primera parte, podemos afirmar la existencia de un único homomorfismo δ de grupos:

$$\delta \ : \mathcal{G}(S) \ \longrightarrow \ \mathcal{G}(A)$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\gamma_s"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
\mathcal{G}(S) \arrow[r, "\delta = \mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(A)
\end{tikzcd}
$$

En la cual se observa que: $\quad \mathcal{G}(f)\gamma_S = \tau = \gamma_A f$

3. Sea $m = [x, z] \in \mathcal{G}(S)$ donde $x, z \in S$.

$\gamma_s(x) - \gamma_s(z) = [x + y, y] - [z + y, y] = [x + y, y] + [y, z + y]$, donde $y \in S$

$$= [x + 2y, z + 2y] = [x, z] + [2y, 2y] = [x, z] = m$$

Por lo tanto: $[x, z] = \gamma_s(x) - \gamma_s(z)$.

4. Si $\gamma_s(x) = \gamma_s(y)$ entonces $[x + a, a] = [y + a, a] \Leftrightarrow (x + a, a) \sim (y + a, a)$ (para algún $a \in S$).

Es decir $\exists n \in S$ tal que $(x + a) + a + n = (y + a) + a + n$ si y sólo si $x + z = y + z$ donde $z = a + a + n$ $(z \in S)$.

5. Cualquier subconjunto no vacío de un grupo abeliano que es cerrado bajo la suma es un semigrupo abeliano, más aún si $s_1, s_2, m \in S$, donde

$$s_1 + m = s_2 + m$$

Como $m \in S \subset G$ entonces $\exists m' \in G \,/\, m + m' = m' + m = e$

Entonces, $s_1 = s_1 + e = s_1 + \left(m + m'\right) = s_2 + \left(m + m'\right) = s_2 + e = s_2$

Es decir, $(S, +)$ tiene la propiedad de cancelación.

Para demostrar el isomorfismo, definamos

$$f : H_0 \longrightarrow \mathcal{G}(S) \,/\, f(x - y) = [x, y].$$

6. La prueba es similar a la dada en (4).

Ejemplo 1.

Como $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo abeliano, bajo los argumentos anteriores se tiene que

- Elemento neutro: $\theta = [a, a]$ donde $a \in \mathbb{N}$ (fijo pero arbitrario)
- Elemento inverso: $\forall m = [a, b] \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$, $\exists \, -m = [b, a] \in \mathcal{G}(\mathbb{N}) \ / \ m + (-m) = \theta$

Sea el morfismo de Grothendieck, definámoslo como:

$$\begin{array}{llcl} \gamma_S : & (\mathbb{N}, +) & \longrightarrow & \mathcal{G}\big((\mathbb{N}, +)\big) \\ & x & \longrightarrow & \gamma_S(x) = [x + 1, 1] \quad \forall x \in S \end{array}$$

Donde:

$$[x + 1, 1] = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ (a, b) \sim (x + 1, 1)\} \ / \quad (a, b) \sim (x + 1, 1) \iff a = b + x$$

Identifiquemos los elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{N})$ como:

$$[x, y] = x - y \quad \text{donde} \quad x, y \in \mathbb{N}$$

El cual nos da elementos del grupo $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.

Sea $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)$ el semigrupo abeliano, cuya operación suma está definida del modo usual sobre los $\mathbb{N}$, además $x + \infty = \infty = \infty + \infty$.

Entonces el grupo de Grothendieck es $\{0\}$.

En efecto:

Sea el morfismo de Grothendieck

$$\begin{array}{llcl} \gamma_s : & (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) & \longrightarrow & \mathcal{G}\big((\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)\big) \\ & x & \longrightarrow & \gamma_s(x) = [x + y, y] \quad \forall x \in S \end{array}$$

$\mathcal{G}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) = \gamma(a) - \gamma(b)$, donde $a, b \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)$

Ahora, sea $y = \infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) &= [a + \infty, \infty] - [b + \infty, \infty] \\ &= [a + \infty, \infty] + [\infty, b + \infty] \\ &= [\infty, \infty] + [\infty, \infty] \\ &= [\infty, \infty] \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) = \{0\}$$

Ahora, si $x \neq \infty$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) &= [a + x, x] + [\infty, \infty] + [x, b + x] + [\infty, \infty] \\ &= [\infty, \infty] + [\infty, \infty] \\ &= [\infty, \infty]\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +) = \{0\}$$

Más aún, $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)$ no tiene la propiedad cancelativa, es decir, su morfismo de Grothendieck no es inyectivo.

5.2. El grupo $K_0(A)$ para una C^*-algebra con unidad.

En ésta sección nuestro objetivo es, como podemos construir a partir de un C^*-álgebra, una estructura de "semigrupo" de tal forma que usando tal construcción de Grothendieck, le podemos asociar su grupo abeliano. Por eso, empecemos ésta sección buscando "ese" semigrupo abeliano.

Sea A una C^*-álgebra con unidad, denotemos el conjunto de elementos proyección en A como $\mathcal{P}(A)$. Es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{a \in A \ / \ a^2 = a^* = a\}$$

Definición 5.2.1. (Equivalencia de Murray Von Neumann)

Sea $E, F \in \mathcal{P}(A)$ decimos que "E es Murray Von Neumann equivalente a F" $(ie. E \sim F)$

$$E \sim F \iff \exists v \in A \ / \ E = v^*v \ \wedge \ F = vv^*$$

Afirmación. " $\sim$ " es una relación de equivalencia.

- **Reflexiva:** debemos demostrar que $E \sim E$

  Sea $v = E \in A$ se cumple que $E = E^*E \ \wedge \ E = EE^*$

  es decir, $E \sim E$

- **Simétrica:** si $E \sim F$ para demostrar que $F \sim E$

  $$E \sim F \ \rightarrow \ \exists\, v \in A \ / \ E = v^*v \ \wedge \ F = vv^*$$

  Denotemos $m = (v^*)$ tal que $F = m^*m \ \wedge \ E = mm^*$

  es decir, $F \sim E$.

- **Transitiva:** si $E \sim F \ \wedge \ F \sim G$ para demostrar que $E \sim G$

  $$E \sim F \ \rightarrow \ \exists\, v \in A \ / \ E = v^*v \ \wedge \ F = vv^*$$

  $$F \sim G \ \rightarrow \ \exists\, p \in A \ / \ F = p^*p \ \wedge \ G = pp^*$$

  denotando $w = pv$ observamos que:

  $$w^*w = (pv)^*pv = v^*p^*pv = v^*Fv = v^*vv^*v = EE = E$$

  $$ww^* = pv(pv)^* = pvv^*p^* = pFp^* = pp^*pp^* = GG = G$$

Por lo tanto " $\sim$ " es una relación de equivalencia.

Definición 5.2.2.

Definamos al conjunto de las proyecciones de las matrices cuadradas de orden "n" como:

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}\big(M_n(A)\big)$$

Y a la unión de todas las proyecciones de las matrices cuadradas donde $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\big(M_n(A)\big)$$

Definición 5.2.3.

Ahora establezcamos una relación " $\sim_\circ$ " en $\mathcal{P}_\infty(A)$ de la siguiente manera

$E \sim_\circ F$ si y solo si $\exists v \in M_{mxn}(A)$ $tal\ que$ $E = v^*v$ ^ $F = vv^*$

Dónde: $E \in \mathcal{P}_n(A)$ y $F \in \mathcal{P}_m(A)$.

Observación 5.2.1.

- Cabe mencionar de la definición anterior que si

$$E \in \mathcal{P}_\infty(A) \quad \longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}\ \ tal\ que\ \ E \in \mathcal{P}_n(A)$$

$$F \in \mathcal{P}_\infty(A) \quad \longrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N}\ \ tal\ que\ \ F \in \mathcal{P}_m(A)$$

  Lo cual da sentido nuestra relación " $\sim_\circ$ ".

- De manera análoga a la relación anterior, se prueba que " $\sim_\circ$ " es una relación de equivalencia.

- La relación " $\sim_\circ$ " restringida a $\mathcal{P}_n(A)$ coincide con la relación " $\sim$ " ya que, tanto $E, F, v \in \mathcal{P}_n(A)$.

Nota: A partir de ahora denotaremos a $E \in \mathcal{P}_n(A)$ como "E_n " para cualquier $n \in \mathbb{N}$ a menos que se especifique otra cosa.

Definición 5.2.4.

Sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ definamos una operación binaria " $\oplus$ " de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \oplus: \ \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(A) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{P}_\infty(A) \\ (E,F) \quad &\longrightarrow \quad E \oplus F = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = diag(E,F) \end{aligned}$$

Observación 5.2.2.

Como $E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces, $\exists n, m \in \mathbb{N}$ $tal\ que$ $E = E_n$ $\wedge$ $F = F_m$ más aún se prueba que $E \oplus F \in \mathcal{P}_{m+n}(A)$

En efecto

- $(E \oplus F)^2 = (E \oplus F)(E \oplus F) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2 & 0 \\ 0 & F^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = E \oplus F$
- $(E \oplus F)^* = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} E^* & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = E \oplus F$

Proposición 5.2.5.

