

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



UNA VISIÓN TOPOLÓGICA DE CURVAS  
ALGEBRAICAS PROYECTIVAS PLANAS  
COMPLEJAS

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

JORGE LUIS ZAPATA SOSA

Callao, 2019  
PERÚ



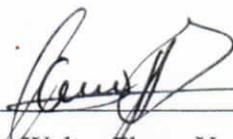
**HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN**

**UNA VISIÓN TOPOLÓGICA DE CURVAS ALGEBRAICAS PROYECTIVAS  
PLANAS COMPLEJAS**

**JORGE LUIS ZAPATA SOSA**

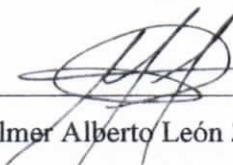
Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:



Dr. Walter Flores Vega

Presidente



Lic. Elmer Alberto León Zarate

Secretario



Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana

Vocal



Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Asesor

Callao – 2019

PERÚ

## **DEDICATORIA**

A mi adorada hija Fabiana, por ser el motor y la inspiración para ser mejor persona y profesional cada día. A mi esposa Heydee, por su paciencia y comprensión en todo el tiempo invertido para poder cumplir con este gran objetivo. A mi mamá Mercedes y a mi papá Víctor por haberme hecho una persona de bien, por todo el esfuerzo que hicieron para poder darme la educación que ellos han podido.

## **AGRADECIMIENTO**

Para poder elaborar este trabajo he necesitado del apoyo y asesoramiento de un gran profesional, que he tenido la suerte de poder conocer, ya que muy aparte de haber recibido sus aportes académicos, he recibido también el apoyo de un amigo. Por ello quiero agradecer a mi asesor Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey, por sus valiosas enseñanzas, por la paciencia que tuvo conmigo en cada una de las reuniones que hemos tenido, por la dedicación, por el acompañamiento y por los grandes aportes académicos que me ha brindado para la elaboración de este informe final de la investigación realizada.

## INDICE

DEDICATORIA .....	III
AGRADECIMIENTO.....	IV
TABLAS DE CONTENIDO.....	3
RESUMEN.....	4
ABSTRACT.....	5
INTRODUCCIÓN .....	6
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	7
1.1. Descripción de la realidad problemática.....	7
1.2. Formulación del problema.....	9
1.3. Objetivos de la investigación.....	9
1.4. Limitantes de la investigación. ....	9
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO .....	11
2.1. Antecedentes.....	11
2.2. Marco .....	12
2.2.1. Teórico .....	12
Definiciones sobre Espacios Topológicos .....	12
Continuidad y Equivalencia Topológica .....	16
Compacidad .....	19
2.3. Definiciones de términos básicos .....	20
CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES .....	22
3.1. Hipótesis .....	22
3.2. Operacionalización de las variables.....	22
CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN .....	23
4.1. Tipo y diseño de la investigación .....	23

4.2. Población y muestra.....	23
4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documentada .....	23
4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo...23	
CAPÍTULO V: RESULTADOS .....	24
5.1. Resultados Descriptivos .....	24
5.1.1. Espacio Proyectivo Complejo $P_{(\mathbb{C})}^n$ .....	24
5.1.2. Curvas Proyectivas Complejas en $P_{(\mathbb{C})}^2$ .....	26
5.1.3. Transformación Proyectiva .....	30
5.1.4. La Función $P$ de Weierstrass .....	32
5.1.5. La Fórmula del genero grado .....	39
Corolario (La fórmula del género grado).....	43
CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS .....	45
CONCLUSIONES .....	47
RECOMENDACIONES .....	48
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	49
ANEXO.....	51
MATRIZ DE CONSISTENCIA .....	51

## TABLAS DE CONTENIDO

### INDICE DE FIGURAS

Figura N° 1.1: Curvas Algebraicas Reales.....	8
Figura N° 2.1: Esfera Unitaria .....	18
Figura N° 5.1: Paralelogramo fundamental y el Toto Complejo .....	33
Figura N° 5.2: Triangularización de la esfera .....	37
Figura N° 5.3: Triangularización de $P$ . .....	37
Figura N° 5.4: Subdivisión del círculo unitario en $\square$ . .....	38
Figura N° 5.5: Subdivisión de un triángulo. ....	39
Figura N° 5.6: Subdivisión de dos triángulos adyacentes.....	39

## RESUMEN

Es conocido que una superficie orientable conexa tiene definido un número natural llamado género, que geoméricamente es el número de asas o huecos de la variedad. La triangulación y la característica de Euler son invariantes topológicas de una superficie con las condiciones dadas anteriormente, el género y la característica de Euler de la superficie con  $\chi = V - E + C$ , donde  $V$  (número de vértices),  $E$  (número de aristas),  $C$  (número de caras), de una triangulación elegida y  $g$  su género.

Una curva algebraica  $C$  plana compleja en  $P_{(\square)}^2$ , no solo es una variedad topológica de dimensión 1, sino que admite estructura de superficie de Riemann, además es compacta y Hausdorff pues  $P_{(\square)}^2$  lo es; todo ello nos permite definir el género de dicha curva. La curva  $C$  está definida por un polinomio homogéneo de tres variables con un grado dado.

En el presente trabajo se estudiará la relación entre el grado de una curva plana compleja en  $P_{(\square)}^2$  y el género que lo define, antes de ello se estudiará casos particulares como la recta proyectiva, cónicas proyectivas no singulares, cúbicas proyectivas no singulares, etc; esto nos permitirá tener una visión topológica de la curva con solo conocer su grado.

## ABSTRACT

It is known that a connected, orientable surface has defined a natural number called genus, which geometrically is the number of handles or holes of the surface. The triangulation and Euler characteristic are invariant topological of a surface with the conditions given above, the genus and Euler characteristic are related by the formula  $\chi = 2 - 2g$ . Where  $\chi$  is Euler characteristic of the surface with  $\chi = V - E + C$ , where  $V$  (number of vertices),  $E$  (number of edges),  $C$  (number of faces), of a chosen triangulation, and  $g$  its genus. A complex algebraic curve  $C$  in  $P_{(\mathbb{C})}^2$  is not only a topological variety of dimension 1, but it admits structure of Riemann surface, it is also compact and Hausdorff because  $P_{(\mathbb{C})}^2$  it is; all this allows us to define the genus of this curve. The curve  $C$  is defined by a homogeneous polynomial of three variables with a grade given. In the present work we will study the relationship between the degree of a complex curve in  $P_{(\mathbb{C})}^2$  and the genus that defines it. Before that, we will study particular cases such as the projective straight line, non-singular projective conic, non-singular cubic projective, etc; this will allow us to have a topological view of the curve just by knowing its degree.

## INTRODUCCIÓN

Habiendo estudiado en mi etapa universitaria varios textos en los cuales se muestra la teoría clásica de las curvas algebraicas en el contexto de  $\mathbb{C}^2$  de manera clara y rigurosa, me surge la inquietud de cómo establecer homeomorfismos que permitan tener una visión topológica de las curvas planas complejas no singulares.

Recordemos que la geometría proyectiva, es el resultado de un largo proceso de evolución que comienza con la geometría griega y culmina con la obra de los geómetras franceses y alemanes de la segunda mitad del siglo XIX. Dentro de este proceso podemos mencionar al geómetra francés Gérard Desargues, que con el teorema de Desargues establece la relación entre dos triángulos en un plano proyectivo. Ahora teniendo como base la topología, que es una rama de las matemáticas que estudia las figuras y cuerpos geométricos y sus representaciones, por ejemplo, un triángulo a nivel topológico puede verse como una circunferencia, se busca establecer un homeomorfismo entre una curva no singular plana proyectiva compleja de grado  $d$  y una esfera con  $d$  número de huecos. Para ello en el capítulo cinco daremos una visión topológica de una curva algebraica no singular en el cual se utilizará la fórmula del género - grado.

Cabe mencionar también que la presente investigación busca generar el interés sobre la geometría compleja que está inmersa dentro de la línea de investigación de geometría y topología diferencial de la escuela profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

## CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

A continuación, explicaremos como surge el estudio de las curvas algebraicas planas proyectivas no singulares:

Sea  $P_{(x,y)}$  un polinomio no constante de dos variables con coeficientes complejos.

Decimos que  $P_{(x,y)}$  no tiene factores repetidos si no podemos escribir:

$$P_{(x,y)} = (Q_{(x,y)})^2 \cdot R_{(x,y)}$$

Con  $Q_{(x,y)}$  y  $R_{(x,y)}$  polinomios y  $Q_{(x,y)}$  no constante.

Sea  $P_{(x,y)}$  un polinomio no constante de dos variables con coeficientes complejos y sin factores repetidos. Entonces la curva algebraica compleja en  $\mathbb{C}^2$  definida por  $P_{(x,y)}$  es:  $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / P_{(x,y)} = 0\}$

#### Teorema 1 (Hilbert's Nullstellensatz)

Si  $P_{(x,y)}$  y  $Q_{(x,y)}$  no tienen factores repetidos entonces ellos definen la misma curva algebraica compleja en  $\mathbb{C}^2$  si y solo si existe  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que:

