# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

## FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

### ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# “ANÁLISIS Y SOLUCIÓN A UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL MEDIANTE EL DUAL LAGRANGIANO”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

MARIELA NOEMÍ ROJAS POLINO

Callao, 2019

PERÚ

**HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN**

ANÁLISIS Y SOLUCIÓN A UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL MEDIANTE EL DUAL LAGRANGIANO

Mariela Noemí Rojas Polino

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Walter Flores Vega

Presidente

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Vocal

Lic. Elmer Alberto León Zárate

Secretario

Dr. Pedro Canales García

Asesor

Callao-Perú-2019

## DEDICATORIA

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación y en mi vida; a Osmar por su apoyo incondicional. Todo este trabajo está dedicado a ellos.

# AGRADECIMIENTO

A los docentes del ciclo de tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por su valiosa enseñanza y permanente orientación.

Al Dr. Pedro Canales García, por su asesoramiento en la realización de la presente investigación.

A los miembros del Jurado Evaluador de la presente tesis, por sus oportunas observaciones que permitieron mejorar la elaboración del informe final.

A Osmar Bermeo por ser mi brazo derecho, siempre darme la fortaleza de realizar la presente investigación.

Asimismo, mi reconocimiento a todas mis amistades de la universidad y de mi centro de labores que colaboraron de una u otra manera en la ejecución de esta investigación.

## Tabla de figuras

# RESUMEN

ANÁLISIS Y SOLUCIÓN A UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL MEDIANTE EL DUAL LAGRANGIANO

MARIELA NOEMÍ ROJAS POLINO

Asesor: Dr. Pedro Canales García

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

---

La presente investigación tiene como título, análisis y solución a un problema de programación no lineal mediante el dual lagrangiano, donde, se busca analizar bajo ciertas condiciones necesarias y condiciones suficientes de optimalidad al problema de programación no lineal que se define como un problema primal, vinculado estrechamente a otro problema de programación no lineal que se definirá como el problema dual lagrangiano, éste problema tiene a las restricciones de igualdad y desigualdad incorporadas en la función objetivo, usando los multiplicadores de lagrange, para tal efecto revisamos definiciones de diferenciabilidad, elementos del análisis convexo, definición del problema dual, propiedades de la función dual teoremas de dualidad , dirección de paso ascendente, búsqueda lineal, método de plano de corte y finalmente presentaremos la resolución de problema de programación no lineal, mediante el dual lagrangeano usando el método plano corte.

**ABSTRACT**

ANALYSIS AND SOLUTION TO A PROBLEM OF NONLINEAR PROGRAMMING BY MEANS OF THE LAGRANGIAN DUAL

MARIELA NOEMÍ ROJAS POLINO

Assessor: Dr. Pedro Canales Garcia

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

---

The present investigation has as title, analysis and solution to a problem of nonlinear programming by means of the Lagrangian dual, where, it is looked for to analyze under certain necessary conditions and sufficient conditions of optimality to the problem of nonlinear programming that is defined as a primal problem, closely linked to another non-linear programming problem that will be defined as the Lagrangian dual problem, this problem has the equality and inequality constraints incorporated in the objective function, using lagrange multipliers, for this purpose we review definitions of differentiability, elements of the convex analysis, dual problem definition, dual function properties duality theorems, ascending step direction, linear search, cut plane method and finally we will present the non-linear programming problem resolution, by means of the Lagrangean dual using the flat method cut.

# INTRODUCCIÓN

La presente investigación se refiere a la optimización para un problema de programación no lineal diferenciable con restricciones, se busca analizar bajo ciertas condiciones de convexidad, al problema de programación no lineal que se define como un problema primal, vinculado estrechamente a otro problema de programación no lineal que se definirá como el problema dual lagrangiano, éste problema tiene a las restricciones de igualdad y desigualdad incorporadas en la función objetivo, usando los multiplicadores de lagrange. Las condiciones necesarias y suficientes son los que definen a los multiplicadores de lagrange, que forma la base del desarrollo y el análisis al algoritmo para resolver el problema a optimizar. Al resolver el problema dual lagrangiano se resuelve indirectamente el problema primal.

La característica principal de este tipo de problema no lineal es la dificultad de resolverlo debido a no encontrar muchos algoritmos de solución.

Para analizar esta problemática se describe el problema de programación no lineal y además se revisarán algunos conceptos importantes que permiten formular el problema a estudiar. Por otro lado en necesario mencionar las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker para problemas convexos, que en efecto los problemas convexos que tienen la peculiaridad de que la condición necesaria de existencia de solución dada por el Teorema de Karush-Kuhn-Tucker es también condición suficiente, por ello que la teoría de la convexidad es una herramienta que permite sentar las bases para un importante proceso matemático conocido como programación convexa, asimismo en optimización, tanto lineal como no lineal, para determinar el óptimo es fundamental estudiar el problema dual lagrangeano de una problema primal, donde la dualidad tiene como finalidad encontrar información y solución al problema primal, bajo condiciones de diferenciabilidad y convexidad. Para determinar la solución del problema de optimización no lineal, aplicaremos el método de plano de corte o linealización exterior al problema dual lagrangeano. Este método consiste en cortar la región factible con hiperplanos, de manera que se pueda hallar la solución dentro de la nueva región factible. Los hiperplanos usados para este proceso son llamados planos de corte. En el proceso de obtener la solución óptima es necesario considerar la técnica de la búsqueda lineal a partir de una dirección elegida de forma adecuada dependiendo del problema de optimización.

# CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Descripción de la realidad problemática

Se ha visto problemas de programación lineal los cuales son muy comunes y cubren un amplio rango de aplicaciones, en la vida real. Sin embargo, uno se tiene que enfrentar con cierta frecuencia a otro tipo de problemas que no son lineales. Si el conjunto de restricciones, la función objetivo, o ambos, son no lineales, entonces nos enfrentamos a un problema de programación no lineal.

El objeto de la programación no lineal es optimizar es decir minimizar o maximizar una función objetivo, sujeta a una serie de restricciones en los que una o más de las variables incluidas es no lineal y para encontrar la solución del problema de programación no lineal, llamado problema primal, lo haremos indirectamente resolviendo el problema el dual lagrangiano.

## 1.2 Formulación del problema

**Problema general:**

¿Es posible resolver un problema primal mediante el dual lagrangiano?

**Problema específico:**

¿Será posible realizar el método de plano de corte en la función dual lagrangiano?

¿Será posible realizar la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano?

## 1.3 Objetivos de la investigación

**Objetivo general:**

Resolver un problema primal mediante el dual lagrangiano.

**Objetivos específicos:**

Realizar el método plano de corte en la función dual lagrangiano.

Realizar la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano.

## 1.4 Limitaciones

**Teórico:**

Si bien se sabe que hoy se tiene la información de manera abundante por medio del internet, no siempre se puede contar con los mejores manuales o tratados sobre el tema desarrollado, surgiendo la necesidad de comprar libros o visitar a bibliotecas especializadas.

**Temporal:**

El estudio de la investigación tuvo una duración de 6 meses.

**Espacial:**

Según Gómez (2012) dice que según Alrafo (2012) la delimitación espacial o geográfica es necesario especificar el área o lugar geométrico en el que se llevara a cabo la investigación, de limitando espacio institucional, colonia, ciudad, municipio, estado, región, país.

En la presente investigación no presenta un lugar de estudio físico, por ser un tema de estudio teórico.

# CAPITULO II: MARCO TEORICO

## 2.1 Antecedentes

### 2.1.1 Antecedente internacional

Cantur, R. (1996) en su tesis titulado programación no lineal para obtener el grado de maestro en la Universidad Autónoma de nuevo león, tiene por objetivo didáctico sobre los conceptos de programación no lineal, su contenido está contemplado hacia la investigación y/o docencia referente al área de investigación de operaciones, su metodología de la tesis es en desarrollar bases técnicas de los algoritmos y modelos no lineales, concluye que la programación no lineal es limitante, es decir, no existe un algoritmo único para cualquier problema no lineal; muchos requieren de un software tal como el paquete GINO aunque el error es permisible.

Leañez, F. (2013) en su tesis titulada estudio comparativo de la relajación Lagrangeana y la programación entera –mixta en el problema del pre-despacho de sistemas medianos para optar al grado de magister en CS. De la Ingeniería en la Universidad de Chile, tuvo como objetivo realizar comparaciones prácticas basadas en el método branch-and-bound en optimizadores y el método por relajación lagrangeana, y su metodología fue comparativa las cuales fueron históricas, sintético-aleatorias y practico. Concluye que, usando el método de Programación entera-mixta y la relajación lagrangeana se pudo resolver el problema del pre despacho.

Martínez, J. (2017) en su trabajo de fin de grado en matemática titulado Una generalización del Teorema de los multiplicadores de Langrange: condiciones de Karush-Kuhn-Tucker en programación no lineal; tiene por objetivo impulsar la investigación en un contexto histórica e informativo acerca de los conocimientos previos de los multiplicadores de Lagrange, los orígenes histórica de la programación no lineal y terminando con la demostración del teorema de Karush- Kuhn-Tucker. Su nivel y tipo de investigación es descriptiva, científico-básica.

### 2.1.2 Antecedente nacional

Espejo, J. (2017) en su tesis titulado Análisis de componentes principales vs método del gradiente proyectado para optar el título profesional de licenciado en matemática en la Universidad Nacional de Ingeniería. Su metodología es sobre el análisis de componentes principales (ACP) que es una técnica de análisis exploratorio de datos; que consiste en buscar ejes sobre la varianza de las proyecciones de una nube de puntos sea máxima. Su objetivo es encontrar una recta o un plano que se aproxime a un conjunto finito de puntos, con ayuda de la optimización, las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker se da la solución al problema; con ello nos permite desarrollar el método del gradiente proyectado.

## 2.2 Marco

### 2.2.1 Teórico

Según Javier Martínez (2017) concluyó: El teorema de Karush- Kuhn-Tucker es el primer y principal resultado de toda una teoría que se desarrolló y dió lugar a la programación no lineal. Cuando Kuhn-Tucker demostraron su teorema lanzaron la teoría de la programación no lineal. Sin embargo, en cierto modo este teorema ya había sido demostrado antes en 1939 por William Karush en su tesis de máster que no fue publicada en su día. [p. 33, 9]

Lagrange estudió derecho en el College of Turin y en un principio no estaba fascinado en matemáticas, su interés se inició al leer una copia de un trabajo de E. Halley de 1693, fue tanto su interés que Lagrange decidió estudiar matemáticas por su cuenta; comenzó a estudiar profundamente la curva tautócrona. A finales del año 1754, hizo importantes descubrimientos sobre esta curva, los cuales contribuyeron a una nueva área llamada: el cálculo de variaciones. [p. 20, 9]

#### 2.2.1.1 Problema Primal

Según Cantu, (1996) definió: Considera como tal al conjunto de métodos utilizados para optimizar una función objetivo, sujeta a una serie de restricciones en los que una o más de una variables incluidas es no lineal.