Sean $E, F, G, E', F' \in \mathcal{P}_\infty(A)$ para algún C^*-álgebra A, entonces se cumple

a) $E \sim_\circ E \oplus 0_n$, donde 0_n denota la matriz nula de orden "n" $\forall n \in \mathbb{N}$.
b) Si $E \sim_\circ E'$ $\wedge$ $F \sim_\circ F'$ $\Longrightarrow$ $E \oplus F \sim_\circ E' \oplus F'$
c) $E \oplus F \sim_\circ F \oplus E$
d) Si $E, F \in \mathcal{P}_n(A)$ tal que $EF = 0$ $\Longrightarrow$ $E + F \in \mathcal{P}_n(A)$, y $E + F \sim_\circ E \oplus F$.
e) $(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$

Prueba.

a) Como $E \in \mathcal{P}_\infty(A)$ entonces $E = E_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$
tomemos

$$v = \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix}_{m+n,m} \in M_{(m+n)\times m}(A)$$

Observando que se tiene:

$$v^*v = \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix} = E_m^2 = E_m$$

$$vv^* = \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} E_m \\ 0_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m^2 & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & 0_n \end{bmatrix} = E_m \oplus 0_n$$

Es decir, $E \sim_\circ E \oplus 0_n$

b) $E_n \sim_\circ E'_m \implies \exists v \in M_{m\times n}(A) \;\; tal\ que \;\; E_n = v^*v \;\; \wedge \;\; E'_m = vv^*$

$F_p \sim_\circ F'_q \implies \exists u \in M_{q\times p}(A) \;\; tal\ que \;\; F_p = u^*u \;\; \wedge \;\; F'_q = uu^*$

Tomemos: $w = \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix} \in M_{m+q\,,n+p}(A)$

Observamos que:

$$w^*w = \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^*_{n\times m} & 0 \\ 0 & u^*_{p\times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} v^*v & 0 \\ 0 & u^*u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & F_p \end{bmatrix} = E_n \oplus F_p$$

$$ww^* = \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} v_{m\times n} & 0 \\ 0 & u_{q\times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^*_{n\times m} & 0 \\ 0 & u^*_{p\times q} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} vv^* & 0 \\ 0 & uu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_m & 0 \\ 0 & F'_q \end{bmatrix} = E'_m \oplus F'_q$$

Es decir, $E_n \oplus F_p \sim_\circ E'_m \oplus F'_q$

c) Sea $E_m\,, F_n$; tomemos

$$w = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix}$$

Donde $0_{n\times m}$ es la matriz cero de $M_{n\times m}(A)$, observando así

$$w^*w = \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & E^*_{m\times m} \\ F^*_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^*E & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & F^*F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = E \oplus F$$

$$ww^* = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & F_{n\times n} \\ E_{m\times m} & 0_{m\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & E^*_{m\times m} \\ F^*_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FF^* & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & EE^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = F \oplus E$$

Concluyendo

$$E \oplus F \sim_\circ F \oplus E.$$

d) Como $EF = 0$, $(EF)^* = 0 \iff F^*E^* = 0$ entonces $FE = 0$.

$$(E+F)^2 = (E+F)(E+F) = E^2 + FE + EF + F^2 = E^2 + F^2 = E + F$$

$$(E+F)^* = E^* + F^* = E + F$$

Lo cual prueba que $E + F \in \mathcal{P}_n(A)$.

tomando

$$v = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \in M_{2n\times n}(A)$$

se observa

$$v^*v = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & F^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = E^*E + F^*F = E + F$$

$$vv^* = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* & F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EE^* & EF^* \\ FE^* & FF^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = E \oplus F$$

Lo cual indica que $E + F \sim_\circ E \oplus F$.

e) Sea $E = E_n$, $F = F_m$, $G = G_p$

$$(E_n \oplus F_m) \oplus G_p = \begin{bmatrix} E_n \oplus F_m & 0 \\ 0 & G_P \end{bmatrix}_{n+m+p\,,n+m+p}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & F_m \end{pmatrix}_{n+m\,,n+m} & 0_{(n+m)\,,p} \\ 0_{p\,,(n+m)} & G_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} E_n & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & F_m \end{matrix} & 0_{(n+m),p} \\ 0_{p,(n+m)} & G_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_n & 0_{n,m} & 0_{n,p} \\ 0_{m,n} & F_m & 0_{m,p} \\ 0_{p,n} & 0_{p,m} & G_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0_{n,(m+p)} \\ 0_{(m+p),n} & \begin{pmatrix} F_m & 0_{m,p} \\ 0_{p,m} & G_p \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_n & 0_{n,(m+p)} \\ 0_{(m+p),n} & F_m \oplus G_p \end{bmatrix}$$

$$= E_n \oplus (F_m \oplus G_p)$$

Por lo tanto

$$(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$$

Definición 5.2.6. Para cualquier C^*-álgebra A , denotemos por

$$\mathcal{D}(A) = \frac{\mathcal{P}_\infty(A)}{\sim_\circ} = \{ [E]_\mathcal{D} \ / \ E \in \mathcal{P}_\infty(A) \}$$

Donde:

$$[E]_\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{P}_\infty(A) \ / \ F \sim_\circ E \}$$

Definamos una operación " $+$ " sobre $\mathcal{D}(A)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} + : \ \boldsymbol{\mathcal{D}(A)} \times \boldsymbol{\mathcal{D}(A)} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}(A)} \\ ([E]_\mathcal{D}, [F]_\mathcal{D}) &\longrightarrow [E]_\mathcal{D} + [F]_\mathcal{D} = [E \oplus F]_\mathcal{D} \end{aligned}$$

Se prueba que la operación " $+$ " ésta bien definida.

Es decir; sea $([E]_\mathcal{D}, [F]_\mathcal{D}) = ([G]_\mathcal{D}, [H]_\mathcal{D})$ entonces:

$$[E]_\mathcal{D} = [G]_\mathcal{D} \ \wedge \ [F]_\mathcal{D} = [H]_\mathcal{D} \ \Longrightarrow \ [E]_\mathcal{D} + [F]_\mathcal{D} = [G]_\mathcal{D} + [H]_\mathcal{D}$$

$$[E \oplus F]_\mathcal{D} = [G \oplus H]_\mathcal{D}$$

Bajo ésta estructura podemos afirmar que $\mathcal{D}(A)$ es un semigrupo abeliano, lo cual lo demostraremos a continuación.

Afirmación. $(\mathcal{D}(A), +)$ es un semigrupo abeliano

Prueba.

- $$\begin{aligned} ([E]_\mathcal{D} + [F]_\mathcal{D}) + [G]_\mathcal{D} &= [E \oplus F]_\mathcal{D} + [G]_\mathcal{D} = [(E \oplus F) \oplus G]_\mathcal{D} \\ &= [E \oplus (F \oplus G)]_\mathcal{D} = [E]_\mathcal{D} + [F \oplus G]_\mathcal{D} \\ &= [E]_\mathcal{D} + ([F]_\mathcal{D} + [G]_\mathcal{D}) \end{aligned}$$

- $[E]_\mathcal{D} + [F]_\mathcal{D} = [E \oplus F]_\mathcal{D} = [F \oplus E]_\mathcal{D} = [F]_\mathcal{D} + [E]_\mathcal{D}$

  Recordar: $E \oplus F \sim_\circ F \oplus E \ \Leftrightarrow \ [E \oplus F]_\mathcal{D} = [F \oplus E]_\mathcal{D}$

Definición 5.2.7.

Para cualquier C^*-álgebra A, definimos el grupo $K_0(A)$ como

$$K_0(A) = \mathcal{G}\big(\mathcal{D}(A)\big)$$

Es decir, el grupo $K_0(A)$ se define como el grupo de Grothendieck del semigrupo $\mathcal{D}(A)$.

Definición 5.2.8. (Equivalencia Estable)

Definamos la relación " $\sim_s$ " sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ de la siguiente forma

Sea $E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

$$E \sim_s F \quad \Leftrightarrow \quad E \oplus R \sim_\circ F \oplus R \quad \text{para algún} \quad R \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

Afirmación.

La relación " $\sim_s$ " es una relación de equivalencia denominada Equivalencia Estable.

En efecto.

a) **Reflexiva**
Se cumple que $E \oplus R \sim_\circ E \oplus R \quad \Leftrightarrow \quad E \sim_s E$

b) **Simétrica**
$E \sim_s F \;\Leftrightarrow\; E \oplus R \sim_\circ F \oplus R$ (Donde $R \in \mathcal{P}_\infty(A)$)

$\Leftrightarrow \; F \oplus R \sim_\circ E \oplus R$

$\Leftrightarrow \; F \sim_s E$

c) **Transitiva**
$E \sim_s F \;\Leftrightarrow\; E \oplus R \sim_\circ F \oplus R \;\wedge\; M \sim_\circ M$

$$\rightarrow (E \oplus R) \oplus M \sim_\circ (F \oplus R) \oplus M$$
$$\rightarrow E \oplus (R \oplus M) \sim_\circ F \oplus (R \oplus M)$$

$F \sim_s Z \;\Leftrightarrow\; F \oplus M \sim_\circ Z \oplus M \;\wedge\; R \sim_\circ R$

$$\rightarrow (F \oplus M) \oplus R \sim_\circ (Z \oplus M) \oplus R$$
$$\rightarrow F \oplus (M \oplus R) \sim_\circ Z \oplus (M \oplus R)$$

Más aún, se cumple

$$R \oplus M \sim_\circ M \oplus R \;\wedge\; F \sim_\circ F \;\rightarrow\; F \oplus (R \oplus M) \sim_\circ F \oplus (M \oplus R)$$

Y también que

$$E \oplus (R \oplus M) \sim_\circ E \oplus (M \oplus R)$$

Finalmente, por transitividad obtenemos:

$\exists\, M \oplus R \in \mathcal{P}_\infty(A)$ donde $E \oplus (M \oplus R) \sim_\circ Z \oplus (M \oplus R) \;\Leftrightarrow\; E \sim_s Z.$

Proposición 5.2.9.

Si $E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$ donde A es una C^*-álgebra unitaria, se cumple que

$$E \sim_s F \iff E \oplus 1_n \sim_\circ F \oplus 1_n \quad para\, algun \;\; n \in \mathbb{N}$$

Donde, 1_n es el elemento neutro multiplicativo (matriz identidad) en $M_n(A)$.

Prueba.

$$E \sim_s F \iff E \oplus R \sim_\circ F \oplus R \quad y \;\; por\; otro\; lado \quad 1_n - R \sim_\circ 1_n - R \;\; \text{donde} \;\; R \in \mathcal{P}_n(A)$$

$$E \oplus 1_n \sim_\circ E \oplus R \oplus (1_n - R) \sim_\circ F \oplus R \oplus (1_n - R) \sim_\circ F \oplus 1_n$$

Definición 5.2.10.

Definamos el morfismo de Grothendieck para representar a los elementos de $\mathcal{D}(A)$ y su respectivo $K_0(A)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{D}(A)} : \quad \boldsymbol{\mathcal{D}(A)} \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{K_0(A) = \mathcal{G}(\mathcal{D}(A))} \\ [E]_{\mathcal{D}(A)} \quad &\longrightarrow \quad \gamma[E]_{\mathcal{D}(A)} = [E]_0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} [-]_0 : \quad \mathcal{P}_\infty(A) \; &\longrightarrow K_0(A) \\ E \quad &\longrightarrow \quad [E]_0 = \gamma([E]_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

Proposición 5.2.11.

