

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA DE POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS



**“LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE TIMOSHENKO AL
MÉTODO DE ÁREA - MOMENTO, MEJORA LA
EXACTITUD DE LA CURVA ELÁSTICA EN VIGAS
ISOSTÁTICAS”**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA

JUAN ADOLFO BRAVO FELIX

CALLAO – 2019

PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIDAD DE POSGRADO

MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA

RESOLUCIÓN N° 107-2019-CD-UPG-FCE-UNAC

JURADO EXAMINADOR:

- Dr. ROGER PEÑA HUAMÁN : Presidente
- Dra. ZOILA DIAZ TAVERA : Secretario
- Mg. RIGOBERTO PELAGIO RAMIREZ OLAYA : Miembro
- Mg. FRANCISCO BAZÁN BACA : Miembro

- **ASESOR DE TESIS: PhD. ALMINTOR GIOVANNI TORRES QUIROZ**

N° DE LIBRO DE ACTA DE SUSTENTACIÓN: Libro 2, Pág. 34

N° DE ACTA DE SUSTENTACIÓN: 021-2019

FECHA DE APROBACIÓN DE TESIS: 11-12-2019

DEDICATORIA

Dedico este trabajo primeramente a Dios por darme vida, salud, y conocimiento para lograr mi propósito de ser un maestro.

A mis padres Anastasio, Timotea y mi hermano Jacinto, quienes están al lado de Dios por darme su amor, apoyo, comprensión y educación durante mi carrera y por hacer de mí un hombre de bien.

A mis hermanas Carolina, Rosa, Beatriz y Guillermina, quienes me enseñaron que el trabajo y perseverancia son caminos para el éxito profesional.

A mi esposa Elvira, a mis hijos, César y Eliana quienes con su amor, cariño y comprensión me perseveran a alcanzar la meta de ser un maestro.

AGRADECIMIENTO

A mi profesor Gerardo Ventura que en paz descanse, por haber prendido la mecha de amor por las Estructuras.

A mis profesores de la Maestría, por todos los conocimientos impartidos durante mis estudios.

A mi asesor de la maestría

A las autoridades de la FIME por el apoyo brindado durante los estudios.

A la Universidad Nacional del Callao por darme la oportunidad de realizar estudios de Maestría

ÍNDICE

ÍNDICE	1
ÍNDICE DE FIGURAS	5
ÍNDICE DE GRÁFICOS	8
ÍNDICE DE TABLAS	9
RESUMEN	10
ABSTRACT	11
INTRODUCCIÓN	12
1.1. Descripción de la realidad problemática	16
1.2. Formulación del problema	17
1.2.1. General.....	17
1.2.2. Específicos	18
1.3. Objetivos.....	18
1.3.1. Objetivo general	18
1.3.2. Objetivos específicos.....	18
1.4. Limitantes de la investigación.....	19
1.4.1. Teórica.....	19
1.4.2. Temporal	19
1.4.3. Espacial	19
II. MARCO TEÓRICO	20
2.1. Antecedentes.....	20
2.1.1. Internacional	20
2.1.2. Nacional.....	23
2.2. Bases teóricas	23
2.2.1. Teoría de Estructuras.....	23

a)	Vínculos.....	26
b)	Cargas.....	27
c)	Relación entre Fuerzas externas e Internas.....	28
d)	Diagramas de fuerza cortante y momento flector.....	29
2.2.2.	Área, centroide, primer y segundo momento de área.....	30
2.2.3.	La Teoría de Bernoulli – Euler de vigas.....	31
2.2.4.	Método de integración directa.....	33
2.2.5.	Métodos Geométricos.....	35
2.2.6.	Principio de Superposición.....	39
2.2.7.	Métodos de Energía.....	40
2.2.8.	Exactitud y precisión.....	47
2.3.	Conceptual.....	50
2.3.1.	Teoría de la Viga de Timoshenko.....	50
2.3.2.	Vigas isostáticas planas.....	52
2.4.	Definiciones de término básicos: Funcionales a la investigación del problema.....	53
III.	HIPÓTESIS Y VARIABLES.....	54
3.1.	Hipótesis.....	54
3.2.	Definición conceptual de variables.....	54
IV.	DISEÑO METODOLÓGICO.....	57
4.1.	Tipo y diseño de la investigación.....	57
4.2.	Método de investigación.....	57
4.3.	Población y muestra.....	58
4.4.	Lugar de estudio y periodo desarrollado.....	58
4.5.	Técnicas e instrumentos de recolección de la información.....	58
4.6.	Análisis y procesamiento de datos.....	59

V.	RESULTADOS	60
5.1.	Resultados descriptivos.....	60
5.1.1.	Aplicación de la teoría de Timoshenko en el método de área – momento.	60
5.2.	Resultados inferenciales.....	66
5.2.1.	Aplicación del método de Áreas de Momento y fuerza cortante en vigas Isostáticas.....	66
VI.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	88
6.1.	Contrastación de la hipótesis.....	88
6.1.1.	Aplicación de métodos de energía.	88
a)	Vigas de un miembro.....	88
❖	Viga empotrada – libre (Z_1) con carga uniformemente distribuida.....	88
•	Viga empotrada – libre (Z_1) con carga puntual P	90
•	Viga empotrada libre con carga puntual P en punto intermedio.	91
•	Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.....	93
•	Viga bi apoyada con carga puntual P en punto intermedio.....	95
•	Viga simplemente apoyada con un extremo en voladizo y carga puntual P entre apoyos.....	97
•	Viga empotrada – articulada – apoyada con carga w en el tramo BC .	100
•	Viga empotrada – articulada – apoyada con carga P en el tramo BC .	105
•	Viga Empotrada-articulada-apoyada-libre con carga P.	111
•	Viga bi apoyada – articulada – apoyada con cargas w y P.....	116
	CUADRO DE CONTRASTACIÓN ANALÍTICA DE VIGAS	124
6.2	Contrastación de Los resultados con estudios similares	126
a)	Viga empotrada – libre (Z_1) con carga uniformemente distribuida.	126
❖	Resultados con el método de elementos de contorno (MEC).....	126

c) Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.....	139
d) Viga simplemente apoyada con carga puntual P.....	141
6.3 . Responsabilidad ética.....	154
CONCLUSIONES	155
RECOMENDACIONES	157
Referencias.....	158
ANEXOS	162
INSTRUMENTOS VALIDADOS.....	164
BASE DE DATOS	164

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Estructuras hipostáticas e inestables	24
Figura 2 Estructuras isostáticas	25
Figura 3 Estructuras hiperestáticas	26
Figura 4 Vínculos externos de estructuras en 2D	27
Figura 5 Tipos de cargas sobre estructuras	28
Figura 6 Relación entre carga, fuerza cortante y momento flector	28
Figura 7 Convención (+) de fuerzas internas	30
Figura 8 Diagramas de f. cortante y m. flector de vigas con 2 condiciones de vínculo y carga distribuida.....	30
Figura 10 Deflexión de viga en voladizo bajo la carga P.....	31
Figura 11 Condiciones de frontera de vigas elásticas.....	34
Figura 12 Gráfica de la curva elástica y el diagrama de momento.....	36
Figura 13 Gráfica de la curva elástica y el diagrama de momento.....	37
Figura 14 Áreas y centroides de formas comunes	38
Figura 15 Cambio de viga real a viga conjugada	39
Figura 16 Método de superposición	40
Figura 17 trabajo de las fuerzas p y f' en una barra elástica y su representación gráfica.....	41
Figura 18 Estado de esfuerzos triaxial de un elemento	42
Figura 19 Fuerzas internas en una sección de viga en 2D y 3D	43
Figura 20 Factor β de corrección de secciones al corte	44
Figura 21 dos casos de exactitud y precisión.....	48
Figura 22 Elástica con giros de sección según las teorías de Timoshenko y Bernoulli - Euler.....	51
Figura 23 Vigas isostáticas de 1, 2 y 3 miembros	52
Figura 24 Distribución de esfuerzo normal en una sección.....	60
Figura 25 Deformación por cortante.....	61
Figura 26 Deformación de un elemento de viga de Timoshenko	62
Figura 27 La curva elástica y diagramas de V y M	64
Figura 28 La elástica y los diagramas de V y M para el voladizo con carga w	67

Figura 29 La elástica y los diagramas de V y M para el voladizo con carga P	68
Figura 30 Los diagramas de V y M para el voladizo con carga P a distancia α	69
Figura 31 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada con carga w	71
Figura 32 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada con carga puntual P	73
Figura 33 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada-libre con carga P	75
Figura 34 La elástica y los diagramas de V y M para la viga empotrada-rótula-apoyada de 2 miembros con carga w	77
Figura 35 La elástica y los diagramas de V y M para la viga de 2 miembros empotrada-rótula-apoyada con carga P	79
Figura 36 La curva elástica y diagramas de V y M de la viga de 2 miembros con carga P	81
Figura 37 La curva elástica y diagramas de V y M de la viga de 2 miembros biapoyada-rótula-apoyada con cargas w y P	84
Figura 38 Voladizo con carga distribuida real y momento virtual	88
Figura 39 Voladizo con carga distribuida real y carga virtual Q	89
Figura 40 Voladizo con carga puntual real y momento virtual	90
Figura 41 Voladizo con cargas puntuales real P, virtual Q y momento virtual M'	92
Figura 42 Viga simplemente apoyada con carga distribuida w y momento virtual M'	93
Figura 43 Viga simplemente apoyada con cargas distribuida real w y virtual Q	94
Figura 44 Viga simplemente apoyada con carga puntual P y momento virtual	95
Figura 45 Viga bi apoyada con voladizo, con cargas real P virtual Q y momento virtual M'	98
Figura 46 Viga de 2 miembros empotrada-rótula-apoyada con carga real w y ficticias Q, Q' y momentos ficticios M', M'' y M'''	100

Figura 47 Viga de 2 miembros empotrado-rótula-apoyado con cargas real P, ficticia Q y momentos ficticios M', M'' y M'''	105
Figura 48 Viga de 2 miembros empotrado-rótula-apoyado-libre con carga real P y momentos ficticios M_B^i, M_B^d, M_C y M_D	111
Figura 49 Viga de 2 miembros biapoyada-rótula-apoyado con cargas reales w, P , ficticia Q momentos ficticios M_A, M', M'' y M_E	116

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 Desplazamiento de viga empotrada-libre con carga uniformemente distribuida.....	127
Gráfico 2 Desplazamiento de viga empotrada-libre con las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko	128
Gráfico 3 Desplazamiento de viga empotrada-libre $L/h=3.33$	129
Gráfico 4 Pendiente de viga empotrada-libre con carga uniformemente distribuida.....	130
Gráfico 5 Desplazamiento de viga empotrada-libre con carga puntual P en el medio.	133
Gráfico 6 Desplazamientos de la viga empotrada-libre con carga P	134
Gráfico 7 Giros para la viga empotrada-libre con carga P	135
Gráfico 8 Desplazamiento de las vigas empotrada-libre con $L/h=2$ y $L/h = 100$ y carga P	136
Gráfico 9 Comparativo entre las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko para vigas empotrada-libre con carga P , $L = 1\text{m}$, $L/h = 1$ y $n = 55$	137
Gráfico 10 Comparativo entre las teorías Euler-Bernoulli y Timoshenko para viga empotrada-libre con carga P , $L = 5\text{m}$, $L/h = 5$ y $n = 55$	138
Gráfico 11 Desplazamiento de puntos de la viga biapoyada con carga uniformemente distribuida w	141
Gráfico 12 Desplazamiento de viga biapoyada con carga P a distancia $a = 3L/4$	142
Gráfico 13 Comparativo entre las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko para viga biapoyada con carga P , $L = 1\text{m}$, $L/h = 1$ y $n = 55$	144

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1 Desplazamientos estático y dinámico (numérico) de la viga de Timoshenko empotrada- libre mediante MDF	131
TABLA 2 Desplazamientos de máximos de viga biapoyada con carga P en el medio	143
Tabla 3 Deflexión para $x = L/2$ de vigas y error relativo para viga biapoyada con carga P, $L = 1\text{m}$ y $L/h = 1$	144
TABLA 4 Deflexión para $x = L/2$ de viga biapoyada según las teorías Euler-Bernoulli y Timoshenko con carga P, $L = 11.5\text{m}$ y $L/h = 1.5$	147
TABLA 5 Deflexión para $x = L/2$ de viga biapoyada según las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko con carga P, $L = 2\text{m}$ y $L/h = 2$	147
TABLA 6 Variación del error relativo según L/h y método de cálculo para $x = L/2$ par viga biapoyada con carga P	149

RESUMEN

En la Ingeniería Estructural, en los campos Civil, Mecánica, Aeronáutica y Naval, los elementos más utilizados son las vigas. En el diseño de vigas, uno de los parámetros importantes de control por parte de organismos de regulación son las deflexiones máximas de vigas cuya determinación están basados en la teoría de Euler – Bernoulli o clásica que considera únicamente el aporte del momento flector. El problema surge cuando la relación longitud/ altura (L/h) de la viga es pequeña y el error de cálculo es grande con la teoría clásica. La teoría de vigas de Timoshenko considera el aporte de la carga cortante en la deflexión aumentando la exactitud de cálculo sobre todo en vigas cortas y corrige el defecto de la teoría clásica. El objetivo fue buscar un método de cálculo más exacto de la curva elástica para determinar la pendiente y el desplazamiento en puntos específicos de la viga. Mediante las ecuaciones diferenciales de Euler – Bernoulli y de Timoshenko y siguiendo el método de área – momento se determinó uno más exacto al que denominé “método de áreas de momento y fuerza cortante” que mediante dos teoremas permite el cálculo de giros y desplazamientos de la curva elástica de vigas isostáticas. Como elementos de prueba se utilizaron vigas isostáticas de uno y dos miembros con diferentes condiciones de borde y cargas uniformemente distribuida y puntual. Como grupos de control se utilizaron los métodos del trabajo virtual y el teorema de Castigliano. Los resultados obtenidos por ambos en todos los casos analizados son iguales. Para los resultados numéricos se utilizaron datos de otros investigadores quienes mediante los métodos numéricos: diferencias finitas (MDF), elementos finitos (MEF) y elementos de contorno (MEC) han resuelto las ecuaciones diferenciales de Timoshenko y para contrastar utilizaron los resultados de las ecuaciones integrales exactas. Los resultados de estas ecuaciones en puntos específicos son iguales a las del método de áreas de momento y fuerza cortante. La exactitud de los resultados calculados por métodos numéricos depende de la cantidad de elementos considerados, como quedó demostrado en los trabajos de investigación revisados.

PALABRAS CLAVE: Viga de Euler-Bernoulli, viga de Timoshenko, curva elástica, método de área-momento, vigas isostáticas.

ABSTRACT

In Structural Engineering, in Civil, Mechanical, Aeronautical and Naval fields, and the most commonly used elements are beams. In the design of beams, one of the important parameters of control by regulatory organisms are the maximum deflections of beams whose determination are based on the Euler - Bernoulli theory or classic that considers only the contribution of the bending moment. The problem arises when the length / height ratio (L / h) of the beam is small and the calculation error is large with the classical theory. The Timoshenko beam theory considers the contribution of the shear load in the deflection by increasing the calculation accuracy especially in short beams and corrects the defect of the classical theory. The objective was to find a more accurate calculation method of the elastic curve to determine the slope and displacement at specific points of the beam. By means of the Euler - Bernoulli and Timoshenko differential equations and following the area - moment method, a more exact method was defined, which I call "method of moment and shear force areas" that through two theorems allows the calculation of turns and displacements of the elastic curve of isostatic beams. As test elements, one- and two-member isostatic beams with different edge conditions and uniformly distributed and punctual loads were used. As control groups, the methods of virtual work and Castigliano's theorem were used. The results obtained by both in all the analyzed cases are the same. For the numerical results we used data from other researchers who through the numerical methods: finite differences (FDM), finite elements (FEM) and contour elements (MEC) have solved the differential equations of Timoshenko and to test used the results of the equations Exact integrals. The results of these equations at specific points are the same as those of the moment area and shear force method. The accuracy of the results calculated by numerical methods depends on the number of elements considered, as demonstrated in the research papers reviewed.

KEY WORDS: Euler-Bernoulli beam, Timoshenko beam, elastic curve, area-moment method, isostatic beams.

INTRODUCCIÓN

En **(BLANCO Díaz, y otros, 2015)** “La ingeniería estructural es la rama de la ingeniería que trata la concepción, el diseño y la construcción de las estructuras, basándose fundamentalmente en criterios de funcionalidad, seguridad, economía y estética. Se entiende por estructura aquella parte de la construcción que soporta el conjunto, es decir, que es capaz de resistir las acciones que actúan sobre ella (peso propio, sobrecarga de uso, viento, movimientos sísmicos, etc.)”(p.1).

Para **(CERVERA Ruiz, y otros, 2002)** “El diseño de estructuras viene muchas veces determinado por su grado de rigidez, más que por su resistencia. A menudo las normas de diseño de elementos estructurales fijan las deformaciones máximas o deformaciones admisibles que pueden aceptarse en dichos elementos en “estados de utilización”, bajo la acción de cargas de servicio. Esta es la base del llamado “cálculo en servicio”...suelen responder a criterios de funcionalidad, mantenimiento y estética”. (p. 61).

Sobre límites de deflexiones de vigas afirma **(McCORMAC, y otros, 2012)** La práctica Standard Americana para edificios ha sido limitar las deflexiones por carga viva de servicio a aproximadamente $1/360$ de la longitud del claro, [...] para los casos donde se soporta maquinaria delicada y de precisión, las deflexiones máximas pueden quedar limitadas a $1/1\ 500$ o $1/2\ 000$ de la longitud del claro. Las especificaciones de la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) 2010, fijan las deflexiones de las vigas y traveses de acero por efecto de cargas vivas e impacto a $1/800$ del claro. (Para los puentes en áreas urbanas y que usan también los peatones, las Especificaciones AASHTO recomiendan un valor máximo de $1/1\ 000$ de la longitud del claro.) (p, 310)

Para **(GARIJO, 2015)** “El diseño mecánico de sistemas complejos en ingeniería requiere, muy a menudo, la resolución de problemas derivados de análisis de deformaciones y esfuerzos en los cuerpos, la transmisión de calor, las redes eléctricas, o los movimientos de los fluidos. Las disciplinas que se

encargan de estudiar esos problemas, ya se trate de elasticidad, la resistencia de materiales o la mecánica de fluidos, construyen modelos físicos en los que se asumen ciertas simplificaciones del problema real”. (p.1)

Indica **(SILVEIRA Pavlack, 2016)** “Las vigas son elementos presentes en varias aplicaciones cotidianas, como por ejemplo, hélices de helicópteros, satélites flexibles, construcción civil, alas del avión, robótica, rieles de trenes y subsistemas de estructuras más complejas. Por eso el estudio de su comportamiento es importante porque existen estructuras que solo fueron posibles al conocimiento y aplicación de la teoría de las vigas. En general, las vigas son elementos prismáticos rectos y largos. En la mayoría de estos casos, las fuerzas que actúan sobre ellos son perpendiculares a su eje, causando solo flexión y cizalla. Cuando las fuerzas no son perpendiculares al eje de la viga, pueden también producen esfuerzos axiales” (p. 15).

En **(RUFINO Silva, 2014)**, Daniel Bernoulli (1700-1782), junto con Leonard Euler (1707-1783), desarrolló la teoría de flexión de vigas conocida como la teoría de viga Euler-Bernoulli y que todavía es válido hoy. **(FLEISCHFRESSER, 2012)** Analiza la curva elástica o la deformación de una viga sometida a cualquier carga considerando solo el efecto del momento flector resultante de estas cargas, y según **(NAVARRO Gregori, 2009)** se basa en la hipótesis cinemática de que las secciones planas permanecen planas tras la deformación, y además, perpendiculares a la directriz del elemento. De la ecuación diferencial de la teoría de viga de Euler-Bernoulli han derivado diferentes métodos de solución: la integración sucesiva que conduce a la ecuación analítica exacta, los semi-gráficos de área – momento de Charles Greene (1873) y de la viga conjugada de Otto Mohr (1868) que permiten el cálculo de giros y desplazamientos en puntos específicos de la viga. La limitación de esta teoría es que no tiene alcance a vigas de toda longitud, por cuanto son válidas para las vigas esbeltas (relación longitud/altura $\geq 1/10$) donde la influencia del esfuerzo cortante es mínima.

En **(RUFINO Silva, 2014)**, La contribución más reciente y de especial relevancia lo tiene Stephen Timoshenko (1878-1972) quien considera la deformación angular de la fuerza cortante presente en la viga sometida a flexión.

En **(NAVARRO Gregori, 2009)** La teoría de vigas de Timoshenko se basa en la siguiente hipótesis cinemática: las secciones planas permanecen planas tras la deformación y no se mantienen perpendiculares a la directriz del elemento.

En **(De CAMPOS, 2015)** La teoría de Timoshenko toma en consideración la deformación del elemento por flexión y fuerza cortante [...]. Esta teoría es importante cuando se desea modelar el comportamiento de vigas altas especialmente aquellas que poseen luz (L) pequeña y altura (h) grande es decir (razón de $L/h \leq 10$), donde la deformación por el esfuerzo cortante es significativo (p. 14). [...]. Según Castro (2002) se puede verificar que la teoría de Euler-Bernoulli puede considerarse como un caso límite de la teoría de Timoshenko. Ambas teorías tienden a proporcionar la misma solución cuando la relación vano/altura de la viga aumenta (relación $L/h > 10$) (p. 20).

Luego la teoría de Timoshenko tiene alcance más amplio y ha generado que muchos investigadores de varias universidades se dediquen a su estudio tanto en régimen estático como dinámico, considerando vigas de diferentes configuraciones de vínculo (contorno) y carga, mediante la aplicación de diferentes métodos numéricos existentes. Para su validación utilizaron las ecuaciones analíticas exactas obtenidas de otras investigaciones o desarrollados por ellos. Los datos numéricos de ejemplos y resultados de validación de estas investigaciones fueron utilizados como grupo de control para la contrastación numérica de las ecuaciones analíticas obtenidos en este trabajo.

Por otro lado existen los métodos de energía como: el teorema de Castigliano (1873) y el principio de trabajo virtual (método de la carga unitaria ficticia) **(BRUHN, 1973)** desarrollados independientemente por J. C. Maxwell (1864) y O. Z. Mohr (1874). En su formulación se utilizan todas las fuerzas internas actuantes para el cálculo de giros y desplazamientos en puntos específicos de la viga. Estos métodos fueron utilizados como Grupos de Control para la contrastación y validación de los resultados de las ecuaciones analíticas obtenidas en esta investigación.

Afin de contribuir con la investigación en el tema antes mencionado se ha elaborado esta tesis de maestría denominado "LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE TIMOSHENKO AL MÉTODO DE ÁREA - MOMENTO MEJORA LA

EXACTITUD DE LA CURVA ELÁSTICA EN VIGAS ISOSTÁTICAS”. Se fundamenta (a diferencia de otras investigaciones) en la aplicación de métodos gráficos que sobre la base del método de área – momento y agregando la fuerza cortante de la teoría de Timoshenko, se obtienen los teoremas ampliados de área - momento los cuales aplicados a una viga isostática con carga y condiciones de vínculo definidos nos dan por solución las ecuaciones analíticas de giro y desplazamiento en puntos específicos de la viga. Las ventajas son:

- Las soluciones son ecuaciones analíticas exactas.
- Son útiles para el diseño porque permiten la variación de: dimensiones, material, carga y condiciones de contorno.
- Tiene más alcance que la teoría de Euler-Bernoulli por considerar también para las vigas de longitud corta.
- Son didácticos por el efecto visual que genera para su comprensión, con el desarrollo de la curva elástica (método gráfico) y la geometría para la determinación de giros y desplazamientos.
- Es más sencillo y rápido que el método matemático de integración

Los resultados de esta investigación serán aplicados por los ingenieros diseñadores del área de estructuras, fabricantes y entes reguladores, así como en las especialidades de ingeniería Civil, Aeronáutica, Mecánica y otros, las instituciones educativas deben considerar en sus programas silábicos la aplicación de la teoría de Timoshenko.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En el diseño de estructuras y elementos de máquina, las vigas y ejes a ser diseñados deben cumplir con los requisitos de: resistencia, estabilidad y rigidez.

La rigidez está relacionado con la deformación del elemento por acción de las cargas externas que soporta durante su periodo de operación debido a su elasticidad. La desviación del elemento respecto a su eje longitudinal debido a las cargas externas y al peso propio se denomina la curva elástica la cual puede ser calculada tanto su desplazamiento lateral como su pendiente respecto a su forma inicial (descargada). Las normas de diseño establecen los valores máximos de la deflexión de un eje o una viga.

Las deflexiones mayores a las establecidas por diseño pueden generar vibración en ejes que trabajan a rotación, pérdida de estabilidad de máquinas en movimiento, disminución de la vida útil de elementos de máquina fijas o móviles, un efecto visual negativo y falta de confianza en la seguridad del elemento por parte de los usuarios; **finalmente la pérdida de valor económico del conjunto que forma parte la viga o eje.**

La magnitud de las deflexiones es función de las fuerzas y momentos internos, el tipo de material, la sección transversal y longitud del elemento, las condiciones de vínculo o apoyo y el tipo de carga externa. Las fuerzas axial, cortante y el momento flector internos, son generadas por las cargas externas activas y reactivas cumpliendo las ecuaciones de equilibrio estático de fuerzas y momentos.

Los teoremas de cálculo de deflexiones como el método de área - Momento (1868—1872) y la integración por partes, están basados en la ecuación diferencial de la teoría de Euler – Bernoulli (1712) que considera solo el **momento flector** como generadora de la deflexión de la viga.

Considerando la relación longitud (L)/altura (h) de la sección transversal, las vigas se clasifican en largas y cortas. Las vigas que tienen la relación $L/h \leq 10$ se consideran vigas de longitud corta.

El problema se presenta con la teoría de Euler-Bernoulli en el cálculo de la **curva elástica** en **vigas de longitud corta**, porque los resultados dan **valores menores al real** con diferencias incluso mayores al 50%, lo que es inaceptable. Por tanto ésta teoría no tiene alcance general para todas las vigas.

En 1922 aparece la teoría de vigas de Timoshenko del profesor Ingeniero Stephen Timoshenko quién considera el aporte de la fuerza cortante en el desplazamiento lateral de la viga con la condición de que la sección transversal se mantiene plana aunque la pendiente no es perpendicular a dicha sección. Con esto surge la nueva ecuación diferencial de la curva elástica de la viga denominado teoría de viga de Timoshenko.

Actualmente la era de la globalización hace que los productos se masifiquen, miniaturicen, sean de multifunción y bajo costo por lo que la aplicación de esta teoría se hace muy necesaria. Esto impulsó a que muchos investigadores del área de estructuras se dediquen a investigar la aplicación de la teoría de Timoshenko en problemas de deflexiones tanto estático como dinámico, utilizando los diversos métodos numéricos que existen, con la ayuda de la computación.

En esta Tesis, a diferencia de otras investigaciones el problema a analizar consiste en buscar una solución de cálculo de la curva elástica de las vigas isostáticas sin restricción de longitud, en base al método de área – momento donde se incluya el aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko) y aumente la exactitud de cálculo en vigas de cualquier longitud.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. General

¿Cómo mejorar la exactitud de la curva elástica de vigas por el método de área-momento considerando además del momento flector, la fuerza cortante para que tenga alcance general?

1.2.2. Específicos

- ¿Cómo mejorar la exactitud del desplazamiento lateral de la curva elástica de vigas considerando además del momento flector. la fuerza cortante sobre la base del método de área – momento para que tenga alcance general?.
- ¿Cómo mejorar la exactitud de la pendiente de la curva elástica de vigas considerando además del momento flector y la fuerza cortante sobre la base del método de área – momento para que tenga alcance general?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Formular la aplicación de la teoría de vigas de Timoshenko en el método de área-momento para mejorar la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas de toda longitud.

1.3.2. Objetivos específicos.

- Mejorar la exactitud del cálculo de desplazamiento de la elástica de la viga isostática con el aporte de las fuerzas cortantes además del momento flector mediante métodos de alcance más general.
- Mejorar la exactitud del cálculo de pendientes de la elástica de la viga isostática con el aporte de las fuerzas cortantes además del momento flector mediante métodos de alcance más general.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórica

Según **(MUÑOZ, 2011)** “...En las tesis de posgrado, este tipo de investigación se apoya exclusivamente en el estudio de teorías, conceptos y aportaciones de otros autores con el propósito de comprobar, rechazar o llegar a nuevos conocimientos”. (p.44)

Esta investigación se limita al cálculo de la curva elástica por el método gráfico de área – momento de la teoría de Bernoulli – Euler más la introducción de la teoría de Timoshenko y aplicando el principio de superposición se obtienen dos teoremas ampliados denominados “método de áreas de momento y fuerza cortante” Con esto se logra ampliar el alcance al análisis de vigas de toda longitud.

Por ser una investigación teórica de tema tecnológico no se necesita de la estadística salvo el cálculo de exactitud para la demostración de la hipótesis, sino de otras teorías de carácter académico ya sea analítico y/o teórico.

Los antecedentes teóricos de esta investigación son el desarrollo de métodos numéricos computarizados utilizando la teoría de vigas de Timoshenko para los análisis estáticos y dinámicos, así como métodos de integración analíticos exactos, para la validación de resultados por métodos numéricos.

1.4.2. Temporal

La presente investigación se inicia en agosto del año 2018 y termina en abril del 2019. Es transversal.

1.4.3. Espacial

La investigación sobre la aplicación de la teoría de vigas de Timoshenko planas (2D) se realiza en la Escuela de posgrado de la Facultad de CE de la UNAC.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Internacional

- **(De CAMPOS, 2015)** presentó: Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de vigas de Timoshenko, como trabajo de Conclusión de Curso (Graduación) - Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Federal de Paraná, Campo Mourão, Brasil, p,74. Objetivo: Analizar con el método de elementos finitos el comportamiento estructural de vigas en régimen elástico lineal a partir de la teoría de Timoshenko. Aplicando conceptos de conservación de la energía y principio del trabajo virtual para sólidos deformables elaboró un programa computacional en elementos finitos para el cálculo de desplazamientos y giros de la viga de Timoshenko con diferentes condiciones de vínculo y carga. Para la validación del programa utilizó las ecuaciones analíticas de Fleischfresser (2012) y Castro (2002) y para una viga empotrada-libre con carga puntual P en el extremo libre variando la relación longitud/ altura de sección transversal (L/h) de 2 a 100 demostró el error del programa debido al efecto de cortante para valores altos (>8) donde el desplazamiento con la teoría de Timoshenko es menor de con el de Euler-Bernoulli, el cual es falso. Los ejemplos numéricos para las vigas empotrada-libre y Biapoyadas se utilizaron para contrastar con las ecuaciones analíticas obtenidas en la presente investigación (véase la sección 6.2 resultados mediante MEF)

- **(FLEISCHFRESSER, 2012)** presentó: Uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko, trabajo para optar el título de Doctor en Ingeniería, Curitiba, Brasil, Universidad Federal de Paraná, Dpto de Ingeniería Civil / Dpto de Matemática, 121 páginas. Objetivo, analizar la utilización del método de elementos de contorno en el cálculo de desplazamientos de las vigas de Timoshenko bajo las cargas estáticas y dinámicas. Primero determinó las ecuaciones analíticas para cargas estáticas a partir de las ecuaciones diferenciales de Timoshenko y de Euler-Bernoulli, para vigas con diferentes condiciones de borde, con cargas uniformemente

distribuidas y puntuales. Para el cálculo numérico desarrolló programas con el método de elementos de contorno. Los resultados para las cargas estáticas fueron presentados en forma gráfica a fin de comparar los tres métodos: MEC, Timoshenko y Bernoulli-Euler. Los ejemplos numéricos de vigas isostáticas han sido utilizados para contrastar con los de esta investigación (véase la sección 6.2 resultados mediante MEC).

- **(PAIVA Gomes de Souza, y otros, 2018)** en junio 2018 publican el artículo: Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab, en Revista Tecnología Fortaleza v.39, n, 1.p 1-12. Objetivo determinar la diferencia de deflexión entre las vigas de Timoshenko y Euler-Bernoulli para diferentes relaciones de longitud/altura (L/h). De la ecuación diferencial resultante de ambas teorías utiliza el método de Diferencias Finitas que transforman las ecuaciones del medio continuo en elementos discretos implementado en Scilab. Para los cálculos numéricos utiliza vigas de 1 a 2 metros longitud y $L/h = 1, 1.5$ y 2 con bordes simplemente apoyadas y otro empotrado - libre de 1 y 5 m de longitud y ambos con carga puntual. Gráficamente se muestran los desplazamientos a lo largo de las vigas y se observa que es mayor con la teoría de Timoshenko. Para L/h menores la diferencia entre las teorías de Timoshenko y Euler-Bernoulli es grande en vigas cortas y se reduce a medida que aumenta la relación siendo mínimas para vigas largas. Los datos numéricos y resultados de esta investigación se utilizaron para la validación de esta investigación. (Véase la sección 6.2 resultados mediante MDF)

- **(VIECILLI Martins de Mello, 2014)** en su trabajo final de curso titulado Análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com o método das diferenças finitas, para obtener el grado de Bachiller en Ingeniería Civil en la Universidad de Paraná, analiza 4 tipos de vigas (apoyo doble, empotrado doble, empotrado-apoyado y voladizo) con carga distribuida en toda su longitud; mediante diferencias finitas obtiene los desplazamientos estáticos y dinámicos de las vigas con ambas teorías y comparando los resultados concluye que estos aumentan con el aumento de la sección transversal, manteniendo constante la longitud. Los resultados numéricos fueron contrastados con valores calculados

con las ecuaciones obtenidos en esta investigación existiendo diferencias relativas entre ambos resultados próximos al 10% para valores de L/h menores (2.667). (Véase la sección 6.2 resultados mediante MDF)

- **(CARRER, y otros, 2014)** publican Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams by the boundary element method, en Blucher Mechanical Engineering Proceedings May 2014, vol. 1 , num. 1. Aplicaron el método de elementos de contorno MEC a las vigas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko con carga uniformemente distribuida. Utilizaron las vigas Biapoyadas, empotrada-empotrada, empotrada-apoyada y empotrada-libre. Para la validación numérica utilizo las ecuaciones analíticas de ambas teorías obteniendo resultados exactos en ambos casos y presentando en forma gráfica, en el caso de vigas de Timoshenko mejor resultado fue con elementos de 64 celdas. Los valores numéricos de las vigas biapoyada y empotrada-libre fueron usadas para la contrastación con los obtenidos en esta investigación.(véase la sección 6.2 resultados mediante MEC)

- **(NAVARRO Gregori, 2009)** publicó Modelización de elementos lineales de hormigón armado incluyendo el efecto del esfuerzo cortante, Tesis Doctoral del Departamento de Ingeniería de la Construcción y de Proyectos de Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Valencia. Análisis de vigas de hormigón mediante elementos finitos. Para la validación numérica utilizo las ecuaciones exactas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko y vigas empotradas-libres y Biapoyadas de sección rectangular y otra doble T con carga puntual Los cálculos numéricos de validación fueron contrastados con los obtenidos en esta investigación. (Véase la sección 6.2 resultados mediante MEF)

- **(LUÉVANOS Rojas, 2011)** “Método de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas, considerando las deformaciones por cortante” 2011. Aplicando las teorías de Timoshenko y clásica a vigas continuas de 5 tramos de $A E$, con el método de deflexión - pendiente determinó los momentos, giros y fuerzas cortante en los extremos de cada tramo y comparó los resultados encontrando que son mayores las diferencias en vigas de tramo corto. Por ser problemas hiperestáticos los resultados no pueden ser contrastados.

- **(LUÉVANOS Rojas, y otros, 2016)** A Mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a concentrated load taking into account the shear deformations. obtiene soluciones matemáticas de las vigas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko para vigas biapoyada con carga puntual a 0.25 y 0.5 de su longitud que varía de 3m a 10m, habiendo determinado que las vigas de Timoshenko tienen mayor deformación que de Euler-Bernoulli y que la diferencia de las mismas disminuye a medida que la longitud de la viga aumenta desde 47.3% para la longitud de 3m hasta 04.3% para la longitud de 10 m. Estos resultados fueron contrastados con los de esta investigación, siendo los resultados iguales.

- **(LLANOS Sanchez, 2013)** Presenta la tesina “Desarrollo y aplicación de un modelo de elementos finitos para cálculo de vigas con materiales compuestos laminados basado en la teoría de Timoshenko”. Como aplicación utilizó una viga de acero en voladizo de sección I obteniendo resultados iguales al método exacto.

2.1.2. Nacional

- **(TARAZONA MIRANDA, 2018)** publica Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria). Tesis (Magíster en Matemática Pura). Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado, 2018. 80 h, estudia los sistemas vibratorios de Timoshenko actuando solamente en una sola ecuación. Por ser un problema dinámico no se puede hacer comparación con el presente trabajo de investigación.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Teoría de Estructuras.

(VINNAKOTA, 2006) “Una estructura puede definirse como un sistema de miembros y conexiones individuales, dispuestos para que todo el conjunto permanezca estable y sin cambios apreciables en forma, mientras se logran los

criterios de desempeño prescritos. Las estructuras en general y las de acero en particular tienen una función importante en nuestra vida diaria". (p. 3)

En 2D cada miembro tiene tres grados de libertad de movimiento, traslación según los ejes x, y, del plano que contiene el miembro y rotación según el eje z perpendicular al plano. Eliminando los 3 grados de libertad mediante vínculos se tiene el miembro (estructura) estable. Según la relación entre el número de vínculos (n_v) y el número de grados de libertad (n_{gl}), las estructuras pueden ser:

$n_v < n_{gl}$ Estructura hipostática

$n_v = n_{gl}$ Estructura isostática

$n_v > n_{gl}$ Estructura hiperestática

Las **estructuras hipostáticas** son mecanismos que no tienen estabilidad por carecer de suficiente vínculo. En la figura 1, la (a) representa una viga de 3 miembros con vínculos externos e internos (rótula R). Una rótula restringe 2gl, luego la viga es ($8 < 9$) hipostática; la (b) tiene 2 armaduras (miembros) vinculados externa e internamente ($5 < 6$) también es hipostática porque les falta un vínculo para quedar fijo

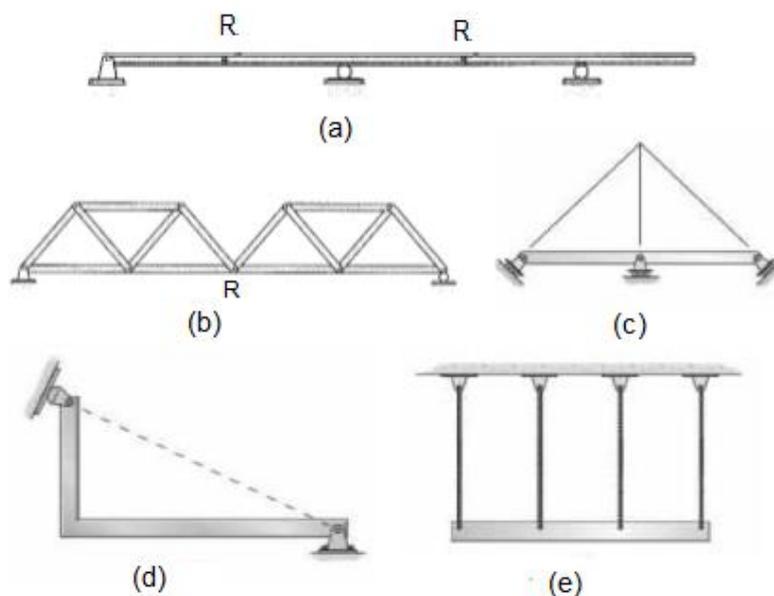


Figura 1 Estructuras hipostáticas e inestables
Fuente: propia del autor.

Las estructuras (c), (d) y (e) son inestables porque si bien los 2 primeros son isostáticos y el tercero hiperestático, sus vínculos están mal distribuidos que les genera pequeños movimientos.

En las **estructuras isostáticas** sus vínculos están bien distribuidos para que sean estables o fijos.

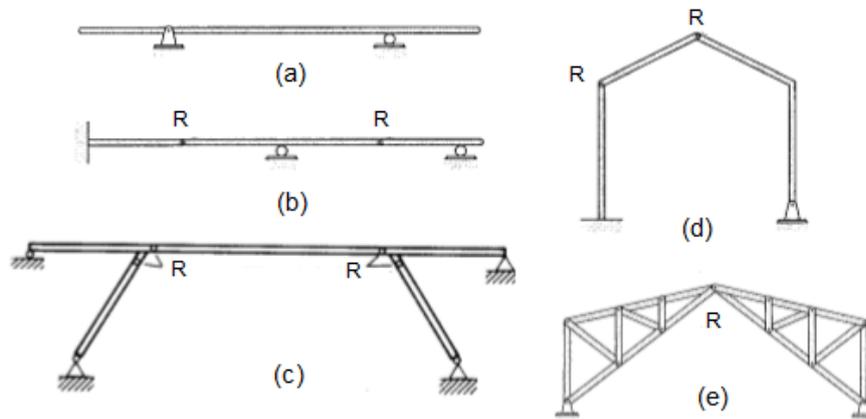


Figura 2 Estructuras isostáticas
Fuente: propia del autor

Analizando la relación $nv = ngl$ de cada estructura, en la figura 2 las estructuras de (a) a la (e) tienen respectivamente: (3=3), (9=9), (15=15), (9=9) y (6=6). Por lo tanto son estables.

Las **estructuras hiperestáticas** tienen más vínculos que grados de libertad y el número excedente de vínculos se llama grado de hiperestaticidad o redundancia. Un miembro cerrado es un vínculo interno de 3 grados de redundancia o hiperestaticidad. En las armaduras, el número de barras (b) excedentes a la relación: $b = 2n - 3$ representa grado de redundancia, siendo (n) el número de nudos. En la figura 3, la (a) es una viga continua con 2 de hiperestaticidad, la (b) es un marco redundante de 6°, la (c) y (d) aparte de vínculos externos tienen miembros cerrados, con lo cual son hiperestáticos de 9° y 5° respectivamente.