Considera el siguiente problema de programación no lineal.

$$\begin{aligned} &Minimizar\ \ f(x) \\ &sujeta\ a\quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ &\qquad\qquad\ \ h_j(x) = 0 \quad j = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

Donde $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$. $h_1,\ h_2, \ldots\ , h_l$ son funciones definidas en $E_n$, el espacio euclidiano de n dimensiones, $X$ es un subconjunto de $E_n$ y $x$ es un vector de componentes $x_1, x_2, \ldots\ , x_n$.

El problema anterior puede ser resuelto para los valores de las variables $x_1, x_2, \ldots\ , x_n$. que satisfacen las restricciones y que minimicen la función f.

La función f es llamada usualmente la función objetivo o la función criterio. Cada una de las restricciones $g_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots\ , m$ es llamada restricción de desigualdad y cada una de las restricciones $h_j(x)$ para $j = 1, 2, \ldots\ , l$ es llamada restricción de igualdad. Un vector $\bar{x}$ que satisface todas las restricciones es llamado una solución factible al problema. [p.7, 3]

Presentamos el problema de programación no lineal, el cual llamaremos como el problema primal, descrito de la siguiente forma:

$$Minimizar \qquad f(x)$$

Sujeto a las restricciones de desigualdad

$$g_i(x) \le 0 \quad para\ i = 1, \ldots, m$$

Sujeto a las restricciones de igualdad

$$h_i(x) = 0 \quad para\ i = 1, \ldots, l$$

En un conjunto convexo

$$X \subseteq R^n$$

El problema primal puede ser escrito en la siguiente forma usando la notación de vector.

Donde $f : R^n \to R$ es la función objetiva, $g : R^n \to R^m$ es una función vector cuyo componente es $g_i\ ,\ i = 1, \ldots, m$ , y $h : R^n \to R^l$ es una función vector cuyo componente es $h_i\ ,\ i = 1, \ldots, l$ . [p. 258, 1]

Por razones de conveniencia, el autor usará el siguiente formulario durante el resto de esta investigación.

Sea el Problema primal (P) definido como:

$$(P) \qquad \begin{cases} Minimizar & f(x) \\ sujeto\ a & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1**

Considere el siguiente problema primal.

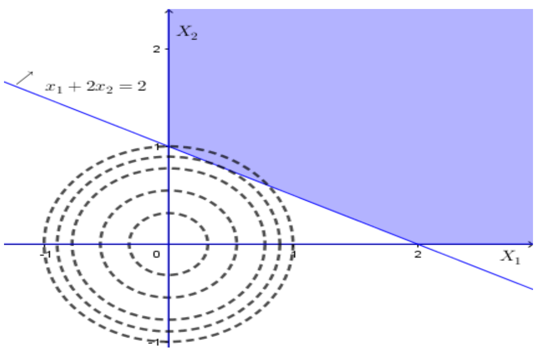
$$Minimizar \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad (2.1)$$

$$sujeto\ a \quad -x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$
$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \qquad (2.2)$$

Graficando el problema primal, la  familia de curvas de nivel de la funcion objetiva.

Figura 2.1

PROBLEMA PRIMAL




Fuente: elaboración propia

Se observa un ejemplo de programación no lineal, presenta una función objetiva no lineal y una restricción de desigualdad pero no cuenta con una restricción de igualdad y un conjunto X que son las restricciones mayores e igual a cero para $x_1$ y $x_2$.

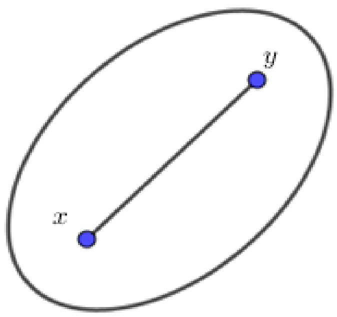
#### 2.2.1.2 Elementos de análisis convexo

**Definición 2.1:** Un subconjunto $K \subset R^n$ es llamado *convexo* si para todo $x, y \in K$ , $t \in [0,1]$ se tiene que:

$$tx + (1-t)y \in K \ .$$

Figura 2.2

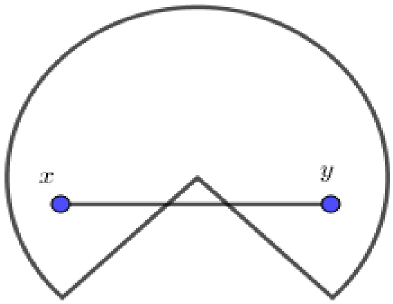
SUBCONJUNTO CONVEXO




Fuente: elaboración propia

Figura 2.3

SUBCONJUNTO NO CONVEXO




Fuente: elaboración propia

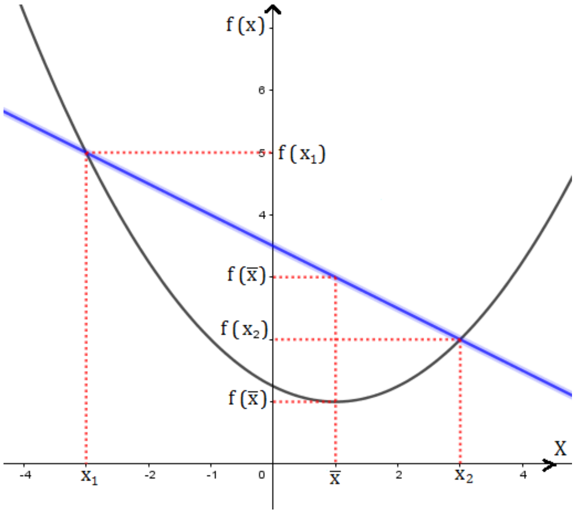
**Definición 2.2:** Un subconjunto $K \subset R^n$ es llamado *fuertemente convexo* si para todo $x, y \in K$ , $t \in (0,1)$ existe un $r > 0$ tal que $B((1-t)x - ty, r) \subset K$ . Donde B es una Vecindad.

**Definición 2.3:** Sea $K \subset R^n$ un conjunto convexo, $f : K \to R$ es una *función convexa* si para cada $x_1, x_2 \in K$ y $\alpha \in [0,1]$ [p.26, 7] se tiene que:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2). \qquad (2.3)$$

Figura 2.4

FUNCIÓN CONVEXA




Fuente: *Aplicaciones de Programación no Lineal*. OmniaScience 2016

La función es *estrictamente convexa* cuando la desigualdad (2.3) es estricta para todo $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in (0,1)$ se tiene [p.66, 9]:

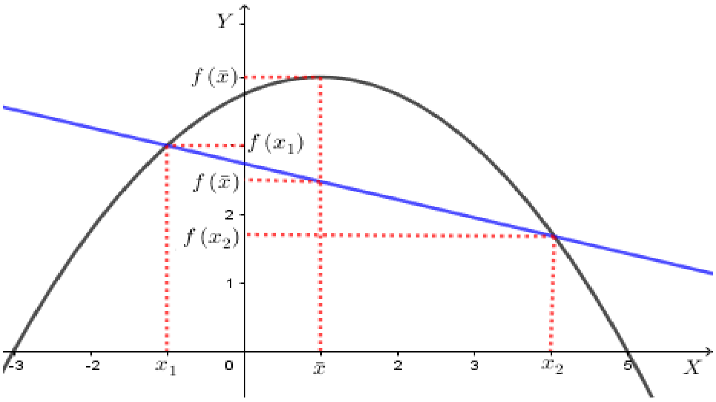
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Para una *función cóncava* definida sobre una región convexa simplemente se invierte la desigualdad

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2). \qquad (2.4)$$

Figura 2.5

FUNCIÓN CÓNCAVA




Fuente: *Aplicaciones de Programación no Lineal*. OmniaScience 2016

La función es *estrictamente cóncava* cuando la desigualdad (2.4) es estricta para todo $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in (0,1)$ se tiene [p.66, 9]:

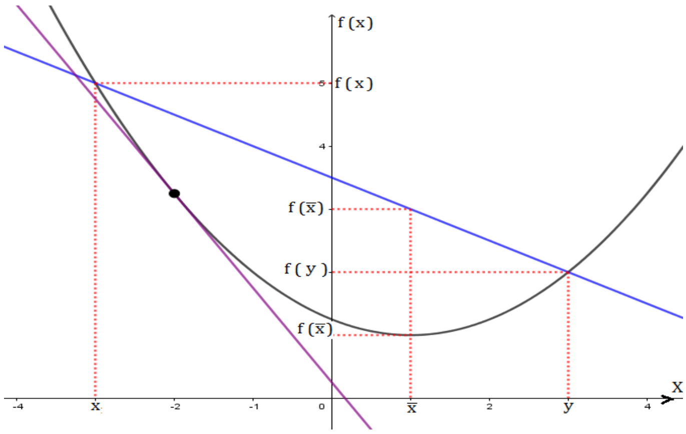
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

**Proposición 2.1:** Si $f(x)$ es convexa sobre el conjunto convexo $K$ y $x, y \in K$ entonces [p.30, 7]

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x)$$

Figura 2.6

FUNCIÓN CONVEXA SEGÚN LA PROPOSICIÓN 2.1




Fuente: *Aplicaciones de Programación no Lineal*. OmniaScience 2016

### 2.2.1.3 Condiciones necesarias de optimalidad

**Diferenciabilidad**

La propiedad de diferenciabilidad permite caracterizar los extremos locales es decir el mínimo local o el máximo local, proporcionando condiciones necesarias para la optimalidad de una solución. [p.193, 5]

Para una mayor claridad, se da la siguiente definición:

**Definición 2.4:** Sea $K \subset R^n$ una función $f$ tiene un *mínimo global* en el punto $x^* \in K$ (respectivamente, un mínimo global estricto), si y solo si $f(x^*) \leq f(x)$ (respectivamente, $f(x^*) < f(x)$ ) para todo $x$ en $K$. [p.193, 5]

**Definición 2.5:** Una función $f$ tiene un *mínimo local* (respectivamente, un mínimo local estricto) en el conjunto $K$ en el punto $\bar{x}$, si y solo si existe un numero positivo $\varepsilon$ cumpliendo $f(\bar{x}) \le f(x)$ (respectivamente, $f(\bar{x}) < f(x)$ ) para todo $x$ en $K$ tal que $0 < \|\bar{x} - x\| < \varepsilon$. [p.193, 5]

**Definición 2.6:** Se dice que $f : R^n \to R$ es *diferenciable* en $x$ si las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ , $i = 1,..., n,$ existen, y

$$\lim_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T (y - x)}{\|y - x\|} \right| = 0$$

Recuérdese que el gradiente de $f$ en $x$ es el vector definido por

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$$ . [p.193, 5]

**Definición 2.7:** Una función $f$ se denomina *continuamente diferenciable* en $\bar{x}$ si todas sus derivadas parciales son continuas en $\bar{x}$ . En este caso la función también es diferenciable. [p.194, 5]

**Teorema 2.1:** Sea $f : R^n \to R$ diferenciable en $x^* \in X$ y sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo. Luego una condición necesaria para $x^*$ sea un óptimo local del problema (P) es que:

Convencionalmente, esta condición es suficiente para $x^*$ sea un óptimo global del problema (P)

**Demostración:** Ver [8]

**Definición 2.8:** (condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (CKKT)). El vector $\bar{x} \in R^n$ satisface las CKKT para el problema de programación no lineal (PPNL)

$$\begin{array}{ll} & Minimizar \quad f(x) \\ sujeto\ a & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

Donde

$f : R^n \rightarrow R$, $h : R^n \rightarrow R^l$ $g : R^n \rightarrow R^m$ con $h(x) = (h_1(x),..., h_l(x))^T$ y $g(x) = (g_1(x),..., g_m(x))^T$ son continuamente diferenciables en la región factible e es $S = \{x \mid h(x) = 0 , g(x) \leq 0\}$.