Sea A una C^*-álgebra unitaria, entonces

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \{[E]_0 - [F]_0 \;\; donde \;\; E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)\} \\ &= \{\, [E]_0 - [F]_0 \;\; donde \;\; E, F \in \mathcal{P}_n(A), \;\; n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Prueba.

Recordemos que $(\mathcal{D}(A), +)$ es un semigrupo abeliano, más aún, definimos el $K_0(A) = \mathcal{G}(\mathcal{D}(A))$ que consiste en un grupo abeliano.

Ahora, por la Proposición 5.1.3. Podemos definir los elementos de $K_0(A)$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} K_0(A) = \mathcal{G}(\mathcal{D}(A)) &= \{\, \gamma[E]_{\mathcal{D}(A)} - \gamma[F]_{\mathcal{D}(A)} \;\; donde\; [E]_{\mathcal{D}(A)}, [F]_{\mathcal{D}(A)} \in \mathcal{D}(A) \,\} \\ &= \{\, [E]_0 - [F]_0 \;\; donde \;\; E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)\,\} \end{aligned}$$

Ahora, sea $M \in K_0(A)$, entonces

$$M = [E']_{\circ} - [F']_{\circ} \quad \text{donde} \quad E' \in \mathcal{P}_k(A) \;\; \wedge \;\; F' \in \mathcal{P}_l(A) \quad \text{para algún} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

Sea $n = máx\{k, l\}$

Se observa que:

$$E = E'_k \oplus 0_{n-k} \quad \in \mathcal{P}_n(A)$$

$$F = F'_l \oplus 0_{n-l} \quad \in \mathcal{P}_n(A)$$

Más aún, recordemos que

$$E \sim_{\circ} E \oplus 0_n \quad para\ algún \quad n \in \mathbb{N}$$

En nuestro caso tenemos para $n - k,\ n - l \in \mathbb{N}$

$$E'_k \sim_{\circ} E'_k \oplus 0_{n-k} \iff E'_k \sim_{\circ} E \iff E \sim_{\circ} E'_k \iff [E]_{\mathcal{D}(A)} = \left[E'\right]_{\mathcal{D}(A)} \iff [E]_{\circ} = \left[E'\right]_{\circ}$$

$$F'_l \sim_{\circ} F'_l \oplus 0_{n-l} \iff F'_l \sim_{\circ} F \iff F \sim_{\circ} F'_l \iff [F]_{\mathcal{D}(A)} = \left[F'\right]_{\mathcal{D}(A)} \iff [F]_{\circ} = \left[F'\right]_{\circ}$$

Por lo tanto, concluimos

$$M = [E]_{\circ} - [F]_{\circ} \quad \text{donde} \quad E, F \in \mathcal{P}_n(A),\ n \in \mathbb{N}$$

Proposición 5.2.12. (Propiedades del grupo $K_0(A)$)

1. $[E \oplus F]_{\circ} = [E]_{\circ} + [F]_{\circ} \quad \forall\ E, F \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$
2. $[0_A]_{\circ} = 0$, donde 0_A es la proyección cero en A.
3. Si $E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $[E]_{\circ} = [F]_{\circ}$
4. Si E, F son proyecciones mutuamente ortogonales en $\mathcal{P}_n(A)$ entonces
$$[E + F]_{\circ} = [E]_{\circ} + [F]_{\circ}$$
5. $[E]_{\circ} = [F]_{\circ} \iff E \sim_s F \quad \forall\ E, F \in \mathcal{P}_n(A)$.

Prueba.

1. $[E \oplus F]_{\circ} = \gamma[E \oplus F]_{\mathcal{D}(A)} = \gamma\big([E]_{\mathcal{D}(A)} + [F]_{\mathcal{D}(A)}\big)$

$$= \gamma[E]_{\mathcal{D}(A)} + \gamma[F]_{\mathcal{D}(A)}$$

$$= [E]_{\circ} + [F]_{\circ}$$

2. Se sabe que

$$E \sim_\circ E \oplus 0_n \quad para\ algún \quad n \in \mathbb{N}$$

En particular para $E = 0_A$

$$0_A \sim_\circ 0_A \oplus 0_A \iff [0_A \oplus 0_A]_{\mathcal{D}(A)} = [0_A]_{\mathcal{D}(A)}$$

$$\iff [0_A]_{\mathcal{D}(A)} + [0_A]_{\mathcal{D}(A)} = [0_A]_{\mathcal{D}(A)}$$

$$\iff \gamma\big([0_A]_{\mathcal{D}(A)} + [0_A]_{\mathcal{D}(A)}\big) = \gamma[0_A]_{\mathcal{D}(A)}$$

$$\iff \gamma[0_A]_{\mathcal{D}(A)} + \gamma[0_A]_{\mathcal{D}(A)} = \gamma[0_A]_{\mathcal{D}(A)}$$

Concluyendo $[0_A]_\mathrm{o} = 0$.

3. Por la Proposición 2.5.11, obtenemos

$E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(A) \implies E \sim_u F$ en $\mathcal{P}_n(A) \implies E \sim F$ en $\mathcal{P}_n(A)$

Entonces, concluimos que $E \sim_\mathrm{o} F$, es decir

$$[E]_{\mathcal{D}} = [F]_{\mathcal{D}} \implies \gamma[E]_{\mathcal{D}(A)} = \gamma[F]_{\mathcal{D}(A)} \ \ si\ y\ sólo\ si \ \ [E]_\mathrm{o} = [F]_\mathrm{o}$$

4. Observación: E, F son mutuamente ortogonales, si y sólo si $EF = 0$.

Recordemos que, si:

$E, F \in \mathcal{P}_n(A) \ / \ EF = 0 \implies E + F \in \mathcal{P}_n(A) \ \wedge \ E + F \sim_\circ E \oplus F$

Entonces

$$[E + F]_{\mathcal{D}(A)} = [E \oplus F]_{\mathcal{D}(A)} \iff [E + F]_\mathrm{o} = [E \oplus F]_\mathrm{o} = [E]_\mathrm{o} + [F]_\mathrm{o}$$

Por lo tanto $[E + F]_\mathrm{o} = [E]_\mathrm{o} + [F]_\mathrm{o}$

5. $[E]_\mathrm{o} = [F]_\mathrm{o} \iff \gamma[E]_{\mathcal{D}(A)} = \gamma[F]_{\mathcal{D}(A)} \iff [E]_{\mathcal{D}(A)} = [F]_{\mathcal{D}(A)}$

$\iff [E]_{\mathcal{D}(A)} + [R]_{\mathcal{D}(A)} = [F]_{\mathcal{D}(A)} + [R]_{\mathcal{D}(A)}$ para algún $[R]_{\mathcal{D}(A)} \in \mathcal{D}(A)$.

$\iff [E \oplus R]_{\mathcal{D}(A)} = [F \oplus R]_{\mathcal{D}(A)}$

$\iff E \oplus R \sim_\circ F \oplus R$ es decir, $E \sim_s F$.

Proposición 5.2.13.

Sea A una C^*-álgebra con identidad, G un grupo abeliano y una aplicación

v: $\mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow G$ que satisface:

a) $v(E \oplus F) = v(E) + v(F) \quad \forall\ E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$

b) $v(0_A) = 0$

c) Si $E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N} \implies v(E) = v(F)$

Bajo estos argumentos, entonces $\exists!$ Un homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \longrightarrow G$ el cual conmuta en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "v"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

Prueba.

Primeramente probemos que si $E \sim_\circ F$ en $\mathcal{P}_\infty(A) \implies v(E) = v(F)$.

En efecto.

Sea $E \in \mathcal{P}_\infty(A) \quad \longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}\ tal\ que \quad E \in \mathcal{P}_k(A)$

$\quad F \in \mathcal{P}_\infty(A) \quad \longrightarrow \quad \exists l \in \mathbb{N}\ tal\ que \quad F \in \mathcal{P}_l(A)$

Y sea $n = máx\{k, l\}$, entonces podemos observar que

$$E' = E_k \oplus 0_{n-k}\ ,\ F' = F_l \oplus 0_{n-l} \quad \text{pertenecen a } \mathcal{P}_n(A)$$

Más aún, se cumple que

$$E_k \sim_\circ E_k \oplus 0_{n-k} \quad \text{es decir,} \quad E_k \sim_\circ E'$$

Teniendo así:

$E' \sim_\circ E \ \wedge\ F \sim_\circ F'$ y por hipótesis, se concluye $E' \sim_\circ F'$ en $\mathcal{P}_n(A)$.

Ahora, por la Proposición 2.5.14. Obtenemos:

$$E' \sim_\circ F' \text{ en } \mathcal{P}_n(A) \implies \begin{pmatrix} E'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} F'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} \text{ en } M_{2n}(A)$$

$$\begin{pmatrix} E'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} F'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0_{2n} \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0_{2n} \end{pmatrix} \text{ en } M_{4n}(A)$$

Es decir:

$E' \oplus 0_{3n} \sim_h F' \oplus 0_{3n}$ en $\mathcal{P}_{4n}(A)$ entonces, por el inciso (c), de la Proposición 5.2.13. Se obtiene

$$v(E' \oplus 0_{3n}) = v(F' \oplus 0_{3n})$$

Además:

$$v(E) = v(E) + (4n - k)v(0) = v(E_k \oplus 0_{4n-k}) = v(E_k \oplus 0_{n-k} \oplus 0_{3n}) = v(E'_n \oplus 0_{3n})$$

$$= v(F' \oplus 0_{3n}) = v(F)$$

Es decir $v(E) = v(F)$.

Definamos ahora, $\beta : \mathcal{D}(A) \longrightarrow G \;\; / \;\; \beta([E]_D) = v(E)$

Afirmación 1. (β está bien definida)

Sea $[E]_D, [F]_D \in \mathcal{D}(A) \;/\; [E]_D = [F]_D$

$$\Rightarrow E \sim_\circ F \quad \Leftrightarrow \quad v(E) = v(F)$$

Cumpliendo así:

$$\beta([E]_D) = \beta([F]_D)$$

Afirmación 2. (β es aditiva)

$$\beta([E]_D + [F]_D) = \beta([E \oplus F]_D) = v(E \oplus F) = v(E) + v(F) = \beta([E]_D) + \beta([F]_D)$$

Ahora, de la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, existe un único homomorfismo $\alpha : K_0(A) \longrightarrow G$, el cual se observa en que hace conmutar el siguiente gráfico.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(A) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & G \\
K_0(A) \arrow[ur, "\alpha"] & \mathcal{P}_\infty(A) \arrow[l, "{[.]_0}"] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

Es decir: $[\cdot]_0 \alpha = v \;\; \wedge \;\; \alpha\gamma = \beta$

5.3. El Funtor K_0

En ésta sección, veremos que K_0 se puede ver como un funtor covariante de la categoría de los C^*-álgebras a la categoría de grupos abelianos. En la cual relacionará para cada C^*-álgebra, su respectivo grupo abeliano, y más aún para cada *-homomorfismo su respectivo, morfismo. Veamos como llegaremos a este resultado.