En (e) la armadura externamente es isostática, pero internamente tiene: $11 > 2(6) - 3 = 9$ dos barras demás y es redundante de 2°.

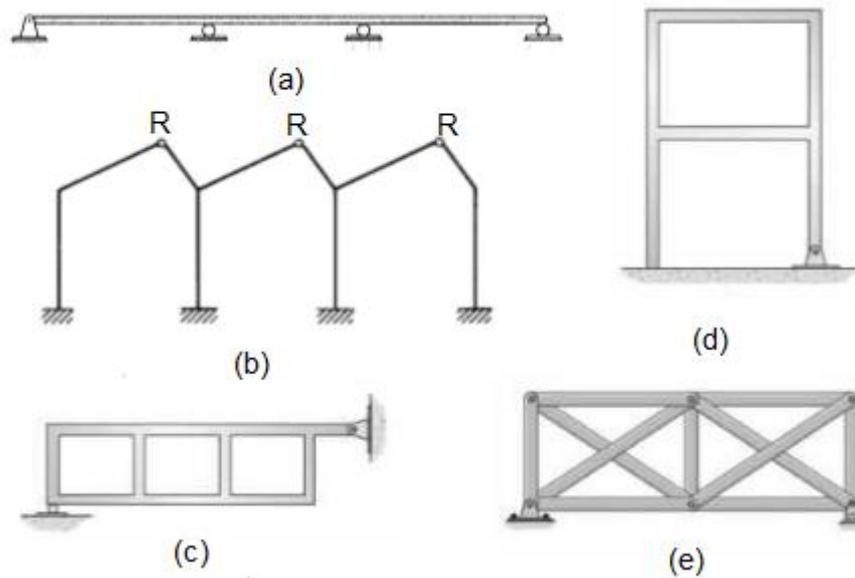


Figura 3 Estructuras hiperestáticas
Fuente: propia del autor.

Una estructura como tal, debe tener vínculos en tierra para quedar inmóvil y para soportar las cargas de diseño suministradas

a) Vínculos.

(VINNAKOTA, 2006) “El diseñador también deberá tener un concepto claro sobre la manera en que tiene lugar la transferencia de cargas verticales y horizontales que actúan sobre la estructura desde los puntos de su aplicación hasta el suelo”. (...) El diseño de cualquier estructura implica el suministro de resistencia, estabilidad y rigidez.(p. 59)

(Stanley W, y otros, 1992) Para que una viga pueda permanecer en equilibrio estático, también debe haber fuerzas externas equilibradoras. Los apoyos que desarrollan estas fuerzas equilibradoras se llaman reacciones. (...) usualmente las reacciones se consideran cargas concentradas. El claro de una viga simple es la distancia que hay entre sus reacciones.

Para las estructuras en 2D existen tres tipos de vínculos externos.

- Rodillo: limita todo movimiento perpendicular al plano que sostiene.
- Pasador o bisagra lisa: limita los movimientos horizontal y vertical.

- Soporte fijo (empotramiento): limita todo movimiento según los tres ejes coordenados (desplazamientos vertical y horizontal y giro respecto al eje perpendicular al plano que contiene).

En la figura 4 se indican los tres vínculos externos y las fuerzas de reacción que generan cada uno.



Figura 4 Vínculos externos de estructuras en 2D
Fuente: R. C. Hibbeler, Ingeniería Mecánica - Estática, 2010.

También existen tres tipos de vínculos internos que unen dos elementos estructurales, limitando el movimiento en una dirección, el más usado es la articulación o rótula R que restringe $2(n-1)$ grados de libertad (n es el $N|^\circ$ de barras que concurren a la rótula) y permite la rotación relativa de un miembro respecto al otro, es decir $M = 0$

b) Cargas.

(Stanley W, y otros, 1992) “Las cargas sobre vigas se clasifican como concentradas o distribuidas. Una carga concentrada es la que se aplica sobre un área tan pequeña que se puede suponer que actúa sobre un punto. (...) . Una carga distribuida es la que se extiende sobre una parte importante o sobre toda la longitud de la viga. Puede estar uniformemente distribuida o variar uniformemente”.(p. 13).

En la figura 5 se muestran los diferentes tipos de cargas que actúan sobre una estructura.

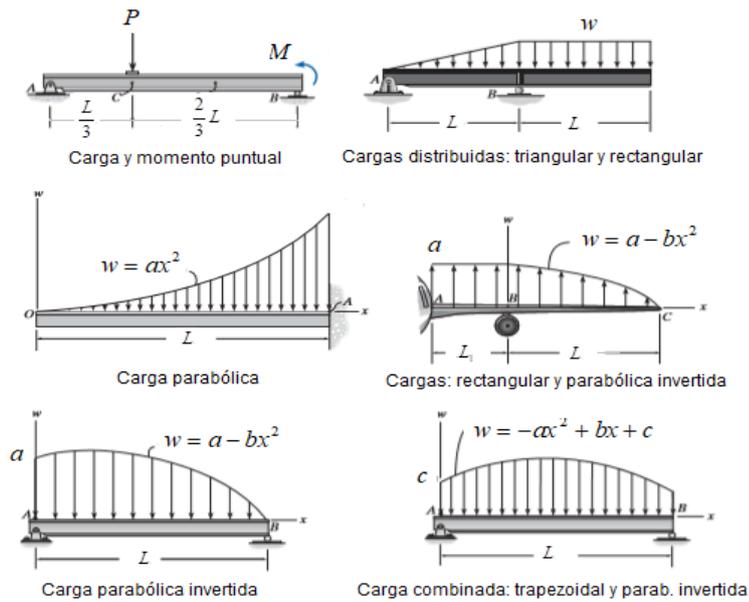


Figura 5 Tipos de cargas sobre estructuras
Fuente: propia del autor.

c) Relación entre Fuerzas externas e Internas

La figura 6 (a) muestra los tres tipos de fuerzas externas (cargas): la fuerza distribuida w , la fuerza puntual P y momento flector \bar{M} , la (b) relaciona la carga distribuida w con la fuerza cortante V y el momento flector M , la (c) la carga P con la fuerza cortante V y el momento flector M y la (d) el momento flector M con la carga \bar{M} . Planteando las ecuaciones de equilibrio estático se determinan las relaciones entre las cargas externas e internas para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

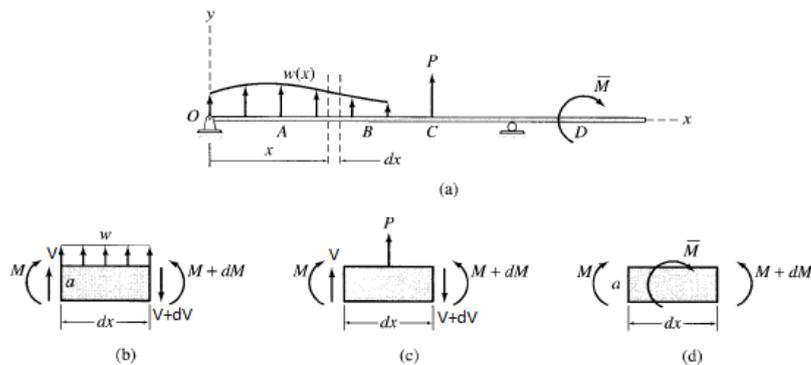


Figura 6 Relación entre carga, fuerza cortante y momento flector
Fuente: Aslam Kassimali, Análisis Estructural, 2006

De la figura (b) se tiene :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \dots V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = w(x) \dots \rightarrow \dots \Delta V = \int w(x) dx \quad (2 - 1)$$

La derivada indica que la pendiente de la cortante en el punto es igual a la intensidad de la carga distribuida en el punto. La integral indica que el cambio de la cortante entre dos puntos es igual al área de la carga distribuida entre esos dos puntos

$$\sum M_o = 0 \rightarrow \dots M + V\Delta x + w(x)\Delta x(k\Delta x) - (M + \Delta M) = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = V \dots \rightarrow \dots \Delta M = \int V dx \quad (2 - 2)$$

La derivada indica que la pendiente del momento flector en el punto es igual a la cortante en el punto. La integral indica que el cambio de momento flector entre dos puntos es igual al área de la cortante entre esos dos puntos

De la figura (c) se tiene :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \dots V + P - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = P \quad (2 - 3)$$

Indica que el cambio de la cortante en el punto de aplicación de la carga es igual a la carga P.

De la figura (d) se tiene :

$$\sum M_o = 0 \rightarrow \dots M + \bar{M} - (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = \bar{M} \quad (2 - 4)$$

Indica que el cambio del momento flector en el punto de aplicación de \bar{M} es igual al momento concentrado \bar{M} .

d) Diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Para el diseño es necesario conocer la sección de la estructura con mayores fuerzas internas y se determinan mediante los diagramas de fuerza

normal N , fuerza cortante V y momento flector M en estructuras planas y se incluye el momento torsor T cuando las estructuras son espaciales. Los diagramas se trazan a lo largo de líneas paralelas a los ejes longitudinales de la estructura y la convención de signos utilizados como positivo (**Hibbeler, 2012**) son las indicadas en la figura 7 (a).



Figura 7 Convención (+) de fuerzas internas
Fuente: Structural Analysis, R. C. Hibbeler, 2012.

En la figura 8 se muestran dos ejemplos diagramas de fuerza cortante V y momento flector M , de dos vigas con igual longitud L y carga uniformemente distribuida q ; pero con dos condiciones de vínculo en sus extremos A y B : apoyado – apoyado y libre – empotrado.

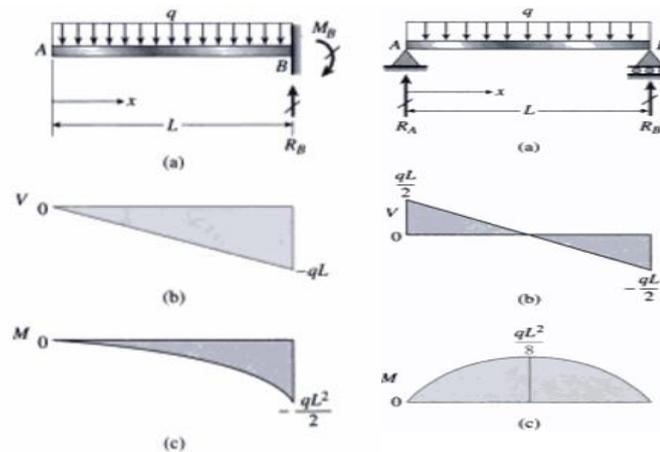


Figura 8 Diagramas de f. cortante y m. flector de vigas con 2 condiciones de vínculo y carga distribuida
Fuente: James M., Gere, Mecánica de Materiales, 2006.

2.2.2. Área, centroide, primer y segundo momento de área.

Dada un $y = f(x)$ que genera un área en el plano x, y como se indica en la figura 9. Dicha área (A), el primer momento (estático S_y) y segundo momento (inercia I_y) de la misma respecto al eje y se pueden determinar mediante los integrales:

$$A = \int_0^L f(x)dx, \quad S_y = \int_0^L xf(x)dx = \bar{x}.A \quad \text{y} \quad I_y = \int_0^L x^2 f(x)dx$$

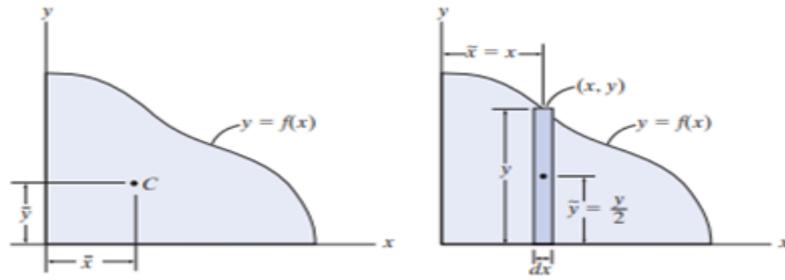


Figura 9 Área generada por $y = f(x)$

Fuente: R. C. Hibbeler, Ingeniería Mecánica-Estática, 2010.

En análisis estructural se utilizan las mismas fórmulas para calcular las propiedades geométricas: área, momento estático y momento de inercia de la sección transversal del elemento y en el método de área de momentos

haciendo $y = \frac{M_z}{EI_z}$ en el diagrama de fuerzas internas se puede determinar el

giro y el desplazamiento de puntos de la curva elástica de la viga.

2.2.3. La Teoría de Bernoulli – Euler de vigas.

Según **(Timoshenko, 1983)** Jacob Bernoulli (1654 – 1705) plantea el desarrollo de la curva elástica de una viga en voladizo de longitud l y sección transversal rectangular $b \times h$ sometido a una carga puntual P , como el indicado en la figura 10.

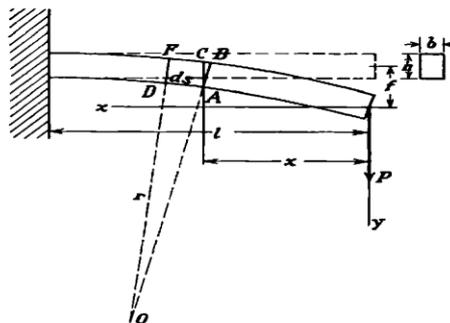


Figura 10 Deflexión de viga en voladizo bajo la carga P .

Fuente: Timoshenko, Stephen, *History of Strength of Materials* 1953

Para Bernoulli, el momento de las fuerzas internas en la sección AB respecto a A es igual al momento externo $P \cdot x$

$$\frac{1}{2} \frac{m \Delta ds}{ds} b h \frac{2}{3} h = P \cdot x \quad \text{ó} \quad \frac{C}{r} = P \cdot x \quad (2 - 5)$$

Dónde: $\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{r}$ y $C = \frac{m \cdot b \cdot h^3}{3}$

Bernoulli comete un error al asumir en A una deformación nula por tanto C no es exacta. (p.26,27).

Mariotte (1620 – 1684) desarrolla el concepto de eje neutro

En 1744 Leonard Euler (1707 – 1783) publica un libro “Metodus inveniendi líneas curvas...” donde por primera vez aparece en forma sistematizada la curva elástica. Estudia la deformada de la viga elástica de diferentes cuerpos flexionados y utilizando cálculo variacional determina la ecuación diferencial de la curva elástica de la viga de J. Bernoulli que para el caso de la figura anterior es:

$$C \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = P \cdot x \quad (2 - 6)$$

Dónde: $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ y $y' = \frac{dy}{dx}$

Considerando que la deflexión es pequeño y despreciando y' en el denominador obtiene:

$$y'' = \frac{P \cdot x}{C} \quad (2- 7)$$

Navier (1783 – 1836) en 1826 aparece la 1^{ra} edición de su libro de Resistencia de materiales y en el 3er artículo analiza la flexión de las barras prismáticas y asume desde el principio que la curvatura se produce en el mismo plano en el que actúan las fuerzas, de modo que su análisis es válido solo para vigas que tienen un plano de simetría y que se cargan en ese plano Suponiendo que las secciones transversales permanecen planas durante la flexión y usando tres ecuaciones estáticas, concluye que el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal y que la curvatura viene dada por la ecuación:

$$\frac{EI}{\rho} = M \quad (2 - 8)$$

Donde I es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro. Asumiendo que la deflexión es pequeña y considerando el eje x en dirección del eje de la viga él encuentra esta relación.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (2 - 9)$$

Desde la época de Euler esta fórmula se utilizó para vigas en voladizo y vigas simplemente apoyadas con carga simétrica. (p. 75). Esta ecuación es conocida como la ecuación diferencial o la teoría de Euler – Bernoulli.

El modelo Bernoulli – Euler de se basa en las siguientes hipótesis:

- Se supone planitud de la sección transversal antes y después de la deformación
- Se supone la presencia solamente de un estado uni-axial de tensiones en la dirección del eje lo que implica existencia de flexión pura.

El material es isótropo, homogéneo y verifica la ley de Hooke. La viga es recta con sección constante y de doble simetría en todo el dominio.

2.2.4. Método de integración directa.

(Popov, 2000) De geometría analítica se muestra que en coordenadas cartesianas la curvatura de una línea se define:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

Donde x y y son las coordenadas posición y deflexión de un punto de la curva elástica con respecto a su posición inicial. Como las deflexiones son pequeñas $(y')^2 \approx 0$ y sabiendo que $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \theta \approx \theta(x) \quad (2.11)$$

De donde:

$$M = EIy'' , \quad V = \frac{dM}{dx} = EIy''' , \quad w = \frac{dV}{dx} = EIy^{(4)} \quad (2.12)$$

Las soluciones por integración directa son.

$$EIy^{iv} = EI \frac{d^4 y}{dx^4} = EI \frac{d}{dx}(y''') = w(x) \quad (2.13)$$

$$EIy''' = \int_0^x w dx + C_1 = V \quad (2.14)$$

$$EIy'' = \int_0^x dx \int_0^x w dx + C_1 x + C_2 = M \quad (2.15)$$

$$EIy' = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x w dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (2.16)$$

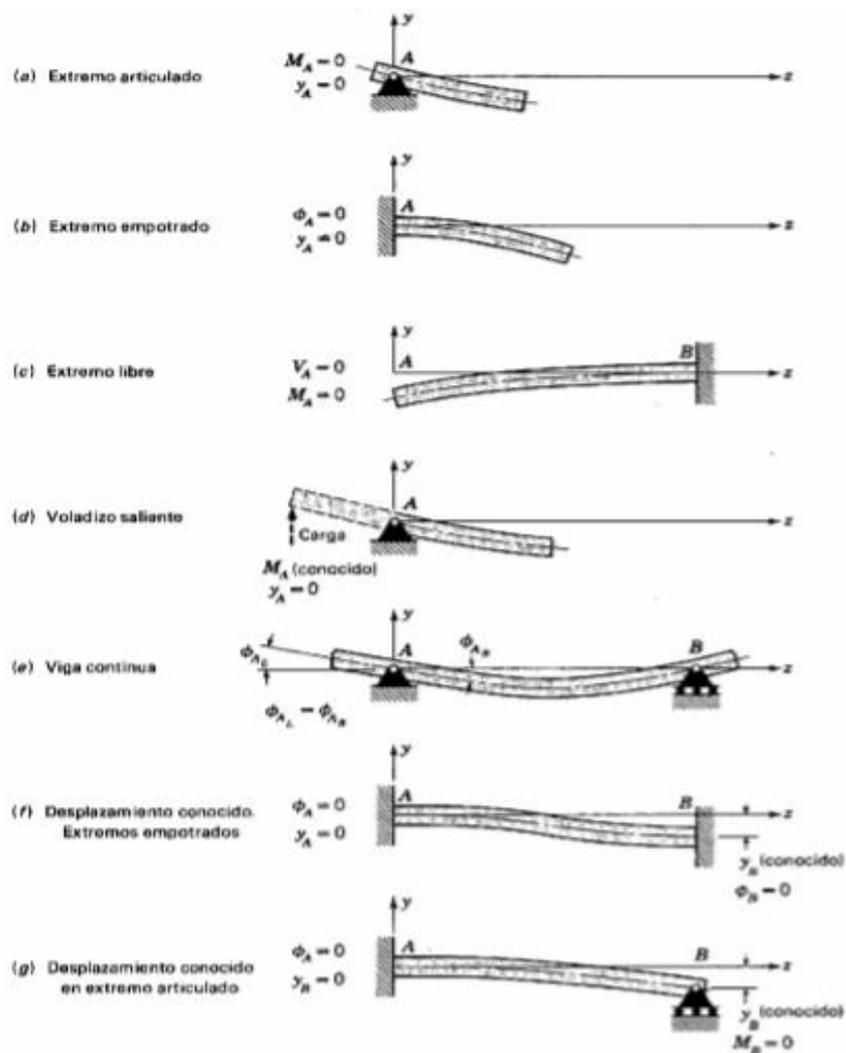


Figura 11 Condiciones de frontera de vigas elásticas
Fuente: F. R. Shanley, Mecánica de Materiales, 1971

$$EIy = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x w dx + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (2.17)$$

Las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 / EI , respectivamente, son usualmente los valores iniciales de V, M, θ y v en el origen. Las dos primeras son las condiciones estáticas de frontera y las 2 segundas las condiciones cinemáticas de frontera.

(Shanley, 1971) En la figura 11 se dan las condiciones estáticas y cinemáticas de frontera para los diferentes casos de apoyos en vigas.

2.2.5. Métodos Geométricos.

Se denominan así porque para calcular los desplazamientos transversales y giros de la curva elástica de una viga, se deben trazar los diagramas de la viga real para el método de área - momento y de la viga (conjugada) en el caso del método de la viga conjugada. El análisis de cada método se detalla a continuación.

a) Método de área – momento

También conocidos como teoremas de Mohr, Fue presentada en 1873 por el profesor Charles Greene de la universidad de Pensylvania y por Otto Mohr en 1968 **(Hibbeler, 2011)** El método de área de momento es una técnica semigráfica que sirve para hallar la pendiente y el desplazamiento en puntos específicos de la curva elástica de la viga o flecha. La aplicación del método requiere el cálculo de las áreas asociadas con el diagrama de momento de la viga, de modo que si este diagrama se compone de figuras simples, el método es muy fácil de usar.

Suposiciones: la viga inicialmente recta, es elásticamente deformada por las cargas, de tal modo que la pendiente y la deflexión de la curva elástica son muy pequeñas y las deformaciones son generadas por la flexión. La aplicación del método se basa en dos teoremas que enunciamos a continuación

Consideremos la curva elástica de una viga y su diagrama de momento flector correspondiente $\frac{M}{EI}$ como se muestra en la figura 12. Un tramo de la elástica

$ds = \rho d\theta$ Aislamos un segmento dx de la viga tal como se muestra en la figura 12 el momento interno M en la viga deforma al elemento de tal modo que las

tangentes a la curva elástica en cada lado del elemento se cortan y forman un ángulo $d\theta$. Las normales a las tangentes m_1p_1 y m_2p_2 también forman un ángulo este ángulo, el cual se determina mediante la ecuación:

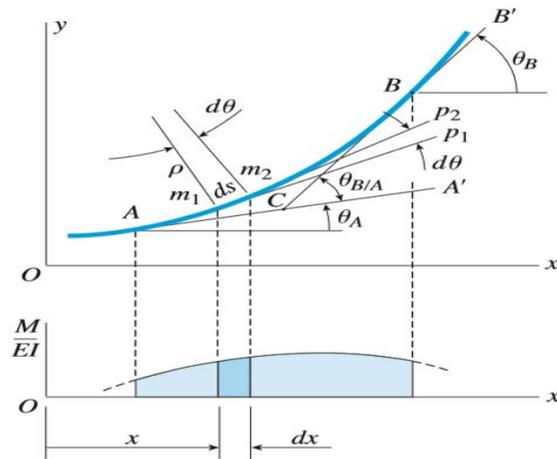


Figura 12 Gráfica de la curva elástica y el diagrama de momento
Fuente: J. Gere y B. Goodno, Mecánica de Materiales.

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{dx}{\rho} \quad (2 - 18)$$

La curvatura en flexión pura se expresa como:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2 - 19)$$

Relacionando (2 - 10) y (2 - 11) se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (2 - 20)$$

Luego integrando entre los puntos A y B de la viga se tiene:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (2- 21)$$

Donde:

$\theta_{B/A}$ = el ángulo de las tangentes a la curva elástica entre los puntos A y B
mostrado en la figura 12

$\int_A^B \frac{M}{EI} dx$ = el área del diagrama del momento flector entre A y B dividida entre la
rigidez flexional EI , como se muestra en la figura 12.

Esta es base del primer teorema del área de momento que dice:

Teorema 1: el ángulo entre las tangentes en 2 puntos cualesquiera de la curva elástica es igual al área bajo el diagrama M/EI entre esos dos puntos. $\theta_{B/A}$ se mide en radianes.

Ahora se determinará la desviación relativa entre las tangentes (t).

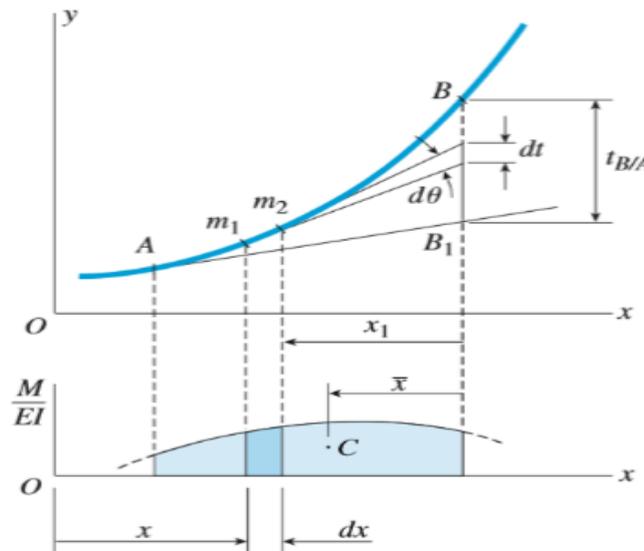


Figura 13 Gráfica de la curva elástica y el diagrama de momento
Fuente: J. Gere y B. Goodno, Mecánica de Materiales.

Proyectando las tangentes a los puntos m_1 y m_2 de la curva elástica hasta que corte con la vertical que pasa por B como se indica en la figura 13 se obtiene la desviación vertical $dt = x_1 d\theta$.

Integrando entre los puntos A y B se tiene:

$$t_{B/A} = \int_A^B dt = \int_A^B x d\theta = \int_A^B x \frac{M}{EI} dx = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (2 - 22)$$

Dónde:

$t_{B/A}$ = la distancia vertical de la tangente en B a la tangente en A de la curva elástica.

$x \int_A^B \frac{M}{EI} dx$ = momento del área bajo el diagrama M/EI entre A y B.

\bar{x} = distancia del centroide del área al punto B

Luego se puede enunciar el teorema 2 en la forma:

Teorema 2. la desviación vertical de la tangente en un punto (B) sobre la curva elástica con respecto a la tangente prolongada desde otro punto (A) es igual al momento del área bajo el diagrama M/EI entre esos dos puntos (A y B). Este momento se calcula respecto al punto (B), donde se va a determinar la desviación vertical $t_{B/A}$

En la figura 14 se da el área y el centroide de las formas que generalmente tiene el diagrama de momento flector.

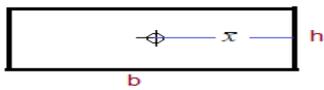
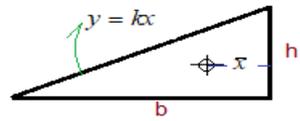
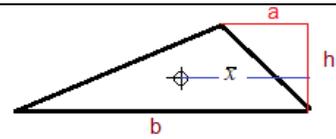
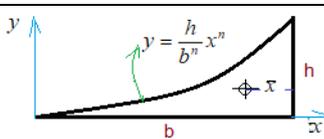
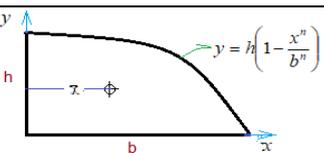
FORMA	ÁREA	CENTROIDE
	$A = b x h$	$\bar{x} = \frac{1}{2} b$
	$A = \frac{1}{2} b x h$	$\bar{x} = \frac{1}{3} b$
	$A = \frac{1}{2} b x h$	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$
	$A = \frac{1}{n+1} b x h$	$\bar{x} = \frac{b}{n+2}$
	$A = \left(\frac{n}{n+1}\right) b x h$	$\bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)}$

Figura 10 Áreas y centroides de formas comunes

Fuente: propia del autor.

b) Método de la viga Conjugada

Según (Kassimali, 2010) El método de la viga conjugada, desarrollado por Otto Mohr en 1868, generalmente proporciona un medio más conveniente para calcular pendientes y desviaciones de vigas que el método de área de momento.

El método de la viga conjugada se basa en la analogía entre las relaciones entre la carga, el esfuerzo cortante y el momento de flexión y las relaciones entre, pendiente y deflexión.

Una viga conjugada que corresponde a una viga real es una viga ficticia de la misma longitud que la viga real, pero está soportado externamente y conectado internamente de modo que si la viga conjugada se carga con el diagrama de la viga real, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga conjugada es igual, respectivamente, a la pendiente y la deflexión en el punto correspondiente en la viga real.

Las relaciones entre la carga, la fuerza cortante y momento flector son:

$$\frac{dV}{dx} = w \quad \frac{dM}{dx} = V \quad \frac{d^2M}{dx^2} = w \quad (2 - 23)$$

Las relaciones entre, la pendiente y el desplazamiento son:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \frac{dy}{dx} = \theta \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2 - 24)$$

Las condiciones de borde de la viga real a la viga conjugada se transforman como se indica en la figura 15.

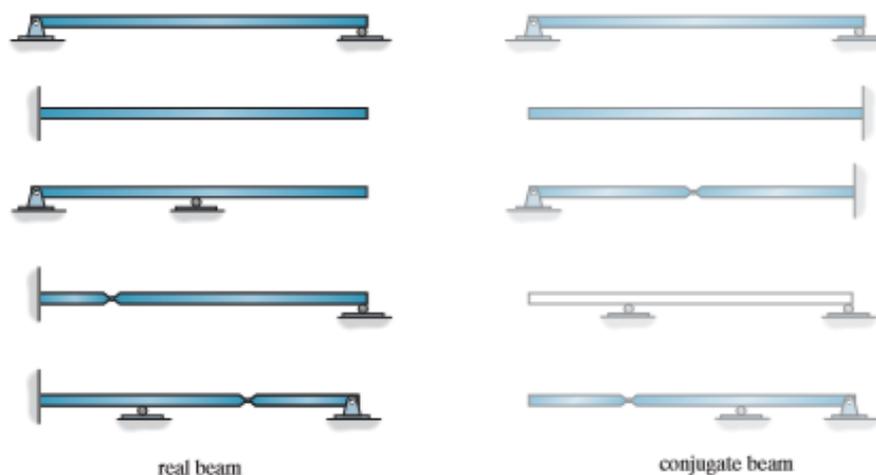


Figura 11 Cambio de viga real a viga conjugada
Fuente: R. C. Hibbeler, Structural Analysis, 2012

Se observa que al pasar de la viga real a la viga conjugada la viga isostática mantiene su condición, en cambio en la viga hiperestática se vuelve inestable, pero con las condiciones de la carga M/EI la viga es estable.

2.2.6. Principio de Superposición

Según (Kassimali, 2010) “El principio de superposición simplemente establece que en una estructura elástica lineal, el efecto combinado de varias cargas que actúan simultáneamente es igual a la suma algebraica de los efectos de cada carga que actúan individualmente”.

...”Cuando una viga está sujeta a varias cargas, generalmente es conveniente determinar la pendiente o la deflexión causada por el efecto combinado de las cargas mediante la superposición (adición algebraica) de las pendientes o desviaciones debidas a cada una de las cargas que actúan individualmente en la viga” (p. 233)

De (Ferdinand P. Beer, 2012) se extrae la figura 16, donde una viga simplemente apoyada está sometida a dos cargas (a): un momento flector M_A en el extremo A y una carga uniformemente distribuida w en toda su longitud, con la condición que la pendiente en A sea nulo.

Mediante el principio de superposición, se aplican las cargas en forma independiente la carga distribuida (b) y el momento flector (c) a fin de determinar la pendiente en A para cada caso.

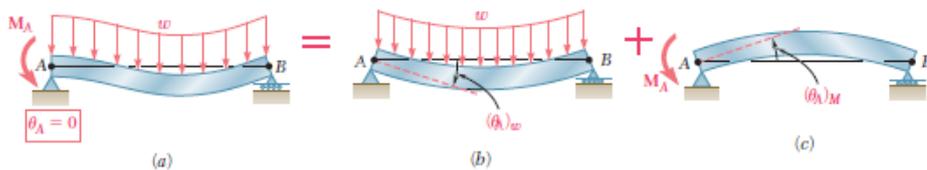


Figura 12 Método de superposición

Fuente: F. Beer, R. Johnston Jr., J. Dewolf, D. Mazureck. Mechanics of Materials, 2012

Luego se plantea la condición de giro final del extremo A:

$$\theta_A = \theta_A)_w + \theta_A)_M = 0 \quad (2 - 25)$$

Determinando la relación M_A y w que cumpla con esa condición.

2.2.7. Métodos de Energía.

Existen métodos de energía para el cálculo de deflexiones por lo que estudiaremos primero la relación entre el trabajo externo y el trabajo interno o la energía de deformación para posteriormente analizar la conservación de la energía, el principio del trabajo virtual y el teorema de Castigliano.

a) Trabajo externo y trabajo interno

Según **(Hibbeler, 2011)** Cuando la carga P axial indicado en la figura 17, actúa sobre una viga elástica provoca un alargamiento Δ a la viga y el trabajo externo U_e de la carga P se expresa como: $U_e = \frac{P\Delta}{2}$

Estando aplicada P , actúa otra carga F' provocando un alargamiento Δ' , la fuerza P realiza un trabajo adicional U'_e durante el desplazamiento Δ' de magnitud: $U'_e = P.\Delta'$

De igual forma el par M que actúa sobre una viga elástica durante el giro θ realiza un trabajo U_e de magnitud: $U_e = \frac{M\theta}{2}$

Igualmente, estando aplicado M , actúa otro par M' provocando un giro adicional θ' , el par M realiza un trabajo adicional U'_e durante el giro θ' de magnitud: $U'_e = M.\theta'$

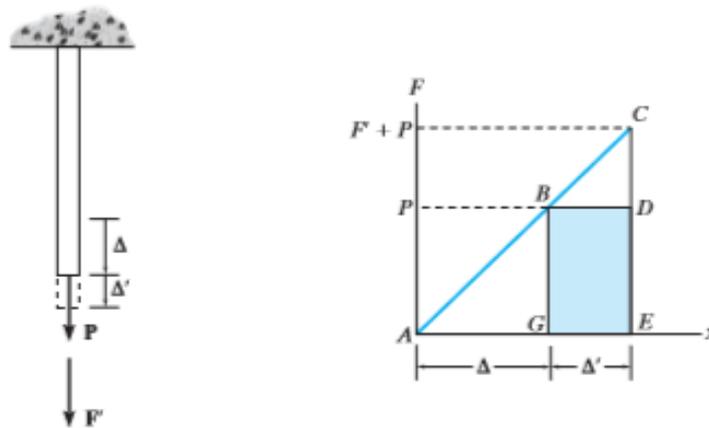


Figura 13 trabajo de las fuerzas p y f' en una barra elástica y su representación gráfica
Fuente: R. C. Hibbeler, Mecánica de Materiales, 2011

(Feodosiev, 1988) Para determinar el trabajo interno consideremos un elemento cúbico de lados dx, dy, dz , sometidos al estado de esfuerzo triaxial como se indica en la figura 18. (p.246).

Los esfuerzos generan deformaciones unitarias lineales ϵ_i en dirección de cada eje y angulares γ_{ij} .

El trabajo interno U_i se determina en la forma:

$$U_i = \int \left[\frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} \right] dV \quad (2-26)$$

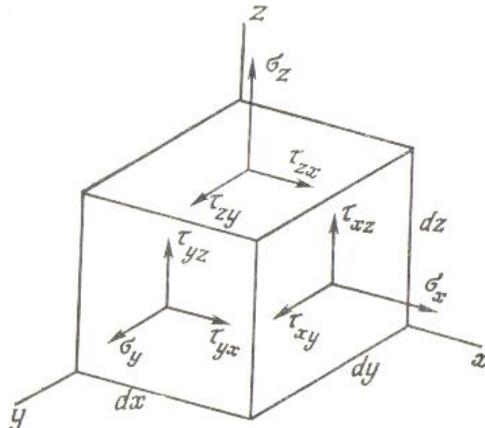


Figura 14 Estado de esfuerzos triaxial de un elemento
Fuente: V. I. Feodosiev, Resistencia de Materiales, 1988.

Considerando la ley generalizada de Hooke en el eje x y en el plano xy :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2-27)$$

Haciendo igual para los otros ejes y, z y planos yz, zx reemplazando en la ec (...) y desarrollando se tiene:

$$U_i = \int \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dV \quad (2-28)$$

Cuando en las caras del cubo actúan únicamente los esfuerzos principales:

$$U_i = \int \left[\frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] dV \quad (2-29)$$

Considerando ahora en función de las fuerzas internas:

En la figura 19 se indican las fuerzas internas en una sección transversal cualquiera de una viga elástica plana (a) y espacial (b): obtenida de **(Hibbeler, 2010)**. (p.660)

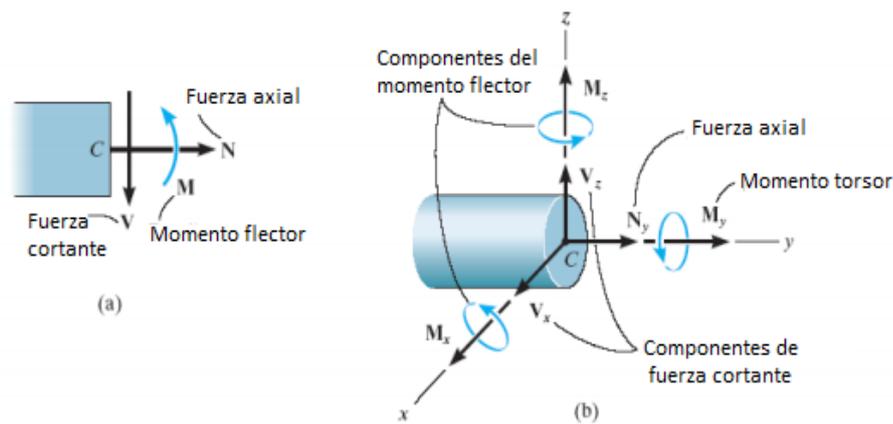


Figura 15 Fuerzas internas en una sección de viga en 2D y 3D
 Fuente: R. C. Hibbeler, Ingeniería Mecánica - Estática, 2010

Cada fuerza contribuye en el trabajo interno o también denominado la energía de deformación, como se indica:

Debido a la fuerza axial interna (N): $\sigma = \frac{N}{A}$, reemplazando en U_i se tiene:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2} dAdx = \int_x \frac{N^2}{2EA} dx \quad (2-30)$$

Debido al momento flector interno (M): $\sigma = \frac{My}{I}$, reemplazando en U_i se tiene:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dAdx = \int_x \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2-31)$$

Debido al momento torsor interno (T): $\tau = \frac{Tr}{J}$, reemplazando en U_i se tiene:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{T^2 r^2}{2GJ^2} dAdx = \int_x \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (2-32)$$

Debido a la fuerza cortante interna (V): $\tau = \frac{VQ}{It}$, reemplazando en U_i se tiene:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{VQ}{It} \right)^2 dAdx = f_f \int_x \frac{V^2}{2GA} dx \quad (2-33)$$

Donde f_f se denomina factor de forma y depende de la forma de la sección

transversal: $f_f = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} dA$

(HAUKAAS, 2016) Por conveniencia lo transforma en:
$$\beta = \frac{I^2}{A \int_A \left(\frac{Q}{t} \right)^2 dA}$$

Se tiene el área promedio a cortante: $A_v = \beta A$. Para secciones conocidas los valores de β se da en la figura 20.

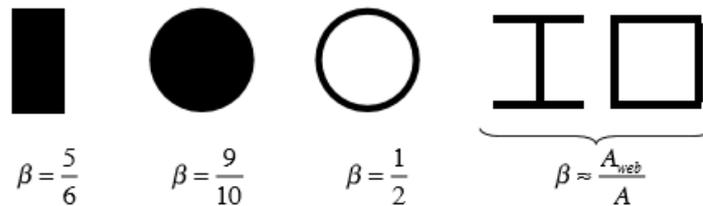


Figura 16 Factor β de corrección de secciones al corte
Fuente: Terje Haukaas, University of British Columbia.

Quando las fuerzas internas actúan simultáneamente en una estructura plana:

$$U_i = \int_x \frac{N^2}{2EA} dx + \int_x \frac{M^2}{2EI} dx + \int_x \frac{V^2}{2GA_v} dx \quad (2-34)$$

Quando las fuerzas internas actúan simultáneamente en una estructura en 3D:

$$U_i = \int_x \frac{N^2}{2EA} dx + \int_x \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_x \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_x \frac{T^2}{2GJ} dx + \int_x \frac{V_y^2}{2GA_v} dx + \int_x \frac{V_z^2}{2GA_v} dx \quad (2-35)$$

b) Conservación de la Energía

Todos los métodos de energía utilizados en la mecánica se basan en un balance de energía denominado conservación de la energía. Ahora se considera solamente la energía mecánica pasando por alto la energía desarrollada por el calor, reacciones químicas y efectos electromagnéticos.

En consecuencia si se aplica una carga lentamente a un cuerpo de modo que su energía cinética se desprecia, entonces físicamente las cargas externas tienden a deformar al cuerpo de modo que estas realizan trabajo externo U_e a

medida que se desplaza. Este trabajo externo provocado por las cargas se transforma en trabajo interno o energía de deformación U_i la cual se almacena en el cuerpo. Además cuando se retiran las cargas la energía de deformación lleva al cuerpo a su posición original no deformada, siempre que no se exceda el límite elástico del material. La conservación de la energía para el cuerpo puede escribirse matemáticamente como:

$$U_e = U_i \quad \rightarrow \quad \frac{P\delta}{2} = \int_x \frac{N^2}{2EA} dx + \int_x \frac{M^2}{2EI} dx + \int_x \frac{V^2}{2GA_v} dx \quad (2-36)$$

En general se considera que el aporte de las cargas axial y cortante a la energía de deformación son relativamente menores comparados al momento flector entonces:

$$\frac{P\delta}{2} = \int_x \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2-37)$$

Cuando el elemento es de longitud corta el aporte de la carga cortante es importante y no se puede ignorar.

En armaduras solo actúan las fuerzas axiales en cada una de las barras componentes, es este caso:

$$\frac{P\delta}{2} = \sum_1^n \frac{N^2 l}{2EA} \quad (2-38)$$

c) Teorema de Castigliano

En 1879, Alberto Castigliano, un ingeniero ferroviario italiano, publicó un libro en el que describía un método para determinar la desviación o pendiente en un punto de una estructura, ya sea una armadura, una viga o un bastidor. Este método, que se conoce como el segundo teorema de Castigliano, o el método de trabajo mínimo, se aplican solo a las estructuras que tienen una temperatura constante, soportes inflexibles y respuesta de material elástico lineal.