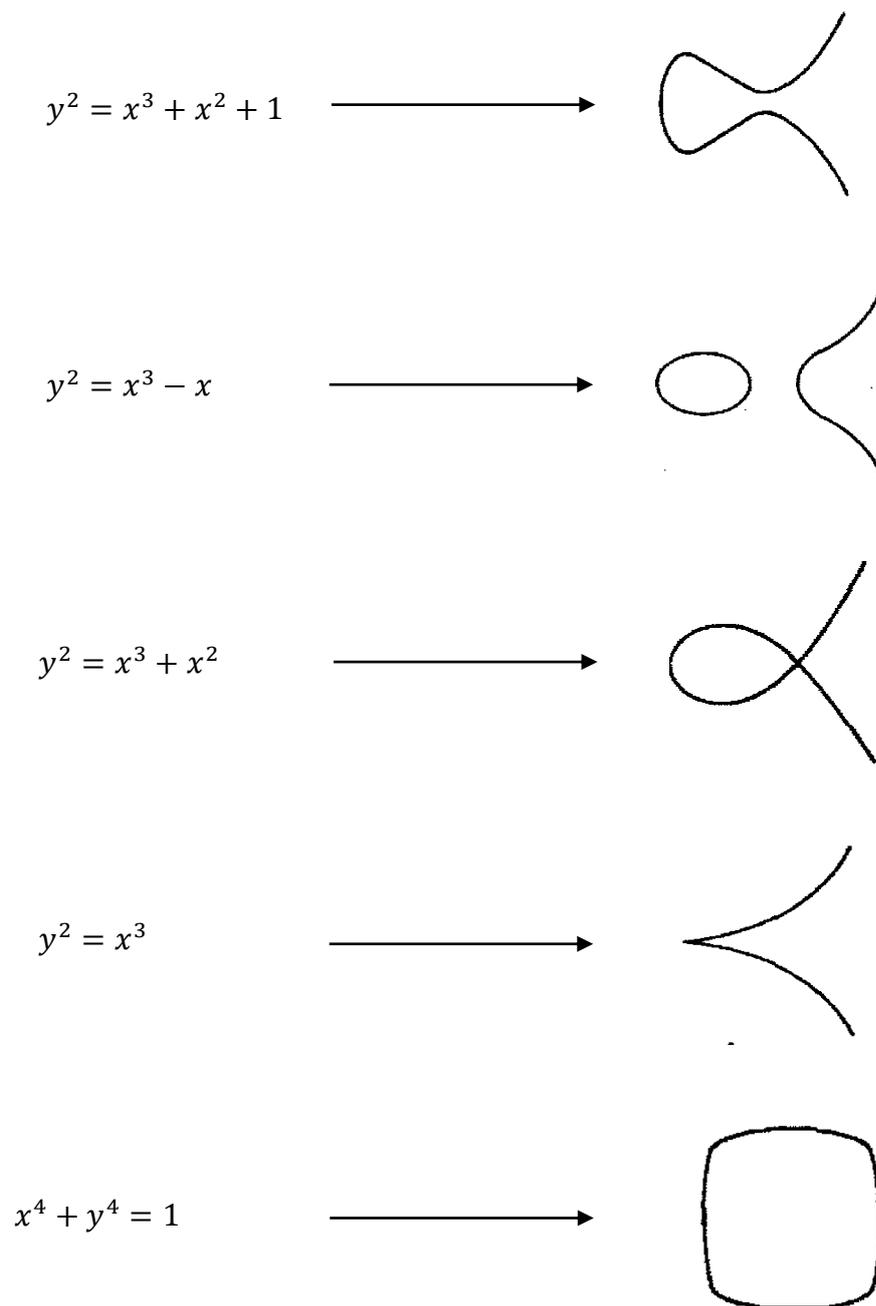
$$P_{(x,y)} = \lambda Q_{(x,y)}$$

Con este teorema, una manera más general de definir una curva algebraica compleja en  $\mathbb{C}^2$  es como una clase de equivalencia de polinomios no constantes de dos variables, donde dos polinomios son equivalentes si y solo si ellos son múltiplos por un escalar no nulo.

En el contexto de  $\mathbb{R}^2$  varias curvas algebraicas pueden verse geoméricamente como:

Figura N° 1.1: Curvas Algebraicas Reales

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Oval}$$



Sin embargo, si las curvas anteriores estarían definidas en  $\mathbb{C}^2$ , no habría una visión geométrica clara. Por ello nos hemos ubicado en el contexto de  $P^2_{(\mathbb{C})}$ , es decir, en el plano proyectivo complejo, donde estudiaremos una visión topológica de las curvas consideradas anteriormente, dando énfasis en los tipos de singularidad que existen y en el grado del polinomio que define a la curva

## **1.2. Formulación del problema**

### **1.2.1. Problema general**

¿Cuál es la visión topológica de una curva algebraica proyectiva plana compleja no singular en el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ ?

### **1.2.2. Problemas específicos**

¿Será posible determinar el género de una curva no singular sobre el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ ?

¿Será posible establecer homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc en  $P^2_{(C)}$  y la esfera o el toro complejo?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivo general**

Establecer la visión topológica de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ .

### **1.3.2. Objetivos específicos**

Determinar el género de una curva no singular sobre el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ .

Establecer homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc en  $P^2_{(C)}$  y la esfera o el toro complejo.

## **1.4. Limitantes de la investigación.**

### **1.4.1. Limitante Teórico**

Como limitación teórica se encontró la escasa bibliografía en la escuela de matemática de la Universidad Nacional del Callao relacionada a las curvas algebraicas proyectivas en el espacio complejo, así mismo en los repositorios especializados se encontró poca información con respecto a la investigación a desarrollar o en algunos casos presentaban un costo para poder ser descargadas.

### **1.4.2. Limitante temporal**

El hecho de poder establecer una visión topológica de las curvas algebraicas proyectivas planas complejas se basa fundamentalmente en poder encontrar homeomorfismos entre estas curvas algebraicas de grado 2 y 3 en el plano proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$  y la esfera. Una limitante que se evidenció fue el tiempo que tomó poder encontrar los homeomorfismos planteados en la presente investigación ya que no ha sido una tarea fácil ni sencilla.

### **1.4.3. Limitante espacial**

Nuestro contexto se ubica sobre el conjunto de las curvas planas proyectivas complejas que son del tipo no singular. Un limitante que se encontró en el presente trabajo es considerar curvas del tipo singular, donde su estudio depende de su tipo de singularidad, por ejemplo, una cúspide, un nodo, etc.

## CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes

#### Antecedentes Internacionales

Lozano Cesar (2006), “Sobre la clasificación topológica de las curvas algebraicas”, publicado en la Escuela Superior de Física y Matemática de México, se basa en analizar las curvas algebraicas no singulares en el plano proyectivo  $P_{(\mathbb{C})}^2$ .

Lozano Cesar (2016), “Curvas algebraicas y la pregunta de Halphen”, publicado en el Instituto de Matemáticas de la UNAM en México, manifiesta que el grado de la curva  $C$  se define como el grado del polinomio  $f$  y se considera  $C = V(f)$  cuando se desea hacer referencia explícita al polinomio que define la curva.

Gómez David (2013), “Curvas Algebraicas”, publicado en la Universidad Complutense de Madrid en España, usa las fórmulas de Plucker para el estudio de las singularidades de una curva algebraica.

Del Campo Sánchez Abraham (2004), “Teorema de Riemman-Roch”, publicado en la U.N.A.M. en México, demuestra el teorema de Riemman-Roch en el contexto de curvas algebraicas planas proyectivas no singulares, muy útil en el estudio de funciones holomorfas sobre la curva.

Kirwan Frances (1992), “Complex Algebraic Curves”, publicado en la Universidad de Oxford en Estados Unidos, define la teoría de curvas algebraicas complejas y el espacio proyectivo complejo.

#### Antecedente Nacional

Egúsquiza Mery (2018), “Aspectos geométricos de la teoría de curvas algébricas”, publicado en la Pontificia Universidad Católica del Perú”, presenta el concepto de

curva algebraica afín y una demostración geométrica de la fórmula “grado género” de una curva lisa.

## 2.2. Marco

En esta sección las definiciones y resultados importantes necesarios para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

### 2.2.1. Teórico

#### Definiciones sobre Espacios Topológicos

##### Definición 1

Sea  $X$  un conjunto y  $T$  una colección de subconjuntos de  $X$ .  $T$  se llama topología de  $X$  si:

- i.  $X, \emptyset \in T$ .
- ii. La unión de cualquier colección de elementos de  $T$  pertenece a  $T$ .
- iii. La intersección de cualquier colección finita de elementos de  $T$  pertenece a  $T$ .

El par  $(X, T)$ , donde  $T$  es una topología en  $X$ , es llamado un espacio topológico.

#### Ejemplo

1. Sea  $X$  un conjunto y  $T = P(X)$  el conjunto de partes de  $X$ . Obviamente  $T$  es una topología en  $X$  y así  $(X, T)$  es un E.T. llamado el espacio topológico discreto.
2. Sea  $X$  un conjunto y  $T = \{A \subset X / X - A \text{ es finito } \text{ó} A = \emptyset\}$ . Veamos que  $T$  es una topología en  $X$ , en efecto:
  - i.  $\emptyset, X \in T$ .
  - ii. Sea  $(A_i)_{i \in I}$  una colección de elementos de  $T$  tal que  $A_i$  es no vacío  $\forall i \in I$  ( $A_i \neq \emptyset$ ), entonces:  $X - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X - A_i) \in T$ .
  - iii. Sea  $(A_i)_{i \in I}$ ,  $I$  finito, una colección de elementos de  $T / A_i \neq \emptyset, \forall i$ , se verifica:  $X - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X - A_i) \in T$

$\therefore T$  es una topología en  $X$ , llamada la topología cofinita y  $(X, T)$  es un E.T.

3. Sea  $X = \mathbb{R}^n; n \geq 1$ . Un subconjunto  $A$  de  $X$  es llamado abierto si:

$\forall x \in A, \exists r > 0 / B_{(x,r)} \subset A$ . Definamos:  $T = \{ A \subset X / A \text{ es un conjunto abierto} \}$ . Veamos:

i.  $\emptyset, X \in T$

ii. Luego:  $\exists i \in I / x \in A_i \rightarrow \exists r_i > 0 / B_{(x,r_i)} \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

Por lo tanto:  $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$ .

iii. Sea  $(A_i)_{i \in I}$  una colección finita de elementos de  $T$  y  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ .

Entonces:  $x \in A_i, \forall i \in I$

Luego:  $\exists r_i > 0 / B_{(x,r_i)} \subset A_i, \forall i \in I$

Implicando que:  $\bigcap_{i \in I} B_{(x,r_i)} \subset \bigcap_{i \in I} A_i$ .

Así:  $\exists r > 0 / B_{(x,r)} \subset \bigcap_{i \in I} B_{(x,r_i)} \subset \bigcap_{i \in I} A_i$ .

Por lo tanto:  $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$ .

Así  $T$  es una topología en  $X$ , llamado topología euclidiana.

4. Sea  $X = \{0, 1\}$  y  $T = \{\emptyset, X, \{0\}\}$  trivialmente  $T$  es una topología en  $X$  llamada la topología de Sierpinski.

### Definición 2

Sea  $(X, T)$  un E.T. Un conjunto  $A \subset X$  es llamado abierto si  $A \in T$  y cerrado si  $A^c \in T$ .

### Ejemplo

1. Sea  $X = \mathbb{Z}$  en la topología cofinita  $T$ .

- $\emptyset \notin T$
- $\emptyset \cup Z_- \in T$

2. Sea  $X = \{0,1\}$  con la topología de Sierpinski.

- $\{0\}$  es un conjunto abierto.
- $\{1\}$  es un conjunto cerrado.

3. Sea  $X$  un conjunto con la topología discreta. Entonces cualquier subconjunto de  $X$  es abierto y cerrado.

### Definición 3

Sea  $(X, T)$  un E.T. y  $A \subset X$ . Considere la familia de subconjuntos de  $A$  tal que:  
 $T_A = \{A \cap U / U \in T\}$ .

Veamos que  $(A, T_A)$  es un E.T., en efecto:

- $A, \emptyset \in T_A$
- Sea  $(A_i)_{i \in I}$  una colección de elementos de  $T_A \rightarrow A_i = A \cap U_i / U_i \in T$ .

$$\text{Entonces: } \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

$$\text{Como: } \bigcup_{i \in I} U_i \in T, \text{ entonces: } \bigcup_{i \in I} A_i \in T_A$$

- Sea  $(A_i)_{i \in I}$ ,  $I$  finito, una colección de elementos de  $T_A$ .

$$A_i = A \cap U_i / U_i \in T \rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \cap U_i) = A \cap \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right)$$

$$\text{Como: } \bigcap_{i \in I} U_i \in T, \text{ entonces: } \bigcap_{i \in I} A_i \in T_A.$$

El par  $(A, T_A)$  es llamado un subespacio topológico de  $(X, T)$ .