Sean A y B dos C^*-álgebras con identidad y $\omega : A \longrightarrow B$ un $*$-$homomorfismo$, el cual lo podemos extender a un *-$homomorfismo$ pero de $M_n(A)$, $M_n(B)$ es decir,
$\omega : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, más aún nos da una aplicación de los elementos proyección $\omega : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow \mathcal{P}_\infty(B)$ donde está definida como:

$$\omega\left[\left(a_{ij}\right)_{ij=1}^{n}\right] = \left[\omega\left(a_{ij}\right)\right]_{ij=1}^{n}$$

Afirmación. $\omega\big(\mathcal{P}_\infty(A)\big) \subset \mathcal{P}_\infty(B)$

En efecto.

Sea $V \in \omega\big(\mathcal{P}_\infty(A)\big)$; entonces, $\exists\, E \in \mathcal{P}_\infty(A)\ /\ V = \omega(E)$

Donde:

$$V^2 = \big(\omega(E)\big)^2 = \omega(E)\omega(E) = \omega(E^2) = \omega(E) = V$$

$$V^* = \big(\omega(E)\big)^* = \omega(E^*) = \omega(E) = V$$

Concluyendo que $V \in \mathcal{P}_\infty(B)$. Es decir, nuestro ω relaciona elementos proyección de una C^*-álgebra a otra.

Ahora si definimos una aplicación de la forma

$$v : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_0(B)\ /\ v(E) = [\omega(E)]_0$$

Se observa que por medio de las propiedades del grupo $K_0(B)$, nuestro v, satisface las condiciones de la Proposición 5.2.13.

En efecto.

a) $v(E \oplus F) = [\omega(E \oplus F)]_0 = [\omega(E) \oplus \omega(F)]_o = [\omega(E)]_0 + [\omega(F)]_0$

$$= v(E) + v(F) \quad \forall\ E, F \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

b) $v(0_A) = [\omega(0_A)]_o = [0_B]_0 = 0$

c) Si $E \sim_h F$ en $\mathcal{P}_n(A) \implies E \sim F$ en $\mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\exists\, v \in A\ /\ E = v^*v\ \wedge\ F = vv^*$$, aplicando ω, obtenemos:

$$\omega(E) = \omega(v^*v) = \big(\omega(v)\big)^*\omega(v)$$

$$\omega(F) = \omega(vv^*) = \omega(v)\big(\omega(v)\big)^*$$

Teniendo así,

$$\exists\ \omega(v) \in B\ \ /\ \ \omega(E) \sim_0 \omega(F)\ \ \Leftrightarrow\ \ [\omega(E)]_0 = [\omega(F)]_0$$

Es decir: $v(E) = v(F)$.

Lo cual de esta manera, se tiene la existencia de un único homomorfismo de grupos $\alpha :\ K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot\,]_0}"'] \arrow[dr, "v"] & \\
K_0(A) \arrow[r, "\alpha = K_0(\omega)"'] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

Denotemos

$$\alpha = K_0(\omega) :\ K_0(A) \longrightarrow K_0(B)\ \ /\ \ K_0(\omega)([E]_0) = [\omega(E)]_0 \text{ donde } E \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

Teniendo así, el siguiente diagrama que conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "{[\cdot\,]_o}"'] \arrow[dr, "v"] & \mathcal{P}_\infty(B) \arrow[d, "{[\cdot\,]_o}"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\omega)"'] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

$$v = [\cdot]_0\omega\ \ \wedge\ \ v = K_0(\omega)[\cdot]_0\ \ \Rightarrow\ \ K_0(\omega)([E]_0) = [\omega(E)]_0$$

Es decir, para cada ω que relaciona un par de C^*-álgebras, existe un $K_0(\omega)$, el cual es un morfismo que relaciona los respectivos grupo abelianos asociados de sus C^*-álgebra.

Nota: Sean A, B dos C^*-álgebras, denotemos por:

- El *-homomorfismo cero de A en B por $0_{A,B} : A \longrightarrow B$.
- El *-homomorfismo identidad, lo denotaremos por $I_A : A \longrightarrow A$.

Veamos ahora, algunas propiedades del funtor K_0

Proposición 5.3.1.

1. Sea A una C^*- álgebra unitaria, se cumple que $K_o(I_A) = I_{K_o(A)}$

2. Si A, B, C son C^*- álgebras y $\delta : A \longrightarrow B$, $\varphi : B \longrightarrow C$ son *-homomorfismos, entonces se cumple.
$$K_o(\varphi\delta) = K_o(\varphi)K_o(\delta)$$

3. $K_o(\{0\}) = \{0\}$

4. Si A, B son C^*- álgebras, se cumple
$$K_o(0_{A,B}) = 0_{K_o(A)K_o(B)}$$

Prueba.

1. $K_o(I_A)[E]_o = [I_A(E)]_o = [E]_o$ donde $E \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

2. Se observa que si $A \xrightarrow{\delta} B \xrightarrow{\varphi} C$, esto nos induce a
$$K_o(A) \xrightarrow{K_o(\delta)} K_o(B) \xrightarrow{K_o(\varphi)} K_o(C)$$
El cual, por composición, $K_o(\varphi)K_o(\delta) : K_o(A) \longrightarrow K_o(C)$ donde
$$K_o(\varphi)K_o(\delta)[E]_o = K_o(\varphi)(K_o(\delta)[E]_o) = K_o(\varphi)([\delta(E)]_o)$$
$$= [\varphi\delta(E)]_o$$
Por otro lado, de $\varphi\delta : A \longrightarrow C$, tenemos
$$K_o(A) \xrightarrow{K_o(\varphi\delta)} K_o(C)$$
En el que se observa
$$K_o(\varphi\delta)[E]_o = [\varphi\delta(E)]_o$$

De ésta forma, se concluye que

$$K_o(\varphi\delta) = K_o(\varphi)K_o(\delta).$$

3. Recordemos que $\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}\big(M_n(A)\big)$ donde A es una C^*- álgebra.

Entonces para $A = \{0\}$

$$\mathcal{P}_n(\{0\}) = \mathcal{P}\big(M_n(\{0\})\big) = \{0_n\}$$

De aquí, se deduce

$$K_o(\{0\}) = \mathcal{G}(\{0\}) = \{0\}.$$

4. Se observa que

$$A \xrightarrow{0_{A,0}} \{0\} \xrightarrow{0_{0,B}} B$$

Y por Funtorialidad

$$K_o(A) \xrightarrow{K_o(0_{A,0})} K_o(\{0\}) = \{0\} \xrightarrow{K_o(0_{0,B})} K_o(B)$$

Y la composición

$$K_o(A) \xrightarrow{K_o(0_{0,B})K_o(0_{A,0})} K_o(B)$$

También se tiene

$$A \xrightarrow{0_{A,B}} B$$

$$K_o(A) \xrightarrow{K_o(0_{A,B})} K_o(B)$$

Lo cual podemos identificarlo como:

$$K_o\big(0_{A,B}\big) = K_o\big(0_{0,B}\big)K_o\big(0_{A,0}\big) = 0_{K_o(A)K_o(B)}$$

Lema 5.3.2.

Sea A y B dos C^*-álgebras con identidad y $\varphi, \omega : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismos mutuamente ortogonales, entonces se tiene que $\varphi + \omega : A \longrightarrow B$, es un *-homomorfismo; y

$$K_0(\varphi + \omega) = K_0(\varphi) + K_0(\omega)$$

Prueba.

Recordemos que φ, ω son mutuamente ortogonales sí: $\varphi(x)\omega(y) = 0,\ \forall x, y \in A$.

- $$\begin{aligned}[\varphi + \omega](xy) &= \varphi(xy) + \omega(xy) = \varphi(x)\varphi(y) + \omega(x)\omega(y) \\ &= \varphi(x)\varphi(y) + \omega(x)\omega(y) + \varphi(x)\omega(y) + \omega(x)\varphi(y) \\ &= \big(\varphi(x) + \omega(x)\big)\big(\varphi(y) + \omega(y)\big) \\ &= [\varphi + \omega](x) + [\varphi + \omega](y)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}[\varphi + \omega](x^*) &= \varphi(x^*) + \omega(x^*) = \big(\varphi(x)\big)^* + \big(\omega(x)\big)^* \\ &= \big(\varphi(x) + \omega(x)\big)^* \\ &= \big([\varphi + \omega](x)\big)^*\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}[\varphi + \omega](1_A).1_B &= [\varphi + \omega](1_A) = [\varphi + \omega](1_A.1_A) \\ &= [\varphi + \omega](1_A).[\varphi + \omega](1_A)\end{aligned}$$

  Entonces $[\varphi + \omega](1_A) = 1_B$.

Denotemos por $\varphi^n, \omega^n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$ a los *-homomorfismo inducidos a partir de φ, ω y más aún éstos, son ortogonales para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

En efecto.

Como $\varphi^n\left[\left(a_{ij}\right)_n\right] = \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]_n$

Se observa que: $\varphi^n\left[\left(a_{ij}\right)_n\right]\omega^n\left[\left(a_{ij}\right)_n\right] = \left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]_n.\left[\varphi\left(a_{ij}\right)\right]_n = \theta_n$

Es decir $\varphi^n \perp \omega^n$.

Recordar que sí, $E \perp F$ entonces $[E+F]_{\text{o}} = [E]_{\text{o}} + [F]_{\text{o}}$ donde $E, F \in \mathcal{P}_n(A)$

$$\begin{aligned} K_{\text{o}}(\varphi^n + \omega^n)[E]_{\text{o}} = [(\varphi^n + \omega^n)(E)]_{\text{o}} &= [\varphi^n(E) + \omega^n(E)]_{\text{o}} \\ &= [\varphi^n(E)]_{\text{o}} + [\omega^n(E)]_{\text{o}} \\ &= K_{\text{o}}(\varphi^n)[E]_{\text{o}} + K_{\text{o}}(\omega^n)[E]_{\text{o}} \\ &= [K_{\text{o}}(\varphi) + K_{\text{o}}(\omega)]([E]_{\text{o}}) \end{aligned}$$

Lo cual se concluye que:

$$K_{\text{o}}(\varphi + \omega) = K_{\text{o}}(\varphi) + K_{\text{o}}(\omega)$$

Nota: Téngase en cuenta que hemos utilizado la misma notación para las dos aplicaciones relacionadas, pero siendo en realidad, aplicaciones diferentes.