Si existe un par de vectores $\lambda \in \boldsymbol{R}^l$ y $\mu \in \boldsymbol{R}^m$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \nabla h_k(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} h_k(\bar{x}) &= 0 \quad , k = 1,..., l \\ g_j(\bar{x}) &\leq 0 \quad ; j = 1,..., m \\ \mu_j g_j(\bar{x}) &= 0 \quad ; j = 1,..., m \\ \mu_j &\geq 0 \quad ; j = 1,..., m \end{aligned}$$

Los vectores $\mu$ y $\lambda$ se denominan de Kuhn-Tucker. La condición de $\mu_j g_j(\bar{x}) = 0$ es conocida con el nombre de complementariedad, la condición de $\mu_j$ requiere la no negatividad de los multiplicadores, y es llamada condición de factibilidad dual, y $h_k(\bar{x}) = 0$ ; $g_j(\bar{x}) \leq 0$ se denominan condiciones de factibilidad primal. [p.195, 5]

Nota 1:

Para problemas con solo restricción de igualdad. Si el problema primal tiene exclusivamente restricciones de igualdad, las CKKT tienen la forma. [p.198, 5]

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \nabla h_k(\bar{x}) = 0$$

$$h_k(\bar{x}) = 0 , \ k = 1 , \ldots , l$$

Para problema con solo restricciones de desigualdad. Las CKKT son

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} g_j(\bar{x}) &\leq 0 , \ j = 1 , \ldots , m \\ u_j g_j(\bar{x}) &= 0 , \ j = 1 , \ldots , m \\ u_j &\geq 0 , \ j = 1 , \ldots , m \end{aligned}$$

#### 2.2.1.4 Condición suficiente de optimalidad

**Definición 2.9:** Se dice que $f : R^n \to R$ es *dos veces diferenciable* en el punto $x$ si existe un vector columna $\nabla f(x)$ , y una matriz $n\ x\ n$ $\nabla^2 f(x)$ , que cumple [p.214, 5]:

$$\lim_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T (y-x) - \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x)(y-x)}{\|y-x\|^2} \right| = 0$$

**Definición 2.10:** Una matriz simétrica $A$ es *semidefinida* positiva si

$$x^T A x \geq 0$$

Para cualquier vector $x$ . Además, si la igualdad

$$x^T A x = 0$$

Ocurre únicamente en el caso $x = 0$, entonces $A$ se dice que es definida positiva. [p.215, 5]

**Teorema 2.2:** La condición suficiente de optimalidad. Sea $f : R^n \to R$ una función dos veces diferenciable donde $\nabla^2 f(x)$ es una matriz semidefinida positiva para cada $x \in R^n$. Si $\nabla f(a) = 0$ para algún $\alpha \in R^n$ , entonces $\alpha$ es un mínimo global de f.

**Demostración:** ver [6]

#### 2.2.1.5 Problema Dual Lagrangiano

Considera el siguiente problema dual lagrangiano

$$\begin{aligned} &Maximizar \quad \theta(u,v) \\ &sujeto\ a \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

$$Donde \qquad \theta(u,v) = \inf\left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} v_i h_i(x) : x \in X \right\}$$

En este problema las restricciones $g_i(x) \leq 0$ y $h_i(x) = 0$ han sido incorporados en la función objetivo usando los multiplicadores de lagrangiano o variables duales $u_i$ y $v_i$ respectivamente. Este proceso de acomodar las restricciones dentro de la función objetivo usando el dual o los multiplicadores del lagrangiano se denomina dualización.

El problema dual Lagrangiano puede ser escrito en la siguiente forma usando la notación de vector, donde $f : R^n \to R$ función objetivo, $g : R^n \to R^m$ es una función vector cuyo componente es $g_i$, y $h : R^n \to R^l$ es una función vector cuyo componente es $h_i$.

Por razones de conveniencia, utilizaremos el siguiente formulario durante el resto de esta investigación.

Problema dual Lagrangiano

$$(D) \quad \begin{cases} Maximizar & \theta(u,v) \\ sujeto\ \ a & u \geq 0 \end{cases}$$

Donde $\theta(u,v) = inf\{f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) : x \in X\}$

Dado un problema de programación no lineal, se pueden idear varios problemas duales lagrangianos, dependiendo de las restricciones que se manejan como $g(x) \leq 0$ y $h(x) = 0$ y que las restricciones son tratadas por el conjunto $X$ .

Esta elección puede afectar tanto al valor óptimo de D (como una situación no convexa) y el esfuerzo dedicado a evaluar y actualizar la función dual $\theta$ durante el curso de la solución del problema dual. Por lo tanto, una apropiada elección del conjunto $X$ debe depender de la estructura del problema y el propósito de resolver D. [p.259, 1]

**Ejemplo 2.2:**

Del ejemplo 2.1 llevar el problema primal a un problema dual lagrangiano

$$Minimizar \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\textit{sujeto a} \quad -x_1 - 2x_2 + 2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

**Resolución:**

Siendo la restricción de desigualdad $g(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_2 + 2$, la función objetiva $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ y el conjunto $X = \{(x_1,x_2) : x_1, x_2 \ge 0\}$

La función dual lagrangiano es dado por:

$$\theta(u) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \ge 0\} \tag{2.5}$$

$$\theta(u) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 - ux_1 - 2ux_2 + 2u : x_1, x_2 \ge 0\}$$

$$\theta(u) = \inf\{x_1^2 - ux_1 : x_1 \ge 0\} + \inf\{x_2^2 - 2ux_2 + 4) : x_2 \ge 0\} + 2u$$

Determinaremos la función dual y para ello definimos la función lagrangiano de la siguiente forma:

$$L(x_1,x_2,u) = x_1^2 + x_2^2 - ux_1 - 2ux_2 + 2u \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,u)}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(x_1^2 + x_2^2 - ux_1 - 2ux_2 + 2\right)}{\partial x_1} = 2x_1 - u$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,u)}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(x_1^2 + x_2^2 - ux_1 - 2ux_2 + 2\right)}{\partial x_2} = 2x_2 - 2u$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,u)}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - u = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{u}{2} \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,u)}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = u \end{cases} \tag{2.7}$$

Reemplazamos en (2.5) tenemos:

$$\theta(u) = \inf\left\{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + (u)^2 + u\left(-\frac{u}{2} - 2u + 2\right) : x_1, x_2 \ge 0\right\}$$

$$\theta(u) = \inf\left\{\frac{u^2}{4} + u^2 - \frac{u^2}{2} - 2u^2 + 2u : x_1, x_2 \ge 0\right\}$$

$$\theta(u) = \inf\left\{-\frac{5u^2}{4} + 2u : x_1, x_2 \ge 0\right\}$$

Analizamos la función $\theta(u)$

Si $u \geq 0$ entonces $\theta(u) = \inf\left\{-\frac{5u^2}{4} + 2u\right\} = -\frac{5u^2}{4} + 2u$

Si $u < 0$ del sistema de ecuaciones (2.7) entonces $x_1 = x_2 = 0$ tenemos $\theta(u) = \inf\{0^2 + 0^2 - u(0+0+2)\} = 2u$

Tener en cuenta que el ínfimo se logra en $x_1 = \frac{u}{2}$ y $x_2 = u$ cuando $u \geq 0$ y si $x_1 = x_2 = 0$ cuando $u < 0$. Por lo tanto se obtiene la siguiente función dual lagrangiano:

$$\theta(u) = \begin{cases} -\frac{5u^2}{4} + 2u & para\ u \geq 0 \\ 2u & para\ u < 0 \end{cases}$$

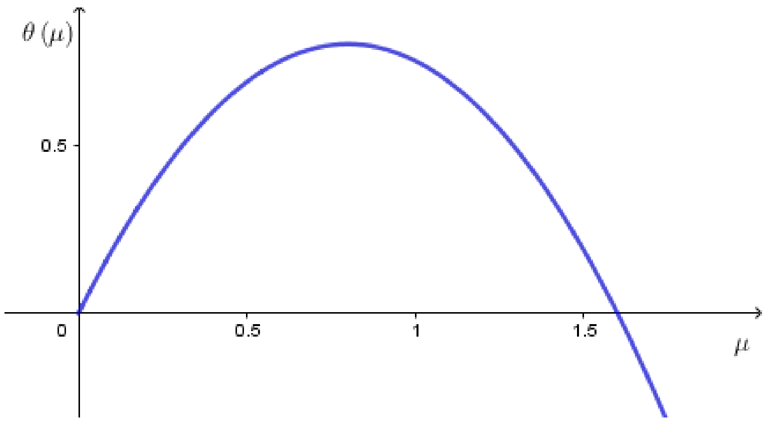
Note que $\theta$ es una función cóncava, y su máximo $u \geq 0$.

Finalmente el problema dual lagrangiano del ejemplo 2.1 será lo siguiente:

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \theta(u) = -\frac{5u^2}{4} + 2u \\ &sujeto\ a \quad u \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Figura 2.7

PROBLEMA DUAL LAGRANGIANO




Fuente: elaboración propia

#### 2.2.1.6 Teoremas duales

**Teorema dual débil 2.3:** Sea x una solución factible al problema P; esto es, $x \in X$, $g(x) \leq 0$ y $h(x) = 0$ También sea $(u,v)$ una solución factible al problema D, esto es, $u \geq 0$ Entonces $f(x) \geq \theta(u,v)$. [p.263, 1]

**Demostración:**

Por definición de $\theta$:

$$\theta(u,v) = \inf\left\{f(y) + u^t g(y) + v^t h(y) : y \in X\right\} \tag{2.9}$$

$$\inf\left\{f(y) + u^t g(y) + v^t h(y) : y \in X\right\} \leq f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \leq f(x)$$

$$\inf\left\{f(y) + u^t g(y) + v^t h(y) : y \in X\right\} \leq f(x)$$

de la ecuación (2.9) tenemos:

$$\therefore \quad \theta(u,v) \leq f(x)$$

**Corolario 2.1:**

$\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\}$. [p.263, 1]

**Demostración:**

Del teorema dual débil: $f(x) \geq \theta(u,v)$

Definimos los siguientes conjuntos:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X \text{ , } g(x) \leq 0 \text{ , } h(x) = 0\}, \text{ donde } \; f(x) \in f(X)$$

$$\theta(U,V) = \{\theta(u,v) : u \geq 0\}, \text{ donde } \; \theta(u,v) \in \theta(U,V)$$

Sea $b = \sup\{\theta(U,V)\}$

$$\forall \theta(u,v) \in \theta(U,V) \quad \Rightarrow \quad \theta(u,v) \leq Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\}$$

Sea $c = Inf\{f(X)\}$

$$\forall f(x) \in f(X) \quad \Rightarrow \quad \inf\{f(x) : g(x) \leq 0 \text{ , } h(x) = 0 \text{ ; } x \in X\} \leq f(x) \tag{2.10}$$

Como $\theta(u,v) \leq f(x)$ ; $f(x)$ es una cota superior a $\theta(U,V)$

$$\theta(u,v) \leq Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq f(x)$$

$$\Rightarrow \qquad Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq f(x)$$

Del último enunciado, sea $\forall f(x) \in f(X)$ de (2.10)

$$Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq \inf\{f(x) : g(x) \leq 0 \,,\, h(x) = 0 \,;\, x \in X\} \leq f(x)$$

$$\therefore \quad \inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\}$$

**Corolario 2.2:**

Si $f(\bar{x}) = \theta(\bar{u},\bar{v})$, donde $\bar{u} \geq 0$ y $\bar{x} \in \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, entonces $\bar{x}$ y $(\bar{u},\bar{v})$ solución de los problemas dual y primal respectivamente. [p.263, 1]

**Corolario 2.3:**

Si $\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = -\infty$, entonces $\theta(u,v) = -\infty$ para cada $\bar{u} \geq 0$. [p.264, 1]

**Demostración:**

Por el corolario 2.1: $Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq \inf\{f(x) : g(x) \leq 0 \,,\, h(x) = 0 \,;\, x \in X\}$

$$Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq -\infty$$

Pero, $\quad \theta(u,v) \leq Sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq -\infty$

Entonces por transitividad $\theta(u,v) \leq -\infty$ además $-\infty \leq \theta(u,v) \leq -\infty$ entonces $\theta(u,v) = -\infty$ para cada $u \geq 0$.

**Corolario 2.4:**

Si $\sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} = \infty$, luego el problema primal no tiene solución factible. [p.264, 1]

**Demostración:**

Por el teorema dual débil: $\theta(u,v) \leq f(x) \quad ; \forall\, u \geq 0$

$$\theta(u,v) \leq Sup\{\,\theta(u,v) : u \geq 0\} \leq f(x)$$

$$\theta(u,v) \leq +\infty \leq f(x)$$

$$+\infty \leq f(x) \qquad (2.11)$$

Siendo $f$ una función objetiva y el problema primal se busca minimizar pues en (2.11) no se logra, por tanto no hay solución factible.

**Lema 2.1:**

Sea $X$ un conjunto no vacío convexo en $R^n$. Sea $\alpha : R^n \rightarrow R$ y $g : R^n \rightarrow R^m$ funciones convexas y sea $h : R^n \rightarrow R^l$ función afín; esto es, h es de la forma $h(x) = Ax - b$. Si el sistema 1 no tiene solución $x$, luego sistema 2 tiene una solución $(u_0, u, v)$. Lo contrario se cumple si $u_0 > 0$ [p.266, 1]

$$\begin{array}{ll} Sistema\ 1: & \alpha(x) < 0, \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0 \qquad para\ \ algún\ \ x \in X \\ Sistema\ 2: & u_0\alpha(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \geq 0 \qquad para\ \ todo\ \ x \in X \end{array}$$

$$(u_0, u) \geq 0, \quad (u_0, u, v) \neq 0$$

**Demostración:**

Supongamos que el sistema 1 no tiene solución y considerar el siguiente conjunto

$\Lambda = \{(p,q,r) : p > \alpha(x), \quad q \geq g(x), \quad r = h(x) : para\ \ algún\ \ x \in X\}$

Note que $X$, $\alpha$ y $g$ son convexo y $h$ es afín, entonces $\Lambda$ es convexo. Desde el sistema 1 no tiene solución $(0,0,0) \notin \Lambda$ por el corolario 2.1, no existen ningún cero $(u_0, u, v)$ tal que

$$u_0 p + u^t q + v^t r \geq 0 \text{ para cada } (p,q,r) \in \text{cl}\,\Lambda \qquad (2.12)$$

Ahora fijar un $x \in X$ . Desde p y q pueden ser arbitrariamente largo, la ecuación (2.12) es cierto si $u_0 \geq 0$ y $u \geq 0$. , $(p,q,r) = [\alpha(x),\ g(x), h(x)]$ a $\text{cl}\,\Lambda$.

, desde (2.12), adquirimos

$$u_0\alpha(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \geq 0$$

Desde la inecuación es cierto para cada $x \in X$ , el sistema 2 tiene una solución.

Para probar la convergencia, suponer que el sistema 2 tiene una solución $(u_0, u, v)$ tal que $u_0 > 0$ y $u \geq 0$ satisfaciendo

$$u_0\alpha(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \geq 0 \text{ para cada } x \in X \text{ .}$$

Ahora sea $x \in X$ tal que $g(x) \leq 0$ y $h(x) = 0$. De la inecuación siendo $u \geq 0$, concluimos que $u_0\alpha(x) \geq 0$. Desde $u_0 > 0$, $\alpha(x) > 0$; y sistema 1 no tiene solución. Esto completa la prueba.

**Teorema dual fuerte 2.4:**

Sea $X$ un conjunto convexo no vacío en $R^n$. Sea $f : R^n \to R$ y $g : R^n \to R^m$ funciones convexas y sea $h : R^n \to R^l$ función afín; esto es, h es de la forma $h(x) = Ax - b$. Supongamos que la restricción de igualdad es cierta. Existen $\hat{x} \in X$ tal que $g(\hat{x}) < 0$ y $h(\hat{x}) = 0$, y $0 \in \operatorname{int} h(X)$, donde $h(X) = \{h(x) : x \in X\}$. Entonces,

$$\inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = \sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\} \qquad (2.13)$$

Sin embargo, si el *inf* es finito, entonces $\sup\{\theta(u,v) : u \geq 0\}$ se aproxima a $(\bar{u}, \bar{v})$ con $\bar{u} \geq 0$, Si el *inf* es próximo a $\bar{x}$, entonces $\bar{u}^t g(\bar{x}) = 0$. [p.267, 1]

**Demostración: ver** [1]

### 2.2.1.7 Propiedades de la función dual

Asumimos que el conjunto $X$ es compacto. Esto simplificará las demostraciones de varios de los teoremas siguientes. [p.276, 1]

**Teorema 2.7**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f : R^n \to R$ y $\beta : R^n \to R^{m+l}$ son continuas. Entonces $\theta$, definido por:

$$\theta(w) = \inf\{f(x) + w^t \beta(x) : x \in X\} \qquad (2.13)$$

Es cóncava sobre $R^{m+l}$ [p.276, 1]

**Demostración:**

Desde que $f$ y $\beta$ son continuas y $X$ es compacto, $\theta$ es finito en $R^{m+l}$. Sea $w_1$, $w_2 \in R^{m+l}$, y sea $\lambda \in (0,1)$. Entonces por la definición de (2.13) tenemos:

$$\theta[\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2] = \inf\{f(x) + [\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2]^t \beta(x) : x \in X\}$$

$$= \inf\{f(x) - \lambda f(x) + \lambda f(x) + \lambda w_1^t \beta(x) + (1-\lambda) w_2^t \beta(x) : x \in X\}$$

$$= \inf\{(1-\lambda) f(x) + \lambda f(x) + \lambda w_1^t \beta(x) + (1-\lambda) w_2^t \beta(x) : x \in X\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda\left[ f(x) + w_1^t \beta(x) \right] + (1-\lambda)\left[ f(x) + w_2^t \beta(x) \right] : x \in X \right\}$$

$$\geq \lambda \inf \left\{ f(x) + w_1^t \beta(x) : x \in X \right\} + (1-\lambda) \inf \left\{ f(x) + w_2^t \beta(x) : x \in X \right\} = \lambda\theta(w_1) + (1-\lambda)\theta(w_2)$$

$$\therefore \quad \theta\left[\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2\right] \geq \lambda\theta(w_1) + (1-\lambda)\theta(w_2)$$

Así, $\theta$ es cóncava.

**Diferenciabilidad de $\theta$**

Nos direccionamos a la pregunta de diferenciabilidad de $\theta$ definido por $\theta(w) = \inf\left\{ f(x) + w^t \beta(x) : x \in X \right\}$. Sera conveniente introducir el siguiente conjunto de soluciones óptimas del subproblema dual lagrangiano:

$$X(w) = \left\{ y : y \text{ minimo } \left[ f(x) + w^t \beta(x) \right] \; sobre \; x \in X \right\}$$

La diferenciabilidad de $\theta$ en cualquier punto dado [p.277, 1]

**Lema 2.2**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f : R^n \to R$ y $\beta : R^n \to R^{m+l}$ son continuas. Sea $\overline{w} \in R^{m+l}$, y suponer que $X(\overline{w})$ es el conjunto unitario $\{\overline{x}\}$. Suponer que $w_k \to \overline{w}$, y sea $w_k \in X(w_k)$ para cada $k$. Entonces $x_k \to \overline{x}$. [p.277, 1]

**Demostración:**

La demostración se hará por contradicción, supongamos que $w_k \to \overline{w}$, $w_k \in X(w_k)$, y $\left\| x_k - x \right\| \geq \varepsilon > 0$ para todo $k \in K$, donde $K$ es algún conjunto de índice.

Ya que $X$ es compacto, la sucesión $\{x_k\}_K$ tiene una sub sucesión convergente $\{x_k\}_{K'}$, con limite $y$ en $X$ .

Note que $\left\| y - x \right\| \geq \varepsilon > 0$, como $y$ es distinto a $\overline{x}$. Además, para cada $w_k$ con $k \in K^{'}$, tenemos

$$f(x_k)+w_k^t\beta(x_k)\le f(\bar{x})+w_k^t\beta(\bar{x})$$

Tomando el límite cuando $k$ en $K'$ se aproxima a $\infty$, y notando que $x_k \to y$, $w_k \to \bar{w}$ y que $f$ y $\beta$ son continuas, resulta que:

$$f(y)+\bar{w}^t\beta(y)\le f(\bar{x})+\bar{w}^t\beta(\bar{x})$$

Por lo tanto, $y\in X(\bar{w})$, contradice al suponer que $X(\bar{w})$ es conjunto unitario.

**Teorema**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f:R^n\to R$ y $\beta:R^n\to R^{m+l}$ funciones continuas. Sea $\bar{w}\in R^{m+l}$, y suponer que $X(\bar{w})$ esel conjunto unitario $\{\bar{x}\}$. Entonces $\theta$ es diferenciable en $\bar{w}$ con gradiente $\nabla\theta(\bar{w})=\beta(\bar{x})$. [p.278, 1]

**Subdiferenciable de $\theta$**

**Teorema 2.7**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f:R^n\to R$ y $\beta:R^n\to R^{m+l}$ son continuas entonces sea para cualquier $\bar{w}\in R^{m+l}$, $X(\bar{w})$ es no vacío. Si $\bar{x}\in X(\bar{w})$, entonces $\beta(\bar{x})$ es un subgradiente de $\theta$ a $\bar{w}$. [p.297, 1]

**Teorema 2.9**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f:R^n\to R$ y $\beta:R^n\to R^{m+l}$ son continuas. Sea $\bar{w}, d\in R^{m+l}$. Entonces la derivada direccional de $\theta$ en $\bar{w}$ en la dirección $d$ satisface $\theta'(\bar{w};d)\ge d^t\beta(\bar{x})$ para algún $\bar{x}\in X(\bar{w})$ [p.280, 1]

**Corolario 2.6**

Sea $\partial\theta(\bar{w})$ la colección de subgradiente de $\theta$ en $\bar{w}$, y supongamos que las suposiciones de los teoremas son verdaderas. Entonces

$$\theta'(\bar{w};d)=\inf\{d^t\xi:\xi\in\partial\theta(\bar{w})\}$$ [p.281, 1]

**Teorema 2.10**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f : R^n \to R$ y $\beta : R^n \to R^{m+l}$ son continuas. Entonces $\xi$ es un subgradiente de $\theta$ en $\overline{w} \in R^{m+l}$ sí y solo si $\xi$ pertenece al cono convexo de $\{\beta(y) : y \in X(\overline{w})\}$. [p.281, 1]

### 2.2.1.8 Dirección de ascenso y paso ascendente

El problema de optimización con función objetivo de varias variables, considérese el siguiente problema:

$$Minimizar \quad f(x)$$

Donde $x \in R^n$ y $f : R^n \to R$ es una función diferenciable en todo $x \in R^n$. Este problema puede ser resuelto aplicando método de descenso de la función objetiva. Estos métodos generan una sucesión de puntos $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots\}$ tal que $f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > f(x^{(2)}) > \cdots > f(x^{(k)}) > \cdots$. [p.104, 4]

Se aplicará el método de dirección de descenso. Una iteración de este algoritmo consta de dos etapas fundamentales, ver [p.246, 5]:

- Generación de la dirección de descenso $d_{(k)}$: Se utiliza la dirección de descenso para permitir avanzar hacia un nuevo punto $x^{(k)}$ de modo que desde el punto $x^{(k)}$ en dicha dirección hace decrecer el valor de la función objetiva.
- Búsqueda lineal: Habiendo obtenido la dirección de descenso $d_{(k)}$ de $f$ en el punto $x^{(k)}$, se plantea de cuanto hay que desplazarse en esa dirección, dicho avance se denominada longitud de paso y se denota por $\alpha_k$. El nuevo punto es $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d_{(k)}$ en este punto la función objetiva tiene un nuevo valor que es menor al valor en el punto anterior.

  Se supone que existe un número positivo $\overline{\alpha}$ que cumple

$$f\left(x^{(k+1)} + \alpha_k d_{(k)}\right) < f\left(x^{(k)}\right) \text{ para todo } \alpha_k \in (0, \overline{\alpha})$$

Para este presente trabajo de investigación consideremos el siguiente problema de maximizar una función $\theta(w)$ donde $w \in X$ y $\theta : R^n \to R$ es una función diferenciable en $X$ este problema se puede resolver aplicando el paso ascendente.

Considere el problema de minimizar una función $f(x)$ , dado un punto $x$, se determina un vector de dirección $d$ elegido de forma adecuada; luego $f(x)$ se minimiza desde $x$ en la dirección de $d$ por una técnica que se conoce como búsqueda lineal que se presenta de la siguiente forma (ver [p.109, 7]):

$$\begin{array}{ll} Minimizar & f(x+\alpha d) \\ sujeto\ a & \alpha \in I \end{array}$$

Donde $I = R$ ó $I = \{\alpha : \alpha \geq 0\}$ ó $I = \{\alpha : a \leq \alpha \leq b\}$.

En este trabajo de investigación adecuamos la función y decimos, dado un punto $w \in X$ , se determina un vector de dirección $d$ , luego se maximiza $\theta(w)$ desde $w$ en la dirección de $d$ se define la búsqueda lineal de la forma:

$$\begin{array}{ll} Maximizar & \theta(w+\alpha d) \\ sujeto\ a & \alpha \in I \end{array}$$

Donde $I = R$ ó $I = \{\alpha : \alpha \geq 0\}$ ó $I = \{\alpha : a \leq \alpha \leq b\}$.

**Definición 2.13**

Un vector $d$ es llamado una dirección ascendente de $\theta$ en $w$ si existen un $\delta > 0$ tal que

$$\theta(w+\lambda d) > \theta(w)$$

para cada $\lambda \in (0,\delta)$. [p.283, 1]

**Definición 2.14**

Un vector $\bar{d}$ es llamado dirección de paso ascendente de $\theta$ en $w$ si

$$\theta'(w;\bar{d}) = \max_{\|d\|\leq 1} \theta'(w;d) \text{ [p.284, 1]}$$

**Teorema 2.11**

Sea $X$ un conjunto compacto no vacío en $R^n$, y sea $f : R^n \longrightarrow R$ y $\beta : R^n \longrightarrow R^{m+l}$ son continuas. La dirección de paso ascendente $\overline{d}$ de $\theta$ en $w$ se da a continuación, donde $\overline{\xi}$ es el subgradiente en $\partial\theta(w)$que tiene la norma euclidiana más pequeña [p.285, 1]:

$$\overline{d} = \begin{cases} 0 & si\ \overline{\xi} = 0 \\ \dfrac{\overline{\xi}}{\|\overline{\xi}\|} & si\ \overline{\xi} \neq 0 \end{cases}$$

## 2.3 Definiciones de términos básicos

A continuación daremos algunas definiciones que nos ayuda a fundamentar la investigación.

- Optimización: Optimización matemática es la selección del mejor elemento (con respecto algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles. En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función.

- Función lineal: es una función polinómica a lo sumo, de primer grado; es decir una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta.

- Programación no lineal: En matemáticas, la programación no lineal es el proceso de resolución de un sistema de igualdades y desigualdades sujetas a un conjunto de restricciones sobre un conjunto de variables reales desconocidas.

- Restricciones: Limitación que se produce en alguna cosa, especialmente en el consumo de algo.

- Región factible: Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

- Solución factible: Es aquella que verifica todas las restricciones de un problema de programación.

- Singleton: Es un conjunto que contiene exactamente un elemento.

## CAPITULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

### 3.1 Hipótesis

**Hipótesis general:**

Existe una solución a un problema primal mediante el dual lagrangiano.

**Hipótesis específicas:**

Si es posible realizar el método de plano de corte en la función dual lagrangiano.

Si es posible realizar la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano.

### 3.1.1 Capitulo fuera de variables

Las variables de estudio son:

VARIABLE 1: Función dual Lagrangiano

Definición conceptual: Problema dual Lagrangiano

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & \theta(u,v) \\ \textit{sujeto a} & u \geq 0 \end{array}$$

$$\textit{Donde} \qquad \theta(u,v) = \inf\left\{ f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \ : x \in X \right\}$$

Dado un problema de programación no lineal, se pueden idear varios problemas duales lagrangianos, dependiendo de las restricciones que se manejan como $g(x) \leq 0$ y $h(x) = 0$ y que las restricciones son tratadas por el conjunto $X$ . [5]

VARIABLE 2: Problema primal

Definición conceptual: Presentamos el problema de programación no lineal, el cual llamaremos como el problema primal, descrito de la siguiente forma:

$$\textit{Minimizar} \qquad f(x)$$

Sujeto a las restricciones de desigualdad

$$g_i(x) \leq 0 \quad \textit{para } i = 1,\dots,m$$

Sujeto a las restricciones de igualdad

$$h_i(x) = 0 \quad \textit{para } i = 1,\dots,l$$

En un conjunto convexo

$$X \subseteq R^n$$

Donde $f : R^n \rightarrow R$ es la función objetiva, $g : R^n \rightarrow R^m$ es una función vector cuyo componente es $g_i$ , $i = 1, \ldots, m$ , y $h : R^n \rightarrow R^l$ es una función vector cuyo componente es $h_i$ , $i = 1, \ldots, l$ . [p. 258, 1]

### 3.2 Operacionalización de variables

Para demostrar y comprobar las hipótesis que formularemos, operacionalizaremos las variables indicadas:

| VARIABLES | DIMENSIONES | INDICADORES |
|---|---|---|
| V1:<br>Función dual Lagrangiano | Multiplicadores de KKT (u,v)<br><br>Problema equivalente<br><br>Programa maestro | Teorema de dualidad<br><br>Propiedades de dualidad<br><br>multiplicadores lagrangiano |
| V2:<br>Problema primal | Plano de corte<br><br>Dirección de ascenso | Iteración<br><br>Aproximar el valor optimo |

Fuente: Elaboración propia

# CAPITULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

## 4.1 Tipo y diseño de la investigación

La presente investigación es de tipo científico-básica, se trata de un estudio que sólo usa referencias teóricas. El método científico usado para la presente investigación tiene una metodología de tipo cualitativo.

Se trata de un diseño no experimental transversal con un nivel de investigación descriptiva, puesto que nos interesa profundizar la teoría, teoremas y corolarios de resultados clásico de optimización.

## 4.2 Población y muestra

El trabajo es teórico, la población seria el conjunto $R^n$ y la muestra es el conjunto $X \subset R^n$ siento un subconjunto convexo.

## 4.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

No se ha usado ningún instrumento para la recolección de información documental debido que es una investigación cualitativa.

## 4.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

Por la característica del trabajo no se realizó ninguna técnica ni instrumento para la recolección de información de campo.

## 4.5 Análisis y procesamiento de datos.

No hay análisis ni procesamiento de datos debido que no es una investigación social por ello no se utiliza la estadística, la investigación es de base teóricas.

# CAPITULO V: RESULTADOS

## 5. 1 Resultados descriptivos

**Formulación y solución al problema Dual - Método del plano de corte**

Es un método que permite encontrar una aproximación al valor óptimo de la función objetivo dual. Su estrategia es utilizar una función que al ser optimizada se aproxima a la función dual. [p.146, 4]

De la definición:

$$Donde \qquad \theta(u,v) = \inf\left\{ f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \ : x \in X \right\} \ldots (1)$$

Se sigue que $\theta(u,v) \leq f(x) + u^t g(x) + v^t h(x)$

Hacemos $z = \theta(u,v)$ , entonces por lo anterior… (2)

$$z \leq f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \text{ , para cada } x \in X$$

El problema dual Lagrangiano se formula como:

D:

$$\begin{aligned} &Máx \ \ \theta(u,v) \\ &s.a \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces de (2) y (3), el problema equivalente es [p.147, 4]

$D_e$:

$$\begin{aligned} &Máx\, z \\ &s.a \quad z \leq f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \ \ , x \in X \\ &\qquad\ u \geq 0 \end{aligned}$$

Sabemos que $D_e$ es lineal en $z$, $u$ y $v$ ; sin embargo el número de restricciones es infinito, ya que los coeficientes de las variables lineales son funciones de $x \in X$ .

Convertimos el problema $D_e$ en otro con un número finito de restricciones.

Sean $x^0, \ldots, x^{k-1}$ puntos en $X$. Consideramos el siguiente problema de aproximación, llamado programa maestro [p.147, 4].

$D_m$

$$\begin{aligned} &Máx\ z \\ &s.a \quad z \leq f(x^0) + u^t g(x^0) + v^t h(x^0) \\ &\qquad\quad \vdots \\ &\qquad\quad z \leq f(x^{k-1}) + u^t g(x^{k-1}) + v^t h(x^{k-1}) \\ &\qquad\quad u \geq 0 \end{aligned} \qquad \ldots (5)$$

Vemos que este problema es lineal, y tiene un número finito de restricciones.

Supongamos que $\left(x^k, u^k, v^k\right)$ es solución de $D_m$. Si ésta solución satisface el problema $D_e$ en (4), entonces es solución óptima del problema dual lagrangiano.

Para comprobar si $D_e$ es satisfecho, consideramos el subproblema o problema auxiliar.

P:

$$\theta(u,v) = \min_{x \in X} \left\{ f(x) + u^k g(x) + v^k h(x) \right\}$$

Si $x^k$ es la solución óptima de P, entonces

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \left\{ f(x) + u^k g(x) + v^k h(x) \right\} &= f(x^k) + u^k g(x^k) + v^k h(x^k) \\ &= \theta\left(u^k, v^k\right) \end{aligned}$$

Ahora comparamos [p.148, 4]:

a. Sí $z^k \leq \theta(u^k, v^k)$ ; note que $\theta\left(u^k, v^k\right) = \inf\left\{ f(x) + u^k g(x) + v^k h(x) \right\}$ entonces, $z^k \leq f(x^k) + u^k g(x^k) + v^k h(x^k)$, y por tanto $\left(u^k, v^k\right)$ es la solución al problema dual lagrangeano.

b. Si $z^k > \theta(u^k, v^k)$ ; entonces para $(u,v) = (u^k, v^k)$ , $z^k > f(x^k) + u^k g(x^k) + v^k h(x^k)$, así el punto $(u^k, v^k)$ no es solución del problema $D_e$, esto es, la restricción (4) no es satisfecha para $x = x^k$

**Ejemplo 2.3**

**Del problema primal dado en el ejemplo 2.1 y el problema dual lagrangiano dado en el ejemplo 2.2 se determinará el óptimo del problema aplicando el plano de corte.**

Recordar el problema primal de las ecuaciones (2.1) y (2.2) está dado por:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ &\textit{sujeto a} \quad -x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Recordar el problema dual Lagrangiano de la ecuación (2.8) está dado por:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \ \theta(u) = -\frac{5u^2}{4} + 2u \\ &\textit{sujeto a} \quad u \geq 0 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.5) sabemos que $\theta(u) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\}$

Hacemos $z = \theta(u)$ entonces de la ecuación (2.5) tenemos:

$$z = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\}$$

Entonces

$$z \leq x_1^2 + x_2^2 + u(-x_1 - 2x_2 + 2) \qquad \textbf{(2.15)}$$

Reformulamos del problema dual y la ecuación (2.14) tenemos el problema equivalente denotado por $D_e$

$$D_e \quad \begin{cases} Máx\ z = -\dfrac{5u^2}{4} + 2u \\ s.a \quad z \le f(x^{(k)}) + u^t g(x^{(k)}) + v^t h(x^{(k)}) \ , x \in X \\ \qquad u \ge 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

**Iniciamos el método del plano de corte en el punto** $x^{(0)} = (1,2)$

**<u>Iteración 1</u>:** $k = 1;\ j = 0$ con el primer punto de inicio $x^{(0)} = (1,2)$

Con el punto de inicio y de la ecuación (2.15) reemplazamos y tenemos la primera restricción

$$z \le f\left(x^{(0)}\right) + ug\left(x^{(0)}\right) = 1 + 4 + u(-1 - 4 + 2)$$

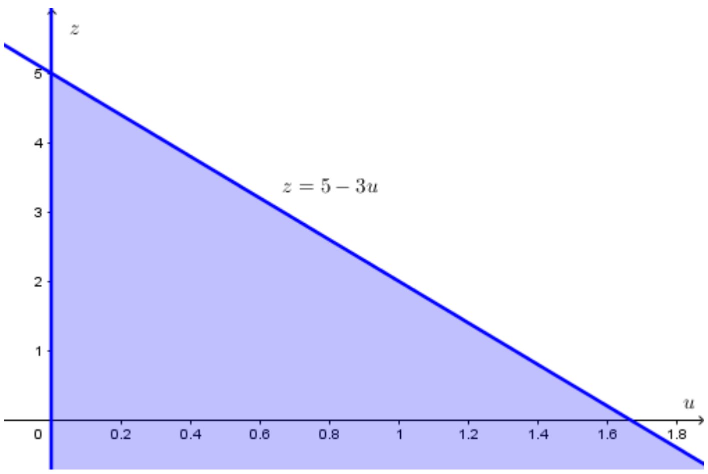
$$z \le 5 - 3u$$

De la ecuación (2.16) tenemos el primer problema equivalente con una restricción

$$D_{e1} \quad \begin{cases} Máx\ z \\ s.a \quad z \le 5 - 3u \\ \qquad u \ge 0 \end{cases}$$

Figura 5.1

PRIMERA RESTRICCIÓN DEL PROBLEMA EQUIVALENTE




Fuente: elaboración propia

Siendo $u \geq 0$ entonces el máximo $z$ ocurre para $u = 0$, así el $máx\, z = z^{(1)} = 5$ y en la primera iteración se tiene $\left(z^{(1)}; u^{(1)}\right) = (5;0)$

Ahora resolvemos

$$\theta(u^{(1)}) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u^{(1)}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\theta(0) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

Tenemos $x^{(1)} = (0,0)$ , entonces $\theta(0) = 0$ como $\theta(u^{(1)}) = 0 < 5 = z^{(1)} \Rightarrow \theta(u^{(1)}) < z^{(1)}$ vamos a otra iteración.

**<u>Iteración 2</u>:** $k = 2$ ; $j = 0$ , $1$ con el segundo punto de inicio $x^{(1)} = (0,0)$

Con el segundo punto de inicio y de la ecuación (2.15) reemplazamos y tenemos la segunda restricción

$$z \leq f\left(x^{(1)}\right) + ug\left(x^{(1)}\right) = 0 + 0 + u(-0 - 0 + 2)$$

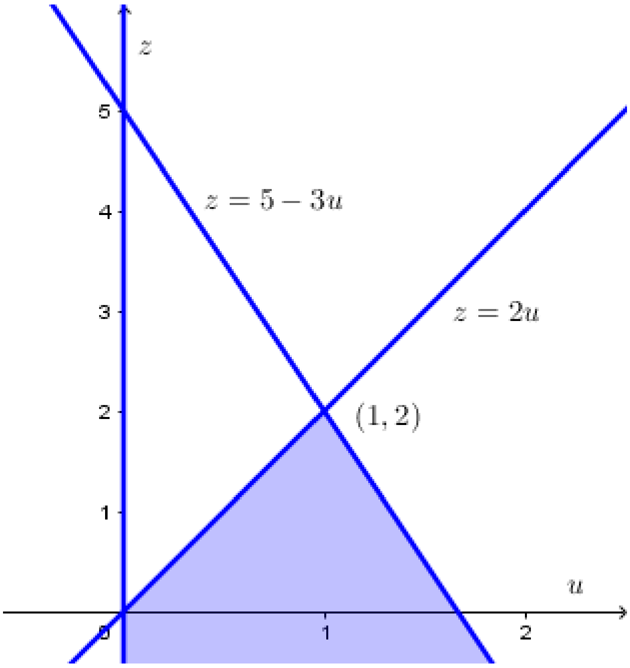
$$z \leq 2u$$

De la ecuación (2.16) tenemos el segundo problema equivalente con dos restricciones

$$D_{e2} \quad \begin{cases} Máx\ z \\ s.a \quad z \leq 5 - 3u \\ \qquad\ \ z \leq 2u \\ \qquad\ \ u \geq 0 \end{cases}$$

Figura 5.2

SEGUNDA RESTRICCIÓN DEL PROBLEMA EQUIVALENTE




Fuente: elaboración propia

De la figura 5.2, el máximo $z$ ocurre en el punto de intersección de las rectas $z = 5 - 3u \wedge z = 2u$, así el $máx\, z = z^{(2)} = 2$ y en la segunda iteración se tiene $\left(z^{(2)}; u^{(2)}\right) = (2;1)$

Ahora resolvemos

$$\theta(u^{(2)}) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u^{(2)}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\theta(1) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + 1(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

Hacemos $\Delta = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2 + 2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{entonces } x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Tenemos $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , entonces $\theta(u^{(2)}) = \theta(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2 + 2\right) = \frac{3}{4}$

como $\theta(u^{(2)}) = \frac{3}{4} < 2 = z^{(2)} \Rightarrow \theta(u^{(2)}) < z^{(2)}$ vamos a otra iteración.