#### Definición 4

Sea  $(X, T)$  un E.T. y  $A \subset X$ . El interior de  $A$  denotado por  $Int(A)$ , es el conjunto de la unión de todos los abiertos incluidos en  $A$ .

La clausura (cerradura) de  $A$ , denotado por  $\bar{A}$ , es el conjunto de la intersección de todos los cerrados que contienen a  $A$ .

#### Ejemplo

1. Sea  $X = \{0, 1\}$  con la topología de Sierpinski.

- $Int(\{0\}) = \{0\}$
- $Int(\{1\}) = \emptyset$
- $\overline{\{0\}} = X$
- $\overline{\{1\}} = \{1\}$

2. Sea  $X = \mathbb{N}$  con la topología cofinita.

- $Int(\{2, 3, 4, \dots\}) = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ ; pues  $\{3, 4, 5, 6, \dots\} \cup \{4, 5, 6, 7, \dots\} \in T$ .

#### Propiedades

Sea  $(X, T)$  un E.T.

- Si  $A \subset X \rightarrow Int(A) \subset A \wedge A \subset \bar{A}$ .
- $Int(A) \in T \wedge \bar{A}^c \in T$
- $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B) \wedge \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .
- Si  $A \subset B \rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} \wedge Int(A) \subset Int(B)$

#### Definición 5

Sea  $(X, T)$  un E.T.  $(X, T)$  es llamado de Hausdorff si para cada  $x_1, x_2 \in X / x_1 \neq x_2$  existen  $U_1, U_2 \in T$  conteniendo a  $x_1, x_2$  respectivamente tal que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

### Ejemplo

1. Sea  $X$  un conjunto /  $Card(X) \geq 2$  con la topología discreta. Sean  $x_1, x_2 \in X / x_1 \neq x_2$  entonces existen  $\{x_1\}, \{x_2\} \in P(X)$  y  $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ .  
 $\therefore (X, P(X))$  es un espacio de Hausdorff.
2. Sea  $X = \{0, 1\}$  con la topología de Sierpinski. Sean  $x_1 = 0, x_2 = 1$ .  
Como no existen abiertos que contienen a 0, 1 con intersección vacía, se concluye que  $(X, T)$  no es un espacio de Hausdorff.
3. Sea  $X = \mathbb{R}^n$  con la topología euclidiana  $T$ .  $(X, T)$  es un espacio de Hausdorff ya que para cualquier par de puntos diferentes  $x_1, x_2$  podemos encontrar bolas abiertas con radio suficientemente pequeño que contienen a  $x_1, x_2$  con intersección vacía.

### Continuidad y Equivalencia Topológica

#### Definición 6

Sean  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  dos espacios topológicos. Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua si:  $f^{-1}(U) \in T_X, \forall U \in T_Y$ .

### Ejemplo

1. Consideremos una función como suele estudiarse en análisis, es decir una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En análisis, definamos continuidad de  $f$  vía  $\varepsilon - \delta$ . Como se puede esperar, la definición  $\varepsilon - \delta$  y la nuestra son equivalentes.

#### 1° implicación:

Veamos que nuestra definición implica la definición  $\varepsilon - \delta$ .

En efecto, sea  $\varepsilon > 0$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , consideremos:  $U = \langle f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon \rangle \in T_{\mathbb{R}}$

Luego:  $f^{-1}(U) \in \mathbb{R}$ . Ahora como  $x \in f^{-1}(U) \rightarrow \exists r > 0 / \langle x_0 - r; x_0 + r \rangle \in f^{-1}(U)$ .

Ahora sí:  $|x - x_0| < r \rightarrow x \in \langle x_0 - r; x_0 + r \rangle \in f_{(U)}^{-1}$

$\rightarrow f_{(x)} \in U \rightarrow f_{(x_0)} - \varepsilon < f_{(x)} < f_{(x_0)} + \varepsilon$ . Por tanto:  $|f_{(x)} - f_{(x_0)}| < \varepsilon$ .

Similarmente la otra implicación.

2. Sean  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  dos espacios topológicos con  $(X, T_X)$  el espacio topológico discreto. Entonces toda función  $f : X \rightarrow Y$  es continua ya que sí  $U \in T_Y \rightarrow f_U^{-1} \in T_X = P(X)$ .

### Teorema 1

Sean  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  dos espacios topológicos. Sea  $f : X \rightarrow Y$ , entonces son equivalentes:

- i.  $f$  es continua.
- ii.  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ ;  $\forall A \subset X$ .
- iii.  $f_{(B)}^{-1}$  es cerrado en  $X$ ,  $\forall B$  cerrado.
- iv.  $\forall x \in X$  y cada vecindad  $V$  de  $f_{(x)}$ ,  $\exists U$  vecindad de  $x / f_{(U)} \subset V$ .

### Definición 7

Sean  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  dos espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una biyección. Si las funciones  $f$  y  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  son continuas, entonces  $f$  es llamada un homeomorfismo.  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  son llamados homeomorfos si  $\exists f : X \rightarrow Y$  homeomorfismo y se escribe:  $X \cong Y$ .

### Ejemplos

1.  $\square$  es homeomorfo a cualquier recta en  $\square^2$ . En efecto, si consideramos la recta en  $\square^2$  definida por  $L : y = ax + b; a \neq 0$ . Tal que definimos

$$\begin{aligned} f : \square &\rightarrow L \\ x &\rightarrow f_{(x)} = (x, ax + b) \end{aligned}$$

Entonces podremos verificar que  $f$  es una biyección continua y  $f^{-1} : L \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{(x;ax+b)}^{-1} = x$  también lo es.

2. El intervalo  $\langle -1;1 \rangle$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . En efecto, basta considerar la biyección continua  $f : \langle -1;1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f_{(x)} = \frac{x}{1-x^2}$$

Con inversa  $f_{(x)}^{-1} = \frac{2x}{1+(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}}$  continua.

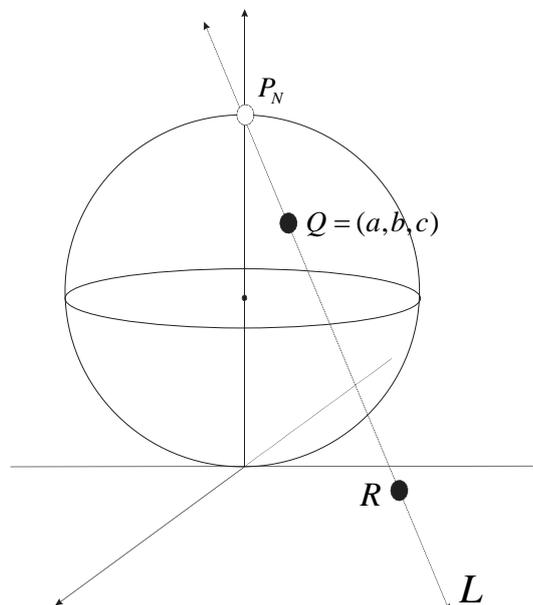
3. Análogamente se puede probar que:

i.  $\langle a;b \rangle \cong \mathbb{R} / a < b$

ii.  $P \cong \mathbb{R}^2$ ;  $P$  un plano en  $\mathbb{R}^3$ .

4. Sea  $P_N = (0,0,1)$  y  $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \|(x,y,z)\| = 1\}$ . Vamos a ver que:  $S^2 - P_N \cong \mathbb{R}^2$ . Gráficamente podemos considerar:

Figura N° 2.1: Esfera Unitaria



La esfera  $S$  de centro  $(0,0,1)$  está sobre el eje de las  $z$  y es de radio 1, donde  $L$  es una recta que pasa por el polo norte y  $R$  es un punto que está en el plano  $z=0$ , entonces  $L: (0,0,1)+t\overline{P_N Q} = (0,0,1)+t(a,b,c-1)$  de donde  $x=at$ ,  $y=bt$ ,  $z=t(c-1)+1$ , pero como  $z=0$ , entonces  $0=t(c-1)+1$ . Definiendo así el homeomorfismo,

$$f: S^2 - P_N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow f_{(x,y,z)} = \left( \frac{x}{1-z}; \frac{y}{1-z} \right)$$

que es una biyección continua con inversa:

$$f_{(x,y)}^{-1} = \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}; \frac{2y}{1+x^2+y^2}; 1 - \frac{2}{1+x^2+y^2} \right)$$

## Compacidad

### Definición 8

Una colección  $U$  de subconjuntos de un espacio topológico  $(X, T)$  se dice que cubre  $X$  o es un cubrimiento de  $X$ , si la unión de elementos de  $U$  es igual a  $X$ . Este cubrimiento es llamado abierto si los elementos de  $U$  pertenecen a  $T$ .

### Definición 9

Un espacio topológico  $(X, T)$  se dice compacto si todo cubrimiento abierto  $U$  de  $X$  contiene un subcubrimiento finito que también cubre  $X$ .

### Ejemplo

1.  $\mathbb{R}$  no es un compacto ya que  $U = \{ \langle n, n+2 \rangle / n \in \mathbf{Z} \}$  es un cubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  del cual no se puede extraer un subcubrimiento finito.
2. El intervalo  $\langle 0; 1]$  no es compacto. Considere el cubrimiento abierto de  $\langle 0; 1]$ :

$$U = \left\{ \left\langle \frac{1}{n}; 1 \right] / n \in \mathbf{Z}^+ \right\}$$

del cual no se puede extraer un subcubrimiento finito.

## Teorema 2

Sean  $(X, T_X)$  y  $(Y, T_Y)$  dos espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una función continua.

Si  $A \subset X$  es compacto  $\rightarrow f_{(A)}$  es compacto.

Prueba:

Sea  $(U_i)_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $f_{(A)}$ , es decir  $f_{(A)} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , entonces

$$A \subset f_{(f_{(A)})}^{-1} \subset f_{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)}^{-1} = \bigcup_{i \in I} f_{(U_i)}^{-1}$$

Esto quiere decir que  $(f_{(U_i)}^{-1})_{i \in I}$  es un cubrimiento de  $A$ . Ahora, como  $f$  es continua

y  $U_i$  son abiertos, entonces  $f_{(U_i)}^{-1}$  son abiertos. Además, como  $A$  es compacto

entonces posee un subcubrimiento finito

$$A \subset \bigcup_{i_k \in I} f_{(U_{i_k})}^{-1} \rightarrow f_{(A)} \subset f_{\left(\bigcup_{i_k \in I} f_{(U_{i_k})}^{-1}\right)} \rightarrow f_{(A)} \subset \bigcup_{i_k \in I} U_{i_k}$$

Por lo tanto  $f_{(A)}$  es compacto.