5.4. Equivalencia Homotópica sobre C^*-álgebras.

Definición 5.4.1. Sean A, B dos C^*- álgebras con unidad, $\varphi, \delta : A \longrightarrow B$ dos *-homomorfismos. Diremos que φ, δ son homotópicos $(\varphi \sim_h \delta)$ si existe un *-homomorfismo

$$\alpha_t : A \longrightarrow B, \text{ donde } t \in [0,1] \ / \ \alpha_0 = \varphi, \ \alpha_1 = \delta.$$

Definición 5.4.2. Sea A, B dos C^*- álgebras, se dice que son homotópicamente equivalentes si existen *-homomorfismos

$$\alpha : A \longrightarrow B \,, \quad \beta : B \longrightarrow A \ / \ \beta\alpha \sim_h I_A \ \wedge \ \alpha\beta \sim_h I_B.$$

En éste caso lo escribimos como $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} A$ para denotar que es una homotopía (entre A y B).

Proposición 5.4.3. Sea A, B dos C^*- álgebras con identidad.

1. Si $\varphi, \delta : A \longrightarrow B$ dos *-homomorfismos homotópicos entonces

$$K_0(\varphi) = K_0(\delta)$$

2. Si A y B son homotópicamente equivalentes entonces, se cumple

$$K_0(A) \cong K_0(B)$$

Prueba.

1. Como $\varphi \sim_h \delta$ entonces existe un *-homomorfismo continuo

$$h_t : A \longrightarrow B \text{ donde } t \in [0,1]$$

Tal que $h_0(x) = \varphi(x) \wedge h_1(x) = \delta(x)$

Y su extensión

$$h_t : M_n(A) \longrightarrow M_n(B) \text{ donde } p \in \mathcal{P}_n(A)$$

Tal que $h_0(p) = \varphi(p) \wedge h_1(p) = \delta(p)$

Lo cual, por la Proposición 5.2.12.

$$\varphi(p) \sim_h \delta(p) \ en\, \mathcal{P}_n(A) \iff [\varphi(p)]_0 = [\delta(p)]_0 \iff K_0(\varphi)[p]_0 = K_0(\delta)[p]_0$$

Es decir:

$$K_0(\varphi) = K_0(\delta)$$

2. Recordemos que: $A \cong B$ si y solo si, existe $\vartheta : A \longrightarrow B$, $\varphi : B \longrightarrow A$ biyectivos, tal que $\vartheta\varphi = I_B \wedge \varphi\vartheta = I_A$ además $\varphi = \vartheta^{-1}$.

Como $A \sim_h B$ entonces existen $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} A$, tal que $\beta\alpha \sim_h I_A$ y $\alpha\beta \sim_h I_B$ y por la primera parte se obtiene.

$$K_0(\beta\alpha) = K_0(I_A) \implies K_0(\beta)K_0(\alpha) = I_{K_0(A)}$$

$$K_0(\alpha\beta) = K_0(I_B) \implies K_0(\alpha)K_0(\beta) = I_{K_0(B)}$$

Donde se obtiene que, $K_0(\beta) = K_0(\alpha)^{-1}$ y son isomorfismos.

Lema 5.4.4.

Para cada C^*-álgebra unitaria A, la sucesión exacta escindible siguiente

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Induce una sucesión exacta escindible

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(\tilde{A}) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\pi)}{\rightleftarrows}} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Dónde:

$\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{A} \;/\; \lambda(\alpha) = \alpha 1_{\tilde{A}} = (0, \alpha)$ y i, π están definidos como en la sección 2.3.

Prueba.

Recordemos que si $a \in A$, entonces $a \in \widetilde{A}$, visto de la forma $(a, 0) \in \widetilde{A}$.

Denotemos por $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A = (0,1) - (1_A, 0) = (-1_A, 1)$ el cual es un elemento

proyección en $\widetilde{A}$, tal que

$$\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}f = \{\, (a - \alpha 1_A, \alpha) : \; a \in A, \; \alpha \in \mathbb{C}\,\}$$

Y además se observa que: $fa = af = 0$, $\forall a \in A$.

Definamos los *-homomorfismos

- $\mu : \widetilde{A} \longrightarrow A \;/\; \mu(a - \alpha 1_A, \alpha) = \mu(a + \alpha f) = a$
- $\lambda' : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A} \;/\; \lambda'(\alpha) = \alpha f = (-\alpha . 1_A, \alpha)$

Cumpliéndose que:

$$\mu(1_{\widetilde{A}}) = \mu(1_A + f) = 1_A$$

Además:

- $\mu\, i(a) = \mu[(a,0)] = \mu(a + 0f) = a$

$$\Longrightarrow\ \mu\, i = I_A \tag{1}$$

- $\pi\, i(a) = \pi\big(i(a)\big) = \pi[(a.0)] = 0_{\mathbb{C}} \ \ \Longrightarrow\ \ \pi i = 0_{A,\mathbb{C}}$ (2)

- $\pi\lambda(\alpha) = \pi\big(\lambda(\alpha)\big) = \pi(\alpha 1_{\widetilde{A}}) = \pi\big(\alpha(0,1)\big) = \pi\big((0,\alpha)\big) = \alpha = I(\alpha)$

$$\Longrightarrow\ \pi\lambda = I_{\mathbb{C}} \tag{3}$$

- $\left[iu + \lambda^{'}\pi\right](a + \alpha f) = i[\mu(a + \alpha f)] + \lambda^{'}[\pi(a + \alpha f)]$

$$= i(a) + \lambda'[\pi(a - \alpha 1_A, \alpha)] = i(a) + \lambda'(\alpha) = a + \alpha f$$

$$\Longrightarrow\ iu + \lambda'\pi = I_{\widetilde{A}} \tag{4}$$

Se tiene también que $iu \perp \lambda'\pi,$ en efecto:

$$iu(a - \alpha 1_A, \alpha).\lambda'\pi(b - \beta 1_A, \beta) = i(a).\lambda'(\beta) = (a,0)(\beta f) = (a,0)(-\beta 1_A, \beta) = 0$$

Ahora por la Funtorialidad de K_0 se obtiene:

De (1)

$$I_{K_0(A)} = K_0(I_A) = K_0(\mu i) = K_0(\mu)K_0(i)$$

De (2)

$$0_{K_0(A),K_0(\mathbb{C})} = K_0\big(0_{A,\mathbb{C},}\big) = K_0(\pi i) = K_0(\pi)K_0(i)$$

De (3)

$$I_{K_0(\mathbb{C})} = K_0(I_{\mathbb{C}}) = K_0(\pi\lambda) = K_0(\pi)K_0(\lambda)$$

De (4)

$$I_{K_0(\tilde{A})} = K_0(I_{\tilde{A}}) = K_0\big(iu + \lambda^{'}\pi\big) = K_0(iu) + K_0\big(\lambda^{'}\pi\big)$$

$$= K_0(i)K_0(u) + K_0(\lambda')K_0(\pi)$$

De las identidades anteriores, se prueba la exactitud y la escisión de la sucesión.

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(\tilde{A}) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\pi)}{\rightleftarrows}} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Veamos algunos ejemplos usando la teoría dada en éste trabajo, cabe resaltar que podemos encontrar más ejemplos y ejercicios detallados del cálculo del grupo asociado $K_0(A)$ de un C^*-álgebra en los siguientes libros de referencia [3], [10].

Afirmación 5.4.5

$$K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$$

En efecto.

Se prueba que el siguiente morfismo definido es isomorfo

$$\lambda : \mathcal{D}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ \lambda([p]_{\mathcal{D}}) = \dim(p) \quad \text{donde } p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$$

Probemos que λ está bien definida, más aun también se tiene que es aditivo.

$$[p]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}} \quad \text{donde} \quad p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$$

Es decir; $p \in \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) \wedge p \in \mathcal{P}_l(\mathbb{C})$

Y sea $n = máx\{k, l\}$, entonces podemos observar que

$$p' = p_k \oplus 0_{n-k}\,,\ q' = q_l \oplus 0_{n-l} \quad \text{pertenecen a } \mathcal{P}_n(A)$$

Entonces se tiene que

$$\dim(p') = \dim(q') \Leftrightarrow \lambda([p']_{\mathcal{D}}) = \lambda([q']_{\mathcal{D}})$$

Más aún, se tiene que

$$p_k \sim_\circ p_k \oplus 0_{n-k} \quad \text{es decir,} \quad p_k \sim_\circ p' \implies [p]_{\mathcal{D}} = [p']_{\mathcal{D}}$$

$$q_l \sim_\circ q_l \oplus 0_{n-l} \quad \text{es decir,} \quad q_l \sim_\circ q' \implies [q]_{\mathcal{D}} = [q']_{\mathcal{D}}$$

Teniendo así: $\lambda([p]_{\mathcal{D}}) = \lambda([q]_{\mathcal{D}})$

Lo demás es análogo a lo probado anteriormente, de allí se cumple que $\mathcal{D}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{N}$. Es decir que λ es un morfismo aditivo entre semigrupos, ahora por la construcción de Grothendieck, tenemos que existe un morfismo de grupos $\mathcal{G}(\lambda) : \mathcal{G}(\mathcal{D}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{N})$ el cual se prueba que es un isomorfismo, es decir, tenemos que $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Afirmación 5.4.6.

El grupo $K_0\big(M_n(\mathbb{C})\big) \cong \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$

Antes de probar éste isomorfismo, veamos el siguiente enunciado.

Definición 5.4.7.

Definamos $Tr : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ como la traza estandar, dada por

$$Tr\big(a_{ij}\big)_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

En la cual sea p, q proyecciones sobre $M_n(\mathbb{C})$. Más aun los enunciados siguientes son equivalentes.