**Iteración 3:** $k = 3$; $j = 0, 1, 2$ con el tercer punto de inicio $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Con el tercer punto de inicio y de la ecuación (2.15) reemplazamos y tenemos la segunda restricción

$$z \le f\left(x^{(2)}\right) + ug\left(x^{(2)}\right) = \frac{1}{4} + 1 + u\left(-\frac{1}{2} - 2 + 2\right)$$

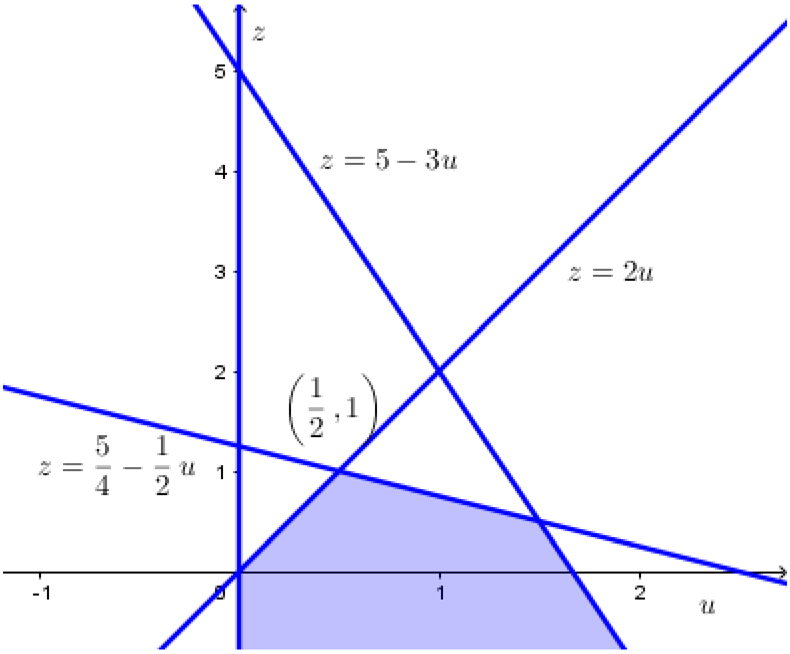
$$z \le \frac{5}{4} - \frac{1}{2}u$$

De la ecuación (2.16) tenemos el tercer problema equivalente con tres restricciones

$$D_{e3} \quad \begin{cases} Máx\ z \\ s.a \quad z \le 5 - 3u \\ \qquad\ \ z \le 2u \\ \qquad\ \ z \le \frac{5}{4} - \frac{1}{2}u \\ \qquad\ \ u \ge 0 \end{cases}$$

Figura 5.3

TERCERA RESTRICCIÓN DEL PROBLEMA EQUIVALENTE




Fuente: elaboración propia

De la figura 5.3, el máximo $z$ ocurre en el punto de intersección de las rectas $z = 2u \wedge z = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}u$, así el $máx\, z = z^{(3)} = 1$ y en la tercera iteración se tiene $\left(z^{(3)}; u^{(3)}\right) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Ahora resolvemos

$$\theta(u^{(3)}) = \inf \left\{x_1^2 + x_2^2 + u^{(3)}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \inf \left\{x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

Hacemos $\Delta = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(-x_1 - 2x_2 + 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 2x_1 - \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 2x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{entonces } x^{(3)} = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$$

Tenemos $x^{(3)} = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$ , entonces

$\theta(u^{(3)}) = \theta\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - 1 + 2\right) = \frac{11}{16}$ como $\theta(u^{(3)}) = \frac{11}{16} < 1 = z^{(3)}$

$\Rightarrow \ \theta(u^{(3)}) < z^{(3)}$vamos a otra iteración.

**<u>Iteración 4</u>:** $k = 4;\ j = 0, 1, 2, 3$ con el cuarto punto de inicio $x^{(3)} = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right)$

Con el cuarto punto de inicio y de la ecuación (2.15) reemplazamos y tenemos la segunda restricción

$$z \le f\left(x^{(3)}\right) + ug\left(x^{(3)}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + u\left(-\frac{1}{4} - 1 + 2\right)$$

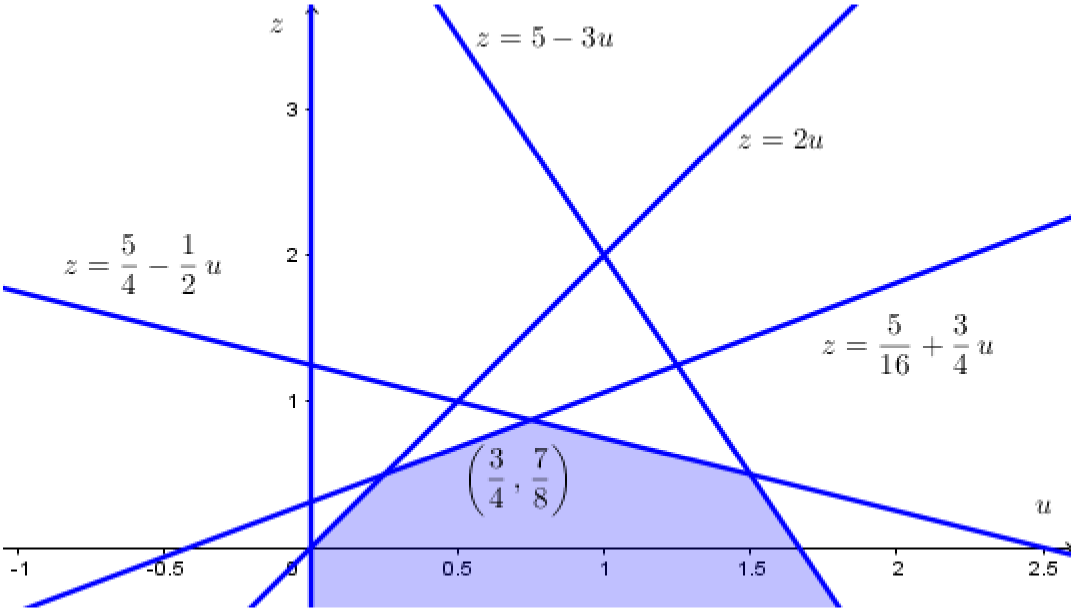
$$z \le \frac{5}{16} + \frac{3}{4}u$$

De la ecuación (2.16) tenemos el cuarto problema equivalente con cuatro restricciones

$$D_{e4} \quad \begin{cases} Máx\ z \\ s.a \quad z \le 5 - 3u \\ \qquad\ \ z \le 2u \\ \qquad\ \ z \le \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}u \\ \qquad\ \ z \le \dfrac{5}{16} + \dfrac{3}{4}u \\ \qquad\ \ u \ge 0 \end{cases}$$

Figura 5.4

CUARTA RESTRICCIÓN DEL PROBLEMA EQUIVALENTE




Fuente: elaboración propia

De la figura 5.4, el máximo $z$ ocurre en el punto de intersección de las rectas $z = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}u \ \wedge \ z = \frac{5}{16} + \frac{3}{4}u$, así el $máx\, z = z^{(4)} = \frac{7}{8}$ y en la cuarta iteración se tiene $\left(z^{(4)}; u^{(4)}\right) = \left(\frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$

Ahora resolvemos

$$\theta(u^{(4)}) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u^{(4)}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\theta\left(\frac{3}{4}\right) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{4}(-x_1 - 2x_2 + 2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

Hacemos $\Delta = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{4}(-x_1 - 2x_2 + 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 2x_1 - \dfrac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{3}{8} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 2x_2 - \dfrac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \text{entonces } x^{(4)} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$$

Tenemos $x^{(4)} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$ , entonces

$\theta(u^{(4)}) = \theta\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 2\right) = \frac{51}{64}$ como $\theta(u^{(4)}) = \frac{51}{64} < \frac{7}{8} = z^{(4)}$

$\Rightarrow \ \theta(u^{(4)}) < z^{(4)}$vamos a otra iteración.

**<u>Iteración 5</u>:** $k = 5;\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ con el cuarto punto de inicio $x^{(4)} = \left(\frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$

Con el cuarto punto de inicio y de la ecuación (2.15) reemplazamos y tenemos la segunda restricción

$$z \leq f\left(x^{(4)}\right) + ug\left(x^{(4)}\right) = \frac{9}{64} + \frac{9}{16} + u\left(-\frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 2\right)$$

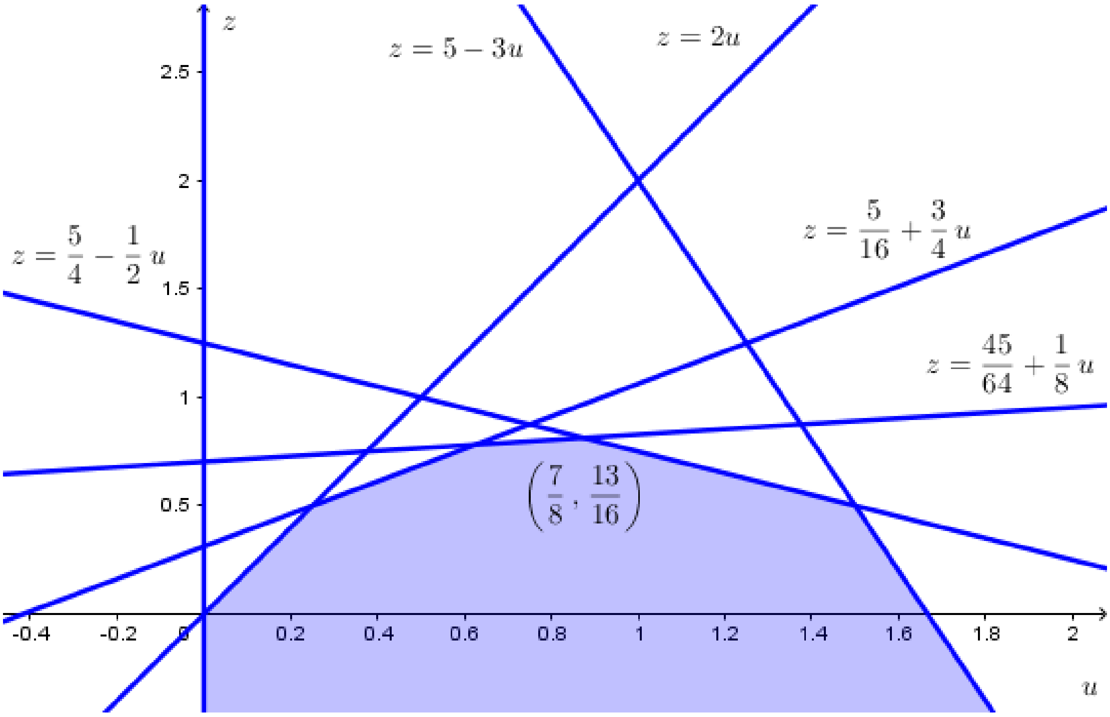
$$z \leq \frac{45}{64} + \frac{1}{8}u$$

De la ecuación (2.16) tenemos el cuarto problema equivalente con cuatro restricciones

$$D_{e5} \quad \begin{cases} Máx\ z \\ s.a \quad z \leq 5 - 3u \\ \qquad z \leq 2u \\ \qquad z \leq \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}u \\ \qquad z \leq \dfrac{5}{16} + \dfrac{3}{4}u \\ \qquad z \leq \dfrac{45}{64} + \dfrac{1}{8}u \\ \qquad u \geq 0 \end{cases}$$

Figura 5.5

QUINTA RESTRICCIÓN DEL PROBLEMA EQUIVALENTE




Fuente: elaboración propia

De la figura 5.5, el máximo $z$ ocurre en el punto de intersección de las rectas $z=\frac{45}{64}+\frac{1}{8}u \;\wedge\; z=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}u$, así el $máx\, z = z^{(5)}=\frac{13}{16}$y en la quinta iteración se tiene $\left(z^{(5)};u^{(5)}\right)=\left(\frac{13}{16};\frac{7}{8}\right)$

Ahora resolvemos

$$\theta(u^{(5)}) = \inf\left\{x_1^2+x_2^2+u^{(5)}(-x_1-2x_2+2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

$$\theta\left(\frac{7}{8}\right) = \inf\left\{x_1^2+x_2^2+\frac{7}{8}(-x_1-2x_2+2) : x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

Hacemos $\Delta = x_1^2+x_2^2+\frac{7}{8}(-x_1-2x_2+2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 2x_1 - \dfrac{7}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{7}{16} \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 2x_2 - \dfrac{7}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{7}{8} \end{cases} \quad \text{entonces } x^{(5)} = \left( \frac{7}{16}, \frac{7}{8} \right)$$

Tenemos $x^{(5)} = \left( \frac{7}{16}, \frac{7}{8} \right)$ , entonces

$\theta(u^{(5)}) = \theta\left( \frac{7}{8} \right) = \left( \frac{7}{16} \right)^2 + \left( \frac{7}{8} \right)^2 + \frac{3}{4}\left( -\frac{7}{16} - \frac{7}{4} + 2 \right) = \frac{209}{256}$ como

$\theta(u^{(5)}) = \frac{209}{256} > \frac{13}{16} = z^{(5)} \;\Rightarrow\; \theta(u^{(5)}) > z^{(5)}$. De acuerdo al teorema débil y por el método del plano de corte en el inciso a de la página 39, es solución del problema equivalente que ahora en adelante se le llamará el problema maestro al problema equivalente de su quinta iteración.

# CAPITULO VI: DISCUSION DE RESULTADOS

## 6.1 Contrastación de la hipótesis

**Hipótesis general:**

De la quinta iteración del ejemplo 2.3 se obtuvo lo siguiente:

$$x^{(5)} = \left(\frac{7}{16}, \frac{7}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(x^{(5)}\right) = \left[\frac{7}{16}\right]^2 + \left[\frac{7}{8}\right]^2 = \frac{245}{256} = 0.95703125$$

$$u^{(5)} = \frac{7}{8} \qquad \Rightarrow \quad \theta\left(u^{(5)}\right) = \frac{209}{256} = 0.81640625$$

Recordando el teorema dual débil 2.3 de la página 23: $f(x) \geq \theta(u.v)$

$$f\left(x^{(5)}\right) \geq \theta\left(u^{(5)}\right)$$
$$0.957... \geq 0.816...$$

De los resultados obtenidos de la quinta iteración está cumpliendo con el teorema dual débil y por tanto es solución factible del problema dual lagrangiano y a su vez es solución factible al problema primal.

**Hipótesis especificas**

En el método de plano corte en el inciso “a” de la página 39 nos dice $z^k \leq \theta\left(u^k\right)$ es solución del problema dual y en el inciso “b” de la página 39 nos dice si $z^k > \theta\left(u^k\right)$ no es solución del problema equivalente, comparando los resultados del ejemplo 2.3.

De la cuarta iteración se obtuvo lo siguiente:

$$z^{(4)} = \frac{7}{8} = 0.875 \qquad y \qquad \theta\left(u^{(4)}\right) = \frac{51}{64} = 0.796875$$

$$z^4 > \theta\left(u^4\right)$$
$$0.875 > 0.796...$$

Con estos resultados concluimos que está cumpliendo en el inciso “b” del método de plano de corte por ello no es solución del problema equivalente y a su vez no es solución al problema dual lagrangiano.

Además de los resultados de la cuarta iteración del ejemplo 2.3 tenemos:

$$x^{(4)} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(x^{(4)}\right) = \left[\frac{3}{8}\right]^2 + \left[\frac{3}{4}\right]^2 = \frac{45}{64} = 0.703125$$

$$u^{(4)} = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad \theta\left(u^{(4)}\right) = \frac{51}{64} = 0.796875$$

Recordando el teorema dual débil 2.3 de la página 26: $f(x) \geq \theta(u.v)$

$$f\left(x^{(4)}\right) \geq \theta\left(u^{(4)}\right)$$
$$0.703... \geq 0.796...$$

De los resultados obtenidos de la cuarta iteración no está cumpliendo con el teorema dual débil y por tanto no es solución factible del problema dual lagrangiano.

## 6.2 Contrastación de los resultados con estudios similares

Cantur (1996) concluyó:

Los métodos de dirección factible más practico son el método de proyección de gradiente de Rosen y el método de gradiente reducido de Wolfe. Estos métodos básicos pueden considerarse como el método de ascenso-descenso acelerado aplicado en la superficie definida por las restricciones activas. De los dos métodos, el del gradiente de Wolfe es recomendado, pues converge en un menor número de iteraciones para la mayoría de los problemas que el método de proyección de gradiente de Rosen. [p.117, 3]

Leañez (2013) concluyó:

Entre los métodos de programación entero-mixta y relajación lagrangeana resuelve el problema de predespacho aportando primero el planteamiento y aplicación por primera vez un método de generación de instancias aleatorias y analiza el desempeño en una plataforma computacional. Segundo, revisa los resultados numéricos y hace uso de benchmark. Tercero, expone la debilidad de relajación lagrangeana para cerrar el gap dual y obtener soluciones de calidad. Cuarto, aplica y compara la efectividad de relajación lagrangeano y método de programación entero-mixta para resolver el predespacho del sistema. [p.89, 8]

Espejo (2017) concluyó:

Para estudiar el fenómeno de El Niño-Oscilación del Sur siendo la causante de inundaciones y sequias; es necesario realizar un estudio sobre una base matemática sólida, siendo ésta la garantía al correcto funcionamiento. Usa una de las técnicas estadística que es el ACP como un método para consolidar variables mutuamente correlacionadas, con la programación diferenciable y la descripción del método del gradiente proyectado logra un método del análisis numérico para encontrar el autovector asociado al mayor autovalor de una matriz simétrica. [p.1, 6]

### 6.3 Responsabilidad ética

Hago mención de respetar la ley universitaria N° 30220 en su artículo 45 inciso 45.2.

El trabajo de investigación ha sido realizado con la citación de acuerdo al APA.

## CONCLUSIONES

- En el desarrollo del plano de corte es un proceso iterativo lo cual va obteniendo una sucesión de soluciones aproximadas factibles que converge al óptimo primal y una sucesión de soluciones factibles duales que convergen al óptimo teórico dual.

- Se obtienen el llamado GAP de dualidad el cual puede ser 0 ó positivo

- El proceso de corte es eficiente ya que se obtienen ambas soluciones primal-duales y permite establecer algunas interpretaciones económicas.

## RECOMENDACIONES

- Recordar que los multiplicadores de Lagrange se originó por el estudio de las curvas tautócrona y con ello se dio una rama a la matemática llamado al cálculo de variaciones por ende este método de corte puede aplicarse a problemas variacionales en otros problemas de economía.

- Es necesario tener un conocimiento de uno o más lenguajes de programación en el cual formulan un algoritmo numérico.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS


[1] Bazaraa M., Sheraly H. and Shetty C. *Nonlinear programming: Theory and algorithms*. Jon Wiley & Sons, third edition, 2006.

[2] Bertsekas D.P. *Nonlinear programming*. Massachusetts institute of technology, second edition, 1995.

[3] Cantu, C., R. *Programación no lineal*. San Nicolás de los Garza, N., L., Mayo 1996

[4] Canales, G., P. *Teoría y aplicaciones de optimización e investigación de operaciones*. Fondo Editorial Eduni, Universidad Nacional de Ingeniería, 2018

[5] Castillo, E. Conejo, A. Pedregal, P. García, R y Alguacil, N. *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia*. Ciudad Real, España. 2002.

[6] Espejo D., J. *Análisis de componentes principales vs método del gradiente proyectado*. Universidad Nacional de Ingenieria. 2017.

[7] Gilberto Espinosa y Alejandro Vázquez. *Aplicaciones de Programación no Lineal*. OmniaScience (Omnia Puclisher SL) 2016.

[8] Leañez G, F.J. *Estudio comparativo de la relajación Lagrangeana y la programación entera –mixta en el problema del pre-despacho de sistemas medianos*. Santiago de Chile, 2013.

[9] Martínez S, J. *Una generalización del Teorema de los multiplicadores de Lagrange: condiciones de Karush-Kuhn-Tucker en Programación no lineal*. Universidad de Granada, 2017/2018

[10] Shimizu, Kiyotaka. Ishizuka, Yo. F. Bard, Jonathan. *Nondufferentiable and Two-Level Mathematical Programming*. kluwer Academic Publishers. Boston/London/Dordrecht, 1997.

[11] Zhang, X., Z. Shuai y K. Wang. *Nonlinear analysis:* Real World Applications. Optimal impulsive harvesting policy for single population. 2003.

**ANEXOS**

Matriz de consistencia

| Problemas | Objetivos | Hipótesis | Metodología |
|---|---|---|---|
| **Problema general**<br>¿Es posible resolver un problema primal mediante el dual lagrangiano?<br><br>**Problema específico:**<br>[1]¿Será posible realizar el método plano de corte en la función dual lagrangiano?<br><br>[2]¿Será posible realizar la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano? | **Objetivo general:**<br>Resolver un problema primal mediante el dual lagrangiano.<br><br>**Objetivos específicos:**<br>[1] Realizar el método de plano de corte en la función dual lagrangiano.<br><br>[2] Realizar la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano. | **Hipótesis general:**<br>Existe una solución a un problema dual lagrangiano mediante el plano de corte.<br><br>**Hipótesis específicas:**<br>[1] Existe el método de plano de corte en la función dual lagrangiano.<br><br>[2] Existe la dirección de ascenso en la función dual lagrangiano. | **Tipo de investigación**<br>La presente investigación es de tipo cualitativa, se trata de un estudio que sólo usa referencias teóricas.<br><br>**Diseño de la investigación**<br>Se trata de una investigación descriptiva, puesto que nos interesa profundizar la teoría, teoremas y corolarios de resultados clásico de optimización. |