## Teorema 3

Sea  $(X, T)$  un E.T. Hausdorff compacto y  $(Y, T_Y)$  otro E.T. Si  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva continua, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

### 2.3. Definiciones de términos básicos

A lo largo el presente trabajo hemos adoptado las siguientes terminologías:

$X$  : conjunto no vacío

$T_X$  : topología de  $X$

$(X, T)$  : espacio topológico

$B_{(x,r)}$  : bola de centro  $x$  y radio  $r$

$Int(A)$  : interior de un conjunto  $A$

$\bar{A}$  : cerradura de un conjunto  $A$

$\mathbb{C}^2$ : plano complejo

$P_{(\mathbb{C})}^2$ : plano proyectivo complejo

$P_{(\mathbb{C})}^n$ : espacio proyectivo complejo  $n$  dimensional

$C = \{[x, y, z] \in P_{(\mathbb{C})}^2 / P_{(x,y,z)} = 0\}$ : denota la curva proyectiva en el plano proyectivo complejo

$Sing(C)$ : conjunto de singularidades de una curva

$\Pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_{(\mathbb{C})}^n$ : proyección natural

$P$ : función  $P$  de Weierstrass

$\Gamma$ : retículo asociado a la función de Weierstrass

$\chi$ : característica de Euler

## CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

### 3.1. Hipótesis

Las hipótesis para Hernández Sampieri “indican lo que tratamos de probar y se definen como explicaciones tentativas del fenómeno investigado. Se derivan de la teoría existente y deben formularse a manera de proposiciones”. (2014, p. 104)

#### 3.1.1. Hipótesis general

Si se establece la visión topológica de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ .

#### 3.1.2. Hipótesis específicas

Si es posible determinar el género de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo  $P^2_{(C)}$ .

Si es posible establecer homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc. en  $P^2_{(C)}$  y la esfera o el toro complejo.

### 3.2. Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores
Consideramos variable a una curva $C$ no singular en el espacio proyectivo complejo $P^2_{(C)}$ , tal que se define de la siguiente manera: $C = \{(x, y, z) \in P^2_{(C)} / P_{(x,y,z)} = 0\}$	Visión de una curva no singular.	$\forall [a: b: c] \in C$ , se tiene que: $\frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial y}$ ; $\frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial x}$ ; $\frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial z}$ No se anulan simultáneamente,
	Genero de una curva no singular.	Para una curva no singular en el espacio proyectivo complejo definimos: $g_{(C)} = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$

## CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

### 4.1. Tipo y diseño de la investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios, utilizando el diseño descriptivo - demostrativo. Para tal propósito:

**Primero:** Hemos estudiado la teoría de curvas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{C}^2$ , enfatizando en el cálculo de los puntos singulares.

**Segundo:** Hemos estudiado la estructura topológica y algebraica del plano proyectivo complejo  $P_{(\mathbb{C})}^2$ .

**Tercero:** A partir de la fórmula de género grado, hemos definido la visión topológica de una curva no singular en  $P_{(\mathbb{C})}^2$ .

### 4.2. Población y muestra

Por ser la investigación del tipo teórico y abstracto, no permite tener una población.

### 4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Se utilizó la técnica de lectura analítica, que consiste en leer el texto en forma pausada, reflexiva y minuciosa, con el objetivo de entender el material bibliográfico especializado que se ha recopilado. Se reunió todo el material publicado como libros, páginas web, paper y se consultó con el asesor para poder discriminar el material necesario para el trabajo. Se utilizó el razonamiento lógico o causal, manejando expresiones del tipo inductivo deductivo, tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

### 4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos de campo.

## CAPÍTULO V: RESULTADOS

### 5.1. Resultados Descriptivos

#### 5.1.1. Espacio Proyectivo Complejo $P_{(\mathbb{C})}^n$

Sea  $X = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  sobre  $X$  vamos a definir una relación “ $\sim$ ” de la siguiente manera: Sean  $z_1, z_2 \in X$ , entonces:  $z_1 \sim z_2 \leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} / z_1 = \lambda z_2$ .

Es fácil ver que “ $\sim$ ” es una relación de equivalencia sobre  $X$ . Con esto definimos:

$$P_{(\mathbb{C})}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim} = \{[z] / z \in \mathbb{C}^{n+1}\}$$

Donde:

$$[z] = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / w \sim z\}$$

Considerando  $P_{\square}^n$  que representa el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 en  $\square^{n+1}$ .

#### Ejemplo 1

1. Para  $n=1$ ,  $P_{(\mathbb{C})}^1$  es llamada la recta proyectiva compleja.
2. Para  $n=2$ ,  $P_{(\mathbb{C})}^2$  es llamado el plano proyectivo complejo.

Ahora dotemos de una topología a  $P_{(\mathbb{C})}^n$ . Defina la familia:

$T = \{U \in P_{(\square)}^n / \Pi_{(U)}^{-1}$  es un abierto de  $\square^{n+1} - \{0\}\}$ , donde:  $\Pi: \square^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_{(\square)}^n$  es la proyección natural.

Veamos que  $T$  es una topología sobre  $P_{(\square)}^n$ . En efecto:

- i. Como  $\Pi_{(\emptyset)}^{-1} = \emptyset$  y  $\emptyset$  es abierto en  $\square^{n+1} - \{0\} \rightarrow \emptyset \in T$ .

Como  $\Pi_{(P_{(\square)}^n)}^{-1} = \square^{n+1} - \{0\}$  y  $\square^{n+1} - \{0\}$  es abierto del mismo, entonces:  $P_{(\square)}^n \in T$ .

- ii. Sea  $(U_i)_{i \in I} \subset T \rightarrow \Pi_{(U_i)}^{-1}$  es un abierto de  $\square^{n+1} - \{0\} \quad \forall i$ , luego:

$\bigcup_{i \in I} \Pi_{(U_i)}^{-1} = \Pi_{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)}^{-1}$  es un abierto de  $\square^{n+1} - \{0\}$ . Por lo tanto  $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$ .

### Observación 1

1.  $F \subset P_{\square}^n$  es cerrado si y solo si  $\Pi_{(F)}^{-1}$  es cerrado en  $\square^{n+1} - \{0\}$ .

Prueba:

Sea  $F \subset P_{\square}^n$  cerrado  $\leftrightarrow F^c$  es abierto en  $P_{\square}^n$

$$\leftrightarrow \Pi_{(F^c)}^{-1} \text{ es abierto en } \square^{n+1} - \{0\}$$

$$\leftrightarrow \left(\Pi_{(F)}^{-1}\right)^c \text{ es abierto en } \square^{n+1} - \{0\}$$

$$\leftrightarrow \Pi_{(F)}^{-1} \text{ es cerrado en } \square^{n+1} - \{0\}.$$

2.  $\Pi: \square^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_{(\square)}^n$  es continua.

Prueba:

Directo de la definición.

3. Si  $(X, T_X)$  es un espacio topológico, una función  $f: P_{(\square)}^n \rightarrow X$  es continua si y solo si  $f \circ \Pi: \square^{n+1} - \{0\} \rightarrow X$  es continua.

Prueba:

$\rightarrow$ ) Es obvia ya que  $f$  y  $\Pi$  son continuas.

$\leftarrow$ ) Sea  $v \in T_x$ , entonces:

$$(f \circ \Pi)_{(v)}^{-1} \text{ es un abierto en } \square^{n+1} - \{0\} \rightarrow \Pi_{(f(v))}^{-1} \text{ es un abierto en } \square^{n+1} - \{0\}$$

$\therefore f_{(v)}^{-1}$  es un abierto de  $P_{\square}^n$ .

### Teorema 4

$P_{(\mathbb{C})}^n$  es compacto y Hausdorff.

Prueba:

Sea  $S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \square^{n+1} / |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 1 \right\}$ . Veamos que:

$$\Pi_{(S)} = P_{(\square)}^n$$

En efecto:

Sea  $[(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})] \in P_{(\mathbb{C})}^n$ , definamos:  $a = \|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\| > 0$

$$\rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \square \left( \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \dots, \frac{x_{n+1}}{a} \right)$$

$$\text{Implicando: } [(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})] \square \left[ \left( \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \dots, \frac{x_{n+1}}{a} \right) \right]$$

$$\text{Pero como: } \left( \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \dots, \frac{x_{n+1}}{a} \right) \in S \rightarrow [(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})] = \Pi_{\left( \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \dots, \frac{x_{n+1}}{a} \right)} \in \Pi_{(S)}$$

Finalmente  $\Pi$  es continua y  $S$  es compacto, por el teorema 2 se tiene que  $P_{\square}^n$  es compacto.

El hecho de que  $P_{(\mathbb{C})}^n$  es Hausdorff es debido a que  $\square^{n+1} - \{0\}$  lo es.

### 5.1.2. Curvas Proyectivas Complejas en $P_{(\mathbb{C})}^2$

Recordar que:  $P_{(\mathbb{C})}^2 = \{[x, y, z] / (x, y, z) \in \square^3 - \{0\}\}$  y  $[x, y, z] = [u, v, w]$  si y solo si  $\exists \lambda \in \square - \{0\} / x = \lambda u; y = \lambda v; z = \lambda w$ . Recordar también que un polinomio  $P_{(x,y,z)}$  es llamado homogéneo de grado  $d$ ; si  $P_{(\lambda x, \lambda y, \lambda z)} = \lambda^d P_{(x,y,z)}$ ;  $\forall \lambda \in \square$ .

#### Definición 10

Sea  $P_{(x,y,z)}$  un polinomio homogéneo no constante de variables  $x, y, z$  con coeficientes complejos. Asumamos que  $P_{(x,y,z)}$  no tiene factores repetidos. La curva proyectiva  $C$  definida por  $P_{(x,y,z)}$  es:  $C = \{[x, y, z] \in P_{(\mathbb{C})}^2 / P_{(x,y,z)} = 0\}$ .

#### Definición 11

El grado de una curva proyectiva  $C$  en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  definida por un polinomio homogéneo  $P_{(x,y,z)}$  es el grado de  $P_{(x,y,z)}$ . La curva  $C$  es llamada irreducible si el polinomio que

lo define lo es. Una curva proyectiva irreducible  $D$  definida por un polinomio homogéneo  $Q_{(x,y,z)}$  es llamada una componente de  $C$  si  $Q_{(x,y,z)}$  divide a  $P_{(x,y,z)}$ .

### Definición 12

Un punto  $[a, b, c]$  de una curva proyectiva  $C$  en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  definida por un polinomio homogéneo  $P_{(x,y,z)}$  es llamada singular si

$$\frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial x} = \frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial y} = \frac{\partial P_{(a,b,c)}}{\partial z} = 0$$

El conjunto de los puntos singulares de  $C$  es denotado por  $Sing(C)$  y la curva  $C$  es llamada no singular si  $Sing(C) = \emptyset$ .