(i) $p \sim q$
(ii) $Tr(p) = Tr(q)$
(iii) $\dim\big(p(\mathbb{C}^n)\big) = \dim\big(q(\mathbb{C}^n)\big)$

Entonces, sea Tr es la traza estandart sobre $M_n(\mathbb{C})$ entonces, tenemos

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathbb{C}) \arrow[r, "Tr"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ K_0\big(M_n(\mathbb{C})\big) \arrow[r, "K_0(Tr)"] & K_0(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Cabe observar que $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora, sea $K_0(Tr) : K_0\big(M_n(\mathbb{C})\big) \longrightarrow \mathbb{Z}$ probemos que es un isomorfismo.

Sea $g \in K_0\big(M_n(\mathbb{C})\big)$ recordemos que:

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \{\, [p]_0 - [q]_0 \;\; tal\ que\ \ p, q \in \mathcal{P}_\infty(A) \,\} \\ &= \{\, [p]_0 - [q]_0 \;\; tal\ que\ \ p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N} \,\} \end{aligned}$$

Entonces sea $p, q \in \mathcal{P}_k\big(M_n(\mathbb{C})\big) = M_{kn}(\mathbb{C})$ para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $g = [p]_0 - [q]_0$.

Ahora, si $K_0(Tr)(g) = 0$, entonces $K_0(Tr)([p]_o - [q]_o) = 0$

$$[Tr(p)]_o = [Tr(q)]_o$$

Teniendo así:

$$\dim\left(p(\mathbb{C}^{kn})\right) = \dim\left(q(\mathbb{C}^{kn})\right)$$

Y por el enunciado anterior tenemos que:

$p \sim q$, es decir $g = [p]_o - [q]_o = 0$, afirmando así que $K_0(Tr)$ es inyectiva.

Recordando que un subgrupo H de $\mathbb{Z}$ es igual a $\mathbb{Z}$ si y sólo si $1 \in H$, ahora, como $Img\big(K_0(Tr)\big) \leq \mathbb{Z}$ y se observa que $K_0(Tr)([e]_o) = 1$ cuando e es una proyección en $M_n(\mathbb{C})$ con rango unidimensional, luego $Im\big(K_0(Tr)\big) = \mathbb{Z}$ y asi $K_0(Tr)$ es suryectiva.

Definición 5.4.8.

Un espacio de Hausdorff compacto $\mathcal{X}$, es llamado contractible, si para algún $x_0 \in \mathcal{X}$, existe una aplicación continua $\alpha : [0,1] \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que

$$\alpha(1,x) = x \quad \wedge \quad \alpha(0,x) = x_0, \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

Afirmación 5.4.9.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hausdorff compacto, contractible. Entonces $K_0\big(C(\mathcal{X})\big) \cong \mathbb{Z}$.

Prueba.

Como $\mathcal{X}$ es un espacio de Hausdorff compacto contractible, entonces para algún $x_0 \in \mathcal{X}$, existe una aplicación continua $\alpha : [0,1] \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que

$$\alpha(1,x) = x \quad \wedge \quad \alpha(0,x) = x_0, \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

Nuestro objetivo es que tanto $C(\mathcal{X})\ y\ \mathbb{C}$ dos C^*-álgebras, sean homotópicamente equivalentes; es decir, definamos:

$$\varphi : C(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \wedge \quad \psi : \mathbb{C} \longrightarrow C(\mathcal{X}) \ \text{ tal que } \ \varphi(f) = f(x_0) \ \wedge \ \psi(\lambda) = \lambda\, 1_e$$

Donde se observa que:

$$\varphi\psi(\lambda) = \varphi(\lambda\, 1_e) = \lambda\, 1_e(x_0) = 1_{\mathbb{C}}$$

$$\psi\varphi(f) = \psi\big(f(x_0)\big) = f(x_0)1_e = f(x_0)$$

Definamos para cada $t \in [0,1]$ un *-homomorfismo $\varphi_t : C(\mathcal{X}) \longrightarrow C(\mathcal{X})$ tal que

$$\varphi_t(f)(x) = f\big(\alpha(t,x)\big)$$

Es continua para cada $f \in C(\mathcal{X})$. Observándose que:

$$\varphi_0(f)(x) = f\big(\alpha(0,x)\big) = f(x_0) = \psi\varphi(f)$$

$$\varphi_1(f)(x) = f\big(\alpha(1,x)\big) = f(x) = 1_{C(\mathcal{X})}$$

Lo cual nos prueba que $\psi\varphi \sim_h 1_{C(\mathcal{X})}$.

Además, como $\sim_h$ es una relación de equivalencia, se tiene que $1_{\mathbb{C}} \sim_h 1_{\mathbb{C}}$ y como $\varphi\psi = 1_{\mathbb{C}}$, se obtiene así $\varphi\psi \sim_h 1_{\mathbb{C}}$. Así probando que

$$C(\mathcal{X}) \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \mathbb{C} \xrightarrow{\quad\psi\quad} C(\mathcal{X})$$

Es una homotopía (entre $C(\mathcal{X})$ y $\mathbb{C}$).

Ahora, por la proposición 5.4.3. se cumple que $K_0\big(C(\mathcal{X})\big) \cong K_0(\mathbb{C})$, y como se tiene que $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$, se concluye que $K_0\big(C(\mathcal{X})\big) \cong \mathbb{Z}$.

5.5. El funtor K_0 para C^*-álgebras sin unidad

Veamos ahora que pasaría si tuviésemos un C^*-álgebra sin unidad, como lo definimos y más aún llegaremos a la conclusión que su grupo K_0 cumplirá las mismas propiedades como si éste fuera uno con unidad, visto en las sección anterior.

Definición 5.5.1.

Sea A una C^*-álgebra sin unidad y la sucesión exacta escindible

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Dónde: $\pi : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ \pi(a,\alpha) = \alpha$

Definimos el $K_0(A)$ como el núcleo del homomorfismo

$$K_0(\pi) : K_0(\tilde{A}) \longrightarrow K_0(\mathbb{C})$$

Observación 5.5.1.

Recordemos una vez más, si $a \in A$, entonces $a \in \widetilde{A}$, visto de la forma $(a, 0) \in \widetilde{A}$.

$K_0(\tilde{A})$ es un grupo abeliano, más aún, ahora por definición $K_0(A)$ es un subgrupo de $K_0(\tilde{A})$, que también resulta ser abeliano.

Considerando $E \in \mathcal{P}_\infty(A) \subset \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, podemos observar que a partir de:

$$[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(\tilde{A}) \longrightarrow K_0(\tilde{A}), \ \ donde \ \ E \ \longrightarrow [E]_0$$

Se tiene que si $E \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$ entonces $[E]_0$ está en $K_0(\tilde{A})$. Ahora, se observa:

$$K_0(\pi)([E]_0) = [\pi(E)]_0 = 0$$

Resultando así que $[E]_0 \in Ker\big(K_0(\pi)\big) = K_0(A)$

De ésta manera, obtenemos también una aplicación de la forma

$$[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_0(A), \ \ donde \ \ E \ \longrightarrow [E]_0$$

Para cualquier C^*-álgebra A (unitario o no), lo cual nos da una sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(i)} K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Nótese que la aplicación $K_0(A) \longrightarrow K_0(\tilde{A})$ corresponde a $K_0(i)$ cuando A tiene unidad, y es será la aplicación inclusión cuando A no tiene unidad $\left(K_0(A) \xrightarrow{\;i\;} K_0(\tilde{A}) \right)$.

Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un *-homomorfismo de C^*-álgebras sin unidad y $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ su unitización, se tiene el siguiente diagrama que conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \tilde{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "I"] \\
B \arrow[r, "i_B"] & \tilde{B} \arrow[r, "\pi_B"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Conmutatividad de A y $\tilde{A}$

El cual induce por la Funtorialidad de K_0 para C^*-álgebras con unidad el siguiente diagrama, que también conmuta.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "K_0(\varphi)"'] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi_A)"] \arrow[d, "K_0(\tilde{\varphi})"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "I"] \\
K_0(B) \arrow[r, "i_A"] & K_0(\tilde{B}) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"] & K_0(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Conmutatividad de $K_0(A)$ y $K_0(\tilde{A})$

Donde $K_0(\varphi)$ corresponde la restricción del homomorfismo

$K_0(\widetilde{\varphi}) : K_0(\widetilde{A}) \longrightarrow K_0(\widetilde{B})$ sobre el grupo $K_0(A), K_0(B)$.

Téngase en cuenta que si A y B son unitarios, entonces el homomorfismo $K_0(\varphi)$ corresponde al que ya se consideró en la sección anterior. Además que la igualdad

$$K_0(\varphi)([E]_0) = [\varphi(E)]_0 \quad E \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

sigue siendo válida.

Proposición 5.5.2.

1. $K_0(1_A) = 1_{K_0(A)}$ para cada C^*-álgebra A.

2. Sean $\varphi : A \longrightarrow B$, $\omega : B \longrightarrow C$ dos *-homomorfismos entonces $K_0(\omega\varphi) = K_0(\omega)K_0(\varphi)$ donde A, B y C son C^*-álgebra cualquiera.

3. $K_0(\{0\}) = \{0\}$

4. $K_0\left(0_{B,A}\right) = 0_{K_0(B)K_0(A)}$ para cada par de C^*-álgebras A y B.

Prueba.

De forma análoga a la demostración de la Proposición 5.3.1.

Proposición 5.5.3.

Sean A, B dos C^*-álgebras sin unidad

1. Si $\varphi, \omega : A \longrightarrow B$ son *-homomorfismo homotópicos, entonces
$$K_0(\varphi) = K_0(\omega)$$

2. Si A y B son C^*-álgebras homotópicamente equivalentes, entonces
$$K_0(A) \cong K_0(B)$$

Prueba.

1. Como φ, ω son homotópicos, entonces existen extensiones unitales $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\omega}$ sobre $\widetilde{A}$, por lo cual, por la Proposición 5.4.3. se obtiene $K_0(\widetilde{\varphi}) = K_0(\widetilde{\omega})$. Luego $K_0(\varphi) = K_0(\omega)$ los cuales, son las restricciones de éstas aplicaciones a $K_0(A)$.