Si se determina el desplazamiento de un punto, el teorema establece que es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a una fuerza que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento. De manera similar, la pendiente en un punto de una estructura es igual a la primera derivada parcial de la energía de tensión en la estructura

con respecto a un par de momentos que actúan en el punto y en la dirección de rotación.

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial P_i} \frac{M}{EI} dx + \int_0^L \frac{\partial N}{\partial P_i} \frac{N}{EA} dx + \int_0^L \frac{\partial V}{\partial P_i} \frac{V}{GA_v} dx + \int_0^L \frac{\partial T}{\partial P_i} \frac{T}{GJ} dx \quad (2-39)$$

d) Principio del Trabajo Virtual.

Según **(Kassimali, 2010)** El principio del trabajo virtual fue introducido por John Bernoulli en 1717, proporcionando una herramienta analítica poderosa para muchos problemas de la mecánica estructural. Para los cuerpos deformables se enuncia como sigue:

“Si una estructura deformable esta en equilibrio bajo un sistema virtual de fuerzas (y pares) y si se sujeta a cualquier deformación real pequeña, coherente con las condiciones de apoyo y continuidad de la estructura, entonces el trabajo externo realizado por las fuerzas externas (y pares externos) virtuales que actúan a través de los desplazamientos (y rotaciones) externos reales es igual al trabajo interno virtual realizados por las fuerzas internas (y pares internos) virtuales que actúan a través de los desplazamientos (y rotaciones) internos reales”.

En estructuras planas sometidas a cargas externas, para hallar el desplazamiento externo Δ en una dirección, se aplica la carga unitaria en esa dirección y mediante la conservación del trabajo externo e interno virtual, se tiene:

$$1(\Delta) = \int_0^L m_v \frac{M}{EI} dx + \int_0^L n_v \frac{N}{EA} dx + \int_0^L v_v \frac{V}{GA_v} dx \quad (2 - 40)$$

Donde:

Δ es el desplazamiento real en dirección de la carga virtual unitaria

m_v, n_v, v_v son las fuerzas internas virtuales: momento flector, fuerza axial y fuerza cortante, debidos a la carga virtual unitaria.

M, N, V son las fuerzas internas reales: momento flector, fuerza axial y fuerza cortante debidos a las cargas externas reales

A, A_v, I área, área promedio a cortante y momento de inercia de la sección transversal

E, G módulos de elasticidad de Young ó longitudinal y transversal del material.

Las aplicaciones del teorema de Castigliano y el principio del trabajo virtual se utilizaran como grupos de control de los resultados de la investigación.

2.2.8. Exactitud y precisión.

- Exactitud:

(Ruiz Armenteros, y otros, 2010) El VIM (Vocabulario Internacional de Metrología) define la exactitud de medida como la proximidad existente entre el valor medido y un valor verdadero de un mensurando. Una medición es más exacta cuanto más pequeño es el error de medida.

(Posadas Chinchilla) La exactitud es el grado de concordancia entre el valor verdadero y el experimental. Un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor "verdadero" de la magnitud medida.

En la figura 21 se ve que el caso A es más exacto que el caso B por estar más próximo al valor verdadero.

(Pickering, 1980) Para comparación general, expresaremos la exactitud, como porcentaje del contenido real total del componente estudiado. Esto es:

$$Exactitud.\% = \pm 100x \frac{(Resultado.verdadero - Media.experimental)}{Resultado.verdadero} \quad (2-41)$$

Para la determinación de la exactitud de un procedimiento se debe disponer de una muestra patrón de composición conocida.

- Precisión:

(Ruiz Armenteros, y otros, 2010) El VIM, en su tercera edición (2007), define el concepto precisión de medida como la proximidad existente entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones específicas. Estas condiciones se denominan principalmente condiciones de repetibilidad, o de

reproducibilidad, y por tanto, frecuentemente, el término precisión denota simplemente repetibilidad, es decir, está asociado a la dispersión de las mediciones reiteradas, la cual es habitual expresarla numéricamente mediante medidas de dispersión tales como la desviación típica, la varianza o el coeficiente de variación bajo las condiciones especificadas.

Una importante distinción entre exactitud y precisión es que la exactitud puede determinarse con una sola medida, mientras que para evaluar la precisión se necesitan varias medidas (repetibilidad), no pudiéndose hablar de precisión para una sola medida.

(PRIETO, 2012) La precisión de una medida suele expresarse numéricamente mediante medidas de dispersión tales como la desviación típica o la varianza. Por ello, como indica la figura 21, cuanto más estrecha sea la distribución de resultados (caso B), menor será la desviación típica de la misma y mayor la precisión de la medida. La precisión depende pues únicamente de la distribución de los resultados y no está relacionada con el valor convencionalmente “verdadero” de la medición.

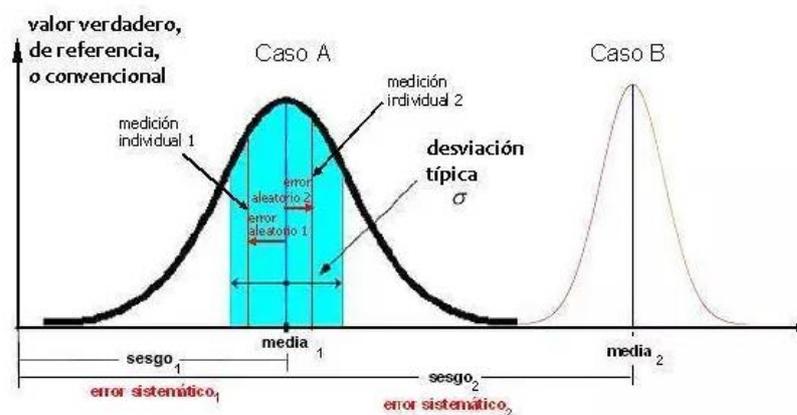


Figura 17 dos casos de exactitud y precisión
Fuente: Prieto Emilio, 2012.

- Error e Incertidumbre:

El VIM define el término error de medida como la diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia (valor convencional o valor verdadero), mientras que define la incertidumbre de medida como un parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un

mensurando, a partir de la información que se utiliza. Si bien el error es teóricamente desconocido, la incertidumbre sí que puede ser evaluada. Conviene no confundir también el error de medida con un error humano o equivocación.

(Ruiz) El error de medición, por simplificación error (e_x) , lo podemos definir como el resultado de una medición (X_1) menos el valor verdadero del mensurando (X) , siendo este último, en la práctica, el valor convencionalmente verdadero.

$$e_x = X_1 - X \quad (2-42)$$

Relacionada íntimamente con el error de medición tenemos la corrección (c) , la cual se puede definir como, valor agregado algebraicamente al resultado no corregido de una medición, para compensar el error sistemático.

$$X = X_1 + c \dots \rightarrow \dots c = X - X_1 = -e_x \quad (2-43)$$

El error absoluto (e_x) , no suministra información sobre la calidad de la medición, es por esto que es necesario relacionarlo con el valor convencionalmente verdadero. Así tenemos que el error de medición dividido entre un valor verdadero del mensurando le denominamos error relativo (e_{rx}) . Puesto que un valor verdadero no puede ser determinado, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero.

El error absoluto en una medida x de determinada magnitud es la diferencia entre dicho valor y el valor verdadero de la medida; se notará por Δx y, por tanto, su expresión es: $\Delta x = x - x_0$

Donde x_0 representa el valor verdadero de la medida. El error absoluto cuantifica la desviación en términos absolutos respecto al valor verdadero. No obstante, en ocasiones es más interesante resaltar la importancia relativa de esa desviación. Por ello, se define el error relativo como el cociente entre el error absoluto y el

valor verdadero; notándolo por ε su expresión es: $\varepsilon = \frac{|\Delta x|}{x_0}$ y suele expresarse

porcentualmente sin más que multiplicar por 100.

(UMÁLAGA) “El error se define como la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente. El origen de los errores está en múltiples causas y atendiendo a éstas los errores se pueden clasificar en errores sistemáticos y errores accidentales

Errores sistemáticos son errores que se repiten constantemente en el transcurso de un experimento. Afecta a todas las mediciones de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Las causas probables pueden ser: errores instrumentales (de aparatos), errores personales, error de la elección del método.

Errores accidentales son variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo operador. No existe una causa predeterminada para este tipo de errores siendo incontrolables para un observador. Alteran la medida realizada tanto por exceso como por defecto. El origen de estos errores accidentales puede ser el cambio durante el experimento de las condiciones en el entorno, errores de apreciación del observador, errores de precisión del aparato de medida, etc”

2.3. Conceptual

2.3.1. Teoría de la Viga de Timoshenko

En el cálculo de la curva elástica, la teoría de Timoshenko es más exacta cuando la razón entre la longitud de la viga y la altura de la sección transversal es cada vez más pequeña. Esta teoría se basa en las mismas hipótesis que la teoría de Bernoulli – Euler, pero con el agregado de las siguientes diferencias:

- Se supone la presencia del esfuerzo cortante promedio en la sección transversal.
- La rotación flexional θ_z se considera como una variable independiente no asociada con los desplazamientos flexionales

- La sección transversal de la viga una vez deformada se mantiene plana, pero ya no es perpendicular al eje neutro.

En el esquema de deformación de una viga que se ilustra en la Figura 22, se muestra la diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler-Bernoulli.

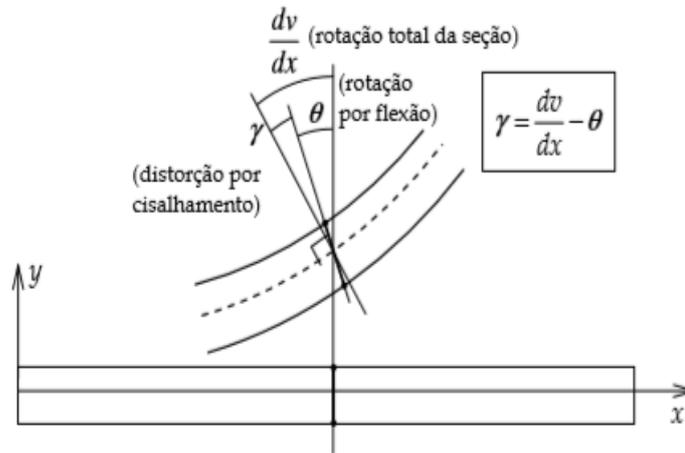


Figura 18 Elástica con giros de sección según las teorías de Timoshenko y Bernoulli - Euler
Fuente: Martha, Luis f., Burgos, Rodrigo B., 2014

Donde:

θ_z = giro de la sección transversal según la teoría de Bernoulli – Euler y es perpendicular al eje neutro.

$\frac{dv}{dx} - \theta = \gamma_{xy}$ = giro de la sección transversal según la teoría de Timoshenko, no es perpendicular al eje neutro.

De la ley de Hooke se tiene: $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$$\frac{V_y}{A_c} = G \left(\frac{dy}{dx} - \theta_z \right) \quad (2 - 44)$$

$$E \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right) = \frac{M_z}{I_z} \quad (2 - 45)$$

Derivando (2 - 44) y sustituyendo en (2 - 45) se obtiene la ecuación de la curva elástica incluyendo el efecto de la fuerza cortante:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{GA_c} \frac{dV_y}{dx} + \frac{M_z}{EI_z} \quad (2 - 46)$$

Dónde: EI_z es la rigidez a la flexión según el eje z y GA_c es la rigidez a la deformación por cortante.

2.3.2. Vigas isostáticas planas.

(Stanley W, y otros, 1992) “Una viga es un miembro estructural que es sometido a cargas transversales y las distribuye en una o dos direcciones. Como tal se considera como parte de un sistema lineal. Por lo general las vigas se sitúan horizontalmente y las cargas se aplican verticalmente. Para que trabaje la viga según su definición tradicional, la longitud del claro debe ser varias veces mayor que el peralte del miembro”.(p.11).

Una viga isostática elemental está formado por un miembro y restringido a moverse mediante 3 vínculos. En la figura 23 las vigas (a), (b), (c) y (d) son vigas isostáticas de un miembro con vínculos en diferentes posiciones. Se obtiene vigas de dos miembros al agregar a las configuraciones anteriores, un elemento unido mediante una rótula y se inmoviliza colocando un apoyo simple como se ve en la (e) y (f). Este apoyo simple puede estar al final del segundo miembro o en un punto intermedio. De esta forma se puede obtener hasta ocho tipos de vigas de dos miembros estáticamente estables. Para vigas isostáticas de más miembros se procede de la misma forma. La (g) es una viga isostática de tres miembros.

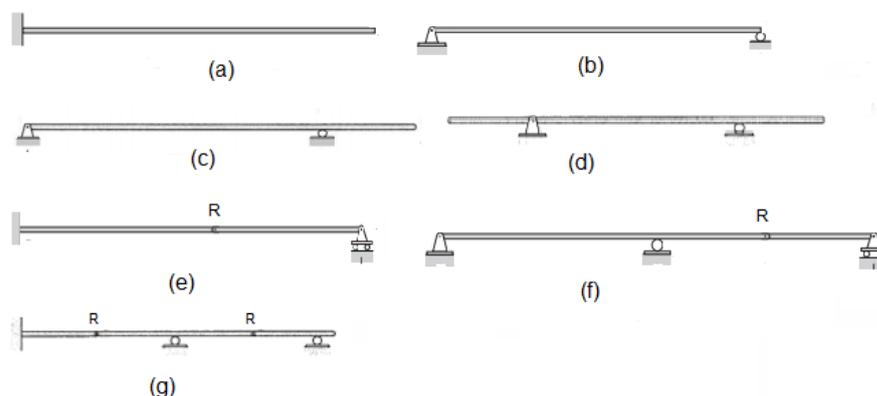


Figura 19 Vigas isostáticas de 1, 2 y 3 miembros
Fuente: propia del autor.

La prueba de hipótesis será en las vigas (a), (b), (c) y (e) primero aplicando la carga uniformemente distribuida y luego la carga puntual; para el caso (f) se aplicará simultáneamente la carga distribuida al primer miembro y la carga puntual en el centro del segundo miembro.

2.4. Definiciones de término básicos: Funcionales a la investigación del problema

Barra prismática. Es una barra cuya sección transversal es plana y constante en toda su longitud, además su eje longitudinal permanece recto.

Curva elástica. Forma final de la viga debido a la deformación por cargas externas y se recupera cuando cesan estas cargas.

Desplazamientos. Movimiento de la viga en sentido perpendicular a su eje por efecto de las cargas externas.

Elasticidad. Capacidad de un material de regresar a su forma original después que haya sido cargado y luego descargado.

Estructura. Es un conjunto de elementos unidos entre sí, con la misión de soportar las fuerzas que actúan sobre ellos.

Exactitud. Precisión, ajuste de una cosa con otra, veracidad.

Fuerza. Es todo aquello capaz de deformar un cuerpo (efecto estático) o de modificar su estado de reposo o movimiento (efecto dinámico). Las fuerzas que actúan sobre una estructura se llaman Cargas.

Giro. Rotación de la sección transversal por deformación de la viga. Pendiente a la curva elástica.

Mejorar. Perfeccionar algo, haciéndolo pasar de un estado bueno a otro mejor.

Método. Modo estructurado y ordenado de obtener un resultado, descubrir la verdad y sistematizar los conocimientos.

Rigidez. Es la propiedad de un material para resistir deformaciones.

Teoría. Hipótesis cuyas consecuencias se aplican a toda una ciencia o parte muy importante de la misma. Serie de leyes que sirven para relacionar

Viga. Miembro que soporta cargas transversales a su eje longitudinal.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. General

Con la aplicación de la teoría de Timoshenko sobre la base del método de área - momento aumenta la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas.

3.1.2. Específicas

La exactitud de los desplazamientos de la curva elástica aumenta considerando además del momento flector, la fuerza cortante interna.

La magnitud del desplazamiento lateral es función del número de elementos componentes y configuración de vínculos.

La exactitud de la pendiente aumenta considerando además del momento flector, la fuerza cortante interna.

La magnitud de la pendiente es función del número de elementos componentes y configuración de vínculos

3.2. Definición conceptual de variables.

- **Exactitud de la curva elástica** (Variable Dependiente (y))

La curva elástica es la deformación transversal de la viga generado por cargas externas. Se determina a través del desplazamiento y giro del punto analizado aplicando las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko. La exactitud se mide por la diferencia de cálculo entre ambas teorías.

Expresión matemática:

$f(X_1, X_3, Z_i) = Y_1$, desplazamiento (Δ) debido a la carga distribuida.

$f(X_2, X_4, Z_i) = Y_2$, desplazamiento (Δ) debido a la carga puntual.

$f(X_1, X_3, Z_i) = Y_3$, Pendiente o giro (θ) debido a la carga distribuida

$f(X_2, X_4, Z_i) = Y_4$, Pendiente o giro (θ) debido a la carga puntual.

- **Teoría de Timoshenko** (Variable Independiente (X))

La teoría de viga de Timoshenko considera a la fuerza cortante en el cálculo de la curva elástica a diferencia de la teoría clásica de Euler-Bernoulli (TEB) que solo considera al momento flector. Se utilizan los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga. Su expresión matemática:

$f(w, GA, L) = X_1$, diagrama de fuerza cortante debido a la carga distribuida.

$f(P, GA, L) = X_2$, diagrama de fuerza cortante debido a la carga puntual.

$f(w, EI, L) = X_3$, diagrama del momento flector debido a la carga distribuida

$f(P, EI, L) = X_4$, diagrama del momento flector debido a la carga puntual.

- **Vigas Isostáticas** (Variable Independiente (Z))

Las vigas isostáticas son aquellas con vínculos convenientemente distribuidos para mantener fijo (estático) en una determinada posición ya sea están solicitadas a cargas externas o no. Para esta investigación se han considerado 3 configuraciones de vigas de un miembro y 3 configuraciones de vigas de 2 miembros:

-Empotrado-libre = Z_1 .

-Biapoyada = Z_2 .

-Biapoyada-libre = Z_3 .

-Empotrado-articulado-apoyado = Z_4 .

-Empotrado-articulado-apoyado-libre = Z_5 .

-Biapoyada-articulado-apoyado = Z_6 .

3.2.1. Operacionalización de variable (Dimensiones, indicadores, índices, método y técnica)

VARIABLE	DIMENSION	INDICADOR	U de M	MÉTODO COMPLEJO
Exactitud de la curva elástica (Y)	*Desplazamiento vertical Δ por carga: - distribuida = Y_1 - puntual = Y_2 *exactitud = ϵ	Respecto a la TEB: -menor, igual o mayor desplazamiento -menor, igual o mayor exactitud	mm	Grupo Experimental (GE) -Método de área de Momento (TEB)
	*Pendiente o giro θ por carga: - distribuida = Y_3 - puntual = Y_4 *exactitud = ϵ	Respecto a la TEB: - menor, igual o mayor pendiente - menor, igual o mayor exactitud	rad	-Teoría de vigas de Timoshenko Grupos de Control (GC) *Teorema de Castigliano *Principio de Trabajo Virtual
Teoría de Timoshenko (X)	*Área del diagrama de Fuerza cortante V/GA por carga: - distribuida = X_1 . - puntual = X_2 .	-límite superior/inferior recto en pendiente (w) -límite superior/inferior recto horizontal (P) -ordenada (+ o -) -Área (+ o -)	m	-Ecuaciones de equilibrio estático de vigas en 2D. -Ecuación diferencial de Euler-Bernoulli (método de área – momento).
	*Área de Diagrama de Momento flector M/EI por carga: - distribuida = X_3 . - puntual = X_4 .	-límite superior/inferior cóncavo ó convexo(w) -límite superior/inferior recto (P). - Área (+ o -) -Momento estático(+ o -)	m	-Ecuación diferencial de Timoshenko.
Vigas Isostáticas (Z)	*Vigas de 1 elemento -Empotrado-Libre = Z_1 -Biapoyada = Z_2 -Biapoyada-Libre = Z_3	Desplazamiento y giro en los vínculos. - $\Delta_i = \theta_i = 0$ -- $\Delta_f \neq 0, \theta_f \neq 0$ - $\Delta_i = 0, \theta_i \neq 0$ -- $\Delta_f = 0, \theta_f \neq 0$ - $\Delta_i = 0, \theta_i \neq 0$ -- $\Delta_f \neq 0, \theta_f \neq 0$	s/u	-Relación entre grados de libertad y número de vínculos de vigas en 2D.
	*Viga de 2 elementos -Empotrado-Rótula-Apoyada = Z_4 -Empotrado-Rótula-Apoyada-Libre = Z_5 -Biapoyada-Rótula-Apoyada = Z_6	- $\Delta_i = \theta_i = 0$ -- $\Delta_r \neq 0, \theta_r \neq 0$ -- $\Delta_f = 0, \theta_f \neq 0$ - $\Delta_i = \theta_i = 0$ -- $\Delta_r \neq 0, \theta_r \neq 0$ -- $\Delta_i = 0, \theta_i \neq 0$ -- $\Delta_f \neq 0, \theta_f \neq 0$ - $\Delta_i = 0, \theta_i \neq 0$ -- $\Delta_r \neq 0, \theta_r \neq 0$ -- $\Delta_f = 0, \theta_f \neq 0$	s/u	-Condiciones de desplazamiento y giro en los vínculos.

En los bordes: (i=inicial, f=final), En la articulación (r = rótula)

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de la investigación.

Según **(ESPINOZA, 2014)** “La investigación tecnológica tiene como propósito aplicar el conocimiento científico para solucionar los diferentes problemas que beneficien a la sociedad. Sus niveles son la experimentación y la aplicación”. (p.90)

Esta investigación es aplicada por cuanto trata de combinar dos teorías que conducen al cálculo de deflexiones estructurales para mejorar la exactitud de desplazamientos y giros de la curva elástica de una viga cargada, en relación al cálculo tradicional y que sean referentes para comparar con los valores límites admitidos por organismos de regulación tanto nacionales como internacionales del área estructural.

Asimismo según **(ESPINOZA, 2014)** “Los diseños a utilizar en las investigaciones aplicadas pueden ser los cuasi experimentales o los experimentales. Dependerá de las mediciones que se deben realizar de acuerdo al contexto donde se ubica el objeto de investigación”, (p. 105). Luego el presente es diseño de aplicación.

4.2. Método de investigación.

El método utilizado en la presente investigación es el método deductivo. Según **(BERNAL, 2010)** “Este método de razonamiento consiste en tomar conclusiones generales para obtener explicaciones particulares. El método se inicia con el análisis de los postulados, teoremas, leyes, principios, etcétera, de aplicación universal y de comprobada validez, para aplicarlos a soluciones o hechos particulares” (p.59)

4.3. Población y muestra.

4.3.1. Población.

Según **(DEL CID, y otros, 2011)** Se habla de población o universo cuando se trata a la totalidad tanto de sujetos seleccionado como el objeto de estudio .Según Triola (2004) “población es la colección completa de elementos (puntuaciones, personas, mediciones, etcétera) a estudiar”. Para la investigación de la elástica de vigas del área de Ingeniería Estructural, la población conforma las vigas planas de eje recto tanto isostáticas como hiperestáticas.

4.3.2. Muestra.

La muestra está constituida por vigas prismáticas isostáticas de uno y dos elementos perfectamente vinculados, de un solo material, con cargas puntual y uniformemente distribuidas, aplicadas en forma independiente o en conjunto.

De cuatro configuraciones posibles de vigas de un miembro y ocho vigas de dos miembros estáticamente estables, para la muestra se han considerado cinco vigas, (ver en la figura 23: (a), (b) (c), (e) y (f)). Aplicando a los 4 primeros las cargas uniformemente distribuida y puntual en forma independiente y al último en forma simultánea,

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado.

Este trabajo se realiza en la Universidad Nacional del Callao desde julio del 2018 a marzo de 2019, tiene como antecedentes las investigaciones realizadas sobre la teoría de viga de Timoshenko en las universidades de Brasil, Argentina, España, Portugal e Italia.

4.5. Técnicas e instrumentos de recolección de la información.

Según Espinoza (2015), Existen dos técnicas generales de recolección de datos: técnica documental y técnica empírica,..., La *técnica documental* permite la recopilación de evidencias para demostrar las hipótesis de investigación. Está formada por documentos de diferente tipo: revistas, memorias, actas, registros,

datos e información estadísticas y cualquier documento de instituciones y empresas que registran datos de su funcionamiento (p.107):

Para este trabajo de investigación se utilizó la técnica documental, revisando normas técnicas gubernamentales y de organismos colegiados de la especialidad, libros de estructuras, artículos de investigación presentados a foros, tesis de pregrado y posgrado relacionados con el tema de investigación, videos en Youtube.

4.6. Análisis y procesamiento de datos.

En esta investigación, las ecuaciones diferenciales de las teorías de vigas de Bernoulli – Euler y de Timoshenko sobre la curva elástica dan origen a un desarrollo con los criterios de Greene y Mohr para la obtención del método de área – momento. Como resultado se obtienen dos teoremas ampliados del método área - momento con la inclusión de la fuerza cortante como la nueva variable.

Estos teoremas son aplicados a vigas isostáticas de uno y dos miembros con cargas uniformemente distribuidas y puntuales en forma independiente o en conjunto, obteniendo las ecuaciones de giro y desplazamiento para puntos específicos de la viga seleccionada.

Para la contrastación y validación de los resultados obtenidos, las mismas vigas son calculadas utilizando los métodos de energía: principio del trabajo virtual y el teorema de Castigliano, como grupos de control. Los resultados son iguales a los obtenidos con el método anterior, quedando así validados la hipótesis planteada.

Existen trabajos de investigación sobre la teoría de vigas de Timoshenko en forma de tesis y artículos, aplicando diferentes métodos numéricos. Con los datos: geométricos, material y carga de las vigas utilizadas en dichos trabajos, se han calculado los giros y desplazamientos con las fórmulas obtenidas en esta investigación, siendo ambos resultados muy próximos y los errores bajos.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos.

5.1.1. Aplicación de la teoría de Timoshenko en el método de área – momento.

5.1.1.1. Semejanzas entre las teorías de Bernoulli – Euler y de Timoshenko

En la teoría de Bernoulli – Euler la deformación interna de la viga es generada por los esfuerzos normales que se distribuyen sobre la sección transversal como se indica en la figura 5.1 y se expresan como $\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$ y son originados por el momento interno M_z .

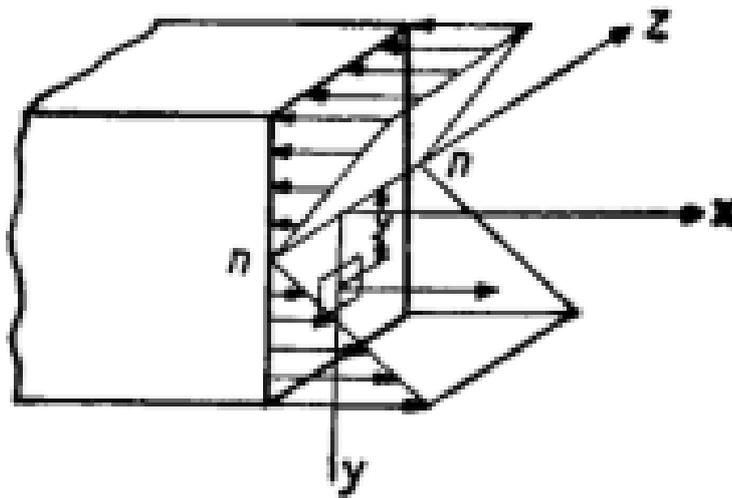


Figura 20 Distribución de esfuerzo normal en una sección
Fuente: S. Timoshenko, Resistencia de Materiales 1957

La ecuación de la curva elástica está expresada por la ecuación diferencial

de la forma: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$

En la teoría de Timoshenko se considera el aporte de la fuerza cortante V en el desplazamiento vertical. Las cargas transversales sobre la viga originan fuerzas cortante en una sección genérica y la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de la altura de la sección transversal varía con la fórmula $\tau = \frac{VQ}{I_z t}$ y su

magnitud y sentido es la que se indica en la figura 25 (a) la que origina el alabeo de la sección como se indica en la figura 25 (c).

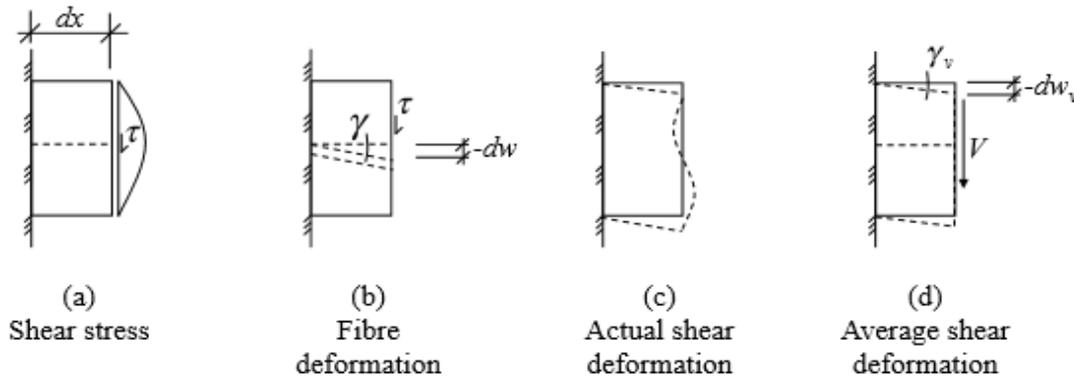


Figura 21 Deformación por cortante

Fuente: Terje Haukaas, *Timoshenko Beams*, 2016 www.inrisk.ubc.ca

Para simplificar, según (HAUKAAS, 2016) Timoshenko considera que el esfuerzo cortante sobre toda la sección es constante y genera una deformación plana de la sección transversal como se indica en la figura 25 (d) para lo cual corrige el área por un factor $\kappa = \beta$ y se denomina $A_c = A_v = \kappa A$ (para valores de $\beta = k$ ver figura (20)). La pendiente de la curva elástica debido únicamente a la

fuerza cortante está dada por la expresión: $\frac{dy}{dx} = \gamma_v = \frac{V}{GA_c}$

La ecuación diferencial de la curva elástica con la teoría de Timoshenko es de la forma: $G \left(\frac{dy}{dx} - \theta_z \right) = \frac{V_y}{A_c}$

En el cálculo de la curva elástica, la teoría de Timoshenko es más exacta cuando la razón entre la longitud de la viga y la altura de la sección transversal es cada vez más pequeña. Esta teoría se basa en las mismas hipótesis que la teoría de Bernoulli – Euler, pero con el agregado de las siguientes adicionales:

- Se supone la presencia del esfuerzo cortante promedio en la sección transversal.
- La rotación flexional se considera como una variable independiente no asociada con los desplazamientos flexionales

- La sección transversal de la viga una vez deformada se mantiene plana, pero ya no es perpendicular al eje neutro.

En el esquema de deformación de una viga que se ilustra en la Figura 26 (a), muestran las fuerzas internas actuando en un elemento de longitud dx . En (b) y (c) se ven las deformaciones en ese elemento, por flexión y por fuerza cortante.

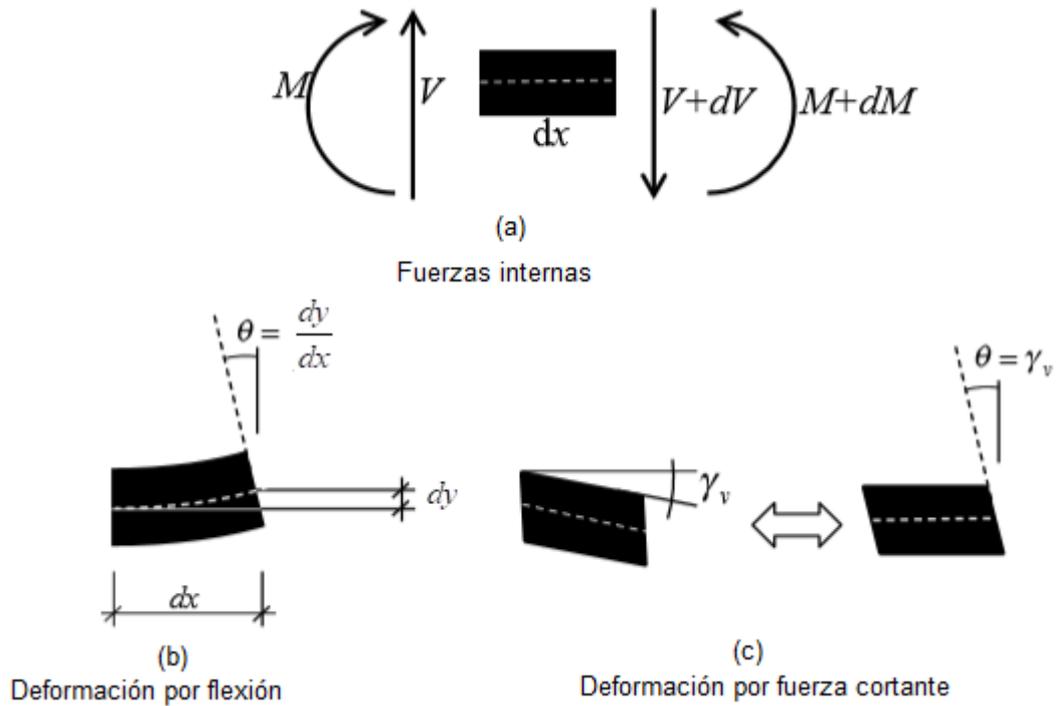


Figura 22 Deformación de un elemento de viga de Timoshenko
Fuente: **Terje Haukaas, Timoshenko Beams, 2016** www.inrisk.ubc.ca

Según **(LUÉVANOS Rojas, 2011)** La diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler-Bernoulli: en la primera θ_z y $\theta = \frac{dy}{dx}$ no tienen necesariamente que coincidir, mientras que en la segunda son iguales.

De la ley de Hooke se tiene: $G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$

$$G\left(\frac{dy}{dx} - \theta_z\right) = \frac{V_y}{A_C} \quad (1)$$

$$E\left(\frac{d\theta_z}{dx}\right) = \frac{M_z}{I_z} \quad (2)$$

Derivando (1) y sustituyendo en (2) se obtiene la ecuación de la curva elástica incluyendo el efecto de la fuerza cortante:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{GA_C} \frac{dV_y}{dx} + \frac{M_z}{EI_z} \quad (3)$$

Dónde: EI_z es la rigidez a la flexión según el eje z y GA_C es la rigidez por cortante

De (1) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{GA_C} + \theta_z \quad (4)$$

De (2) se tiene:

$$\theta_z = \int \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{GA_C} + \int \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (6)$$

$$dy = \left(\frac{V_y}{GA_C} \right) dx + \left(\int \frac{M_z}{EI_z} dx \right) dx \quad (7)$$

5.1.1.2. Aplicación de la teoría de Timoshenko en Método de Área – Momento de la curva elástica. El Teorema mejorado.

Integrando entre los puntos A y E se tiene:

$$\int_A^E d\theta = \theta_E - \theta_A = \theta_{E/A} = \int_A^E \frac{V_y}{GA_C} + \int_A^E \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (8)$$

$$\theta_{E/A} = \theta_E - \theta_A = \text{dif.de.Ord}(V_y) + A_{DMF(AE)} \quad (8)$$

Donde:

$\theta_{E/A}$ = Ángulo entre tangentes a la curva elástica de A a E.

$\text{Ord}(V_y)$ = la ordenada del diagrama de la cortante.

$A_{DMF(AE)}$ = área del diagrama del momento flector entre A y E

Se ve que ahora el ángulo entre las tangentes es función del área del diagrama del momento flector y de la ordenada de la cortante.

Asimismo, Integrando la (7) se tiene:

$$\int_A^E dy = \int_A^E \left(\frac{V_y}{GA_C} \right) dx + \int_A^E \left(\int \frac{M_z}{EI_z} dx \right) dx \quad (9)$$

$$t_{E/A} = t_E - t_A = A_{DFC(AE)} + \bar{x}_{C-E} \cdot A_{DMF(AE)} \quad (10)$$

Donde:

$t_{E/A}$ = distancia vertical de las tangentes de E a A.

$A_{DFC(AE)}$ = área del diagrama de fuerza cortante entre A y E.

$\bar{x}_{C-E} \cdot A_{DMF(AE)}$ = momento respecto a E del área del diagrama de momento flector entre A y E.

La distancia vertical de la tangente en E respecto de la tangente que viene de A es función del momento estático respecto de E del área del diagrama del momento flector entre A y E, más el área del diagrama de la fuerza cortante entre esos dos puntos.

5.1.1.3. Interpretación gráfica.

El trazado de los diagramas de la fuerza cortante, el momento flector M/EI y de la curva elástica de la viga se muestra en la figura 27.

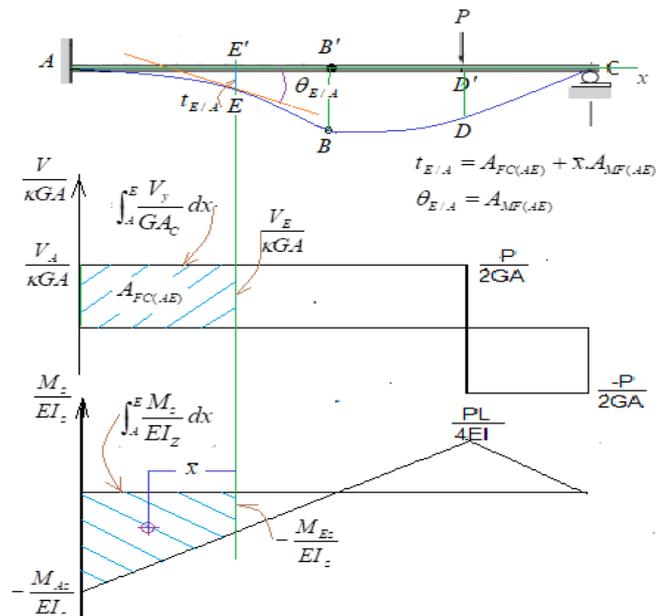


Figura 23 La curva elástica y diagramas de V y M
Fuente: propia del autor

El diagrama de fuerza cortante es el indicador $X_1 = f(w, \kappa A, G, L)$ de la variable independiente X (Teoría de Timoshenko) para la carga w de la hipótesis. Igualmente $X_2 = f(P, \kappa A, G, L)$ para la carga P de la hipótesis.

El diagrama de momento flector es el indicador $X_3 = f(w, E, I, L)$ de la variable independiente X (Teoría de Timoshenko) para la carga w de la hipótesis. Igualmente $X_4 = f(P, E, I, L)$ para la carga P de la hipótesis.

Con el diagrama del momento flector se traza la curva elástica de la viga. En el dibujo de la curva elástica se observan:

- $\theta_{E/A}$ = el ángulo entre las tangentes entre A y E.
- $t_{E/A}$ = la distancia vertical de la tangente en E a la tangente en A.

En los dibujos de los diagramas de la fuerza cortante y momento flector se observan:

$A_{DFC(AE)}$ = área del diagrama de fuerza cortante entre A y E.

$A_{DMF(AE)}$ = área del diagrama de momento flector entre A y E.

$\bar{x}_{C-E} \cdot A_{DMF(AE)}$ = momento respecto a E del área del diagrama de momento flector entre A y E.

La relación entre $\theta_{E/A}$ y $t_{E/A}$ con las áreas del diagrama de la fuerza cortante y el momento flector se dan en las ecuaciones (8) y (10) del punto 5.1.1.2, que son herramientas para el cálculo de giros y desplazamientos en puntos específicos de la curva elástica de la viga.

5.1.1.4. Teoremas del Método de Áreas de Momento y Fuerza Cortante.

Teorema 1:

El ángulo entre dos tangentes a la curva elástica de la viga ($\theta_{E/A}$) es igual al área del diagrama del M/EI entre esos puntos (A y E) más la ordenada de $V/\kappa GA$ entre esos puntos.

Teorema 2:

La distancia vertical de la tangente en E de la curva elástica a la tangente que viene de A ($t_{E/A}$) es igual al momento estático del área del diagrama del M/EI entre los puntos A y E respecto de E, más el área del diagrama de $V/\kappa GA$ entre los puntos A y E.

Estos teoremas son una ampliación de los teoremas del método de área – momento y constituyen el aporte de esta investigación (Tesis) al área de Análisis Estructural, siendo utilizados por varias especialidades de la Ingeniería y en particular por la ingeniería Civil. En adelante será denominado como el “teoremas del método de áreas de momento y de fuerza cortante”

5.2. Resultados inferenciales.

5.2.1. Aplicación del método de Áreas de Momento y fuerza cortante en vigas Isostáticas.

Las **vigas isostáticas** constituyen la variable Z de la hipótesis. Han sido agrupados en vigas de un miembro (Z_1, Z_2, Z_3) y vigas de dos miembros (Z_4, Z_5, Z_6)

a) Giros y desplazamientos en Vigas de un miembro

- Viga en voladizo (Z_1) con carga uniformemente distribuida w.

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_3 = f(X_1, X_3, Z_1)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_1 = f(X_1, X_3, Z_1)$ de la curva elástica cuyos valores máximos están del extremo libre B.

Para calcular la pendiente y el desplazamiento del extremo libre B de la viga empotrada en A, primero se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector, luego se dibuja la curva elástica, indicando θ_B y $\delta_B = t_{B/A}$ en la gráfica 28.

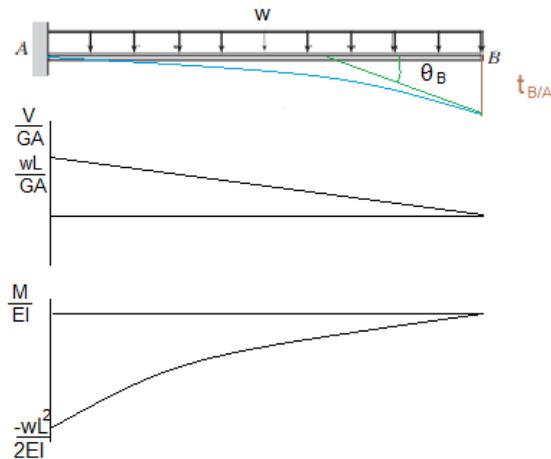


Figura 24 La elástica y los diagramas de V y M para el voladizo con carga w
Fuente: propia del autor

La pendiente en B (según el teorema 1) es igual al área del diagrama del momento flector (M / EI) entre los puntos A y B.

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{3} \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) (L) = \frac{wL^3}{6EI} \quad (5-1)$$

El desplazamiento del punto B (según el teorema 2) es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x}M / EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V / \kappa GA$) entre los puntos A y B.

$$\delta_B = t_{B/A} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{-wL^2}{2EI} \right) (L) \left[\frac{3}{4} L \right] \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{\kappa GA} \right) (L) = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (5-2)$$

$$\delta_{B \max} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$$

Donde:

- $\frac{wL^4}{8EI}$ es el aporte del momento flector (método de área – momento según la teoría de Euler – Bernoulli) al desplazamiento δ .

- $\frac{wL^2}{2\kappa GA}$ es el aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko) al desplazamiento δ .

Este δ_B es mayor que el obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli, con el cual se prueba la mejora de la exactitud de la curva elástica, validando la hipótesis propuesta.

❖ Viga empotrada (Z_1) con carga puntual P.

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_4 = f(X_2, X_4, Z_1)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_2 = f(X_2, X_4, Z_1)$ de la curva elástica cuyos valores máximos están del extremo libre B.

Para aplicar este método se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector (véase en la figura 29) y se determina la pendiente y el desplazamiento del extremo libre B utilizando los dos teoremas donde en relación al método tradicional considera el aporte de la fuerza cortante.

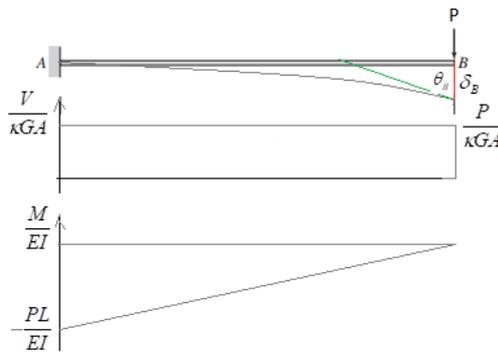


Figura 25 La elástica y los diagramas de V y M para el voladizo con carga P
Fuente: propia del autor.

Determinación de la pendiente θ_B :

La pendiente en B es igual al área del diagrama del momento flector (M / EI) entre los puntos A y B.

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{EI} \right) (L) \right| = \frac{PL^2}{2EI} \quad (5-3)$$

Determinación del desplazamiento δ_B :

El desplazamiento del punto B es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x} \cdot M / EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V / \kappa GA$) entre los puntos A y B.

$$\delta_B = t_{B/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{EI} \right) (L) \left[\frac{2}{3} L \right] \right] + \left(\frac{P}{\kappa GA} \right) (L) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} \quad (5-4)$$

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA}$$

Este δ_B es mayor que el obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli por el aporte de la fuerza cortante. Donde:

- $\frac{PL^3}{3EI}$ es el aporte del momento flector (método de área – momento según la teoría de Euler – Bernoulli) al desplazamiento δ .

- $\frac{PL}{\kappa GA}$ es el aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko) al desplazamiento δ .

Este δ_B es mayor que el obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli, con el cual se prueba el aumento de la exactitud de la curva elástica, indicando la validez de la hipótesis propuesto.

- Viga empotrada (Z1) con carga puntual P en punto intermedio.

El procedimiento es igual que en el problema anterior. Se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga como se indica en la figura 30 en el tramo a .

Las áreas de fuerza cortante y el momento flector están en el tramo a de la viga, luego, la pendiente en B es:

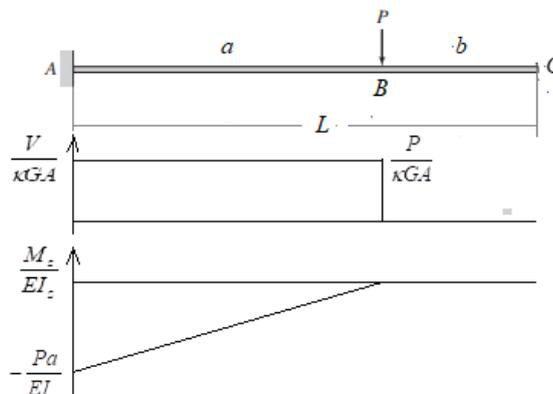


Figura 26 Los diagramas de V y M para el voladizo con carga P a distancia a
 Fuente: propia del autor.

Según el teorema 1 del método de área momento y fuerza cortante, la pendiente en B es igual al área del diagrama de M/EI entre A y B.

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{EI} \right) (a) \right| = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (5-5)$$

La pendiente de C es igual que en B porque el área es la misma:

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (5-6)$$

El desplazamiento del punto B, según el 2^{do} teorema del método de área de momento y fuerza cortante es igual al momento estático del área de momento entre A y B respecto del punto B más el área del diagrama de la cortante entre esos puntos.

$$\delta_B = t_{B/A} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{EI} \right) (a) \left[\frac{2}{3} a \right] \right| + \left(\frac{P}{\kappa GA} \right) (a) \quad (5-7)$$

$$\delta_B = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

El desplazamiento de C:

$$\delta_C = t_{C/A} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{EI} \right) (a) \left[\frac{2}{3} a + b \right] \right| + \left(\frac{P}{\kappa GA} \right) (a) \quad (5-8)$$

$$\delta_{C_{\max}} = \frac{Pa^2(2L+b)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

Los desplazamientos δ_B y δ_C son mayores que el obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli, debido al aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko) en el valor $Pa/\kappa GA$.

- Viga Simplemente apoyada (Z_2) con carga uniformemente distribuida

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_3 = f(X_1, X_3, Z_2)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_1 = f(X_1, X_3, Z_2)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en el centro de la viga y el giro en los apoyos A y B.

Primero se hallan las reacciones

$$\sum M_A = 0 \dots \rightarrow (wL)(L/2) - B(L) = 0 \dots \rightarrow \dots B = wL/2$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en una sección a distancia x a la izquierda del punto B se determinan V y M en función de la coordenada x :

$$V = \frac{wL}{2} - wx \dots y \dots M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

Se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector. (Véase la figura 31).

El primer teorema del método de áreas de momento y fuerza cortante dice: La pendiente en B es igual al área del diagrama del momento flector (M/EI) entre los puntos C y B.

$$\theta_B = \theta_{B/C} - \theta_C = \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) - 0 = \frac{wL^3}{24EI} \quad (5-9)$$

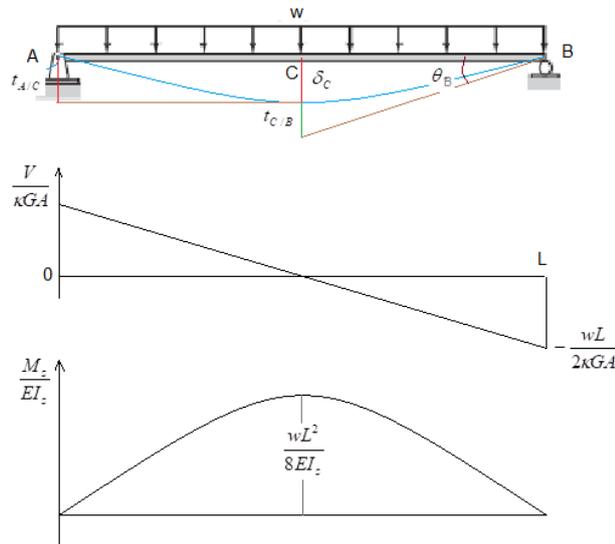


Figura 27 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada con carga w
Fuente: propia del autor.

El desplazamiento del punto C es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x}.M/EI$) entre A y C respecto del punto A, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V/\kappa GA$) entre los puntos A y C.

$$\delta_C = t_{A/C} = \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{5}{8} \left(\frac{L}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA}$$

$$\delta_{C_{\max}} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA} \quad (5-10)$$

También se puede calcular de la siguiente forma:

$$\delta_c = \theta_B \left(\frac{L}{2} \right) - t_{C/B} = \left(\frac{wL^3}{24EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \frac{L}{2} \left(\frac{3}{8} \left(\frac{L}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-wL}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{C \max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA} \quad (5-10)$$

Este δ_c es mayor que el obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli, por el aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko) en la magnitud de $wL^2 / 8\kappa GA$.

- Viga Simplemente apoyada (Z_2) con carga P en a intermedio.

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_4 = f(X_2, X_4, Z_2)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_2 = f(X_2, X_4, Z_2)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están a la derecha de B y los giros en los apoyos A y C.

Determinación de las reacciones

$$\sum M_A = 0 \dots \rightarrow P(a) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = Pa / L$$

$$\sum F_y = 0 \dots \rightarrow A - P + C = 0 \dots \rightarrow \dots A = P - Pa / L = Pb / L$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en una sección genérica a una distancia x a la derecha de A y a la izquierda de C se determinan de V y M en función de la coordenada x :

Tramo AB

$$V = \frac{Pb}{L}$$

$$M = \frac{Pb}{L} x$$

tramo CB

$$V = -\frac{Pa}{L}$$

$$M = \frac{Pa}{L} x$$

Luego se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector. (Véase la figura 32).

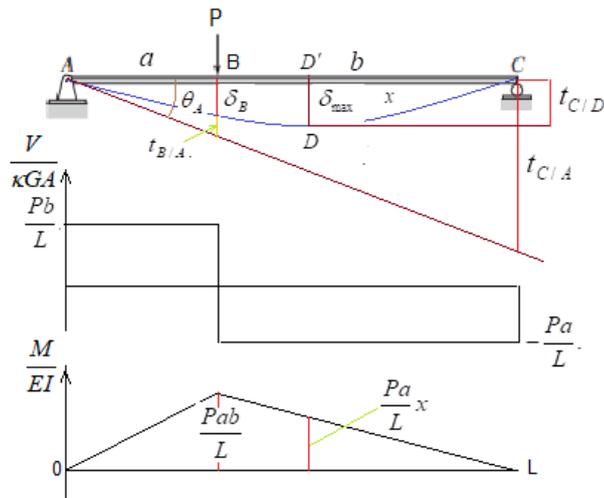


Figura 28 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada con carga puntual P
Fuente: propia del autor.

Para la pendiente en A se determina la distancia vertical de la tangente en C a la tangente en A ($t_{C/A}$) aplicando el segundo teorema del método de áreas de momento y fuerza cortante, luego se divide entre la longitud L.

$$t_{C/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) (L) \left[\frac{L+b}{3} \right] + \left[\frac{Pb}{L\kappa GA} (a) - \frac{Pa}{L\kappa GA} (b) \right] = \frac{Pab(L+b)}{6EI}$$

$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad (5-11)$$

Aplicando el 1er teorema se determina $\theta_{C/A}$ y por diferencia se determina la pendiente en C (θ_C).

$$\theta_C = \theta_{C/A} - \theta_A = \frac{1}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) (L) - \frac{Pab(L+b)}{6LEI} = \frac{Pab}{6LEI} (L+a) \quad (5-12)$$

El desplazamiento del punto de aplicación de la carga P se determina al restar $t_{B/A}$ de la ordenada $\theta_A(a)$:

$$\delta_B = \theta_A(a) - t_{B/A} = \frac{Pa^2b(L+b)}{6LEI} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) (a) \left[\frac{a}{3} \right] + \frac{Pb}{L\kappa GA} (a) \right]$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2b(L+b-a)}{6LEI} + \left| \frac{-Pab}{L\kappa GA} \right| = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA} \quad (5-13)$$

Cálculo de desplazamiento máximo:

$$\theta_A = \theta_{D/A}$$

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI} = \frac{1}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) (L) - \frac{1}{2} \frac{Pax}{LEI} (x) = \frac{Pab}{2EI} - \frac{Pax^2}{2LEI}$$

$$\dots \rightarrow \dots x = \sqrt{\frac{b(L+a)}{3}}$$

$$\delta_{\max} = t_{C/D} = \frac{1}{2} \left(\frac{Pax}{LEI} \right) (x) \left[\frac{2}{3} x \right] + \left| \left(\frac{-Pa}{LkGA} \right) (x) \right| = \frac{Pax^3}{3LEI} + \frac{Pax}{LkGA}$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pa(b(L+a))^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}LEI} + \frac{Pa(b(L+a))^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}LkGA} \quad (5-14)$$

Cuando $a > b$ el punto de deflexión máxima es: $x = \sqrt{a(L+b)/3}$

Cuando P está en el centro de la viga $a = b = L/2$, luego:

$$\delta_B = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4kGA} \quad (5-15)$$

Se observa que este δ_B es mayor al obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler - Bernoulli.

- Viga simplemente apoyada con un extremo en voladizo (Z_3) y carga P.

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_4 = f(X_2, X_4, Z_3)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_2 = f(X_2, X_4, Z_3)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en B y C, los giros en los apoyos A y C.

Cálculo de las reacciones y fuerzas internas:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P(L/3) - C(2L/3) = 0 \dots \rightarrow \dots C = P/2$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - P + C = 0 \dots \rightarrow \dots A = P - C = P/2$$

Procediendo igual que en el problema anterior, se determinan V y M en función de la coordenada x:

Tramo AB	tramo CB	tramo CD
$V = \frac{P}{2}$	$V = -\frac{P}{2}$	$V = 0$
$M = \frac{P}{2}x$	$M = \frac{P}{2}x$	$M = 0$

Luego se trazan los diagramas de fuerza cortante y momento flector. (Véase la figura 33).

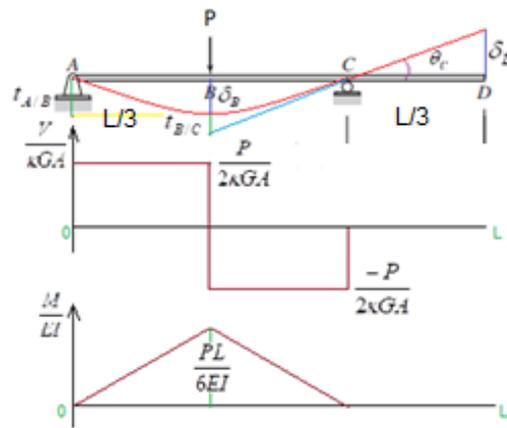


Figura 29 La elástica y los diagramas de V y M para la viga biapoyada-libre con carga P
Fuente: propia del autor.

Determinación la pendiente del punto C y los desplazamientos de B y D.

Para determinar θ_c , primero se determina $t_{A/C}$ aplicando el 2do teorema de método de área-momento y fuerza cortante, luego se divide entre la distancia L_{AC} :

$$\theta_c = \frac{t_{A/C}}{2L/3} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{6EI} \right) \left(\frac{2}{3}L \right) \left[\frac{L}{3} \right]}{2L/3} = \frac{PL^2}{36EI} \quad (5-16)$$

Para determinar el punto de aplicación de la carga P, primero se determina $t_{B/C}$, luego se le resta a $\theta_c(L/3)$:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \theta_c \left(\frac{L}{3} \right) - t_{B/C} = \frac{PL^2}{36EI} \left(\frac{L}{3} \right) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{6EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{L}{3} \right] + \left(-\frac{P}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{3} \right) \right] \\ \delta_B &= \frac{PL^3}{108EI} - \frac{PL^3}{324EI} + \frac{PL}{6\kappa GA} = \frac{PL^3}{162EI} + \frac{PL}{6\kappa GA} \end{aligned} \quad (5-17)$$

El desplazamiento del extremo libre será:

$$\delta_D = \theta_c \left(\frac{L}{3} \right) = \frac{PL^2}{36EI} \left(\frac{L}{3} \right) = \frac{PL^3}{108EI} \quad (5-18)$$

El desplazamiento δ_B es mayor al obtenido por el método de área – momento basado en la teoría de Euler – Bernoulli, por el aporte de la carga cortante.

b). Giros y desplazamientos en vigas de dos miembros

- Viga empotrada-rótula-apoyada (Z_4) con Carga distribuida w .

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_3 = f(X_1, X_3, Z_4)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_1 = f(X_1, X_3, Z_4)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en la rótula B de la viga y los giros en B y C.

Determinación de las reacciones. Tomando momento en B de la parte derecha de la viga:

$$\sum M_B^d = 0 \rightarrow w(L)(L/2) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = wL/2$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - wL + C = 0 \dots \rightarrow \dots A = wL - wL/2 = wL/2$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A - wL(3L/2) + C(2L) = 0 \dots \rightarrow \dots M_A = wL^2/2$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en una sección a distancia x de los puntos C y B se determinan V y M en función de la coordenada x :

Tramo CB

$$V = -\frac{wL}{2} + wx$$

$$M = \frac{wL}{2}x - w\frac{x^2}{2}$$

Tramo BA

$$V = \frac{wL}{2}$$

$$M = -\frac{wL}{2}x$$

Trazado de diagramas de V y M :

El trazado de los diagramas de V y M , se hace con las funciones por tramos indicado arriba. Una vez trazada el diagrama de momentos, se traza la curva elástica de la viga en todos sus tramos, tal como se indica en la figura 34.

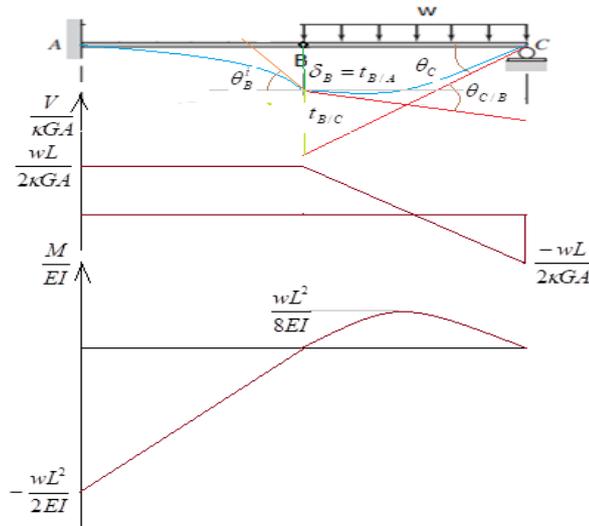


Figura 30 La elástica y los diagramas de V y M para la viga empotrada-rótula-apoyada de 2 miembros con carga w

Fuente: propia del autor.

Cálculo de pendientes y desplazamiento de B.

La pendiente θ_B^i en B del tramo AB de la viga es igual al área del diagrama del momento flector (M/EI) entre los puntos A y B.

$$\theta_B^i = \theta_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{-wL^2}{2EI} \right) (L) = -\frac{wL^3}{4EI} \quad (5-19)$$

El desplazamiento δ_B del punto B (rótula) es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x}M/EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V/\kappa GA$) entre los puntos A y B.

$$\delta_B = t_{B/A} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-wL^2}{2EI} \right) (L) \left[\frac{2}{3} L \right] \right| + \left(\frac{wL}{2\kappa GA} \right) (L) = \frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (5-20)$$

$$\delta_B = \frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$$

El primer término del lado derecho de δ_B se debe a la teoría de Euler-Bernoulli y el segundo sumando al aporte de la fuerza cortante (teoría de Timoshenko)

Para determinar la pendiente θ_B^d del tramo BC, primero se calculan θ_C y

$$\theta_{C/B}:$$

$$t_{B/C} = \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) (L) \left[\frac{1}{2} L \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-wL}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$t_{B/C} = \frac{wL^4}{24EI}$$

$$\theta_C = \frac{1}{L} (\delta_B + t_{B/C}) = \frac{1}{L} \left(\frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} + \frac{wL^4}{24EI} \right) \quad (5-21)$$

$$\theta_C = \frac{5wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2\kappa GA}$$

Por diferencia de ángulos se tiene:

$$\theta_B^d = \theta_C - \theta_{C/B} = \left(\frac{5wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \right) - \frac{wL^3}{12EI} = \frac{wL^3}{8EI} + \frac{wL}{2\kappa GA}$$

$$\theta_B^d = \frac{wL^3}{8EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \quad (5-22)$$

El Giro y el desplazamiento del punto medio del tramo BC

$$\theta_D = \theta_C - \theta_{C/D} = \frac{5wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} - \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \quad (5-23)$$

$$\delta_D = \theta_C \left(\frac{L}{2} \right) - t_{D/C} = \left(\frac{5wL^4}{48EI} + \frac{wL^2}{4\kappa GA} \right) - \left(\frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{3L}{8} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{-wL}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right)$$

$$\delta_D = \frac{37wL^4}{384EI} + \frac{3wL^2}{8\kappa GA} \quad (5-24)$$

En vigas de 2 miembros tanto los desplazamientos δ y las pendientes θ , debido al aporte de la fuerza cortante son mayores a lo determinado con la teoría de Euler – Bernoulli.

- Viga empotrada- rótula-apoyada (Z_4) con carga puntual P.

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_4 = f(X_2, X_4, Z_4)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_2 = f(X_2, X_4, Z_4)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en la rótula B y los giros en B y C.

Determinación de la reacción en C.

$$\sum M_B^d = 0 \rightarrow P(L/2) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = P/2$$

Se trazan los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y con ello la curva elástica. (Véase la figura 35)

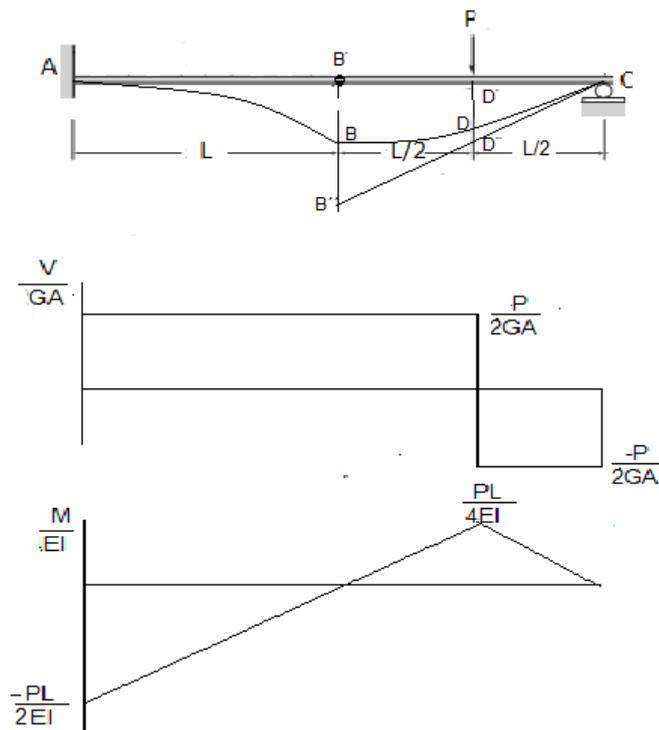


Figura 31 La elástica y los diagramas de V y M para la viga de 2 miembros empotrada-rótula-apoyada con carga P

Fuente: propia del autor.

Los puntos característicos de la curva elástica de esta viga de dos miembros son: el apoyo fijo A donde no hay giro ni desplazamiento, la rótula B que se desplaza y gira, el punto D de aplicación de la carga P que sufre desplazamiento y giro, finalmente la pendiente del apoyo móvil C.

Con ayuda de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se calculan los parámetros indicados

Cálculo de pendientes y desplazamiento de B.

La pendiente θ_B^i en B del tramo AB de la viga es igual al área del diagrama del momento flector (M/EI) entre los puntos A y B.

$$\theta_B^i = \theta_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) (L) = -\frac{PL^2}{4EI} \quad (5-25)$$

El desplazamiento del punto B es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x}.M/EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V/\kappa GA$) entre los puntos A y B.

$$\delta_B = t_{B/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) (L) \left[\frac{2}{3} L \right] + \left(\frac{P}{2\kappa GA} \right) (L) \right] = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} \quad (5-26)$$

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA}$$

Para determinar la pendiente θ_B^d , primero se calculan θ_C y $\theta_{C/B}$:

$$t_{B/C} = BB'' = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) (L) \left[\frac{1}{2} L \right] + 0 \right] = \frac{PL^3}{16EI}$$

$$B'B'' = \delta_B + BB'' = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} + \frac{PL^3}{16EI} = \frac{11PL^3}{48EI} + \frac{PL}{2\kappa GA}$$

$$B'B'' = \theta_C(L) \dots \rightarrow \dots \theta_C = \frac{B'B''}{L} = \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (2-27)$$

$$\theta_{C/B} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) (L) = \frac{PL^2}{8EI}$$

Por diferencia de ángulos se tiene:

$$\theta_B^d = \theta_C - \theta_{C/B} = \left(\frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \right) - \frac{PL^2}{8EI} = \frac{5PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (5-28)$$

Cálculo de desplazamiento y giro de la sección D:

$$t_{D/C} = DD'' = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{L}{2} \right] + \left(\frac{-P}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{96EI} - \frac{PL}{4\kappa GA}$$

$$\delta_D = \frac{1}{2} B'B'' - t_{D/C} = \frac{1}{2} \left[\frac{11PL^3}{48EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} \right] - \left[\frac{PL^3}{96EI} - \frac{PL}{4\kappa GA} \right] \quad (5-29)$$

$$\delta_D = \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{PL}{2\kappa GA}$$

$$\theta_D = \theta_C - \theta_{C/D} = \left(\frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \quad (5-30)$$

$$\theta_D = \frac{PL^2}{6EI} + \frac{P}{2\kappa GA}$$

Debido a la carga cortante, la pendiente y el desplazamiento de la curva elástica tienen un incremento en relación a la teoría de Euler – Bernoulli.

- Viga empotrada-rótula-apoyada-libre (Z_5) con carga puntual P

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_4 = f(X_2, X_4, Z_5)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_2 = f(X_2, X_4, Z_5)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en la rótula B y el extremo libre D y los giros en B, C y D.

Determinación de la reacción en C.

$$\sum M_B^d = 0 \rightarrow P(L) - C(L/2) = 0 \dots \rightarrow \dots C = 2P$$

Se trazan los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y con ello la curva elástica. (Véase la figura 35)

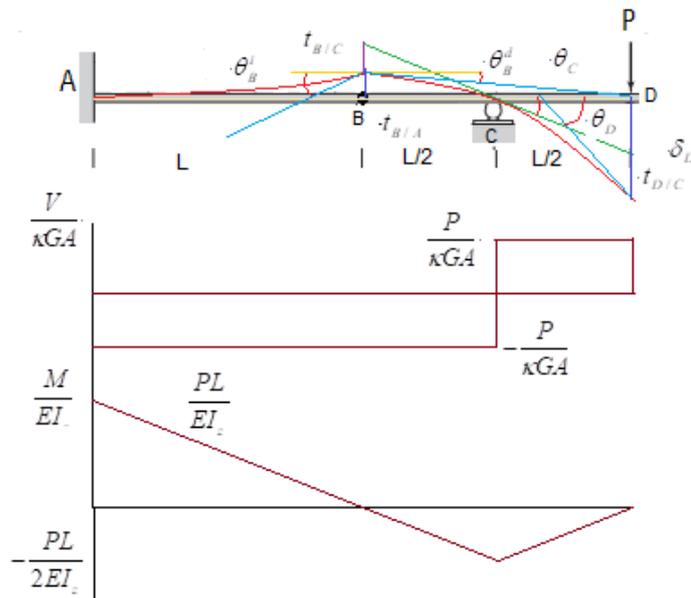


Figura 32 La curva elástica y diagramas de V y M de la viga de 2 miembros con carga P.
Fuente: propia del autor

Cálculo de pendientes y desplazamiento de B.

La pendiente θ_B^i en B del tramo AB de la viga es igual al área del diagrama del momento flector (M/EI) entre los puntos A y B. (teorema 1).

$$\theta_B^i = \theta_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) (L) = \frac{PL^2}{2EI} \quad (5-31)$$

El desplazamiento del punto B es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x}M/EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V/\kappa GA$) entre los puntos A y B, (teorema 2)

$$\delta_B = t_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) (L) \left[\frac{2}{3} L \right] + \left| \left(\frac{-P}{\kappa GA} \right) (L) \right| = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} \quad (5-32)$$

Para determinar la pendiente θ_B^d , primero se calculan θ_C y $\theta_{C/B}$:

$$t_{B/C} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{2}{3} \frac{L}{2} \right] + \left(\frac{-P}{\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right| = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{PL}{2\kappa GA}$$

$$\theta_C \left(\frac{L}{2} \right) = |\delta_B + t_{B/C}| = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} + \frac{PL^3}{24EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} = \frac{3PL^3}{8EI} + \frac{3PL}{2\kappa GA}$$

$$\theta_C = \frac{3PL^2}{4EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \quad (5-33)$$

$$\theta_{C/B} = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right| = \frac{PL^2}{8EI}$$

Por diferencia de ángulos se tiene:

$$\theta_B^d = \theta_C - \theta_{C/B} = \left(\frac{3PL^2}{4EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \right) - \left(\frac{PL^2}{8EI} \right) = \frac{5PL^2}{8EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \quad (5-34)$$

En el punto B de la viga, debido a la teoría de Timoshenko, la pendiente θ_B^d y el desplazamiento de la curva elástica tienen un incremento en relación a la teoría de Euler – Bernoulli en $(3P/\kappa GA)$ y $(PL/\kappa GA)$ respectivamente.

Cálculo de giro y desplazamiento de la sección D:

$$\theta_D = \theta_C + \theta_{C/D} = \left(\frac{3PL^2}{4EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \right) + \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right| = \frac{7PL^2}{8EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \quad (5-35)$$

$$\delta_D = \theta_C \left(\frac{L}{2} \right) + t_{D/C} = \left(\frac{3PL^2}{4EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{2EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{2}{3} \frac{L}{2} \right] + \left(\frac{P}{\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right|$$

$$\delta_D = \frac{5PL^3}{12EI} + \frac{2PL}{\kappa GA} \quad (5-36)$$

En el extremo libre D, debido a la teoría de Timoshenko, la pendiente y el desplazamiento de la curva elástica tienen un incremento en relación a la teoría de Euler – Bernoulli en $(3P/\kappa GA)$ y $(3PL/2\kappa GA)$ respectivamente.

- Viga bi apoyada - rótula- apoyada (Z_6) con cargas w y P .

Las variables dependientes son el **giro** $\theta = Y_3 = f(X_1, X_2, X_3, X_4, Z_6)$ y el **desplazamiento** $\delta = Y_1 = f(X_1, X_2, X_3, X_4, Z_6)$ de la curva elástica cuyos valores máximos de desplazamiento están en la rótula C de la viga y los giros en C y D.

Cálculo de las reacciones en los apoyos

$$\sum M_C^d = 0 \rightarrow P\left(\frac{L_1}{2}\right) - E(L_1) = 0 \rightarrow E = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow wL\left(\frac{L}{2}\right) - B\left(\frac{3}{4}L\right) + P\left(L + \frac{L_1}{2}\right) - E(L + L_1) = 0 \rightarrow B = \frac{2}{3}wL + \frac{2}{3}P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - wL + B - P + E = 0 \rightarrow A = \frac{wL}{3} - \frac{P}{6}$$

Determinación de las fuerzas internas M y V en función de la posición x

a lo largo de toda la viga:

Tramos CD y ED:

Tramo CB:

Tramo AB:

$$V = \pm \frac{P}{2}$$

$$V = \frac{P}{2} + wx$$

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6}$$

$$M = \frac{P}{2}x$$

$$M = -\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x$$

Trazado de diagramas de fuerza cortante y momento flector. (Véase la figura 37)

Para determinar la pendiente y el desplazamiento de la rótula se aplican los dos teoremas del método de áreas de momento y fuerza cortante.

Con ayuda de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se calculan los parámetros indicados

Cálculo de pendiente de A.

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L_{AB}}$$

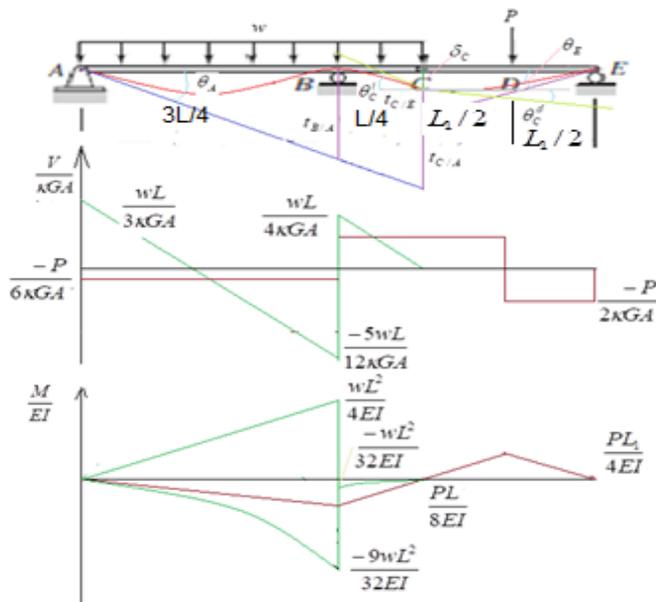


Figura 33 La curva elástica y diagramas de V y M de la viga de 2 miembros biapoyada-rótula-apoyada con cargas w y P .

Fuente: propia del autor.

Donde:

θ_A = pendiente a la curva elástica en A

L_{AB} = longitud entre A y B.

$t_{B/A}$ = distancia vertical de la tangente en B a la tangente en A de la curva elástica.

La distancia vertical del punto B a la tangente al punto A de la curva elástica es igual al momento estático del área de diagrama de momento flector ($\bar{x} \cdot M / EI$) respecto del punto B, más el área del diagrama de la fuerza cortante ($V / \kappa GA$) entre los puntos A y B.

$$\begin{aligned}
 t_{B/A} &= \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{4EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{3L}{4} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{-9wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{4} \frac{3L}{4} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{-PL^2}{8EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{3L}{4} \right] \dots \\
 &\dots + \left(\frac{-P}{6\kappa GA} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{3\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-5wL}{12\kappa GA} \right) \left(\frac{5L}{12} \right) \\
 t_{B/A} &= \frac{3wL^4}{128EI} - \frac{27wL^4}{2048EI} - \frac{3PL^3}{256EI} + \left| -\frac{PL}{8\kappa GA} + \frac{wL^2}{18\kappa GA} - \frac{25wL^2}{288\kappa GA} \right| \\
 t_{B/A} &= \frac{21wL^4}{2048EI} - \frac{3PL^3}{256EI} + \frac{wL^2}{32\kappa GA} + \frac{PL}{8\kappa GA}
 \end{aligned}$$

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{(3L/4)} = \frac{4}{3L} \left(\frac{21wL^4}{2048EI} - \frac{3PL^3}{256EI} + \frac{wL}{32\kappa GA} + \frac{PL}{8\kappa GA} \right) \quad (5-37)$$

$$\theta_A = \frac{7wL^3}{512EI} - \frac{PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA}$$

Cálculo del desplazamiento del punto C:

Por geometría: $\delta_C = \theta_A(L) - t_{C/A}$

Donde:

δ_C = desplazamiento vertical del punto C.

L = longitud entre A y C

$t_{C/A}$ = distancia vertical de la tangente en C a la tangente en A

$$t_{C/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{4EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{3L}{4} + \frac{L}{4} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{-9wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{4} \frac{3L}{4} + \frac{L}{4} \right] +$$

$$\dots \frac{1}{2} \left(\frac{-PL^2}{8EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{3L}{4} + \frac{L}{4} \right] + \left(\frac{-P}{6\kappa GA} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{3\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{3} \right) + \dots$$

$$\dots \frac{1}{2} \left(\frac{-5wL}{12\kappa GA} \right) \left(\frac{5L}{12} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{-wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \left[\frac{3}{4} \frac{L}{4} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \left[\frac{2}{3} \frac{L}{4} \right] + \dots$$

$$\dots \frac{1}{2} \left(\frac{wL}{4\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{4} \right) + \left(\frac{P}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{4} \right)$$

$$t_{C/A} = \frac{3wL^4}{64EI} - \frac{63wL^4}{2048EI} - \frac{3PL^3}{128EI} - \frac{PL}{8\kappa GA} + \frac{wL^2}{18\kappa GA} - \frac{25wL^2}{288\kappa GA} -$$

$$\dots \frac{wL^4}{2048EI} - \frac{PL^3}{384EI} + \frac{wL^2}{32\kappa GA} + \frac{PL}{8\kappa GA}$$

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{64EI} - \frac{5PL^2}{192EI}$$

$$\delta_C = \theta_A(L) - t_{C/A} = \frac{7wL^4}{512EI} - \frac{PL^3}{64EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} - \left[\frac{wL^4}{64EI} - \frac{5PL^2}{192EI} \right]$$

$$\delta_C = -\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \quad (5-38)$$

Cálculo de la pendiente en B.

Por geometría:

$$\theta_B = \theta_A - \theta_{B/A}$$

Donde:

θ_B = La pendiente a la curva elástica en B.

$\theta_{B/A}$ = ángulo entre las tangentes a A y B de la curva elástica. Es igual al área del diagrama del momento flector entre A y B.

$$\theta_{B/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{4EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{-9wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{8EI} \right) \left(\frac{3L}{4} \right) \right] = \frac{3wL^3}{128EI} - \frac{3PL^2}{64EI}$$

$$\theta_B = \theta_A - \theta_{B/A} = \frac{7wL^3}{512EI} - \frac{PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} - \left[\frac{3wL^3}{128EI} - \frac{3PL^2}{64EI} \right]$$

$$\theta_B = -\frac{5wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (5-39)$$

Cálculo de la pendiente del lado izquierdo de la rótula en C.

Por geometría: $\theta_C^i = \theta_B - \theta_{C/B}$

Donde:

$\theta_{C/B}$ = ángulo entre las tangentes a C y B de la curva elástica. Es igual al área del diagrama del momento flector entre B y C.

$$\theta_{C/B} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{-wL^2}{32EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \right] = -\frac{wL^3}{384EI} - \frac{PL^2}{64EI}$$

$$\theta_C^i = \theta_B - \theta_{C/B}$$

$$\theta_C^i = -\frac{5wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} - \left[-\frac{wL^3}{384EI} - \frac{PL^2}{64EI} \right]$$

$$\theta_C^i = -\frac{11wL^3}{1536EI} + \frac{3PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (5-40)$$

Cálculo de la pendiente en E.

Por geometría: $\theta_E = \frac{|\delta_C + t_{C/E}|}{L_1}$

Donde:

L_1 = longitud de C a E.

$t_{C/E}$ = distancia vertical de la tangente en C a la tangente en E de la curva elástica.

$$t_{C/E} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL_1}{4EI} \right) (L_1) \left[\frac{L_1}{2} \right] + \left(\frac{-P}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L_1}{2} \right) + \left(\frac{P}{2\kappa GA} \right) \left(\frac{L_1}{2} \right) = \frac{PL_1^3}{16EI}$$

$$\theta_E = \frac{|\delta_C + t_{C/E}|}{L_1} = \frac{1}{L_1} \left[\left(-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right) + \left(\frac{PL_1^3}{16EI} \right) \right]$$

$$\theta_E = \frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{1}{L_1} \left[-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right] \quad (5-41)$$

Cálculo de la pendiente del lado derecho de la rótula en C

Por geometría: $\theta_C^d = \theta_E - \theta_{E/C}$

Donde:

$\theta_{E/C}$ = ángulo entre las tangentes a C y E de la curva elástica. Es igual al área del diagrama del momento flector entre C y E.

$$\theta_{E/C} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL_1}{4EI} \right) (L_1) = \frac{PL_1^2}{8EI}$$

$$\theta_C^d = \theta_{E/C} - \theta_e = \frac{PL_1^2}{8EI} - \left(\frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{1}{L_1} \left[-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right] \right)$$

$$\theta_C^d = \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{1}{L_1} \left[-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right] \quad (5-42)$$

En las vigas de dos miembros la pendiente y el desplazamiento son mayores que el calculado por el método de área – momento de la teoría de Euler – Bernoulli, validando la hipótesis de esta investigación.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

Los resultados de las hipótesis desarrollados en los puntos 5.2 a) vigas de un miembro y 5.2 b) vigas de dos miembros deben ser contrastados con otros métodos de cálculo conocidos (grupos de control) o con otras investigaciones similares. Se han utilizado ambos caminos

6.1.1. Aplicación de métodos de energía.

En este caso se utilizan como grupos de control, los métodos de energía: el principio de trabajo virtual y el teorema de Castigliano sobre una viga isostática (Z_i) con un tipo de carga

a) Vigas de un miembro.

❖ Viga empotrada – libre (Z_1) con carga uniformemente distribuida

Grupo control: Principio de Trabajo Virtual

Para la contratación de los resultados del método de áreas de momento y fuerza cortante mediante el principio de trabajo virtual, se aplica un momento unitario y una carga unitaria en el punto B, luego se determina en forma independiente el trabajo del par y carga unitarios durante el giro y desplazamiento reales originados por la carga w .

Cálculo de giro en B.

Dibujando una viga igual a la real, en el punto B de la viga se aplica un momento ficticio $M' = 1$ en la dirección del giro. (Véase la figura 38 (b))

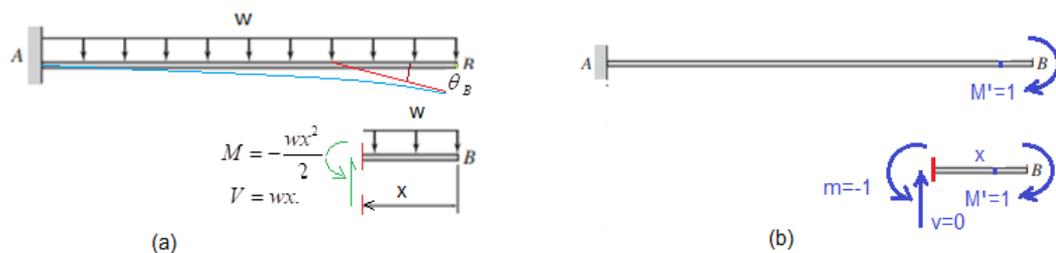


Figura 34 Voladizo con carga distribuida real y momento virtual

Fuente: propia del autor.

Se determinan las fuerzas internas debidas a la carga externa w y al par unitario $M' = 1$, respectivamente.

$$M = -\frac{wx^2}{2} \quad m = -1$$

$$V = wx \quad v = 0$$

Aplicando el principio del trabajo virtual para momento flector y fuerza cortante:

$$1(\theta_B) = \int_0^L m_v \frac{M}{EI} dx + f_f \int_0^L v_v \frac{V}{GA} dx$$

$$1 \cdot \theta_B = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{(wx)(0)}{\kappa GA} dx = \frac{wL^3}{6EI} \quad (6-1)$$

$$\theta_{B_{\max}} = \frac{wL^3}{6EI}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de área-momento y fuerza cortante (véase la ec. 5-1))

Cálculo de desplazamiento en B:

En dirección del desplazamiento del punto B se aplica una carga ficticia puntual $Q = 1$ y se determinan las fuerzas internas debidas a la carga externa w y a $Q = 1$, respectivamente en una sección a distancia x a la izquierda de B. (véase la figura 39).

$$M = -\frac{wx^2}{2} \quad m = -x$$

$$V = wx \quad v = 1$$

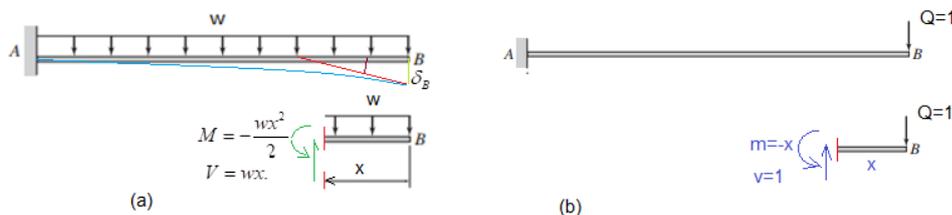


Figura 35 Voladizo con carga distribuida real y carga virtual Q
Fuente: propia del autor.

Aplicando el principio del trabajo virtual para momento flector y fuerza cortante:

$$1(\delta_B) = \int_0^L m_v \frac{M}{EI} dx + f_f \int_0^L v_v \frac{V}{GA} dx$$

$$1. \delta_B = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{(wx)(1)}{\kappa GA} dx = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (6-2)$$

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de área-momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-2)).

- Viga empotrada – libre (Z₁) con carga puntual P

Grupo control: teorema de Castigliano:

Para contrastar los resultados obtenidos con el método de áreas de momento y fuerza cortante, se utiliza el teorema de Castigliano.

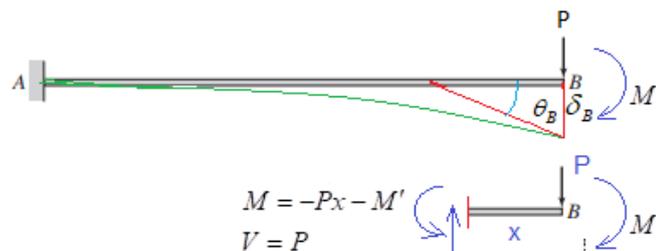


Figura 36 Voladizo con carga puntual real y momento virtual
Fuente: propia del autor.

Determinación de la pendiente θ_B :

En la dirección del ángulo de giro del punto B de la viga se aplica un momento ficticio M' y se determinan:

$$M = -Px - M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

$$V = P, \dots \dots \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = 0$$

Después de derivar, en M y V se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{(-Px)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{(P)(0)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^2}{2EI} \quad (6-3)$$

$$\theta_{B_{\max}} = \frac{PL^2}{2EI}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de áreas de momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-3).

Determinación del desplazamiento δ_B :

En la dirección del desplazamiento del punto B se actúa la carga puntual P y se determinan:

$$M = -Px \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$V = P \dots \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = 1$$

Después de derivar, en M y V se integra.

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx$$

$$\delta_B = \int_0^L \frac{(-Px)(-x)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{(P)(1)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} \quad (6-4)$$

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de área-momento y fuerza cortante (véase la ec. 5-4).

- Viga empotrada libre con carga puntual P en punto intermedio.

Grupo control: teorema de Castigliano.

Para hallar el giro y desplazamiento del extremo libre C mediante el teorema de Castigliano, se aplican las cargas ficticias M' y Q en forma independiente junto con la carga real. (Véase la fig. 41 (a))

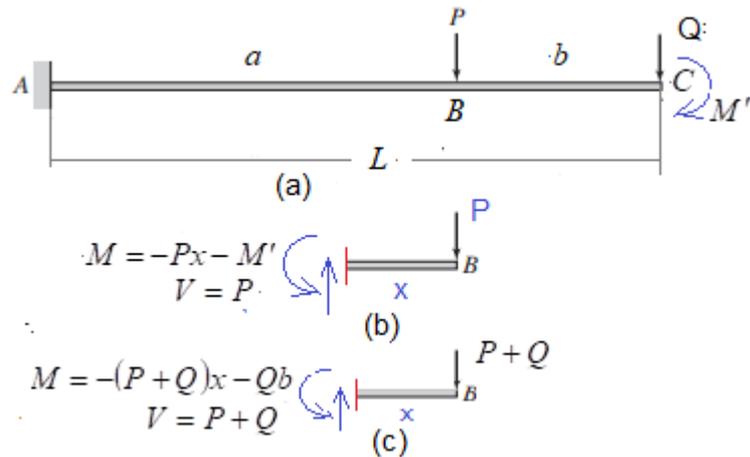


Figura 37 Voladizo con cargas puntuales real P, virtual Q y momento virtual M'
Fuente: propia del autor.

Determinación de la pendiente θ_c :

En la dirección del ángulo de giro del punto C de la viga se aplica un momento ficticio M' y se determinan M y V en el tramo a ya que en el tramo b son nulos al no existir carga externa, (véase la fig.6.4 (b)):

$$M = -Px - M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

$$V = P, \dots \dots \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = 0$$

Después de derivar, en M y V se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B = \theta_C = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int_0^a \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_C = \int_0^a \frac{(-Px)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^a \frac{(P)(0)}{\kappa GA} dx = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (6-5)$$

$$\theta_{C \max} = \frac{Pa^2}{2EI}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de área-momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-5).

Determinación del desplazamiento δ_c :

En la dirección del desplazamiento del punto C se aplica la carga ficticia Q y se determinan M y V en el tramo a ya que en el tramo b son nulos, (ver fig. 6.4 (c)):

$$M = -Px - Q(b+x) \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = -(b+x)$$

$$V = P + Q \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = 1$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q = 0$ luego se integra.

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx$$

$$\delta_C = \int_0^a \frac{(-Px)(-(b+x))}{EI} (dx) + \int_0^a \frac{(P)(1)}{\kappa GA} dx = \frac{Pba^2}{2EI} + \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

$$\delta_{C_{\max}} = \frac{Pa^2(2L+b)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA} = \frac{Pa^2(3L-a)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA} \quad (6-6)$$

Este valor es igual al obtenido por el método de áreas de momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-8).

- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.

Grupo control: teorema de Castigliano.

Determinación de la pendiente θ_B :

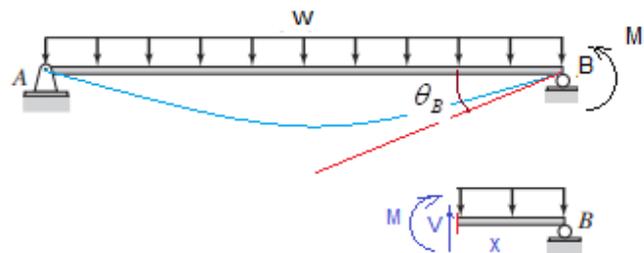


Figura 38 Viga simplemente apoyada con carga distribuida w y momento virtual M'
Fuente: propia del autor.

En la dirección del ángulo de giro del punto B de la viga se aplica un momento ficticio M' y se determinan M y V en una sección genérica a distancia x del apoyo B, (ver fig. 42):

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} + M' - \frac{M'}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$V = -\frac{wL}{2} + wx + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Después de derivar, en M y V se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_B = \int_0^L \left(\frac{\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2}{EI} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx + \int_0^L \left(-\frac{wL}{2} + wx \right) \left(\frac{1}{L} \right) dx$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{4EI} - \frac{wL^3}{6EI} - \frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{8EI} - \frac{wL}{2\kappa GA} + \frac{wL}{2\kappa GA} = \frac{wL^2}{24EI} \quad (6-7)$$

$$\theta_B = \frac{wL^2}{24EI}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de áreas de momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-9).

Determinación del desplazamiento δ_C :

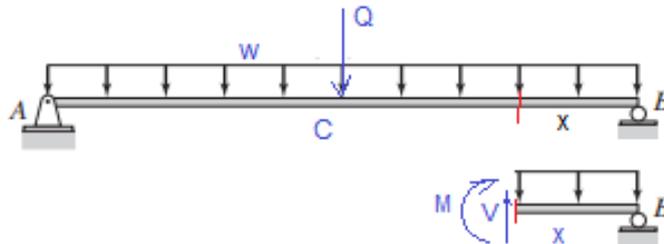


Figura 39 *Viga simplemente apoyada con cargas distribuida real w y virtual Q*
Fuente: propia del autor.

En la dirección del desplazamiento del punto C se aplica la carga ficticia Q (ver fig.43) y se determinan M y V en una sección a una distancia x de B:

$$M = \frac{wL}{2}x - w\frac{x^2}{2} + \frac{Q}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{x}{2}$$

$$V = -\frac{wL}{2} + wx - \frac{Q}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = -\frac{1}{2}$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q = 0$ luego se integra.

$$\delta_c = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_c = 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)}{EI} (dx) + 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{wL}{2} + wx\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_c = \frac{wL^4}{48EI} - \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^2}{4\kappa GA} - \frac{wL^2}{8\kappa GA} \quad (6-8)$$

$$\delta_{c_{\max}} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA}$$

Este valor es igual al obtenido por el método de área-momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-10).

- Viga bi apoyada con carga puntual P en punto intermedio
Grupo control: Teorema de Castigliano.

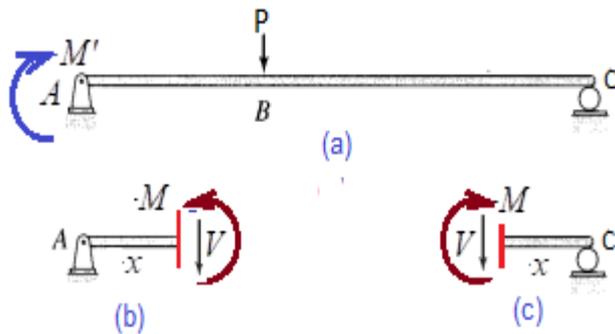


Figura 40 Viga simplemente apoyada con carga puntual P y momento virtual
Fuente: propia del autor.

Para determinar la pendiente en A se aplica un par ficticio M' en dirección del giro de la viga (véase la fig. 44 (a)) y se hallan las reacciones:

$$\sum M_A = 0 \dots \rightarrow M' + P(a) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = Pa/L + M'/L$$

$$\sum F_y = 0 \dots \rightarrow A - P + C = 0 \dots \rightarrow \dots A = P - Pa/L - M'/L = Pb/L - M'/L$$

Se determinan V y M en función de la coordenada x:

Tramo AB (véase la fig. 6.7 (b))

$$V = \frac{Pb}{L} - \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = -\frac{1}{L}$$

$$M = \frac{Pb}{L}x + M' - \frac{M'}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - \frac{x}{L}$$

Tramo CB (véase la fig. 6.7 (c))

$$V = -\frac{Pa}{L} - \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = -\frac{1}{L}$$

$$M = \frac{Pa}{L}x + \frac{M'}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{x}{L}$$

Después de derivar, en M y V se hace $M' = 0$, luego se integra

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_A = \int_0^a \frac{\left(\frac{Pbx}{L}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{L}\right)\left(\frac{-1}{L}\right)}{\kappa GA} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^b \frac{\left(\frac{Pax}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^b \frac{\left(\frac{-Pa}{L}\right)\left(\frac{-1}{L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_A = \frac{Pa^2b}{2LEI} - \frac{Pa^3b}{3L^2EI} - \frac{Pab}{\kappa L^2GA} + \frac{Pab^3}{3L^2EI} + \frac{Pab}{\kappa L^2GA} \quad (6-9)$$

$$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

Esta ecuación es igual al obtenido con el método de áreas de momento y de fuerza cortante (véase la ecuación 5-11)

Para determinar el desplazamiento en B, en la figura anterior se hace $M' = 0$ y las reacciones en la ecuación de equilibrio queda:

$$\sum M_A = 0 \dots \rightarrow P(a) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = Pa/L$$

$$\sum F_y = 0 \dots \rightarrow A - P + C = 0 \dots \rightarrow \dots A = P - Pa/L = Pb/L$$

Se determinan V y M en función de la coordenada x . como existe carga puntual en dirección del desplazamiento, se deriva respecto de dicha carga P :

Tramo AB

$$V = \frac{Pb}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{b}{L}$$

$$M = \frac{Pb}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{bx}{L}$$

Tramo CB

$$V = -\frac{Pa}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{a}{L}$$

$$M = \frac{Pa}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{a}{L}x$$

Después de derivar se integra

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx$$

$$\delta_B = \int_0^a \left(\frac{Pbx}{L} \right) \left(\frac{bx}{L} \right) \frac{1}{EI} (dx) + \int_0^a \left(\frac{Pb}{L} \right) \left(\frac{b}{L} \right) \frac{1}{\kappa GA} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^b \left(\frac{Pax}{L} \right) \left(\frac{ax}{L} \right) \frac{1}{EI} (dx) + \int_0^b \left(\frac{-Pa}{L} \right) \left(\frac{-a}{L} \right) \frac{1}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_B = \frac{Pa^3b^2}{3L^2EI} + \frac{Pab^2}{\kappa L^2GA} + \frac{Pa^2b^3}{3L^2EI} + \frac{Pa^2b}{\kappa L^2GA}$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA}$$

(6-10)

Este valor es igual al obtenido por el método de áreas de momento y fuerza cortante (véase la ecuación 5-13), luego se confirma la validez de la hipótesis de esta investigación.

- Viga simplemente apoyada con un extremo en voladizo y carga puntual P entre apoyos.

Grupo control: Teorema de Castigliano

Este problema es igual al anterior cuando $a = L/3$. Para hallar δ_B por el teorema de Castigliano, primero se hallan las reacciones en A y C, luego se determinan V y M en función de la coordenada x por tramos:

Tramo AB	tramo CB	tramo CD
$V = \frac{P}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{2}$	$V = -\frac{P}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{2}$	$V = 0$
$M = \frac{P}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$	$M = \frac{P}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$	$M = 0$

Después de derivar se integra

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx$$

Debido a la simetría:

$$\delta_B = 2 \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{Px}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{EI} (dx) + 2 \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx \quad (6-11)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{162EI} + \frac{PL}{6\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-17)

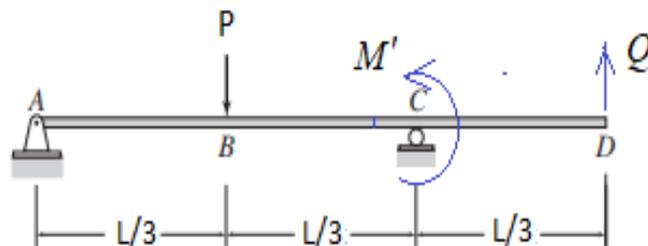


Figura 41 Viga bi apoyada con voladizo, con cargas real P virtual Q y momento virtual M'
Fuente: propia del autor.

Para calcular la pendiente en C se aplica un par ficticio M' en ese punto en dirección del giro (véase la fig. 45) y se determinan V y M en función de la coordenada x. estas son iguales que en el problema anterior, en la figura 45 se hace $Q = 0$:

Tramo AB

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M'}{2L/3} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{3}{2L}$$

$$M = \frac{P}{2}x + \frac{M'}{2L/3}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{3x}{2L}$$

Tramo CB

$$V = -\frac{P}{2} + \frac{M'}{2L/3} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{3}{2L}$$

$$M = \frac{P}{2}x + M' - \frac{M'}{2L/3}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - \frac{3x}{2L}$$

Después de derivar, en M y V se hace $M' = 0$, luego se integra

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_c = \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{Px}{2}\right)\left(\frac{3x}{2L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{3}{2L}\right)}{\kappa GA} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{Px}{2}\right)\left(1 - \frac{3x}{2L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/3} \frac{\left(-\frac{P}{2}\right)\left(\frac{3}{2L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_c = \frac{PL^2}{108EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^2}{36EI} - \frac{PL^2}{108EI} - \frac{P}{4\kappa GA} = \frac{PL^2}{36EI} \quad (6-12)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-16)

Para calcular el desplazamiento δ_D en D se aplica una carga ficticia Q en dirección del desplazamiento (véase la fig. 6.8 con $M' = 0$) y se determinan V y M en función de la coordenada x :

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P(L/3) - C(2L/3) - Q(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = P/2 - 3Q/2$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - P + C + Q = 0 \dots \rightarrow \dots A = P - C - Q = P/2 + Q/2$$

Tramo AB

$$V = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{P}{2}x + \frac{Q}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{x}{2}$$

Tramo CB

$$V = -\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{P}{2}x + Q\frac{L}{3} - \frac{Q}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{L}{3} - \frac{x}{2}$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q = 0$, luego se integra

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_D = \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{Px}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{Px}{2}\right)\left(\frac{L-x}{3-\frac{x}{2}}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/3} \frac{\left(\frac{-P}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_D = \frac{PL^3}{324EI} + \frac{PL}{12\kappa GA} + \frac{PL^3}{108EI} - \frac{PL^3}{324EI} - \frac{PL}{12\kappa GA} = \frac{PL^3}{108EI} \quad (6-13)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-18)

b). Vigas de dos miembros.

- Viga empotrada – articulada – apoyada con carga w en el tramo BC

Grupo control: el teorema de Castigliano

Cálculo de giros y desplazamiento de la rótula B

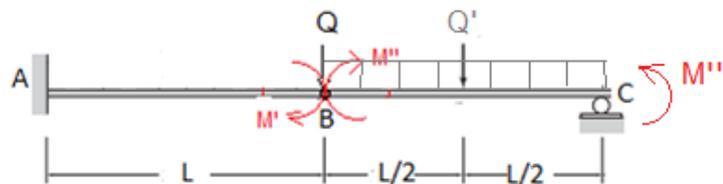


Figura 42 Viga de 2 miembros empotrado-rótula-apoyado con carga real w y ficticias Q, Q' y momentos ficticios M', M'' y M'''

Fuente: propia del autor.

Para contrastar los resultados de la investigación mediante el teorema de Castigliano, se calculan las pendientes y el desplazamiento del punto B y la pendiente de C. Para ello se aplican las cargas ficticias M', M'' y Q en B (véase la figura 46) en forma independiente junto con la carga w ; en los puntos C y D también se aplican momento ficticio M''' y carga ficticia Q' respectivamente. Debido a la rótula, el punto B tiene dos pendientes.

Para determinar el giro θ_B^i del punto B del tramo AB de la viga se aplica un momento ficticio M' en sentido horario (las demás cargas ficticias de la figura 6.9 son nulos) y se determinan:

$$V = \frac{wL}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = 0$$

$$M = -\frac{wL}{2}x - M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

Después de derivar se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^i = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_B^C \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int_B^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_B^i = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL}{2}x\right)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)(0)}{\kappa GA} dx = \frac{wL^3}{4EI} \quad (6-14)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-19)

Para pendiente θ_B^d del tramo derecho BC se aplica un momento ficticio M'' en B en sentido horario y se determina su efecto en el apoyo C

$$\sum M_B^d = 0 \rightarrow M'' + wL\left(\frac{L}{2}\right) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = \frac{M''}{L} + \frac{wL}{2}$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo BC se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en los tramos CD y BD respectivamente.

Tramo CB:

$$V = -\frac{wL}{2} + wx - \frac{M''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L}$$

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 + \frac{M''}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L}$$

Tramo BA:

$$V = \frac{wL}{2} - \frac{M''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L}$$

$$M = \left(-\frac{wL}{2} + \frac{M''}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L}$$

Después de derivar se hace $M'' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^d = \frac{\partial U}{\partial M''} = \int_c^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M''} \right) dx + \int_c^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M''} dx$$

$$\theta_B^d = \int_0^L \left(\frac{\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}}{EI} \right) \left(\frac{x}{L} \right) (dx) + \int_0^L \left(-\frac{wL}{2} + wx \right) \left(-\frac{1}{L} \right) dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^L \left(-\frac{wL}{2}x \right) \left(\frac{x}{L} \right) dx + \int_0^L \left(\frac{wL}{2} \right) \left(-\frac{1}{L} \right) dx$$

$$\theta_B^d = \frac{wL^3}{6EI} - \frac{wL^3}{8EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} - \frac{wL}{2\kappa GA} - \frac{wL^3}{6EI} - \frac{wL}{2\kappa GA}$$

$$\theta_B^d = -\left(\frac{wL^3}{8EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \right) \tag{6-15}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-22)

Cálculo de desplazamiento en B:

En dirección del desplazamiento del punto B se aplica una carga ficticia puntual Q (véase la fig. 6.9, siendo las demás cargas ficticias nulas) y se determina su efecto en el apoyo C:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow Q(0) + wL \left(\frac{L}{2} \right) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = \frac{wL}{2}$$

C es independiente de Q, luego el tramo BC no influye en el desplazamiento de B. Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo BA se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x :

$$V = \frac{wL}{2} + Q \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = 1$$

$$M = -\frac{wL}{2}x - Qx \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = -x$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q = 0$, luego se integra.

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_B^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int_B^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_B = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL}{2}x\right)(-x)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}\right)(1)}{\kappa GA} dx = \frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (6-16)$$

$$\delta_B = \frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-20)

Para calcular el giro y el desplazamiento del punto medio del tramo BC, se aplican el momento ficticio M_1 en sentido anti horario y la carga ficticia Q' , luego se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x a lo largo de toda la viga:

Tramos BD y CD:

$$V = \pm \frac{wL}{2} \mu wx + M_1 \pm \frac{Q'}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_1} = 1 \dots \frac{\partial V}{\partial Q'} = \pm \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \pm \frac{M_1}{L}x + \frac{Q'}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_1} = \pm \frac{x}{L} \dots \frac{\partial M}{\partial Q'} = \frac{x}{2}$$

Tramo BA:

$$V = \frac{wL}{2} + \frac{M_1}{L} + \frac{Q'}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_1} = \frac{1}{L} \dots \frac{\partial V}{\partial Q'} = \frac{1}{2}$$

$$M = -\frac{wL}{2}x - \frac{M_1}{L}x - \frac{Q'}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_1} = -\frac{x}{L} \dots \frac{\partial M}{\partial Q'} = -\frac{x}{2}$$

El giro se la sección media del tramo BC es:

$$\theta_D = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_C^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_1} dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_1} dx$$

$$\theta_D = 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)\left(\pm \frac{x}{L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \frac{\left(\pm \frac{wL}{2} \mu wx\right)(1)}{\kappa GA} dx \dots$$

$$\dots + \int_0^L \frac{\left(-\frac{wLx}{2}\right)\left(-\frac{x}{L}\right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_D = 2 \frac{wL^4}{48EI} - \frac{2wL^4}{256EI} + \frac{2wL}{8\kappa GA} - \frac{2wL}{16\kappa GA} + \frac{wL^4}{12EI} + \frac{wL^2}{4\kappa GA} \quad (6.17)$$

$$\theta_D = \frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL}{2\kappa GA}$$

El desplazamiento del punto D es:

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_C^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_D = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \left(\pm \frac{wL}{2} \mu wx \right) \left(\pm \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\kappa GA} dx \dots$$

$$\dots + \int_0^L \left(-\frac{wLx}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} \right) \frac{1}{EI} dx + \int_0^L \left(\frac{wL}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_D = 2 \frac{wL^4}{96EI} - \frac{2wL^4}{256EI} + \frac{2wL}{8\kappa GA} - \frac{2wL}{16\kappa GA} + \frac{wL^4}{12EI} + \frac{wL^2}{4\kappa GA} \quad (6-18)$$

$$\delta_D = \frac{37wL^4}{384EI} + \frac{3wL^2}{8\kappa GA}$$

Cálculo de la pendiente en C:

Para calcular la pendiente en C, se aplica un momento ficticio M''' en sentido anti horario en C (véase fig. 6.9 y considere las demás fuerzas ficticias nulas) y se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en toda la viga por tramos:

Tramo CB:

$$V = -\frac{wL}{2} + wx + \frac{M'''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'''} = \frac{1}{L}$$

$$M = Cx = \left(\frac{wL}{2} - \frac{w}{2}x - \frac{M'''}{L} \right) x + M''' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'''} = 1 - \frac{x}{L}$$

Tramo BA:

$$V = \frac{wL}{2} + \frac{M'''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'''} = \frac{1}{L}$$

$$M = -\left(\frac{wL}{2} + \frac{M'''}{L} \right) x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'''} = -\frac{x}{L}$$

Después de derivar se hace $M''' = 0$, luego se integra.

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M'''} = \int_c^A \left(M \frac{\partial M}{\partial M'''} \right) \frac{1}{EI} dx + \int_c^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'''} dx$$

$$\theta_c = \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL}{2} + wx \right) \left(\frac{1}{L} \right)}{\kappa GA} dx \dots$$

$$\dots + \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL}{2}x \right) \left(\frac{-x}{L} \right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2} \right) \left(\frac{1}{L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_c = \frac{wL^3}{4EI} - 2\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{8EI} - \frac{wL}{2\kappa GA} + \frac{wL}{2\kappa GA} + \frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \quad (6-19)$$

$$\theta_c = \frac{5wPL^3}{24EI} + \frac{wL}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-21)

- Viga empotrada – articulada – apoyada con carga P en el tramo BC

Grupo control: el teorema de Castigliano

Cálculo de giros y desplazamiento de la rótula B

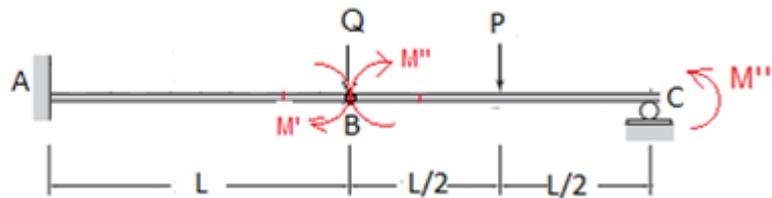


Figura 43 Viga de 2 miembros empotrada-rótula-apoyada con cargas real P, ficticia Q y momentos ficticios M' , M'' y M'''

Fuente: propia del autor.

Para contrastar los resultados de la investigación mediante el teorema de Castigliano, se calculan las pendientes y el desplazamiento de los puntos B, D y la pendiente de C. Para ello se aplican las cargas ficticias M' , M'' y Q en B y M''' en C como se indica en la figura 47, en forma independiente junto con la carga P. Debido a la rótula, el punto B tiene dos pendientes.

Para determinar el giro θ_B^i del punto B del tramo AB de la viga se aplica un momento ficticio M' en sentido horario y se determinan:

$$M = -\frac{P}{2}x - M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

$$V = \frac{P}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = 0$$

Después de derivar se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^i = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_B^C \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int_B^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_B^i = \int_0^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x\right)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)(0)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^2}{4EI} \quad (6-20)$$

$$\theta_B^i = \frac{PL^2}{4EI}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-25)

Para pendiente θ_B^d del tramo derecho BC se aplica un momento ficticio M'' en B en sentido horario y se determina su efecto en el apoyo C

$$M'' + P\left(\frac{L}{2}\right) - C(L) = 0 \dots \rightarrow \dots C = \frac{M''}{L} + \frac{P}{2}$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo BC se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en los tramos CD y BD respectivamente.

Tramo CD:

$$M = Cx = \left(\frac{P}{2} + \frac{M''}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L}$$

$$V = -\frac{P}{2} - \frac{M''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L}$$

Tramo BD:

$$M = \left(\frac{P}{2} - \frac{M''}{L} \right) x + M'' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} - \frac{M''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L}$$

Tramo BA:

$$M = -\left(\frac{P}{2} - \frac{M''}{L} \right) x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} - \frac{M''}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L}$$

Después de derivar se hace $M'' = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^d = \frac{\partial U}{\partial M''} = \int_C^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M''} \right) dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M''} dx$$

$$\theta_B^d = \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2} x \right) \left(\frac{x}{L} \right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{L} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2} x \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right)}{EI} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{L} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{\left(-\frac{P}{2} x \right) \left(\frac{x}{L} \right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_B^d = \frac{PL^2}{48EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{48EI} - \frac{P}{4\kappa GA} - \frac{PL^2}{6EI} - \frac{P}{2\kappa GA} \quad (6-21)$$

$$\theta_B^d = -\frac{5PL^2}{48EI} - \frac{P}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-28)

Cálculo de desplazamiento en B:

En dirección del desplazamiento del punto B se aplica una carga ficticia puntual Q y se determina su efecto en el apoyo C:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow Q(0) + P \frac{L}{2} - C = 0 \dots \rightarrow \dots C = P \frac{L}{2}$$

C es independiente de Q, luego el tramo BC no influye en el desplazamiento de B. Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo BA se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x :

$$M = -\frac{P}{2}x - Qx \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = -x$$

$$V = \frac{P}{2} + Q \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = 1$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q = 0$, luego se integra.

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_B^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int_B^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_B = \int_0^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x\right)(-x)}{EI} (dx) + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)(1)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} \quad (6-22)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-26)

Determinación de pendiente y desplazamiento del punto D:

Para determinar la pendiente en D se aplica un momento ficticio M' en sentido anti horario en D y se determina su efecto en C:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow M' - P \frac{L}{2} + C.L = 0 \dots \rightarrow \dots C = \frac{P}{2} - \frac{M'}{L}$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo BC se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en los tramos CD, BD y BA respectivamente.

Tramo CD:

$$M = Cx = \left(\frac{P}{2} - \frac{M'}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -\frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} - \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = -\frac{1}{L}$$

Tramo BD:

$$M = \left(\frac{P}{2} + \frac{M'}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Tramo BA:

$$M = -\left(\frac{P}{2} + \frac{M'}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -\frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Después de derivar se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_D = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_c^A \frac{\left(M \frac{\partial M}{\partial M'}\right)}{EI} dx + \int_c^A \frac{V \frac{\partial V}{\partial M'}}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_D = \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)\left(-\frac{x}{L}\right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(-\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{L}\right)}{EI} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x\right)\left(-\frac{x}{L}\right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{48EI} - \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^3}{48EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^2}{6EI} + \frac{P}{2\kappa GA} = \frac{PL^2}{6EI} - \frac{P}{2\kappa GA} \quad (6-23)$$

$$\theta_D = \frac{PL^2}{6EI} + \frac{P}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-30)

Para calcular el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P, se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x a lo largo de toda la viga:

Tramos BD y CD:

$$M = \frac{P}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$V = \pm \frac{P}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = \pm \frac{1}{2}$$

Tramo BA:

$$M = -\frac{P}{2}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{x}{2}$$

$$V = \frac{P}{2} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{2}$$

El desplazamiento del punto D es:

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_C^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial Q} dx$$

$$\delta_D = 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{EI} dx + 2 \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{\left(-\frac{Px}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_D = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA} + \frac{PL^3}{12EI} + \frac{PL}{4\kappa GA} = \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} \quad (6-24)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-29)

Cálculo de la pendiente en C:

Para calcular la pendiente en C, se aplica un momento ficticio M' en sentido anti horario en C y se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en toda la viga por tramos:

Tramo CD:

$$M = Cx = \left(\frac{P}{2} - \frac{M'}{L}\right)x + M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$V = -\frac{P}{2} + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Tramo BD:

$$M = \left(\frac{P}{2} + \frac{M'}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Tramo BA:

$$M = -\left(\frac{P}{2} + \frac{M'}{L}\right)x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -\frac{x}{L}$$

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M'}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{1}{L}$$

Después de derivar se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_c^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int_c^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_c = \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)}{EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{L}\right)}{EI} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{\left(-\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{-x}{L}\right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_c = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{48EI} - \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^3}{48EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^2}{6EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (6-25)$$

$$\theta_c = \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-27)

- Viga Empotrada-articulada-apoyada-libre con carga P.

Grupo control: el teorema de Castigliano.

Para contrastar los resultados obtenidos mediante el método de áreas de momento y fuerza cortante se utiliza el teorema de Castigliano para determinar los desplazamientos de D y B y las pendientes en D, C y B

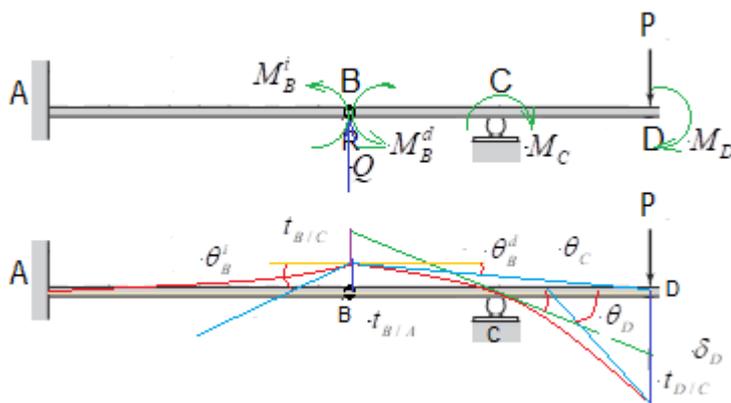


Figura 44 Viga de 2 miembros empotrada-rótula-apoyada-libre con carga real P y momentos ficticios M_B^i, M_B^d, M_C y M_D

Fuente: propia del autor.

Cálculo de desplazamiento y giro del extremo libre D:

En dirección del desplazamiento del punto B actúa la carga puntual P y se determina su efecto en el apoyo C:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow P(L) - C\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \dots \rightarrow \dots C = 2P$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas en la viga AD se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x por tramos:

Tramos DC y BC:

$$M = -Px \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$V = \pm P \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = \pm 1$$

Tramo BA:

$$M = Px \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

$$V = -P \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial P} = -1$$

El desplazamiento del punto D es:

$$\delta_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_D^A \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_D^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx$$

$$\delta_D = 2 \int_0^{L/2} \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx + 2 \int_0^{L/2} \frac{(\pm P)(\pm 1)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{(Px)(x)}{EI} dx + \int_0^L \frac{(-P)(-1)}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_D = \frac{PL^3}{12EI} + \frac{PL}{\kappa GA} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{5PL^3}{12EI} + \frac{2PL}{\kappa GA} \quad (6-26)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-32)

Para el giro se aplica un momento ficticio M_D en sentido horario y se determina la reacción en C y las fuerzas internas M y V en función de la posición x en toda la viga por tramos:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow P(L) + M_D - C\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \dots \rightarrow \dots C = 2P + \frac{2M_D}{L}$$

Tramo DC

$$M = -Px - M_D \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_D} = -1$$

$$V = P \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_D} = 0$$

Tramo CB:

$$M = -P\frac{L}{2} + Px - M_D + \frac{2M_D}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_D} = -1 + \frac{2x}{L}$$

$$V = -P - \frac{2M_D}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_D} = -\frac{2}{L}$$

Tramo BA:

$$M = Px + \frac{2M_D}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_D} = \frac{2x}{L}$$

$$V = -P - \frac{2M_D}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_D} = -\frac{2}{L}$$

Después de derivar se hace $M_D = 0$, luego se integra.

$$\theta_D = \frac{\partial U}{\partial M_D} = \int_C^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_D} \right) dx + \int_C^A \left(\frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_D} \right) dx$$

$$\theta_D = \int_0^{L/2} \frac{(-Px)(-1)dx}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{PL}{2} + Px \right) \left(-1 + \frac{2x}{L} \right) dx}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{(-P) \left(-\frac{2}{L} \right) dx}{\kappa GA} + \int_0^L \frac{(Px) \left(\frac{2x}{L} \right) dx}{EI} + \int_0^L \frac{(-P) \left(\frac{-2}{L} \right) dx}{\kappa GA}$$

$$\theta_D = \frac{PL^2}{8EI} + \frac{PL^2}{4EI} - \frac{PL^2}{8EI} - \frac{PL^2}{8EI} + \frac{PL^2}{12EI} + \frac{P}{\kappa GA} + \frac{2PL^2}{3EI} + \frac{2P}{\kappa GA} \quad (6-27)$$

$$\theta_D = \frac{7PL^2}{8EI} + \frac{3P}{\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-35)

Cálculo de la pendiente en C

Se aplica un momento ficticio M_C en sentido horario en C y se determina la reacción C y las fuerzas internas M y V en función de la posición x en toda la viga por tramos:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow P(L) + M_C - C \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \dots \rightarrow \dots C = 2P + \frac{2M_C}{L}$$

Tramo CB:

$$M = -P \frac{L}{2} + Px - M_C + \frac{2M_C}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_C} = -1 + \frac{2x}{L}$$

$$V = -P - \frac{2M_C}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_C} = -\frac{2}{L}$$

Tramo BA:

$$M = Px + \frac{2M_C}{L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_C} = \frac{2x}{L}$$

$$V = -P - \frac{2M_c}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_c} = -\frac{2}{L}$$

Después de derivar se hace $M_c = 0$, luego se integra.

$$\theta_c = \frac{\partial U}{\partial M_c} = \int_C^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_c} \right) dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_c} dx$$

$$\theta_c = \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{PL}{2} + Px \right) \left(-1 + \frac{2x}{L} \right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \frac{(-P) \left(-\frac{2}{L} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{(Px) \left(\frac{2x}{L} \right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{(-P) \left(\frac{-2}{L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_c = \frac{PL^2}{4EI} - \frac{PL^2}{8EI} - \frac{PL^2}{8EI} + \frac{PL^2}{12EI} + \frac{P}{\kappa GA} + \frac{2PL^2}{3EI} + \frac{2P}{\kappa GA} \quad (6-28)$$

$$\theta_c = \frac{3PL^2}{4EI} + \frac{3P}{\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-33)

Cálculo de las pendientes y el desplazamiento en B

Para calcular la pendiente derecha θ_B^d de B se aplica un momento ficticio M_B^d en sentido anti horario en B y se determina la reacción C y las fuerzas internas M y V en función de la posición x en toda la viga por tramos:

$$\sum M_B^d = 0 \dots \rightarrow P(L) - M_B^d - C \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \dots \rightarrow \dots C = 2P - \frac{2M_B^d}{L}$$

Tramo CB:

$$M = -P \frac{L}{2} + Px - \frac{2M_B^d}{L} x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_B^d} = -\frac{2x}{L}$$

$$V = -P + \frac{2M_B^d}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_B^d} = \frac{2}{L}$$

Tramo BA:

$$M = Px - \frac{2M_B^d}{L} x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_B^d} = -\frac{2x}{L}$$

$$V = -P + \frac{2M_B^d}{L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_B^d} = \frac{2}{L}$$

Después de derivar se hace $M_B^d = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^d = \frac{\partial U}{\partial M_B^d} = \int_C^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B^d} \right) dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_B^d} dx$$

$$\theta_B^d = \int_0^{L/2} \frac{\left(-\frac{PL}{2} + Px \right) \left(-\frac{2x}{L} \right)}{EI} (dx) + \int_0^{L/2} \frac{(-P) \left(\frac{2}{L} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^L \frac{(Px) \left(-\frac{2x}{L} \right)}{EI} dx + \int_0^L \frac{(-P) \left(\frac{2}{L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_B^d = \frac{PL^2}{8EI} - \frac{PL^2}{12EI} - \frac{P}{\kappa GA} - \frac{2PL^2}{3EI} - \frac{2P}{\kappa GA} = -\frac{5PL^2}{8EI} - \frac{3P}{\kappa GA} \quad (6-29)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-34)

Cuando actúa el par M_B^i en B, solo afecta al tramo BA, luego:

Tramo BA:

$$M = Px + M_B^i \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_B^i} = 1$$

$$V = -P \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_B^i} = 0$$

Después de derivar se hace $M_B^i = 0$, luego se integra.

$$\theta_B^i = \frac{\partial U}{\partial M_B^i} = \int_C^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B^i} \right) dx + \int_C^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_B^i} dx$$

$$\theta_B^i = + \int_0^L \frac{(Px)(1)}{EI} dx + \int_0^L \frac{P(0)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^2}{2EI} \quad (6-30)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-31)

Para calcular el desplazamiento en B se aplica una carga ficticia en dirección del desplazamiento y su efecto es solo en el tramo BA.

$$M = Px + Qx \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = x$$

$$V = -P - Q \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = -1$$

Después de derivar se hace $Q = 0$, luego se integra.

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_C^A \left(M \frac{\partial M}{\partial Q} \right) \frac{V}{EI} dx + \int_C^A \frac{\partial V}{\partial Q} \frac{V}{\kappa GA} dx$$

$$\delta_B = + \int_0^L \frac{(Px)(x)}{EI} dx + \int_0^L \frac{(P)(-1)}{\kappa GA} dx = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL}{\kappa GA} \quad (6-31)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-32)

- Viga bi apoyada – articulada – apoyada con cargas w y P .

Grupo control: el teorema de Castigliano

Para contrastar los resultados de la investigación mediante el teorema de Castigliano, para la viga Biapoyada-rótula –apoyada (BA-R-A) con las cargas w y P actuando simultáneamente, se calculan las pendientes y el desplazamiento de la rótula C, la pendiente de los apoyos A, B y E. Para los giros y desplazamiento de C se aplican las cargas ficticias M' , M'' y Q como se indica en la figura 49.

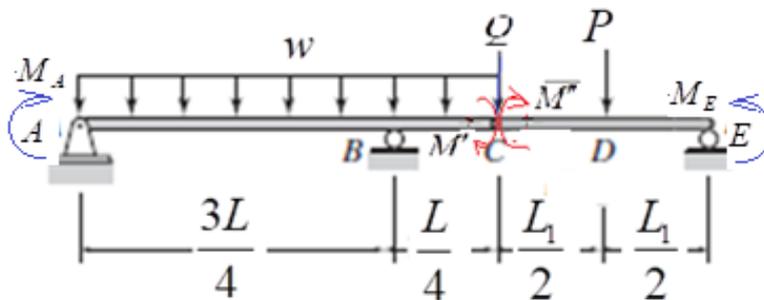


Figura 45 Viga de 2 miembros biapoyada-rótula-apoyado con cargas reales w , P , ficticia Q momentos ficticios M_A, M', M'' y M_E

Fuente: propia del autor.

Para determinar el giro θ_c^i del punto C del tramo AC de la viga se aplica un momento ficticio M' en sentido horario en C y se determinan V y M por equilibrio de fuerzas externas e internas:

Tramo CB

$$V = \frac{P}{2} + wx \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = 0$$

$$M = -\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M' \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = -1$$

Tramo AB

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} - \frac{4M'}{3L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M'} = \frac{-4}{3L}$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x - \frac{4M'}{3L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{-4x}{3L}$$

Después de derivar se hace $M' = 0$, luego se integra.

$$\theta_c^i = \frac{\partial U}{\partial M'} = \int_A^C \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M'} dx + \int_A^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M'} dx$$

$$\theta_c^i = \int_0^{L/4} \frac{\left(\frac{-Px}{2} - \frac{w}{2}x^2\right)(-1)}{EI} (dx) + \int_0^{L/4} \frac{\left(\frac{P}{2} + wx\right)(0)}{\kappa GA} dx + \dots$$

$$\dots + \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x\right)\left(\frac{-4x}{3L}\right)}{EI} dx + \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6}\right)\left(\frac{-4}{3L}\right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_c^i = \frac{PL^2}{64EI} + \frac{wL^3}{384EI} - \frac{wL^3}{16EI} + \frac{27wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} - \frac{wL}{3\kappa GA} + \frac{3wL}{8\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA}$$

$$\theta_c^i = -\frac{11wL^3}{1536EI} + \frac{3PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (6-32)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-40)

Para pendiente θ_c^d del punto C se aplica un momento ficticio M'' en C del tramo CE en sentido horario y se determina su efecto en los apoyos:

$$\sum M_B^d = 0 \rightarrow M'' + P\left(\frac{L_1}{2}\right) - E(L_1) = 0 \dots \rightarrow \dots E = \frac{M''}{L_1} + \frac{P}{2}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow wL\left(\frac{L}{2}\right) - B\left(\frac{3L}{4}\right) + M'' + P\left(L + \frac{L_1}{2}\right) - E(L + L_1) = 0$$

$$\therefore \rightarrow \dots B = \frac{2wL}{3} + \frac{2P}{3} + \frac{4M''}{3L_1}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - wL + B - P + E = 0 \rightarrow A = \frac{wL}{3} - \frac{P}{6} + \frac{4M''}{3L_1}$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas, se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en todos los tramos, siendo respectivamente:

Tramo ED:

$$V = -\frac{P}{2} - \frac{M''}{L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L_1}$$

$$M = \frac{P}{2}x + \frac{M''}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L_1}$$

Tramo.CD:

$$V = \frac{P}{2} - \frac{M''}{L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = -\frac{1}{L_1}$$

$$M = \frac{P}{2}x + M'' - \frac{M''}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = 1 - \frac{x}{L_1}$$

Tramo CB:

$$V = \frac{P}{2} + wx - \frac{M''}{L_1} \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = \frac{-1}{L_1}$$

$$M = -\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2 + \frac{M''}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{L_1}$$

Tramo AB:

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} + \frac{M''}{3L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M''} = \frac{1}{3L_1}$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x + \frac{M''}{3L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M''} = \frac{x}{3L_1}$$

Después de derivar se hace $M'' = 0$, luego se integra.

$$\theta_C^d = \frac{\partial U}{\partial M''} = \int_E^A \left(M \frac{\partial M}{\partial M''} \right) \frac{1}{EI} dx + \int_E^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M''} dx$$

$$\theta_C^d = \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x \right) \left(\frac{x}{L_1} \right)}{EI} (dx) + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(-\frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x \right) \left(1 - \frac{x}{L_1} \right)}{EI} (dx)$$

$$\dots + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \right) \left(-\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L_1/4} \frac{\left(-\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) \left(\frac{x}{L_1} \right)}{EI} dx + \int_0^{L_1/4} \frac{\left(\frac{P}{2} + wx \right) \left(-\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + ..$$

$$\dots + \int_0^{3L_1/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x \right) \left(\frac{x}{3L_1} \right)}{EI} dx + \int_0^{3L_1/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} \right) \left(\frac{1}{3L_1} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_C^d = \frac{PL_1^2}{48EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{PL_1^2}{48EI} - \frac{P}{4\kappa GA} - \frac{PL_1^3}{384EIL_1} -$$

$$\begin{aligned}
& \dots \frac{wL^4}{2048EIL_1} - \frac{PL}{8\kappa GAL_1} - \frac{wL^2}{32\kappa GAL_1} + \frac{wL^4}{64EIL_1} - \frac{27wL^4}{2048EIL_1} - \\
& \dots \frac{PL^3}{128EIL_1} + \frac{wL^2}{12\kappa GAL_1} - \frac{3wL^2}{32\kappa GAL_1} - \frac{PL}{24\kappa GAL_1} \\
\theta_C^d &= \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{PL^3}{96EIL_1} + \frac{wL^4}{512EIL_1} - \frac{PL}{6\kappa GAL_1} - \frac{wL^2}{24\kappa GAL_1} \\
\theta_C^d &= \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{1}{L_1} \left[\frac{PL^3}{96EI} - \frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL}{6\kappa GA} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} \right]
\end{aligned} \tag{6-33}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-42)

Cálculo de desplazamiento en C:

En dirección del desplazamiento del punto C se aplica una carga ficticia puntual Q y se determina su efecto en los apoyos:

$$\begin{aligned}
\sum M_C^d &= 0 \dots \rightarrow \dots Q(0) + P\left(\frac{L_1}{2}\right) - E(L_1) = 0 \dots \rightarrow \dots E = \frac{P}{2} \\
\sum M_A &= 0 \rightarrow Q(L) + wL\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{P}{2}(L) - B\left(\frac{3L}{4}\right) = 0 \rightarrow B = \frac{4Q}{3} + \frac{2wL}{3} + \frac{2P}{3} \\
\sum F_y &= 0, \dots, \rightarrow \dots, A - wL + B - Q - \frac{P}{2} = 0 \rightarrow A = \frac{wL}{3} - \frac{P}{6} - \frac{Q}{3}
\end{aligned}$$

Se ve que E es independiente de Q, luego el tramo CE no influye en el desplazamiento de C. Por equilibrio de fuerzas externas e internas en el tramo CA se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x :

Tramo CB:

$$\begin{aligned}
V &= wx + \frac{P}{2} + Q \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = 1 \\
M &= -\frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{2}x - Qx \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = -x
\end{aligned}$$

Tramo AB:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} - \frac{Q}{3} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial Q} = -\frac{1}{3} \\
M &= \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x - \frac{Q}{3}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial Q} = -\frac{x}{3}
\end{aligned}$$

Después de derivar, en M y V se hace $Q=0$, luego se integra.

$$\begin{aligned}
\delta_c &= \int_0^{L/4} \frac{\left(\frac{-w}{2}x^2 - \frac{P}{2}x\right)(-x)}{EI} (dx) + \int_0^{L/4} \frac{\left(wx + \frac{P}{2}\right)(1)}{\kappa GA} dx + \\
&\dots \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x\right)\left(\frac{-x}{3}\right)}{EI} dx + \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)}{\kappa GA} dx \\
\delta_c &= \frac{wL^4}{2048EI} + \frac{PL^3}{384EI} + \frac{wL^2}{32\kappa GA} + \frac{PL}{8\kappa GA} - \frac{wL^4}{64EI} + \dots \\
&\dots \frac{27wL^4}{2048EI} + \frac{PL^3}{128EI} - \frac{wL^2}{12\kappa GA} + \frac{3wL^2}{32\kappa GA} + \frac{PL}{24\kappa GA} \\
\delta_c &= -\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \tag{6-35}
\end{aligned}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-38)

Para pendiente θ_A del punto A del tramo AC se aplica un momento ficticio M_A en A en sentido horario y se determina su efecto en los apoyos A y B.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + wL\left(\frac{L}{2}\right) - B\left(\frac{3L}{4}\right) + P\left(L + \frac{L_1}{2}\right) - E(L + L_1) = 0$$

$$\sum M_C^d = 0 \rightarrow P\left(\frac{L_1}{2}\right) - E(L_1) = 0 \rightarrow E = \frac{P}{2}$$

$$\dots \rightarrow \dots B = \frac{4M_A}{3L} + \frac{2wL}{3} + \frac{2P}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A - wL + B - P + E = 0 \dots \rightarrow \dots A = \frac{wL}{3} - \frac{P}{6} - \frac{4M_A}{3L}$$

Por equilibrio de fuerzas externas e internas se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x en el tramo AB, en el tramo CB su efecto es nulo.

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} - \frac{4M_A}{3L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_A} = -\frac{4}{3L}$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x + M_A - \frac{4M_A}{3L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_A} = 1 - \frac{4x}{3L}$$

Después de derivar se hace $M_A = 0$, luego se integra.

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_A^C \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} \right) dx + \int_A^C \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_A} dx$$

$$\theta_A = \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x \right) \left(1 - \frac{4x}{3L} \right)}{EI} dx + \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} \right) \left(\frac{-4}{3L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_A = \frac{3wL^3}{32} - \frac{9wL^3}{128} - \frac{3PL^2}{64} - \frac{wL^3}{16EI} + \frac{27wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} - \frac{wL}{3\kappa GA} + \frac{3wL}{8\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA}$$

$$\theta_A = \frac{7wL^3}{512EI} - \frac{PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (6-36)$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-37)

Para pendiente θ_B del apoyo B del tramo AC se aplica un momento ficticio M_B en B en sentido horario y se determina su efecto en los apoyos A y B

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_B - B \left(\frac{3L}{4} \right) = 0 \rightarrow B = \frac{4M_B}{3L} = -A$$

Las fuerzas internas M y V en función de la posición x en el tramo AB.

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} - \frac{4M_B}{3L} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_B} = -\frac{4}{3L}$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x + -\frac{4M_B}{3L}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_B} = -\frac{4x}{3L}$$

Después de derivar se hace $M_B = 0$, luego se integra.

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \int_A^B \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} \right) dx + \int_A^B \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_B} dx$$

$$\theta_B = \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x \right) \left(-\frac{4x}{3L} \right)}{EI} dx + \int_0^{3L/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} \right) \left(\frac{-4}{3L} \right)}{\kappa GA} dx$$

$$\theta_B = -\frac{wL^3}{16EI} + \frac{27wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} - \frac{wL}{3\kappa GA} + \frac{3wL}{8\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (6-37)$$

$$\theta_B = -\frac{5wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-39)

Para pendiente θ_E del punto E del tramo CE se aplica un momento ficticio M_E en E en sentido anti horario y se determina su efecto en los apoyos A y B.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \frac{M_E}{L_1}(L) - B\left(\frac{3L}{4}\right) = 0 \rightarrow B = \frac{4M_E}{3L_1} \rightarrow A = -\frac{M_E}{L_1}$$

Se determinan las fuerzas internas M y V en función de la posición x por tramos en toda la viga.

Tramo ED:

$$V = -\frac{P}{2} + \frac{M_E}{L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_E} = \frac{1}{L_1}$$

$$M = \frac{P}{2}x + M_E - \frac{M_E}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_E} = 1 - \frac{x}{L_1}$$

Tramo CD:

$$V = \frac{P}{2} + \frac{M_E}{L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_E} = \frac{1}{L_1}$$

$$M = \frac{P}{2}x + \frac{M_E}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_E} = \frac{x}{L_1}$$

Tramo CB:

$$V = \frac{P}{2} + wx + \frac{M_E}{L_1} \dots \frac{\partial V}{\partial M_E} = \frac{1}{L_1}$$

$$M = -\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{M_E}{L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_E} = -\frac{x}{L_1}$$

Tramo AB:

$$V = \frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} - \frac{M_E}{3L_1} \dots \rightarrow \dots \frac{\partial V}{\partial M_E} = -\frac{1}{3L_1}$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x - \frac{M_E}{3L_1}x \dots \rightarrow \dots \frac{\partial M}{\partial M_E} = -\frac{x}{3L_1}$$

Después de derivar se hace $M_E = 0$, luego se integra.

$$\begin{aligned}
\theta_E &= \frac{\partial U}{\partial M_E} = \int_E^A \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_E} \right) dx + \int_E^A \frac{V}{\kappa GA} \frac{\partial V}{\partial M_E} dx \\
\theta_E &= \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x \right) \left(1 - \frac{x}{L_1} \right)}{EI} (dx) + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(-\frac{P}{2} \right) \left(\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2}x \right) \left(\frac{x}{L_1} \right)}{EI} (dx) \\
&\dots + \int_0^{L_1/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \right) \left(\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + \int_0^{L_1/4} \frac{\left(-\frac{P}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) \left(-\frac{x}{L_1} \right)}{EI} dx + \int_0^{L_1/4} \frac{\left(\frac{P}{2} + wx \right) \left(\frac{1}{L_1} \right)}{\kappa GA} dx + \dots \\
&\dots + \int_0^{3L_1/4} \frac{\left(\frac{wL}{3}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{P}{6}x \right) \left(-\frac{x}{3L_1} \right)}{EI} dx + \int_0^{3L_1/4} \frac{\left(\frac{wL}{3} - wx - \frac{P}{6} \right) \left(-\frac{1}{3L_1} \right)}{\kappa GA} dx \\
\theta_E &= \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{PL_1^2}{48EI} - \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL_1^2}{48EI} + \frac{P}{4\kappa GA} + \frac{PL^3}{384EIL_1} + \frac{wL^4}{2048EIL_1} + \\
&\dots - \frac{PL}{8\kappa GAL_1} + \frac{wL^2}{32\kappa GAL_1} - \frac{wL^4}{64EIL_1} + \frac{27wL^4}{2048EIL_1} + \frac{PL^3}{128EIL_1} - \\
&\dots - \frac{wL^2}{12\kappa GAL_1} + \frac{3wL^2}{32\kappa GAL_1} + \frac{PL}{24\kappa GAL_1} \\
\theta_E &= \frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{PL^3}{96EIL_1} - \frac{wL^4}{512EIL_1} + \frac{PL}{6\kappa GAL_1} - \frac{wL^2}{48\kappa GAL_1} \\
\theta_E &= \frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{1}{L_1} \left[\frac{PL^3}{96EI} - \frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL}{6\kappa GA} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} \right]
\end{aligned}
\tag{6-41}$$

Esta ecuación es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante, (véase la ecuación 5-39)

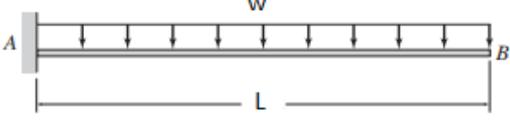
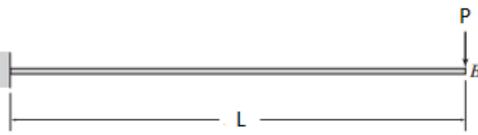
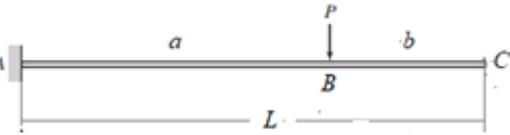
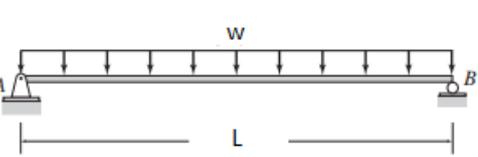
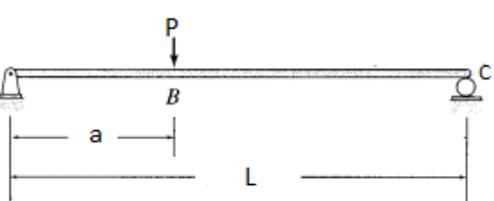
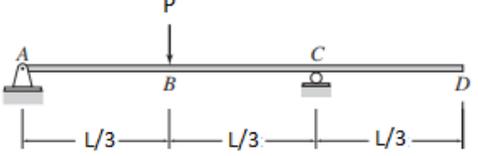
Habiéndose calculado las ecuaciones (5-i) aplicando los teoremas propuestos del método de áreas de momento y de fuerza cortante y siendo validadas mediante las ecuaciones (6-i) queda demostrada la validez de la hipótesis propuesto.

En base a los cálculos los desplazamientos y giros determinados de los diferentes tipos de vigas isostáticas de uno y dos miembros se ha preparado: la tabla 6.1 con vigas de un miembro y la tabla 6.2 con vigas de dos miembros las que se indican:

CUADRO DE CONTRASTACIÓN ANALÍTICA DE VIGAS

Desplazamientos y giros de vigas isostáticas de un miembro

(5-i) = método de áreas de momento y fuerza cortante; (6-j) = métodos de energía

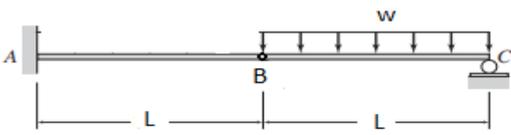
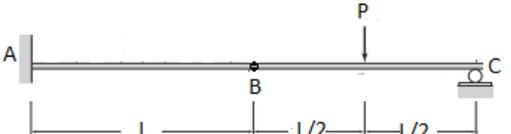
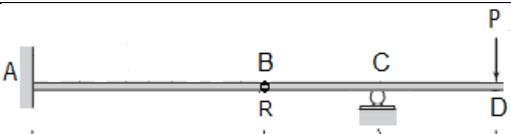
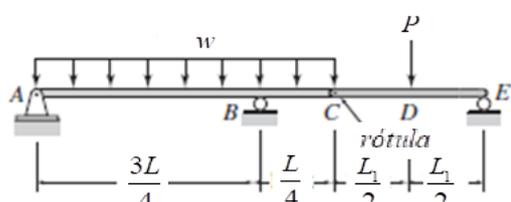
VIGA	GIROS Y DESPLAZAMIENTOS
	$\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} \quad (5-1)=(6-1)$ $\delta_{B\max} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (5-2)=(6-2)$
	$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} \quad (5-3)=(6-3)$ $\delta_{B\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} \quad (5-4)=(6-4)$
	$\theta_B = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (5-5)=(6-5)$ $\delta_B = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{\kappa GA} \quad (5-7)$ $\delta_{C\max} = \frac{Pa^2(2L+b)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA} \quad (5-8)=(6-6)$
	$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI} \quad (5-9)=(6-7)$ $\delta_{C\max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA} \quad (5-10)=(6-8)$
	$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad (5-11)=(6-9)$ $\theta_C = \frac{Pab}{6LEI}(L+a) \quad (5-12)$ $\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA} \quad (5-13)=(6-10)$
	$\theta_C = \frac{PL^2}{36EI} \quad (5-16)=(6-12)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{162EI} + \frac{PL}{6\kappa GA} \quad (5-17)$ $\delta_D = \frac{PL^3}{108EI} \quad (5-18)=(6-13)$

Fuente: Elaboración propia.

CUADRO DE CONTRASTACIÓN ANALÍTICA DE VIGAS

Desplazamientos y giros de vigas isostáticas de dos miembros

(5-i) = método de áreas de momento y fuerza cortante, (6-j)= métodos de energía

VIGA	DESPLAZAMIENTOS Y GIROS
	$\theta_B^i = -\frac{wL^3}{4EI} \quad (5-19)=(6-14)$ $\theta_B^d = \frac{wL^3}{8EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \quad (5-22)=(6-15)$ $\delta_B = \frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} \quad (5-20)=(6-16)$ $\theta_C = \frac{5wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2\kappa GA} \quad (5-21)=(6-19)$
	$\theta_B^i = -\frac{PL^2}{4EI} \quad (5-25)=(6-20)$ $\theta_B^d = \frac{5PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (5-28)=(6-21)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL}{2\kappa GA} \quad (5-26)=(6-22)$ $\theta_C = \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (5-27)=(6-25)$
	$\theta_B^i = -\frac{PL^2}{2EI} \quad (5-31)=(6-30)$ $\theta_B^d = \frac{5PL^2}{8EI} + \frac{3P}{\kappa GA} \quad (5-34)=(6-29)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} \quad (5-32)=(6-31)$ $\theta_C = \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{P}{2\kappa GA} \quad (5-33)=(6-28)$ $\theta_D = \frac{5PL^2}{12EI} + \frac{2P}{\kappa GA} \quad (5-35)=(6-27)$ $\delta_D = \frac{5PL^3}{12EI} + \frac{2PL}{\kappa GA} \quad (5-36)=(6-26)$
	$\theta_A = \frac{7wL^3}{512EI} - \frac{PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (5-37)=(6-36)$ $\theta_B = -\frac{5wL^3}{512EI} + \frac{PL^2}{32EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (5-39)=(6-37)$ $\theta_C^i = -\frac{11wL^3}{1536EI} + \frac{3PL^2}{64EI} + \frac{wL}{24\kappa GA} + \frac{P}{6\kappa GA} \quad (5-40)=(6-32)$ $\theta_C^d = \frac{PL_1^2}{16EI} - \frac{1}{L_1} \left[-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right] \quad (5-42)=(6-33)$ $\delta_C = -\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \quad (5-38)=(6-35)$ $\theta_E = \frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{1}{L_1} \left[-\frac{wL^4}{512EI} + \frac{PL^3}{96EI} + \frac{wL^2}{24\kappa GA} + \frac{PL}{6\kappa GA} \right] \quad (5-41)=(6-41)$

Fuente: Elaboración propia.

6.2 Contrastación de Los resultados con estudios similares

Existen trabajos de investigación y tesis de pre y posgrado aplicando las teorías de vigas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko de un tramo isostáticas e hiperestáticas con diferentes condiciones de borde y con cargas estáticas distribuidas y puntuales a fin de comparar la curva elástica y con cargas dinámicas para la determinación de las frecuencias de vibración utilizando como herramienta los métodos numéricos como el de: elementos de contorno (MEC o BEM), diferencias finitas (MDF) y elementos finitos (MEF o FEM). Por ser métodos discretos para su validación se utilizaron las ecuaciones analíticas (exactas) desarrolladas por Fleischfresser (**FLEISCHFRESSER, 2012**) en 2012 para vigas de Timoshenko isostáticas e hiperestáticas de un tramo. En esta tesis solo se consideran las vigas isostáticas contrastando las ecuaciones del método de áreas de momento y de fuerza cortante en puntos específicos con las ecuaciones analíticas (exactas) y luego con los resultados de los métodos numéricos.

a) Viga empotrada – libre (Z_1) con carga uniformemente distribuida.

❖ Resultados con el método de elementos de contorno (MEC)

- (**FLEISCHFRESSER, 2012**) en 2012, utiliza el método de elementos de Contorno (MEC ó BEM en inglés) para el estudio del desplazamiento de las vigas de Timoshenko. Para su contrastación hace el desarrollo analítico de las ecuaciones diferenciales de Euler-Bernoulli y de Timoshenko de vigas con cargas uniformemente distribuida w y puntual P para vigas de un tramo isostáticas e hiperestáticas.

Para la viga empotrada libre con carga uniformemente distribuida w , el desplazamiento v en función de la coordenada x es:

$$v(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{w}{2\kappa GA} (2Lx - x^2)$$

Para contrastar con el método de áreas de momento y de fuerza cortante en el extremo libre se tiene el desplazamiento máximo en $x = L$:

$$y_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$$

Esta ecuación es igual al obtenido con el método de áreas de momento y fuerza cortante.

Para los cálculos numéricos utiliza los siguientes valores: $w(x) = 100 \text{ kN/m}$, $L = 2 \text{ m}$, sección transversal rectangular constante, $A = 0.2 \times 0.6 = 0.12 \text{ m}^2$, $I = 0.0036 \text{ m}^4$, $\kappa = 5/6$, $\rho = 2.500 \text{ kg/m}^3$, $E = 50 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$, (p. 29).

Aplicando los métodos numéricos mediante MEC-64, obtuvo el siguiente gráfico 1:

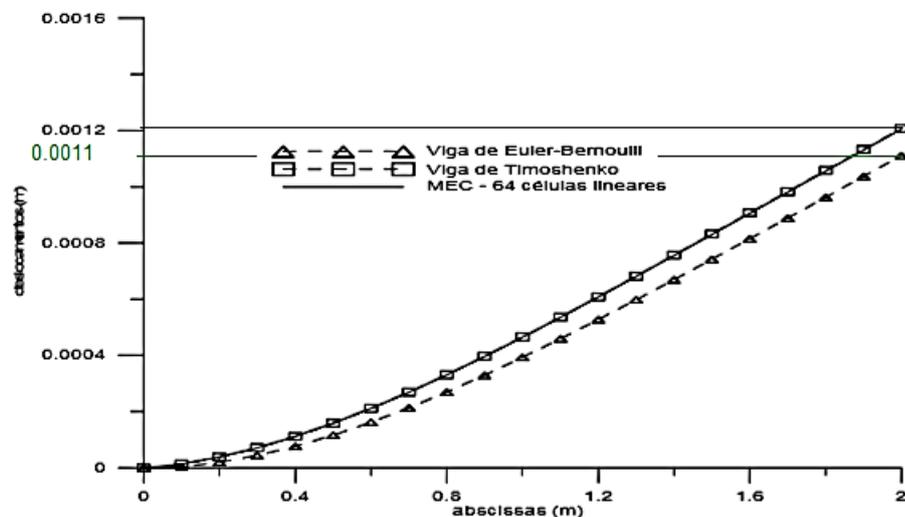


Gráfico 1 Desplazamiento de viga empotrada-libre con carga uniformemente distribuida
Fuente: Fleischfresser, S. A., 2012 (p. 50)

En la gráfica se observa que curva elástica de la viga de Timoshenko con la ecuación analítica (exacta) es prácticamente igual al de elementos de contorno (MEC)-64 células lineales, siendo el error relativo $\varepsilon = 0\%$ y estos valores son mayores al calculado con la teoría de Euler - Bernoulli.

Los datos numéricos introducidos en la ecuación del método de áreas de momento y fuerza cortante dan los siguientes valores:

$$y_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} = \frac{100 \times 10^3 (2)^4}{8(50 \times 10^9)(0.0036)} + \frac{100 \times 10^3 (2)^2}{2(5/6)(2.0833 \times 10^{10})(0.12)}$$

$$\delta_B = \frac{1}{900} + \frac{2}{20833} = 1.11 \times 10^{-3} + 9,60015 \times 10^{-5} = 1.2071 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Donde el primer componente del 2^{do} miembro depende del momento flector (Euler-Bernoulli) y el 2^{do} componente de la fuerza cortante. Luego el error relativo entre las teorías de Timoshenko y Euler- Bernoulli es:

$$Error.\% = \pm 100x \frac{(1.11x10^{-3} - 1.207x10^{-3})}{1.11x10^{-3}} = 8.64\%$$

Los resultados son iguales al de gráfico 1. Es otra demostración de la validez de la hipótesis formulada en esta investigación.

- **(CARRER, y otros, 2014)** utiliza el método de elementos de contorno (BEM en inglés) para calcular el desplazamiento de vigas: Biapoyadas, empotrada-empotrada, empotrada-apoyada y emporada-libre; con los datos numéricos y las ecuaciones analíticas desarrolladas por Fleischfresser para vigas con carga uniformemente distribuida para su contrastación.

Para la viga empotrada-libre de 2 m de longitud, los resultados de desplazamiento a lo largo de la viga calculados por el método de elementos de contorno o frontera (BEM) en base a las teorías analíticas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko en forma independiente y contrastada con las ecuaciones analíticas desarrolladas por Fleischfresser son:

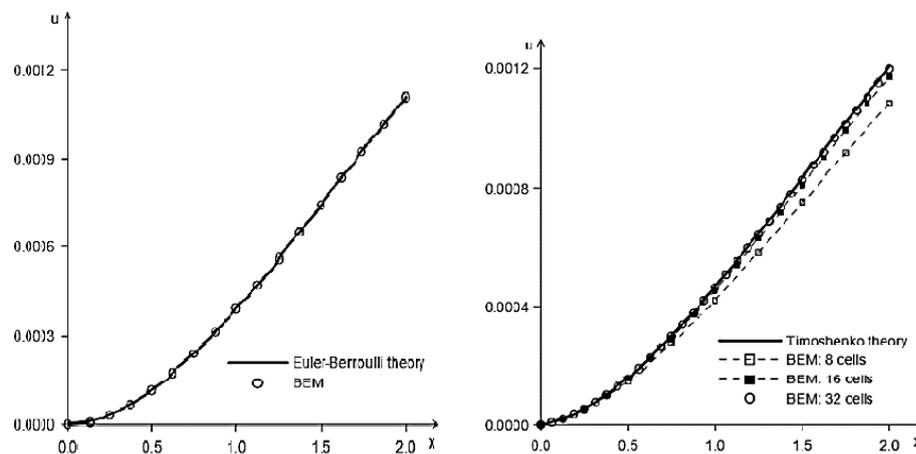


Gráfico 2 Desplazamiento de viga empotrada-libre con las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko
Fuente: Carrer et al 2014

En la gráfica derecha se observa que mediante el BEM de 32 celdas se llega al resultado de acuerdo a la ecuación analítica de Fleischfresser y en el

extremo libre es igual al obtenido por el método de áreas de momento y de fuerza cortante basado en la teoría de Timoshenko.

❖ Resultados con el método de elementos finitos (MEF)

- (De CAMPOS, 2015) utilizó el método de elementos finitos (MEF)

Para cálculo de la viga empotrada con carga uniformemente distribuida mediante el MEF, De Campos utilizó datos numéricos y las fórmulas analíticas de Fleischfresser (2012) para validar los resultados. Las fórmulas analíticas son:

$$u(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 + 2Lx)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q}{6} x^3 - \frac{qL}{2} x^2 + \frac{qL^2}{2} x \right)$$

Para el cálculo por elementos finitos utilizó una malla de 50 elementos. Los resultados de estos cálculos se presentan como gráficos de desplazamientos 3 y giros 4.

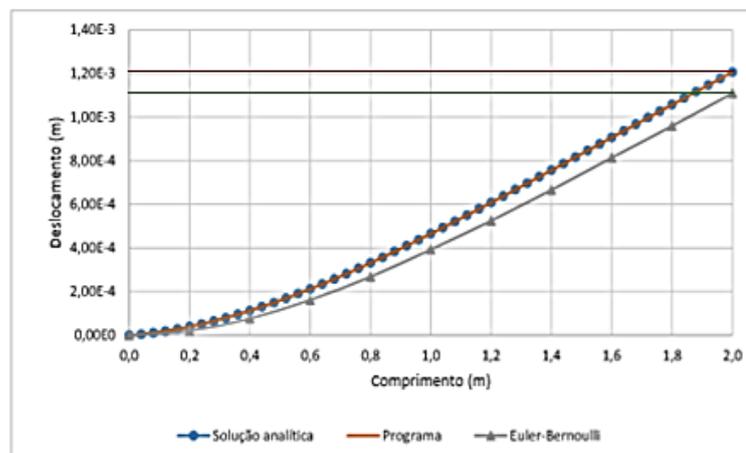


Gráfico 3 Desplazamiento de viga empotrada-libre L/h=3.33
Fuente: De Campos, João Vítor, 2015

En el gráfico 2 se ve que los valores de la solución analítica de Timoshenko y el programa de elementos finitos dan iguales y el de Euler-Bernoulli es menor. Para $x = L = 2m$, el desplazamiento del extremo libre indicada en el gráfico1 según la solución analítica y el programa MEF (Timoshenko) son iguales y coincide con el cálculo del método de áreas de

momento y fuerza cortante $y_{T_{\max}} = 1.2071 \times 10^{-3} m$ y también según la teoría de Euler-Bernoulli es: $y_{EB_{\max}} = 1.11 \times 10^{-3} m$ (véase el punto: resultados...MEC)
 Los resultados de la pendiente se indican en el gráfico 3.

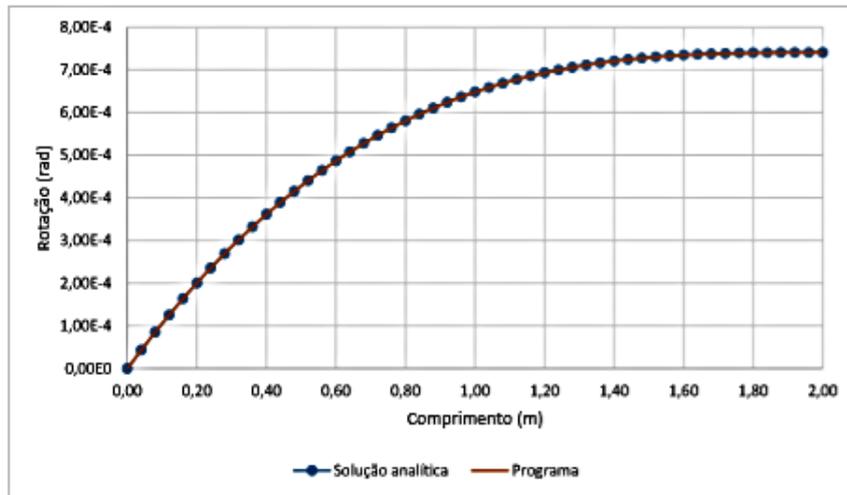


Gráfico 4 Pendiente de viga empotrada-libre con carga uniformemente distribuida
 Fuente: De Campos, João Víctor, 2015

Para la pendiente en $x = L = 2m$ se determina con la ecuación del método de áreas de momento y fuerza cortante:

$$\theta(x)_{\max} = \frac{wL^3}{6EI} = \frac{100 \times 10^3 (2)^3}{6(50 \times 10^9)(0.0036)} = \frac{1}{1350} = 7.40741 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

El resultado es igual al del gráfico 3, luego se verifica la validez del método de áreas de momento y fuerza cortante.

❖ Resultados con el método de diferencias finitas (MDF)

-Vicelli Martins de Mello (**VICELLI Martins de Mello, 2014**) en 2014 hace el análisis dinámico de vigas de Bernoulli-Euler y de Timoshenko mediante el método de diferencias finitas, para el cálculo de 4 tipos de vigas: biapoyada, biempotrada, empotrada-apoyada y empotrada libre, con carga uniformemente distribuida $w = 10 kN/m$ mediante la teoría de Timoshenko. La longitud para las 3 primeras vigas fue de $L = 4m$ y $L = 2m$ para el último. Las características del material: $E = 210 GPa$, $G = 77 GPa$, $G = 77 GPa$ y $\rho = 7800 kg/m^3$; la sección transversal rectangular de 4 tipos: $b = 0.20m$ y $h = 0.30m, 0.45m, 0.60m$ y $0.75m$ para

todas las vigas. Para su contrastación se utilizó las fórmulas analíticas de Euler-Bernoulli y para la biapoyada las de Timoshenko.

Los resultados numéricos de desplazamientos por el método de diferencias finitas (MDF) estático, dinámico (numérico) para las 4 secciones analizadas (extraído de la tabla 10 del autor) de las vigas empotrada – libre está en la tabla1

TABLA 1 Desplazamientos estático y dinámico (numérico) de la viga de Timoshenko empotrada- libre mediante MDF

Sección (m ²)	Estático (10 ⁻³ mm)	Numérico (10 ⁻³ mm)	Numérico / (Estático)
0.2x0.3=0.06	212.94	432.36	2.03
0.2x0.45=0.09	63.57	133.80	2.10
0.2x0.6=0.12	27.10	59.14	2.18
0.2x0.75=0.15	14.06	31.97	2.27

Fuente: De Campos 2014

Para realizar la comparación del método MDF con el método de áreas de momento y de fuerza cortante para las 4 áreas se realizan los cálculos de desplazamientos estáticos (δ_T) con las ecuaciones que se indican:

$$\delta_T = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA} = \frac{10 \times 10^3 (2)^4}{8(210 \times 10^9)I} + \frac{10 \times 10^3 (2)^2}{2(5/6)(77 \times 10^9)A} = \frac{1}{10.5 \times 10^6 I} + \frac{3}{9625000A}$$

Con los desplazamientos estáticos (δ_N) determinados mediante MDF se determinan el error relativo (ε_r) entre ambos métodos para diferentes relaciones L/h con la ecuación:

$$\varepsilon_r \% = \pm 100x \frac{(\delta_T - \delta_N)}{\delta_T}$$

Los resultados se indican en la tabla 2

TABLA 2 Desplazamientos estáticos y error relativo de la viga de Timoshenko empotrada- libre con el método de áreas de momento y de fuerza cortante para diferentes L/h

Sección (m ²)	M.Inercia (m ⁴)	L/h	Desplazamiento (10 ⁻⁵ m)	Error relativo (%)
0.06	0.00045000	6.6667	21.684	1.798
0.09	0.00151875	4.4444	6.617	3.929
0.12	0.00360000	3.3333	2.905	6.713
0.15	0.00703125	2.6667	1.562	9.987

Fuente: propia del autor

De los resultados de la tabla 2 se deduce que los cálculos por MDF debe ser mejorado porque el error relativo entre ambos métodos debe tender a cero y

debido a que las ecuaciones del método de áreas de momento y de fuerza cortante son iguales a las ecuaciones analíticas exactas de la viga de Timoshenko por tener un origen común.

b) Viga empotrada-libre (Z_1) con carga puntual P a la distancia a :

❖ Resultados con el método de elementos de contorno (MEC)

- (FLEISCHFRESSER, 2012) por integración directa de las ecuaciones diferenciales de la viga de Timoshenko determina el desplazamiento en función de la coordenada x de la carga P a distancia a para los dos tramos, para la viga en voladizo cuyos resultados son (p. 53):

$$\text{Para } x \leq a \quad y_1(x) = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3ax^2) + \frac{P}{\kappa GA}x$$

$$\text{Para } x \geq a \quad y_2(x) = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

Para los puntos $x = a$, $x = L$ ubicados en B y C respectivamente se tiene:

$$\text{En } x = a \quad \delta_B = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

$$\text{En } x = L \quad \delta_{C \max} = \frac{Pa^2(2L + b)}{6EI} + \frac{PL}{\kappa GA}$$

Estas son iguales a las fórmulas (5-7) y (5-8) obtenidas en la sección 5.2 por el método de áreas de momento y fuerza cortante para validar la hipótesis de esta tesis.

Para el cálculo numérico mediante MEC considero la carga puntual $P = 1000$ kN en $a = L/2 = 1m$ y los demás valores indicados en el problema anterior de viga empotrada-libre.

Aplicando esos datos en las ecuaciones del método de áreas de momento y carga cortante para el extremo libre:

$$\delta_c = \frac{Pa^2(2L + b)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA} = \frac{1000 \times 10^3 (1)^2 (2(2) + 1)}{6(50 \times 10^9)(0.0036)} + \frac{1000 \times 10^3 (1)}{(5/6)(125 \times 10^9 / 6)(0.12)}$$

$$\delta_c = \frac{1}{216} + \frac{3}{6250} = 4.62963 \times 10^{-3} + 4.8 \times 10^{-4} = 5.10963 \times 10^{-3} m$$

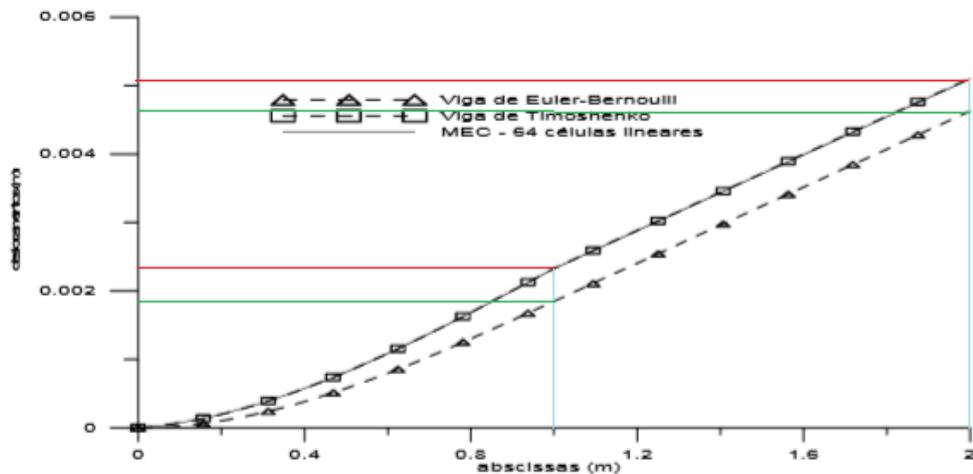


Gráfico 5 Desplazamiento de viga empotrada-libre con carga puntual P en el medio.
Fuente: Fleischfresser, S. A., 2012 (p. 53)

Comparando con el gráfico que se muestra se observa que los resultados según MEC en el gráfico 4 y del método de áreas de momento y fuerza cortante son iguales, verificando la validez de los teoremas del método de áreas de momento y de fuerza cortante.

➤ Resultados con elementos finitos

- (De CAMPOS, 2015) desarrolla el ejemplo de viga de Timoshenko en voladizo con carga puntual $P = 10 \text{ kN}$ en su extremo libre y longitud $L = 4 \text{ m}$ mediante el método de elementos finitos (FEM) con diferentes mallas compuesta de 1, 4, 10, 20, 40 y 100 elementos y comparó con las soluciones analíticas exactas para desplazamiento y giro deducidas por Castro (2002) que son:

$$y(x) = \frac{40}{2EI}x^2 - \frac{5}{3EI}x^3 + \frac{10}{GA_c}x$$

$$\theta(x) = \frac{5}{EI}x^2 - \frac{40}{EI}x$$

Para contrastar con el método de áreas de momento y fuerza cortante se hace para $x = L = 4 \text{ m}$ y $P = 10 \text{ kN}$

$$y_{\max} = \frac{40(4)^2}{2EI} - \frac{5(4)^3}{3EI} + \frac{10(4)}{2GA_c} = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{GA_c} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_c}$$

$$\theta_{\max} = \frac{5(4)^2}{EI} - \frac{40(4)}{EI} = -\frac{80}{EI} = \frac{PL^2}{2EI}$$

Luego ambos resultados son idénticos y la hipótesis de la investigación validada.

Para los cálculos numéricos utilizó siguientes datos geométricos y de material: $L = 4.00 \text{ m}$, $A = b \times h = 0.3 \times 0.8 = 0.24 \text{ m}^2$, $f_s = 5/6$, $L/h = 5$, $I = 0.0128 \text{ m}^4$, $E = 1$, $\nu = 0.25$, $G = 2/5$.

Los resultados de desplazamientos y pendientes a lo largo de la viga para la solución analítica y por elementos finitos para mallas de 1 a 100 elementos se muestran en los gráficos 6 y 7.

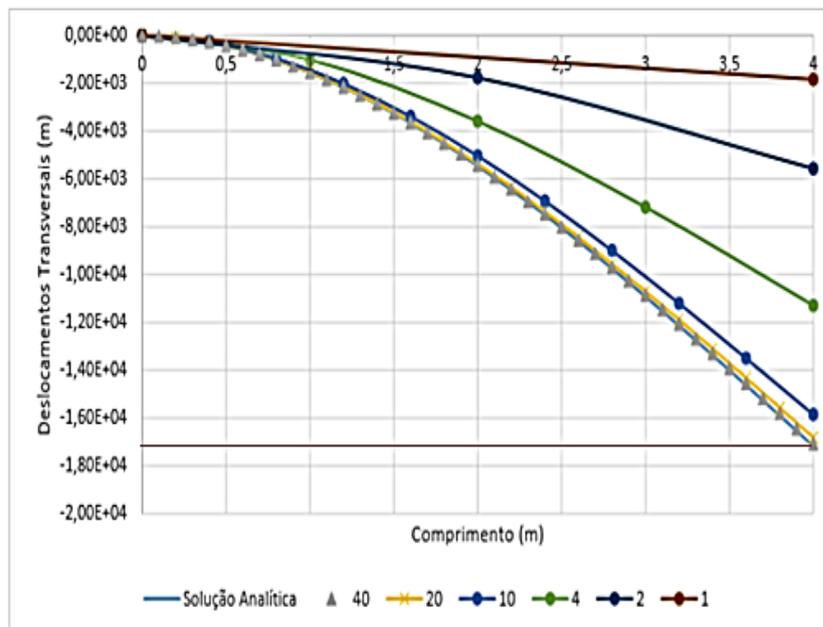


Gráfico 6 Desplazamientos de la viga empotrada-libre con carga P.
Fuente: De Campos, João Víctor, 2015

Se utilizó la fórmula del método de áreas de momento y fuerza cortante para el cálculo numérico y contrastar con el resultado de la gráfica:

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{10(4)^3}{3(1)(8/625)} + \frac{10(4)}{(5/6)(2/5)(0.24)} = 1.717 \times 10^4 \text{ m}$$

Se observa que ambos resultados son iguales.

Para los giros:

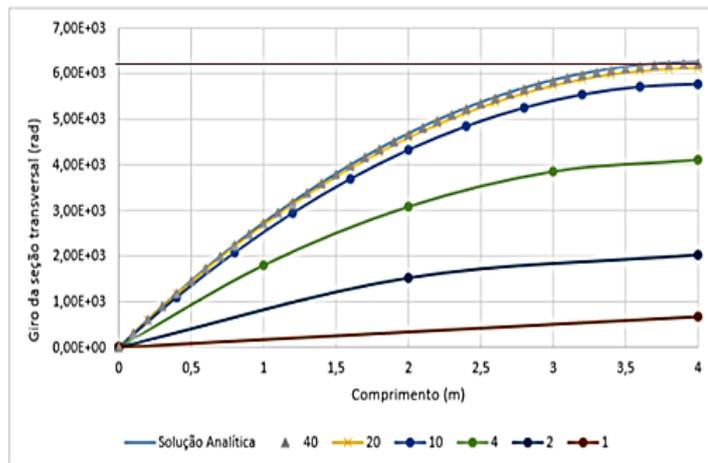


Gráfico 7 Giros para la viga empotrada-libre con carga P.
Fuente: De Campos, João Víctor, 2015

Según la fórmula de giro del extremo libre por el método de Áreas de momento y fuerza cortante:

$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{10(4)^2}{2(1)(8/625)} = 6250 = 6.25 \times 10^3 \text{ rad}$$

Aplicando elementos finitos, se ve que a medida que crece el número de elementos a considerar la exactitud del cálculo aumenta, siendo igual al valor analítico cuando $n = 100$ y coincide con los resultados del método de áreas de momento y fuerza cortante, luego la hipótesis del trabajo de investigación es correcta.

Asimismo De Campos realizó cálculos numéricos de desplazamientos mediante MEF para diferentes alturas (h) de sección transversal y comparó con la ecuación exacta de Euler - Bernoulli graficando, para $h = 2\text{m}, 1\text{m}, 0.5\text{m}, 0.25\text{m}, 0.10\text{m}$ y 0.04m ó $L/h = 2, 4, 8, 16, 40$ y 100 , utilizando la malla de 100 elementos. En las gráficas se observan que los desplazamientos son mayores y en disminución con la teoría de Timoshenko respecto al de Euler - Bernoulli para $L/h = 2, 4, 8$ e iguales para $L/h = 16$ e inferiores y en aumento para $L/h = 40$ y 100 lo que es un error debido al efecto de bloqueo por cortante (shear locking) (véase el gráfico 8) lo que constituye una desventaja del MEF.

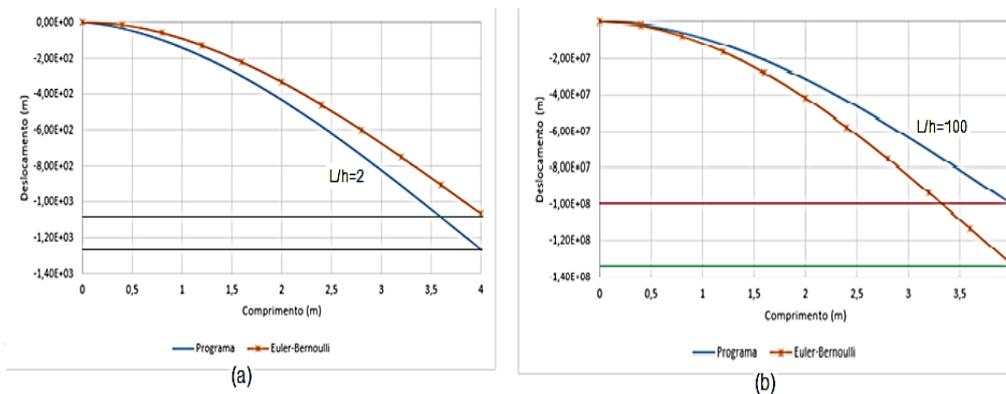


Gráfico 8 Desplazamiento de las vigas empotrada-libre con $L/h=2$ y $L/h = 100$ y carga P .
Fuente: De Campos, João Víctor, 2015

Para $L/h = 100$ el programa de MEF arrojó un desplazamiento en el extremo libre de $1.00 \times 10^8 \text{m}$ (véase el gráfico 8b) menor al 16.67% debido al bloqueo por cortante respecto a la teoría de Euler – Bernoulli, lo que constituye un error del programa.

Aplicando el método de áreas de momento y fuerza cortante para $L/h = 100$, es decir $A = 0,3 \times 0,04 = 0,012 \text{ m}^2$ e $I = 1,6 \times 10^{-6}$ y todos los demás valores iguales, se tiene:

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{10(4)^3}{3(1)(1,6 \times 10^{-6})} + \frac{10(4)}{(5/6)(2/5)(0,012)} = 1,33 \times 10^8 \text{ m}$$

Este resultado es igual al del gráfico 8 (b), la que representa una ventaja para el método de áreas de momento y fuerza cortante.

❖ Resultados mediante diferencias finitas

-. **(PAIVA Gomes de Souza, y otros, 2018)** Utiliza el método de las Diferencias Finitas de 55 nudos para el análisis comparativo de las Teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko para el cálculo de vigas ($L/h = 1$ y 5) empotrada-libre con carga $P=100\text{kN}$ en el extremo libre y longitudes de 1 y 5 m. Los valores geométricos y material son: $h = 10b = 100 \text{ cm}$, $A = 1/12 \text{ m}^2$, $I = 1/120 \text{ m}^4$, $E = 2,05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ (acero isotrópico), $\nu = 0,3$. Los resultados obtenidos que se reproducen para la viga de longitud corta: $L = 1$ y $L/h = 1$

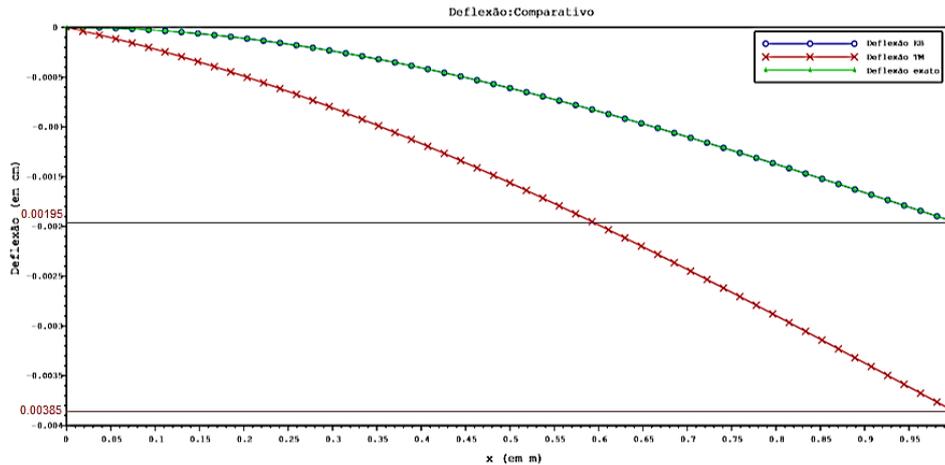


Gráfico 9 Comparativo entre las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko para vigas empotrado-libre con carga P, L = 1m, L/h = 1 y n = 55.

Fuente: Paiva Gomes de Souza, C. y Guimarães Cruz, G., 2017, p.10

En la tabla 4 (p 10) de la investigación se indican:

Desplazamientos: EB-Analítico = EB-MDF = 0.00195, TM-MDF = 0.00385 cm, error relativo EB (%) = 0.00, error relativo MT = 97.44

Para contrastar con el método de áreas de momento y fuerza cortante cuya fórmula para la viga indicada se tiene:

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{100(1)^3}{3(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(1)}{(5/6)(2.05 \times 10^8 / 2.6)(1/12)}$$

$$\delta_{B_{\max}} = \frac{1}{51250} + 1.826341463 \times 10^{-5} = 3.778 \times 10^{-5} m = 0.00378 cm$$

$$Error_{relativa T} = \frac{0.00195 - 0.00378}{0.00195} \times 100 = 93.85\%$$

Se observa que el desplazamiento según la teoría de Bernoulli – Euler mediante el cálculo exacto, métodos de diferencias finitas (n = 55) y Áreas de momento y fuerza cortante son iguales. Las diferencias están en la teoría de Timoshenko entre los métodos de diferencias finitas (n = 55) y Áreas de momento y fuerza cortante donde el error relativo respecto al de Euler-Bernoulli es: con el primero del 97.44% y con el segundo del 93.85%, es decir que es más exacto el método de áreas de momento y de fuerza cortante.

Esto indica que el desplazamiento lateral debido a la carga cortante es del orden del 50% del total en vigas cortas (L/h = 1) por lo que no se puede despreciar.

Para la viga de longitud larga: $L = 5 \text{ m}$, $L/h = 5$, (véase el gráfico 9)

En el gráfico 9 se superponen las 3 curvas de desplazamiento

En la tabla 4 (p 11) de la investigación se indican:

Desplazamientos: EB-Analítico = EB-MDF = 0.2439 cm, TM-MDF = 0.25346 cm, error relativo EB (%) = 0.00, error relativo MT = 3.92

Para contrastar con la fórmula del método áreas de momento y fuerza cortante, el desplazamiento del extremo libre es:

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{100(5)^3}{3(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(5)}{(5/6)(2.05 \times 10^8 / 2.6)(0.1)}$$

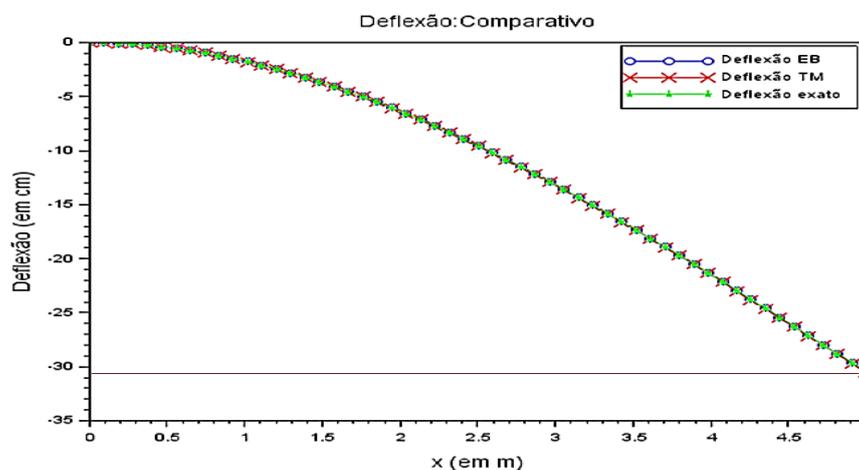


Gráfico 10 Comparativo entre las teorías Euler-Bernoulli y Timoshenko para viga empotrada-libre con carga P , $L = 5 \text{ m}$, $L/h = 5$ y $n = 55$.

Fuente: Paiva Gomes de Souza, C. y Guimarães Cruz, G., 2017, p.11

$$\delta_{\max} = \frac{1}{410} + \frac{39}{512500} = 2.439 \times 10^{-3} + 7.6098 \times 10^{-5} = 2.515 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.2515 \text{ cm}$$

$$Error.relativaT = \frac{0.2439 - 0.2515}{0.2439} \times 100 = 3.11\%$$

Esto indica que el método de áreas de momento y de fuerza cortante también basado en la teoría de Timoshenko es más exacto. También se concluye que el aporte de la fuerza cortante al desplazamiento de vigas es menor al 4% para una relación de $L/h = 5$.

- (NAVARRO Gregori, 2009) analizó por elementos finitos vigas de hormigón considerando el efecto de cortante. Para la validación numérica utilizó las ecuaciones exactas de las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko en

vigas rectangulares empotrado-libre con carga puntual en el extremo libre y biapoyadas de sección rectangular y de doble T con carga puntual centrada. Para la viga ménsula rectangular con carga puntual en el extremo libre de material elástico y lineal, con los datos: $B = 1 \text{ m}$, $H = 1 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$, $I = 1/12 \text{ m}^4$, $\kappa = 5/6$, $E = 100000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $G = 38462 \text{ MPa}$, $P = 100 \text{ kN}$ ($P = 10 \text{ kN}$) y determinó los desplazamientos máximos del extremo libre con las fórmulas teóricas exactas según las teorías de Euler – Bernoulli y de Timoshenko respectivamente:

$$W_{\max,EBT} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{100 \times 10^3 (5)^3}{3(100000 \times 10^6)(1/12)} = \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.005 \text{ m}$$

$$W_{\max,TBT} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{100 \times 10^3 (5)^3}{3(100000 \times 10^6)(1/12)} + \frac{100 \times 10^3 (5)}{(5/6)38462 \times 10^6 (1)} = 5.156 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Estas fórmulas son iguales al determinado de áreas de momento y fuerza cortante.

Posteriormente considerando la viga como un solo elemento con sección transversal dividido en 200 capas, tomando dos puntos de integración y utilizando funciones de interpolación parabólica y cúbica determinó las flechas máximas y el error relativo en el extremo del voladizo. (Véase la tabla 6.1 del Anexo A.1).

Se observa que los desplazamientos obtenidos son iguales a los valores exactos y los errores relativos muy menores al 0.5% dependiendo del polinomio utilizado.

c) Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.

❖ Resultados mediante el método de elementos de contorno (MEC)

-. **(FLEISCHFRESSER, 2012)** por integración directa de las ecuaciones diferenciales de la viga de Timoshenko determina el desplazamiento en función de la coordenada x de la carga distribuida, de la viga biapoyada.

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 + Lx)$$

La primera parte del 2^{do} miembro corresponde a la contribución de la teoría clásica de Euler – Bernoulli y la 2^{da} parte a la contribución de la fuerza cortante.

Para contrastar con los resultados analíticos anteriores, en el centro de la viga para $x = L/2$ se tiene el desplazamiento máximo

$$v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{qL^2}{8\kappa GA}$$

Este resultado es igual al obtenido por el método de áreas de momento y fuerza cortante.

Para el cálculo numérico utilizó los siguientes datos: $q = 100$ kN/m, $L = 4$ m, el material y la geometría de la sección transversal son los mismos al utilizado en vigas empotrada-libre.

Según la fórmula obtenida con el método de áreas de momento y fuerza cortante.

$$\delta_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA} = \frac{5(100)(4)^4}{384(50 \times 10^6)(9/2500)} + \frac{100(4)^2}{8(5/6)(125/6)(0.12)}$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{540} + \frac{3}{31250} = 1,85185 \times 10^{-3} + 9.6 \times 10^{-5} = 1.947851852 \times 10^{-3} m$$

Error relativo B-E (%) = Error relativo MA = 0.00%

Error relativo MT (%) = 5.184

Según el gráfico del cálculo por Método de elementos de contorno (MEC) con $n = 64$ células lineales:

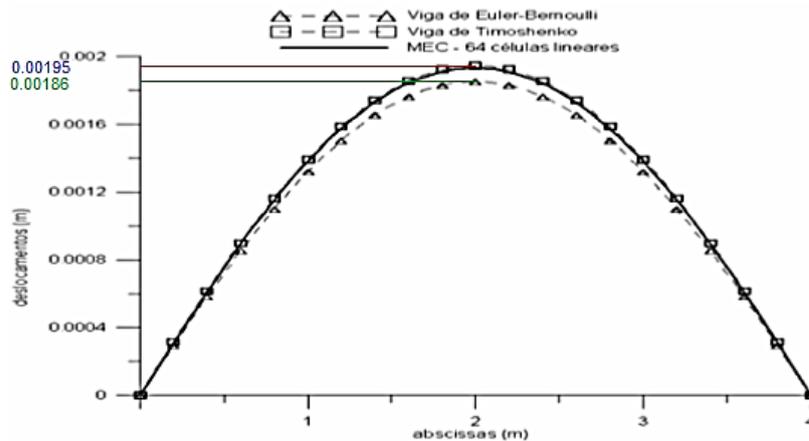


Gráfico 11 Desplazamiento de puntos de la viga biapoyada con carga uniformemente distribuida w .

Fuente: Fleischfresser, S. A., 2012 (p. 32)

Desplazamiento Bernoulli – Euler: $\delta_{\max} = 1.8667 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.8667 \text{ mm}$

Desplazamiento T. Timoshenko: $\delta_{\max} = 1.9556 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.9556 \text{ mm}$

Error relativo B-E (%) = Error relativo MA = 0.00%

Error relativo MT (%) = 4.76

El error relativo MT entre el calculado y de la gráfica es únicamente por medición de escala, siendo en realidad nulo porque ambos provienen de la misma fórmula.

d) Viga simplemente apoyada con carga puntual P .

❖ Resultados por el método de elementos de contorno (MEC)

- (FLEISCHFRESSER, 2012) para la viga de Timoshenko con bordes simplemente apoyada y carga puntual P a una distancia a , a partir de las ecuaciones diferenciales indicadas

$$EI\psi'' = -Q$$

$$Q = \kappa GA(v' - \psi)$$

Obtuvo las ecuaciones del desplazamiento v en función de la coordenada x en los dos tramos:

Para $x \leq a$

$$v_1(x) = \frac{P}{6EIL} \left[-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x \right] + \frac{P(L-a)}{\kappa GAL} x$$

Para $x \geq a$

$$v_2(x) = \frac{Pa}{6EI} [x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2] + \frac{Pa(L-x)}{\kappa GA}$$

Para contrastar con el método de áreas de momento y fuerza cortante se hace $x = a$ en ambas fórmulas, luego se tiene:

$$\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA}$$

Igual al que se obtuvo mediante el método de áreas de momento y fuerza cortante. Luego se valida la hipótesis.

Para el cálculo numérico, los parámetros geométricos y de material de la viga son los mismos al utilizado en 6.2.1.1 más $P = 1000 \text{ kN}$ y $L = 4 \text{ m}$. Con estos valores obtuve las gráficas para las vigas de Euler – Bernoulli, Timoshenko y el método de elementos de contorno (MEC) de 64 células lineales, donde se observa que estos últimos prácticamente se superponen:

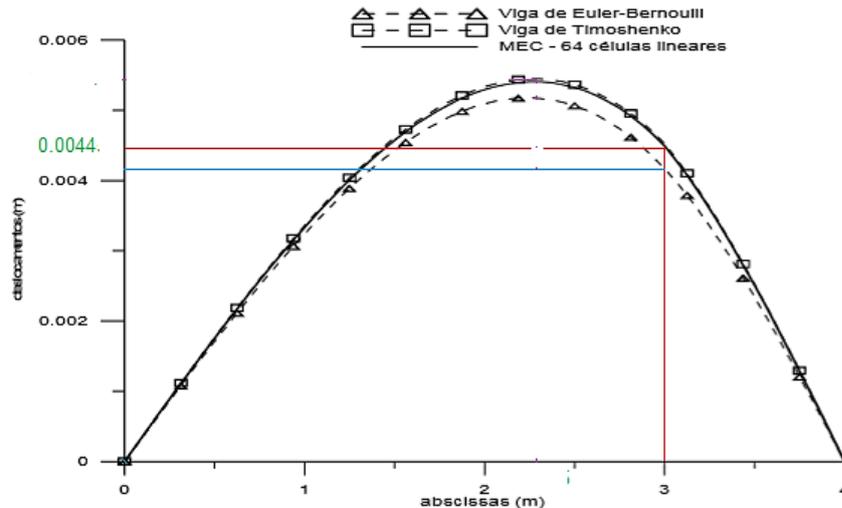


Gráfico 12 Desplazamiento de viga biapoyada con carga P a distancia $a = 3L/4$.
Fuente: Fleischfresser, S. A., 2012 (p. 36)

Valores calculados aplicando la fórmula obtenido con el método de áreas de momento y fuerza cortante para el punto de aplicación de la carga P es:

$$\delta_P = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA} = \frac{1000 \times 10^3 (3)^2 (1)^2}{3(4)(50 \times 10^9)(0.0036)} + \frac{1000 \times 10^3 (3)(1)}{(4)(5/6)(125 \times 10^9 / 6)(0.12)}$$

$$\delta_P = \frac{1}{240} + \frac{9}{25000} = 4.16667 \times 10^{-3} \text{ m} + 3.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 4.52667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

❖ Resultados por el método de elementos finitos (MEF).

- **(De CAMPOS, 2015)** analizó una viga simplemente apoyada con carga puntual en el medio mediante elementos finitos y comparó con el cálculo analítico de Logan (2007) expresado por la fórmula:

$$u_{\max} = \frac{PL^4(4 + \varphi)}{24EI} \quad \text{Donde:} \quad \varphi = \frac{12}{f_s AGL^2}$$

Los valores considerados para los cálculos fueron: $P = 10 \text{ kN}$, $L = 0.40 \text{ m}$, $A = 0.025 \times 0.050 = 1/800 \text{ m}^2$, $I = 1/3840000 \text{ m}^4$, $L/h = 8$, $f_s = 5/6$, $E = 207 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$,

Estos valores fueron introducidos en la fórmula del método de áreas de momento y fuerza cortante:

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4kGA} = \frac{10 \times 10^3 (0.40)^3}{48(207 \times 10^9)(1/3840000)} + \frac{10 \times 10^3 (0.40)}{4(5/6)(80 \times 10^9)(1/800)}$$

$$\delta_{\max} = 2.4734 \times 10^{-4} + 1.2 \times 10^{-5} = 2.5934 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.2593 \text{ mm}$$

Los resultados de elementos finitos (de 2 a 64 elementos), Logan (2007) y de Euler – Bernoulli se presentan en la tabla 2.

TABLA 2 Desplazamientos de máximos de viga biapoyada con carga P en el medio

	Desplazamientos viga (mm)	Error relativo (%)
2 elementos	0.0422	83.7505
4 elementos	0.1134	56.3345
8 elementos	0.1964	24.3743
16 elementos	0.2404	7.4317
32 elementos	0.2546	1.9638
64 elementos	0.2584	0.5006
Logan (2007)	0.2597	0.0000
Euler-Bernoulli	0.2474	

Fuente: De Campos J. V. 2015

Comparado los resultados del método de áreas de momento y fuerza cortante con los de elementos finitos (64 elementos), Logan y Euler – Bernoulli,

son muy próximos, siendo los errores relativos 0.347%, 0.154% y 0.040% respecto al primero.

❖ Resultados por el método de diferencias finitas (MDF)

- **(PAIVA Gomes de Souza, y otros, 2018)** Aplican el método de diferencias finitas para el cálculo de la viga Biapoyada de Timoshenko con carga P a distancia. $a = 0.2L = 0.2m$. Los valores de los parámetros de cálculo son: $P = 100$ kN, $L = 1$ m, 1.5m y 2.0m respectivamente; $h = 10b = 100$ cm, $A = 0.1 \times 1 = 0.1$ m², $I = 1/120$ m⁴, $E = 2.05 \times 10^8$ kN/m² (acero isotrópico), $\nu = 0.3$, Los resultados obtenidos que se reproducen son:

Para la viga de longitud corta: $L = 1$ m y $L/h = 1$

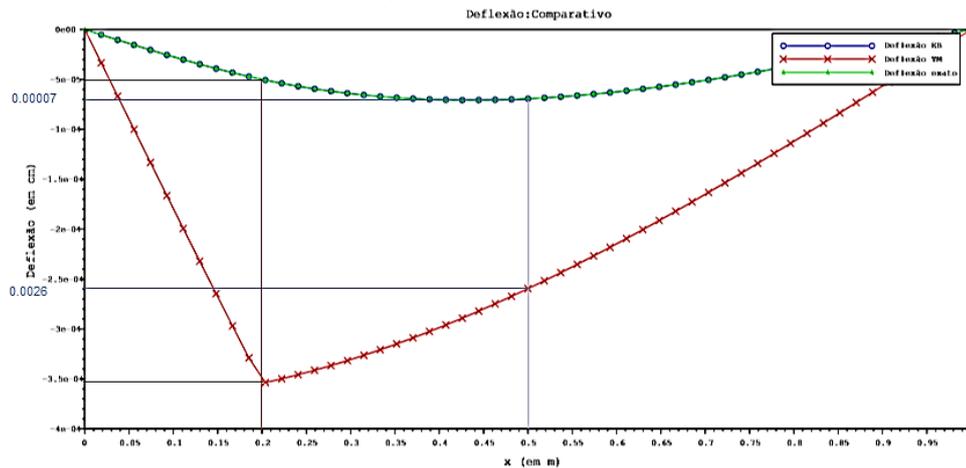


Gráfico 13 Comparativo entre las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko para viga biapoyada con carga P , $L = 1$ m, $L/h = 1$ y $n = 55$.

Fuente: Paiva Gomes de Souza, C. y Guimarães Cruz, G., 2017, p.7

Los resultados de desplazamientos para $x = L/2$ del gráfico 13 se dan en la tabla 3.

Tabla 3 Deflexión para $x = L/2$ de vigas y error relativo para viga biapoyada con carga P , $L = 1$ m y $L/h = 1$.

N_{puntos}	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM-MDF (cm)	Error Relativo EB %	Error Relativo TM %	Tiempo de ejecución (s)
55	0.00007	0.00007	0.00026	0.00	271.43	1.0907

Fuente: Paiva Gomes de Souza, C. y Guimarães Cruz, G., 2017, p.7

Para contrastar los resultados de desplazamiento en el punto de aplicación $x = a = 0.2m$ de la carga P y en $x = L/2$ mediante el método de áreas

de momento y fuerza cortante, primero se trazan los diagramas $V / \kappa GA$, M / EI y la curva elástica (véase en la figura 6.1) y se aplica el teorema 2 del método.

Calculo del desplazamiento del punto de aplicación de la carga P:

$$\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA} = \frac{100(0.2)^2(0.8)^2}{3(1)(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(0.2)(0.8)}{1(5/6)(7884615385)(0.1)}$$

$$\delta_B = \frac{8}{16015625} + 2.435122 \times 10^{-6} = 2.934634 \times 10^{-6} \text{ m} = 2.935 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

Donde la 1^{ra} parte del 2^{do} miembro corresponde al aporte de la teoría de Euler – Timoshenko y la 2^{da} parte al aporte de la fuerza cortante.

Comparando con la ecuación analítica exacta deducida por Fleischfresser (2012), para $x = a$

$$v_1(x) = \frac{P}{6EIL} [-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x] + \frac{P(L-a)}{\kappa GAL} x$$

$$v_1(x) = \frac{Pa^2b^2}{6EIL} + \frac{Pab}{\kappa GAL}$$

Ambos métodos son equivalentes y llevan al mismo resultado.

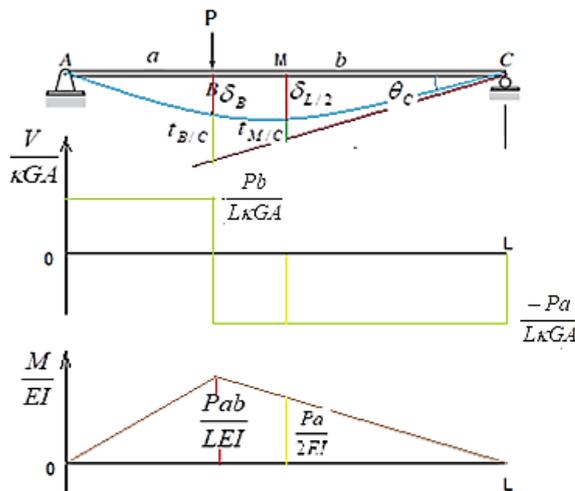


Figura 50 Viga biapoyada con carga P y diagramas de momento, fuerza cortante y la curva elástica.

Fuente: propia del autor.

Según la teoría de Euler – Bernoulli el valor del desplazamiento es $\delta_B = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ en el gráfico y en el cálculo, en cambio según la teoría de Timoshenko en el gráfico 6.9 es $\delta_B = 3.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$ y según el cálculo $\delta_B = 2.935 \times 10^{-4} \text{ cm}$, siendo el error relativo entre los mismos:

$$\text{Error.relato}T = \frac{2.935 - 3.50}{2.935} \times 100 = 19.25\%$$

El desplazamiento $\delta_{L/2}$ según la teoría de Timoshenko con el método de áreas de momento y fuerza cortante se determina luego de calcular θ_c y $t_{M/C}$ con los teoremas 1 y 2 del método:

$$\theta_c = \frac{t_{A/C}}{L} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{Pab}{LEI} \right) (L) \left[\frac{L+a}{3} \right]}{L} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\delta_{L/2} = \theta_c \left(\frac{L}{2} \right) - t_{M/C} = \frac{Pab(L+a)}{12EI} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Pa}{2EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left[\frac{1}{3} \frac{L}{2} \right] + \left(- \frac{Pa}{L\kappa GA} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{L/2} = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{12EI} - \frac{PaL^2}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA}$$

Comparando con la ecuación analítica exacta deducida por Fleischfresser (2012). Para $x \geq a$

$$v_2(x) = \frac{Pa}{6EIL} [x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2] + \frac{Pa(L-x)}{\kappa GAL}$$

$$v_2(x = L/2) = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA}$$

Luego los resultados son iguales.

$$\delta_{L/2} = \frac{100(0.2)(3(1)^2 - 4(0.2)^2)}{48(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(0.2)}{2(5/6)(2.05 \times 10^8 / 2.6)(0.1)}$$

$$\delta_{L/2} = 6.92683 \times 10^{-7} + 1.52195122 \times 10^{-6} = 2.21463 \times 10^{-6} m = 0.00022 cm$$

$$\text{Error.relato}T = \frac{0.00007 - 0.00022}{0.00007} \times 100 = 214.29\%$$

El resultado según la tabla 6.1 por el TM-MDF es $\delta_{L/2} = 0.00026 cm$ y por EB-MDF $\delta_{L/2} = 0.00007 cm$ con el error relativo respecto al de Euler – Bernoulli de 271.43%, concordando con el gráfico 6.9. Los calculados con el método de áreas de momento y fuerza cortante son: según la teoría de Timoshenko $\delta_{L/2} = 0.00022 cm$ y según Euler – Bernoulli $\delta_{L/2} = 0.0000693 cm$ con el error relativo de 217.46%, siendo menor que con MDF.

El error relativo entre los valores según la teoría de Timoshenko entre el método de áreas de momento y fuerza cortante con el de MDF (n = 55) es:

$$Error.relativaT = \frac{0.00022 - 0.00026}{0.00022} \times 100 = 18.18\%$$

Los resultados de desplazamientos para $x = L/2$ de la viga de $L = 1.5$ m se dan en la tabla 4

TABLA 4 Deflexión para $x = L/2$ de viga biapoyada según las teorías Euler-Bernoulli y Timoshenko con carga P , $L = 11.5$ m y $L/h = 1.5$

N _{puntos}	EB-Analítica (cm)	EB-MDF (cm)	TM-MDF (cm)	Error Relativo EB %	Error Relativo TM %	Tiempo de ejecución (s)
55	0.00016	0.00016	0.00035	0.00	118.75	1.5160

Fuente: Paiva Gomes de Souza y Guimarães Cruz, G., 2017, p.8

Para contrastar con el método de áreas de momento y fuerza cortante se ha procedido igual al caso anterior.

$$\delta_{L/2} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2kGA} = \frac{100(0.2[3(1.5)^2 - 4(0.2)^2])}{48(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(0.2)}{2(5/6)(2.05 \times 10^8)(0.1)}$$

$$\delta_{L/2} = 1.60732 \times 10^{-6} + \frac{3}{5125000} = 2.1927 \times 10^{-6} \text{ m} = 2.1927 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

$$Error.relativaT = \frac{0.00022 - 0.00016}{0.00016} \times 100 = 37.50\%$$

El error relativo según la tabla 6.2 es de 118.75%

El error relativo entre los valores según la teoría de Timoshenko entre el método de áreas de momento y fuerza cortante con el de MDF (n = 55) es:

$$Error.relativaT = \frac{0.00022 - 0.00035}{0.00022} \times 100 = 59.1\%$$

Los resultados de desplazamientos para $x = L/2$ de la viga de $L = 1.5$ m se dan en la tabla 5

TABLA 5 Deflexión para $x = L/2$ de viga biapoyada según las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko con carga P , $L = 2$ m y $L/h = 2$.

N _{puntos}	EB- Analítica (cm)	EB- MDF (cm)	TM- MDF (cm)	Error Relativo EB %	Error Relativo TM %	Tiempo de ejecución (s)
55	0.00029	0.00029	0.00048	0.00	65.52	1.4910

Fuente: Paiva Gomes de Souza, C. y Guimarães Cruz, G., 2017, p.9.

Para contrastar con el método de áreas de momento y fuerza cortante se ha procedido igual al caso anterior.

$$\delta_{L/2} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA} = \frac{100(0.2[3(2)^2 - 4(0.2)^2])}{48(2.05 \times 10^8)(1/120)} + \frac{100(0.2)}{2(5/6)(2.05 \times 10^8)(0.1)}$$

$$\delta_{L/2} = 2.887805 \times 10^{-6} + \frac{3}{5125000} = 3.4732 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.4732 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

El error relativo respecto a la teoría de Euler – Bernoulli es:

$$\text{Error.relatoivaT} = \frac{0.00029 - 0.00035}{0.00029} \times 100 = 20.69\%$$

El error relativo según la tabla 4 es de 65.52% > 20.69%. El error relativo ($\varepsilon.r.$) entre los valores de desplazamiento según la teoría de Timoshenko del método de áreas de momento y fuerza cortante con el de TM-MDF (n = 55) es:

$$\text{Error.relatoivaT} = \frac{0.00035 - 0.00048}{0.00035} \times 100 = 37.14\%$$

Significa que el TM-MDF necesita ser mejorado con n > 55 puntos.

Para ver la diferencia de desplazamiento en $x = L/2$ según la teoría de Timoshenko respecto a la teoría de Euler – Bernoulli para diferentes relaciones de esbeltez ($L/h = 3, 4, 5, 10$) según el método de áreas de momento y fuerza cortante, se han realizado cálculos numéricos en la fórmula de desplazamientos donde el 1^{er} término del 2^{do} miembro corresponde a la teoría de Euler – Bernoulli y el valor total a la teoría de Timoshenko, siendo los resultados para $L = 3, 4, 5$ y 10 m los siguientes:

$$\text{Para } L = 3\text{m}, \delta_{L/2EB} = 6.54634 \times 10^{-6} \text{ m}, \delta_{L/2T} = 7.13171 \times 10^{-6} \text{ m}, \varepsilon.r.(%) = 8.94$$

$$\text{Para } L = 4\text{m}, \delta_{L/2EB} = 1.16683 \times 10^{-5} \text{ m}, \delta_{L/2T} = 1.22537 \times 10^{-5} \text{ m}, \varepsilon.r.(%) = 5.02$$

$$\text{Para } L = 5\text{m}, \delta_{L/2EB} = 1.82537 \times 10^{-5} \text{ m}, \delta_{L/2T} = 1.88390 \times 10^{-5} \text{ m}, \varepsilon.r.(%) = 3.20$$

$$\text{Para } L = 10\text{m}, \delta_{L/2EB} = 7.31317 \times 10^{-5} \text{ m}, \delta_{L/2T} = 7.37171 \times 10^{-5} \text{ m}, \varepsilon.r.(%) = 0.80$$

Para contrastar el método de diferencias finitas (MDF) para n = 55 con el método de áreas de momento y fuerza cortante (M - ÁMyFC) mediante el error relativo (%) de ambos métodos respecto a la teoría de Euler – Bernoulli, así como la diferencia entre ambos métodos según la teoría de Timoshenko, se tiene en la tabla 6.

TABLA 6 Variación del error relativo según L/h y método de cálculo para $x = L/2$ par viga biapoyada con carga P

L/h =	1	1.5	2	3	4	5	10
$\varepsilon.r.TM - MDF.(%)$	271.4	118.7	65.52	-	-	-	-
	3	5					
$\varepsilon.r.M - \acute{A}MyFC.(%)$	214.2	37.50	20.69	8.94	5.0	3.20	0.80
	9				2		
$\varepsilon.r.Dif.MDF - \acute{A}MyFC.(%)$	18.18	59.1	37.14	-	-	-	-

Fuente: propia del autor.

Se observa que la mayor diferencia de desplazamiento de viga entre las teorías de Euler – Bernoulli y de Timoshenko se da con el método de diferencias finitas (MDF) debido a la menor cantidad de bandas discretas consideradas (n = 55)

Asimismo para pequeñas relaciones de esbeltez la diferencia entre ambas teorías es considerable y disminuye a medida que esta relación disminuye hasta ser menor al 1% para L/h = 10.

- **(NAVARRO Gregori, 2009)** analizó las vigas Biapoyadas con carga puntual P en el medio de longitudes L = 5, 10 y 100 m y sección transversal rectangular BxH con material elástico y lineal, dónde: B = 1 m, H = 1 m, L = 5, 10, 100 m, I = 1/12 m⁴, E = 10⁶ N/m², $\nu = 0.25$, $G = E/2(1 + \nu) = 4.10^5 N/m^2$, P = 1 N

El desplazamiento teórico máximo en el centro de la viga según la teoría de Timoshenko y obtenido también mediante el método de áreas de momento y fuerza cortante está expresado por:

$$w_{\max.TBT} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA}$$

Donde el 1^{er} sumando del lado derecho de la ecuación corresponde al desplazamiento máximo según la teoría de Euler – Bernoulli.

Habiendo calculado para L = 5 m de tiene:

$$w_{\max,EBT} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{1(5)^3}{48(10^6)(1/12)} = 3.125 \times 10^{-5} m = 0.00003125 m$$

$$w_{\max,TBT} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA} = \frac{1(5)^3}{48(10^6)(1/12)} + \frac{1(5)}{4(5/6)(4 \times 10^5)(1)} = 3.5 \times 10^{-5} m$$

Estos resultados concuerdan con la flecha máxima teórica mediante las teorías de Euler – Bernoulli y de Timoshenko determinados por Navarro Gregori para las tres longitudes estudiadas, (véase anexo A.1, Tabla 6.2).

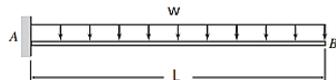
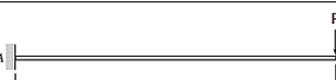
Para calcular con elementos finitos, cada viga discretizó en 1, 2, 4, 5 y 10 elementos finitos de la misma longitud y cada sección transversal se dividió en 20, 50 y 100 capas de idéntica área. Se utilizó elemento finito de Timoshenko con interpolación parabólica (con 2 y 3 puntos de integración por elemento (nIP)), luego con interpolación cúbica (con 3 y 4 puntos de integración por elemento). Para cada caso se ha determinado $w_{\max.calc}$ e introducido en la expresión del error relativo: $\% .error = (w_{\max.calc} - w_{\max.TBT}) . 100 / w_{\max.TBT}$, donde $w_{\max.TBT}$ es la flecha máxima teórica de Timoshenko, habiendo determinado los errores relativos de los cálculos por elementos finitos mediante la interpolación parabólica y cúbica respectivamente. (Véase anexo A.1, Tabla 6.3 y tabla 6.4).

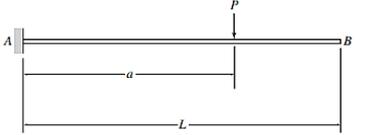
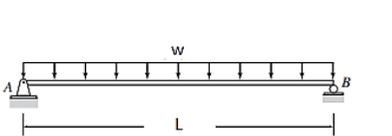
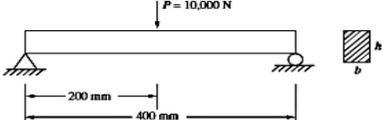
De los resultados de la tabla 6.4 se deduce que al dividir el miembro y la sección transversal en mayor cantidad de elementos (10) y subcapas (200) el error tiende a cero y aumenta la exactitud

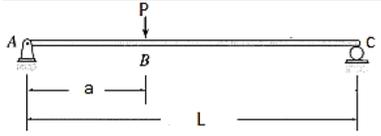
Igualmente al discretizar la viga y la sección transversal en mayor cantidad de elementos (10) y subcapas (200) el error tiende a cero y aumenta la exactitud más rápidamente en el elemento cúbico, (véase anexo A.1, tabla 6.3 y tabla 6.4).

CUADRO DE VALIDACIÓN NUMÉRICA

Desplazamientos y giros de vigas isostáticas de un miembro de métodos numéricos con el método de áreas de momento y fuerza cortante

VIGA	Solución analítica exacta	Método de Áreas de momento y fuerza cortante	Métodos Numéricos
 <p> $w=100\text{kN/m}$, $L=2\text{m}$, $L/h=3.33$, $A=0.20 \times 0.60\text{m}^2$, $I_z=0.0036\text{m}^4$, $\kappa=5/6$ $E=50\text{GPa}$, $\mu=0.20$, $\rho=2.500\text{kg/m}^3$ </p>	<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2013)</p> $\theta(x) = \frac{w}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{2}x^2 + \frac{L^2}{2}x \right) \rightarrow \theta(x=2) = \frac{wL^3}{6EI}$ $u(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{w}{2\kappa GA} (2Lx - x^2)$ $u(x=2) = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$	$\delta_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$ $\delta_{BTT} = 1.207 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.111 \times 10^{-3} \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 7.95\%$ $\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} 7.4074 \times 10^{-4} \text{ rad}$	<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2014) Método de elementos de contorno: 64 celdas</p> $\delta_{BTT} = \delta_{B(MEC)} = 0.0012 \text{ mm} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 8.33\%$ $\delta_{BTEB} = 0.0011 \text{ mm}$ <p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 50 elementos</p> $\delta_{SA} = \delta_{PRG} = 1.207 \times 10^{-3} \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{SA}} \right\} \dots \mathcal{E} = 7.95\%$ $\delta_{BTEB} = 1.111 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\theta_{BSA} = \theta_{PRG} = 7.4074 \times 10^{-3} \text{ rad}$
 <p> De Campos (2015) $P=10\text{kN}$, $L=4\text{m}$, $L/h=5$, $A=0.30 \times 0.80=0.24\text{m}^2$, $I=0.0128\text{m}^4$, $E=1$, $G=0.4$, $\mu=0.25$, $\kappa=5/6$ </p> <p>-----</p> <p> $h=2.00\text{m}$, $L/h=2$, $I=0.2$, $A=0.6$ </p> <p>-----</p> <p> $h=0.04\text{m}$, $L/h=100$, $I=1.6 \times 10^{-6}$, $A=0.012$ </p>	<p>Castro (2002)</p> $\theta(x) = \frac{5}{EI} x^2 - \frac{40}{EI} x \rightarrow \dots \theta(x=4) = -\frac{80}{EI}$ $u(x) = \frac{40}{2EI} x^2 - \frac{5}{3EI} x^3 + \frac{10}{GA_C} x$ $\rightarrow u(x=4) = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{\kappa GA}$ <p>-----</p> <p>Hibbeler (2004)</p> $u(x) = \frac{Px^2}{6EI} (3L-x) \rightarrow u(x=4) = \frac{640}{3EI}$	$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{\kappa GA}$ $\delta_{BTT} = 1.717 \times 10^4 \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.667 \times 10^4 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 2.91\%$ $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{80}{EI}$ <hr/> <p>L/h=2</p> $\delta_{BTT} = 1.267 \times 10^3 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 15.79\%$ $\delta_{BTEB} = 1.067 \times 10^3 \text{ m}$ <p>L/h=100</p> $\delta_{BTT} = 1.3334 \times 10^8 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 0.0075\%$ $\delta_{BTEB} = 1.3333 \times 10^8 \text{ m}$	<p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 100 elementos $L/h=5$</p> $\delta_{BTT} = \delta_{B(MEF)} = 1.717 \times 10^4 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{BTT}} \right\} \dots \mathcal{E} = 2.91\%$ $\delta_{BTEB} = 1.667 \times 10^4 \text{ m}$ $\theta_B = 6.25 \times 10^3 \text{ rad}$ <p>-----</p> <p>L/h=2</p> $\delta_{SA} = \delta_{PRG} = 1.267 \times 10^3 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{SA}} \right\} \dots \mathcal{E} = 15.79\%$ $\delta_{BTEB} = 1.067 \times 10^3 \text{ m}$ <p>L/h=100</p> $\delta_{SA} = \delta_{PRG} = 1.000 \times 10^8 \text{ m} \left. \vphantom{\delta_{SA}} \right\} \dots \mathcal{E} = -33.3\%$ $\delta_{BTEB} = 1.333 \times 10^8 \text{ m}$

<p>$P = 100 \text{ kN}$, $A = 0.1 \times 1 = 0.1 \text{ m}^2$, $l = 1/120$ $E = 2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\mu = 0.20$ $L = 1 \text{ m}$, $L/h = 1$ $L = 5 \text{ m}$, $L/h = 5$</p>		<p>$\delta_{BTT} > \delta_{BTEB}$, CORRECTO. No se genera el efecto de Shear Locking.</p> <p>$L = 1 \text{ m}$, $L/h = 1$ $\delta_{BTT} = 3.3561 \times 10^{-5} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.9512 \times 10^{-5} \text{ m}$ } $\dots \varepsilon = 41.86\%$</p> <hr/> <p>$L = 5 \text{ m}$, $L/h = 5$ $\delta_{BTT} = 2.4741 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 2.4390 \times 10^{-3} \text{ m}$ } $\dots \varepsilon = 1.419\%$</p>	<p>$\delta_{BTT} = \delta_{B(MEF)} < \delta_{BTEB}$ FALSO! (efecto de Shear Locking)</p> <p>Paiva Gomez de Souza C. y Guimaraes Cruz G. (2017) Método de Diferencias Finitas: n=55 $L = 1 \text{ m}$, $L/h = 1$ $\delta_{BTT} = 0.00385 \text{ cm}$ $\delta_{MA} = \delta_{BTEB} = 0.00195 \text{ cm}$ } $\dots \varepsilon = 97.44\%$</p> <hr/> <p>$L = 5 \text{ m}$, $L/h = 5$ $\delta_{BTT} = 0.25346 \text{ cm}$ $\delta_{MA} = \delta_{BTEB} = 0.2439 \text{ cm}$ } $\dots \varepsilon = 3.92\%$</p>
 <p>$P = 1000 \text{ kN}$, $a = L/2 = 1 \text{ m}$ $A = 0.20 \times 0.60 \text{ m}^2$, $I_z = 0.0036 \text{ m}^4$, $\kappa = 5/6$ $E = 50 \text{ GPa}$, $\mu = 0.20$, $\rho = 2.500 \text{ kg/m}^3$</p>	<p>Fleischfresser (2012), $x < a \rightarrow$ $y(x) = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3ax^2) + \frac{P}{\kappa GA}x$ $x \geq a \rightarrow y(x) = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) + \frac{Pa}{\kappa GA}$</p>	<p>$\theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$ $\delta_{B \max} = \frac{Pa^2(3L - a)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$</p>	<p>Fleischfresser (2012) Método de elementos de contorno: 64 celdas $\delta_{CTT} = \delta_{MEC-64} = 5.1096 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{CTEB} = 4.6296 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\varepsilon\% = 9.39\%$</p>
 <p>$w = 100 \text{ kN/m}$, $L = 4 \text{ M}$, $A = 0.2 \times 0.6 \text{ m}^2$, $E = 50 \text{ GPa}$, $\mu = 0.20$</p>	<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2013) $u(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \frac{w}{2\kappa GA}(Lx - x^2)$</p>	<p>$\delta_{C \max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA}$ $\delta_{TT \max} = 1.94785 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{TEB \max} = 1.85185 \times 10^{-3} \text{ m}$ } $\dots \varepsilon\% = 5.184\%$</p>	<p>Fleischfresser (2012) Método de elementos de contorno: 64 celdas Del gráfico: $\delta_{TT} = \delta_{B(MEC-64)} = 0.00195 \text{ m}$ } $\varepsilon_{T-MEC} = 0.00\%$ $\delta_{BTEB} = 0.00186 \text{ m}$ } $\dots \varepsilon_{T-EB} = 4.615\%$</p>
	<p>Logan (2007) $\delta_{\max} = \frac{PL^4}{24EI}(4 + \varphi)$</p>	<p>$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA}$</p>	<p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 64 elementos</p>

<p>P=10kN, L=0.40m, A=0.025x0.050=1.25x10⁻³m², L/h=8, E=207GPa, G = 80 GPa</p>  <p>P=1000Kn, L=4m, a=3m, L/h=6.67 A=0.20x0.60=0.12m², I_z=0.0036m⁴, κ=5/6 E=50GPa, μ=0.20, ρ=2.500kg/m³</p>	$\varphi = \frac{12}{\kappa GAL^2}$ <p>Fleischfresser (2012) Para $x \leq a$</p> $v_1(x) = \frac{P}{6EI} [-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x] + \frac{P(L-a)}{\kappa GAL} x$ <p>Para $x \geq a$</p> $v_2(x) = \frac{Pa}{6EI} [x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2] + \frac{Pa(L-x)}{\kappa GAL}$ $v_2(x = l/2) = \frac{Pa}{48EI} [3L^2 - 4a^2] + \frac{Pa}{2\kappa GA}$	$\delta_{TT \max} = 2.5934 \times 10^{-4} m \quad \dots \varepsilon \% = 4.627\%$ $\delta_{TEB \max} = 2.4734 \times 10^{-4} m$ <hr/> $\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA}$ $\delta_{BTT} = 4.5267 \times 10^{-3} m$ $\delta_{BTEB} = 4.1667 \times 10^{-3} m \quad \dots \varepsilon = 7.953\%$ <hr/> $\delta_{L/2} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA}$ <p>Para $x=L/2=0.5m, L=1m$</p> $\delta_{BTT} = 2.09756 \times 10^{-6} m$ $\delta_{BTEB} = 6.92683 \times 10^{-7} m \quad \dots \varepsilon = 66.977\%$ <p>Para $x=L/2=0.75m, L=1.5m$</p> $\delta_{BTT} = 3.0122 \times 10^{-6} m$ $\delta_{BTEB} = 1.60732 \times 10^{-6} m \quad \dots \varepsilon = 46.64\%$ <p>Para $x=L/2=1m, L=2m$</p> $\delta_{BTT} = 4.29268 \times 10^{-6} m$ $\delta_{BTEB} = 2.88780 \times 10^{-6} m \quad \dots \varepsilon = 32.727\%$	$\delta_{B(MEF-64)} = 0.2584 mm$ $\delta_{Logan-2007} = 0.2597 mm \quad \dots \varepsilon_{T-L} = 0.5006\%$ $\delta_{BTEB} = 0.2474 mm \quad \dots \varepsilon_{T-EB} = 4.26\%$ <hr/> <p>Fleischfresser (2012), Método de elementos de contorno: 64 celdas Del gráfico:</p> $\delta_{TT} = \delta_{B(MEC-64)} = 0.0044 mm \quad \dots \varepsilon_{T-MEC} = 0.00\%$ $\delta_{BTEB} = 0.0041 mm \quad \dots \varepsilon_{T-EB} = 6.82\%$ <hr/> <p>Paiva Gomez de Souza C. y Guimaraes Cruz G. (2017) p7,8 y 9. Método de Diferencias Finitas: n=55 De gráficos y tablas:</p> <p>Para $x=L/2=0.5m, L=1m$</p> $\delta_{MT-MDF} = 0.00026 cm$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00007 cm \quad \dots \varepsilon = 271.43\%$ <p>Para $x=L/2=0.75m, L=1.5m$</p> $\delta_{MT-MDF} = 0.00035 cm$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00016 cm \quad \dots \varepsilon = 118.75\%$ <p>Para $x=L/2=1m, L=2m$</p> $\delta_{MT-MDF} = 0.00048 cm$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00029 cm \quad \dots \varepsilon = 65.52\%$
---	---	--	---

Fuente: Elaboración propia.

6.3. Responsabilidad ética

El presente trabajo de Tesis “Aplicación de la teoría de Timoshenko al Método Área-Momento, mejora la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas” ha permitido obtener el nuevo método gráfico denominado “método de áreas de momento y de fuerza cortante” con el cual se pueden calcular los desplazamientos y giros de la curva elástica de las vigas isostáticas de uno y dos miembros en puntos específicos, considerando los aportes del momento flector y de la fuerza cortante, mejorando la exactitud de los mismos comparado con el método de área – momento. El nuevo método ha sido probado en vigas isostáticas de uno y dos elementos con resultados satisfactorios y es único; porque, otros autores que realizaron investigaciones aplicando la teoría de vigas de Timoshenko estáticas o dinámicas han utilizado los métodos numéricos como: diferencias finitas, elementos finitos, elementos de contorno e integración sucesiva.

CONCLUSIONES

a) Habiendo tenido por objetivo formular la aplicación de la teoría de vigas de Timoshenko en el método de área-momento (teoría de Euler . Bernoulli) para mejorar la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas de toda longitud y luego de haber planteado la hipótesis general correspondiente; a fin de solucionar los problemas de cálculo de la curva elástica para vigas de longitud corta de la teoría de Euler-Bernoulli, luego de inclusión de la fuerza cortante en el cálculo de la curva elástica y con las herramientas del análisis matemático y física correspondientes, se ha obtenido dos teoremas ampliadas del método área - momento a las que denomino “teoremas del Método de áreas de momento y fuerza cortante” cuyos enunciados son:

Teorema 1: “El ángulo entre dos tangentes a la curva elástica de la viga ($\theta_{E/A}$) es igual al área del diagrama del M/EI entre esos puntos (A y E) **más la diferencia de ordenada de $V/\kappa GA$ entre esos puntos**”.

Teorema 2: “La distancia vertical de la tangente en E de la curva elástica a la tangente que viene de A ($t_{E/A}$) es igual al momento estático del área del diagrama del M/EI entre los puntos A y E respecto de E, **más el área del diagrama de $V/\kappa GA$ entre los puntos A y E**”.

b) Para la validación analítica de la investigación, como grupo experimental (GE) se utilizaron seis vigas con dos tipos de cargas y aplicando los teoremas indicados se han determinado giros y desplazamientos en puntos específicos de las vigas. Como grupo de control (GC) se utilizaron las mismas vigas y tipos de carga. Utilizando los métodos de energía (Trabajo virtual y teorema de Castigliano), se calcularon giros y desplazamientos en los mismos puntos, obteniendo resultados idénticos a los del grupo experimental, habiendo quedado demostrado de esta manera la validez de los nuevos teoremas.

c) Para la validación cuantitativa de la investigación, se utilizó los ejemplos de aplicación de vigas que otros investigadores utilizaron para controlar el desarrollo

de sus programas por métodos numéricos como: los elementos finitos (MEF), diferencias finitas (MDF), elementos de contorno (MEC) sobre la teoría de vigas de Timoshenko, contrastando estos resultados con los obtenidos de las ecuaciones por métodos exactos (integración sucesiva) desarrollados para la misma teoría.

Aplicando los mismos datos de cálculo en las ecuaciones del método de áreas de momento y fuerza cortante, en puntos específicos para el mismo tipo de viga y carga, los resultados obtenidos son iguales a los métodos exactos, iguales o muy cercanos al de los métodos numéricos. Con esto se confirma la validez de la hipótesis propuesta. Para la validación numérica como ejemplos se utilizaron dos vigas isostáticas con dos tipos de carga cada uno.

RECOMENDACIONES

Habiendo demostrado analíticamente y numéricamente que con el método de áreas de momento y fuerza cortante se obtiene iguales resultados que con el método exacto de integración y métodos de energía, aplicando las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko lo que constituye una mejora del método clásico de Euler Bernoulli, se recomienda:

- a) aplicar este método a vigas isostáticas de tres o más miembros para ver su influencia sobre el cálculo de las pendientes como se observó en vigas de dos miembros.
- b) Utilizar el método de áreas de momento y fuerza cortante para el análisis de vigas hiperestáticas.
- c) Investigar los aportes de la fuerza axial en tracción y compresión a la curva elástica mediante el método de áreas de momento y fuerza cortante.
- d) Fomentar en centros de enseñanza superior el uso de este método por ser más simple y didáctico que los otros métodos, debido al uso de gráficos permite una rápida visualización física y asimilación de la curva elástica de vigas por parte de los educandos.

Referencias

- BERNAL, César A. 2010. ***Metodología de la Investigación***. 3ra. Bogotá : Pearson Educación, 2010. pág. 320. 9789586991285.
- BLANCO Díaz, Elena, CERVERA Ruiz, Miguel y SUÁREZ Arroyo, Benjamín. 2015. ***Análisis Matricial de Estructuras [en línea]***. [ed.] Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. 2da. Edición. Barcelona : CIMNE, 2015. pág. 245. ISBN: 9788494424458.
- BRUHN, E. F. 1973. ***Analysis & Design of Flight Vehicle Structures***. 1973. Indianapolis : Jacobs Publishing, Inc., 1973.
- CARRER, J. A. M. MANSUR, W. J., SCUCIATO, R. F. y A., FLEISCHFRESSER. S. 2014. ***Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams by the Boundary Element Method***. [Blucher Mechanical Engineering Proceedings] Curitiba : s.n., mayo de 2014. Vol. 1.
- CERVERA Ruiz, Miguel y BLANCO Díaz, Elena. 2002. ***Mecánica de Estructuras Libro 2 Métodos de Análisis [en línea]***. Barcelona : UPC, 2002. ISBN: 8483016354.
- De CAMPOS, João Victor. 2015. ***Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de vigas de Timoshenko. Trabalho de Conclusão (título de Engenheiro Civil)***. Campo Mourao : Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Departamento Acadêmico de Construção Civil, 2015. pág. 75.
- DEL CID, Alma, MÉNDEZ, Rosemary y SANDOVAL, Franco. 2011. ***Investigación, Fundamentos y Metodología***. [ed.] Prentice Hall. México : s.n., 2011.
- ESPINOZA, Ciro. 2014. ***Metodología de la Investigación Tecnológica***. Huancayo : Ciro Espinoza Montes, 2014. pág. 190. 978-612-00-0222-3.
- Feodosiev, V. I. 1988. ***Resistencia de Materiales***. Moscú : MIR, 1988. 5-03-001183-8.
- Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr, John T. Dewolf, David F. Mazurek. 2012. ***Mechanics of Materials***. sixth edition. New York : McGraw Hill, 2012. pág. 838. 978-0-07-338028-5.

- FLEISCHFRESSER, Sergio Augusto. 2012. *Uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko. Tesis (Doutor em Engenharia)*. Curitiba : Universidade Federal do Paraná - Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática, 2012. pág. 136.
- GARIJO, Diego. 2015. *Modelos sin malla en simulación numérica de estructuras aeroespaciales. Tesis (Doctoral)*. Madrid : Universidad Politécnica de Madrid - Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, 2015. pág. 319.
- HAUKAAS, Terje. 2016. *Timoshenko Beam Theory*. Vancouver : University of British Columbia, Vancouver, 2016.
- Hibbeler. 2011. *Mecánica de Materiales*. México : s.n., 2011.
- Hibbeler, R. C. 2010. *Ingeniería Mecánica - Estática*. 12. México : Pearson Educación, 2010. pág. 880. 9786074425611.
- . 2012. *Structural Analysis*. New Jersey : Prentice Hall, 2012. -13:978-0-13-257053-4.
- Kassimali, Aslam. 2010. *Structural Analysis*. [ed.] Cengage Learning. Fourth Edition, Stamford, USA : s.n., 2010.
- LLANOS Sanchez, Albert. 2013. *Desarrollo y aplicación de un modelo de elementos finitos para cálculo de vigas con material compuesto laminado basado en la teoría de Timoshenko*. 2013.
- López Salinas, Mercedes Elvira. 2015. *Análisis de elementos viga columna en régimen no lineal con feformación por cortante*. 2015.
- LUÉVANOS Rojas, Arnulfo. 2011. *Método de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas, considerando deformaciones por cortante*. Matanzas - Cuba : s.n., 2011. pág. 13. Vol. 5. ISSN: 1990-8830.
- LUÉVANOS Rojas, Arnulfo, y otros. 2016. *A mathematical model of elastic curve for simply supported beams subjected to a concentrated load taking into account the shear deformations*. Nuevo León : ICIC International (c) 2016, 2016. págs. pp 41-54. Vol. 12. ISSN: 1349-4198.

Maletta, Hector. 2009. ***Epistemología Aplicada: Metodología y Técnica de la Investigación Científica***. Lima, Perú : CEIS Consorcio Económico de Investigación Social, CEPES, Universidad Pacífico Cl., enero de 2009.

McCORMAC, Jack C. y CSERNAK, Stephen F. 2012. ***Structural Steel Design. Fifth***. New York : Prentice Hall, 2012. ISBN: 9780136079484.

MUÑOZ, Carlos. 2011. ***Como Elaborar y Asesorar una Investigación de Tesis***. México : Pearson Educación, 2011.

NAVARRO Gregori, Juan. 2009. ***Modelización de elementos lineales de hormigón armado incluyendo el efecto de esfuerzo cortante. Tesis (Doctorado)***. Valencia : Universidad Politécnica de Valencia - Departamento de la Ingeniería de la Construcción y Proyectos de la Ingeniería Civil., 2009. pág. 301.

PAIVA Gomes de Souza, Calebe y GUIMARÃES Cruz, Gustavo. 2018. ***Análisis Comparativo de las Teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko vía Método de las Diferencias Finitas con Implementación Computacional en Scilab***. Teresina : Universidade Federal do Piauí, 2018. págs. 1-12. Vol. 39. ISSN: 2318-0730.

Pickering, W. F. 1980. **Factores que influyen sobre la exactitud de los resultados. *Química Analítica Moderna***. Barcelona : Reverté, 1980.

Popov, Egor P. 2000. ***Mecánica de Sólidos. 2da***. México : Pearson EDUCACIÓN, 2000. pág. 888. 9701703987.

Posadas Chinchilla, Augusto Miguel. ***DETERMINACIÓN DE ERRORES Y TRATAMIENTO DE DATOS***. Física Aplicada - Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad de Almería. Almería : s.n. pág. 15.

PRIETO, Emilio. 2012. ***¿Sabías que Exactitud no es lo mismo que Precisión?*** [ed.] e-medida. La Revista Española de Metrología. Tres Cantos - Madrid : s.n., 2012. pág. 2.

RUFINO Silva, Alexandre Miguel. 2014. ***Elemento de viga de formulação mista para aplicações estruturais. Tesis (Mestre em Engenharia Mecânica)***. Aveiro : Universidade de Aveiro - Departamento de Engenharia Mecânica., 2014. pág. 164.

- Ruiz Armenteros, Antonio Miguel, García Balboa, José Luis y Mesa Mingorance, José Luis. 2010. ***ERROR, INCERTIDUMBRE, PRECISIÓN Y EXACTITUD, TÉRMINOS ASOCIADOS A LA CALIDAD ESPACIAL DEL DATO GEOGRÁFICO***. 1er Congreso Internacional de Catastro Unificado y Multipropósito. Jaén : Universidad de Jaén, 2010. pág. 8. 978-84-8439-519-5.
- Ruiz, Isaac. ***EXACTITUD, ERRORES EN LAS MEDICIONES E INCERTIDUMBRE EN EL RESULTADO DE UNA MEDICIÓN***. Instituto Politécnico Nacional.
- Shanley, F. R. 1971. ***Mecánica de Materiales***. México : Centro Regional de ayuda Técnica (A.I.D.), 1971.
- SILVEIRA Pavlack, Bruna. 2016. ***Autonfoções do modelo do Timoshenko em um sistema de duas vigas acopladas elasticamente. Tesis (Mestre em Matemática)***. Santa María, RS : Universidade Federal Santa María - Centro de ciências Naturais e Exatas, 2016. pág. 87.
- Stanley W, Crawley, Robert M., Dillon y Winfred O., Carter. 1992. ***Estructuras de Acero: Análisis y Diseño***. México : Limusa S.A. de CV, 1992. 968-18-4070-4..
- TARAZONA MIRANDA, Victor Hilario. 2018. ***Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko***. Lima : Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2018.
- Timoshenko, Stephen. 1983. ***History of Strength of Materials***. s.l. : Dover Publication, 1983. pág. 480.
- UMÁLAGA. ***TEORÍA DE ERRORES***. Málaga : Universidad de Málaga - Departamento de Física Aplicada II.
- VIECILLI Martins de Mello, Eduardo Henrique. 2014. ***Análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com o método das diferenças finitas. Trabalho Final de Curso (Bacharel em Engenharia Civil)***. Curitiba : Universidade Federal do Paraná - Eng. Civil, Setor de Tecnologia, 2014.
- VINNAKOTA, Sriramulu. 2006. ***Estructuras de Acero Comportamiento y LRFD***. México : McGraw-Hill Interamericana, 2006. pág. 926. 0072366141.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLE	DIMENSIÓN	INDICADOR	UNIDAD DE MEDIDA	MÉTODO COMPLEJO
<p>GENERAL</p> <p>¿Cómo mejorar la exactitud de la curva elástica de vigas por el método de área-momento considerando además del momento flector, la fuerza cortante para que tenga alcance general?</p> <p>ESPECÍFICOS-</p> <p>¿Cómo mejorar la exactitud del desplazamiento lateral de la curva elástica de vigas considerando además del momento flector. la fuerza cortante sobre la base del método de área – momento para que tenga alcance general?</p> <p>¿Cómo mejorar la exactitud de la pendiente de la curva elástica de vigas considerando además del momento flector y la fuerza cortante sobre la base del método de área – momento para que tenga alcance general ?</p>	<p>GENERAL</p> <p>Formular la aplicación de la teoría de vigas de Timoshenko en el método de área-momento para mejorar la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas de toda longitud.</p> <p>ESPECÍFICOS</p> <p>Mejorar la exactitud del cálculo de desplazamiento de la elástica de la viga isostática con el aporte de las fuerzas cortantes además del momento flector mediante métodos de alcance más general.</p> <p>Mejorar la exactitud del cálculo de pendientes de la elástica de la viga isostática con el aporte de las fuerzas cortantes además del momento flector mediante métodos de alcance más general.</p>	<p>GENERAL</p> <p>Con la aplicación de la teoría de Timoshenko sobre la base del método de área – momento, aumenta la exactitud de la curva elástica en vigas isostáticas</p> <p>ESPECÍFICOS:</p> <p>La exactitud de los desplazamientos laterales aumenta considerando además del momento flector, la fuerza cortante interna. La magnitud del desplazamiento lateral es función del número de elementos componentes y configuración de vínculos.</p> <p>La exactitud de la pendiente aumenta considerando además del momento flector, la fuerza cortante interna. La magnitud de la pendiente es función del número de elementos componentes y configuración de vínculos</p>	Exactitud de la curva elástica = Y	Desplazamiento de la elástica	Desplazamiento vertical $f(X_1, X_3, Z_i) = Y_1$ $f(X_2, X_4, Z_i) = Y_2$	mm	<p>Grupo experimental (GE)</p> <p>-M. de área-momento</p> <p>-Teoría de Timoshenko</p> <p>Grupo de control (GC)</p> <p>Métodos de Energía: -Teorema de Castigliano - Principio de Trabajo Virtual</p>
					Pendiente $f(X_1, X_3, Z_i) = Y_3$ $f(X_2, X_4, Z_i) = Y_4$	rad	
			Teoría de Timoshenko = X	Diagrama de Fuerzas internas	D. cortante V $f(P, GA, L) = X_1$ $f(w, GA, L) = X_2$	$N.m$	
					D. Momento flector M $f(P, EI, L) = X_3$ $f(w, EI, L) = X_4$	$N.m^3$	
			Viga isostática = Z	Un elemento	E—L = Z_1 AB—AS = Z_2 BA-AS-L= Z_3	Sin unidades	
				Dos elementos	E—R—AS = Z_4 AD—AS—R—AS = Z_5		

Nota:

X_1, X_3, Y_1, Y_3 para carga puntual P

E= Módulo de Elasticidad longitudinal

A = área de la sección transversal

N = Newton

X_2, X_4, Y_2, Y_4 para carga distribuida w.

G = Módulo de elasticidad transversal

L = longitud de la viga

m = metro

INSTRUMENTOS VALIDADOS

Por tratarse de una investigación teórica del área tecnológica y campo estructural, los instrumentos de validación están constituidos por las herramientas de cálculo denominados leyes y principios de la mecánica. Los utilizados en este trabajo para el grupo de control (GC) son:

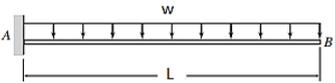
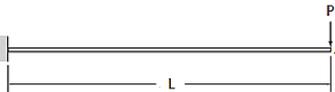
- El teorema de Castigliano
- El principio de trabajo virtual
- El principio de superposición.

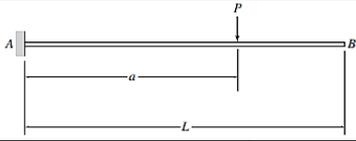
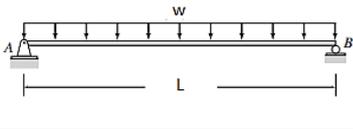
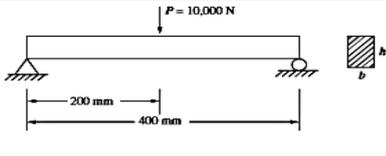
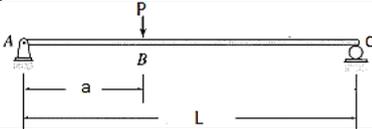
Para la experimentación o grupo experimental (GE) se utilizó el teorema ampliado desarrollado del método de área – momento y de la teoría de Timoshenko; denominado como los teoremas de “áreas de momento y de la fuerza cortante”.

BASE DE DATOS

En esta investigación se trabaja con ecuaciones que relacionan variables para determinar giros y desplazamiento en puntos específicos de la viga elástica.

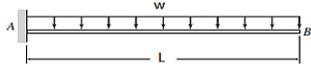
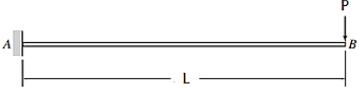
- BASE DE DATOS ANALÍTICOS

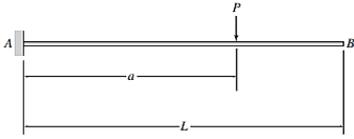
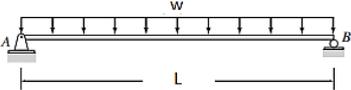
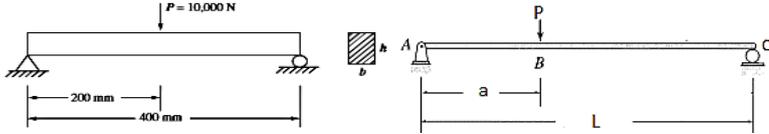
Solución analítica exacta	Método de Áreas de momento y fuerza cortante
	
<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2013)</p> $\theta(x) = \frac{w}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{2}x^2 + \frac{L^2}{2}x \right) \rightarrow \theta(x=2) = \frac{wL^3}{6EI}$ $u(x) = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{w}{2\kappa GA} (2Lx - x^2)$ $u(x=2) = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$	$\delta_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$
	
<p>Castro (2002)</p> $\theta(x) = \frac{5}{EI}x^2 - \frac{40}{EI}x \rightarrow \theta(x=4) = -\frac{80}{EI}$	$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{\kappa GA}$ $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{80}{EI}$

$u(x) = \frac{40}{2EI}x^2 - \frac{5}{3EI}x^3 + \frac{10}{GA_C}x$ $\rightarrow u(x=4) = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{\kappa GA}$ <p>-----</p> <p>Hibbeler (2004)</p> $u(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x) \rightarrow u(x=4) = \frac{640}{3EI}$	
	
<p>Fleischfresser (2012),</p> $x \leq a \rightarrow$ $y(x) = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3ax^2) + \frac{P}{\kappa GA}x$ $x \geq a \rightarrow y(x) = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a) + \frac{Pa}{\kappa GA}$	$\theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$ $\delta_{B \max} = \frac{Pa^2(3L-a)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$
	
<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2013)</p> $u(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \frac{w}{2\kappa GA}(Lx - x^2)$	$\delta_{C \max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA}$
	
<p>Logan (2007)</p> $\delta_{\max} = \frac{PL^4}{24EI}(4 + \varphi)$ $\varphi = \frac{12}{\kappa GAL^2}$	$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA}$
	
<p>Fleischfresser (2012)</p>	$\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA},$ $\delta_{L/2} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA}$

<p>Para $x \leq a$</p> $v_1(x) = \frac{P}{6EIL} [-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x] + \frac{P(L-a)}{\kappa GA} x$ <p>Para $x \geq a$</p> $v_2(x) = \frac{Pa}{6EIL} [x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2] + \frac{Pa(L-x)}{\kappa GA}$ $v_2(x = l/2) = \frac{Pa}{48EI} [3L^2 - 4a^2] + \frac{Pa}{2\kappa GA}$	
--	--

BASE DE DATOS NUMÉRICOS

Método de Áreas de momento y fuerza cortante	Métodos Numéricos
 <p>$w=100\text{kN/m}$, $L=2\text{m}$, $L/h=3.33$, $A=0.20 \times 0.60\text{m}^2$, $I_z=0.0036\text{m}^4$, $\kappa=5/6$ $E=50\text{GPa}$, $\mu=0.20$, $\rho=2.500\text{kg/m}^3$</p>	
$\delta_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^2}{2\kappa GA}$ $\delta_{BTT} = 1.207 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.111 \times 10^{-3} \text{ m}$ <p>$\dots \mathcal{E} = 7.95\%$</p> $\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} = 7.4074 \times 10^{-4} \text{ rad}$	<p>Fleischfresser (2012), Carrer et al (2014) Método de elementos de contorno: 64 celdas $\delta_{BTT} = \delta_{B(MEC)} = 0.0012 \text{ mm}$ $\delta_{BTEB} = 0.001 \text{ mm}$ $\dots \mathcal{E} = 8.33\%$</p> <p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 50 elementos $\delta_{SA} = \delta_{PRG} = 1.207 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.111 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\theta_{BSA} = \theta_{PRG} = 7.4074 \times 10^{-3} \text{ rad}$ $\dots \mathcal{E} = 7.95\%$</p>
 <p>De Campos (2015) $P=10\text{kN}$, $L=4\text{m}$, $L/h=5$, $A=0.30 \times 0.80=0.24\text{m}^2$, $I=0.0128\text{m}^4$, $E=1$, $G=0.4$, $\mu=0.25$, $\kappa=5/6$ $h=2.00\text{m}$, $L/h=2$, $I=0.2$, $A=0.6$ $h = 0.04\text{m}$, $L/h = 100$, $I=1.6 \times 10^{-6}$, $A=0.012$</p>	
$P = 100 \text{ kN}$, $A=0.1 \times 1=0.1\text{m}^2$, $I=1/120$ $E=2.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\mu=0.20$ $L=1\text{m}$, $L/h=1$ $L=5\text{m}$, $L/h=5$	
$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{\kappa GA} = \frac{640}{3EI} + \frac{40}{\kappa GA}$	<p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 100 elementos $L/h=5$</p>

$\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 1.717 \times 10^4 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.667 \times 10^4 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 2.91\%$ $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{80}{EI}$	$\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= \delta_{B(MEF)} = 1.717 \times 10^4 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.667 \times 10^4 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 2.91\%$ $\theta_B = 6.25 \times 10^3 \text{ rad}$
L/h=2 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 1.267 \times 10^3 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.067 \times 10^3 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 15.79\%$	L/h=2 $\left. \begin{aligned} \delta_{SA} &= \delta_{PRG} = 1.267 \times 10^3 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.067 \times 10^3 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 15.79\%$
L/h=100 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 1.3334 \times 10^8 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.3333 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 0.0075\%$ <p>$\delta_{BTT} > \delta_{BTEB}$, CORRECTO. No se genera el efecto de Shear Locking.</p>	L/h=100 $\left. \begin{aligned} \delta_{SA} &= \delta_{PRG} = 1.000 \times 10^8 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.333 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = -33.3\%$ <p>$\delta_{BTT} = \delta_{B(MEF)} < \delta_{BTEB}$ FALSO! (efecto de Shear Locking)</p>
Paiva Gomez de Souza C. y Guimaraes Cruz G. (2017) Método de Diferencias Finitas: n=55 L=1m, L/h = 1 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 3.3561 \times 10^{-5} \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 1.9512 \times 10^{-5} \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 41.86\%$	Paiva Gomez de Souza C. y Guimaraes Cruz G. (2017) Método de Diferencias Finitas: n=55 L=1m, L/h = 1 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 0.00385 \text{ cm} \\ \delta_{MA} &= \delta_{BTEB} = 0.00195 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 97.44\%$
L=5m, L/h = 5 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 2.4741 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 2.4390 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 1.419\%$	L=5m, L/h = 5 $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 0.25346 \text{ cm} \\ \delta_{MA} &= \delta_{BTEB} = 0.2439 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 3.92\%$
 <p>$P = 1000 \text{ kN}$, $a = L/2 = 1 \text{ m}$ $A = 0.20 \times 0.60 \text{ m}^2$, $I_z = 0.0036 \text{ m}^4$, $\kappa = 5/6$, $E = 50 \text{ GPa}$, $\mu = 0.20$, $\rho = 2.500 \text{ kg/m}^3$</p>	
$\theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$ $\delta_{B \max} = \frac{Pa^2(3L-a)}{6EI} + \frac{Pa}{\kappa GA}$	Fleischfresser (2012) Método de elementos de contorno: 64 celdas $\delta_{CTT} = \delta_{MEC-64} = 5.1096 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\delta_{CTEB} = 4.6296 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\varepsilon\% = 9.39\%$
 <p>$w = 100 \text{ kN/m}$, $L = 4 \text{ M}$, $A = 0.2 \times 0.6 \text{ m}^2$, $E = 50 \text{ GPa}$, $\mu = 0.20$</p>	
$\delta_{C \max} = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{wL^2}{8\kappa GA}$ $\left. \begin{aligned} \delta_{TT \max} &= 1.94785 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{TEB \max} &= 1.85185 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon\% = 5.184\%$	Fleischfresser (2012) Método de elementos de contorno: 64 celdas Del gráfico: $\left. \begin{aligned} \delta_{TT} &= \delta_{B(MEC-64)} = 0.00195 \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 0.00186 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon_{T-MEC} = 0.00\%$ $\dots \varepsilon_{T-EB} = 4.615\%$
 <p>$P = 10 \text{ kN}$, $L = 0.40 \text{ m}$, $A = 0.025 \times 0.050 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $L/h = 8$, $E = 207 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$ $P = 1000 \text{ Kn}$, $L = 4 \text{ m}$, $a = 3 \text{ m}$, $L/h = 6.67$</p>	

<p>A=0.20x0.60=0.12m², I_z=0.0036m⁴, κ=5/6 E=50GPa, μ=0.20, ρ=2.500kg/m³</p> <p>Paiva ... P =100 kN, A=0.1x1=0.1m², l=1/120 E=2.05x10⁸kN/m², μ=0.20 L=1m, L/h =1, a=0.2m L=1.5m, L/h =1.5 L=2m, L/h=2</p>	
$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4\kappa GA}$ $\left. \begin{aligned} \delta_{TT\max} &= 2.5934 \times 10^{-4} \text{ m} \\ \delta_{TEB\max} &= 2.4734 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon \% = 4.627\%$	<p>De Campos (2015) Método de Elementos Finitos: 64 elementos $\delta_{B(MEF-64)} = 0.2584 \text{ mm}$ $\delta_{Logan-2007} = 0.2597 \text{ mm}$ $\delta_{BTEB} = 0.2474 \text{ mm}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon_{T-L} = 0.5006\% \\ &\dots \varepsilon_{T-EB} = 4.26\% \end{aligned} \right\}$
$\delta_B = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} + \frac{Pab}{L\kappa GA}$ $\left. \begin{aligned} \delta_{BTT} &= 4.5267 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \delta_{BTEB} &= 4.1667 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots \varepsilon = 7.953\%$	<p>Fleischfresser (2012), Método de elementos de contorno: 64 celdas Del gráfico: $\delta_{TT} = \delta_{B(MEC-64)} = 0.0044 \text{ mm}$ $\delta_{BTEB} = 0.0041 \text{ mm}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon_{T-MEC} = 0.00\% \\ &\dots \varepsilon_{T-EB} = 6.82\% \end{aligned} \right\}$
$\delta_{L/2} = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} + \frac{Pa}{2\kappa GA}$ <p>Para x=L/2=0.5m, L=1m $\delta_{BTT} = 2.09756 \times 10^{-6} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 6.92683 \times 10^{-7} \text{ m}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 66.977\% \end{aligned} \right\}$ <p>Para x=L/2=0.75m, L=1.5M $\delta_{BTT} = 3.0122 \times 10^{-6} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 1.60732 \times 10^{-6} \text{ m}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 46.64\% \end{aligned} \right\}$ <p>Para x=L/2=1m, L=2m $\delta_{BTT} = 4.29268 \times 10^{-6} \text{ m}$ $\delta_{BTEB} = 2.88780 \times 10^{-6} \text{ m}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 32.727\% \end{aligned} \right\}$	<p>Paiva Gomez de Souza C. y Guimaraes Cruz G. (2017) p7,8 y 9. Método de Diferencias Finitas: n=55 De gráficos y tablas: Para x=L/2=0.5m, L=1m $\delta_{MT-MDF} = 0.00026 \text{ cm}$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00007 \text{ cm}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 271.43\% \end{aligned} \right\}$ <p>Para x=L/2=0.75m, L=1.5M $\delta_{MT-MDF} = 0.00035 \text{ cm}$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00016 \text{ cm}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 118.75\% \end{aligned} \right\}$ <p>Para x=L/2=1m, L=2m $\delta_{MT-MDF} = 0.00048 \text{ cm}$ $\delta_{MA} = \delta_{TEB} = 0.00029 \text{ cm}$ </p> $\left. \begin{aligned} &\dots \varepsilon = 65.52\% \end{aligned} \right\}$