### Ejemplo 2

1. La curva proyectiva en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  definida por  $x^2 + y^2 = z^2$  es no singular.

En efecto:

Supongamos que  $Sing(C) \neq \emptyset$  entonces existe al menos un punto singular, por ejemplo  $[a, b, c]$ , luego:  $2a = 2b = 2c = 0 \rightarrow a = b = c = 0$

Esto es una contradicción ya que  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ .

2. La curva definida por  $y^2z = x^3$  tiene un punto singular en  $[0, 0, 1]$ . En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2; \frac{\partial P}{\partial y} = 2yz; \frac{\partial P}{\partial z} = y^2 \text{ entonces } \frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial x} = \frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial y} = \frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial z} = 0.$$

### Definición 13

Una curva proyectiva definida por la ecuación lineal  $\alpha x + \beta y + \delta z = 0$  donde  $\alpha, \beta, \delta \neq 0$  es llamada una línea proyectiva o simplemente una línea.

### Teorema 5

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Si  $X$  es Hausdorff entonces  $A$  lo es.

Prueba

Sean  $x, y \in A \subset X \rightarrow \exists U_x, U_y \in T$  que contienen a  $x, y$  respectivamente tal que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Sean  $V_x = U_x \cap A \in T_A$  y  $V_y = U_y \cap A \in T_A$ , entonces:  $V_x \cap V_y = \emptyset$ . Por lo tanto,  $A$  es Hausdorff.

### Lema 1

Una curva proyectiva:  $C = \{[x, y, z] \in P_{(\square)}^2 / P_{(x,y,z)} = 0\}$  siempre es compacta y Hausdorff.

Prueba

Por el teorema 4 y 5, basta ver que  $C$  es cerrado. Sea

$$\begin{aligned} \Pi: \square^3 - \{0\} &\rightarrow P_{(\square)}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \Pi_{(x,y,z)} = [x, y, z] \end{aligned}$$

Donde:  $\Pi_{(C)}^{-1} = \{(x, y, z) \in \square^3 - \{0\} / \Pi_{(x,y,z)} \in C\}$

$$\Pi_{(C)}^{-1} = \{(x, y, z) \in \square^3 - \{0\} / P_{(x,y,z)} = 0\}$$

$$\Pi_{(C)}^{-1} = P_{(0)}^{-1}$$

Y esto es un conjunto cerrado pues  $P$  es un polinomio.  $C$  es Hausdorff ya que  $P_{(\square)}^2$  lo es.

### Teorema 6

$\square^2$  es homeomorfo a  $U = \{[x, y, z] \in P_{(\square)}^2 / z \neq 0\}$ .

Prueba

Definamos

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow \square^2 \\ [x, y, z] &\rightarrow f_{([x,y,z])} = \left( \frac{x}{z}; \frac{y}{z} \right) \end{aligned}$$

***f es biyectiva:***

- ✓ Si  $f_{([x_1, y_1, z_1])} = f_{([x_2, y_2, z_2])}$  entonces  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 
  - $\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2} \wedge \frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}$  entonces  $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$
  - $x_1 = \lambda x_2 \wedge y_1 = \lambda y_2$  entonces  $[x_1, y_1, z_1] = [x_2, y_2, z_2]$
- ∴ *f* es inyectiva.
- ✓ Sea  $(x, y) \in \square^2$ , basta considerar  $[x, y, 1]$ . Con ello tenemos:
 
$$f_{([x, y, 1])} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y).$$
- ∴ *f* es sobreyectiva.

***f es continua:***

- Sea  $W \in \square^2$  abierto, queremos:  $f_{(W)}^{-1} = \{[x, y, z] \in P_{(\square)}^2 / f_{([x, y, z])} \in W\}$
- $f_{(W)}^{-1} = \left\{ [x, y, z] \in P_{(\square)}^2 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \right\}$
  - $f_{(W)}^{-1} = \left\{ [x, y, z] \in P_{(\square)}^2 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \right\}$
  - $f_{(W)}^{-1} = \{[x', y', 1] \in P_{(\square)}^2 / (x', y') \in W\} = \Pi_{(V)}$ ; tal que:  $V = \{(x, y, 1) / (x, y) \in W\}$
- Como  $V$  es abierto en  $\square^3$  y  $\Pi$  es una aplicación abierta, entonces  $\Pi_{(V)} = f_{(W)}^{-1}$  es abierto. Ahora, como

$$\begin{aligned} f^{-1} : \square^2 &\rightarrow U \\ (x, y) &\rightarrow f_{(x, y)}^{-1} = [x, y, 1] \end{aligned}$$

***f<sup>-1</sup> es biyectiva:***

- ✓ Si  $f_{(x_1, y_1)}^{-1} = f_{(x_2, y_2)}^{-1}$  entonces  $[x_1, y_1, 1] = [x_2, y_2, 1]$ 
  - $\exists \lambda \in \square - \{0\} / x_1 = \lambda x_2 \wedge y_1 = \lambda y_2 \wedge 1 = \lambda 1$
  - $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$  entonces  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$\therefore f^{-1}$  es inyectiva.

✓ Sea  $[x, y, z] \in U$ , basta considerar  $\begin{pmatrix} x \\ z \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}$ . Con ello tenemos:

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ z \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}\right) = \left[\frac{x}{z}; \frac{y}{z}; 1\right] = [x, y, z] \rightarrow f^{-1} \text{ es sobreyectiva.}$$

Por lo tanto:  $C^2 \cong U$ .

### Observación 2

Sea  $L$  la línea proyectiva  $z=0$ . Se verifica que  $L$  es homeomorfo a  $P^1_{(\square)}$ . En efecto:

Basta considerar la aplicación

$$\begin{aligned} g : L &\rightarrow P^1_{(\square)} \\ [x, y, 0] &\rightarrow g_{([x, y, 0])} = [x, y] \end{aligned}$$

### 5.1.3. Transformación Proyectiva

Una transformación proyectiva sobre  $P^n_{(\square)}$  es una biyección  $f : P^n_{(\square)} \rightarrow P^n_{(\square)}$  tal que para algún isomorfismo  $\alpha : \square^{n+1} \rightarrow \square^{n+1}$  se cumple que  $f_{([x_0, x_1, \dots, x_n])} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$  donde:  $(y_0, y_1, \dots, y_n) = \alpha(x_0, x_1, \dots, x_n)$ .

Otra forma de escribir esto es; como:

$$\begin{aligned} \Pi : \square^{n+1} - \{0\} &\rightarrow P^n_{(\square)} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\rightarrow [x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Entonces:  $f \circ \Pi = \Pi \circ \alpha$

### Lema 2

Toda transformación proyectiva sobre  $P^n_{(\square)}$  es continua.

Prueba:

Por observación 1, ítem 3. Para que  $f$  sea continua basta probar que  $f \circ \Pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_{(\square)}^n$  sea continua.

Pero por lo visto anteriormente  $f \circ \Pi = \Pi \circ \alpha$  y como  $\Pi$  y  $\alpha$  son continuas, entonces  $\Pi \circ \alpha$  es continua, ello nos lleva al resultado.

### Ejemplo 3

Considere la curva  $C: x^2 = yz$ .

Veamos que esta curva es no singular, ya que si consideramos  $P_{(x,y,z)} = x^2 - yz$ , entonces:

$$\frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial y} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial P_{(0,0,1)}}{\partial z} = 0$$

Ahora consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f: P_{(\square)}^1 &\rightarrow C \\ [x, y] &\rightarrow f_{([x,y])} = [xy, y^2, x^2] \end{aligned}$$

- **$f$  está bien definida**

$$\text{Si: } [x_1, y_1] = [x_2, y_2] \leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 / x_1 = \lambda x_2; y_1 = \lambda y_2$$

$$\text{Entonces: } (x_1 y_1; y_1^2; x_1^2) = (\lambda^2 x_2 y_2; \lambda^2 y_2^2; \lambda^2 x_2^2) = \lambda^2 (x_2 y_2; y_2^2; x_2^2)$$

$$\rightarrow [x_1 y_1; y_1^2; x_1^2] = [x_2 y_2; y_2^2; x_2^2]$$

$$\rightarrow f_{([x_1, y_1])} = f_{([x_2, y_2])}$$

- **$f$  es continua**

Basta ver que  $f \circ \Pi$  es continua. Pero  $f \circ \Pi = \Pi \circ h / h_{(x,y,z)} = (xy, y^2, x^2)$  y como  $h$  es continua, entonces  $f$  lo es.

- **$f^{-1}$  es continua**

De manera similar a lo anterior, basta ver que  $f^{-1}: C \rightarrow P_{(\square)}^1$  tal que

$$f^{-1} = \begin{cases} [x, y]; y \neq 0 \\ [z, x]; z \neq 0 \end{cases} .$$

De lo anterior se tiene:  $C \cong P_{(\mathbb{C})}^1$

Ahora, como  $P_{(\mathbb{C})}^1 \cong L$ , con  $L: z=0$  entonces se obtiene  $C \cong L$ .

### Lema 3

$L \cong S^2$ , donde  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ .

Prueba:

Definamos  $\phi: S^2 \rightarrow L$

$$(u, v, w) \rightarrow \phi_{(u,v,w)} = [u + iv; 1 - w; 0]$$

- $\phi$  es una biyección
- $\phi$  es continua
- $\phi^{-1}$  es continua

Considerando  $\phi_{(x,y,0)}^{-1} = \left( \frac{2\operatorname{Re}(x\bar{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(x\bar{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{|x|^2 - |y|^2}{|x|^2 + |y|^2} \right)$  también lo es.

### Observación 4

Por lo visto anteriormente tenemos:  $C \cong P_{(\mathbb{C})}^1 \cong L \cong S^2$ . Por lo tanto  $C \cong S^2$ .

#### 5.1.4. La Función $P$ de Weierstrass

La función  $P$  de Weierstrass asociada al retículo:  $\Gamma = \{nw_1 + mw_2; n, m \in \mathbb{Z}\}$  donde

$w_1, w_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$  son  $\mathbb{C} - L.I.$  se define por:

$$P_{(z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

$$P'_{(z)} = -2 \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3}$$

### Observación 5

1.  $P$  es par

$$P_{(-z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

$$P_{(-z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

$$P_{(-z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = P_{(z)}$$

2.  $P'$  es impar

$$P'_{(-z)} = -2 \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(-z-w)^3} = -2 \left( - \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z+w)^3} \right)$$

$$P'_{(-z)} = -2 \left( - \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3} \right) = - \left( -2 \sum_{w \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3} \right)$$

$$P'_{(-z)} = -P'_{(z)}$$

3.  $P_{(z+\delta)} = P_{(z)}$ ;  $\forall \delta \in \Gamma$ , se cumple:  $P'_{(z+\delta)} = P'_{(z)}$ ;  $\forall \delta \in \Gamma$ .

4.  $(P'_{(z)})^2 = 4P_{(z)}^3 - g_2 P_{(z)} - g_3$ , donde:  $g_2 = 60 \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{w^4} \wedge g_3 = 140 \sum_{w \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{w^6}$ .

### Observación 6

Consideremos la curva  $C: y^2 z = (x - \alpha z)(x - \beta z)(x - \delta z)$ , con  $\alpha, \beta, \delta \in \square$  diferentes, entonces  $C$  es no singular.

### Ejemplo 4

Sea  $C_\Gamma: y^2 z - x^3 + \frac{g_2}{4} x z^2 + \frac{g_3}{4} z^3$  una curva en  $P_{(\square)}^2$ . Sea  $\alpha = P_{\left(\frac{1}{2}w_1\right)}$ ;  $\beta = P_{\left(\frac{1}{2}w_2\right)}$ ;

$$\delta = P_{\left(\frac{1}{2}(w_1 + w_2)\right)}.$$

Definido de esta manera, entonces:

$$P'_{\left(\frac{w_1}{2}\right)} = P'_{\left(\frac{1}{2}w_2 - w_1\right)} = P'_{\left(\frac{-w_1}{2}\right)} = -P'_{\left(\frac{w_1}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad P'_{\left(\frac{w_1}{2}\right)} = -P'_{\left(\frac{w_1}{2}\right)}$$

$$\rightarrow P'_{\left(\frac{w_1}{2}\right)} = 0$$

Un trabajo similar nos dice que:  $P'_{\left(\frac{w_2}{2}\right)} = P'_{\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)} = 0$

$$\left(\frac{P'}{2}\right)^2 = P^3 - \frac{g_2 P}{4} - \frac{g_3}{4} \quad \rightarrow \quad P^3 - \frac{g_2 P}{4} - \frac{g_3}{4} - \left(\frac{P'}{2}\right)^2 = 0$$

Evaluando en  $\frac{w_1}{2}$ :

$$\alpha^3 - \frac{g_2 \alpha}{4} - \frac{g_3}{4} = 0; \text{ esto quiere decir que } \alpha \text{ es raíz de: } x^3 - \frac{g_2 x}{4} - \frac{g_3}{4} = 0.$$

Similarmente  $\beta$  es raíz y  $\delta$  son raíces del polinomio.

Entonces:

$$C_\Gamma : y^2 z - x^3 + \frac{g_2}{4} x z^2 + \frac{g_3}{4} z^3 \quad \rightarrow \quad C_\Gamma : y^2 z - \left( x^3 - \frac{g_2}{4} x z^2 - \frac{g_3}{4} z^3 \right)$$

$$\rightarrow C_\Gamma : y^2 z - (x - \alpha z)(x - \beta z)(x - \delta z)$$

Y por lo anterior  $C_\Gamma$  es no singular.

Dotando al espacio  $C/\Gamma$  de la topología cociente tenemos que  $C/\Gamma$  es un espacio topológico.

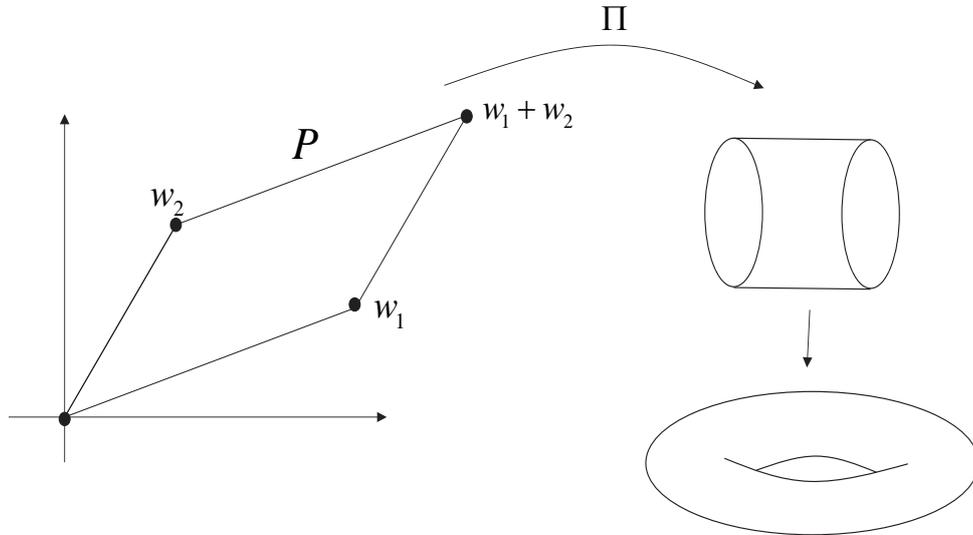
Sea  $\Pi: \square \rightarrow C/\Gamma$  la proyección canónica.

Con la topología cociente  $\Pi$  es continua, ahora si consideramos el conjunto

$$P = \{ \lambda w_1 + \beta w_2 / \lambda, \beta \in [0,1] \} \text{ se puede probar: } \Pi_{(P)} = \square / \Gamma.$$

Esto nos dice que  $\square / \Gamma$  es compacto ya que  $P$  lo es. Gráficamente tenemos:

Figura 5.1: Paralelogramo fundamental y el Toro Complejo



Es decir, el espacio  $\mathbb{C}/\Gamma$  puede verse como una esfera con un hueco, y es llamado el toro complejo.

Sabiendo esto definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}/\Gamma &\rightarrow C_\Gamma \\ z + \Gamma &\rightarrow \mu_{(z+\Gamma)} = \begin{cases} [P_{(z)}, P'_{(z)}, 1], & z \notin \Gamma \\ [0; 1; 0], & z \in \Gamma \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que  $\mu$  es homeomorfismo:

- $\mu$  es inyectiva

$$\text{Sea } \mu_{(z+\Gamma)} = \mu_{(w+\Gamma)} \rightarrow [z] = [w]$$

$$\text{Si } \mu_{(z+\Gamma)} = \mu_{(w+\Gamma)} = [0; 1; 0] \rightarrow z, w \in \Gamma \rightarrow z - w \in \Gamma \rightarrow [z] = [w]$$

$$\text{Así que supongamos que } P_{(z)} = P_{(w)} \rightarrow P'_{(z)} = P'_{(w)} \rightarrow z \in \Gamma \pm w.$$

Queremos probar que  $z \in \Gamma + w$ , así que supongamos que  $z \in \Gamma - w$ , entonces

$$z + w \in \Gamma. \text{ Tenemos: } P'_{(z)} = P'_{(w)} = P'_{(z-(z-w))} = P'_{(-w)} = -P'_{(w)}.$$

$$\text{Luego: } P'_{(z)} = P'_{(w)} = 0.$$

$$\text{Ahora, sabemos que: } (P')^2 = 4P^3 - g_2P - g_3$$

$$\rightarrow (P'_{(w)})^2 = 4P^3_{(w)} - g_2 P_{(w)} - g_3 = 0$$

$$\rightarrow P_{(w)} \text{ es raíz de } 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

$$\rightarrow P_{(w)} = P_{\left(\frac{w_1}{2}\right)} \vee P_{(w)} = P_{\left(\frac{w_2}{2}\right)} \vee P_{(w)} = P_{\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)}$$

Si  $P_{(w)} = P_{\left(\frac{w_1}{2}\right)}$ , entonces tenemos que:

$$w \in \Gamma \pm \frac{w_1}{2} \rightarrow w = nw_1 + mw_2 \pm \frac{w_1}{2} \rightarrow 2w = n^* w_1 + m^* w_2 \pm w_1$$

$$\rightarrow \underset{\in \Gamma}{0} + w = \underbrace{n^* w_1 + m^* w_2}_{\in \Gamma} - w \rightarrow \Gamma + w = \Gamma - w$$

$$\rightarrow z \in \Gamma \pm w = \Gamma + w \rightarrow z - w \in \Gamma \rightarrow [z] = [w].$$

Puede probarse también, que  $\mu$  es sobreyectiva y continua, y por el teorema 3 tenemos que el toro complejo  $\mathbb{C}/\Gamma$  es homeomorfo a la cubica  $C_\Gamma$ .

El objetivo del presente trabajo es tener una visión topológica de una curva plana proyectiva compleja  $C$ , para ello es importante dar una definición precisa, del término género. Para este propósito vamos a introducir la definición de una triangulación de la curva  $C$ .

Sea  $\Delta = \{x, y \in \mathbb{R} / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ; que es el triángulo estándar en  $\mathbb{R}^2$  con vértices  $(0;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(1;0)$ . Sea  $\Delta^\circ$  el interior de  $\Delta$ .

#### Definición 14

Sea  $C$  una curva plana proyectiva compleja. Una triangulación de  $C$  es una terna  $(V, E, F)$  que satisface las condiciones:

- $V$  es un conjunto finito no vacío de puntos llamados vértices,
- $E$  es un conjunto finito no vacío de aplicaciones continuas  $e: [0;1] \rightarrow C$  llamados lados,
- $F$  es un conjunto finito no vacío de aplicaciones continuas  $f: \Delta \rightarrow C$  llamadas caras, que satisfacen:

- i.  $V = \{e_{(0)}/e \in E\} \cup \{e_{(1)}/e \in E\}$ , es decir, los vértices son los puntos finales de los lados.
- ii. Si  $e \in E$  entonces la restricción de  $e$  al abierto  $\langle 0;1 \rangle$  es un homeomorfismo, con su imagen en  $C$ , y esta imagen no contiene puntos en  $V$  o en la imagen de cualquier otro lado.
- iii. Si  $f \in F$  entonces la restricción de  $f$  a  $\Delta^\circ$  es un homeomorfismo con una componente conexa  $K_f$  de  $C-r$ , donde  $r = \bigcup_{e \in E} e_{([0;1])}$  y si  $r: [0;1] \rightarrow [0;1]$  y  $\sigma_i: [0;1] \rightarrow \Delta$ , para  $1 \leq i \leq 3$  están definidos por  $r_t = 1-t$ ;  $\sigma_1(t) = (t;0)$ ;  $\sigma_2(t) = (1-t;t)$ ;  $\sigma_3(t) = (0;1-t)$ .  
Entonces  $f \circ \sigma_i$  o  $f \circ \sigma_i \circ r$  es un lado  $e_f^i \in E$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .
- iv. La aplicación  $f \rightarrow K_f$  de  $F$  al conjunto de componentes conexas de  $C-r$  es una biyección.
- v. Para todo  $e \in E$  hay exactamente una cara  $f_e^+ \in F$  tal que  $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ , para algún  $i \in \{1,2,3\}$  y exactamente una cara  $f_e^- \in F$  tal que  $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$ , para algún  $i \in \{1,2,3\}$ .

### Definición 15

La característica de Euler  $\chi$  de una triangulación está definido por  $\chi = n(V) - n(E) + n(F)$ , donde:

$n(V)$ : número de vértices

$n(E)$ : número de aristas

$n(F)$ : número de caras

La característica de Euler es importante por el siguiente teorema:

**Teorema 7**

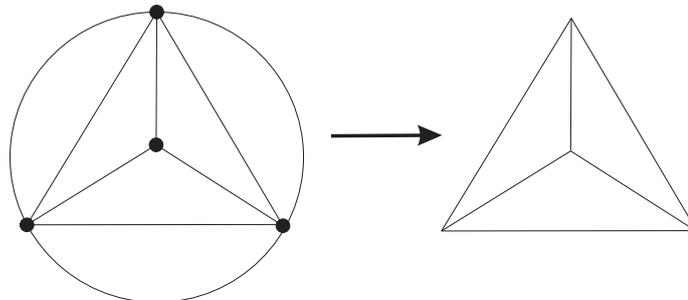
- i. Toda curva proyectiva plana compleja no singular  $C$  tiene una triangulación.
- ii. La característica de Euler de una triangulación de  $C$  depende solo de  $C$  y no de la triangulación elegida.

En lo que sigue  $\chi_{(C)}$  denota la característica de Euler de la curva  $C$  con las condiciones del teorema anterior (i), para cualquier triangulación de  $C$ .

**Ejemplo 5**

- a) Por lema 3, tenemos que toda recta en  $P^2_{(\mathbb{C})}$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ . Claramente  $L$  es no singular, luego por teorema 7,  $L$  admite una triangulación. Buscar una triangulación de  $L$  es equivalente a buscar una triangulación de  $S^2$ .

Figura 5.2: Triangularización de la esfera

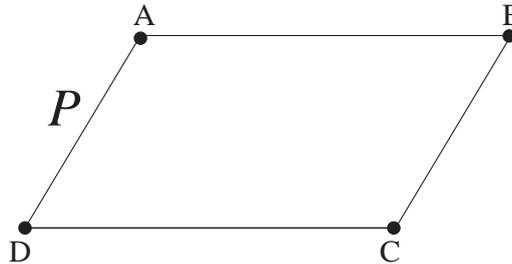


De la Figura 5.2, como  $\chi_{(L)} = \chi_{(S^2)} \rightarrow \chi_{(L)} = 4 - 6 + 4 = 2$ .

- b) Consideremos la curva estudiada en el ejemplo 3, como  $C \cong S^2$  y  $\chi_{(S^2)} = 2$  entonces:  $\chi_{(C)} = 2$ .

- c) Sabemos que la cúbica no singular asociada al retículo  $\Gamma = \{nw_1 + mw_2 / n, m \in \mathbb{Z}\}$  es  $C_\Gamma = y^2z - x^3 + \frac{g_2}{4}xz^2 + \frac{g_3}{4}z^3$ , que es homeomorfo al toro complejo  $C/\Gamma$ , luego  $C/\Gamma$  admite una triangulación. Estudiar una triangulación para  $C_\Gamma$  es equivalente a estudiar una triangulación para  $C/\Gamma$ .

Figura 5.3: Triangularización de  $P$



Entonces:  $\chi_{(P)} = 4 - 5 + 5 = 4$ ;  $\chi_{(\square/\Gamma)} = 1 - 3 + 2 = 0$ .

### Definición 16

El género de una curva proyectiva no singular  $C$  es:

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi_{(C)})$$

Donde  $\chi_{(C)}$  es la característica de Euler de  $C$ .

### 5.1.5. La Fórmula del genero grado

#### Lema 5

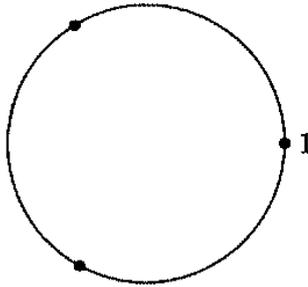
Sea  $\{p_1, \dots, p_r\}$  un conjunto de al menos 3 puntos en  $P_{(\square)}^1$ . Entonces existe una triangulación de  $P_{(\square)}^1$  con  $p_1, p_2, \dots, p_r$  como sus vértices y con  $3r - 6$  aristas y  $2r - 4$  caras.

Prueba:

Probemos esto por inducción sobre  $r \geq 3$ .

Cuando  $r = 3$  podemos encontrar una transformación proyectiva llevando  $p_1$  a 1,  $p_2$  a  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$  y  $p_3$  a  $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ . Podemos unir estos 3 puntos por segmentos del círculo unitario en  $\square$ .

Figura 5.4: Subdivisión del círculo unitario en  $\square$



El exterior del círculo unitario junto con el punto al infinito es llevado por la transformación proyectiva  $z \mapsto \frac{1}{z}$  al interior del círculo unitario ya que existe un isomorfismo

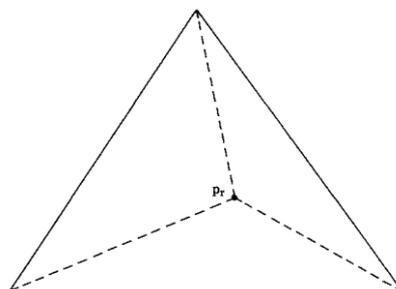
$$\Delta \rightarrow \{z \in \square \mid |z| \leq 1\}$$

Que lleva los vértices del triángulo  $\Delta$  a  $1$ ,  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$  y  $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ , toma la arista de  $\Delta$  a segmentos apropiados del círculo unitario, conseguimos una triangularización de  $P_{(\square)}^1$  con 3 aristas y dos caras con  $r=3$ .

Ahora supongamos  $r > 3$  y tenemos una triangularización con vértices  $p_1, p_2, \dots, p_{r-1}$  y  $3r-9$  aristas y  $2r-6$  caras.

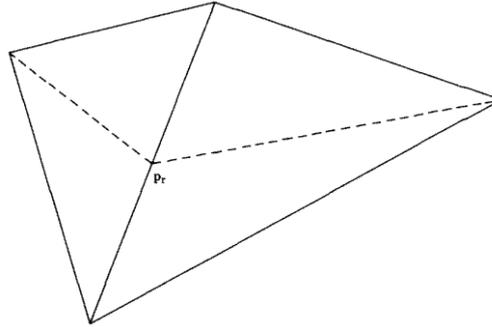
Si  $p_r$  pertenece al interior de una cara  $f$  (más precisamente, si  $p_r \in f_{(\Delta)}^\circ$ ) podemos agregar 3 aristas uniendo  $p_r$  a los vértices de la cara  $f$  y obtener una nueva triangularización con un vértice extra  $p_r$ , 3 aristas extras y una cara subdivida en 3.

Figura 5.5: Subdivisión de un triángulo



Si  $p_r$  no pertenece al interior de una cara, entonces está pertenece a alguna arista  $e$  (más precisamente  $p_r = e_{(t)}$  para algún  $t \in \langle 0,1 \rangle$ ). Podemos entonces reemplazar  $e$  por dos aristas uniendo  $p_r$  a  $e_{(0)}$  y  $e_{(1)}$ , y agregar 2 aristas uniendo  $p_r$  al resto de vértices de las caras  $f_e^+$  y  $f_e^-$ .

Figura 5.6: Subdivisión de dos triángulos adyacentes



Esto genera una triangularización con un nuevo vértice  $p_r$ , 2 aristas extras y una arista reemplazada por otras dos y dos caras cada una reemplazada por otras dos.

**Proposición 1**

Sea  $C = \{[x : y : z] \in P_{(\square)}^2 / P_{(x,y,z)} = 0\}$  una curva proyectiva no singular conteniendo  $[0:1:0]$  y sea un cubrimiento ramificado:

$$\begin{aligned} \phi: C &\rightarrow P_{(\square)}^1 \\ [x : y : z] &\rightarrow \phi_{[x,y,z]} = [x : z] \end{aligned}$$

Suponga que  $(V, E, F)$  es una triangularización de  $P_{(\square)}^1$  tal que el conjunto de vértices  $V$  contiene  $\phi_{(R)}$ ,  $R$  son los puntos de ramificación de  $\phi$ . Entonces existe

una triangularización  $(\square V, \square E, \square F)$  de  $C$  tal que:  $\square V = \phi_{(\square V)}^{-1}$

$$\square E = \{e : [0,1] \rightarrow C / e \text{ es continua, } \phi \circ e \in E\}$$

$$\square F = \{f : \Delta \rightarrow C / f \text{ es continua, } \phi \circ f \in F\}$$

Además si  $v_\phi(p)$  es el índice de ramificación de  $\phi$  en  $p$  y  $d$  es el grado de  $C$  entonces

$$n_{(V)} = d \cdot n_{(V)} - \sum_{p \in R} (v_\phi(p) - 1)$$

$$n_{(E)} = d \cdot n_{(E)}$$

$$n_{(F)} = d \cdot n_{(F)}$$

Prueba:

Ver proposición 4.22 de [9].

### Teorema 8

Sea  $C$  una curva proyectiva no singular de grado  $d$  en  $P_{(\mathbb{C})}^2$ . Si  $r$  es un entero positivo y  $r \geq d(d-1)$  y  $r \geq 3$ , entonces  $C$  tiene una triangularización con  $rd - d(d-1)$  vértices,  $3(r-2)d$  aristas y  $2(r-2)d$  caras.

Prueba:

Sea  $P_{(x,y,z)}$  un polinomio homogéneo de grado  $d$  que define a la curva  $C$ . Por proposición 1, después de aplicar una adecuada transformación proyectiva a  $C$  podemos asumir que

$$\begin{aligned} \phi: C &\rightarrow P_{(\mathbb{C})}^1 \\ [x:y:z] &\rightarrow \phi_{[x,y,z]} = [x:z] \end{aligned}$$

está bien definida, es decir  $[0:1:0] \notin C$  y el índice de ramificación  $v_\phi[a:b:c]$  de  $\phi$  en todo  $[a:b:c]$  de  $C$  satisface  $v_\phi[a:b:c] \leq 2$ . Entonces  $\phi$  tiene exactamente  $d(d-1)$  puntos de ramificación, es decir:  $n_{(R)} = d(d-1)$ .

Por lema 4, si  $r \geq 3$  y  $r \geq d(d-1)$  entonces podemos escoger una triangularización  $(V, E, F)$  de  $P_{(\mathbb{C})}^1$  tal que:

$$V \supseteq \phi_{(R)} \text{ y } n_{(V)} = r, \quad n_{(E)} = 3r - 6 \text{ y } n_{(F)} = 2r - 4$$

Entonces por la proposición 1 existe una triangularización  $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F})$  de  $C$  tal que:

$$n_{\mathbb{E}} = d.n_{(E)} = 3(r-2)d$$

$$n_{\mathbb{F}} = d.n_{(F)} = 2(r-2)d$$

$$\text{y } n_{\mathbb{V}} = d.n_{(V)} - \sum_{p \in R} (v_{\phi}(p) - 1)$$

Como  $n_{(R)} = d(d-1)$  y  $v_{\phi}(p) = 2$  para todo  $p \in R$  tenemos  $n_{\mathbb{V}} = rd - d(d-1)$  como se quiere.

### Corolario (La fórmula del género grado)

La característica de Euler  $\chi$  y el género  $g$  de una curva proyectiva no singular de grado  $d$  en  $P_{\mathbb{C}}^2$  esta dada por

$$\chi = d(3-d) \text{ y } g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Prueba:

Por el teorema 8, dado un  $r$  entero positivo y  $r \geq d(d-1)$  y  $r \geq 3$  entonces  $C$  tiene una triangulación con  $n_{(V)} = rd - d(d-1)$ ,  $n_{(E)} = 3(r-2)d$  y  $n_{(F)} = 2(r-2)d$ .

Luego:

$$\chi_{(C)} = n_{(V)} - n_{(E)} + n_{(F)}$$

$$\chi_{(C)} = rd - d(d-1) - 3(r-2)d + 2(r-2)d$$

$$\chi_{(C)} = rd - d^2 + d - 3rd + 6d + 2rd - 4d$$

$$\chi_{(C)} = -d^2 + 3d$$

$$\chi_{(C)} = d(3-d)$$

$$\text{y } g = \frac{1}{2}(2 - \chi_{(C)})$$

$$g = \frac{1}{2}(2 - d(3 - d))$$

$$g = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2)$$

$$g = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$$

### Ejemplo 6

- a) Sea  $L$  la recta proyectiva, luego la fórmula de género grado nos dice que su género es 0, es decir,  $L$  puede verse como una esfera sin huecos.
- b) Sea  $C$  una cónica no singular en  $P_{(\mathbb{C})}^2$ , luego la fórmula del género grado nos dice que su género es 0, es decir,  $C$  puede verse como una esfera sin huecos.
- c) Sea  $C$  una cúbica no singular en  $P_{(\mathbb{C})}^2$ , luego la fórmula del género grado nos dice que su género es 1, es decir,  $C$  puede verse como una esfera con un hueco.

### Observaciones

- 1) La fórmula de género grado nos permite hallar el género de una curva plana proyectiva no singular compleja sólo conociendo su grado y así establecer una visión topológica de la curva estudiada.
- 2) Conociendo el grado de una curva  $C$  plana proyectiva no singular compleja la fórmula del género nos permite obtener el género rápidamente, sin embargo, lo inverso en general no es cierto, ya que si consideramos  $g = 2$ , no obtenemos un valor entero para  $d$ .

## CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

- 1) El ejemplo 4 de la página 18 nos permite afirmar que si a la esfera le quitamos un punto, esta puede verse (topológicamente) como un plano en  $\mathbb{C}^2$ .
- 2) El teorema 3 fue una herramienta útil para establecer ciertos homeomorfismos, usando el hecho que el plano proyectivo complejo es Hausdorff y compacto.
- 3) Usando la topología cociente, se pudo construir con éxito el toro complejo y el espacio proyectivo complejo  $n$  dimensional.
- 4) La función  $P$  de Weierstrass fue de vital importancia para establecer el homeomorfismo de la cúbica no singular  $C_\Gamma : y^2z - x^3 + \frac{g_2}{4}xz^2 + \frac{g_3}{4}z^3$  y el toro complejo. Además, como  $P$  es una función elíptica (meromorfa doblemente periódica), la curva  $C_\Gamma$  es llamada curva elíptica.
- 5) Por los ejemplos 3 y 4, y el lema 3 tenemos que la línea proyectiva  $z = 0$  y cónica proyectiva  $C : x^2 = yz$  topológicamente pueden verse como una esfera; por otra parte la cubica no singular  $C_\Gamma : y^2z - x^3 + \frac{g_2}{4}xz^2 + \frac{g_3}{4}z^3$  topológicamente es un toro complejo.
- 6) El teorema 7 nos permite afirmar que una curva proyectiva en  $P^2_{(\mathbb{C})}$  no singular admite una triangulación y por lo tanto su característica de Euler es calculable y por lo tanto su género.
- 7) La característica de Euler y el género de una curva no singular en  $P^2_{(\mathbb{C})}$  son invariantes topológicos, es decir, estos no varían por homeomorfismos.

- 8) La fórmula de genero grado, nos permite tener una visión topológica de una curva no singular en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  con un grado dado.

## CONCLUSIONES

- 1) De acuerdo a nuestro objetivo general, podemos concluir que usando el teorema 3 que demuestra que  $P_{(\square)}^2$  es compacto y Hausdorff llegamos a la conclusión que las curvas en  $P_{(\square)}^2$  lo son, esto fue de vital importancia para establecer los homeomorfismos y así establecer la visión topológica de una curva algebraica no singular.
- 2) De acuerdo a nuestros objetivos específicos; si bien es cierto hemos construido explícitamente homeomorfismos para una línea, cónica y cubica proyectiva, la fórmula del genero grado no solo nos permite calcular el género y que ello quede como un simple número, sino que este valor nos permite tener una visión topológica de una curva en  $P_{(\square)}^2$  no singular de un grado arbitrario dado, ya que este número encontrado va a representar la cantidad de huecos que tiene dicha curva.
- 3) Por otra parte, el teorema 7 nos permite concluir que si tenemos dos triangulaciones de una curva proyectiva no singular en el plano proyectivo complejo  $P_{(\square)}^2$ , la característica de Euler asociada a cada una será la misma; es decir depende solo de  $C$  y no de la triangulación que hallamos elegido.

## RECOMENDACIONES

- 1) Sabemos que una curva en  $\mathbb{A}^2$  y en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  están definidas por polinomios de dos y tres variables respectivamente. El uso exhaustivo del anillo de polinomios es aplicado durante el trabajo, por lo cual se recomienda leer cualquier libro de algebra abstracta para su comprensión.
- 2) El termino género de una curva no singular en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  admite una definición más general, para ello el lector puede ver [8] para su entendimiento y establecer las ideas geométricas con más precisión.
- 3) En el trabajo también se usa muchas herramientas básicas de topología general resaltando a los homeomorfismos, nos estamos basando esencialmente en [3] y en [10], por lo cual se recomienda su lectura.
- 4) El estudio de curvas singulares en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  es un trabajo no trivial, pues ésta depende del tipo de singularidad establecida. El lector interesado en esta parte, puede ver [9] capitulo 7, donde la fórmula de Noether es estudiada.
- 5) Las curvas no singulares en  $P_{(\mathbb{C})}^2$  también pueden estudiarse en el contexto de superficies de Riemann pues estas admiten una estructura holomorfa, el lector interesado en esta teoría puede leer cualquier libro de superficies de Riemann como en [10] y [11].

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arrondo, E. (2017). Apuntes de curvas algebraicas. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/curvas.pdf>
  
- [2] Del Campo Sanchez, A. M. (2004). Teorema de Riemman Roch. Recuperado de: [http://personal.cimat.mx:8181/abraham.mc/Files/Tesis\\_RiemannRoch.pdf](http://personal.cimat.mx:8181/abraham.mc/Files/Tesis_RiemannRoch.pdf)
  
- [3] Dugundji J. (1966). Topology. Boston. Allyn and Bacon,
  
- [4] Fulton W. (1969). Algebraic Curves, Benjamin-Cummings.
  
- [5] Lozano C. H. (2006). Sobre la clasificación topológica de las curvas algebraicas. Recuperado de <http://www.miscelaneamatematica.org/Misc62/6201.pdf>
  
- [6] Zubiaga G. (2010). Aspectos fundamentales de la geometría algebraica. Recuperado de <http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/6015>
  
- [7] Perez I. (2017). Associative property on the group of elliptic curves. Recuperado de [https://alicia.concytec.gob.pe/vufind/Record/PUCP\\_a556ab2a9aaeff60a2f5d47e21c4d890](https://alicia.concytec.gob.pe/vufind/Record/PUCP_a556ab2a9aaeff60a2f5d47e21c4d890)
  
- [8] Ueno K., Shiga K., Morita S. (2003). The interplay between topology, functions, geometry, and algebra. American Mathematical Society. USA.
  
- [9] Kirwan F. (1992). Complex algebraic curves. New York. Estados unidos. Universidad de Cambridge.
  
- [10] Lipschtuz S. (1970). Topología general. Cali. Colombia. McGraw- Hill.

- [11] Forster O. (1981). Lectures on Riemann Surfaces. New York. Springer-Verlag.
- [12] Farkas H.M, Kra I. (1980). Riemann Surfaces. New York. Springer-Verlag.

**ANEXO**  
**MATRIZ DE CONSISTENCIA**

<b>FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>HIPÓTESIS</b>	<b>METODOLOGÍA</b>	<b>POBLACIÓN</b>
<p><b>Problema general.</b> ¿Cuál es la visión topológica de una curva algebraica proyectiva plana compleja no singular en el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>?</p>	<p><b>Objetivo general</b> Establecer la visión topológica de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>.</p>	<p><b>Hipótesis general</b> Se establece la visión topológica de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>.</p>	<p>La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios, utilizando el diseño</p>	<p>Dentro del conjunto de las curvas algebraicas para el desarrollo del presente trabajo tomaremos a las curvas algebraicas proyectivas planas complejas no singulares.</p>
<p><b>Problemas específicos</b> ¿Será posible calcular el género de una curva no singular sobre el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>?</p>	<p><b>Objetivos específicos</b> Calcular el género de una curva no singular sobre el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>.</p>	<p><b>Hipótesis específicas</b> Se calcula el género de una curva algebraica no singular en el espacio proyectivo complejo <math>P^2_{(C)}</math>.</p>	<p>descriptivo - demostrativo. Para tal propósito: <b>Primero:</b> Hemos estudiado la teoría de curvas en <math>\mathbb{R}^2</math> y <math>\mathbb{C}^2</math>, enfatizando en el cálculo de los puntos singulares.</p>	

<p>¿Sera posible establecer homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc en <math>P^2_{(\mathbb{C})}</math> y la esfera o el toro complejo?</p>	<p>Establecer homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc en <math>P^2_{(\mathbb{C})}</math> y la esfera o el toro complejo.</p>	<p>Se establecen homeomorfismos entre curvas de grado 2, grado 3, etc en <math>P^2_{(\mathbb{C})}</math> y la esfera o el toro complejo.</p>	<p><b>Segundo:</b> Hemos estudiado la estructura topológica y algebraica del plano proyectivo complejo <math>P^2_{(\mathbb{C})}</math>.</p> <p><b>Tercero:</b> A partir de la fórmula de género grado, hemos definido la visión topológica de una curva no singular en <math>P^2_{(\mathbb{C})}</math>.</p>	
---	---	--	---	--