2. Se prueba por medio de la parte (1) y la Funtorialidad de K_0.

5.6. El grupo K_0 del álgebra de $Cuntz$.

Sea H un espacio de Hilbert (separable) infinito dimensional, una isometría en H, es un operador s en $B(H)$ tal que $s^*s = I_d$

Sea $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ y sea $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de isometrías en H tal que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = I$$

La C^*-subálgebra de $B(H)$ generada por $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ es denotada por

$$C^*(\{s_i\}_{i=1}^{n}) = span\{s_1, \dots, s_n\}$$

Fue probado en [8]. por $Cuntz$ que ésta C^*-álgebra es independiente de la elección de la familia de isometrías; es decir, si $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ es otro conjunto de isometrías que satisface $\sum_{i=1}^{n} t_i t_i^* = I$, entonces existe un *-isomorfismo

$$\varphi: \ C^*(\{s_i\}_{i=1}^{n}) \ \longrightarrow \ C^*(\{t_i\}_{i=1}^{n}) \quad \text{tal que} \quad \varphi(s_i) = t_i \text{ , } \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Es decir:

$$C^*(\{s_i\}_{i=1}^{n}) \cong C^*(\{\hat{s}_i\}_{i=1}^{n})$$

Denotamos por $\mathcal{O}_n$ al C^*-álgebra generada por "n" isometrías $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = I$ y $s_i^* s_i = I_d$ para cada $i = \{1,2, \dots n\}$. El C^*-álgebra $\mathcal{O}_n$ se llama el álgebra de $Cuntz$.

Nótese que:

$$s_i^* s_j = \delta_{ij} I, \text{ donde } i, j \in \{1,2, \dots n\}$$

Es decir:

$$s_i^* s_i = I \quad \wedge \quad s_i^* s_j = 0, \quad i \neq j$$

A continuación consideremos algunos resultados que $Cuntz$ muestra en su artículo [6]. *K-theory for Certain C^*-álgebras* y [8]. *Simple C^*Algebras Generated by Isomtries*.

Definición 5.6.1.

Sea A una C^*-álgebra, se dice que $s \in A$ es una isometría si se cumple que $s^*s = 1_A$, donde 1_A es el elemento identidad en A.

Ahora veamos el siguiente resultado el cual es válido para cualquier C^*-álgebra.

Proposición 5.6.2.

Sea A un C^*-álgebra y "s" una isometría en A. La aplicación

$$\mu \,: A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow sas^*$$

Es un endomorfismo de A, es decir un $*$-homomorfismo de A en sí mismo.

Además $K_0(\mu) = I_d$, donde I_d es el homomorfismo identidad de $K_0(A)$ en $K_0(A)$.

Prueba:

Se prueba que μ es un endomorfismo en A. Por otra parte, para $m \in \mathbb{N}$ fijo, definamos

$$\mu_m : \quad M_n(A) \longrightarrow M_n(A)$$
$$a = (a_{ij}) \longrightarrow \big(\mu(a_{ij})\big)$$

Dónde:

$$s_m = \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}$$

Nótese que $\mu_m(a) = s_m a s_m^*$ y que μ_m es un endomorfismo en $M_n(A)$.

Extendamos μ sobre los elementos de $\mathcal{P}_\infty(A)$ de la siguiente manera. Para $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathcal{P}_m(A)$. Definámoslo como $\mu(p) := \mu_m(p)$.

Claramente $\mu(p) \in \mathcal{P}_\infty(A)$ pues μ_m es un $*$-homomorfismo.

Sea $r = s_m(p)$, entonces

$$r^*r = p^* s_m^* s_m p = p^*p = p$$

$$rr^* = s_m p p^* s_m^* = s_m p s_m^* = \mu(p)$$

Es decir que $p \sim_0 \mu(p)$, por lo tanto $[p]_0 = [\mu(p)]_0$.

Como $K_0(\mu)[p]_0 = [\mu(p)]_0 \implies K_0(\mu)[p]_0 = [p]_0 \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Ahora como:

$$K_0(A) = \{\, [p]_0 - [q]_0 \ \ tal\ que\ \ p, q \in \mathcal{P}_\infty(A) \,\}$$

Entonces, se tiene que

$$K_0(\mu)(g) = g\,, \quad \forall g \in K_0(A).$$

Proposición 5.6.3.

Sea $\lambda : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ dado por:

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^*$$

Entonces λ es un endomorfismo en $\mathcal{O}_n$ y más aun

$$K_0(\varphi) : \ K_0(\mathcal{O}_n) \ \rightarrow \ K_0(\mathcal{O}_n) \quad / \quad K_0(\lambda)(g) = ng, \ \ \forall \, g \in K_0(\mathcal{O}_n).$$

Prueba

Para cada $j \in \{1,2 \ldots n\}$, la función

$$\lambda_j : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$$

$$x \longrightarrow s_j x s_j^*$$

Es un endomorfismo, y por la Proposición anterior, se tiene que $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ también es un endomorfismo.

Ahora, para $i \neq j$, se tiene

$$\lambda_j(x)\lambda_i(x) = s_j x\left(s_j^* s_i\right) x s_i^* = 0 \, , \quad \forall \, x \in \mathcal{O}_n.$$

Extendamos λ y λ_j donde $j \in \{1,2 \ldots n\}$, sobre $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{O}_n)$

Para cada $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O}_n)$, $\{\lambda_1(E), \, \lambda_2(E), \ldots, \lambda_n(E)\}$ es un conjunto de proyecciones ortogonales a pares.

Así, por la Proposición 5.2.12. Se tiene

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(E)\right]_0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j(E)\right]_0$$

Luego

$$K_0(\lambda)([E]_0) = \sum_{j=1}^{n} K_0(\lambda)[E]_0$$

Finalmente, por la proposición anterior, se tiene que

$$K_0(\lambda)[E]_0 = n[E]_0$$

Proposición 5.6.4.

Sea $\psi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ un $*$-homomorfismo que preserva la identidad, entonces existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$ tal que $\psi(s_i) = Us_i$ para cada $i = 1,2,\dots,n$.

Prueba.

Definamos

$$U = \sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*$$

Donde se observa que:

$$UU^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \psi(s_j)s_j^*\right)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{**}\psi(s_j^*)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\psi(s_j^*)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*s_j\psi(s_j^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)\psi(s_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \psi(s_i^*s_i) = I$$

También se tiene que $U^*U = I$.

Ahora, para cada $j \in \{1,2,\dots n\}$

$$Us_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*\right)s_j = \sum_{i=1}^{n} \psi(s_i)s_i^*s_j = \psi(s_j)s_j^*s_j = \psi(s_j)$$

Es decir:

$$\psi(s_i) = Us_i$$

Proposición 5.6.5.

Sea $\alpha : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ una aplicación dada por

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^*$$

Entonces α es un endomorfismo en $\mathcal{O}_n$ más aún $K_0(\alpha) : K_0(\mathcal{O}_n) \longrightarrow K_0(\mathcal{O}_n)$

Es el homomorfismo identidad; es decir

$$K_0(\alpha) = 1_{K_0(\mathcal{O}_n)} \quad \text{Donde} \quad K_0(\alpha)(g) = g \quad \forall\, g \in K_0(\mathcal{O}_n).$$

Proposición 5.6.6.

El grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ es abeliano, más aun es de orden $(n-1)$

Prueba.

Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo. Y sea $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$, entonces de las proposiciones anteriores, se tiene que:

$$ng = g \quad \text{para todo} \quad g \in K_0(\mathcal{O}_n) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)g = 0$$

Más aun, se observa también que:

$$[I]_0 = \left[\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^*\right]_0 = \sum_{i=1}^{n} [s_i s_i^*]_0 = \sum_{i=1}^{n} [I]_0 = n[I]_0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)[I]_0 = 0$$

Ahora, como caso particular para $n = 2$; se tiene $g = 0$, $\forall\, g \in K_0(\mathcal{O}_2)$

Es decir: $K_0(\mathcal{O}_2) = 0$.

Observación 5.6.7.

Consideremos el álgebra $\mathcal{O}_{n+1} = C^*(E_1, \dots, E_{n+1})$ generada por las isometrías $\{E_j\}_{j=1}^{n+1}$, y sea $A = C^*(E_1, \dots, E_n)$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{O}_{n+1}$, y el ideal

$$\mathcal{J} = C^*(E_{n+1}E_{n+1}^*) = C^*\left(I - \sum_{j=1}^{n} E_j E_j^*\right)$$

Ahora, sea $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{\mathcal{J}}$ la proyección canónica $(\pi(E_k) = E_k + J = s_k)$ $k = 1,2, \dots, n$.

Así, cada s_k es una isometría en el cociente: $\frac{C^*(E_1,\dots,E_n)}{\mathcal{J}}$, además:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j s_j^* = \pi(E_{n+1}E_{n+1}^*) + \sum_{j=1}^{n} s_j s_j^* = \left(I - \sum_{j=1}^{n} s_j s_j^*\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} s_j s_j^*\right) = I$$

Entonces: $\frac{A}{\mathcal{J}} \cong \mathcal{O}_n$

Denotaremos $\pi : A \longrightarrow \mathcal{O}_n \;/\; \pi(E_j) = s_j$, $\forall\, j = 1,2, \dots, n$

Ahora, para cada elemento $k \in \{1,2, \dots, n+1\}$

Consideremos

$$\alpha_k : \mathcal{O}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{n+1} \;/\; \alpha_k(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{k} E_j x E_j^*$$

Y además sea $B \subset \mathcal{O}_{n+1}$ la menor C^*-álgebra que contiene a A tal que $\alpha_{n+1}(A) \subset B$.

Proposición 5.6.8.

Consideremos el *-homomorfismo restringido $\alpha_{n+1} : A \longrightarrow B$, entonces para

$$K_0(\alpha_{n+1}) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$$

Se verifica

$$K_0(\alpha_{n+1})([g]_0) = [g]_0 , \quad g \in A \subset B$$

Observación 5.6.9.

- Sea la aplicación $\gamma : B \longrightarrow B$ dada como $\gamma(x) = E_{n+1}xE_{n+1}^*$

  Entonces, si $x \in B$, $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(x) + \gamma(x)$

  Como

$$\left(\sum_{j=1}^{n} E_j x E_j^*\right)\gamma(x) = \gamma(x)\left(\sum_{j=1}^{n} E_j x E_j^*\right) = 0$$

  De donde:

$$K_0(\alpha_{n+1})([g]_0) = [\alpha_{n+1}(g)]_0 = [\alpha_n(g)]_0 + K_0(\gamma)[g]_0 = n[g]_0 + K_0(\gamma)([g]_0)$$

  Ahora, por la proposición anterior, se tiene

$$[g]_0 = n[g]_0 + K_0(\gamma)([g]_0) \text{ en } K_0(B), \ \forall g \in \mathcal{P}(A).$$

- De otro lado, sea $\mathcal{J}'$ otro ideal bilatero cerrado de B, generado por $E_{n+1}AE_{n+1}^*$; es decir $\mathcal{J}' = span\{E_{n+1}AE_{n+1}^*\}$,

  Observe que: $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ y $A \nsubseteq \mathcal{J}'$ pues si $m \in (A - \mathcal{J})$ con $m \in \mathcal{J}'$ entonces $m = 0$

  Puesto que $E_{n+1}E_jE_{n+1}^* = 0$, para cada $j \in \{1,2,\dots,n\}$

  Luego $\mathcal{J}'$ es un ideal propio de B; en consecuencia

$$\frac{B}{\mathcal{J}'} \cong \frac{A}{\mathcal{J}} \cong \mathcal{O}_n$$

Sea $j : A \hookrightarrow B$ la aplicación inclusión entonces se obtiene el diagrama que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & \mathcal{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "j"] & \mathcal{O}_n \arrow[d, equal] \\
\mathcal{J}' \arrow[r, hook, "i'"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\pi'"] & \mathcal{O}_n
\end{tikzcd}$$

Induce el diagrama que también conmuta

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{J}) \arrow[r, "K_0(i)"] \arrow[d] & K_0(\mathcal{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(j)"] & K_0(\mathcal{O}_n) \arrow[d, equal] \\
K_0(\mathcal{J}') \arrow[r, "K_0(i')"] & K_0(\mathcal{B}) \arrow[r, "K_0(\pi')"] & K_0(\mathcal{O}_n)
\end{tikzcd}$$

Proposición 5.6.10.

Para cada elemento $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $g = t[I]_0$. Es decir $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}[I]_0$

Prueba.

Del diagrama anterior se tiene que $K_0(\pi) = K_0(\pi')K_0(j)$, además obsérvese que si $K_0(\pi)([E]_0) \neq 0$ entonces $K_0(j)([E]_0) \neq 0$

Entonces, a partir de

$$[E]_0 = n[E]_0 + K_0(\gamma)(E_0) \text{ en } K_0(B), \ \forall g \in \mathcal{P}(A).$$

Se tiene que:

$$K_0(j)([E]_0) = nK_0(j)([E]_0) + K_0(\gamma)K_0(j)([E]_0) \neq nK_0(j)([E]_0)$$

Por tanto:

$$[E]_0 \neq n[E]_0 \text{ en } K_0(A). \text{ Es decir, } K_0(\pi)([E]_0) \neq 0 \implies [E]_0 \neq n[E]_0$$

De igual forma, se tiene:

$$K_0(j)([I]_0) = nK_0(j)([I]_0) + K_0(\gamma)K_0(j)([I]_0)$$

$$= nK_0(j)([I]_0) + K_0(j)([s_{n+1}s_{n+1}^*]_0)$$

$$= K_0(j)(n[I]_0 + [s_{n+1}s_{n+1}^*]_0\ )$$

Entonces

$$n[I]_0 = [I]_0 - [s_{n+1}s_{n+1}^*]_0$$

Ahora, como $\mathcal{J} = span\{s_{n+1}s_{n+1}^*\}$

Entonces, se tiene que $r = [s_{n+1}s_{n+1}^*]_0$ genera a $K_0(i)\big(K_0(\mathcal{J})\big)$ es decir; $K_0(\pi) = \mathbb{Z}.\mathrm{r}$

Luego para cada elemento $g \in K_0(A)$

Existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(n-1)g = t.r$$

De aquí y de la igualdad

$$n[I]_0 = [I]_0 - [s_{n+1}s_{n+1}^*]_0$$

se obtiene:

$$n(g + t[I]_0) = g + tr + t[I]_0 - tr = g + t[I]_0$$

En ésta última igualdad, se tiene que

$$K_0(\pi)(g) = -tK_0(\pi)([I]_0) = -t[I]_0 \text{ en } K_0(\mathcal{O}_n)$$

A través de éstos resultados, se observa que el orden de $[I]_0$ es $n-1$ y que el orden de cada $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ es a lo más $n-1$, además por lo visto anteriormente se tiene que cada $g \in K_0(\mathcal{O}_n)$ es múltiplo de $[I]_0$. Así concluyendo que el orden del grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ es $n-1$.

En [8]. $Cuntz$ demuestra a partir de esto, que el grupo $K_0(\mathcal{O}_n)$ $es\ isomorfo\ a\ \mathbb{Z}_{n-1}$.

Capítulo 6

Discusión de resultados

- Se observa que gracias a la Construcción de Grothendieck podemos asociar nuestro $C*$-álgebra a un grupo abeliano, el cual está basado en los elementos de tipo $\mathcal{P}_\infty(A)$.

- Cuando nuestro C^*-álgebra de Banach, no posea elemento identidad, a través del proceso de unitización podemos sumergirlo dentro de uno, de tal forma que el proceso para caracterizar los K_0 sea similar a lo demostrado.

- La propiedad de Invarianza homotópica de K_0 para $C*$-álgebras en la cual relacionamos operaciones homotópicas tanto entre $C*$-álgebras y *-homomorfismos, pueden aplicarse tanto para $C*$-álgebras con unidad o sin unidad.

- El estudio de la K-teoría es muy extensa, ya que por otro lado podemos ver a toda C^*-álgebra como una C^*-subálgebra de algún $B(H)$ donde H es un espacio de $Hilbert$ esto se debe al Teorema de Gelfand-Naimark. Esto nos abre el camino al llamado cálculo funcional, que es una herramienta útil para el análisis de C^*-álgebras no abelianas.

Capítulo 7

Conclusiones

- Sea A una $C*$-álgebra unital, el grupo $K_0(A)$ se define y/o se construye como el grupo de $Grothendieck$ del semigrupo $\mathcal{D}(A)$, es decir:

$$K_0(A) = \mathcal{G}(\mathcal{D}(A))$$

- Se observa que K_0 es un funtor covariante, dela categoría de $C*$-álgebras unitales con *-morfismos (no necesariamente unitales) a la categoría de grupos abelianos.

- Sean A y B dos $C*$-álgebras con identidad (también puede ser no unitaria) si estos cumple la propiedad de ser homotópicamente equivalentes, entonces podemos concluir que:

$$K_0(A) \cong K_0(B)$$

- La información de un $C*$-álgebra A; se puede obtener a partir de su grupo asociado $K_0(A)$.

Capítulo 8

Recomendaciones

- Para un mejor entendimiento de la $K\text{-}teoría$ se recomienda ver $[10]$ y con respecto al cálculo del algebra de Cuntz se sugiere ver $[8]$, $[6]$ o trabajos asociados a este.

- Sería recomendable llegar a la construcción del grupo abeliano $K_1(A)$ asociado a una C^*-algebra, del álgebra de Toeplitz y de la Circunferencia Esférica.

- Así como a partir de $\mathcal{P}_\infty(A)$ pudimos formar el grupo abeliano $K_0(A)$ y analizar sus diversas propiedades, de la misma manera a partir de $\mathcal{U}_\infty(A)$ el cuál es la unión disjunta infinita de las matrices cuadradas de elementos unitarios de A, podemos formar el grupo abeliano $K_1(A)$ asociado a esta $C*$-álgebra.

Capítulo 9

Bibliografía

[1]. Murphy G.J. C^*-algebras and operator theory (studies in Advance Mathematics) CRC Press, Florida, (1993).

[2]. Kosniowski C. Topología Algebraica, editorial Reverté (1986).

[3]. Mendoza W. K-teoría de C^*-álgebras. Tesis de Maestría (2014).

[4]. Kolmogorov, A. y Fomin, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional*. MIR, 1975.

[5]. Segal, I. Irreductible representations of Operator algebra. Bull. Am., Math. Suc 53 (1947) 73-88.

[6]. Cuntz J. K-Theory for Certain C^*-algebras Ann. Math, N°113 (1981) 181-197.

[7]. Cuntz J. Murray-Von Neumann equivalence of proyections in infinite simple C^*algebra Rev. roum Math. Pures at Appl. N°23 (1978) 1011-1014.

[8]. Cuntz J. Simple C^*-algebras Generated by Isometrias. Commum. Math. Phy1 N°5781977 173-185

[9]. Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[10]. M. Rϕrdam, F. Larsen, M. Lanstren. An introduction to K-theory for C^*-algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[11]. B. Blackadar, A simple unital proyectionless C^*-algebra,J. Operator Theory (1981)

[12]. Lecture Notes on C^*-Algebras and K-Theory. N.P. Landsman

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de Consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
¿Será posible asociar a un C^*-álgebra "A" un grupo abeliano?	**Objetivo general** Determinar la estructura del grupo abeliano $K_0(A)$, asociado a un C^*-álgebra "A". Mostrar algunas aplicaciones de la K-teoría del funtor "K_0". **Objetivo específico** Estudiar detalladamente el grupo $K_0(A)$, vía la K-teoría algebraica. Calcular el grupo $K_0(A)$, para C^*-álgebras específicas.	**Hipótesis general** Basado en un C^*-álgebra "A", y considerando parcialmente su K-teoría algebraica (el funto K_0), logramos estudiar el grupo asociado a "A" mediante dicho funtor. **Hipótesis especifica** Basado parcialmente en la K-teoría algebraica (funtor K_0) para C^*álgebras logramos estudiar detalladamente el grupo asociado $K_0(A)$. Basado en el estudio del grupo asociado $K_0(A)$, calculamos la K-teoría para algebras específicas.	**Tipo de investigación** La investigación es de tipo científico: Teórico-constructivo y la metodología usada es de tipo inductivo – deductivo, tratando de ser lo más exhaustivo posible en la demostración de las proposiciones, teoremas, etc. **Diseño de la investigación** Para el desarrollo del trabajo propuesto usaremos el material bibliográfico siguiente [3], [5], [6] y [8]. Conociendo la teoría de C^*-álgebras y la noción de funtores pasamos a estudiar el grupo abeliano $K_0(A)$, para un C^*-álgebra "A" arbitraria. Finalmente se determina el grupo asociado para C^*-álgebras especiales.	Por la naturaleza del trabajo de ser abstracto, no hay población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de dos áreas de la matemática; la Topología y el Algebra.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo