

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
MECÁNICA Y DE ENERGÍA



INFORME FINAL DEL TEXTO
“TEXTO: DINAMICA DE GASES, TEORIA Y PROBLEMAS
APLICATIVOS”

AUTOR: Dr. JAIME GREGORIO FLORES SANCHEZ

ESTUDIANTE DE APOYO: GABRIEL ALONSO GARCIA LEÓN (1127210086)

(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de junio de 2017 al 31 de mayo de 2019)

(Resolución de aprobación N° 564-2017-R)

Callao, 2019

ÍNDICE

I.	ÍNDICE	1
II.	PROLOGO.	4
III.	INTRODUCCIÓN.....	5
IV.	CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO	7
	CAPÍTULO I. CINEMATICA DE UNA PARTICULA FLUIDA.....	7
1.1.	Método Lagrangiano	7
1.1.1.	Vector posición	7
1.1.2.	Vector velocidad	7
1.1.3.	Vector aceleración	7
1.2.	Método Euleriano.....	8
1.2.1.	Velocidad de la partícula fluida.....	8
1.2.2.	Aceleración total de la partícula fluida	8
1.3.	Flujo Rotacional	11
1.4.	La Función de Corriente (ψ).....	12
1.5.	Potencial de Velocidades (ϕ).....	13
1.6.	Flujo No Viscoso	14
1.6.1.	Conservación de Masa en forma Diferencial.....	14
1.6.2.	Cantidad de Movimiento.....	17
1.7.	Aplicaciones.....	20
	CAPITULO II: ANALISIS DIMENSIONAL Y TEORIA DE MODELOS	45
2.1.	Métodos de Cálculo	45
2.1.1.	Metodología del Método de Buckingham	45
2.2.	Teoría de Modelos	47
2.3.	Aplicaciones:.....	48
2.4.	Problemas propuestos	54
	CAPITULO III: CAPA LIMITE Y CUERPOS SUMERGIDOS.....	56
3.1.	Capa Limite.....	56
3.1.1.	Espesor de la capa límite real (δ).....	57
3.1.2.	Espesor de la capa limite aparente o aproximado (δ_a).....	57
3.1.3.	Sub-capa laminar (δ_0)	57
3.1.4.	Espesor de la capa limite por desplazamiento (δ^*).....	57

3.1.5.	Espesor de la capa limite por cantidad de movimiento (δ_θ) ..	58
3.1.6.	Espesor de la capa limite por energía cinética (δ_K):.....	59
3.1.7.	Ecuación de momento de cantidad de movimiento de VON KARMAN (Capa Limite Laminar).....	59
3.1.8.	Capa límite turbulenta en una placa lisa.....	62
3.1.9.	Control de la capa límite.....	62
3.2.	Cuerpos sumergidos en fluidos gaseosos	65
3.2.1.	Fuerzas sobre cuerpos en movimiento.....	66
3.2.2.	Fuerza de arrastre	68
3.2.3.	Fuerza de sustentación	71
3.2.4.	El perfil aerodinámico simple.....	75
3.2.5.	Aplicaciones:	78
CAPITULO IV: FLUJO COMPRESIBLE.....		87
4.1.	Flujo isentrópico unidimensional	88
4.1.1.	Propiedades de estancamiento	88
4.1.2.	Condición crítica	90
4.2.	Ductos de sección variable	90
4.2.1.	Toberas	90
4.2.2.	Difusor	91
4.2.3.	Tobera convergente – divergente.....	92
4.3.	Tobera convergente	94
	Gas	94
4.4.	Tobera convergente – divergente	96
CAPITULO V: FLUJOS COMPRESIBLES EN DUCTOS DE SECCIÓN		
	CONSTANTE	104
5.1.	Flujo FANNO.....	104
5.1.1.	Ecuaciones básicas para flujo adiabático.....	104
5.1.2.	Características de flujo FANNO.....	106
5.1.3.	Longitud máxima (L_{max} , L^*).....	109
5.1.4.	Aplicaciones:	110
5.2.	Flujo RAYLEIGH	117
5.2.1.	Línea RAYLEIGH	117

5.2.2. Relaciones básicas para el flujo RAYLEIGH	119
CAPITULO VI.....	128
6.1. Ondas de choque.....	128
6.1.1. Ondas de choque normal	128
6.1.2. Ondas de choque oblicuas	129
6.1.3. Ondas de choque cónicas	130
6.2. Aplicaciones:.....	131
V. REFERENCIALES.....	144
VI. APÉNDICES.....	144
VII. ANEXOS.....	154

II. PROLOGO.

El presente texto está dirigido para profesionales, estudiantes del área de ingeniería en energía de los fluidos gaseosos, los textos que se encuentran en las bibliotecas o en internet son dedicados específicamente a las sustancias incompresibles y compresibles, pero no separadamente.

Resulta pues muy tedioso encontrar aplicaciones prácticas de un solo tipo de fluidos, el texto será de mucha utilidad para encontrar aplicaciones específicamente gaseosas

Durante el desarrollo del presente texto se emplean procedimientos definidos en la teoría, empleando la formulación matemática y gráficos para la solución de algunos problemas ilustrativos de aplicaciones prácticas, requerimientos como ejemplo en las soluciones de problemas tratados en cualquier otro texto propuesto y en la presente obra que se presentan.

Esta presentación resultara un complemento indispensable en las líneas de investigación aplicada en el área de termofluidos, intercambiadores de calor, las cuales conforman componentes de una planta térmica o de distribución de gases por ductos o tuberías.

Por el enfoque actualizado de la teoría y su sustento en la investigación experimental trata efectos del aire sobre cuerpos solidos con o sin movimiento, transporte dentro de ductos o tuberías con y sin transferencia de calor.

El autor quiere agradecer a los estudiantes y lectores interesados por hacer posible esta realidad, que será de mucha ayuda, y está a la espera de comentarios y sugerencias al respecto para su mejora e innovación correspondiente.

III. INTRODUCCIÓN.

La formación de los futuros ingenieros que desarrollaran sus actividades en plantas térmicas a gas, vapor, industrias de transporte de aire comprimido, ventilación industrial por ductos, aire acondicionado, etc se les entrega el presente texto como una ayuda fundamental, debido a que la mayoría de los libros existentes desarrollan y muestran ejemplos de fluidos líquidos y no como el presente que es exclusivamente para el análisis, transporte de flujos gaseosos; como un elemento de consulta de mucha utilidad.

El presente texto presenta un enfoque sistematizado y actualizado de conocimientos orientado a un trabajo de dinámica de grupos de los estudiantes universitarios de ingeniería en la investigación experimental y su aplicación práctica que permitirá mejorar el proceso de Enseñanza-Aprendizaje y sensibilizar en el uso racional de la energía, con búsqueda de nuevas fuentes alternativas para la no contaminación del medio ambiente y con uso racional de ahorro energético y económico.

En el capítulo uno se enfocan la cinemática, dinámica, flujos viscosos y los que siguen el comportamiento del principio de Euler, con aplicaciones de aceleración, flujo potencial, función de corriente, así también la aplicación de la ecuación de Navier-Stokes, para obtener parámetros importantes como la presión en un espacio determinado. En el capítulo dos se desarrolla el análisis dimensional con la teoría de modelos, con sus respectivas aplicaciones prácticas; en el capítulo tres se explica y desarrolla la capa limite y su consecuente aplicación de cuerpos sumergidos en fluidos gaseosos, con movimiento o sin del fluido y cuerpo utilizando el concepto de velocidad relativa.

En el capítulo cuatro se detallan básicamente conceptos acerca del transporte de fluidos gaseosos siguiendo el proceso isoentropico, con aplicaciones en toberas y difusores, en el capítulo cinco se detalla exhaustivamente el estudio de flujos gaseosos con desplazamiento en ductos de sección constante sin y con transferencia de calor, con sus respectivas aplicaciones prácticas, finalmente en el capítulo seis se realiza el estudio de las ondas de choque,

seguido de una miscelánea de aplicaciones prácticas que engloba a estos cuatro conceptos prácticos, que se presentan en el campo laboral.

IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO

CAPÍTULO I. CINEMATICA DE UNA PARTICULA FLUIDA

Estudia el movimiento mecánico de una partícula fluida gaseosa en un flujo sin importar las fuerzas que lo ocasionen; también es el fenómeno físico que consiste en el cambio de posición de una partícula fluida en el espacio y el tiempo con respecto a un sistema de referencia establecido sin importar las causas que producen dicho movimiento. (Flores, 2017)

Existen dos métodos para analizar el movimiento de un fluido: el propuesto por Lagrange y el otro por Euler.

1.1. Método Lagrangiano

El estudio se centra en una partícula individual en el que se observara su movimiento en función del tiempo, sus parámetros de posición, velocidad y aceleración se denotan vectorialmente de la siguiente manera:

1.1.1. Vector posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.1)$$

1.1.2. Vector velocidad

El cual se obtiene derivando el vector posición en función del tiempo.

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} \\ \vec{V}(t) &= u(t)\hat{i} + v(t)\hat{j} + w(t)\hat{k} \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.3. Vector aceleración

De igual manera se obtiene derivando el vector velocidad en función del tiempo.

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{du(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dw(t)}{dt}\hat{k} \\ \vec{a}(t) &= a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k},\end{aligned}\tag{1.3}$$

1.2. Método Euleriano

En este tipo de análisis no está centrado en una sola partícula, sino en el conjunto de partículas en movimiento el cual es conocido como flujo, se lleva su estudio determinándolo en un volumen de control en función del espacio y el tiempo.

1.2.1. Velocidad de la partícula fluida

Tendremos por el método Euleriano la explicación de fluido en movimiento conocido como flujo y su vector velocidad el cual estará en función del espacio y tiempo: $\vec{V} = V(x, y, z, t)$

1.2.2. Aceleración total de la partícula fluida

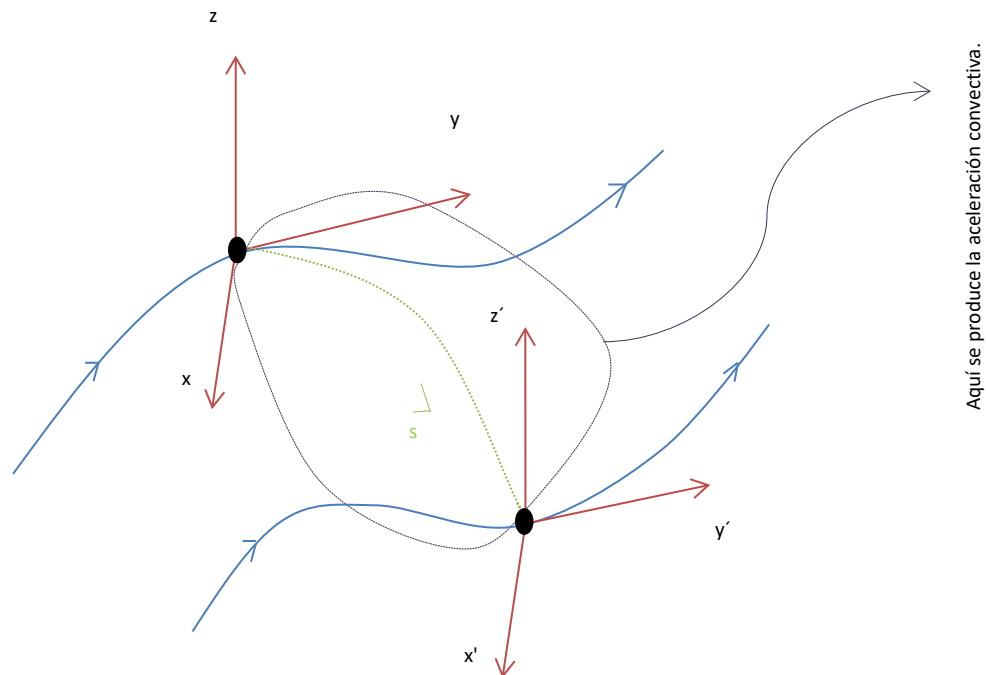
La aceleración se obtiene aplicando el criterio de la derivada sustancial a la velocidad, mediante el método conocido como regla de la cadena.

$$\begin{aligned}\frac{DV}{Dt} &= \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{dt} \\ \frac{DV}{Dt} &= \frac{dV}{dx} \cdot u + \frac{dV}{dy} \cdot v + \frac{dV}{dz} \cdot w + \frac{dV}{dt}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Aceleración convectiva. - Es el cambio de velocidad que se suscita por efecto del cambio de la posición de la partícula en un campo de flujo definido.

Figura N°1.1.

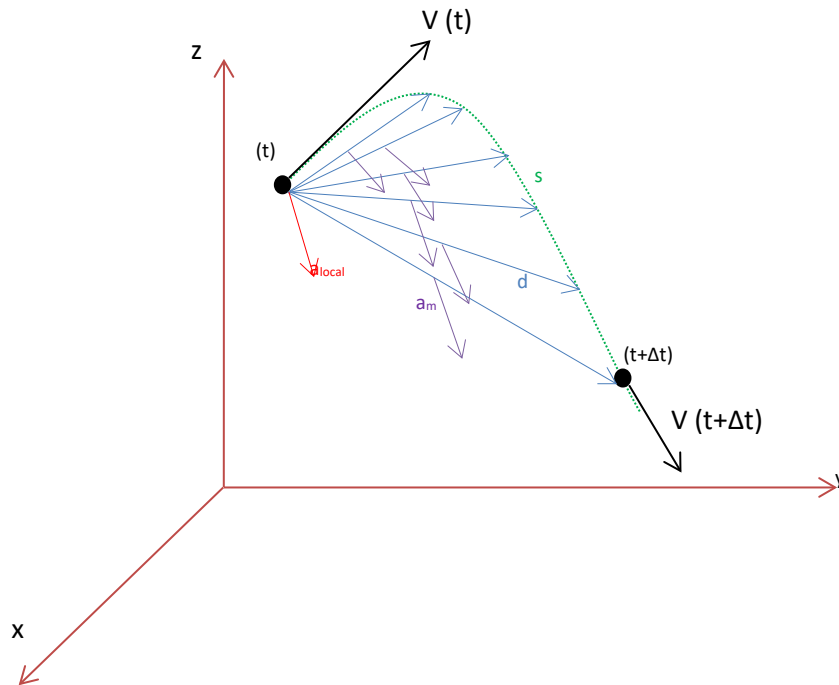
TRASLACIÓN DE LA PARTÍCULA DONDE SE PRODUCE LA ACELERACIÓN CONVECTIVA.



Fuente: Elaboración propia

Aceleración Local. - Es la aceleración instantánea; representa el cambio de velocidad en un instante de tiempo dado y un punto determinado como es (x, y, z) .

Figura N°1.2.
 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA ACELERACIÓN LOCAL EN
 PROCESO DE TRASLACIÓN



Fuente: Elaboración propia

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m; \text{ entonces } \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ reemplazando}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{local} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (1.5)$$

Donde la aceleración local queda expresada finalmente en los siguientes términos:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}, \quad (1.6)$$

Componentes de la aceleración en sus respectivos ejes coordenados cartesianos

Así mismo podemos decir que las velocidades en sus respectivos ejes estarán en función del espacio y tiempo, debido a que una partícula moviéndose en el eje respectivo puede sufrir un cambio instantáneo en su trayectoria todo esto suscitándose en el espacio (x, y, z) y tiempo dado; nos lleva a la siguiente expresión matemática en los respectivos ejes:

- Aceleración en el eje x

$$a_x = u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{du}{dy} + w \cdot \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt} \quad (1.7)$$

- Aceleración en el eje y

$$a_y = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} + w \cdot \frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt} \quad (1.8)$$

- Aceleración en el eje z

$$a_z = u \cdot \frac{dw}{dx} + v \cdot \frac{dw}{dy} + w \cdot \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt} \quad (1.9)$$

1.3. Flujo Rotacional

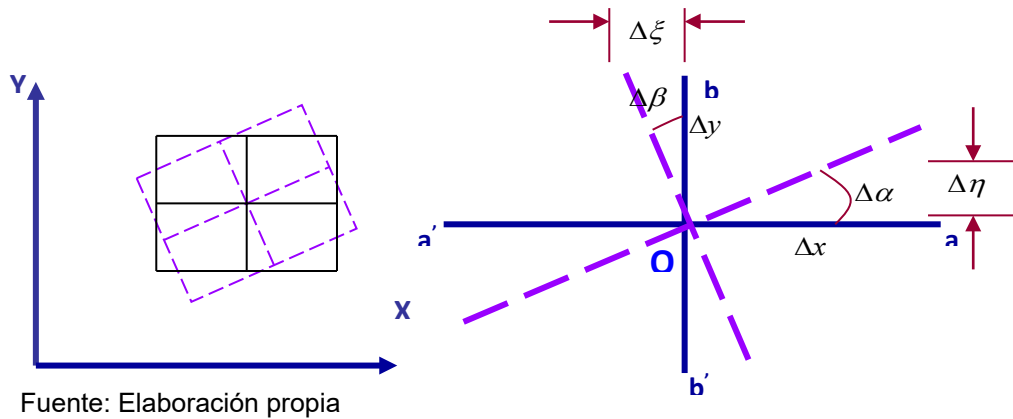
Se denomina a un flujo cuando las partículas presentan una rotación alrededor del centro de gravedad de la trayectoria a seguir por la línea de corriente.

La rotación ω de una partícula de fluido es la velocidad angular promedio de dos cualesquiera elementos de línea mutuamente perpendiculares de la partícula. Una partícula que se mueve en un campo de flujo tridimensional puede rotar alrededor de los tres ejes de coordenadas.

En general:

$$\bar{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (1.10)$$

Figura N° 1.3
FLUJO ROTACIONAL



De donde se obtiene:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right];$$

$$\text{Lo que concluimos } rot \bar{V} = \nabla \times \bar{V} \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \bar{V}, \quad (1.11)$$

1.4. La Función de Corriente (ψ)

Es un dispositivo matemático que relaciona las líneas de corriente y la de velocidades en un flujo; nos permite eliminar la ecuación de continuidad y resolver la ecuación de la cantidad de movimiento directamente para una única variable ψ .

Es aplicable solo si la ecuación de continuidad se puede reducir a dos sumandos; considerando flujo estacionario, para un flujo bidimensional y a la vez incompresible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

Teniendo que: ψ es función de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$ $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$

Definimos:
$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1.13}$$

1.5. Potencial de Velocidades (ϕ)

La irrotacionalidad da lugar a una función escalar Φ ; es decir se tiene que un vector con rotacionalidad nulo es el gradiente de una función escalar; si

$\nabla \times \bar{V} \equiv 0$, se tiene: $\bar{V} = \nabla \phi$

Donde $\phi = \phi(x, y, z, t)$, denominado potencial de velocidades, definido:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.14}$$

las líneas o superficies ϕ constantes se denominan líneas potenciales del fluido; es tridimensional y no está limitada a dos coordenadas.

En coordenadas cilíndricas sabiendo que el: $\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$

Dónde:
$$V_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad ; \quad V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad ; \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.15}$$

NOTA:

- La función de corriente ψ , satisface la ecuación de continuidad para flujo incompresible bidimensional
- La función de corriente ψ no está sujeta a la restricción de flujo irrotacional.

Sustituyendo:
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1.16}$$

- En la condición de irrotacionalidad: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots \text{Ec. de LAPLACE} \tag{1.17}$$

- y en la condición de continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots \text{Ec. de LAPLACE} \quad (1.18)$$

Si un flujo es IRROTACIONAL y en dos coordenadas, existen tanto la función de corriente ψ como el potencial de velocidades ϕ y las líneas de corriente y equipotenciales son ortogonales, excepto en los puntos de remanso; es decir:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \text{Ec. de CAUCHY-RIEMANN} \quad (1.19)$$

- Cualquier función de Ψ ó Φ que satisface la ecuación de LAPLACE representa un posible campo de flujo bidimensional, irrotacional e incompresible.
- Toda función Φ que satisfaga la ecuación de LAPLACE¹ es un caso posible de flujo IRROTACIONAL de un fluido.

1.6. Flujo No Viscoso

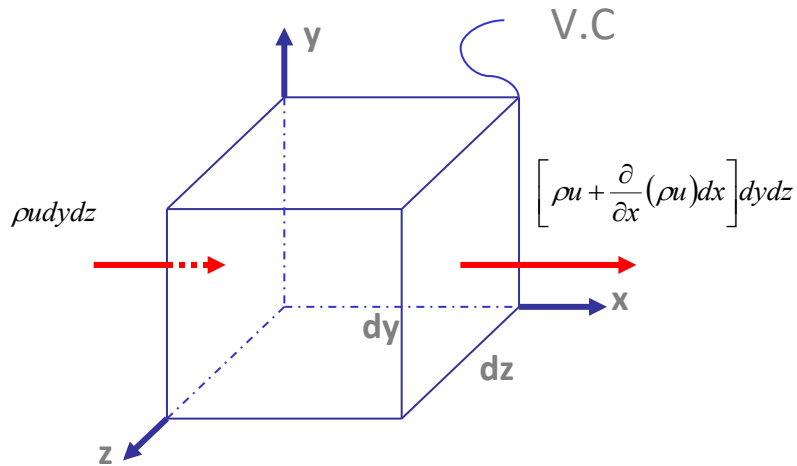
1.6.1. Conservación de Masa en forma Diferencial

La ecuación de conservación de masa se tiene en forma diferencial en un volumen de control infinitesimal mostrado

$$0 = \iiint_{\forall c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum (\rho_i A_i V_i)_{SAL} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{ENT} \quad (1.20)$$

¹ Pierre **Laplace** fue un matemático, astrónomo y físico francés.

Figura N° 1.4.
 FLUJO MÁSICO DE UNA PARTICULA FLUIDA DE UN VOLUMEN DE
 CONTROL DIFERENCIAL



Fuente: Elaboración propia

Como el elemento es tan pequeño se reduce al término diferencial:

$$\iiint_{V.C} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (1.21)$$

Apareciendo en las seis caras los términos de flujo másico y haciendo uso del término de continuo se tiene:

CARA	FLUJO MASICO DE ENTRADA	FLUJO MASICO DE SALIDA
X	$\rho u dy dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz$
Y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx dz$
Z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dx dy$

Reemplazando en (1.20)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.22)$$

Ecuación válida para flujo estacionario o no, viscoso o sin fricción, compresible o incompresible.

El operador gradiente $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ nos permite escribir la ecuación de

continuidad en una forma compacta:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \equiv \nabla \cdot (\rho \bar{V}) \quad (1.23)$$

Siendo la forma vectorial (compacta): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (1.24)$

Las ecuaciones de movimiento para flujos sin fricción; denominadas ecuaciones de **EULER**, pueden obtenerse de las ecuaciones generales de movimiento, puesto que en un flujo sin fricción, no hay esfuerzos cortante y el esfuerzo normal es el negativo de la presión termodinámica, entonces se tiene: ecuación de movimiento para un flujo sin fricción.

Ecuación de Euler

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

como ecuación vectorial tenemos:

$$\bar{\rho g} - \nabla p = \rho \frac{D\bar{V}}{Dt} \quad (1.26)$$

Ecuación válida para flujo estacionario o no, viscoso o sin fricción, compresible o incompresible. En forma compacta usando el Euleriano se representa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (1.27)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores se tiene:

a. Flujo Compresible Estacionario

$$\partial \rho / \partial t \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.30)$$

b. Flujo Incompresible

$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$, independientemente de que el movimiento sea estacionario o no,

se tiene:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (V_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.32)$$

1.6.2. Cantidad de Movimiento

$$\text{Sabemos: } \Sigma \bar{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{\forall C} \rho \bar{V} dV + \Sigma (\dot{m}_i \bar{V}_i)_{SAL} - \Sigma (\dot{m}_i \bar{V}_i)_{ENT} \quad (1.33)$$

Como el elemento de volumen es tan pequeño:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\forall C} \rho \bar{V} dV \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{V}) dx dy dz \quad (1.34)$$

tomando el mismo cubo de dimensiones diferenciales se tiene:

$$\Sigma \bar{F} = dx dy dz \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \rho \bar{V}) \right] \quad (1.35)$$

que se simplifica y se obtiene la siguiente ecuación (1.36)

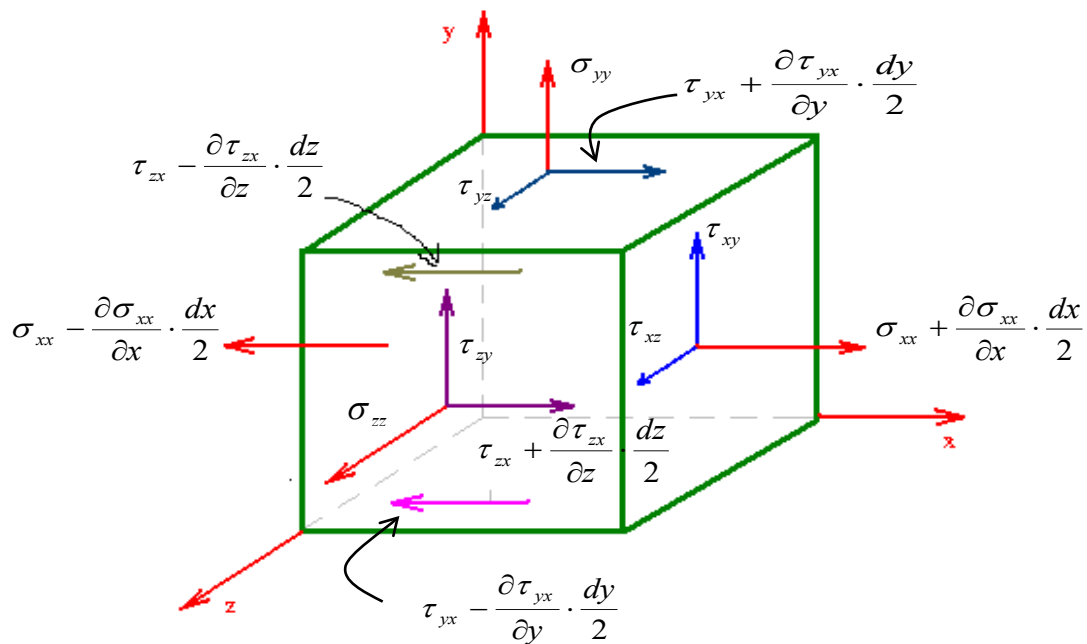
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(u \rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho \bar{V}) = \bar{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) \right] + \rho \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right] \quad (1.36)$$

Las fuerzas de superficie son debidas a los esfuerzos cortantes y normales en las caras de la superficie de control mostrado

CARA	FLUJO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO A LA ENTRADA	FLUJO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO A LA SALIDA
x	$\rho u \bar{V} dy dz$	$\left[\rho u \bar{V} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \bar{V}) dx \right] dy dz$
y	$\rho v \bar{V} dx dz$	$\left[\rho v \bar{V} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \bar{V}) dy \right] dx dz$
z	$\rho w \bar{V} dy dx$	$\left[\rho w \bar{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \bar{V}) dz \right] dy dx$

Figura N° 1.5.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA FLUIDA EN UN VOLUMEN DE CAUDAL DIFERENCIAL



Fuente: Elaboración propia

Simplificando estos esfuerzos en las direcciones establecidas y reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.37) \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Vectorialmente: $\rho \bar{g} - \nabla p + \nabla \tau_{ij} = \rho \frac{D\bar{V}}{Dt}$ (1.38)

Fuerza gravitatoria por unidad de volumen + fuerza de presión por unidad de volumen + fuerza viscosa por unidad de volumen = densidad x aceleración.

Si el flujo es incompresible sin fricción se tiene la ecuación de Euler:

$$\rho \bar{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (1.39)$$

En forma compacta: $\rho \bar{g} - \nabla p = \rho \frac{D\bar{V}}{Dt}$ (1.40)

Y en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 g_r - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = a_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \\
 g_\theta - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} = a_\theta &= \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r V_\theta}{r} \\
 g_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = a_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Para flujo viscoso homogéneo, utilizando la definición de la Ley de viscosidad de Stokes se obtiene la ecuación de Navier²-Stokes³:

² Claude-Louis Marie Henri Navier fue un ingeniero y físico francés

³ George Gabriel Stokes, primer Baronet fue un matemático y físico irlandés

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (1.42)$$

Para flujo incompresible viscoso finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\quad (1.43)$$

1.7. Aplicaciones

- 1.1. El campo de velocidad de un flujo está definido $\vec{V} = (3x + 5)\hat{i} + (4 - 3y)\hat{j}$, densidad ρ ; se pide:
- la función de corriente.
 - los puntos de estancamiento.
 - la función potencial.
 - La diferencia de presiones entre el origen y el punto (2,2,2)

Solución:

Para determinar la función de corriente (ψ), esta debe ser incompresible y bidimensional.

Por divergencia: $Div(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 3 - 3 = 0 \dots$ si es incompresible.

∴ Por lo tanto, cumple con ser incompresible y bidimensional, existe la función de corriente. Se sabe:

$$u = \frac{d\psi}{dy} \quad \wedge \quad v = -\frac{d\psi}{dx}$$

$$\int (3x + 5)dy = \int d\psi \quad \wedge \quad \int (-4 + 3y)dx = \int d\psi$$

$$3xy + 5y + c_1 = \psi' \quad \wedge \quad -4x + 3yx + c_2 = \psi''$$

$$\therefore \psi = -4x + 5y + 3xy + c$$

a. Puntos de estancamiento:

$$u = 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -2.5$$

$$v = 4 - 3y = 0 \rightarrow y = 4/3$$

$$\therefore \text{Pto. Estancamiento } (-2.5 ; \frac{4}{3})$$

b. Para la función potencial(ϕ), debe ser flujo irrotacional.

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) \hat{i} = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) \hat{j} = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \hat{k} = 0$$

$$\therefore \omega = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} = 0 \dots \text{si es un flujo irrotacional.}$$

Sabemos que: $u = \frac{d\phi}{dx} \quad \wedge \quad v = \frac{d\phi}{dy}$

$$\int (3x + 5)dx = \int d\phi \quad \wedge \quad \int (4 - 3y)dy = \int d\phi$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 5x + c_1 = \phi_1 \quad \wedge \quad 4y + \frac{3}{2}y^2 + c_2 = \phi_2$$

$$\therefore \phi = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + 5x + 4y + c$$

c. La diferencia de presiones por la ecuación de Navier-Stokes,

- Para el eje x: $\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{dP}{dx} + \rho g_x$

$$\rho((3x + 5) * 3) = -\frac{dP}{dx}$$

$$\rho(9x + 15) = -\frac{dP}{dx}$$

$$-\rho(9x + 15)dx = dP$$

$$\int -\rho(9x + 15)dx = \int dP \dots \text{se integra con respecto a "x".}$$

$$-\rho\left(\frac{9}{2}x^2 + 15x\right) + f(y) = P \dots \text{Ecuacion general.}$$

Derivando con respecto a "y":

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f'(y) \dots \dots \dots (a)$$

- Para el eje y: $\rho\left(\frac{Dv}{Dt}\right) = -\frac{dP}{dy} + \rho g_y$

$$\rho((4 - 3y) * -3) = -\frac{dP}{dy}$$

$$\rho(-12 + 9y) = -\frac{dP}{dy}$$

$$\rho(12 - 9y) = \frac{dP}{dy} \dots \dots \dots (b)$$

Igualando (a) y (b): $\rho(12 - 9y) = f'(y)$, integrando

$$f(y) = \rho\left(-\frac{9}{2}y^2 + 12y\right) \dots (\alpha)$$

- Para el eje z:

$$\rho\left(\frac{Dw}{Dt}\right) = -\frac{dP}{dz} + \rho g_z$$

$$\rho\left(u \cdot \frac{dw}{dx} + v \cdot \frac{dw}{dy} + w \cdot \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}\right) = -\frac{dP}{dz} + \rho g_z$$

$$-\rho g_z = -\frac{dP}{dz};$$

$$-\rho g = \frac{dP}{dz}, \text{ integrando:}$$

$$-\rho g z = P \dots \dots \dots (\beta)$$

Reemplazando (α) y (β) en nuestra ecuación general:

$$P = -\rho\left(\frac{9}{2}x^2 + 15x\right) + \rho\left(-\frac{9}{2}y^2 + 12y\right) - \rho g z$$

$$P_{(2,2,2)} = 0$$

$$P_{(2,2,2)} = -61.61\rho$$

$$\therefore \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{(2,2,2)} - \mathbf{P}_{(0,0,0)} = -61.61\rho$$

1.2. Sea un campo de flujo definido por el vector velocidad:

$$\vec{V} = \frac{x}{1+2t}\hat{i} + \frac{y}{1+t}\hat{j}; \text{ se pide:}$$

- La ecuación de las líneas de corriente para un tiempo $t = 0$, en el punto $(x; y) = (1,1)$ y bosqueje el grafico.
- La ecuación de las líneas de trayectoria, bosquejar el grafico haciendo comparación con la gráfica de línea de corriente para un tiempo $t = 0$.

Solución:

Se sabe: $u dy - v dx = 0$; $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, reemplazando valores:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\frac{x}{1+2t}} &= \frac{dy}{\frac{y}{1+t}} \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \cdot \frac{1+t}{1+2t} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{dy}{y} \cdot \frac{1+t}{1+2t} + c \\ \ln(x) &= \ln(y) \cdot \frac{1+t}{1+2t} + c \end{aligned}$$

Reemplazando el punto $(x; y) = (1,1)$ para un tiempo $t = 0$.

$$\ln(1) = \ln(1) \cdot 1 + c$$

$$c = 0$$

Entonces la ecuación de las líneas de corriente será:

$$\frac{1+2t}{1+t} \cdot \ln(x) = \ln(y)$$

$$\ln(x)^{\frac{1+2t}{1+t}} = \ln(y)$$

$$(x)^{\frac{1+2t}{1+t}} = y$$

$$\therefore y = (x)^{\frac{1+2t}{1+t}} \dots \text{ecu. de líneas de corriente.}$$

Para un $t = 0 \rightarrow y = x$

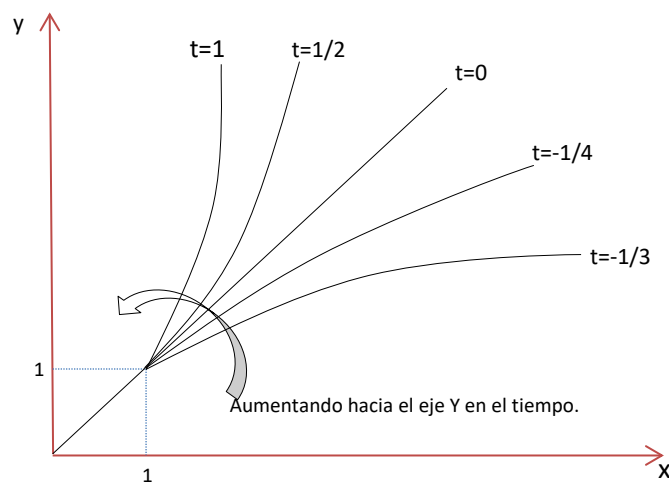
Para un $t = 1 \rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}$

Para un $t = 1/2 \rightarrow y = x^{\frac{4}{3}}$

Para un $t = -1/3 \rightarrow y = x^{\frac{1}{2}}$

Para un $t = -1/4 \rightarrow y = x^{\frac{2}{3}}$. Se muestra la familia de las líneas de corriente

Figura N° 1.6.
FAMILIA DE LINEAS DE CORRIENTE



Fuente: Elaboración propia

Por otro método: $u = \frac{dx}{ds} \wedge v = \frac{dy}{ds}$

$$\frac{x}{1+2t} = \frac{dx}{ds} \wedge \frac{y}{1+t} = \frac{dy}{ds}$$

$$\int \frac{ds}{1+2t} = \int \frac{dx}{x} \wedge \int \frac{ds}{1+t} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{s}{1+2t} + c_1 = \ln(x) \wedge \frac{s}{1+t} + c_2 = \ln(y)$$

✚ Recordando propiedades básicas de logaritmo:

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $n\ln(x) = \ln(x)^n$
- $\ln(e) = 1$

Entonces será lo mismo expresar las ecuaciones ya integradas de la siguiente manera:

$$\ln(x) = \frac{s}{1+2t} \ln(e) + \ln(c_1) \quad \wedge \quad \ln(y) = \frac{s}{1+t} \ln(e) + \ln(c_2)$$

$$\ln(x) = \ln(e)^{\frac{s}{1+2t}} + \ln(c_1) \quad \wedge \quad \ln(y) = \ln(e)^{\frac{s}{1+t}} + \ln(c_2)$$

$$\ln(x) = \ln(e^{\frac{s}{1+2t}} \cdot c_1) \quad \wedge \quad \ln(y) = \ln(e^{\frac{s}{1+t}} + \ln(c_2))$$

$$x = e^{\frac{s}{1+2t}} \cdot c_1 \quad \wedge \quad y = e^{\frac{s}{1+t}} \cdot c_2$$

Por condiciones de contorno $s = 0$ y se sabe que pasa también por el punto $(x; y) = (1,1)$. Luego $c_1 = 1 \quad \wedge \quad c_2 = 1$

Entonces: $x = e^{\frac{s}{1+2t}} \quad \wedge \quad y = e^{\frac{s}{1+t}}$

$$\ln(x) = \ln(e)^{\frac{s}{1+2t}} \quad \wedge \quad \ln(y) = \ln(e)^{\frac{s}{1+t}}$$

$$\ln(x) = \frac{s}{1+2t} \quad \wedge \quad \ln(y) = \frac{s}{1+t}$$

$$\frac{1+2t}{s} \cdot \ln(x) = 1 \quad \wedge \quad \frac{1+t}{s} \cdot \ln(y) = 1$$

Igualando las dos expresiones tendremos:

$$\frac{1+t}{s} \cdot \ln(y) = \frac{1+2t}{s} \cdot \ln(x)$$

$$\ln(y) = \frac{1+2t}{1+t} \cdot \ln(x)$$

$$\ln(y) = \ln(x)^{\frac{1+2t}{1+t}}$$

$$\therefore y = (x)^{\frac{1+2t}{1+t}} \dots \text{ecu. de líneas de corriente}$$

b. Para hallar la ecuación de las líneas de trayectoria en el tiempo $t=0$, por definición:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad \wedge \quad v = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{1+2t} = \frac{dx}{dt} \quad \wedge \quad \frac{y}{1+t} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+2t} \quad \wedge \quad \frac{dy}{y} = \frac{dt}{1+t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{1+2t} \quad \wedge \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$\ln(x) = \frac{1}{2} \ln(1+2t) + c_1 \quad \wedge \quad \ln(y) = \ln(1+t) + c_2$$

Evaluando en el punto $(x; y) = (1,1)$ y $t = 0$.

$$c_1 = 0 \wedge c_2 = 0$$

Quedando las expresiones de la forma:

$$\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + 2t) \wedge \ln(y) = \ln(1 + t)$$

$$x = (1 + 2t)^{\frac{1}{2}} \dots (\alpha) \wedge y = (1 + t) \dots (\gamma)$$

Despejando 't' en la ecuación (γ) : $t = y - 1 \dots (\beta)$

Reemplazando la ecuación (β) en (α) :

$$x = (1 + 2(y - 1))^{\frac{1}{2}}$$

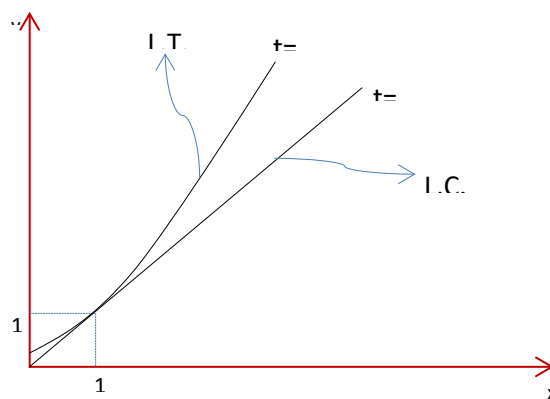
$$x = (1 + 2y - 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = (2y - 1)$$

$$\therefore y = \frac{x^2 + 1}{2} \dots \text{ecuación de líneas de trayectoria.}$$

Figura N° 1.7

BOSQUEJO DE COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LÍNEAS DE CORRIENTE Y LÍNEAS DE TRAYECTORIA EN UN TIEMPO $T=0$.



Fuente: Elaboración propia.

- 1.3. Sea el movimiento en régimen permanente definido por el campo de velocidades:

$$\vec{V} = (4x^2y - 1)\hat{i} - (4xy^2)\hat{j}; \text{ se pide la:}$$

- función de corriente.
- aceleración y la vorticidad.
- ecuación de líneas de corriente y bosqueje el grafico.

Solución:

a. Para que exista la ψ debe cumplir dos condiciones:

- Ser bidimensional e incomprensible.

Por divergencia: $Div(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 8xy - 8xy = 0 \dots$ si es incomprensible.

\therefore Por lo tanto, si existe la función de corriente.

Sabemos que: $u = \frac{d\psi}{dy} \quad \wedge \quad v = -\frac{d\psi}{dx}$

$$\int (4x^2y - 1)dy = \int d\psi \quad \wedge \quad \int -(-4xy^2)dx = \int d\psi$$

$$2x^2y^2 - y + c_1 = \psi' \quad \wedge \quad 2x^2y^2 + c_2 = \psi''$$

$$\therefore \psi = 2x^2y^2 - y + c$$

b. Hallando el vector aceleración y la vorticidad:

$$a_x = u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{du}{dy} = (4x^2y - 1)(8xy) + (-4xy^2)(4x^2) = 16x^3y^2 - 8xy$$

$$a_y = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} = (4x^2y - 1)(-4y^2) + (-4xy^2)(-8xy)$$

$$= 16x^2y^3 + 4y^2$$

$$\therefore \vec{a} = (16x^3y^2 - 8xy)\hat{i} + (16x^2y^3 + 4y^2)\hat{j}$$

Se sabe por definición que la vorticidad será:

$$\Omega = 2\omega = 2rot(\nabla \times \vec{V}) = (\nabla \times \vec{V})$$

$$\Omega_x = \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) \hat{i} = 0$$

$$\Omega_y = \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) \hat{j} = 0$$

$$\Omega_z = \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \hat{k} = (-4y^2 - 4x^2)\hat{k}$$

$$\therefore \Omega = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k} = (-4y^2 - 4x^2)\hat{k}$$

- c. La ecuación de las líneas de corriente lo determinaremos mediante el primer método ya conocido: $udy - vdx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy^2}{4x^2y - 1}$$

Verificamos que tipo de ecuación diferencial es:

$(4xy^2)dx + (4x^2y - 1)dy = 0$, siendo de la forma $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$.

$$M(x; y) = 4xy^2$$

$$N(x; y) = 4x^2y - 1$$

Comprobamos si es una ecuación diferencial exacta, recordando fundamentos de ecuaciones diferenciales tendremos por definición que:

$$\frac{dM(x; y)}{dy} = \frac{dN(x; y)}{dx}$$

$$\frac{d(4xy^2)}{dy} = \frac{d(4x^2y - 1)}{dx}$$

$$8xy = 8xy$$

Cumple la condición de ser una ecuación diferencial exacta.

Cuya solución de la ecuación diferencial será: $F(x; y) = Cte$

1er Paso: $\frac{dF(x; y)}{dx} = M(x; y)$

$$F(x; y) = M(x; y)dx$$

$$\int dF(x; y) = \int M(x; y)dx$$

$$F(x; y) = \int M(x; y)dx$$

$$F(x; y) = \int 4xy^2 dx$$

$$F(x; y) = 2x^2y^2 + f(y) \dots (\alpha)$$

Derivando (α) respecto a la variable y :

$$\frac{dF(x; y)}{dy} = 4x^2y + f'(y) \dots (\beta)$$

2do Paso: $\frac{dF(x; y)}{dy} = N(x; y)$

$$\frac{dF(x; y)}{dy} = 4x^2y - 1 \dots (\gamma)$$

Igualando (β) con (γ) tendremos:

$$\frac{dF(x; y)}{dy} = 4x^2y - 1 = 4x^2y + f'(y)$$

$$f'(y) = -1$$

$$\int f'(y) dy = \int -1 dy \dots \text{integrando respecto a ''y''}.$$

$$f(y) = -y + C_0 \dots (\delta)$$

Reemplazando (δ) en (α) tendremos como resultado final la ecuación de líneas de corriente:

$$F(x; y) = 2x^2y^2 - y + C_0$$

Sabiendo que: $F(x; y) = Cte$

$$cte = 2x^2y^2 - y + C_0$$

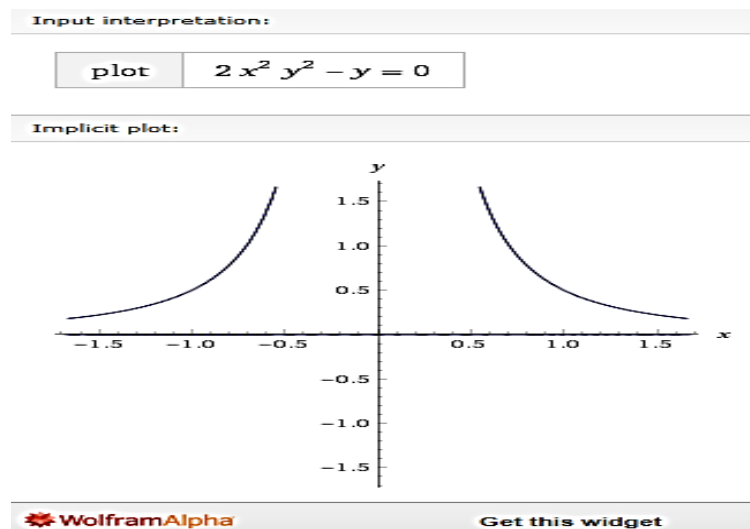
$$0 = 2x^2y^2 - y + (C_0 + cte)$$

$$\therefore 0 = 2x^2y^2 - y + C$$

Siendo la gráfica de la ecuación de líneas de corriente la mostrada en el plano

Figura N° 1.8.

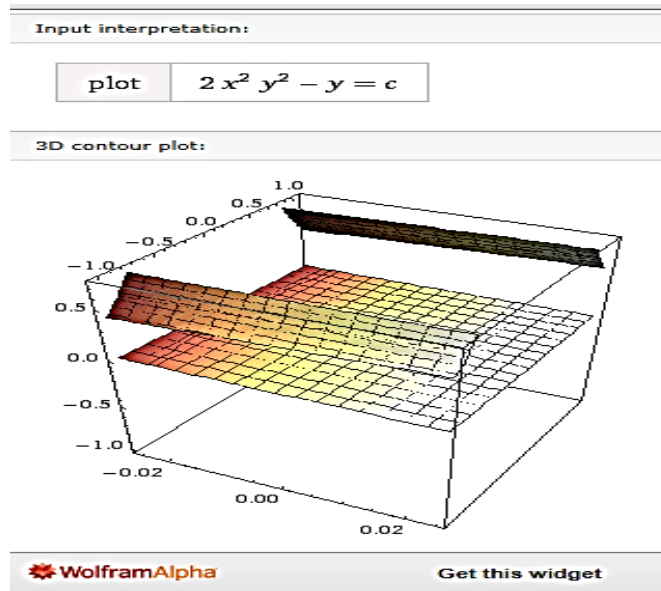
PLANOS X-Y DE LÍNEAS DE CORRIENTE ASUMIENDO UN $C=0$, MEDIANTE EL PROGRAMA WOLFRAMALPHA



Fuente: Elaboración propia

.Figura N° 1.9.

GRAFICA REFERIDA A LA ECUACIÓN DE LÍNEAS DE CORRIENTE ASUMIENDO UN $c \neq 0$ EN UN PLANO DE 3 DIMENSIONES, MEDIANTE EL PROGRAMA WOLFRAMALPHA.



Fuente: Elaboración propia

- 1.4. En un campo de flujo se tiene $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$ se pide determinar:
- La deformación angular.
 - La aceleración en el punto (1,2).
 - La circulación alrededor de la curva definida por: $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$.

Solución:

- La deformación angular será denotada por:

$$\frac{-dy}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{-dy}{dt} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{-dy}{dt} = -2y - 2y$$

$$\therefore \frac{-dy}{dt} = -4y$$

- Hallando la aceleración en el pto. (1,2):

$$a_x = u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} = (x^2 - y^2)(2x) + (-2xy)(-2y) = 2x^3 + 2xy^2$$

$$a_y = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} = (x^2 - y^2)(-2y) + (-2xy)(-2x) = 2y^3 + 2x^2y$$

$$\vec{a} = (2x^3 + 2xy^2)\hat{i} + (2y^3 + 2x^2y)\hat{j}$$

$$\therefore \vec{a}_{(1,2)} = (10)\hat{i} + (20)\hat{j}$$

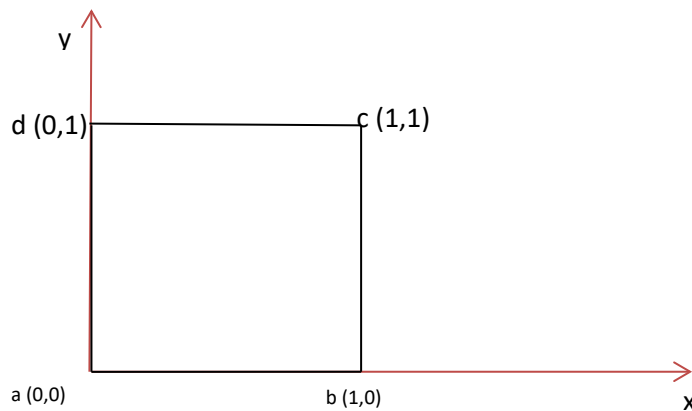
c. Sabemos que la circulación será el equivalente al trabajo desarrollado por el vector velocidad a lo largo de la línea L y está dado por el valor de la integral:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} dL$$

Siendo la circulación alrededor de la curva cerrada delimitada por:

Figura N° 1.10.

CUADRADO INFINITESIMAL EN EL PLANO XY.



Fuente: Elaboración propia

$$\Gamma = \int_a^b u(x; y) dx + \int_b^c v(x; y) dy + \int_c^d u(x; y) dx + \int_d^a v(x; y) dy$$

$$\Gamma = \int_a^b (x^2 - y^2) dx + \int_b^c -2xy dy + \int_c^d (x^2 - y^2) dx + \int_d^a -2xy dy$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + (-1 - 0) + \left(0 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right) + (0 + 0)$$

$$\therefore \Gamma = 0$$

1.5. Un campo de flujo incomprensible está dado por $\phi = 2(x^2 - y^2) + xy$, determine:

- La función de corriente ψ y bosqueje el grafico para $\psi = 1$, si se sabe que para el punto $(x; y) = (0,0)$ la función de corriente toma el valor de cero $\psi = 0$.
- El vector velocidad y la deformación volumétrica.
- El vector de aceleración.
- La presión en el punto $(x;y)$.

Solución:

a. Aplicando la ecuación de Cauchy-Reiman:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dy} &= \frac{d\phi}{dx} \quad \wedge \quad -\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\phi}{dy} \\ \frac{d\psi}{dy} &= 4x + y \quad \wedge \quad -\frac{d\psi}{dx} = -4y + x \\ \int d\psi &= \int (4x + y) dy \quad \wedge \quad \int d\psi = \int (4y - x) dx \\ \psi' &= 4xy + 2y^2 + c_1 \quad \wedge \quad \psi'' = 4xy - 2x^2 + c_2 \\ \therefore \psi &= 2(y^2 - x^2) + 4xy + c \end{aligned}$$

Si reemplazamos en la función de corriente $\psi = 0$ y $(x; y) = (0,0)$:

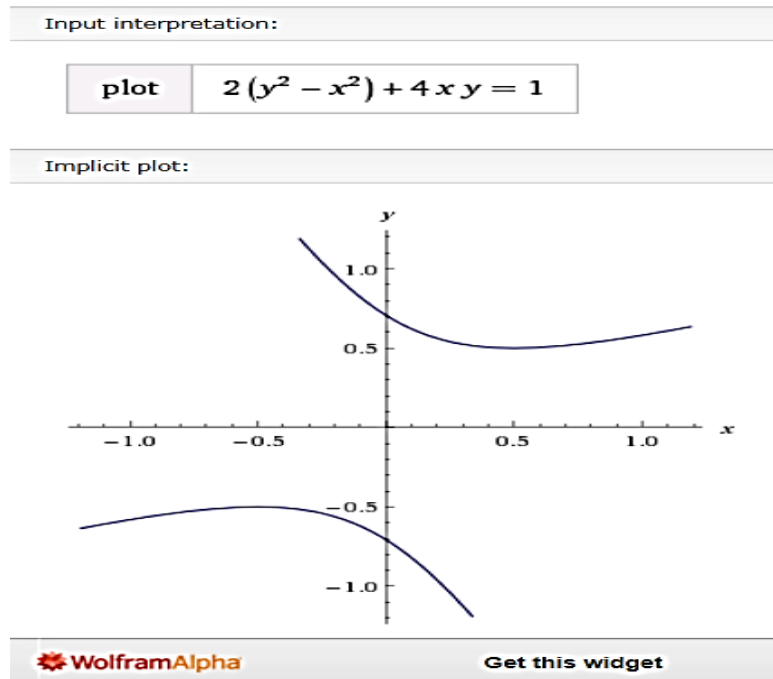
$$0 = 2(0^2 - 0^2) + 4(0)(0) + c, \text{ luego } c = 0$$

Entonces teniendo como ecuación final: $\psi = 2(y^2 - x^2) + 4xy$

Bosquejando la función de corriente para: $\psi = 1 \rightarrow 1 = 2(y^2 - x^2) + 4xy$

Figura N° 1.11.

GRAFICA DE FUNCIÓN DE CORRIENTE PARA UN $\Psi = 1$.



Fuente: Elaboración propia

b. Teniendo el vector velocidad: $\vec{V} = (4x + y)\hat{i} + (x - 4y)\hat{j}$

La deformación volumétrica es: $\therefore \frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 4 - 4 = 0$

c. Hallando el vector aceleración:

$$a_x = u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} = (4x + y)(4) + (-4y + x)(1) = 17x$$

$$a_y = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} = (4x + y)(1) + (-4y + x)(-4) = 17y$$

$$\therefore \vec{a} = (17x)\hat{i} + (17y)\hat{j}$$

d. Sabemos que es un flujo incomprensible, aplicando la ecuación de Navier-Stokes:

- En el eje x:

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{dP}{dx} + \rho g_x + \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right)$$

$$\rho(17x) = -\frac{dP}{dx} + \rho g_x + \mu(0)$$

$$\rho(17x)dx = -dP$$

$$\int -\rho(17x) dx = \int dP$$

$$P = \left(-\frac{17}{2} x^2 \right) \rho - f(y) \dots \text{Ecu. general.}$$

Derivando respecto a "y": $\frac{dP}{dy} = -f'(y)$.

- En el eje y:

$$\rho \left(\frac{Dv}{Dt} \right) = -\frac{dP}{dy} + \rho g_y + \mu \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right)$$

$$\rho(17y) = -\frac{dP}{dy} = -(-f'(y))$$

$$17y\rho = f'(y)$$

$$\int 17y\rho dy = \int f'(y) dy \dots \text{integrando se tiene:}$$

$$f(y) = \frac{17}{2} y^2 \rho$$

Remplazando en la ecuación general tendremos como resultado final:

$$P = -\frac{17}{2} x^2 \rho - \frac{17}{2} y^2 \rho$$

$$\therefore P = -\frac{17}{2} \rho (x^2 + y^2)$$

- 1.6. Para un flujo bidimensional y bidireccional se tiene:

$V_\theta = 20 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \text{sen}\theta - \frac{40}{r}$ y $V_r = -20 \text{cos}\theta \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)$, para $r \geq R$, determine la función de corriente y la función potencial.

Solución:

Hallando la función de corriente, sabiendo que $V_z = 0$ aplicamos la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{d(rV_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(V_\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d(-20\cos\theta(r - \frac{1}{r}))}{dr} + \frac{d(20(1 + \frac{1}{r^2})\text{sen}\theta - \frac{40}{r})}{d\theta} = 0$$

$$\left(-20\cos\theta\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\right) + \left(20\cos\theta\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\right) = 0$$

Cumple con la condición de ser un flujo incomprensible por lo tanto existe función de corriente.

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = -20\cos\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \wedge V_\theta = \frac{-d\psi}{dr} = -\left(20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta - \frac{40}{r}\right)$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -20\cos\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) \wedge \frac{d\psi}{dr} = \left(\frac{40}{r} - 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta\right)$$

$$d\psi = -20\cos\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)d\theta \wedge d\psi = \left(\frac{40}{r} - 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta\right)dr$$

$$\int d\psi = \int -20\cos\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)d\theta \wedge \int d\psi = \int \left(\frac{40}{r} - 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta\right)dr$$

$$\psi' = -20\text{sen}\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) + c_1 \wedge \psi'' = 40\text{Ln}(r) - 20\left(r - \frac{1}{r}\right)\text{sen}\theta + c_2$$

$$\therefore \psi = 40\text{Ln}(r) - 20\text{sen}\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) + c$$

Para hallar la función potencial comprobamos si el flujo es irrotacional:

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} - \frac{dV_\theta}{dz} = \frac{dV_r}{dz} - \frac{dV_z}{dr} = \frac{1}{r} \frac{drV_\theta}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} = 0$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{drV_\theta}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{d\left(20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta - \frac{40}{r}\right)}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d(-20\cos\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right))}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{d\left(20\left(r + \frac{1}{r}\right)\text{sen}\theta - 40\right)}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d(-20\cos\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right))}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} 20\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\text{sen}\theta - \frac{1}{r} (20\text{sen}\theta(1 - \frac{1}{r^2}))$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0$$

Cumple con la condición de ser un flujo irrotacional por lo tanto existe función potencial.

Se reemplaza en las ecuaciones que se conoce:

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} \wedge V_r = \frac{d\phi}{dr}$$

$$d\phi = r \left(20 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \text{sen}\theta - \frac{40}{r} \right) d\theta \wedge d\phi = (-20 \cos\theta (1 - \frac{1}{r^2}) dr$$

$$\int d\phi = \int \left(20 \left(r + \frac{1}{r} \right) \text{sen}\theta - 40 \right) d\theta \wedge d\phi = \int (-20 \cos\theta (1 - \frac{1}{r^2}) dr$$

$$\phi' = -20 \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos\theta - 40\theta + c_1 \wedge \phi'' = -20 \cos\theta \left(r + \frac{1}{r} \right) + c_2$$

$$\therefore \phi = -20 \cos\theta \left(r + \frac{1}{r} \right) - 40\theta + c$$

1.7. Un cilindro de 10" de diámetro gira en el sentido de las manecillas del reloj a $100\pi/3$ en una corriente de aire atmosférico a 40°F que fluye a 10 ft/s,

Determine:

- La circulación.
- Diga usted la localización de los puntos de estancamiento y bosqueje el grafico.
- Halle la presión mínima y máxima.

Solución:

- La circulación se define por la siguiente ecuación:

$$\Gamma = \oint_s w ds$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} w ds$$

$$\Gamma = w \times [s]_0^{2\pi}$$

$$\Gamma = w \times 2\pi R^2$$

$$\Gamma = \frac{100\pi}{3} \times 2\pi \times \left(\frac{10 \text{ pulg}}{2} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ pulg}} \right)^2$$

$$\therefore \Gamma = 114,23 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}$$

- b. Para hallar los puntos de estancamiento debemos conocer en qué caso nos encontramos para esto evaluamos la circulación obtenida comparándola a los casos aprendidos en la teoría:

$$\begin{aligned}\therefore 4\pi RV_{\infty} &= 4\pi \left(\frac{10\text{pulg}}{2} \times \frac{1\text{ft}}{12\text{pulg}} \right) 10 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \\ \therefore 4\pi RV_{\infty} &= 52.35 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}\end{aligned}$$

Encontrándonos en el 4to caso cuando $\Gamma > 4\pi RV_{\infty}$ cumpliéndose por lo tanto que existirán dos puntos de estancamiento uno dentro del cilindro y el otro fuera, ubicados en:

$$\theta = 270^{\circ} \text{ Y } r = \frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}}\right)^2 - R^2}$$

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}}\right)^2 - R^2} = \frac{114,23 \text{ ft}^2/\text{s}}{4\pi \times 10 \text{ ft/s}} - \sqrt{\left(\frac{114,23 \text{ ft}^2/\text{s}}{4\pi \times 10 \text{ ft/s}}\right)^2 - \left(\frac{10\text{pulg}}{2} \times \frac{1\text{ft}}{12\text{pulg}}\right)^2} \\ r_1 &= 0.10\text{ft}\end{aligned}$$

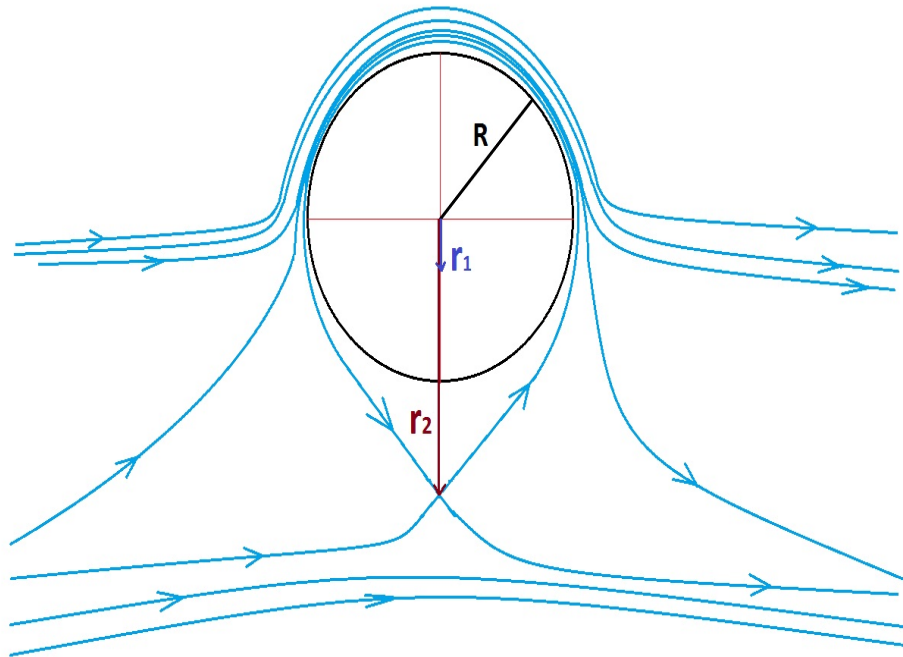
$$\begin{aligned}r_2 &= \frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}}\right)^2 - R^2} = \frac{114,23 \text{ ft}^2/\text{s}}{4\pi \times 10 \text{ ft/s}} + \sqrt{\left(\frac{114,23 \text{ ft}^2/\text{s}}{4\pi \times 10 \text{ ft/s}}\right)^2 - \left(\frac{10\text{pulg}}{2} \times \frac{1\text{ft}}{12\text{pulg}}\right)^2} \\ r_2 &= 1.76\text{ft}\end{aligned}$$

Entonces sabemos que el cilindro en circulación tiene $r = 0.41\text{ft}$ y los puntos de estancamiento se encontraran en:

$\theta = 270^{\circ} \rightarrow r_1 = 0.10\text{ft}$... Punto de estancamiento que se encuentra dentro del cilindro.

$\theta = 270^{\circ} \rightarrow r_2 = 1.76\text{ft}$... Punto de estancamiento que se encuentra fuera del cilindro.

Figura N° 1.12.
 FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO CON CIRCULACIÓN Y
 UBICACIÓN DE SUS PUNTOS DE ESTANCAMIENTO.



Fuente: Elaboración propia

c. La presión máxima y mínima se halla aplicando la ecuación de Bernoulli en un punto arbitrario de las líneas de corriente y otro en la superficie del cilindro:

$$\frac{P_{\infty}}{\gamma} + \frac{V_{\infty}^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

Siendo $V^2 = V_r^2 + V_{\theta}^2$ y que para un flujo alrededor de un cilindro con circulación sus velocidades en la superficie para un $(R=r)$ son:

$$V_r = 0 \wedge V_{\theta} = -2V_{\infty} \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

$$V^2 = V_{\theta}^2$$

Considerando que P_{∞} es la presión atmosférica y trabajando con presiones relativas:

$$\frac{V_{\infty}^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{P}{\gamma} = \left(\frac{V_{\infty}^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} \right)$$

$$P = \frac{\rho}{2} (V_{\infty}^2 - V^2)$$

$$P = \frac{\rho}{2} \left(V_{\infty}^2 - \left(-2V_{\infty} \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right)$$

$\therefore \theta = 270^\circ \rightarrow P = -0.56 \text{ Psig ... presión máxima.}$

$\therefore \theta = 90^\circ \rightarrow P = -4.87 \text{ Psig ... presión mínima.}$

1.8. Un flujo bidimensional e incomprensible tiene la siguiente función de

corriente $\psi = -V_o Y \left(1 - \left(\frac{R^2}{X^2 + Y^2} \right) \right)$; $X^2 + Y^2 \geq R^2$, determinar:

- El vector velocidad en coordenadas cartesianas y cilíndricas.
- La función potencial en coordenadas cilíndricas.
- El vector aceleración en coordenadas cilíndricas.

Solución:

a. Por teoría sabemos que: $u = \frac{d\psi}{dy} \wedge v = -\frac{d\psi}{dx}$

$$u = -V_o \left(1 - \frac{R^2}{X^2 + Y^2} + \frac{2y^2 R^2}{(X^2 + Y^2)^2} \right) \wedge v = V_o \frac{2xy R^2}{(X^2 + Y^2)^2}$$

$$\therefore \vec{V} = -V_o \left(1 - \frac{R^2}{X^2 + Y^2} + \frac{2y^2 R^2}{(X^2 + Y^2)^2} \right) \hat{i} + V_o \frac{2xy R^2}{(X^2 + Y^2)^2} \hat{j}$$

Sabemos que $X = r \cos\theta \wedge Y = r \sin\theta$ reemplazando en la función de corriente se tiene:

$$\psi = -V_o r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} \wedge V_\theta = -\frac{d\psi}{dr}$$

$$V_r = -V_o \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \wedge V_\theta = V_o \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\therefore \vec{V} = -V_o \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \hat{e}_r + V_o \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \hat{e}_\theta$$

b. Comprobando si es flujo irrotacional:

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{dV_z}{d\theta} - \frac{dV_\theta}{dz} = \frac{dV_r}{dz} - \frac{dV_z}{dr} = \frac{1}{r} \frac{drV_\theta}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta} = 0$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{drV_\theta}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dV_r}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{d(rV_o \text{sen}\theta(1 + \frac{R^2}{r^2}))}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d(-V_o \text{cos}\theta(1 - \frac{R^2}{r^2}))}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{d(V_o \text{sen}\theta(r + \frac{R^2}{r}))}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d(-V_o \text{cos}\theta(1 - \frac{R^2}{r^2}))}{d\theta}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{1}{r} V_o \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \text{sen}\theta - \frac{1}{r} (V_o \text{sen}\theta(1 - \frac{1}{r^2}))$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0$$

Cumple con la condición de ser un flujo irrotacional por lo tanto existe función potencial.

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} \wedge V_r = \frac{d\phi}{dr}$$

$$d\phi = r \left(V_o \text{sen}\theta(1 + \frac{R^2}{r^2}) \right) d\theta \wedge d\phi = (-V_o \text{cos}\theta(1 - \frac{R^2}{r^2})) dr$$

$$\int d\phi = \int \left(V_o \text{sen}\theta(1 + \frac{R^2}{r^2}) \right) d\theta \wedge d\phi = \int (-V_o \text{cos}\theta(1 - \frac{R^2}{r^2})) dr$$

$$\phi' = V_o \text{cos}\theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) + c_1 \wedge \phi'' = V_o \text{cos}\theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) + c_2$$

$$\therefore \phi = V_o \text{cos}\theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - 40\theta + c$$

c. Hallando la aceleración:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} + V_r \frac{dV_r}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \frac{dV_r}{d\theta} + V_z \frac{dV_r}{dz} - \frac{V_\theta^2}{r}$$

$$a_r = 2\text{cos}\theta^2(r^2 - R^2) \frac{R^2}{r^5} V_o^2 - 2\text{sen}\theta^2(r^2 + R^2) \frac{R^2}{r^2} V_o^2$$

$$a_r = \frac{2R^2}{r^2} V_o^2 [\text{cos}\theta^2(r^2 - R^2) - \text{sen}\theta^2(r^2 + R^2)]$$

$$a_{\theta} = \frac{dV_{\theta}}{dt} + V_r \frac{dV_{\theta}}{dr} + \frac{r}{r} \frac{dV_{\theta}}{d\theta} + V_z \frac{dV_r}{dz} - V_r \frac{V_{\theta}}{r}$$

$$a_{\theta} = \frac{V_0^2}{r^5} \operatorname{sen}2\theta \left[(r^2 - R^2)R^2 + \frac{(r^2 + R^2)^2}{2} + \frac{(r^4 - R^4)}{2} \right]$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{2R^2}{r^2} V_0^2 [\cos\theta^2(r^2 - R^2) - \operatorname{sen}\theta^2(r^2 + R^2)]_{\hat{e}_r} + \frac{V_0^2}{r^5} \operatorname{sen}2\theta \left[(r^2 - R^2)R^2 + \frac{(r^2 + R^2)^2}{2} + \frac{(r^4 - R^4)}{2} \right]_{\hat{e}_{\theta}}$$

- 1.9. En un campo de flujo se tiene la velocidad $V = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} - 2Az\hat{k}$, se pide:
- La función de corriente
 - El potencial de velocidades
 - La aceleración de la partícula
 - La presión, si el eje z es vertical hacia arriba

SOLUCION

a) $\vec{V} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} - 2Az\hat{k}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$A + A - 2A = 0 \rightarrow \text{Es incompresible.}$$

No \exists función ψ Es tridimensional

b) $\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & -2Az \end{vmatrix}$

$$\hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = 0 \quad \text{Es irrotacional}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow A \cdot x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \phi = \frac{A \cdot x^2}{2}$$

$$A \cdot y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = \frac{A \cdot y^2}{2}$$

$$-2Az = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow \phi = -A \cdot z^2$$

$$\phi = \frac{A}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

$$c) a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_x = A \cdot x \cdot A = A^2 x$$

$$a_y = u \frac{\partial u}{\partial y} = A^2 y$$

$$a_z = w \frac{\partial w}{\partial z} = -4A^2 z$$

$$\bar{a} = A^2(x\hat{i} + y\hat{j} - 4z\hat{k})$$

d) De la ecuación de Navier –Stokes:

Eje x:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho(A^2 \cdot x) = - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Eje y: } \rho(A^2 y) = - \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{Eje z: } \rho(-4A^2 z) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{Integrando (1): } - p = \rho A^2 \frac{x^2}{2} + f(y) \dots\dots\dots(\alpha)$$

Derivando con respecto a “y”:

$$- \frac{\partial p}{\partial y} = \rho A^2 \frac{x^2}{2} (0) + f'(y) \dots\dots\dots(4)$$

$$(2) = (4) \Rightarrow \rho A^2 y = f'(y)$$

Integrando con respecto y:

$$f(y) = \rho A^2 \frac{y^2}{2}$$

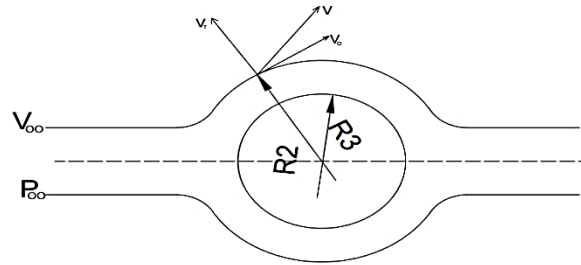
$$\text{En } (\alpha): p = -\rho A^2 \frac{x^2}{2} - \rho A^2 \frac{y^2}{2}$$

$$\text{En (3): } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \rho(4A^2 \cdot z)$$

$$p = -\rho g z - \rho \left(4A^2 \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\therefore p = -\rho A^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2z^2 \right) - \rho g$$

1.10. Para un flujo gaseoso bidimensional y bidireccional sobre el cilindro se tiene $V_r = -V_\infty \cos \theta (1 - R^2 / r^2)$; $V_\theta = V_\infty \sin \theta (1 + R^2 / r^2)$, para $r \geq R$, determinar la función de corriente y la función potencial.



SOLUCION

$$V_r = -V_\alpha \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$V_\theta = V_\alpha \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Se verifica que sea incompresible en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho \cdot r \left[-V_\alpha \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \right] \right\} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \rho \left[V_\alpha \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \right] \right\} = 0$$

$$- \frac{1}{r} \rho V_\alpha \cos \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{1}{r} \rho V_\alpha \cos \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \text{ si es incompresible, luego:}$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow -V_\alpha \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\psi = -V_\alpha r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right); \text{ también:}$$

$$V_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow V_\alpha \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \partial r = -\partial \psi$$

$$\psi = -V_\alpha r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \text{ finalmente se tiene:}$$

$$\therefore \psi = -V_\alpha r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Para la función potencial:

$$V_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \Rightarrow -V_\alpha \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \partial r = \partial \phi$$

$\phi = -r V_{\alpha} \cos\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$, de igual manera

$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Rightarrow -V_{\alpha} \operatorname{sen}\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$, integrando y ordenando:

$$\phi = -V_{\alpha} \cdot r \cos\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Problemas propuestos

1. El flujo bidimensional de un fluido incompresible no viscoso esta descrito por $\psi = 3r^2 \operatorname{sen}2\theta$ donde r en determine:

- El potencial de velocidades.
- El gradiente de presiones en el punto (x; y).

2. A través de una tubería de diámetro constante circula los gases de escape de un motor ECH, donde la temperatura está dada por: $T = T_0 (1 + a^* e^{-bx})(1 + c^* \cos(wt))$, teniendo $T_0 = 120^{\circ}\text{C}$, $a = 2$, $b = 0.05$, $c = 0.02 \text{ m}^{-1}$ respetivamente y $w = 120 \text{ rad/s}$. si la velocidad de descarga es 5 m/s y permanece constante horizontalmente, determinar la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo de las partículas fluidas en $x = 0$ y $x = 5\text{m}$, cuando $t = 0$.

Rpta: (-61.2; 47.66 °C/s)

3. Un flujo de un fluido gaseoso circula por un ducto convergente siguiendo la velocidad $v = (U_0 + bx)t \mathbf{i} - byt \mathbf{j}$; si el campo de presiones está dado por $p = p_0 - \frac{\rho[2tbxU_0 + tb^2(x^2 + y^2)]}{2}$, donde p_0 es la presión en $x = 0$; determinar:

- La razón de cambio de la presión que sigue la partícula fluida.
- La función de corriente.

Rpta:

$$\frac{Dp}{Dt} = (-U_0 b \rho x)(1 + bt^2) + (-\rho b^2)[x^2 + y^2 - bt^2 y^2] + U_0 t^2 b \rho$$

$$\psi = by t x + U_0 t y$$

4. Considere el campo de velocidades $u = A(x^2 - y^2)$; $v = 2Axy$, determine la distribución de presiones para un fluido de densidad y viscosidad constantes.

$$\text{Rpta: } p - p_{at} = \rho A^2 \left(-3x^2 y^2 + \frac{y^4}{2} - \frac{x^4}{2}\right)$$

CAPITULO II: ANALISIS DIMENSIONAL Y TEORIA DE MODELOS

El análisis dimensional es una herramienta que permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno en el que estén involucradas muchas magnitudes físicas en forma de variables independientes. Es la base de los ensayos a escala reducida utilizados en muchas ramas de la ingeniería, a partir de estos ensayos se obtiene información sobre lo que ocurre en el fenómeno a escala real. Para cálculos se utilizan *ecuaciones dimensionales*, que son expresiones algebraicas que tienen como variables a las unidades fundamentales y derivadas, las cuales se usan para demostrar fórmulas, equivalencias o para dar unidades a una respuesta.

2.1. Métodos de Cálculo

Se tiene dos métodos de cálculo:

- a. Método de Rolly
- b. Método de Buckingham ó Grupos (Π):

Siendo el más usado en mecánica de fluidos el de los números π

2.1.1. Metodología del Método de Buckingham

1. Se seleccionan adecuadamente las variables, que a nuestro criterio sean las más importantes, en la ocurrencia del fenómeno.

Supongamos las variables: $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$.

2. Se elige el sistema de magnitudes fundamentales, en función del fenómeno que se estudia, entre estos se tiene:

$MLT, FLT, MLT\theta, FLT\theta, MLT\theta QS$.

3. Se calcula el número de grupos adimensionales a obtenerse mediante la relación:

$\Pi = m - n$. dónde Π : Número de grupos adimensionales.

m : Numero de variables seleccionadas.

n: Numero de magnitudes fundamentales.

4. Se escriben las ecuaciones dimensionales de las variables seleccionadas:

$$[V_1] = M^{a_1} L^{b_1} T^{c_1} .$$

$$[V_2] = M^{a_2} L^{b_2} T^{c_2} .$$

$$[V_3] = M^{a_3} L^{b_3} T^{c_3} .$$

5. Se construye la matriz dimensional del sistema de la siguiente manera:

En la columna vertical las magnitudes fundamentales; en la línea horizontal las variables seleccionadas y se rellena con los exponentes de las variables

6. De la matriz se escoge el mayor subconjunto cuadrado cuyo determinante sea diferente de cero. Esta condición asegura que las variables que conforman un número Π son independientes, ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_7 \\ c_1 & c_3 & c_7 \end{vmatrix} \neq 0$$

Supongamos que está conformado por: V_1, V_3, V_7 .

7. Se construyen los grupos adimensionales de la siguiente forma:

$$\Pi_1 = V_1^{X_1} V_3^{Y_1} V_7^{Z_1} V_2$$

$$\Pi_2 = V_1^{X_2} V_3^{Y_2} V_7^{Z_2} V_4$$

$$\Pi_3 = V_1^{X_3} V_3^{Y_3} V_7^{Z_3} V_5$$

$$\Pi_4 = V_1^{X_4} V_3^{Y_4} V_7^{Z_4} V_6$$

Se determinan los exponentes y luego los números π estos son independientes de un sistema particular de unidades, razón por la cual se les puede multiplicar, dividir y elevar a cualquier potencia, para dar la forma que uno requiere.

2.2. Teoría de Modelos

Es aquella que establece los puntos que relacionan los fenómenos de un modelo y los de un prototipo.

El Análisis Dimensional es una herramienta que emplea la TEORIA DE MODELOS para conocer a priori las magnitudes de las propiedades que a través de la escala son trasladadas al prototipo.

TIPOS DE SIMILITUD. - se tiene los siguientes tipos de similitud: Geométrica, Cinemática, Dinámica, Térmica, Eléctrica, Química.

Para nuestra investigación usamos las tres primeras.

Principales Grupos Adimensionales

Numero adimensional	Ecuación	Aplicación
Reynolds (Re)	$\frac{VxD}{\nu} = \frac{VxL}{\nu}$	Todo tipo de flujo
Mach (Ma)	$\frac{V}{C}$	Flujo compresible
Froude (Fr)	$\frac{V^2}{Lxg}$	Flujos con superficie libre
Weber (We)	$\frac{\rho xLxV^2}{\sigma}$	Flujo con superficie libre
Euler (Eu)	$\frac{\Delta p}{\rho xV^2}$	Cavitación
Eckert (Ec)	$\frac{V^2}{Cpx\Delta T}$	Convección
Cauchy (Cu)	$\frac{E}{\rho xV^2}$	Flujos compresibles
Prandtl (Pr)	$\frac{\mu xCp}{k}$	Convección
Strouhal (St)	$\frac{wxL}{V}$	Flujos oscilatorios

Grupos Adimensionales en Turbomáquinas

Cifra de presión	Cifra de caudal	Numero específico del caudal	Numero específico de potencia
$\psi = \frac{2 \times g \times H}{V^2}$	$\rho = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} \times D^2 \times V}$	$Nq = \frac{N \times \sqrt{\dot{V}}}{H^{3/4}}$	$Ns = \frac{N \times \sqrt{Pot}}{H^{5/4}}$

Coefficientes Adimensionales

Los principales coeficientes adimensionales son

Coefficiente de:	Ecuación
Resistencia: C_D	$\frac{\rho x A x V^2}{2}$
Sustentación: C_S	$\frac{\rho x A x V^2}{2}$
Presión: C_p	$\frac{\Delta p}{\frac{\rho x V^2}{2}}$
Fricción: C_f	$\frac{1 x \rho x V^2}{2}$

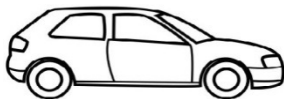
2.3. Aplicaciones:

.3.1. En un túnel de viento se probará el modelo de un automóvil a escala geométrica de 1:4, a 15°C, 1bar abs, con una resistencia al movimiento de 300N; el prototipo debe probarse en un ambiente a 32°C, 1bar abs, con velocidad de 90 km/h; se pide:

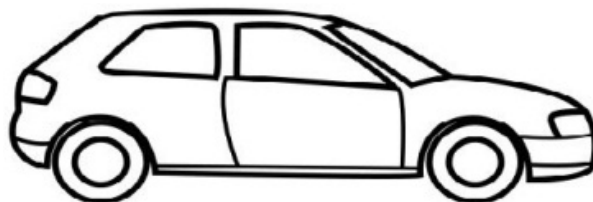
- La velocidad del modelo en m/s.
- La fuerza que debe vencer el automóvil a la resistencia del aire en kN.
- La potencia que se debe aplicar al automóvil, Hp.

Solución:

Modelo



Prototipo



Fuente: elaboracion propia

DATOS DEL PROBLEMA

Modelo(m)

T=15°C

P=1bar

Fa=300N

$\vec{V} = ?$

Prototipo(p)

T=32°C

P=1bar

$\vec{V} = 90$ km/hr

Fa = ?

Del enunciado determinamos que la resistencia al movimiento es función de:

$$Fa = f(\vec{V}, \mu, \rho, L, g)$$

Se construye la matriz y se selecciona los parámetros respectivos.

	Fa	ρ	μ	\vec{V}	L	g
M	1	1	1	0	0	0
L	1	-3	-1	1	1	1
T	-2	0	-1	-1	0	-2

Se obtienen los siguientes números π :

$$\pi_1 = \frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2}; \pi_2' = \frac{\rho * \vec{V} * L}{\mu}; \pi_3' = \frac{\vec{V}^2}{L * g}$$

Para el modelo:

$T_m = 15^\circ\text{C}$

$$\mu = 1.789 * 10^5 \text{ pa.s (Tablas)}$$

$$\rho_m = 1.225 \text{ Kg/m}^3 \text{ (Tablas)}$$

Para el prototipo:

$T_p = 32^\circ\text{C}$

$$\rho_p = \frac{P_p}{R_{\text{aire}} * T_p} = 1.142 \text{ Kg/m}^3$$

a. Usaremos el Numero de Freud para hallar la velocidad del modelo

$$\begin{aligned} \pi_{3m} &= \pi_{3p} \\ \left(\frac{\vec{V}^2}{L * g} \right)_m &= \left(\frac{\vec{V}^2}{L * g} \right)_p \\ \vec{V}_m &= \vec{V}_p * \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \\ \vec{V}_m &= 45 \frac{\text{km}}{\text{hr}} * \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} * \frac{1\text{hr}}{3600\text{s}} \\ \therefore \vec{V}_m &= 12.5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b. De π_1 para hallar la fuerza

$$\begin{aligned} \pi_{1m} &= \pi_{1p} \\ \left(\frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2} \right)_m &= \left(\frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2} \right)_p \\ Fa_p &= Fa_m * \frac{(\rho * \vec{V}^2 * L^2)_p}{(\rho * \vec{V}^2 * L^2)_m} \end{aligned}$$

$$F_{a_p} = 300N * \frac{(1.142 \text{ Kg/m}^3 * 90 \text{ km/hr} * (4k)^2)_p}{(1.225 \text{ Kg/m}^3 * 45 \text{ km/hr} * (1k)^2)_m}$$

$$F_{a_p} = 17899.1N$$

c. Hallando la potencia del automóvil.

$$Potencia = F_{a_p} * \vec{V}_p = 17899.10204N * 90 \frac{km}{hr} * \frac{1000m}{1km} * \frac{1hr}{3600}$$

$$= 447477.551W$$

$$Potencia = 447477.551W * \frac{1HP}{746W}$$

$$\therefore Potencia = 599.83HP$$

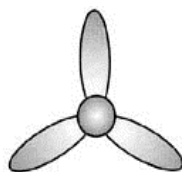
.3.2. El empuje producido por la hélice del modelo de un avión es 200N, que se prueba en un túnel de viento a condiciones normales; si el avión volara a 30000 ft de altura, determine:

- Los números adimensionales
- El empuje producido por la hélice en Kg.

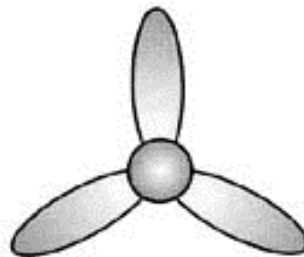
Solución:

El empuje producido por la hélice del modelo de un avión escala 1:4.

Modelo



Prototipo



Fuente:Elaboracion propia

DATOS DEL PROBLEMA

Modelo(m)

El modelo se prueba a nivel del mar.

F=200N; de tablas:

$$T = 25^{\circ}C = 298.15^{\circ}K$$

Prototipo(p)

El avión vuela a 30000ft de altura.

$$T = 48^{\circ}F = 228.706^{\circ}K$$

$$p = 628 \text{ lb/ft}^2$$

$$\begin{aligned}
 p &= 101.325 \text{ Kpa abs} & \rho &= 0.000890 \text{ slugs/ft}^3 \\
 \rho &= 1.184 \text{ kg/m}^3 & \rho &= 0.4586 \text{ kg/m}^3 \\
 \mu &= 1.844 * 10^{-5} \text{ kg/m.s}
 \end{aligned}$$

Se tienen los siguientes parámetros: $Fa, \vec{V}, \mu, \rho, L, \tilde{N}, C$ y se construye la matriz

	Fa	ρ	μ	\vec{V}	L	N	C
M	1	1	1	0	0	0	0
L	1	-3	-1	1	1	0	1
T	-2	0	-1	-1	0	-1	-1

Los números adimensionales resultan:

$$\begin{aligned}
 \therefore \pi_1 = C_A &= \frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2} & \therefore \pi_2' = Re &= \frac{\rho * \vec{V} * L}{\mu} \\
 \therefore \pi_3 = St &= \frac{\tilde{N} * L}{\vec{V}} & \therefore \pi_4' = M &= \frac{\vec{V}}{C}
 \end{aligned}$$

a. El empuje producido por la hélice:

Del número de Mach.

$$\begin{aligned}
 (\pi_4')_m &= (\pi_4')_P \\
 \left(\frac{\vec{V}}{C}\right)_m &= \left(\frac{\vec{V}}{C}\right)_P \\
 \frac{\vec{V}_P}{\vec{V}_m} &= \frac{C_P}{C_m} = \frac{\sqrt{K * R_{aire} * T_P}}{\sqrt{K * R_{aire} * T_m}} \\
 \left(\frac{\vec{V}_P}{\vec{V}_m}\right)^2 &= \frac{T_P}{T_m} \dots (\alpha)
 \end{aligned}$$

El empuje producido por la hélice en Kgf:

$$\begin{aligned}
 (\pi_1)_m &= (\pi_1)_P \\
 \left(\frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2}\right)_m &= \left(\frac{Fa}{\rho * \vec{V}^2 * L^2}\right)_P \\
 Fa_P &= Fa_m * \left(\frac{\vec{V}_P}{\vec{V}_m}\right)^2 * \frac{L_P^2}{L_m^2} * \frac{\rho_P}{\rho_m} \dots (\beta)
 \end{aligned}$$

Reemplazando (α) en (β) :

$$Fa_P = Fa_m * \frac{T_P}{T_m} * \frac{L_P^2}{L_m^2} * \frac{\rho_P}{\rho_m}$$

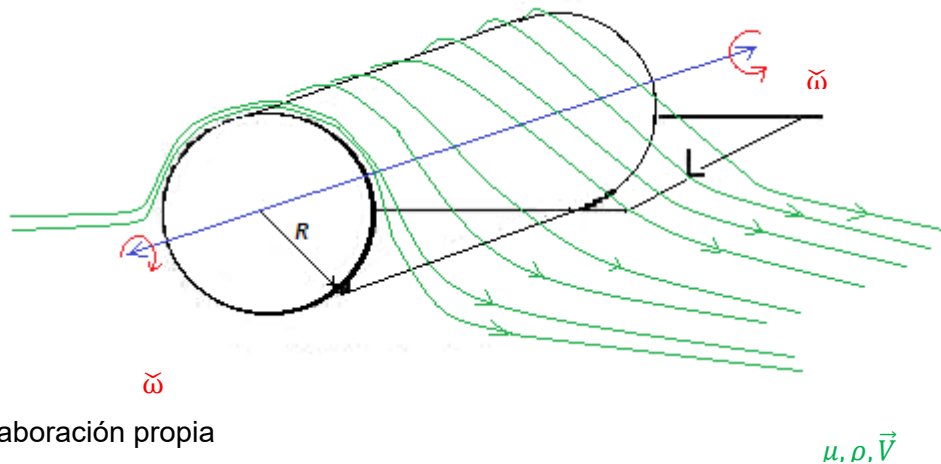
$$F_{a_p} = 200N * \left(\frac{228.76^\circ K}{298.15^\circ K}\right) * \left(\frac{4k}{1k}\right)^2 * \frac{0.4586 kg/m^3}{1.184 kg/m^3}$$

$$F_{a_p} = 950.993N * \frac{1kgf}{9.8N}$$

$$\therefore F_{a_p} = 97.040 kgf$$

.3.3. Un cuerpo cilíndrico de sección constante, de longitud L, se desplaza en un fluido gaseoso de viscosidad μ , densidad ρ , con una velocidad \vec{V} , la fuerza de oposición al movimiento es la fricción superficial F, a la que influyen también la aceleración de la gravedad g, el módulo de elasticidad E, la velocidad de rotación N; determinar los principales grupos adimensionales conocidos.

Figura N° 2.1.



Fuente: Elaboración propia

Solución

Las variables a considerar para el cálculo de los números adimensionales por el método de Buckingham serán: $D, L, \mu, \rho, \vec{V}, F, g, E, N$, y se construye la matriz.

	D	L	ρ	μ	\vec{V}	Fa	E	N	g
M	0	0	1	1	0	1	1	0	0
L	1	1	-3	-1	1	1	-1	0	1
T	0	0	0	-1	-1	-2	-2	-1	-2

De la matriz se obtienen los números adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{D}{L} \quad \pi_2' = Re = \frac{\rho * \vec{V} * L}{\mu} \quad \pi_3 = C_A = \frac{F_A}{\rho * \vec{V}^2 * L^2}$$

$$\pi_4 = \frac{E}{\rho * \vec{V}^2} \quad \pi_5' = Fr = \frac{\vec{V}^2}{L * g} \quad \pi_6 = St = \frac{N * L}{\vec{V}}$$

.3.4. El modelo de un avión tiene un perfil del ala a escala geométrica 1:20, que se ensaya en un túnel de viento a 70°F y 14.7 psia, el prototipo debe desplazarse a 25 000 pies sobre el nivel de mar, con una velocidad de 452 mph, determinar:

- La velocidad de desplazamiento del modelo, mph
- La potencia aproximada de propulsión del avión(HP) si la fuerza de arrastre sobre el modelo es 600N
- El producto de AC_A

Solución:

Se construye la matriz:

	V	L	C	g	F _A	ρ	μ
M	0	0	0	0	1	1	1
L	1	1	1	1	1	-3	-1
T	-1	0	-1	-2	-2	0	-1

Se obtienen los siguientes grupos adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{C}{V}; \pi_2 = \frac{L * g}{V^2}; \pi_3 = \frac{F_A}{\rho V^2 L^2}; \pi_4 = \frac{\mu}{\rho * V * L}$$

A 25 000 pies de altitud se tiene para el aire:

$$T = 429.6 \text{ °R}; p = 5.461 \text{ psia}; \rho = 0.03431 \text{ lb/pie}^3; \mu = 3.217 \times 10^{-7} \text{ lb.s/pie}^2$$

$$\text{De } \pi_1 \text{ se obtiene } V_m = \sqrt{\frac{530}{429.6}} * 452 = 502 \text{ mph}$$

De π_3 la $F_A = F_{Am} * (\frac{V_a}{V_m})^2 * (\frac{L_a}{L_m})^2 * \frac{\rho_a}{\rho_m}$; reemplazando datos

$$F_{Aa} = 600 * \frac{429.6 * 0.03431 * 20 * 20}{0.0749 * 530} = 89112.48 \text{ N}$$

La potencia aproximada de propulsión: $W = 24137 \text{ HP}$

De $F_A = \frac{1}{2} \rho V^2 A_{CA}$ se obtiene $A_{CA} = 7.973 \text{ m}^2$.

3.5. Un avión debe volar a 560 nudos, en una atmosfera a 30 000 pies de altitud, su modelo a escala geométrica de 1:14 se ensaya en un túnel de viento a 70°F, de $\mu = 4.2 \times 10^{-7} \text{ lb*s/pie}^2$; se pide:

1.1. Los grupos adimensionales

1.2. La velocidad del modelo, nudos

1.3. La presión en el túnel de viento donde se prueba el modelo, psia

Solución. -

Los parámetros escogidos están en la matriz

	V	ρ	μ	C	p	F	D
M	0	1	1	0	1	1	0
L	1	-3	-1	1	-1	1	1
T	-1	0	-1	-1	-2	-2	0

De donde obtienen los siguientes grupos adimensionales:

$$\Pi_1 = \frac{V \cdot D \cdot \rho}{\mu}; \quad \Pi_2 = \frac{V}{C}; \quad \Pi_3 = \frac{p}{\rho \cdot V^2}; \quad \Pi_4 = \frac{F}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2}$$

De tablas para el aire a 30 000 pies de altitud donde volara el avión:

$$T = 411.8^\circ\text{R}; \quad p = 4.373 \text{ psia}; \quad \rho = 0.02866 \text{ lb/pie}^3; \quad \mu = 3.107 \times 10^{-7} \text{ lb*s/pie}^2.$$

De Π_2 se obtiene la velocidad del aire en el túnel de viento: $V_m =$

$$560 \cdot \sqrt{\frac{530}{411.8}} = 635.31 \text{ nudos}$$

La densidad del aire en el túnel se calcula del Π_1 , es decir

$$\rho_m = \rho_a \left(\frac{\mu_m}{\mu_a} \right) \left(\frac{V_a}{V_m} \right) \left(\frac{D_a}{D_m} \right) = 0.4781 \text{ lb/pie}^3$$

$$\text{Utilizando el } \Pi_3 \text{ se tiene: } p_m = 4.373 \cdot \left(\frac{635.31}{560} \right)^2 \cdot \frac{0.4781}{0.02866} = 93.9 \text{ psia}$$

2.4. Problemas propuestos

✚ Los parámetros más relevantes para un compresor de aire son la presión y temperatura de entrada y salida respectivamente, velocidad de ingreso, flujo másico, constante particular, densidad y viscosidad

absoluta del gas, los rpm del eje y diámetro del impulsor. Al modelo de diámetro del impulsor 20 cm, el gas ingresa por un tubo de 5 cm de diámetro a 37°C, 1 bar abs, a 20 m/s, que absorbe una potencia de 2 HP y el homólogo de diámetro del impelente 90 cm, recibe el aire a 57°C, 0.986 bar abs, de relación de presiones 6, con exponente politropico 1.36. Si ambos tienen una eficiencia mecánica de 90%, se pide:

- los números adimensionales
- los rpm del compresor
- la potencia del compresor, HP
- los cfm que entrega el compresor

$$\text{Rpta: } \pi_1 = \frac{p_d}{p_e}; \pi_2 = \frac{T_d}{T_e}; \pi_3 = \frac{V}{N*D}; \pi_4 = \frac{N^2 D^2 \rho}{p_e}; \pi_5 = \frac{\mu*N}{p_e}; \pi_6 = \frac{N*\dot{m}}{p_e}; \pi_7 = \frac{\dot{W}}{N*D^3 p_e};$$

$$\pi_8 = \frac{N*D}{\sqrt{R*T_e}}; 474.22 \text{ rpm}, 42.61 \text{ HP}; 1220.32 \text{ cfm}$$

✚ El empuje producido por la hélice de un avión que vuela a 10 000 m de altitud, con 500 nudos es función de la velocidad del sonido, densidad y viscosidad del aire, velocidad del avión, diámetro y velocidad angular de la hélice. Su modelo a escala geométrica de 1:6 se prueba en un túnel de viento a 1 bar abs, 23 °C, con un empuje de 200 N, se pide:

- los numero adimensionales
- la velocidad del modelo
- la potencia que entregan los motores al avion

$$\text{Rpta: } \pi_1 = \frac{N*D}{V}; \pi_2 = \frac{\mu}{V*D*\rho}; \pi_3 = \frac{V}{C}; \pi_4 = \frac{F}{\rho*D^4*N^2}; 257.35 \text{ m/s};$$

CAPITULO III: CAPA LIMITE Y CUERPOS SUMERGIDOS

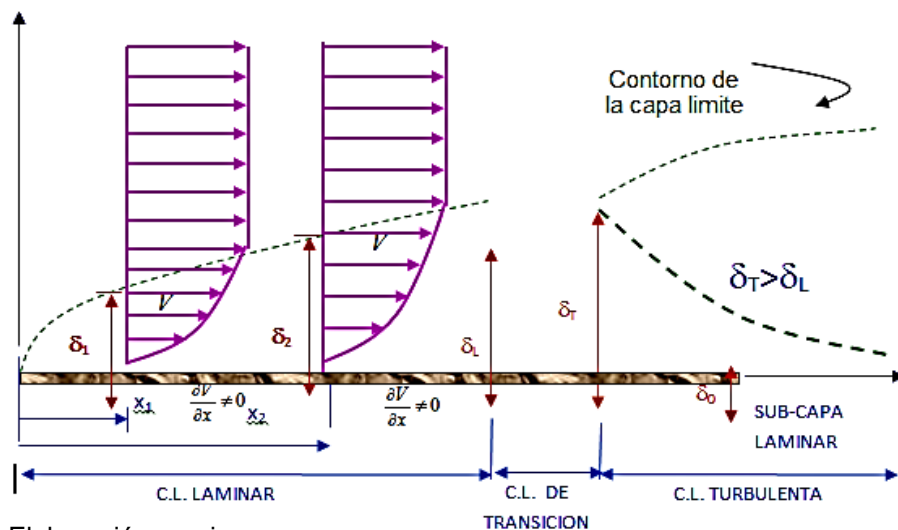
3.1. Capa Limite

La capa límite es aquella zona adyacente a un contorno sólido, en donde los efectos viscosos resultan importantes; fuera de ella el efecto viscoso es despreciable y el fluido puede considerarse como no viscoso.

La capa límite es el lugar geométrico (en volumen) que ocupan cierta cantidad de fluido, en las cercanías de un contorno sólido, como consecuencia del efecto viscoso; es en esta región en donde el gradiente de velocidad es diferente de CERO; también no existe un valor único para el número de Reynolds⁴ correspondiente a la transición del flujo **laminar a turbulento** en la Capa Limite, el cual se ve afectado por: el gradiente de presión, la rugosidad absoluta ε , transferencia de calor, fuerzas volumétricas y las perturbaciones existentes en la corriente libre.

Figura. N° 3.1.

ESTUDIO DE LA CAPA LIMITE EN UNA PLACA PLANA



Fuente: Elaboración propia

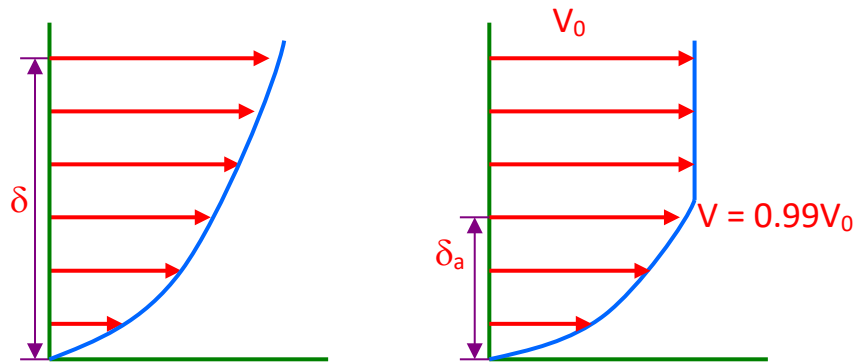
La razón de crecimiento de la capa límite para flujo laminar y turbulento es:

$$\frac{S_L}{x} = k Re_x^{-1/2}, \quad \frac{S_T}{x} = k_0 Re_x^{-1/5} \Rightarrow \text{Si: } S_0 > \varepsilon \Rightarrow \text{TUBERIA LISA: } Re_x = Re_{LOCAL}$$

⁴ Osborne Reynolds fue un ingeniero y físico irlandés

3.1.1. Espesor de la capa límite real (δ)

Es aquella distancia comprendida desde el contorno sólido hasta el espesor de la capa límite, donde la partícula recupera la velocidad de corriente libre. También se dice que es aquella altura a partir de la cual el flujo responde a un comportamiento similar al de un flujo ideal. También se define como aquella altura a partir de un contorno sólido, hasta donde son importantes los efectos viscosos.



3.1.2. Espesor de la capa límite aparente o aproximado (δ_a)

Es aquella altura a partir de la cual se supone que las partículas recuperan el 99% de la velocidad de corriente libre. $V = 0.99V_0$.

Es el lugar geométrico de los puntos en donde la velocidad paralela a la placa alcanza el 99% del valor de la velocidad de corriente libre

3.1.3. Sub-capa laminar (δ_0)

Es el lugar geométrico que ocupan todas las partículas fluidas en una zona adyacente a un contorno sólido dentro de una capa límite turbulento, en donde los efectos viscosos son importantes.

3.1.4. Espesor de la capa límite por desplazamiento (δ^*)

Se denomina así a la altura hipotética (imaginaria) a la cual debería de desplazarse un contorno sólido, para que todo el flujo responda un comportamiento ideal; es decir que el flujo másico sea el mismo en cualquier sección; es decir:

Flujo másico ideal: $\rho V_0 b \delta^*$

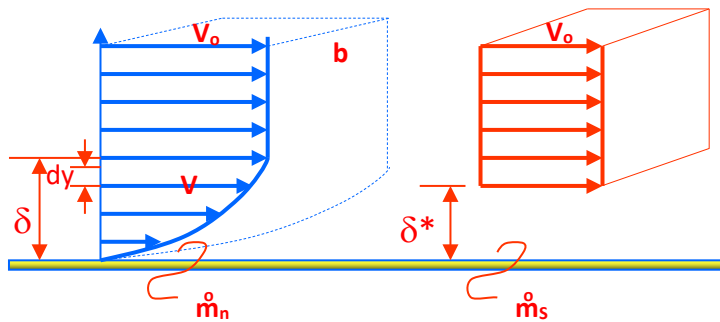
Flujo másico real: $\int \rho(V_0 - V) b \cdot dy$

Por continuidad: $\dot{m}_s = \dot{m}_N$

$$\rho V_0 b \delta^* = \int_0^\delta \rho(V_0 - V) b dy \quad \rightarrow \quad \delta^* = \int_0^\delta \left(\frac{V_0}{V_0} - \frac{V}{V_0} \right) dy$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) dy \quad (3.1)$$

Figura N° 3.2:
ESTUDIO DEL ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE



Fuente: elaboración propia

3.1.5. Espesor de la capa límite por cantidad de movimiento (δ_θ)

Es aquella altura hipotética hasta la cual se debería de desplazar el contorno sólido para que la cantidad de movimiento transferido sea semejante al de un fluido ideal.

$$CM_1 = CM_2 \Rightarrow CM_S = CM_N, \text{ Sabiendo que } CM = \dot{m} V$$

$$CM_S = \rho V_0 b S_\theta V_0 \text{ y } CM_N = \left[\int_0^\delta \rho(V_0 - V) b dy \right] V$$

$$\rho V_0 b S_\theta V_0 = \int_0^\delta \rho(V_0 V - V^2) b dy \Rightarrow S_\theta = \frac{1}{V_0^2} \int_0^\delta (V_0 V - V^2) dy$$

$$S_\theta = \int_0^\delta \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) dy \quad (3.2)$$

3.1.6. Espesor de la capa limite por energía cinética (δ_K):

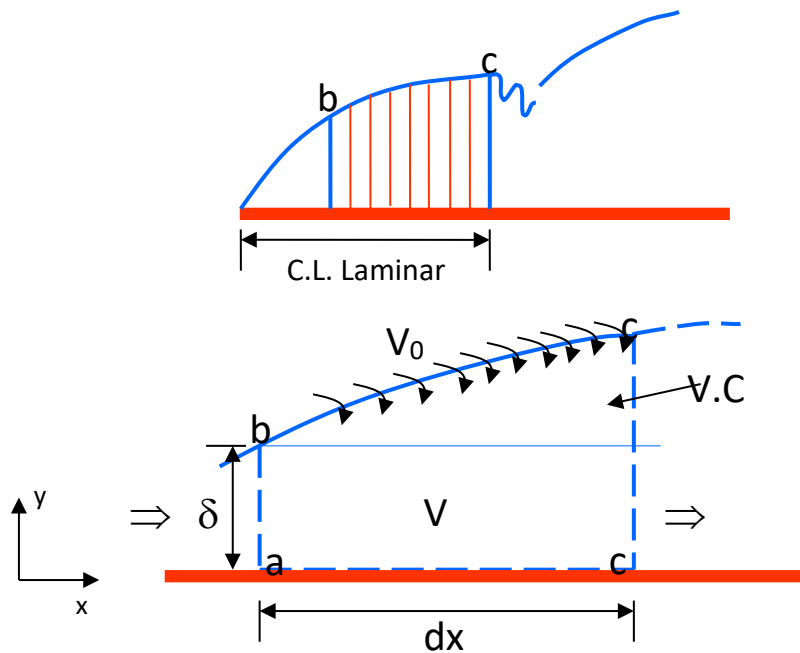
$$\begin{aligned} \text{Tomando el concepto } E_{KS} = E_{KN} &\Rightarrow E_{KS} = \rho V_0 b S_k V_0^2 \\ E_{KN} &= \int_0^\delta \rho (V_0 - V) b dy V^2 \\ \rho b S_k V_0^3 &= \int_0^\delta \rho (V_0 V^2 - V^3) b dy \Rightarrow \delta_k = \left(\frac{V_0 V^2}{V_0^3} - \frac{V^3}{V_0^3} \right) dy \\ \delta_k &= \int_0^\delta \left(\left(\frac{V}{V_0} \right)^2 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^3 \right) dy \quad S_K = \int_0^\delta \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) dy \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1.7. Ecuación de momento de cantidad de movimiento de VON KARMAN⁵ (Capa Limite Laminar)

Es aquella ecuación modelo matemático que se verifica dentro de una capa limite laminar, se supone que el gradiente de presiones dp/dx es constante. Tomando el siguiente volumen de control:

Figura N° 3.3:

VOLUMEN DE CONTROL PARA ANALISIS DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO



Fuente: elaboración propia

⁵ Theodore von Kármán, físico húngaro

De la figura se tiene :

$$\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} \dots\dots\dots (a)$$

El modelo supone : $\frac{dp}{dx} = 0$

También :

$$\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \frac{\partial}{\partial x} \dot{m}_{ab} .dx \dots\dots\dots (b)$$

(b) en (a): $\dot{m}_{ab} + \frac{\partial}{\partial x} \dot{m}_{ab} .dx = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \dot{m}_{ab} .dx = \dot{m}_{bc} \dots\dots\dots (c)$$

Sabemos: $\dot{m}_{ab} = \int_0^\delta \rho V b dy \Rightarrow \dot{m}_{bc} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho V b dy \right] dx \dots\dots\dots (d)$

Aplicando los criterios de esfuerzo cortante sobre la pared y cantidad de movimiento que ingresa y sale del volumen de control se obtiene la ecuación de Von Karman (3.4)

$$\tau = \rho V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) dy \right] \tag{3.4}$$

ALGUNAS RELACIONES DE LA CAPA LIMITE LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA.

a) $V_x = a + bx + cx^2 + dx^3 \Rightarrow \frac{\delta}{x} = 4.64 R_{ex}^{-1/2} ; C_f = 0.646 R_{ex}^{-1/2}$
 $\tau_0 = 0.323 \rho V_0^2 R_{ex}^{-1/2} ; \frac{\delta^*}{x} = 1.74 R_{ex}^{-1/2}$ (3.5)

b) $V_x = A \text{Sen}(k\pi)y \Rightarrow \frac{\delta}{x} = 4.795 R_{ex}^{-1/2} ; C_f = 0.656 R_{ex}^{-1/2}$
 $\tau_0 = 0.325 \rho V_0^2 R_{ex}^{-1/2} ; \frac{\delta^*}{x} = 1.74 R_{ex}^{-1/2}$ (3.6)

c) $V_x = a + bx \Rightarrow \frac{\delta}{x} = 3.46 R_{ex}^{-1/2} ; C_f = 0.578 R_{ex}^{-1/2}$
 $\frac{\delta^*}{x} = 1.73 R_{ex}^{-1/2}$ (3.7)

d) Soluciones Exactas de BLASIUS:

$$\frac{\delta}{x} = 4.96 R_{ex}^{-1/2} \quad ; \quad \frac{\delta_{\theta}}{x} = 0.664 R_{ex}^{-1/2} \quad ; \quad \frac{\delta^*}{x} = 1.73 R_{ex}^{-1/2} \quad ; \quad (3.8)$$

$$\tau_0 = 0.332 \rho V_0^2 R_{ex}^{-1/2} \quad ; \quad C_f = 0.664 R_{ex}^{-1/2}$$

$$C_D = 1.328 R_{ex}^{-1/2} \rightarrow \text{Coeficiente de Arrastre Viscoso}$$

TRANSICIÓN PARA EL FLUJO EN UNA PLACA PLANA

Según Shames (1995): Depende del Numero de Re, turbulencia de la corriente libre, rugosidad de la placa y de la transferencia de calor hacia la placa y desde ella.

El proceso es intermitente y compuesto por pequeños brotes de turbulencia en pequeñas regiones de la Capa Limite. Debe ser evidente que no puede prescribirse un Re_x específico para la transición, debido a los efectos de muchos factores involucrados en ese proceso, resulta más conveniente especificar un rango de **Re críticos**, los cuales pueden darse: **$Re_{cr}=3.2 \times 10^5$ hasta 10^6**

El valor de 10^6 se alcanza cuando se tiene turbulencia de corriente libre muy pequeña, una placa muy lisa, etc., generalmente se usa el **$Re_{cr}=5 \times 10^5$** (3.9)

Concluye que $\delta/x = cte Re^{-1/2}$, que es el resultado de Blasius⁶, como del método aproximado de Von Karman para flujo laminar.

NOTA:

- La ϵ de la superficie de la placa generará una transición muy temprana.
- Calentar la placa en la región laminar acelerará la transición a Flujo Turbulento.
- El gradiente de presión ejerce una influencia significativa en la posición del punto de transición.
- Una presión decreciente tiende a demorar la transición de Flujo Laminar a Turbulento, debido a la menor fricción superficial

⁶ Paul Richard Heinrich Blasius fue un ingeniero alemán

3.1.8. Capa límite turbulenta en una placa lisa

Para el flujo sobre una placa lisa, el Re de transición se toma como:

$$\text{Re}_{x,\text{tr}} = \frac{V_0 x_{\text{tr}}}{\nu} \approx 5 \times 10^5 \quad (3.10)$$

NOTA:

La Capa Limite corriente abajo del punto de transición es TURBULENTA.

Si usamos el perfil de la ley de potencia: $\frac{V}{V_0} \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} = z^{1/n}$

Siendo la elección más común para $n = 7$

Empleando la correlación de BLASIUS: $f \approx 0.316 \text{Re}^{-1/4}$ ($\text{Re} < 10^5$)

Se obtiene $\frac{\delta}{x} \approx 0.37 \text{Re}_x^{-1/5}$ (3.11)

Vemos que $\delta \sim x^{4/5}$ crece en la capa limite Turbulenta y en la laminar $\delta \sim x^{1/2}$.

$C_f \approx 0.0577 \text{Re}_x^{-1/5}$; $5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$; PLACA LISA

En la capa limite LAMINAR: $C_D = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_{\text{tr}}} C_{f_{\text{lam}}} \cdot dx + \int_{x_{\text{tr}}}^L C_{f_{\text{turb}}} \cdot dx \right)$

para la transición se toma: $\frac{V_0 x_{\text{tr}}}{\nu} \approx 5 \times 10^5$, obteniéndose:

$$C_D = 0.072 R_L^{-1/5} - \frac{1700}{R_L} \quad (3.12)$$

3.1.9. Control de la capa límite

Se denomina así a todos los mecanismos cuyo objetivo es retardar el desplazamiento de la Capa Limite o en todo caso desplazar el punto de inicio del desprendimiento hacia el denominado borde de fuga.

En realidad, lo que sucede es: disminuir el contraflujo que se presenta cuando un fluido se desliza a través de una superficie roma.

DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE

Es un fenómeno que se presenta cuando el flujo principal incrementa su presión; esto implica una disminución de la energía cinética en las cercanías de la pared, originándose un CONTRAFLUJO, el cual indica la presencia en la zona de succión de vórtices, los cuales dan origen a la denominada ESTELA.

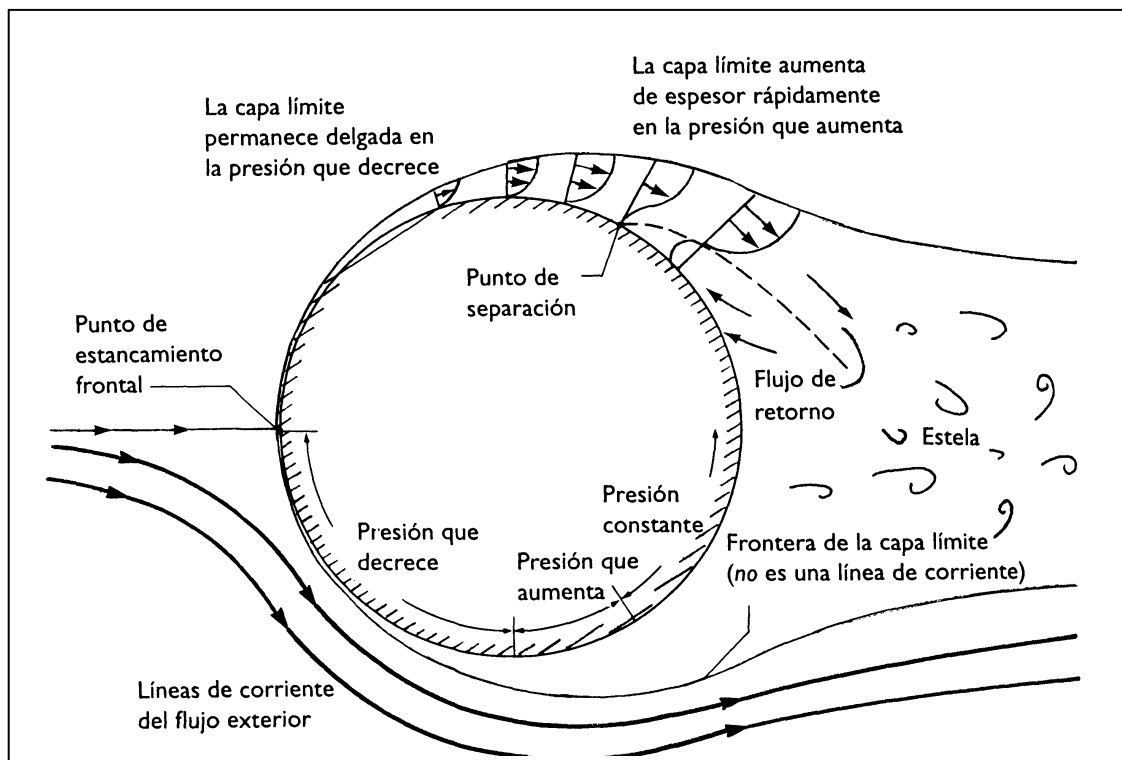
El desprendimiento de la capa límite es un fenómeno no deseado desde el punto de vista del arrastre, ya que detrás del sólido aparece una zona de menor presión que en el punto de estancamiento, aumentando la fuerza de arrastre.

Cuando la velocidad de circulación del fluido V_0 aumenta el punto de separación de la capa límite se desplaza hacia menores valores del ángulo hasta alcanzar un valor mínimo en $\theta \cong 81^\circ$ para flujo laminar. Cuanto más alejado está el punto de separación del punto de estancamiento mayor será el arrastre.

Los torbellinos inicialmente son estacionarios, pero a medida que crecen cambian en el tiempo apareciendo a uno y otro lado del sólido, generando los llamados vórtices de Von Karman. Como ejemplo cuando sopla viento alrededor de cables de luz se escucha un zumbido proveniente de estos vórtices.

El desprendimiento de capa límite es un fenómeno característico de sistemas en los cuales el fluido circula con un gradiente de presión adverso. Además del fenómeno descrito es necesario tener en cuenta que si bien un elemento de volumen es retrasado por aquellos más cercanos al sólido también es acelerado por aquellos que se encuentran más cerca del borde externo de la capa límite.

Figura N° 3.4:
CAPA LÍMITE EN UN CILINDRO CIRCULAR



Fuente: Gerhart, 1995

ESTELA

Es el lugar geométrico que ocupan todos los vórtices y su ancho es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza de arrastre. Se forman en flujos laminares y turbulentos, detrás del cuerpo sólido, siendo de espesor más amplio en flujo laminar.

La separación se produce a causa de una inversión del flujo en la Capa Limite como resultado de un gradiente de presión ADVERSO impuesto sobre la Capa Limite por el flujo principal, es decir para $dp / dx > 0$.

Como se ve en la figura 3.4 que para un gradiente de presión adverso debe existir un punto de inflexión en los perfiles, cuerpos solidos aerodinámicos.

* Las pérdidas deducidas por DARCY cercanos a la pared para flujos totalmente desarrollados dedujo el factor de Fanning:

$$\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho V^2} = C_f = \frac{f}{4} \quad (3.13)$$

NOTA:

Se presenta el fenómeno de desprendimiento de la capa limite, cuando el flujo se desliza sobre una superficie curva o roma; esta presenta la posibilidad del "GRADIENTE ADVERSO DE PRESION". $dp/dx > 0$.

El ancho de la ESTELA es directamente proporcional a la energía que se invierte para vencer la Fuerza de ARRASTRE o de PRESION.

A medida que se aproxima al punto de separación, el espesor de la capa limite aumenta rápidamente; corriente debajo de esta existe una región de recirculación cerca de la superficie. En el punto de separación el perfil de velocidad tiene una pendiente vertical en la pared y $\tau_0 = 0$. Se muestran algunas ecuaciones para determinar el valor del coeficiente de fricción deducidas experimentalmente:

$$\text{PRANDTL: } C_f = 0.074\text{Re}_L^{-1/5} - A\text{Re}_L^{-1} \quad ; \quad 5 \times 10^5 < \text{Re}_L < 10^7 \quad (3.14)$$

$$\text{SCHLICHTING: } C_f = \frac{0.455}{(\log \text{Re}_L)^{2.58}} \quad ; \quad \text{Re}_L > 10^7 \quad (3.15)$$

Re_L	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1050	1700	3300	8700

3.2. Cuerpos sumergidos en fluidos gaseosos

La corriente de fluido en la cual el cuerpo está inmerso, con frecuencia se considera como infinita en extensión. Los aspectos importantes son las fuerzas y momentos que el fluido ejerce sobre el cuerpo y en menor grado, los detalles

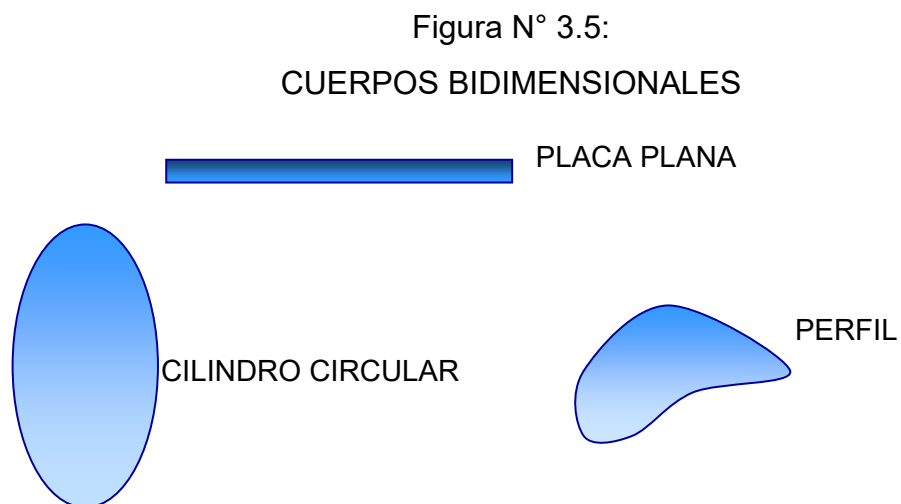
del patrón de flujo cerca del cuerpo. La experimentación es fundamental para tratar estos flujos con ayuda del computador y en un túnel de viento.

Se presentan los siguientes casos:

1. Resistencia de cuerpos Bidimensionales y Tridimensionales
 - a. Cuerpos Romos
 - b. Con Formas Fuseladas
2. Actuaciones de cuerpos Sustentadores
 - a. Perfiles y Aviones
 - b. proyectiles y Cuerpos con Aletas
 - c. Pájaros e Insectos

3.2.1. Fuerzas sobre cuerpos en movimiento

Un cuerpo bidimensional tiene la forma en todos los planos perpendiculares a un eje infinitamente largo; en la figura 3.5 se muestran perfiles bidimensionales.



Fuente: Elaboración propia

Figura N° 3.6:
CUERPOS TRIDIMENSIONALES Y CON SIMETRÍA AXIAL

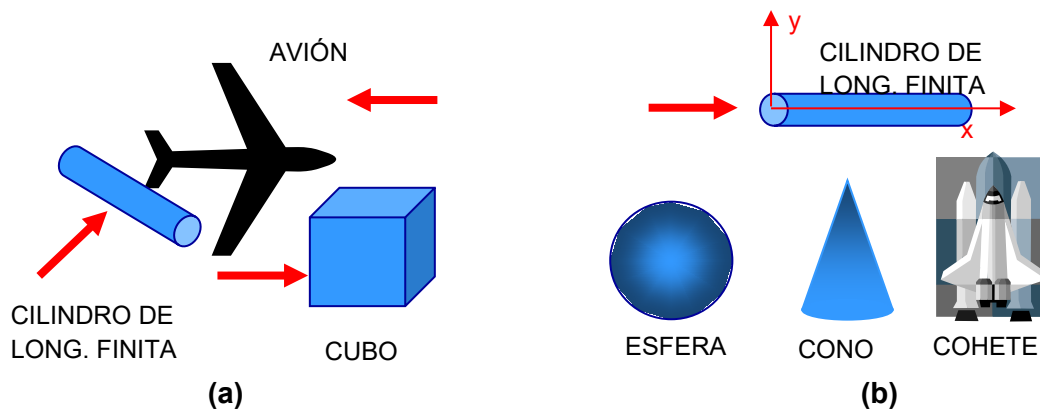


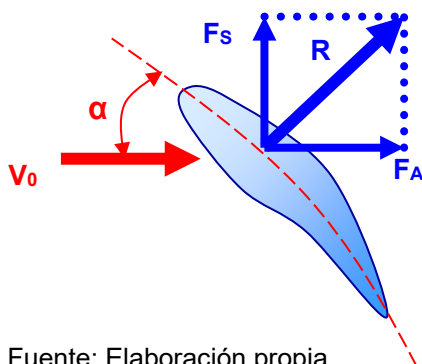
Figura 3.6 (a) Cuerpos tridimensionales
(b) Cuerpos con simetría axial

Fuente: Elaboración propia

Cuando un cuerpo está inmerso en una corriente, la bidimensionalidad y direccionalidad del flujo están determinados por la dimensionalidad del cuerpo y por la alineación entre el flujo que los aproxima y el cuerpo mismo.

Para un cuerpo con simetría axial, la fuerza resultante está en el plano definido por el eje del cuerpo y el vector V_0 del flujo que se aproxima; la componente de la fuerza en la dirección del flujo que se aproxima se conoce como RESISTENCIA O ARRASTRE y el componente de la fuerza perpendicular al flujo que se aproxima se conoce como SUSTENTACIÓN.

Figura N° 3.7:
FUERZAS SOBRE UN CUERPO



F_s : fuerza de sustentación

F_A : fuerza de arrastre

R : fuerza resultante

α : ángulo de ataque

Fuente: Elaboración propia

Los experimentos han demostrado que cualquier cuerpo colocado en una corriente móvil experimenta una resistencia, si el cuerpo se mueve en relación con el fluido en reposo, la fuerza de resistencia resiste al movimiento; el vector de fuerza de resistencia siempre apunta corriente abajo. Las fuerzas F_s no necesariamente se presentan en todos los flujos; solamente ocurren si existe ASIMETRÍA.

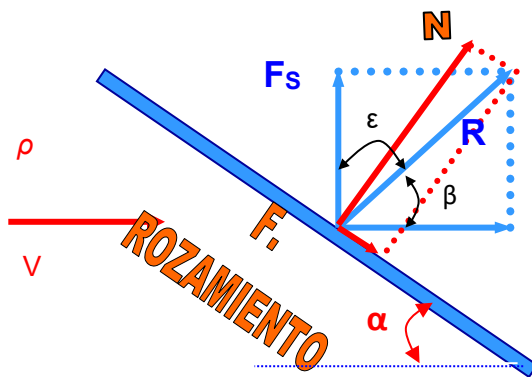
En el caso bidimensional:

1.- Fuerza de arrastre (paralelo al eje): $F_A = \frac{1}{2} \cdot C_A \cdot \rho \cdot V_0^2 \cdot A_p$ (3.16)

2.- Fuerza de sustentación (perpendicular al flujo): $F_S = \frac{1}{2} \cdot C_S \cdot \rho \cdot V_0^2 \cdot A_p$ (3.17)

Figura N° 3.8:

FUERZAS SOBRE UNA PLACA PLANA CON ÁNGULO DE ATAQUE



α : ángulo de ataque
 N : componente normal
 R : fuerza resultante de F_s y F_A
 $\text{Tag } \hat{\epsilon} = \frac{F_A}{F_S} \cong \frac{C_A}{C_S} \quad \hat{\alpha} \neq \hat{\epsilon}$
 A_p : área proyectada
 ρ : densidad del fluido

Fuente: Elaboración propia

3.2.2. Fuerza de arrastre

Se debe fundamentalmente a la forma del cuerpo y a la fricción entre el este y el fluido en la zona de la capa límite.

a) Fuerza de Arrastre por fricción (F_{Af})

Se debe al efecto de la viscosidad sobre el cuerpo, depende de μ , τ ; se calcula:

$$F_{Af} = \frac{1}{2} \cdot C_f \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \quad (3.18)$$

dónde: C_f : coeficiente total de arrastre por fricción

S : superficie del cuerpo inmersa en el fluido

Para **placas planas y lisas** se han obtenido experimentalmente:

Capa límite laminar

$$\text{Re} < 5 \times 10^5 \left\{ \begin{array}{l} C_f = 1.327 \text{Re}_x^{-1/2} ; \text{BLASIUS} \\ C_f = 1.460 \text{Re}_x^{-1/2} ; \text{E. EXACTA DE VON KARMAN} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Capa límite de transición

$$5 \times 10^5 < \text{Re} < 2 \times 10^7 \left\{ C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_x^{1/5}} - \frac{1700}{\text{Re}_x^{1/2}} \right. \quad (3.21)$$

Capa límite turbulenta:

$$2 \times 10^7 < \text{Re} < 2 \times 10^9 \left\{ C_f = \frac{0.074}{\text{Re}_x^{1/5}} \right. \quad (3.22)$$

$$\text{Re} > 2 \times 10^9 \left\{ C_f = \frac{0.455}{(\ln \text{Re}_x)^{2.58}} \right. \quad (3.23)$$

b) Fuerza de Arrastre por forma (F_{AC})

Depende de la forma del cuerpo o su configuración, en el cual es importante el fenómeno de separación de la capa límite y los vórtices que se forman en la parte posterior del cuerpo lo que disminuye la presión en dicha zona. Su valor se determina mediante la siguiente formula:

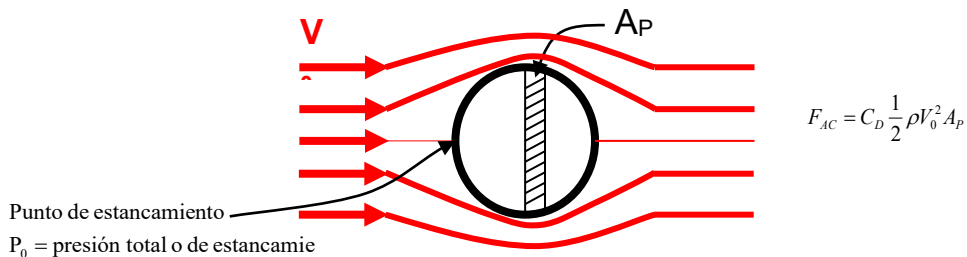
$$F_{AC} = 1/2 \rho V^2 \times A_p \times C_D;$$

Dónde: C_D.- coeficiente de arrastre

A_p = área proyectada del cuerpo

Figura: N° 3.9:

FLUJO INCIDIENDO SOBRE UN CUERPO SOLIDO



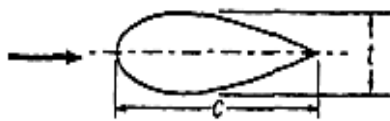
Fuente: elaboración propia

Para cuerpos afilados C_D no depende de Re ya que el punto de separación es prácticamente fijo. Para cuerpos ROMOS si depende de Re . Luego la fuerza total sobre el cuerpo sumergido es:

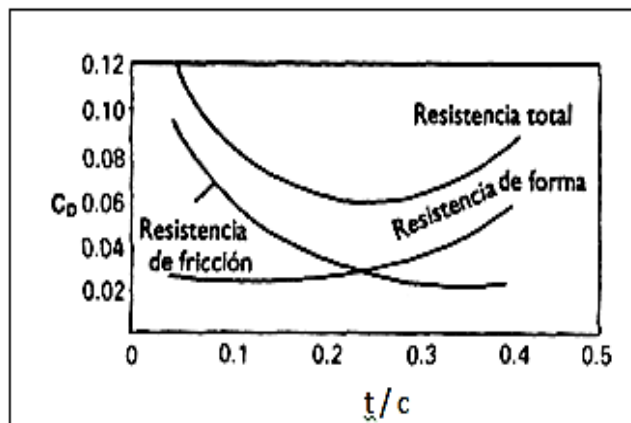
$$F_A = F_{Af} + F_{AC} \quad (3.24)$$

Figura N° 3.10.

COEFICIENTE DE ARRASTRE PARA UNA FAMILIA DE RIOSTRAS



La resistencia total es la suma de la resistencia de forma, la cual aumenta a medida que el cuerpo se hace más grueso, y la resistencia de fricción, que aumenta conforme el cuerpo se alarga.

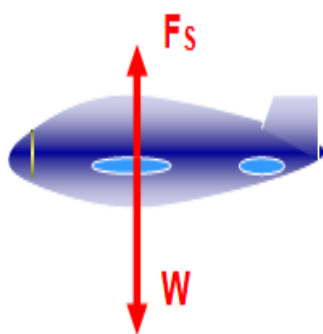


Fuente. - S. Goldstein, 1965

Figura N° 3.11.

FUERZAS SOBRE UN AVIÓN EN NAVEGACIÓN

Nota: para un avión :



$$F_s = \frac{1}{2} C_s \rho V^2 A_p$$

$$W = \frac{1}{2} C_s \rho V^2 A_p$$

$F_s > W \rightarrow$ Despegue

$F_s = W \rightarrow$ Velocidad Horizontal

$F_s < W \rightarrow$ Aterrizaje

$$V = \sqrt{\frac{2W}{C_s \rho A_p}}$$

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{W/A_p}{C_s \rho / 2}} \quad (3.25)$$

Donde $W =$ Carga alar

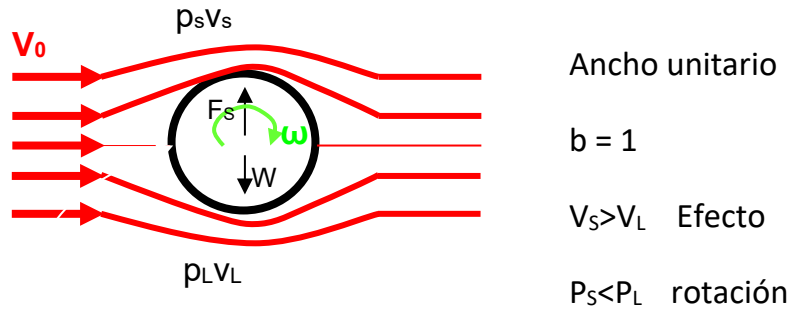
Fuente.- elaboracion propia

3.2.3. Fuerza de sustentación

Es la fuerza propia del calor a las líneas de flujo.

Figura N° 3.12.

SUSTENTACIÓN SOBRE CILINDROS GIRATORIOS



Fuente.- Gerhart, 1995

Luego la fuerza de sustentación es: Gerhart (1995,p 695)

$$F_S = b\rho V_0 \Gamma \quad (\text{Teorema de Kutta}^7 - \text{Joukowski}^8) \quad (3.26)$$

$$\text{Siendo la fuerza resultante } F_{SR} = F_S - W \quad (3.27)$$

Una circulación (rotación) origina una fuerza de sustentación perpendicular a la dirección del flujo y con sentido hacia arriba; obteniéndose:

$$\begin{aligned} \text{CIRCULACION: } \Gamma &= \oint V \cdot ds \\ \text{Para } ds &= r d\theta(b) \rightarrow b = 1 \\ V &= W \cdot r \\ \therefore \Gamma &= 2\pi\omega r^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

En un cuerpo tridimensional, donde la mayoría tiene al menos un plano de simetría, si el vector velocidad del flujo es paralelo al plano de simetría, la fuerza resultante sobre el cuerpo está en el plano de simetría, luego tiene dos componentes: fuerza de arrastre y sustentación (fig. 3.13a).

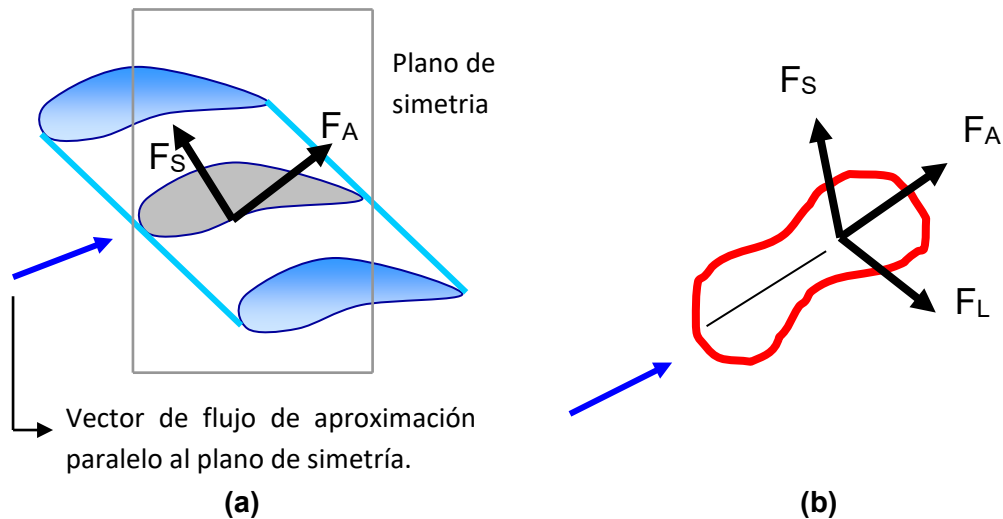
⁷ Martin Wilhelm Kutta, fue un Físico y Matemático Alemán

⁸ Nikolái Yegórovich Zhukovski, fue un Ingeniero Mecánico Ruso

Si el flujo es completamente asimétrico (cuerpo no tiene plano de simetría o el flujo no es paralelo), la fuerza resultante tiene tres componentes, llamada: arrastre, sustentación y fuerza lateral (fig.3.13.b).

Figura N° 3.13

FLUJO ALREDEDOR DE CUERPOS TRIDIMENSIONALES

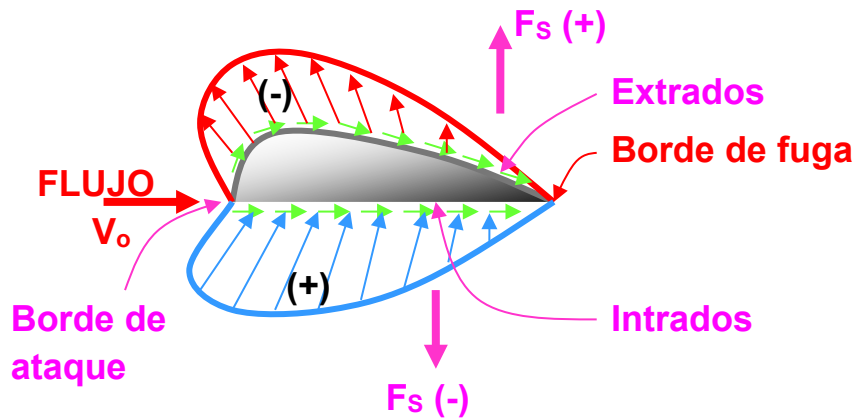


Fuente: Elaboración propia

PERFIL AERODINAMICO

Un perfil aerodinámico es un cuerpo bidimensional largo y delgado que se diseñó para producir una gran sustentación y poco arrastre o resistencia (fig.6.4). La magnitud de la presión en un punto de la superficie del perfil se indica por la longitud de una flecha perpendicular a la superficie. La presión se presenta en relación a la presión en la corriente de aproximación (no perturbada). Los esfuerzos cortantes en la superficie del perfil se indican por medio de flechas paralelas a la misma.

Figura N° 3.14.
PERFIL AERODINÁMICO ASIMÉTRICO



Fuente. - Gerhart, 1995

La fuerza neta sobre el perfil aerodinámico se puede calcular integrando la p y el τ sobre la superficie:
$$\vec{F} = -\oint (p \cdot \vec{n}) dA + \oint (\tau_w \cdot \vec{t}) dA \quad (3.29)$$

Donde \vec{n} y \vec{t} vectores unitarios perpendicular y tangente a la superficie del perfil.

τ_w es (+) si la fuerza cortante señala la misma dirección que \vec{t} .

Con ayuda de la siguiente figura se halla la fuerza de arrastre según Gerhart (1995, p653):

$$F_A = \oint (-p \text{Sen}\theta + \tau_w \text{Cos}\theta) dA \quad (3.30)$$

y la fuerza de sustentación:

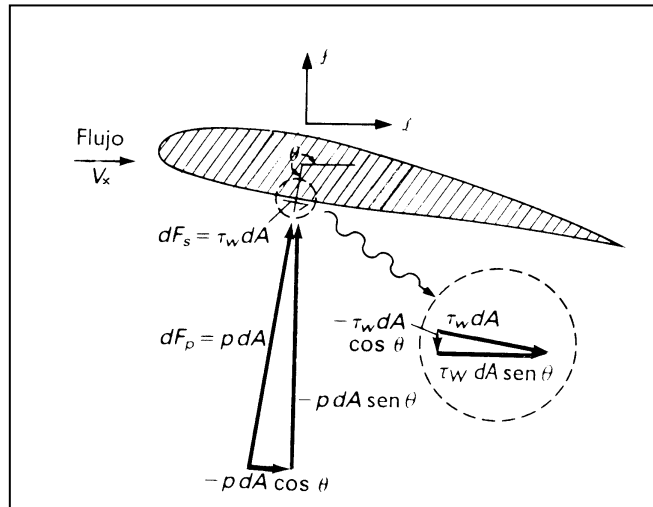
$$F_s = \oint (-p \text{Cos}\theta + \tau_w \text{Sen}\theta) dA \quad (3.31)$$

NOTA:

Como $\theta \approx 90^\circ$ sobre la parte superior del perfil y $\approx 270^\circ$ sobre la parte inferior del mismo, la F_s es ocasionada por la presión, mientras que la F_A es causada principalmente por el τ .

Figura N° 3.15.

FUERZAS DE ARRASTRE Y SUSTENTACIÓN A LO LARGO DE UN PERFIL

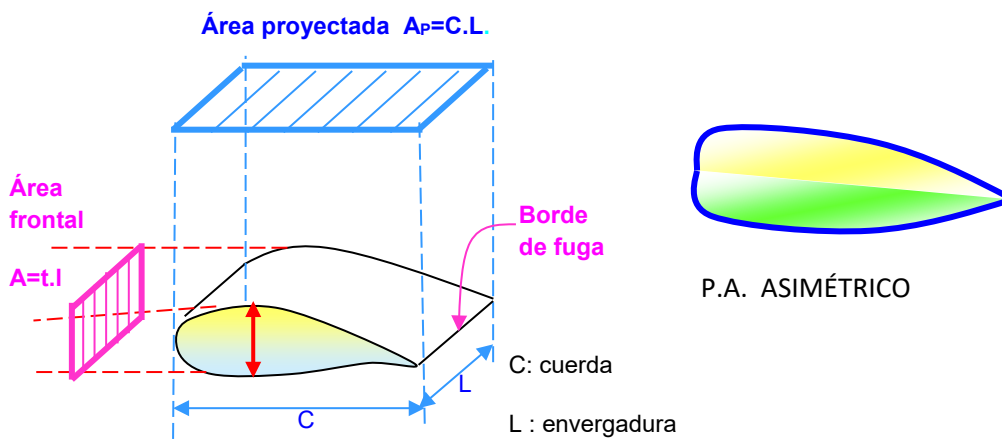


Fuente.- Gerhart, 1995

El área se toma como el cuadrado de una sola longitud de referencia. $A = l^2$, en éstas tenemos las más comunes como: **ÁREA FRONTAL**: la que se vería al mirar el cuerpo desde la dirección del flujo que se aproxima y el **área proyectada**: la que se vería observando al cuerpo desde arriba (fig.3.16).

Figura N° 3.16

ÁREA FRONTAL Y PROYECTADA



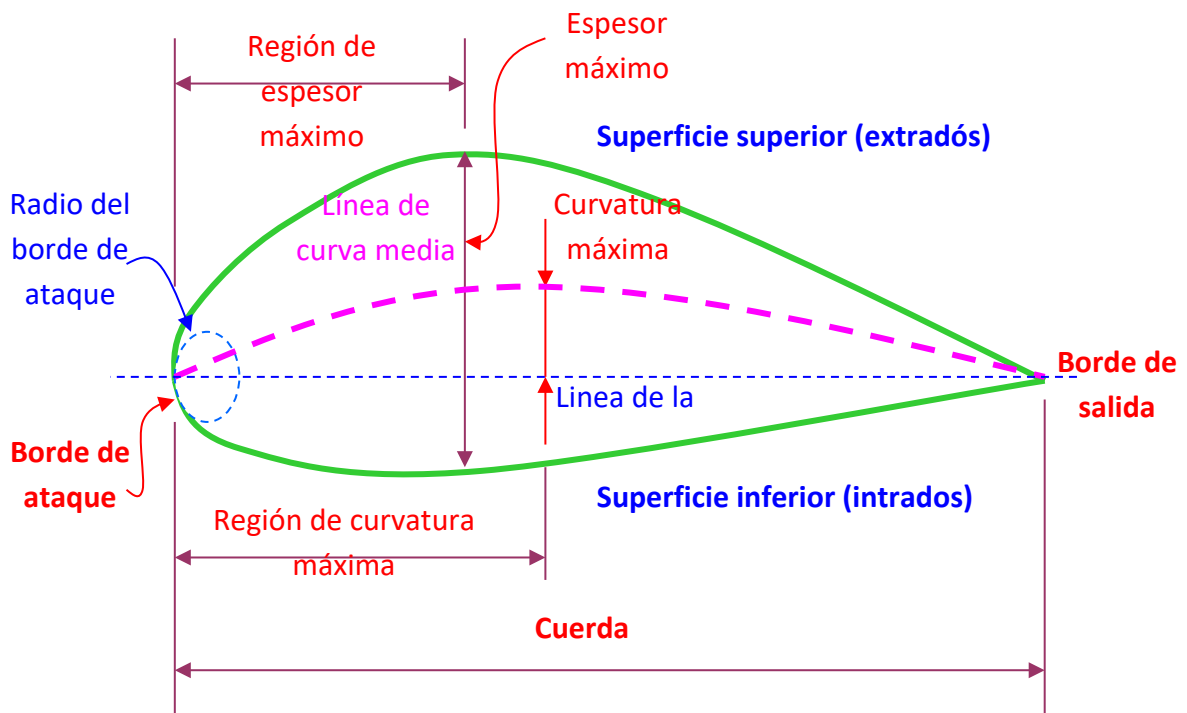
Fuente: elaboración propia

3.2.4. El perfil aerodinámico simple

Generalmente los perfiles son delgados, con una relación espesor a longitud menor que 0.2. La cuerda es la medida básica del tamaño del perfil.

La línea curva entre las superficies superior e inferior es la línea media o línea de curvatura. Un perfil con una línea de curvatura arqueada es ASIMÉTRICO. El arco (h) en cualquier punto es la distancia entre la línea de cuerda y la de curvatura. El arco y el espesor (t) se miden perpendiculares a la línea de cuerda.

Figura N° 3.17.
PERFIL AERODINÁMICO

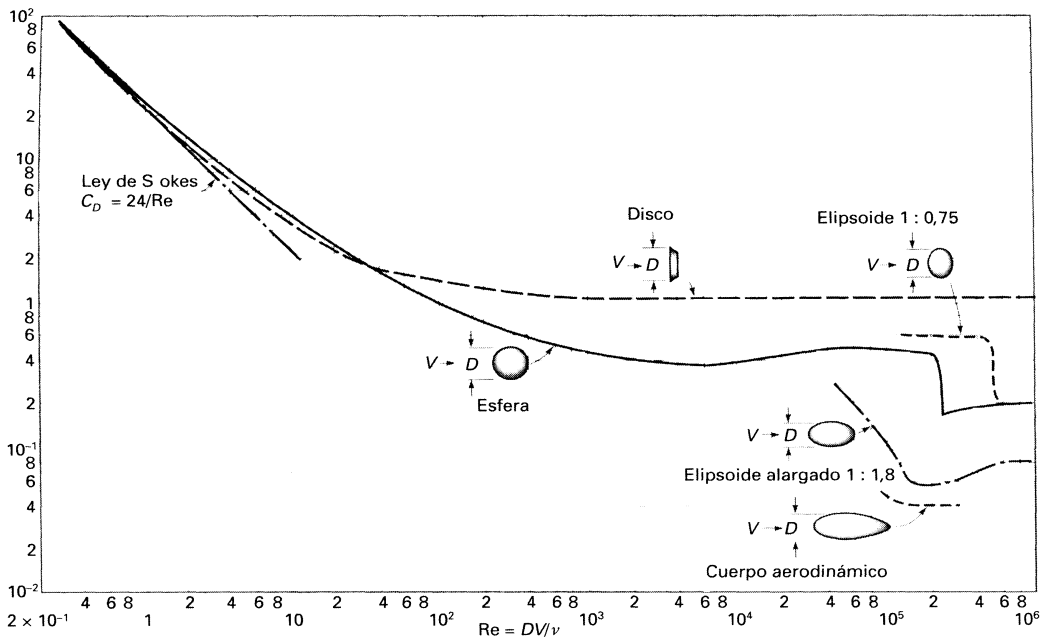


Fuente.- elaboración propia

La sustentación en un perfil fundamentalmente es el resultado de la presión superficial, por lo que la viscosidad del fluido parecería tener poco efecto.

Figura N° 3.18.

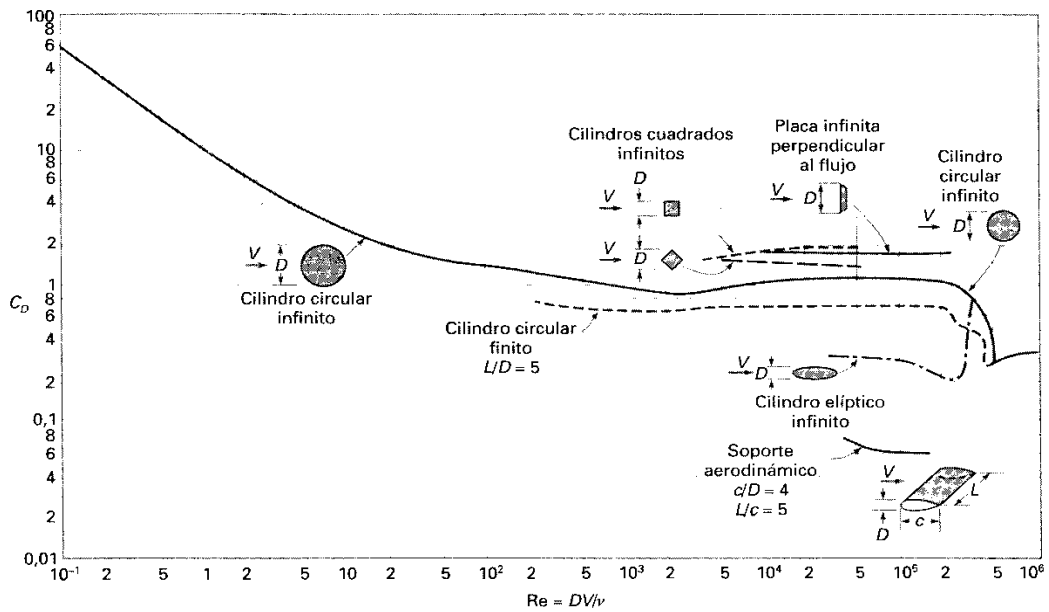
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA CUERPOS ASIMETRICOS



Fuente: Franzini. 1999

Figura N° 3.19.

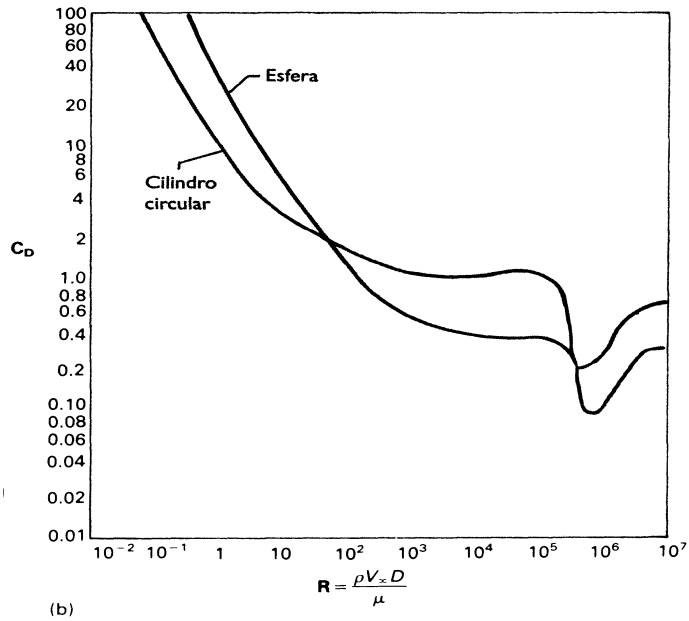
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA CUERPOS BIDIMENSIONALES



Fuente: Franzini. 1999

Figura N° 3.20.

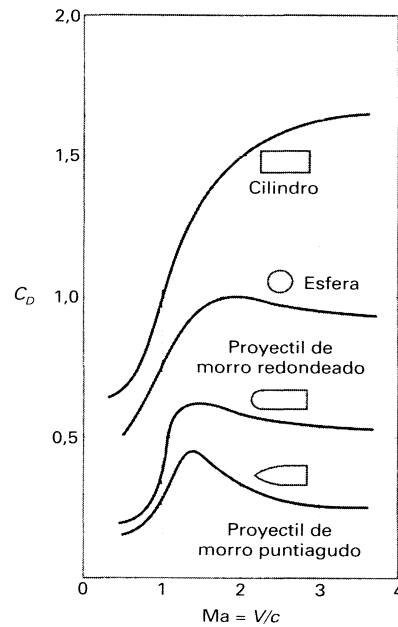
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA CUERPO LISO



Fuente: Franzini. 1999

Figura N° 3.21.

COEFICIENTE DE RESISTENCIA EN FUNCION DE Ma

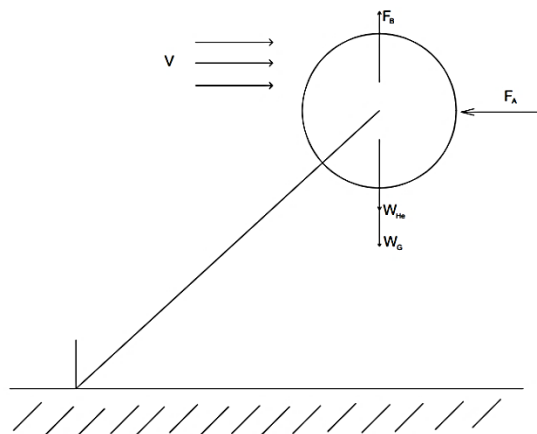


Fuente: Franzini. 1999

3.2.5. Aplicaciones:

3.1. Un globo relleno de helio a 1.10 bar abs, 20 °C, se encuentra atado por una cuerda sin peso al piso formando un ángulo θ con la vertical, rodeado de aire a 20 °C y 1 bar, que se desplaza a 10 m/s. El globo de diámetro 60 cm, peso seco 0,2 N; determinar el valor del ángulo formado

Solución:



De tablas se tiene para el aire: $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$

$$\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ N.s / m}^2$$

Para el Helio $\rho_{\text{He}} = 0.181 \text{ kg/m}^3$

Obtenemos el número de Reynolds

$$Re = \frac{1.21 \times 10 \times 0.5}{1.81 \times 10^{-5}} = 3.3 \times 10^5$$

Del grafico según Young se tiene $C_A = 0.47$

Luego la fuerza de arrastre será:

$$F_A = 0.5 \times 1.21 \times (\pi / 4) \times (0.5)^2 \times 100 \times 0.47 = 5.58 \text{ N}$$

El peso del helio $W_{\text{He}} = 0.181 \times 9.81 \times (\pi / 6) \times (0.5)^3 = 0.12 \text{ N}$

La fuerza de empuje: $F_B = 1.21 \times 9.81 \times (\pi / 6) \times (0.5)^3 = 0.78 \text{ N}$

La suma de fuerzas verticales según la figura es igual a cero; de donde se obtiene: $F_V = 0.78 - 0.12 - 0.2 = 0.46 \text{ N}$

Luego la tensión es: $T \cos \varphi = 0.46$ y $T \sin \varphi = 5.58$ de donde resulta $\varphi = 85.29^\circ$

3.2. Un automóvil “escarbajo” lleva en el techo un cartel 8x0,6x0,5m, paralelo al largo del auto, viajando a 70 mph y el viento en sentido contrario a 20 mph, estime las fuerzas que actúan sobre el anuncio, considerando placas lisas.

Solución:

La velocidad relativa es: $V_r = 10 \times 1609 / 3600 = 44.7 \text{ m/s}$

La longitud crítica será: $5 \times 10^5 = \frac{X_c \times 44.7 \times 1.21}{1.81 \times 10^{-5}}$, de donde $X_c = 0.17 \text{ m}$; luego tomamos flujo turbulento por ser la distancia muy pequeña, entonces el coeficiente de fricción se halla de:

$$C_f = \frac{0.074}{\left(\frac{8 \times 44.7 \times 1.21}{1.81 \times 10^{-5}}\right)} = 0.00247; \text{ la fuerza de fricción será: } F_f = 2(0.5 \times 1.21 \times (44.7)^2 \times 8 \times 0.6 \times 0.00247)$$

$$F_f = 28.36 \text{ N}$$

3.3. Un camión remolcador con sello entre la cabina y el remolque, cuyo peso 30 000 kg, con dimensiones de carrocería tipo furgón de 12x2,6x4,1 m, viaja por una pendiente de 5° con respecto al plano horizontal a 30 km/h y el viento a 20 km/h horizontalmente en sentido contrario, a 15°C, 1 bar; halle las fuerzas que actúan sobre el vehículo, si el área de planta se estima en 38 m² y el $C_s = 0,20$

Solución:

De tablas se tiene: $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$; $v = 1.468 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

La velocidad relativa es: $V_R = 30 + 20 \cos 5^\circ = 13.87 \text{ m/s}$

Se sabe que existe dos fuerzas una de la gravedad y la otra de fricción;

$$F_{Ag} = 0.5 \times 1.23 \times 2.6 \times 4.1 \times 0.7 (13.87)^2 = 882.85 \text{ N}$$

$$F_s = 0.5 \times 1.23 \times (13.87)^2 \times 39 \times 0.2 = 922.83 \text{ N}$$

Luego: $5 \times 10^5 = \frac{L_c \times 13.87}{1.468 \times 10^{-5}}$, de donde: $L_c = 0.53 \text{ m}$, entonces consideramos todo el flujo turbulento;

La fuerza de arrastre por fricción lateral será:

$$F_{AfLAT} = 2(0.5 \times 1.23 \times (13.87)^2 \times 12 \times 4.1 \times \frac{0.074}{\left(\frac{13.87 \times 12}{1.468 \times 10^{-5}}\right)^{1.05}} = 33.45 \text{ N}$$

La fuerza de arrastre por fricción para el techo:

$$F_{AfT} = 0.5 \times (13.87)^2 \times 2.6 \times 12 \times \frac{0.074}{\left(\frac{13.87 \times 12}{1.468 \times 10^{-5}}\right)^{1.05}} = 10.61 \text{ N}$$

3.4. Se tiene el perfil de velocidades $u = A \sin(By) + C$, estimar:

- La razón de crecimiento para la capa límite laminar
- El coeficiente de fricción
- El espesor de la C.L.L. por desplazamiento y por energía cinética.

Solución:

$u = A \sin (By) + C$, las condiciones de frontera son:

c.c.1: si $y = 0 \rightarrow u=0 \rightarrow C = 0$

c.c.2: si $y = \delta \rightarrow u = V_o \rightarrow V_o = A \sin(B\delta)$

c.c.3: si $y = \delta \rightarrow \delta u / \delta y = 0 \rightarrow B\delta = \pi/2 \rightarrow B = \pi / 2\delta$ y $A = V_o$,

Luego el perfil de velocidad es:

$u = V_o \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta} \right)$; reemplazando en la ecuación de Von Karman se tiene:

$$\tau_o = \rho V_o \frac{\delta}{\delta x} \left[\int_0^\delta \frac{u}{V_o} \left(1 - \frac{u}{V_o} \right) dy \right],$$

con el valor de $\tau_o = \mu \frac{\delta u}{\delta y} y = 0$; reemplazando y simplificando se tiene:

$$\delta^2 = \frac{2\pi x \mu \cdot x \cdot V_o}{V_o(4-\pi)}; \text{ de donde se obtiene: } \frac{\delta}{x} = 4.795 Re^{-0.5}$$

De igual manera se obtiene el coeficiente de fricción: $C_f = 0.655 Re^{-0.5}$

El espesor de la C.L.L. por desplazamiento es $\delta^* = 1.742 \cdot x Re^{-0.5}$ y el espesor de

la C.L.L por energía cinética es $\delta_k = 0.3624 \cdot x \cdot Re^{-0.5}$

3.5. Una esfera de acero ($S=7,86$ y $D=4$ cm) atada a un hilo sin peso y sujeta al techo, inmersa en una corriente de aire a condiciones estándar a nivel de mar el cual se mueve a 50 m/s, se pide el ángulo que forma con la horizontal ocasionado por el movimiento del aire.

Solución:

Para el aire considerando $Z=0$ se tiene: $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $T = 15^\circ\text{C}$, $\nu = 1.461 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $Re = 1.37 \times 10^5$

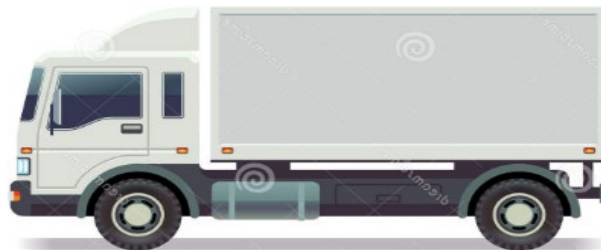
Haciendo el diagrama de cuerpo libre se tienen dos fuerzas

$$\sum F_h = F_A = T \cos\theta$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow T \sin\theta = W - \rho g \forall$$

De las dos ecuaciones se tiene: $\tan \theta = \frac{g(\rho_E - \rho_a)(\pi/6)D^3}{0.5x\rho_axV^2x\pi/4xD^2xC_A}$, el valor del coeficiente de arrastre lo obtenemos gráficamente: $C_A = 0.5$; reemplazando en la ecuación anterior se obtiene $\theta = 69.54^\circ$

3.6. Un camión remolcador de 53.5 KN de peso, con 2000 N de resistencia de las ruedas al movimiento, de carrocería furgón de 15x2.60x3.60 m, con coeficiente de resistencia 0.6 se desplaza con 100 km/hr, en un ambiente a 15°C, con aire que se mueve a 20 km/h en sentido contrario, determinar la potencia necesaria (HP) para mantener esta velocidad, si el $Re_{cr} = 3.5 \times 10^5$.
Solución:



La fuerza de arrastre total es $F_{AT} = F_{AG} + 2F_{f \text{ lados}} + F_{f \text{ techo}}$

La fuerza de arrastre por forma: $F_{AG} = 0.5 \times 1.2 \times (33.33)^2 \times 0.6 \times 2.6 \times 3.6$

$F_{AG} = 3743.25 \text{ N}$

La fuerza de fricción en los lados laterales; vemos que tipo de flujo es:

$3.5 \times 10^5 = \frac{33.33xLc}{1.7x10^{-5}} \rightarrow Lc = 0.18 \text{ m}$, consideramos flujo turbulento

$$F_{f \text{ lados}} = \frac{2 \times 1.2 \times 33.33^2 \times 3.6 \int_0^{15} dLx \frac{0.074}{\left(\frac{33.33L}{0.000017}\right)^{0.2}}}{2} = 213.65 \text{ N}$$

$$F_{f \text{ techo}} = \frac{1 \times 1.2 \times 2.6 \times 33.33^2 \int_0^{15} \frac{0.074x dL}{\left(\frac{33.33xL}{0.000017}\right)^{0.2}}}{2}$$

De donde se obtiene $F_{f \text{ techo}} = 77.15 \text{ N}$

Reemplazando en la fuerza de arrastre total se tiene: $F_{AT} = 6034 \text{ N}$

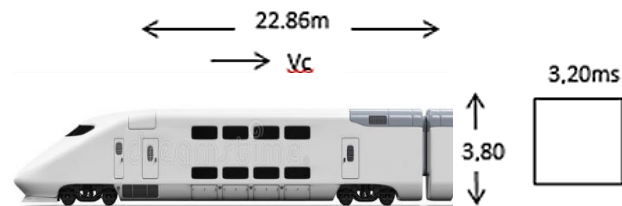
La potencia: $W = 6034 \times 33.33 = 201.11 \text{ Kw} = \mathbf{269.59 \text{ HP}}$

3.7. Un tren de pasajero consta de cinco vagones, cada uno de dimensiones 22.86x3.20x3.80m y se desplaza con una velocidad de 80 kph, en una

atmósfera a nivel del mar, con 22°C y el viento sopla en sentido contrario con 6 kph; si las superficies de los vagones se consideran lisas y el $Re_{CR} = 5 \times 10^5$; se pide:

- La fuerza de arrastre para un vagón, N
- La fuerza que debe vencer el tren, si los rieles ofrecen una resistencia por rozamientos de 560N, en N.

SOLUCION



Aire: $\rho = \frac{100}{0.287 \times 293.15}$

$\gamma = 1532 \times 10^5 \frac{m^2}{s}$ (interpolado)

De tablas: $C_A = 1.18$

$V = 86 \text{ km/Hr} = 23,89 \text{ m/s}$

$L_A F_A = F_{AF} + F_{Af} \dots\dots\dots(\alpha)$

La fuerza de arrastre por forma: $F_{AF} = \frac{1}{2} \times 1.18 \times 1.18 \times (23,89)^2 \times 3.20 \times 3.80$

$F_{AF} = 4831.7 \text{ N} \rightarrow$ determinamos la longitud crítica: $5 \times 10^5 = \frac{23.89.L_c}{1.5324 \times 10^{-5}}$

De donde se obtiene $L_c = 0.32 \text{ m}$, consideramos flujo laminar y turbulento.

Se hace los cálculos de las fuerzas de fricción

$F_{Af} L_{AM} + F_{AfTURB}$

$$F_{Aftecho} = \frac{1}{2} \times 1.18 \times (23.89)^2 \times 3.2 \left\{ \int_0^{0.32} \frac{dL \times 1.328}{\left(\frac{23.89 \times L}{1.5324 \times 10^{-5}}\right)^{1/2}} + \int_{0.32}^{23.86} \frac{0.074 dL}{\left(\frac{23.89 \times L}{1.5324 \times 10^{-5}}\right)^{1/5}} \right\}$$

$$F_{Aftecho} = 1077.5422\{0.001204 + 0.0633137\} \Rightarrow F_{Aftecho} = 69.35N$$

.....(a)

LADOS:

$$F_{AfLAD} = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2} x 1.18 x (23.89)^2 x 3.8 \right] \left(\int_0^{0.32} \frac{dL x 1.328}{\left(\frac{23.89 x L}{1.5324 x 10^{-5}} \right)^{1/2}} + \int_{0.32}^{22.86} \frac{dL x 0.074}{\left(\frac{23.89 x L}{1.5324 x 10^{-5}} \right)^{1/5}} \right) \right\}$$

$$F_{AfLAD} = 261.85N \text{(b)}$$

$$\therefore F_{Af} = 69.33 + 261.85 \Rightarrow F_{Af} = 331.18N \Rightarrow \text{reemplazandi en (a): } F_A = 5162.9N$$

La fuerza que debe vencer el tren; verificamos el R_e

$$R_e = \frac{23.8x22.86x5}{1.5324 x 10^5} = 1.78 x 10^8 > 1 x 10^7, \text{ es mayor, es totalmente turbulento}$$

$$F_{Aflecho} = \frac{1}{2} x 1.18 x (23.89)^2 x 3.2 x 114.3 x \frac{0.455}{(\log 1.78 x 10^8)^{2.58}} = 242 N$$

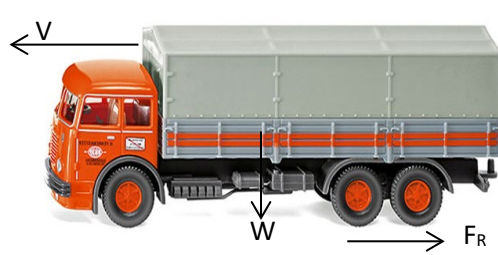
$$F_{Aflad} = 2x \frac{1}{2} x 1.18 x (23.89)^2 x 3.8 x 114.3 x \frac{0.455}{(\log 1.78 x 10^8)^{2.58}} = 574.93 N$$

$$F_{Af} = 817 N \Rightarrow F_{ATUT} = 4831.7 + 242 + 574.93 + 560$$

$$F_{ATUT} = 6200. N$$

3.8. Un vehículo remolcador de 4200 kg de peso muerto con el piso ofreciendo a las ruedas una resistencia a la rodadura de 2600N, “remolca” un semirremolque de carrocería tipo furgón de 15x2.6x3.80m, con coeficiente de arrastre de 0.62, desplazándose con 110 km/hr en una atmósfera a 15°C, 1 bar abs, donde el aire se mueve a 20 km/hr en sentido contrario, determinar la potencia que se necesita para mantener esta velocidad, en HP. Considerar el $R_{cr} = 3.5 x 10^5$

SOLUCION:



$$F_{AT} = F_{AG} + 2F_{Af.LAD} + F_{AfTEC} + F_R$$

$$F_{AG} = \frac{1}{2} \times 1.21 \times (36.11)^2 \times 0.62 \times 2.6 \times 3.8$$

$$F_{AG} = 4832.65 \text{ N}$$

Para los lados se determina la longitud crítica

$$1.5 \times 10^5 = \frac{36.11 \times L_c}{1.7 \times 10^{-5}} \Rightarrow L_c = 0.165 \text{ m}$$

Consideramos Flujo Turbulento

$$F_{AfLAD} = \frac{2}{2} \times 1.21 \times (36.11)^2 \times 3.8 \times 0.074 \int_0^{15} \frac{dL}{\left(\frac{36.11L}{1.7 \times 10^{-5}}\right)^{1/5}}$$

$$F_{AfLAD} = 443.6655 \times 0.0542 \times \frac{5}{4} (15)^{4/5}$$

$$F_{AfLAD} = 262.32 \text{ N}$$

$$\text{para el techo: } F_{AfTEC} = \frac{1}{2} \times 1.21 \times (36.11)^2 \times 2.6 \times 0.074 \int \frac{dL}{\left(\frac{36.11L}{1.7 \times 10^{-5}}\right)^{1/5}}$$

$$F_{AfTEC} = 151.78 \times 0.0542 \times \frac{5}{4} (15)^{4/5}$$

$$F_{AfTEC} = 89.74 \text{ N; teniendo como dato } F_R$$

$$= 2600 \text{ N, se tiene finalmente:}$$

$$F_{AT} = 7784.71 \text{ N}$$

$$P_{0T} = F \cdot V = 281105.878 \text{ WATT}$$

$$P_{0T} = 376.82 \text{ HP}$$

Problemas propuestos

1. Un camión de 9 m^2 de área frontal y 65 kN de peso desciende por una pendiente de 8° en una localidad a $1\,000 \text{ m}$ de altitud, con una resistencia a la rodadura de 120 N por metro por segundo de velocidad, partiendo a 65 mph y se detiene a 30 mph , determine el tiempo transcurrido hasta su detención (seg).
2. Dos columnas de madera de sección transversal cuadrada de 1 pie y de 20 pies de alto se colocan verticalmente en agua (60°F), sumergidas totalmente flotando con respecto a la superficie libre, que se desplaza a 6 pies/s ; a una de ellas el agua impacta perpendicularmente en la cara y a la otra en el vértice ¿cuál de las columnas tendrá mayor momento flector en su base?
3. Determinar la razón de crecimiento de la CLL, el esfuerzo cortante, el coeficiente de fricción y el espesor de la CLL por desplazamiento, para el perfil $u/U = 2(y/\delta) - 2(y/d)^3 + (y/\delta)^4$
4. En la prueba de un helicóptero tiene su rotor de seis aspas de 4 m de largo y 25 cm de ancho, girando a 120 rpm en plano horizontal, en una atmosfera a 20°C ; determinar la potencia para mantener la rotación de las aspas, considerando $Re_{cr} = 3.5 \times 10^5$. (R: 3324 hp)
5. Un automóvil de área frontal 25 pie^2 , peso 3000 lb que inicialmente viaja a 35 mph experimenta una fuerza propulsión constante de 400 lb , con un coeficiente de arrastre de 0.30 , en un lugar donde la densidad del aire es 0.075 lb/pie^3 , determinar el tiempo necesario para que alcance una velocidad de 55 mph . (R: 7.6 seg)
6. Una minivan viaja a 60 km/hr en un ambiente a 1 bar abs , 80°F , de dimensiones $12 \times 6.4 \times 3.4 \text{ pies}$, y el viento en contra que se mueve a 5

km/hr, la pista ofrece una resistencia de 100 N, determinar la potencia necesaria para mantenerla a estas condiciones, en HP. $Re_{cr} = 3.5 \times 10^5$.

7. Un tracto-remolcador de masa 16 000 kg, jala una carrocería furgón de 12x2.60x3.20 m, de área frontal 9.4 m² con acoplamiento normal, siendo el coeficiente de resistencia a la rodadura de 0.05 y la resistencia a la fricción en los cojinetes de 370 N, viaja a 70 mph en un lugar a 1 bar abs, 23°C. Si se le instala un perfil con sello entre la cabina y la carrocería, determinar la velocidad máxima del vehículo (mph) después de haberse instalado el perfil aerodinámico. $Re_{cr} = 3.5 \times 10^5$

CAPITULO IV: FLUJO COMPRESIBLE

El flujo compresible es aquel en el cual su densidad cambia ante cualquier variación de la presión o temperatura.

Los gases o fluidos compresibles tienen una gran capacidad elástica porque sus espacios intermoleculares son “grandes” esto le permite modificar su volumen ante cualquier cambio de la fuerza que actúa sobre ellos.

Para analizar el comportamiento de los flujos compresibles contamos con el **número de mach (M)**:

$$M = \frac{V}{C} \quad (4.1)$$

dónde: V: velocidad relativa del fluido

C: velocidad del sonido; su valor se determina por:

$$C = \sqrt{kxRxT} \quad (4.2)$$

Los flujos según el Mach⁹ son:

M ≈ 1 Flujo Transónico

M > 1 Flujo Supersónico

M > 2 Flujo Hipersónico

M < 1 Flujo subsónico

M=1 Flujo sónico

Recordando: $C_p = \frac{K \cdot R}{K - 1}$ (4.3)

dónde: k = exponente isoentropico; k > 1

R : constante particular del gas → $R = \frac{Ru}{M}$ (4.4)

Ru: constante universal de los gases

$$Ru = 1.986 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kmol} \cdot ^\circ K} = 49720 \frac{\text{pie}^2}{^\circ R \cdot \text{s}^2} = 8.3143 \frac{\text{KJ}}{\text{Kmol} \cdot ^\circ K}$$

Para el aire: K = 1.4

	pie ² / °R.s ²	J /kg k
--	--------------------------------------	---------

⁹ Ernst Mach fue un físico y filósofo austríaco

Cp	6010	1003.5
Cv	4293	716.5
R	1717	287

En un flujo isoentrópico se tiene : $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{K-1}{K}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{K-1} \dots\dots\dots(4.5)$

El cambio de entropía en procesos irreversibles :

$$s_2 - s_1 = Cp \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \dots\dots\dots(4.6)$$

La transmisión de calor para un FEES : ${}_1q_2 = h_2 - h_1 \dots\dots\dots(4.7)$

4.1. Flujo isoentrópico unidimensional

Es aquel que cumple la condición de ser adiabático y además siempre está asociado a procesos reversibles (interna y externamente).

4.1.1. Propiedades de estancamiento

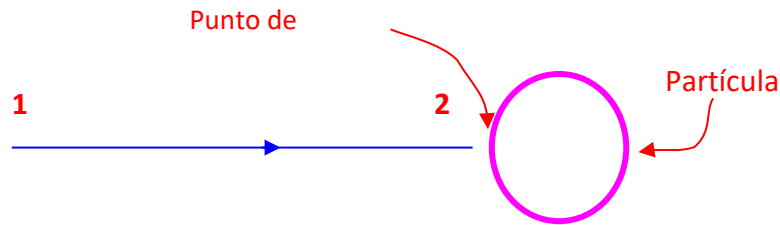
Propiedades de remanso o propiedad del punto singular. Son las características de las propiedades que obtendría el fluido si se le llevara a una condición de velocidad cero, cuando choca momentáneamente con un cuerpo solido; con una elevación cero en un proceso reversible sin transferencia de calor ni realización de trabajo. Se tiene las siguientes propiedades: P_0 , T_0 , ρ_0 , h_0

NOTA

- ◆ El punto de estancamiento es el lugar geométrico que ocupan todas aquellas partículas que carecen de energía cinética.
- ◆ Todas las propiedades de estancamiento siempre permanecen constantes en un flujo isoentrópico.

a. Temperatura de estancamiento (T_u)

Es la temperatura que alcanza una partícula fluida cuando es frenada adiabáticamente. Todo instrumento (termómetro) mide temperatura de estancamiento.



Sabemos que por la primera ley de la termodinámica:

$${}_1q_2 = {}_1w_2 + h_2 - h_1 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g(Z_2 - Z_1)$$

$$h_2 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} \quad \text{pero: } h = C_p \cdot T$$

$$C_p \cdot T_2 = C_p \cdot T_1 + \frac{V_1^2}{2} \quad \rightarrow \quad T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot C_p} \quad (4.8)$$

$$\text{Para cualquier punto: } T_0 = T + \frac{V^2}{2 \cdot C_p} \quad (4.9)$$

b. Presión de estancamiento (p_0)

Es la presión que alcanza la partícula cuando es frenada isoentrópicamente.

Por Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{P_2}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$P_2 = P_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} \quad (4.10)$$

$$\text{para cualquier punto: } P_0 = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (4.11)$$

c. Relaciones entre las propiedades de estancamiento y las propiedades estáticas

➤ Relación entre T_0 y T

Recordamos:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{T}{T} + \frac{V^2}{2 \cdot Cp} \cdot \frac{1}{T}, \text{ de donde se obtiene: } \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(K-1)M^2}{2} \quad (4.12)$$

➤ Relación entre P_0 y P

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \frac{(K-1)M^2}{2} \right]^{\frac{K}{K-1}} \quad (4.13)$$

➤ Relación entre P_0 y ρ

Recordamos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{K-1} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{(K-1)M^2}{2} \right]^{\frac{1}{K-1}} \quad (4.14)$$

4.1.2. Condición crítica

Es aquella que se alcanza cuando el fluido es sónico y la sección o región donde ello ocurre se denomina sección crítica y se designa como A^* , las propiedades que existen en dicha región son críticas: P^* , T^* , h^* , V^* , ρ^* .

Relaciones Críticas

Relación entre T_0 y T^* :
$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{(K+1)} \quad (4.15)$$

Relación entre P_0 y P^* :
$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{K+1} \right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (4.16)$$

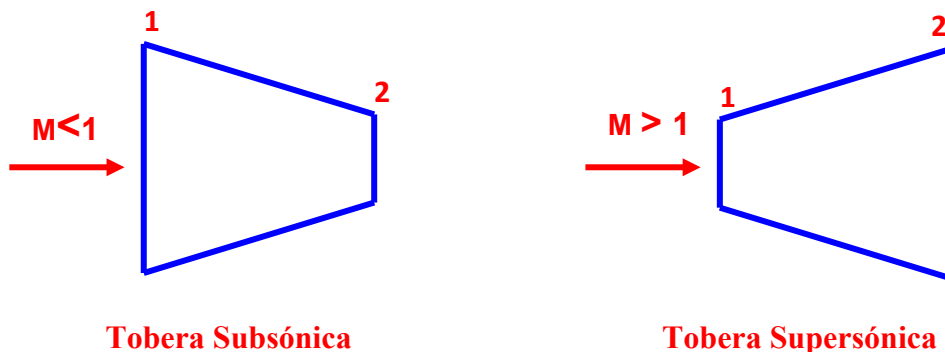
Relación entre ρ_0 y ρ^* :
$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{K+1} \right)^{\frac{1}{K-1}} \quad (4.17)$$

4.2. Ductos de sección variable

4.2.1. Toberas

Se denomina así a los dispositivos o ductos cortos de sección variable que transforma la energía entálpica en energía cinética, es decir es un acelerador de flujo. Todos los procesos de expansión están asociados a este dispositivo existiendo toberas subsónicas, sónicas y supersónicas.

Figura N° 4.1
ESQUEMAS DE TOBERAS



Fuente: elaboración propia

NOTA

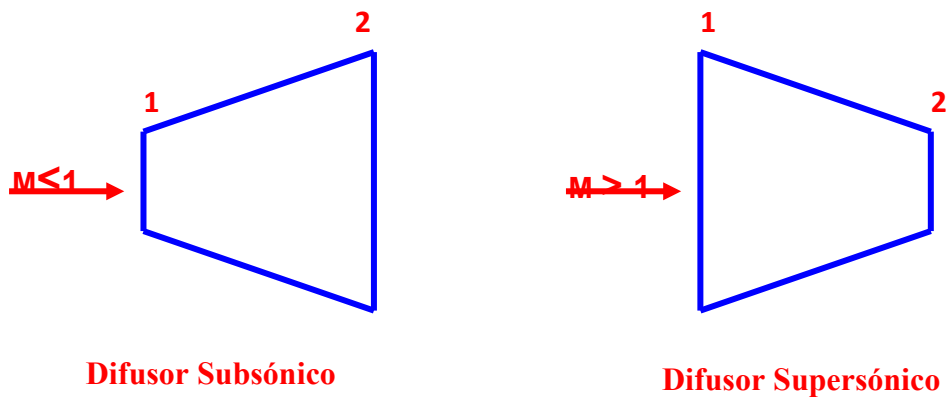
El máximo número de Mach que se puede obtener a la salida de una tobera subsónica es 1, jamás un valor superior a este.

Cuando el Mach a la salida de la tobera es igual a 1, se dice que la tobera está bloqueada, chocada, ahogada o estrangulada.

4.2.2. Difusor

Dispositivo o ducto corto de sección variable que transforma la energía entálpica en energía de presión. Es decir, todos los procesos de compresión están asociados a este dispositivo existiendo difusores subsónicos y supersónicos.

Figura N° 4.2
ESQUEMAS DE UN DIFUSOR



Fuente: elaboración propia

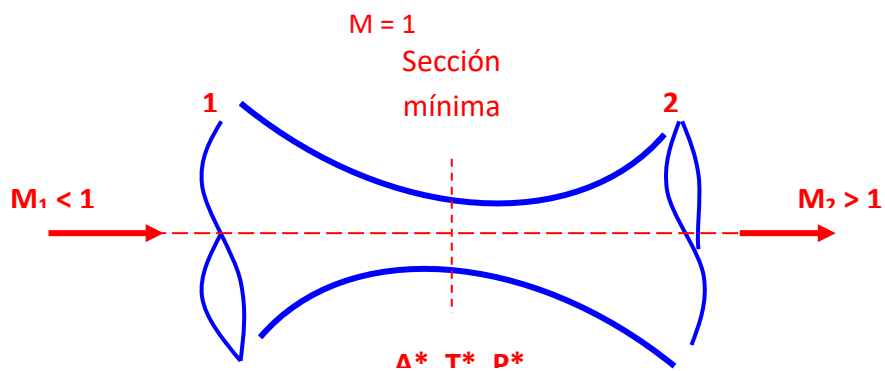
NOTA

La geometría del dispositivo no determina el nombre. El nombre lo determina el tipo de régimen con el cual ingresa el flujo al dispositivo.

4.2.3. Tobera convergente – divergente.

Es un dispositivo de sección variable que permite obtener a la salida un flujo en condición supersónica, si al ingreso es subsónico y en la sección mínima se alcanza la condición sónica.

Figura N° 4.3.
ESQUEMA DE UNA TOBEREA CONVERGENTE-DIVERGENTE



Fuente: Elaboración propia

A. Relación entre a^* y a :

Sabemos que : $\dot{m}_1 = \dot{m}^*$ \rightarrow $\rho_1 V_1 A_1 = \rho^* V^* A^*$

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho_1 V_1} \quad ; \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{1}{K-1}} \quad y$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{K-1}} ; \text{reemplazando se obtiene:}$$

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1} \left[\frac{2 + (K-1) M_1^2}{K+1} \right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \quad (4.18)$$

$$\text{También: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2 + (K-1) M_2^2}{2 + (K-1) M_1^2} \right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \quad (4.19)$$

b. Flujo másico máximo

Sabemos: $\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A$ (a)

Si sustituimos:

$$p = p_0 \left[1 + \frac{K-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-K}{K-1}} \quad y \quad T = T_0 \left[1 + \frac{K-1}{2} M^2 \right]^{-1}$$

Reemplazando en (a) se obtiene:

$$\dot{m} = \sqrt{K} \left(\frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} \right) M \left[1 + \frac{K-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-(K+1)}{2(K-1)}} \quad (b)$$

Como $M=1$ y $A = A^*$ la ecuación (b) se transforma:

$$\dot{m}_{max} = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{K} \left(\frac{2}{K+1} \right)^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \quad (4.20)$$

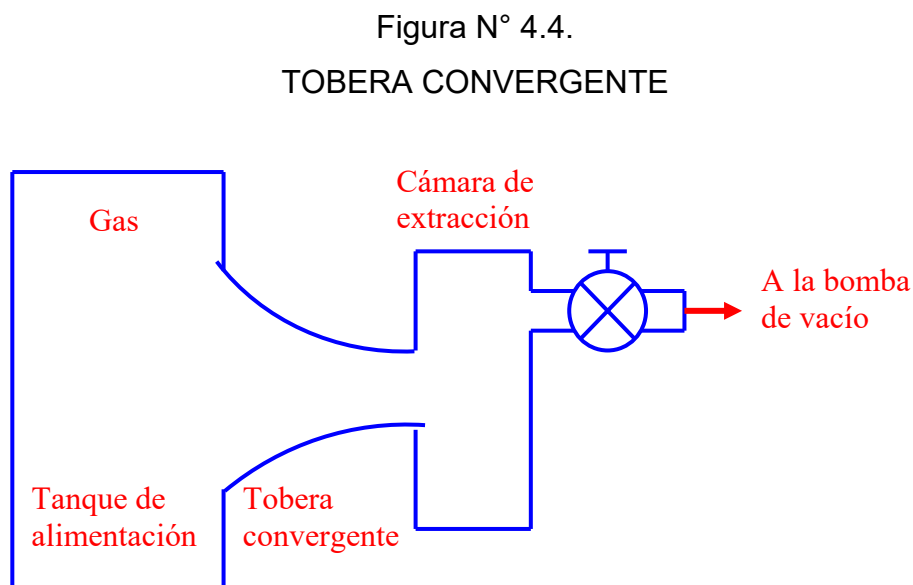
Por lo tanto, el fenómeno de bloqueo ocurre para un flujo compresible en un conducto o dispositivo cuando el M alcanza el valor de 1 en el área mínima; cuando esto ocurre no se puede aumentar el flujo másico, a menos que la relación de la presión de **estancamiento** entre la raíz cuadrada de la temperatura de estancamiento también se incremente.

4.3. Tobera convergente

La figura 4.4 muestra una tobera convergente que extrae gas desde un tanque grande hacia una región de presión variable; supondremos que la presión y la temperatura en el tanque son constantes. La presión en la región de salida (**contrapresión**) se puede variar por medio de una válvula de control que conecta esta región con una bomba de vacío corriente abajo. También supondremos que no existe fricción en las paredes ni transferencia de calor o trabajo.

Haciendo ciertas observaciones preliminares al flujo en la tobera:

- Como la tobera es convergente, el flujo no puede sobrepasar el valor de $M = 1$.
- El flujo a la entrada de la tobera evidentemente es **subsónico**, luego en toda ella lo será también.
- El flujo no puede ser **supersónico** en ella, por lo que no pueden existir ondas de choque, luego el flujo será **isoenergético e isoentrópico**.
- Las propiedades de remanso son constantes.
- El M_{\max} posible es 1, ocurriendo solamente en la salida (área mínima).



Fuente: Elaboración propia

Nota: Flujo isoentrópico e isoenergético; cuando el flujo es isoentrópico sin trabajo.

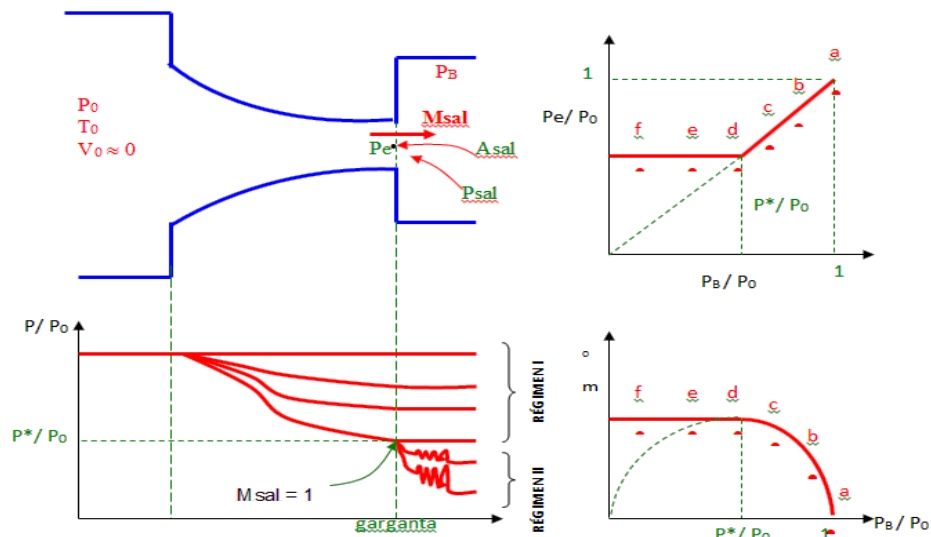
f) Hay un flujo másico máximo que puede ocurrir cuando el Mach sea uno a la salida.

En la figura 4.5 se muestran estos cambios de las propiedades a través de la tobera:

- El gas se acelera del tanque hacia la salida de la tobera y la presión decrece. La P_{\min} y M_{\max} ocurren en la salida.

Figura N° 4.5.

COMPORTAMIENTO DEL GAS EN UNA TOBERA CONVERGENTE



Fuente: Gerhart (1995, p 893)

El fenómeno de bloqueo ocurre cuando M local llega a 1 en el área mínima del dispositivo, no se puede aumentar el \dot{m} .

El flujo **después** de salir de la tobera se debe ajustar al valor de la contrapresión que es menor. El flujo corriente abajo es multidimensional, por lo que la curva de presión se muestra como una línea ondulada. Abrir más la válvula con una mayor disminución de la contrapresión no cambia el flujo.

En una tobera simple, existen dos regímenes de flujo: **flujo no bloqueado** y **flujo bloqueado**; esto depende de los valores relativos de la contrapresión y la $P_{crítica}$.

- Si $P_B/P_0 > P^*/P_0$ **El flujo no está bloqueado.** (4.21)
- Si $P_B/P_0 \leq P^*/P_0$ **El flujo está bloqueado.** (4.22)

4.4. Tobera convergente – divergente

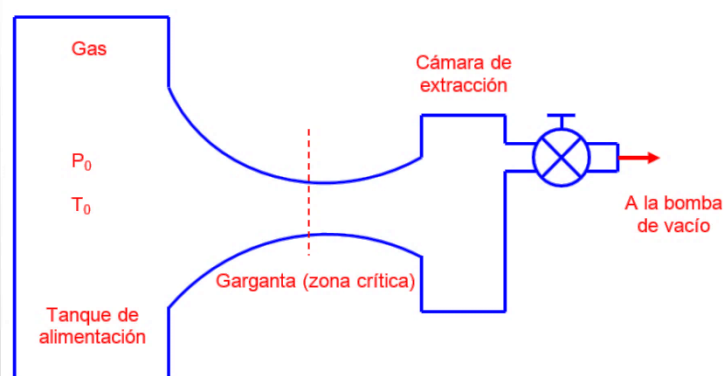
La figura N° 4.6 muestra una tobera convergente-divergente que empuja un gas desde un tanque grande a P y T constantes hacia una región de salida de presión variable. La contrapresión se puede variar abriendo o cerrando la válvula. También se supondrá que no existe fricción en la pared, ni flujo de calor ni de trabajo.

Según Gerhart (1995,p894) hace las observaciones preliminares:

- Como la tobera es convergente - divergente, el flujo puede pasar a través de un $M = 1$; el flujo puede ser subsónico en todos lados.
- Si $M_1 = 1$ debe serlo en la garganta.
- En la porción divergente podría existir el flujo supersónico y en consecuencia podría haber ondas de choque en el flujo. Si éstas existen, el flujo **no** es completamente **isoentrópico**, aunque si **isoenergético**.
- Si no hay ondas de choque, el flujo es **isoentrópico**. Si las hay, el flujo del tanque hasta la primera onda es isoentrópico. entonces el flujo corriente abajo de una onda de choque también es isoentrópico, pero con valores diferentes de entropía, P_0 y área crítica.

Figura N° 4.6

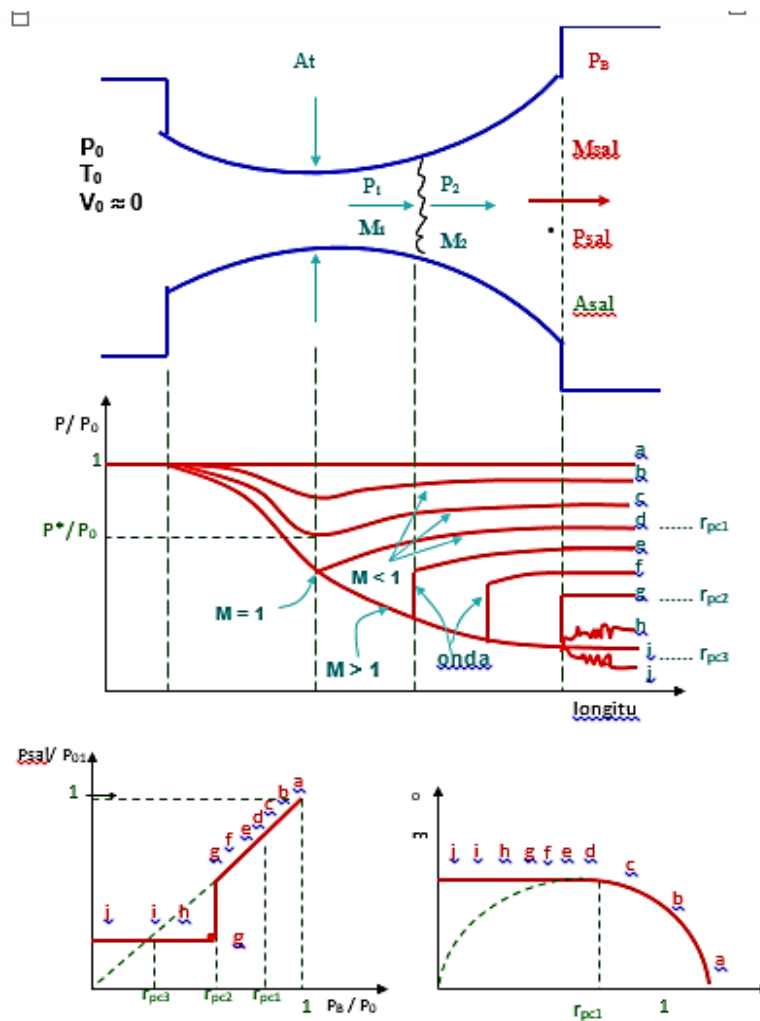
TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE



Fuente: Gerhart (1995,p 894)

- e. El M_{\max} posible sólo puede ocurrir en la salida y se determina con la relación de A_{salida} con el A_{garganta} .
- f. El flujo máximo posible en la tobera está determinado por las corrientes del gas, las propiedades del gas en el tanque y el área mínima, que se presenta en la garganta.

Figura N° 4.7
COMPORTAMIENTO DEL GAS EN UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE



Fuente: Gerhart (1995, p895)

Aplicaciones:

- 4.1. Un difusor deja pasar 250 lb/s de aire el cual ingresa a 10 psia, 25°F con un Mach de 2,5 y sale por un área de 0.741 pie², se pide:
- La presión y temperatura en el punto singular, bar y °F
 - El número de mach del aire a la salida del dispositivo
 - La velocidad del gas a la salida del difusor, pies/s

Solución:

A la entrada se tiene $\rho_1 = \frac{10 \times 144}{53.3 \times 485} = 0.0557 \text{ lb/pie}^3$; la velocidad del sonido

$C_1 = \sqrt{1.4 \times 53.3 \times 32.2 \times 485} = 1079.5 \text{ pies/s}$, de donde se obtiene la velocidad de ingreso $V_1 = 2698.77 \text{ pies/s}$, también el $A_1 = \frac{250}{0.0557 \times 2698.77} = 1.663 \text{ pie}^2$

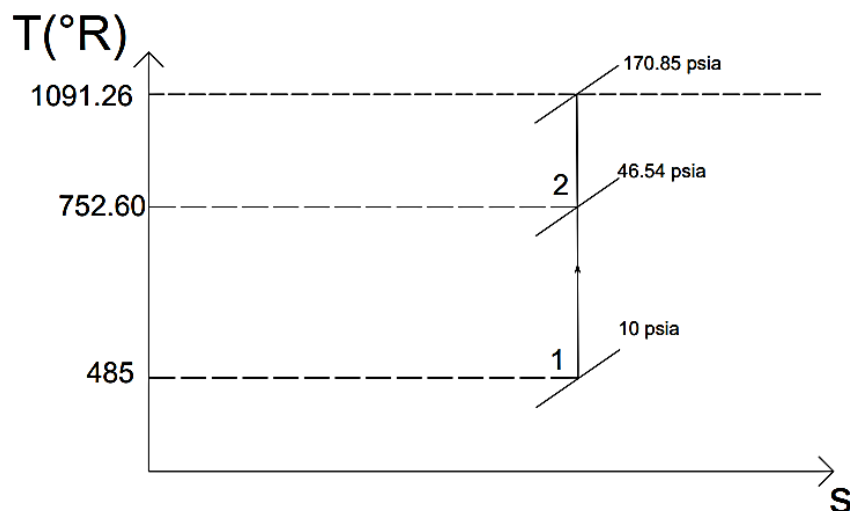
Con $M=2.5$ a tablas de flujo isoentropico para obtener $\frac{A_1}{A^*} = 2.6367$;

$\frac{p_1}{p_0} = 0.05853$;

$\frac{T_1}{T_0} = 0.4444$; reemplazando se calcula $A^* = 0.63 \text{ pie}^2$; **$p_0 = 170.85 \text{ psia}$ y**

$T_0 = 1091.26^\circ\text{R}$

Con $\frac{A_2}{A^*} = 1.1762$ a tablas de F.I, obteniéndose: **$M_2 = 1.5$** ; $\frac{p_2}{p_0} = 0.2724$; $\frac{T_2}{T_0} = 0.68065$, de donde se calculan: $p_2 = 46.54 \text{ psia}$; $T_2 = 752.60^\circ\text{R}$, $\rho_2 = 0.167 \text{ lb/pie}^3$; **$V_2 = 2017.11 \text{ pie/s}$**



4.2. Se desea hacer fluir aire isentropicamente dentro de un ducto divergente, haciéndolo ingresar a 337 k, 3.5 bar abs a 300 m/s; si la relación entre la sección de salida y la entrada es 2.2, determinar la presión, densidad, velocidad y flujo másico del fluido a la salida si escapan 3000 cfm.

Solución:

El número de Mach a la entrada: $M_1 = \frac{300}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 335}} = 0.82$, con este valor a

T.F.I. se obtiene: $\frac{A_1}{A^*} = 1.03046$; $\frac{T_1}{T_0} = 0.88146$; $\frac{p_1}{p_0} = 0.64300$; luego se tiene:

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*} \times \frac{A^*}{A_1} \rightarrow 2.2 = \frac{A_2}{A^*} \times \frac{1}{1.03046} \rightarrow \frac{A_2}{A^*} = 2.267$, con este valor a T.F.I. de

donde se obtiene:

$M_2 = 2.34$; $\frac{T_2}{T_0} = 0.4773$; $\frac{p_2}{p_0} = 0.07513$

Luego como $T_{01} = T_{02} = \frac{337}{0.88146} = 382.32$ k, entonces $T_2 = 0.4773 \times 382.32 = 182.48$ k

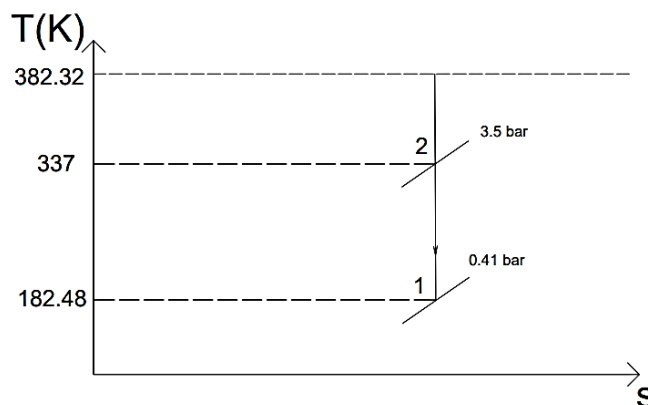
$V_2 = 2.34 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 182.48} = 633.62$ m/s

También $p_{01} = \frac{3.5}{0.643} = 5.443$ bar abs, de donde $p_2 = 5.443 \times 0.07513$; $p_2 =$

0.41 bar abs

La densidad $\rho_2 = \frac{41}{0.287 \times 182.48}$; $\rho_2 = 0.783$ kg/m³

$A_2 = \dot{V}_2 / V_2$ de donde se determina $D_2 = 5.33$ cm y el $\dot{m} = 3994$ kg/hr



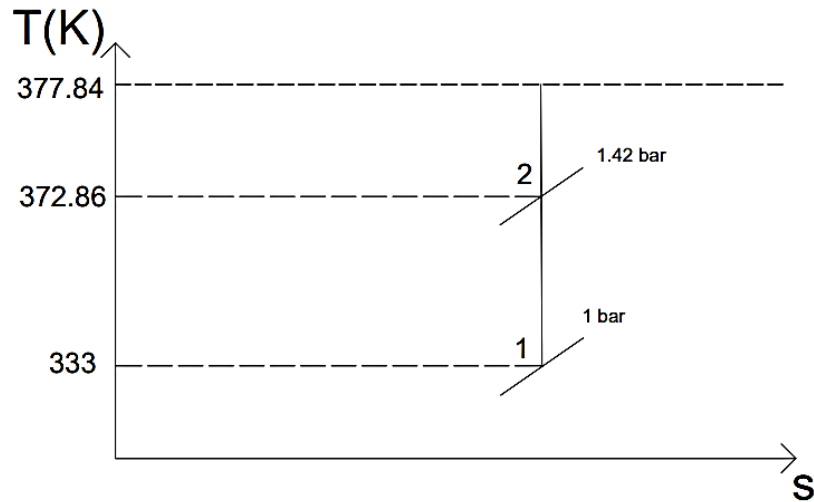
4.3. A un difusor ($\eta_s = 0.88$) entra aire con 300 m/s, a 60°C y 1 bar abs a razón de 0.5 kg/s y sale con 100 m/s; se pide:

- La presión del aire a la salida, bar abs
- La velocidad del aire en el proceso isentropico, m/s

c. Los diámetros de entrada y salida, cm

Solución:

Diagrama T – s



Al ingreso se tiene: $\rho_1 = \frac{100}{0.287 \times 333} = 1.046 \text{ kg/m}^3$

Por la primera ley de la termodinámica: $q_{1-2} = C_p \cdot (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2000}$,

despejando la temperatura de salida $T_2 = \frac{300^2 - 100^2}{2000 \times 1.0035} + 333$; $T_2 = 372.86 \text{ K}$;

de la eficiencia del difusor:

$0.88 = \frac{T_{2i} - 333}{372.86 - 333}$; $T_{2i} = 368 \text{ k}$, nos permite hallar la presión de salida

$P_2 = \left(\frac{368}{333}\right)^{3.5} \times 1 = \mathbf{1.42 \text{ bar abs}}$

La temperatura de estancamiento: $T_{01} = 333 + \frac{300^2}{2 \times 1003.5} = 377.84 \text{ k} = T_{02}$

Luego $377.84 = 368 + \frac{V_{2i}^2}{2 \times 1003.5}$; de donde $V_{2i} = \mathbf{140 \text{ m/s}}$

$0.5 = 1.046 \times 300 \times \pi \times D_1^2 / 4 \rightarrow \mathbf{D_1 = 4.5 \text{ cm}}$

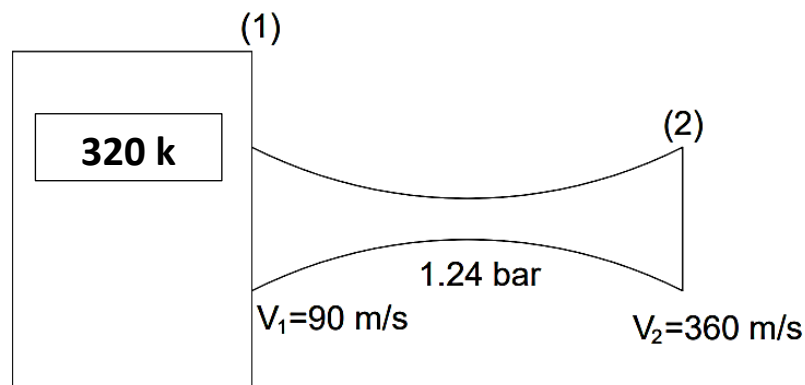
También $0.5 = \frac{142 \times 100 \times \pi \times D_2^2}{0.287 \times 372.86 \times 4} \rightarrow \mathbf{D_2 = 6.93 \text{ cm}}$

4.4. Aire se encuentra en un recipiente a 320 K, ingresa a una tobera convergente-divergente a 90 m/s por una sección de 5 cm de

diámetro, en la garganta el gas tiene 1.24 bar abs y en la salida alcanza 360 m/s; se pide:

- El número de mach a la entrada y salida de la tobera
- La temperatura del aire a la salida °C
- La densidad del gas a la salida, kg/m³
- Diagrama T-s con valores

SOLUCION



$$T_0 = 320\text{K}$$

$$V_1 = 90 \text{ m/s}$$

$$D_1 = 5\text{cm}$$

$$P^* = 124 \text{ kPa abs}$$

$$320 = T_1 + \frac{90^2}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 316}} \Rightarrow M_1 = 0.253$$

$$\frac{P^*}{p_0} = 0,52828 \Rightarrow P_0 = 234.72 \text{ kPa}$$

$$\frac{234.72}{P_1} = \left(\frac{320}{316}\right)^{3.5} \Rightarrow P_1 = 224.616$$

$$\rho_1 = \frac{224.61}{0.287 \times 316} = 2.48$$

$$\text{El flujo másico será: } \dot{m} = 2.48 \times 90 \times \frac{\pi}{4} (0,05)^2 = 0.438 \text{ kg/s}$$

$$320 = T_2 + \frac{(360)^2}{2 \times 1003.5} \Rightarrow T_2 = 255.43 \text{ K} = -17.57^\circ\text{C}$$

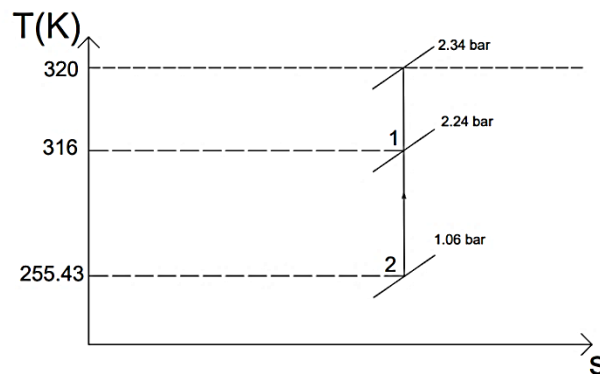
$$C_2 = \sqrt{1.4 \times 287 \times 255.43} = 320.36 \text{ m/s}$$

$$M_2 = \frac{360}{320.36} \Rightarrow M_2 = 1.12$$

$$\frac{P_0}{P_2} = \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{3.5} \Rightarrow \frac{234.72}{P_2} = \left(\frac{320}{255.43}\right)^{3.5}$$

$$P_2 = 106.65 \text{ KPa abs}$$

$$\rho_2 = \frac{106.65}{0.287 \times 255.43} = 1.46 \text{ kg/m}^3$$



Propuestos:

- Por una tobera bien aislada fluye aire a razón de 12.5 kg/s, en un punto el área de la sección transversal es 0.01 m², el gas está a 0.2 bar, 5°C; corriente abajo se tiene 0.90 bar abs; se pide:
 - Velocidad del aire en ambos puntos, °C. (R: 816; 842.62 m/s)
 - La velocidad máxima que alcanzaría el aire. (R: 1100 m/s)
- Aire sale de un compresor centrífugo a 8 bar, 760 K con 2.63 m³/s, ingresa a la cámara de combustión isobárica para quemar 0.93 kg/s de combustible gaseoso, de donde los gases quemados (C_p=1.046 kJ/kg K, k=1.38) salen hacia el colector, en donde está a 1500K para luego ingresar a la tobera con 220 m/s, perdiendo 1.2 bar de presión, donde se expande isoentropicamente hasta alcanzar 400 m/s, por un diámetro "D" del tubo; se pide:

- a. El número de mach del al ingreso a la tobera
- b. b.La temperatura del gas a la salida de la tobera, °C
- c. c.El número de mach a la salida de la tobera
- d. El diámetro del ducto a la salida de la tobera, cm

Rpta: 0.287; 1150.52°C; 0.53; 15 cm

3. Una tobera convergente-divergente se encuentra instalada a un reservorio de aire, el que ingresa a 1,22 bar abs, a razón de 20 kg/s, alcanzando en la garganta 0.18 bar, para salir de ella con un mach de 1.50, a 420 m/s; se pide:

- a. El número de mach a la entrada
- b. Los diámetros de la tobera a la entrada y salida, cm
- c. La fuerza de oposición de la tobera al paso del gas, N
- d. Diagrama T – s, con valores

Rpta: 0.972; 21.52 cm. 22.76 cm; 571.93 N

CAPITULO V: FLUJOS COMPRESIBLES EN DUCTOS DE SECCIÓN CONSTANTE

Las aplicaciones importantes en este tipo de transporte de gases es la de flujo Fanno y Rayleigh¹⁰.

5.1. Flujo FANNO¹¹

En el flujo compresible la fricción no se puede calcular con la ecuación de Darcy-Weisbach, ésta aparece explícitamente en la ecuación de cantidad de movimiento. Al emplear la ecuación de energía, se debe hacer una suposición explícita acerca del trabajo y calor. La generación o consumo de trabajo se “concentra” en turbinas y compresores y no ocurre en tramos largos de ductos o tubos.

Si el ducto es razonablemente corto, se supone flujo adiabático. El flujo isotérmico ocurre en tuberías largas expuestas a una temperatura ambiente constante, ejemplo las líneas de transporte subterráneo de gas natural, el cual después de viajar unos cientos de metros a lo largo de la tubería alcanza la temperatura de los alrededores; para mantener constante la temperatura se transfiere calor hacia el gas o desde él.

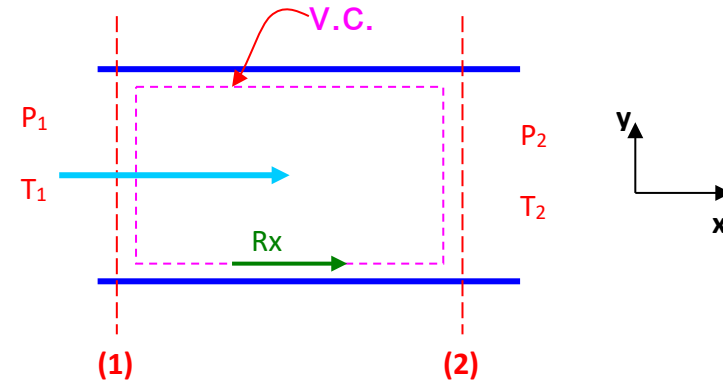
5.1.1. Ecuaciones básicas para flujo adiabático

Aplicaremos las ecuaciones básicas para flujo uniforme estable a un gas ideal, con calores específicos constantes, en un volumen de control finito.

¹⁰ John William Strutt, tercer barón de Rayleigh fue un físico y catedrático universitario británico

¹¹ Gino Girolamo Fanno fue un Ingeniero Mecánico Italiano

Figura N° 5.1.
 VOLUMEN DE CONTROL PARA UN TUBO DE SECCIÓN CONSTANTE
 ADIABÁTICO



Fuente: elaboración propia

Por la ecuación de continuidad para flujo estable y uniforme en cada sección:

$$(\rho A)_1 = (\rho A)_2 \rightarrow G = \frac{\dot{m}}{A} \quad (5.1)$$

Por ecuación de momento:

$$R_x + p_1 A - p_2 A = V_1 (-|p_1 V_1 A|) + V_2 (|p_2 V_2 A|)$$

$$R_x + p_1 A - p_2 A = m V_2 - m V_1 \quad (5.2)$$

R_x = fuerza de fricción de la pared del ducto sobre el flujo.

Por la Primera ley de la termodinámica: $e = u + \frac{V^2}{2}$ (5.3)

Luego:

$$0 = \left(U_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 V_1 \right) (-|p_1 V_1 A|) + \left(U_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 V_2 \right) (|p_2 V_2 A|)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (5.4)$$

Con la Segunda ley de la termodinámica se tiene la variación de entropía:

$$s_2 - s_1 = C_p \cdot \text{Ln} \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \text{Ln} \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (5.5)$$

Por la ecuación de estado: $p = \rho \cdot R \cdot T$ (5.6)

Si se conocen el valor de las propiedades en el estado (1) tendríamos, en el estado (2) siete incógnitas, es decir un número infinito de estados posibles, originando un lugar geométrico de todos estos estados (2) posibles, alcanzables desde el estado (1) siendo una curva continua que pasa por el estado (1), llamada **Línea de FANNO**.

5.1.2. Características de flujo FANNO

Se tienen las siguientes consideraciones:

1. Todas las condiciones de estado son consecuencia de la fricción.
2. Siempre representan un proceso adiabático ($T_0=0$).
3. La tubería es de sección constante.
4. Se verifica la ecuación de continuidad.
5. El cambio de entropía siempre es positivo.
6. El fluido se comporta como gas ideal.

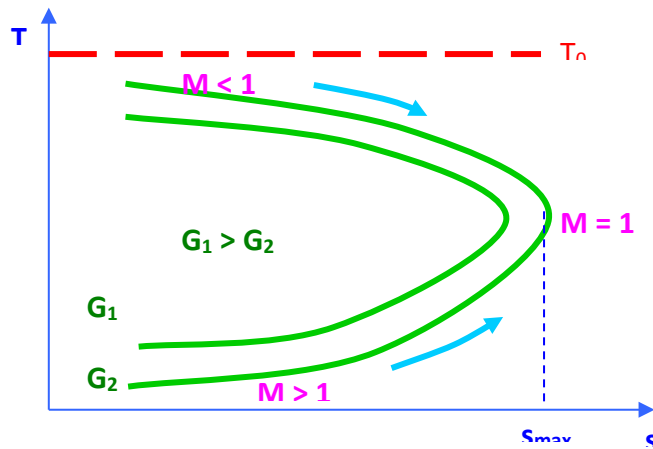
LÍNEA DE FANNO

Es el lugar geométrico que ocupan todos los estados de un flujo gaseoso donde se verifican la ecuación de continuidad y la de energía.

Si: $G = \frac{m}{A}$ y $h_o = h + \frac{v^2}{2}$ entonces la velocidad será:

$$V = G.v \quad \rightarrow \quad h_0 = h + \frac{G^2 v^2}{2}, \text{ Ecuación de la línea Fanno (5.7)}$$

Figura N° 5.2
 DIAGRAMA T – S, PARA UNA LÍNEA FANNO

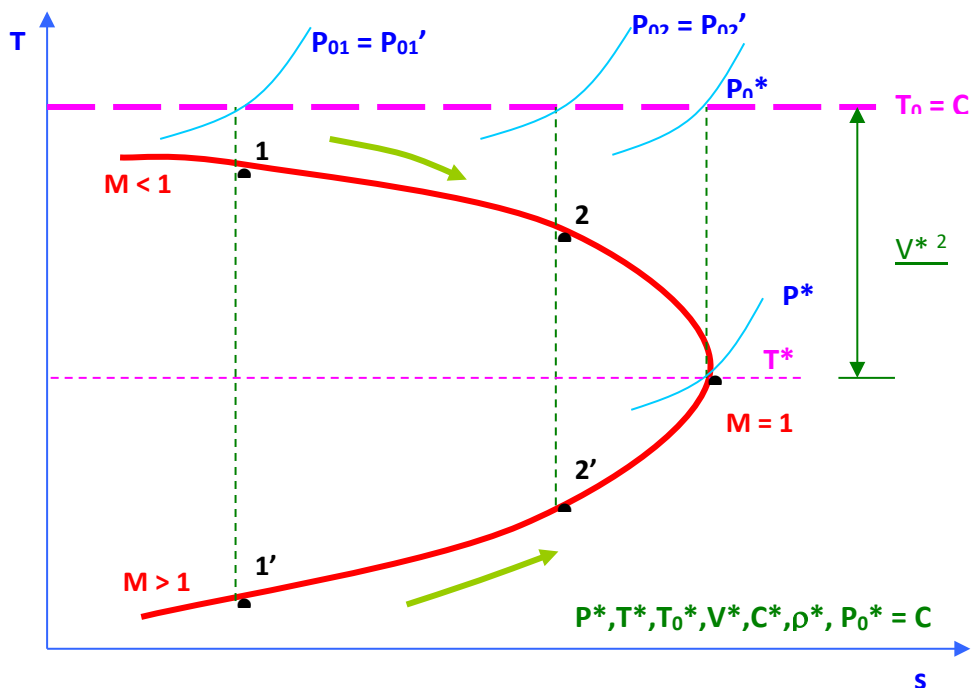


Fuente: elaboración propia

- En el estado de máxima entropía, el M es sónico; la presión singular disminuye para todo estado.

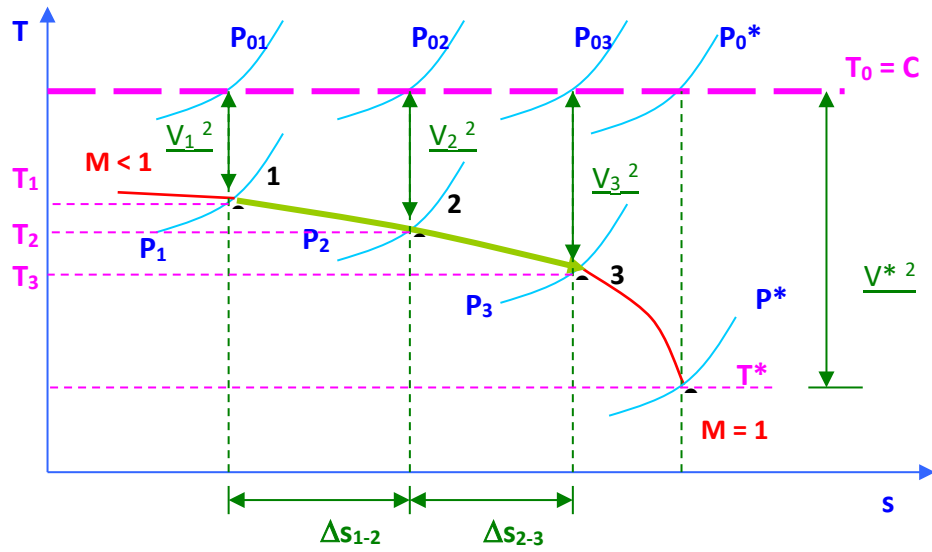
ESTADOS DE REFERENCIA PARA FLUJO FANNO

Figura N° 5.3
 DIAGRAMA T – S, SUBSÓNICO Y SUPERSONICO



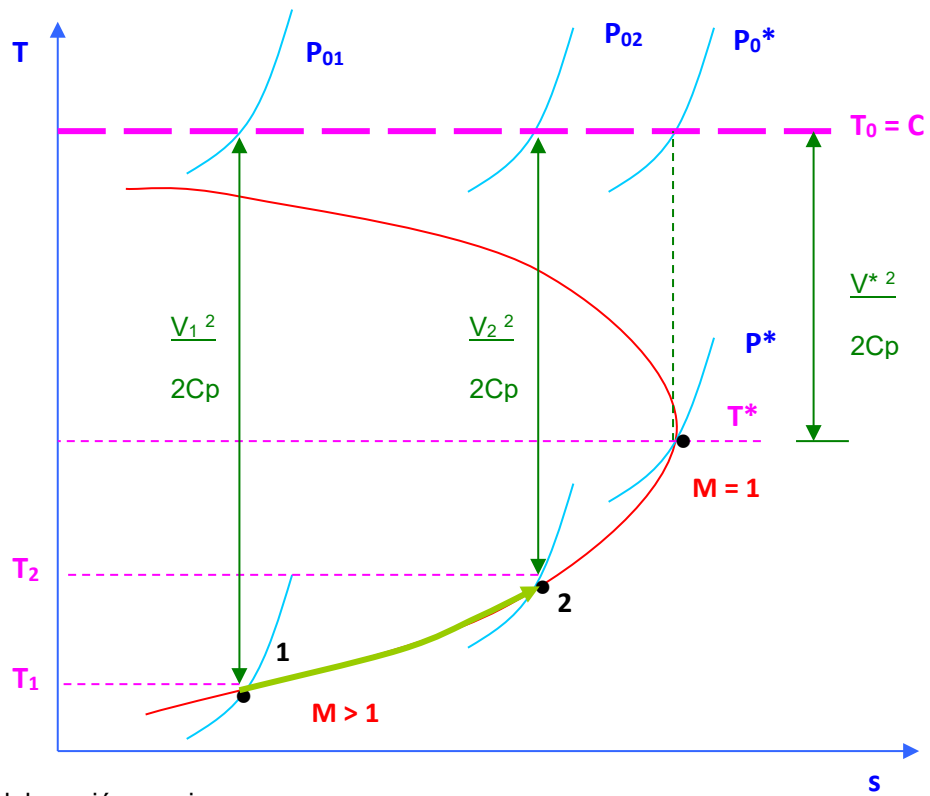
Fuente: elaboración propia

Figura N° 5.4
REGIÓN SUBSÓNICA



Fuente: elaboración propia

Figura N° 5.5
REGIÓN SUPERSÓNICA:

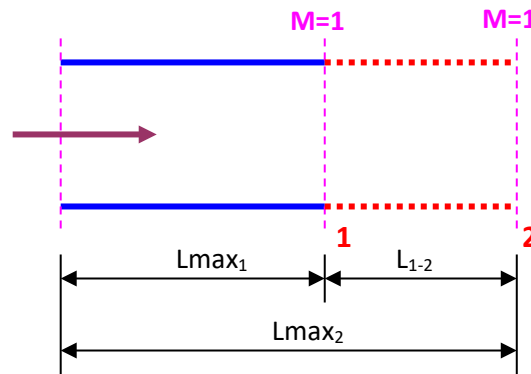


Fuente: elaboración propia

5.1.3. Longitud máxima (L_{max} , L^*)

Es aquella longitud de tubería que permite alcanzar a la salida el estado sónico, se puede alcanzar este valor partiendo de un estado supersónico o de un subsónico.

Nota: Si a la salida el estado es sónico y agregamos una longitud de tubería, el flujo se reacomoda corriente arriba, disminuyendo su densidad y de esta manera su línea G y en la salida nuevamente es sónico; denominándose a esto **estrangulamiento**.



Dónde: $L_{1-2} = L_{max2} - L_{max1}$ (5.8)

Tabla N° 5.1

RESUMEN DE EFECTOS DE LAS PROPIEDADES EN EL FLUJO FANNO

PROPIEDA	SUBSONICO	SUPERSÓNICO
	$M < 1$	$M > 1$
T_0	Constante	Constante
S	A	A
P_0	D	D
T	D	A
V	A	D
M	A	D
ρ	D	A
P	D	A

5.1.4. Aplicaciones:

5.1. Por un ducto de sección constante adiabático de 30x30 cm de 8 m de largo circula aire desde un ambiente que se encuentra a 100 psia y 500°R, con $M = 0,70$, si a la salida el flujo se encuentra estrangulado, se pide:

- la temperatura del gas a la salida del ducto, °R
- la fuerza que ejerce el ducto al paso del fluido, lb

Solución:

a la entrada al ducto: $T_1 = 500 - \frac{V_1^2}{2 \times 6010} \dots\dots\dots(a)$

Por otro lado se tiene $M_1^2 = \frac{V_1^2}{k \times R \times T_1}$, de donde $T_1 = \frac{V_1^2}{1177.176} \dots\dots\dots(b);$

igualando las dos ecuaciones:

$500 - \frac{V_1^2}{2 \times 6010} = \frac{V_1^2}{1177.176}$, se obtiene la velocidad del gas de ingreso al ducto $V_1 = 732.18$ pie/s

Reemplazando en la ecuación (a) de calcula la temperatura del gas de ingreso al ducto $T_1 = 455.4$ °R y de la ecuación básica de proceso isoentropico $p_1 = 72.1$ psia.

También $500 = T_2 + \frac{k \times R \times T_2}{2 \times C_p}$, de donde: **$T_2 = 416.71$ °R**

Como a la salida se tiene flujo sónico, la $V_2 = C_2 = 1000.55$ pies/s

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al ducto:

$p_1 A_1 - p_2 A_2 - R_x = \dot{m}(V_2 - V_1) \dots\dots\dots(c)$

como el flujo másico es $\dot{m} = 302.96$ lb/s, este es igual a: $\dot{m} = \frac{p_2 \times V_2}{R \times T_1} \times A$, de

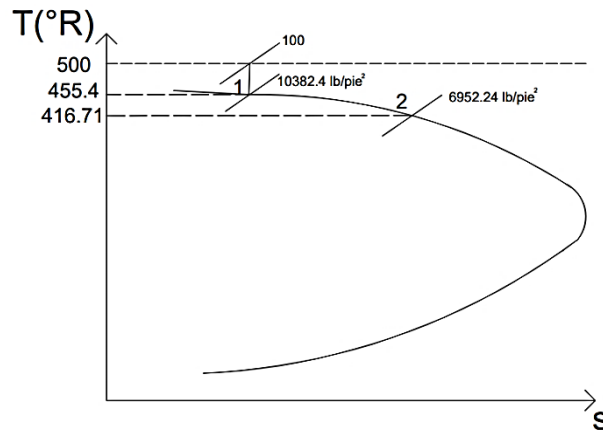
donde se obtiene la presión del gas a la salida. $p_2 =$

$\frac{302.96 \text{ lb} \times 53.3 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{pie} \times 416.71 \cdot R \cdot \text{s}}{s \times \text{lb} \cdot \text{m} \cdot \text{°} \cdot R \times 1000.55 \text{ pie} \times 0.968256 \text{ pie}^2} =$

$p_2 = 6952.24$ lb/ pie² y $p_1 = 10382.4$ lb/ pie², para el área $A = 0.968256$ pie²

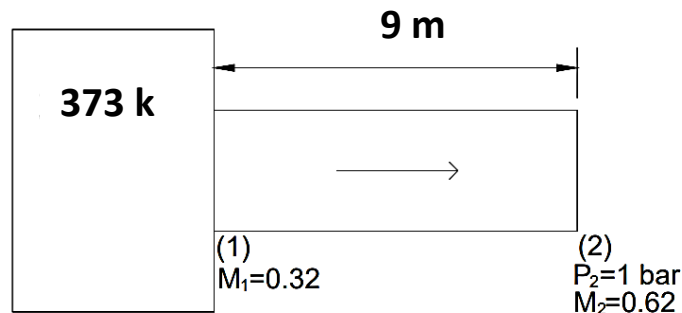
, luego en la ecuación (c) despejando la fuerza de oposición que hace el ducto se tiene:

$$R_x = 0.968356 (10382.4 - 6952.24) - \frac{302.96(1000.55-732.18)}{32.2} \rightarrow \mathbf{R_x = 796.26 \text{ lb}}$$



5.2. Aire se encuentra en un depósito a 373 k y circulará por una tubería de latón de 9 m de largo a razón de 0.18 kg/s y se permitirá una caída de presión tolerable de 1.3 bar; el gas es descargado a una presión de 1 bar abs, determinar el diámetro del tubo, normalizado. Considerar que el flujo ingresa al ducto con $M = 0.32$ y sale a con $M = 0.62$, a 230 m/s; hallar también la presión total a la salida y la temperatura al ingreso.

Solución:



Con $M_1 = 0.32$ a T.F.I. $\frac{A_1}{A^*} = 1.9218$; $\frac{p_1}{p_{01}} = 0.93115$, de donde $p_{01} = 247 \text{ KPa}$

T.F.F: $\frac{p_1}{p_1^*} = 3.3888$; $\frac{p_0}{p_0^*} = 1.9219$; $\frac{V_1}{V^*} = 0.347$, de donde: $p_1^* = 67.87 \text{ KPa}$; $p_0^* = 128.52 \text{ KPa}$

Con $M_2 = 0.62$ a T.F.Fanno: $\frac{p_2}{p_2^*} = 1.7026$; $\frac{p_{02}}{p_{02}^*} = 1.1656$; $\frac{V_2}{V^*} = 0.65444$, lo que resulta:

$V^* = 351.42 \text{ m/s}$, luego la $V_1 = 121.94 \text{ m/s}$, también: $0.32 = \frac{121.94}{\sqrt{1.4 \times 287 \times T_1}}$ de

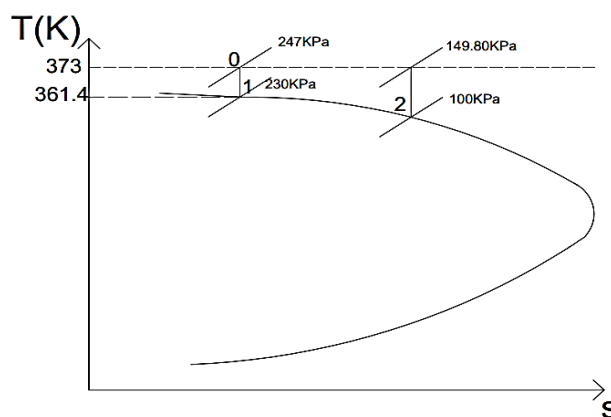
donde: $T_1 = 361.4 \text{ K}$

También se tiene $p_{02} = 149.80 \text{ KPa}$

La densidad al ingreso del gas: $\rho_1 = \frac{230}{0.287 \times 361.4} = 2.2175 \text{ kg/m}^3$

El diámetro de la tubería será: $0.18 = 2.2175 \times 121.94 \times \frac{\pi}{4} D^2$, de donde $D = 2.911 \text{ cm}$

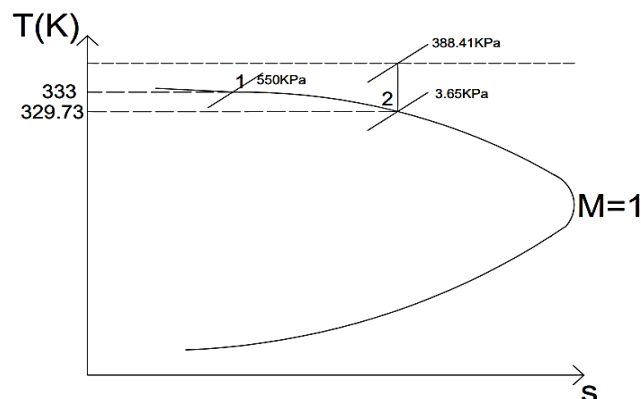
De tablas normalizadas se tiene $D = 1 \frac{1}{4} \text{ " ,sch 40}$



5.3. Un flujo de aire ingresa a un tubo adiabático de sección constante de 3.5 cm de diámetro y 18 m de largo a 73 m/s, con 4,5 bar, 60 °C, el factor de fricción es 0,018, calcular aguas abajo en el punto de salida:

- la velocidad (m/s), presión, temperatura (K) y presión de remanso del aire (KPa).
- ¿qué longitud adicional de tubería haría falta para que las condiciones a la salida fueran sónicas

Solución:



$M_1 = 0.2$, con este valor a T.F.Fanno se obtiene $\frac{fxL_{max1}}{D} = 14.533$; $\frac{p}{p^*} = 5.4555$;

$$\frac{V_1}{V^*} = 0.21822; \frac{T_1}{T^*} = 1.1905; \frac{p_{01}}{p_0^*} = 2.9635$$

En el grafico se tiene: $\frac{fxL_{max2}}{D} = \frac{fxL_{max1}}{D} - \frac{fxL_{1-2}}{D} \rightarrow \frac{fxL_{max2}}{D} = 5.276$, con este valor a T.F.Fanno, de donde se obtiene: $M_2 = 0.30$; $\frac{p_2}{p^*} = 3.619$; $\frac{T_2}{T^*} = 1.1788$;

$$\frac{V_2}{V^*} = 0.32572;$$

$$\frac{p_{01}}{p_0^*} = 2.0351, \text{ luego se tiene: } V_2 = V_1 \times \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = 73 \times \frac{0.32572}{0.21822} = \mathbf{108.96 \text{ m/s}}$$

$$P_2 = 5.5 \times \frac{3.619}{5.4555} = \mathbf{3.65 \text{ bar}};$$

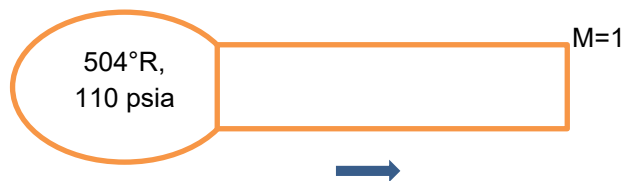
$$T_2 = 333 \times \frac{1.1788}{1.1905} = \mathbf{329.73 \text{ K}};$$

$$p_{02} = 5.656 \times \frac{2.0351}{2.9635} = \mathbf{388.41 \text{ KPa}}$$

Como en la salida el gas es sónico tenemos:

$$fx \frac{L_{max2}}{D} = 5.276, \text{ finalmente } \Delta L = \frac{5.276 \times 0.035}{0.018} = \mathbf{10.26 \text{ m}}$$

- 5.4. Aire se encuentra en un colector a 44°F, 110 psia, al que se le conecta un tubo de sección constante adiabático, de 1.2 pie² de área, para hacer ingresar el gas con $M=0.75$, corriente abajo a una distancia de 20 m es estrangulado, determinar la fuerza que ejerce la tubería sobre el flujo en lb.
Solucion:



$$T_1 = \frac{504}{1 + 0.2 (0.75)^2} = 453 \text{ } ^\circ R \quad (1) \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{110}{[1 + 0.2 (0.75)^2]^{0.286}} = 106.7 \text{ psia}$$

$$\rho_1 = \frac{106.7 \times 144}{53.3 \times 453} = 0.636$$

$$T_2 = \frac{504}{1 + 0.2(1)^2} = 420 \text{ } ^\circ R$$

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{KRT_1}}$$

$$M_2 = \frac{V_2}{\sqrt{KRT_2}}$$

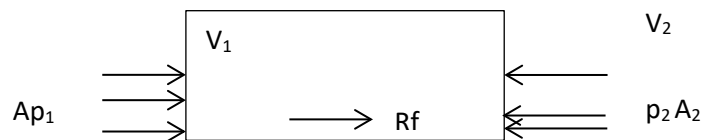
$$\left. \begin{array}{l} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1 \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

Tambi3n: $\rho_2 = \rho_1 \times \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 M_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

$$\rho_2 = 0.636 \times 0.75 \sqrt{\frac{453}{420}} \Rightarrow \rho_2 = 0.495 \text{ lb/} \pi \text{e}^3$$

$$p_2 = 0.495 \frac{\text{Qm}}{\pi \text{e}^3} \times 53.3 \frac{\text{Qf} \cdot \pi \text{e}}{\text{llm } ^\circ R} \times 420 \text{ } ^\circ R$$

$$p_2 = 11081 \text{ lbf/} \pi \text{e}^2$$



$$p_1 A - p_2 A + R_f = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$R_f = \dot{m}(V_2 - V_1) + (P_2 - P_1)A = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + (P_2 - P_1)A$$

$$R_f = \rho_1 V_1^2 A \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) + (P_2 - P_1)A$$

Pero: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, entonces:

$$R_f = \rho_1 V_1^2 A \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) + (P_2 - P_1)A$$

Tambi3n: $0.75 = \frac{V_1}{\sqrt{1.4 \times 53.3 \times 32.2 \times 453}}$

$$V_1 = 782.47 \text{ } \pi \text{e/s}$$

$$R_f = 1.2 \pi \text{e}^2 \left[0.636 \frac{\text{lbm}}{\pi \text{e}^3} \times \frac{(782.47)^2 \pi \text{e}^2}{\text{s}^2} (1.2848 - 1) + (11081 - 106.7 \times 144) \frac{\text{lbf}}{\pi \text{e}^2} \right]$$

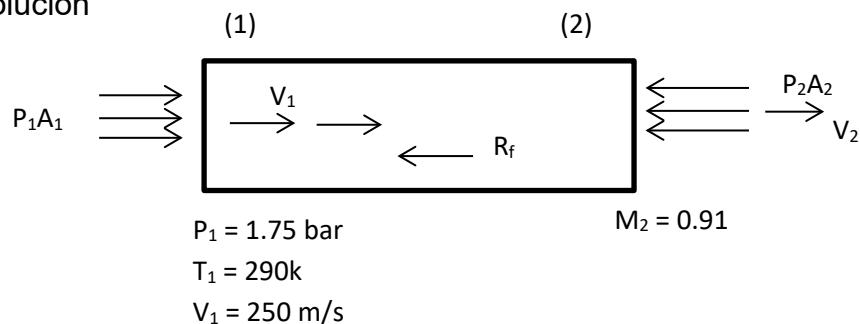
$$R_f = 1.2 \pi \text{e}^2 \left[(110900 \frac{\text{lbm}}{\pi \text{e} \times \text{s}^2} \times \frac{1 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2}{32.2 \text{ lbm/} \pi \text{e}}) + 4283.8 \frac{\text{lbf}}{\pi \text{e}^2} \right]$$

$$R_f = -983.9 \cong 984 \text{ lbf}$$

5.5. Argón ($k = 1.67$, $R = 0.208 \text{ kJ/kg K}$) fluye adiabáticamente por un ducto de $0.20 \times 0.20 \text{ m}$ de sección constante ingresando a 0.75 bar , 17°C a 250 m/s ; en un punto corriente abajo se tiene un mach de 0.91 ; se pide:

- La presión total del gas a la descarga, KPA
- La velocidad del gas a la descarga del ducto, m/s
- La fuerza que ofrece el ducto sobre el gas, kg
- Diagrama T – s, con valores

Solucion



La densidad del aire al ingreso $\rho_1 = \frac{175}{0.208 \times 290} = 2.90$

$$C_1 = \sqrt{1.67 \times 208 \times 290} = 317.39 \text{ k} \Rightarrow T_{o1} = 290 \left[1 + \frac{0.67}{2} (0.79)^2 \right] \Rightarrow$$

$$T_{o1} = 350.63 \text{ K}$$

$$M_1 = \frac{250}{317.39} = 0.79$$

$$350.63 = T_2 \left[1 + \frac{0.67}{2} (0.91)^2 \right] \Rightarrow T_2 = 274.48 \text{ K}$$

$$0.91 = \frac{V_2}{\sqrt{1.67 \times 208 \times 274.48}} \Rightarrow V_2 = 281 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = 2.90 \times 250 \times 0.20 \times 0.20 = 29 \text{ kg/s}$$

$$29 = \rho_2 \times 281 \times 0.20 \times 0.20 \Rightarrow \rho_2 = 2.58 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \Rightarrow \text{la presión del gas a la descarga}$$

es

$$p_2 = 2.58 \times 0.208 \times 274.48 \Rightarrow p_2 = 147.30 \text{ kPa}$$

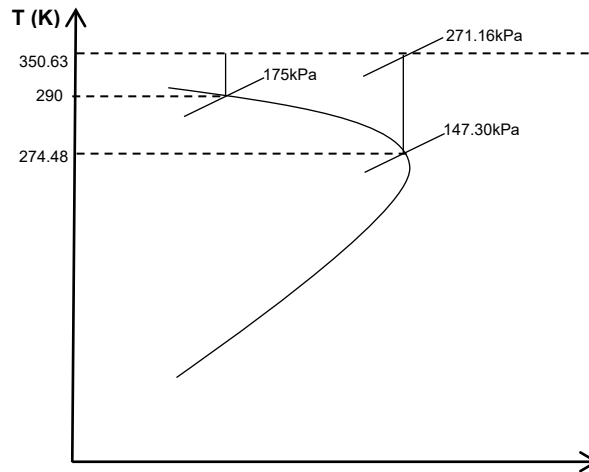
$$\text{La presión total del gas: } p_{o2} = 147.30 \left[1 + \frac{0.67}{2} (0.91)^2 \right]^{2.4925} \Rightarrow p_{o2} = 271.16 \text{ KPa}$$

De la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:

$$\sum Fx = P_1A_1 - P_2A_2 + R_f = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Luego: $R_f = 29(281 - 250) + (147.30 - 175)2 \times 0.2 \times 1000$

$R_f = 209 \text{ N} = 21.3 \text{ kgf}$



Problemas propuestos

1. A un tubo de hierro galvanizado aislado completamente ($\epsilon = 0.15 \text{ mm}$) de a" sch 80 ingresa aire a 600 pies/s, 440°F, con 175.3 p; corriente abajo se tiene una presión de 145.3 psig a consecuencia de la fricción que se refleja con el coeficiente de 0.0025; se pide:
 - a. la temperatura en el estado (2)
 - b. el flujo másico
 - c. la distancia entre los dos puntos que se toman los datos
 - d. la fuerza que ejerce el gas sobre la tubería

Rpta: 889.22 °R; 0.85 slug/s; 28.35 pies; 258.77 lb

2. Por un tubo horizontal aislado de 5" sch 40 fluye aire que ingresa a 7 bar, 57°C, a 200 m/s, si el flujo es estrangulado corriente debajo de la entrada, se pide:
 - a. la presión singular a la salida del tubo
 - b. la fuerza que ejerce el fluido sobre el tubo

Rpta: 7.02 bar, 848.78 N

5.2. Flujo RAYLEIGH

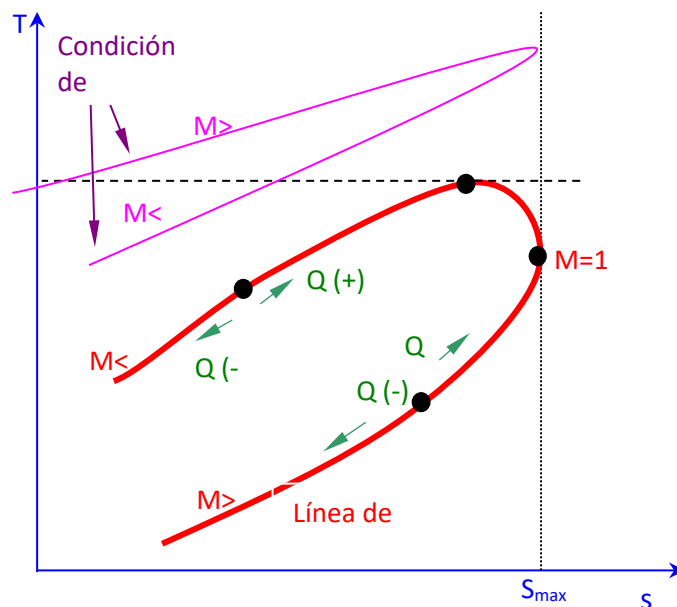
CARACTERÍSTICAS:

1. Existe transferencia de calor (calentamiento o enfriamiento).
2. El ducto es de sección constante.
3. Todos los cambios de estado son consecuencia de la transferencia de calor.
4. El flujo tiene un comportamiento semejante al de un gas perfecto.
5. Los procesos internos se consideran reversibles.

5.2.1. Línea RAYLEIGH

Es el lugar geométrico de todos los estados de un flujo gaseoso en donde se cumplen la validez de la ecuación de cantidad de movimiento y la de continuidad.

Figura N° 5.6
DIAGRAMA T – S PARA FLUJO RAYLEIGH



Fuente: elaboración propia

PARÁMETROS DE REFERENCIA

Los principales parámetros a utilizar se consideran los siguientes:

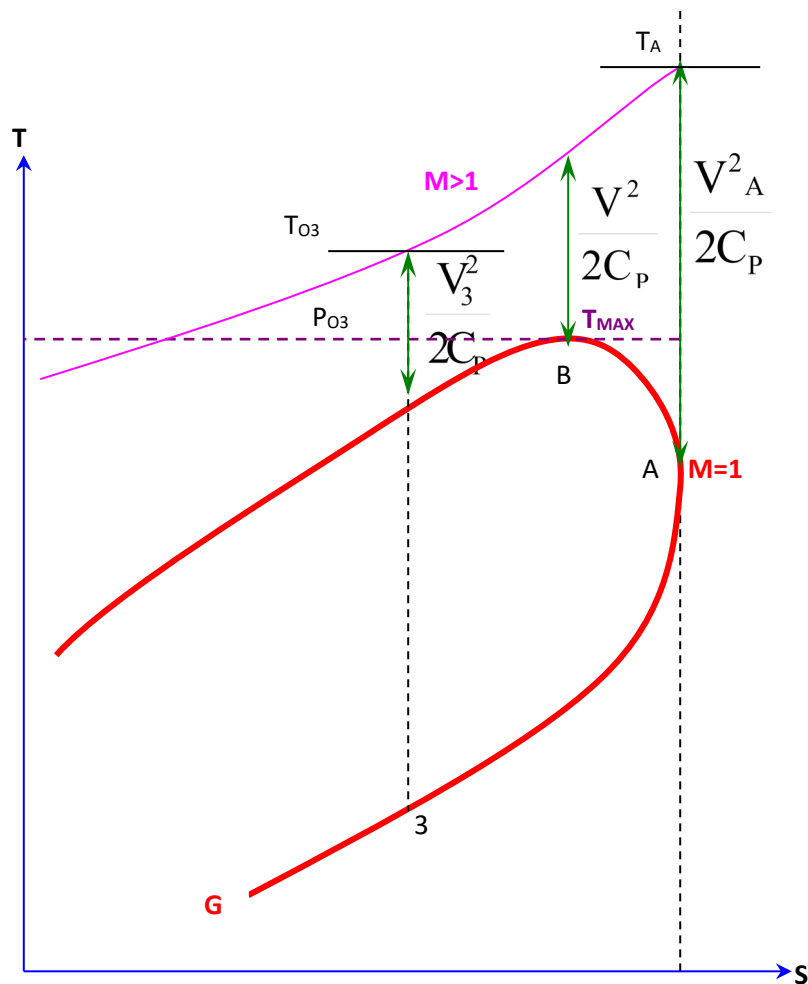
$$M ; \frac{P}{P^*} ; \frac{P_0}{P^*} ; \frac{T}{T_0^*} ; \frac{T_0}{T^*} ; \frac{V}{V_0^*}$$

La transferencia de calor no está en función de la temperatura estática, sino de la temperatura de estancamiento, es decir:

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot C_p \cdot \Delta T_0 \quad (5.9)$$

Figura N° 5.7

DIAGRAMA T – S, FLUJO RAYLEIGH, ZONA SUBSÓNICA



Fuente: elaboración propia

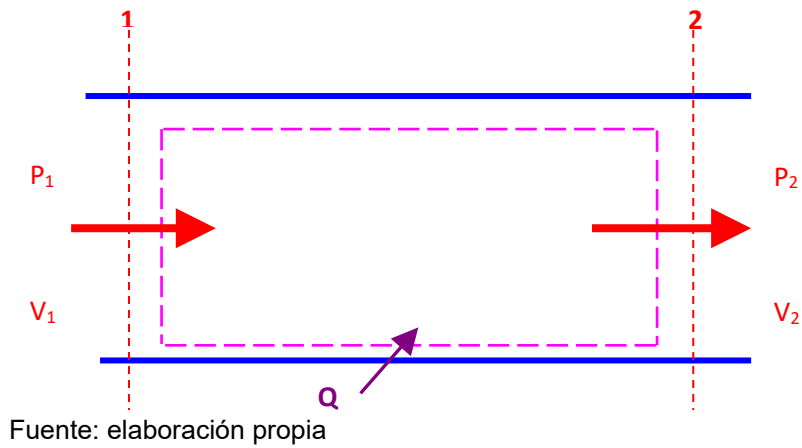
COMENTARIOS:

1. En el flujo Rayleigh los estados subsónicos ocupan el ramal superior y los supersónicos el ramal inferior.
2. En el flujo subsónico un calentamiento implica **aceleración** del flujo y un enfriamiento **desaceleración**; caso contrario en el supersónico.
3. Los estados de estancamiento no son constantes porque existe transferencia de calor, y las propiedades que permanecen constantes son: P^* , T^* , P_0^* , T_0^* , S_{\max} y Q_{\max} .
4. El Q_{\max} es un concepto análogo al de la longitud crítica, representa la cantidad de calor máxima que se puede agregar a partir de un estado subsónico para alcanzar la condición sónica a la salida.
5. No siempre el calentamiento ($Q+$) implica un aumento de la temperatura estática, ya que para los valores $\sqrt{1/K} < M < 1$ la temperatura estática disminuye; este fenómeno se explica por qué el calentamiento hace que T_0 siempre se incremente y en el tramo B-A la energía cinética se incrementa a costa de la disminución de T .
6. Partiendo de una condición supersónica existe el Q_{\max} que permite alcanzar la condición sónica a la salida. Cualquier Q adicional va a generar la presencia de ondas de choque, con flujo de salida sónico.
7. A través de una onda de choque siempre se pasa de un estado supersónico a un estado subsónico y la onda de choque se encuentra en el punto de intersección de la línea Fanno con la línea Rayleigh.

5.2.2. Relaciones básicas para el flujo RAYLEIGH

Figura N° 5.8

VOLUMEN DE CONTROL PARA FLUJO RAYLEIGH



Se consideran las ecuaciones de Energía, la de gases ideales y otras. También:

$$\left. \frac{T_0}{T_0^*} \right)_{\text{isot}} = \frac{2K}{3K-1} \left(1 + \frac{K-1}{K+1} M^2 \right) \quad (5.10)$$

$$q_{\text{max}} = \frac{C_p \cdot T_1 (1 - M_1^2)^2}{2M_1^2 (K + 1)} \quad (5.11)$$

$$S - S^* = \frac{KR}{K-1} \text{Ln} M^2 \left(\frac{K+1}{1+KM^2} \right)^{\frac{K+1}{K}} \quad (5.12)$$

Notas:

1. En el flujo supersónico el incremento de calor implica un incremento de la presión estática y de T_0 , así como la disminución de la p_0 , el M y V . La T_0 siempre aumenta.
2. Partiendo de la condición $M > 1$ es posible lograr $M = 1$ mediante el denominado **calor máximo**, cualquier calor adicional va a generar un cambio brusco en las propiedades del flujo principalmente de la presión, dicho cambio es la Onda de Choque Normal, alcanzando el flujo a la salida la condición **sónica nuevamente**.

3. La diferencia entre un flujo de transferencia de calor o un flujo adiabático con un flujo **isotérmico** radica en que la **temperatura estática** en el flujo **isotérmico** permanece constante.

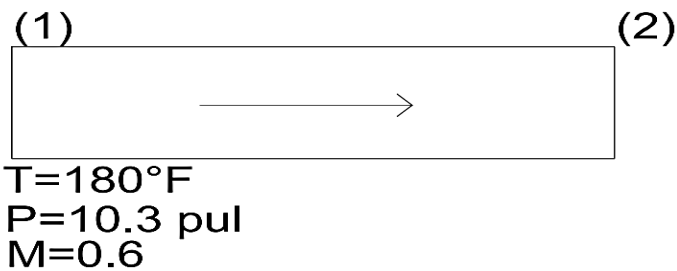
5.6. Aire circula por un ducto de 10"x10" de sección constante, encontrándose en un determinado estado a 180°F, 10.3 psig con un Mach de 0.6; si se le transfiere calor hasta las condiciones de salida corriente abajo; se pide:

a. el calor transferido para alcanzar la temperatura estática máxima; BTU/s

b. la temperatura estática, °F

c. la velocidad(pies/s) y la densidad del gas(lb/pie³)

b. solución:



la temperatura máxima a la salida del ducto se obtiene de $M_2 = \sqrt{\frac{1}{k}} =$

0.845 en la entrada al ducto: $\frac{T_{01}}{640} = 1 + 0.2(0.6)^2 \rightarrow T_{01} = 686.08 \text{ °R}$

a la tabla de F.R con $M_1 = 0.60$ y $M_2 = 0.845$ se obtienen:

M	T/ T*	T ₀ / T ₀ *
0.6	0.9167	0.81892
0.845	1.028157	0.9792

De donde $T_{01}^* = 837.79 \text{ °R}$; como las temperaturas de estancamiento críticas son iguales:

$T_{02} = 0.9792 \times 837.79 = 820.36 \text{ °R}$

La densidad en el punto (1) es $\rho_1 = \frac{25 \text{ lbxslug}^\circ\text{Rx}144 \text{ pulg}^2}{640^\circ\text{Rxpie}^2 \times 1716 \text{ lbxpiexpulg}^2} = 0.00328$
 $\frac{\text{slugx}32.2 \text{ lb}}{\text{slugxpie}^3}$

$\rho_1 = 0.10555 \text{ lb/pie}^3$, la velocidad $V_1 = 0.6\sqrt{1.4 \times 1716 \times 640} = 744 \text{ pie/s}$
 el área del ducto es $A = 0.6944 \text{ pie}^2$, entonces el flujo másico de aire que circula es:

$$\dot{m} = 0.10555 \times 744 \times 0.6944 = 54.53 \text{ lb/s}$$

$$\dot{Q} = 54.53 \times 6010 \frac{\text{lb}_m \text{ pie}^2}{^\circ\text{R} \times \text{s} \times \text{s}^2} (820.36 - 686.08)^\circ\text{R} \times \frac{1 \text{ BTU}}{778.2 \text{ pie} \times \text{lb}_f} \frac{\text{lb}_f \text{ s}^2}{32.2 \times \text{pie} \times \text{lb}_m}$$

$$Q = 1756.27 \text{ BTU/s}$$

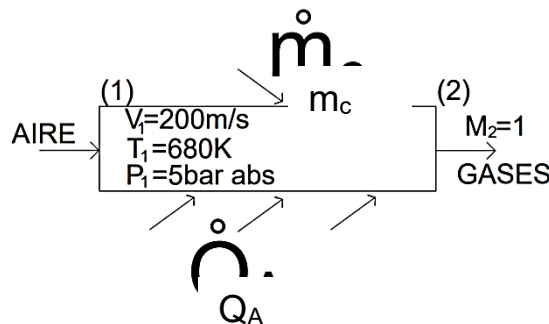
También: $820.36 = T_2 + 0.2(0.845)^2$, calculándose la $T_2 = 820.22^\circ\text{R}$,
 y la $V_2 = 1186.16 \text{ pie/s}$.

Finalmente se obtiene la densidad del gas a la salida del ducto $\rho_2 = 0.0662 \text{ lb/ pie}^3$.

5.7. A una cámara de combustión anular ($\eta_{cc} = 0.96$) de 10 cm de diámetro interior constante ingresa aire a 200 m/s, 407°C y 4 bar, para quemar combustible líquido de poder calorífico 41.2 kJ/kg, $S=0.87$, se pide:

- el calor necesario para que el gas a la salida se bloquee, kw
- la densidad y el número de mach a la salida si la transferencia que gana el aire es de 2000 kw de calor durante la combustión, conservando el mismo flujo másico de aire
- el consumo de combustible, gl/hr

Solución:



la densidad del aire al ingreso a la cámara: $\rho_1 = \frac{500}{0.287 \times 680} = 2.562 \text{ kg/m}^3$ el

flujo másico de aire a la cámara es $\dot{m}_a = \frac{\pi(0.10)^2}{4} \times 2.562 \times 200 = 4.024 \text{ kg/s}$

la temperatura del aire al ingreso $T_{01} = 680 + \frac{(200)^2}{2 \times 1003.5} = 700 \text{ k}$ y $C_1 = 522.7$

m/s el número de mach al ingreso $M_1 = 0.38$, luego a la T.F.R. se obtiene

$\frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.49346$ y $\frac{T_1}{T^*} = 0.57553$ de donde $T_0^* = 1418.56 \text{ k}$ y $T^* = 1181.52 \text{ k}$; el

gas se bloquea cuando $T_0^* = T_{02}$, entonces:

$$\dot{Q}_A = 4.024 \times 1.0035(1418.56 - 700) = \mathbf{2901.6 \text{ kw}}$$

Como transfiere 2000 kw se obtiene la temperatura total del aire a la

salida $2000 = 4.024 \times 1.0035(T_{02} - 700) \Rightarrow T_{02} = 1195.28 \text{ k}$, luego $\frac{T_{02}}{T_0^*}$

$= 0.8426$, a T.F.R. para obtener: $M_2 = 0.62$, $\frac{T_2}{T^*} = 0.93585$, de donde la $T_2 =$

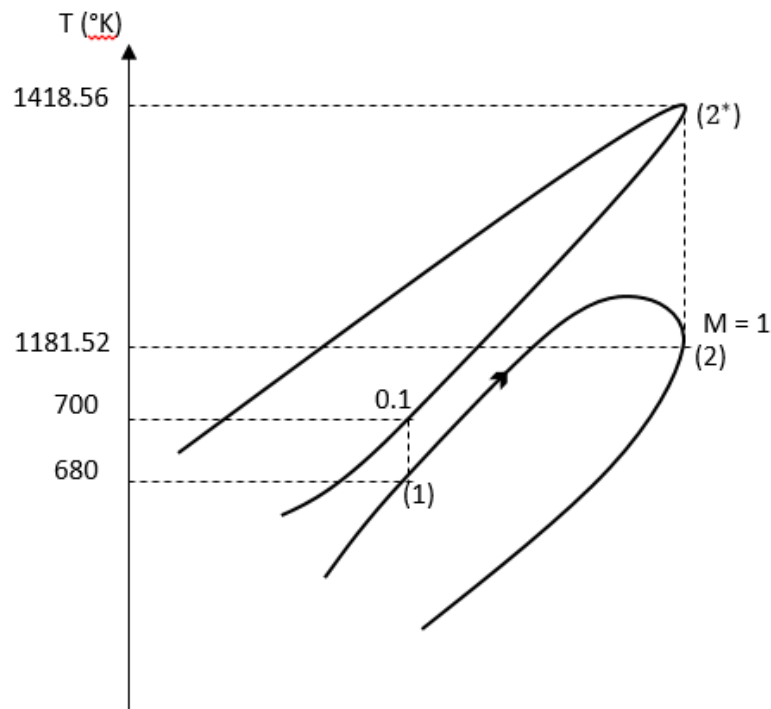
1105.73 k , obtenemos la velocidad del gas a la salida $V_2 = 423.94 \text{ m/s}$,

que nos permite determinar la densidad $\rho_2 = \mathbf{1.21 \text{ kg/m}^3}$

En la cámara de combustión se tiene: $0.96 = \frac{4.024 \times 1.0035(1195.28 - 700)}{41200 \times \dot{m}_c}$, siendo

el flujo másico de combustible $\dot{m}_c = 0.0506 \text{ kg/s}$, de donde hallamos el

flujo volumétrico de combustible: $\dot{V}_c = \mathbf{48094 \text{ gl/hr}}$



5.8. Por una tubería de hierro galvanizado (sch 40) de sección constante se transporta aire que ingresa con 150 m/s, a 370 °C, 7.8 bar y se le transfiere 1284 kJ/kg de calor, a razón de 3 kg/s, se pide:

- La temperatura y densidad del aire a la salida del tubo, °C y kg/m³.
- El D del tubo normalizado, pulg
- La temperatura total en el punto crítico, °C.
- Diagrama T – s, con valores

Solución

El número de Mach al ingreso al tubo: $M_1 = \frac{150}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 643}} = 0.30$

Con este Mach a T.F.R. se tiene: $\frac{T_0}{T^*} = 0.34686$; $\frac{T}{T^*} = 0.40887$; $\frac{p}{p^*} = 2.1314$;

$\frac{p_0}{p_0^*} = 1.1985$, de donde:

$$T^* = \frac{643}{0.40887} = 1572.63 \text{ k, también } p^* = \frac{8.8}{2.1314} = 4.129 \text{ bar abs}$$

$$T_{01} = 643 + \frac{150^2}{2 \times 1003.5} = 654.21 \text{ k, con esto hallamos } T_0^* = \frac{654.21}{0.34686} = 1886 \text{ K}$$

En la ecuación de energía $1284 = 1.0035 (T_{02} - 654.21)$, de donde $T_{02} = 1933.73 \text{ k}$

Luego: $\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1933.73}{1886} = 1.025$, con este valor a T.F.R en donde se tiene: M_2

= 1 entonces $T_2 = T^*$;

$$T^* = 1572.63 \text{ k} = \mathbf{1299.63^\circ\text{C}}$$

$$P_2 = p^* = 4.129 \text{ bar abs, entonces } \rho^* = \frac{412.9}{0.287 \times 1572.63} = 0.9148 \text{ kg/m}^3$$

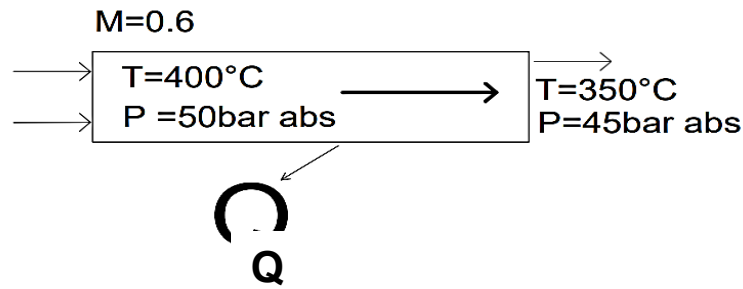
También: $3 = \frac{880}{0.287 \times 643} \chi \frac{150 \times \pi D^2}{4}$, de donde $D = 73.076 \text{ mm}$, a tablas **D = 3"**

sch 40

5.9. Vapor de agua ($C_p = 1.8723$, $R = 0.4615 \text{ kJ/kg k}$, respectivamente) proveniente de un colector principal de una caldera ingresa a una tubería desnuda de Ø3"sch 80 con $M = 0.60$, a 400°C, 50 bar abs; en un punto corriente abajo se encuentra a 45 bar abs, a 350°C, se pide:

- El flujo másico de vapor, kg/s
- El calor transferido entre los dos puntos, kw

SOLUCION



$$T_{01} = 673 [1 + 0.1635(0.60)^2]$$

$$T_{01} = 712.61 \text{ K}$$

De tablas: $v_1 = 0,05781 \text{ m}^3/\text{kg}$; $v_2 = 0,05135 \text{ m}^3/\text{kg}$

$$\dot{m} = \frac{V_1 A_1}{v_1} = \frac{V_2 A_2}{v_2} \Rightarrow V_2 = \frac{v_2}{v_1} \times V_1$$

$$0.60 = \frac{V_1}{\sqrt{1.327 \times 461.5 \times 673}} \Rightarrow V_1 = 385.2 \text{ m/s}$$

Luego: $V_2 = 385.2 \times \frac{0.05635}{0.05781} = 343.16 \text{ m/s}$

$$\dot{m} = \frac{385.2}{0.05781} \times \frac{\pi}{4} (0.0737)^2$$

$$\dot{m} = 28.43 \text{ kg/s}$$

$$M_2 = \frac{343.16}{\sqrt{1.327 \times 461.5 \times 623}} \Rightarrow M_2 = 0.56$$

$$T_{02} = 623 [1 + 0.1635 (0.56)^2] \cong 655 \text{ K}$$

$$\dot{Q} = 28.43 \times 1.8723 (655 - 712.61) \quad \dot{Q} = -3067 \text{ kw}$$

5.10. Aire ($C_P = 0,24 \text{ Btu/lbm } ^{\circ}\text{R}$, $k = 1.4$) circula por un tubo de sección constante de $D_i = 8 \text{ cm}$ ingresando a 47.3 psig , 150°F con 500 pies/s ; corriente abajo en un punto (2) se encuentra a 29.3 psig , 830°R , se pide:

- a. El número de Mach del aire en el punto (2)
- b. El flujo másico de aire lb/s
- c. El calor transferido entre los dos puntos, Btu/s

Solución:

$$\rho_1 = \frac{62 \times 144}{53.3 \times 610} = 0.275 \text{ lb/pie}^3$$

$$M_1 = \frac{500}{\sqrt{1.4 \times 53.3 \times 2.2 \times 610}} = 0.413$$

$$\rho_2 = \frac{44 \times 144}{53.3 \times 830} = 0.143 \text{ lb/pie}^3$$

$$V_2 = \frac{500 \times 0.275}{0.143} = 961.54 \text{ lb/pie}^3$$

$$M_2 = \frac{961.34}{\sqrt{1.4 \times 53.3 \times 32.2 \times 130}} = 0.681$$

$$M_2 = \mathbf{0.681}$$

$$\dot{m} = 0.275 \times 500 \times \frac{\pi}{4} \left(\frac{8}{2.54} \right)^2 \times \frac{1}{144} \quad \dot{m} = \mathbf{7.44 \text{ lb/s}}$$

$$T_{01} = [1 + 0.2(0.413)^2] \times 610 = 630.81 \text{ }^\circ R$$

$$T_{02} = [1 + 0.2(0.681)^2] \times 830 = 907 \text{ }^\circ R$$

$$\dot{Q} = 7.44 \times 0.24 (907 - 630.81)$$

$$\dot{Q} = \mathbf{493.17 \text{ BTU/S}}$$

Problemas propuestos

1. A través de un ducto de 20x25 cm de sección constante fluye aire sin fricción, teniendo en la sección de salida la temperatura singular de 250 °C

mayor que en la entrada debido al calor transferido, con un mach de 0.62 y presión total de 1.42 bar. En la entrada el gas tiene un mach de 0.40, con condiciones totales de 1.93 bar y 203 °C; se pide:

- a. La velocidad del gas al ingreso del ducto, m/s
- b. El calor transferido en kw
- c. La velocidad del gas a la salida, m/s
- d. Diagrama T – s, con valores. Rpta: 172.2 m/s, 42654 kw; 378.53 m/s

CAPITULO VI

6.1. Ondas de choque

Se denominan así a las perturbaciones o a las ondas de presión cuya intensidad es mucho mayor que una **onda sonora**. A través de la onda de choque la presión se incrementa y la velocidad del flujo disminuye, incrementándose la fuerza de arrastre. Las ondas de choque pueden ser:

Ondas de choque normal, oblicuas y cónicas.

6.1.1. Ondas de choque normal

Según Gerhart (1995): afirma que son aquellas cuyo frente de onda es perpendicular al flujo corriente arriba, sólo a través de este tipo de ondas se pasa de una condición **supersónica** a otra **subsónica**. En realidad, es un cambio brusco en la magnitud de las propiedades del flujo.

Todas las propiedades que se presentan antes de la ocurrencia de la onda se designan con el **subíndice "x"** y todas aquellas propiedades posteriores a las ondas con el **subíndice "y"**.

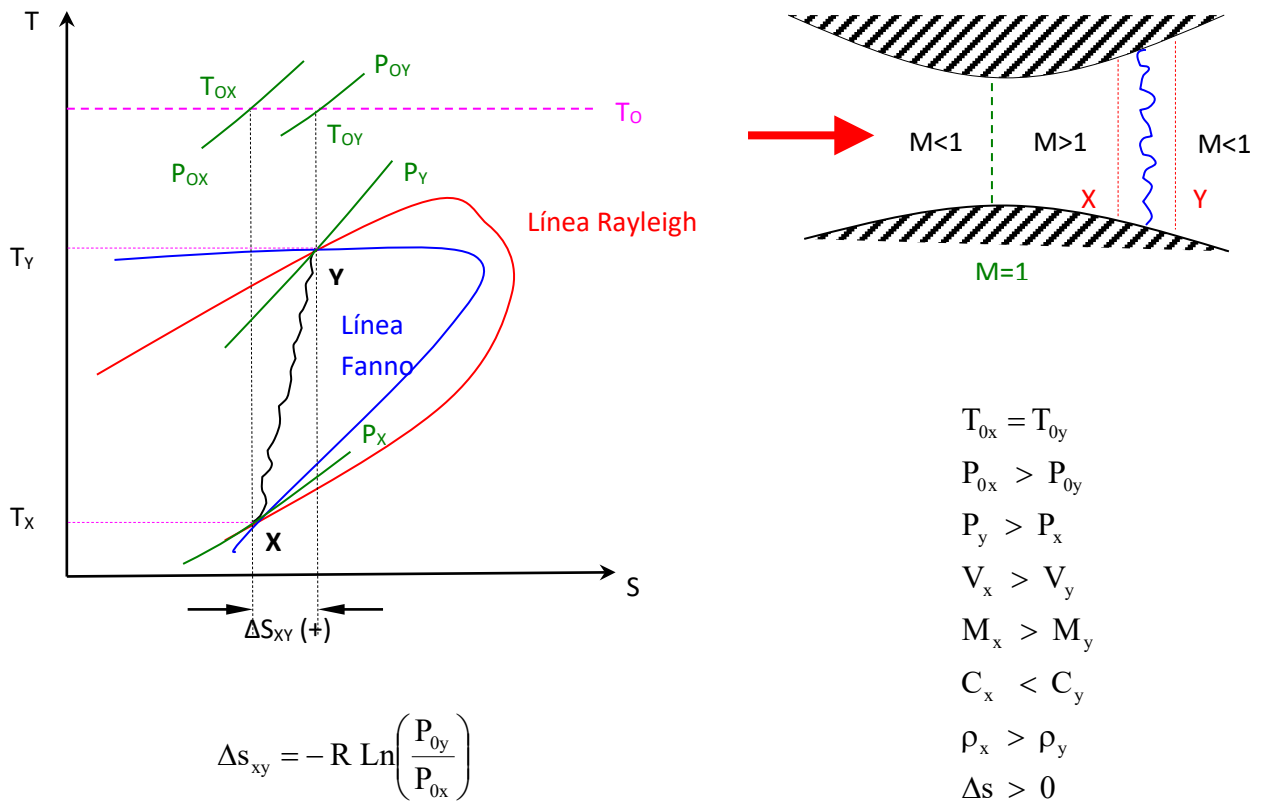
CARACTERISTICAS:

1. Ocurre un proceso irreversible.
2. Se considera proceso adiabático ($T_{0x} = T_{0y}$).
3. La sección de onda es constante ($A_x = A_y$).
4. El número de Mach después de la onda siempre es menor que el Mach antes de la onda ($M_x > M_y$).
5. Se asume un flujo estacionario sin transferencia de calor.
6. Cumplen con las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía.
7. A través de una onda de choque normal la presión estática y la densidad siempre se incrementan.

8. Los puntos de inicio y final de una onda de choque se encuentran en la intersección de las líneas de Fanno y de Rayleigh, mostrado en el diagrama T-s.

Figura N° 6.1.

DIAGRAMA T –S, ONDA DE CHOQUE NORMAL



Fuente: Elaboración propia

6.1.2. Ondas de choque oblicuas

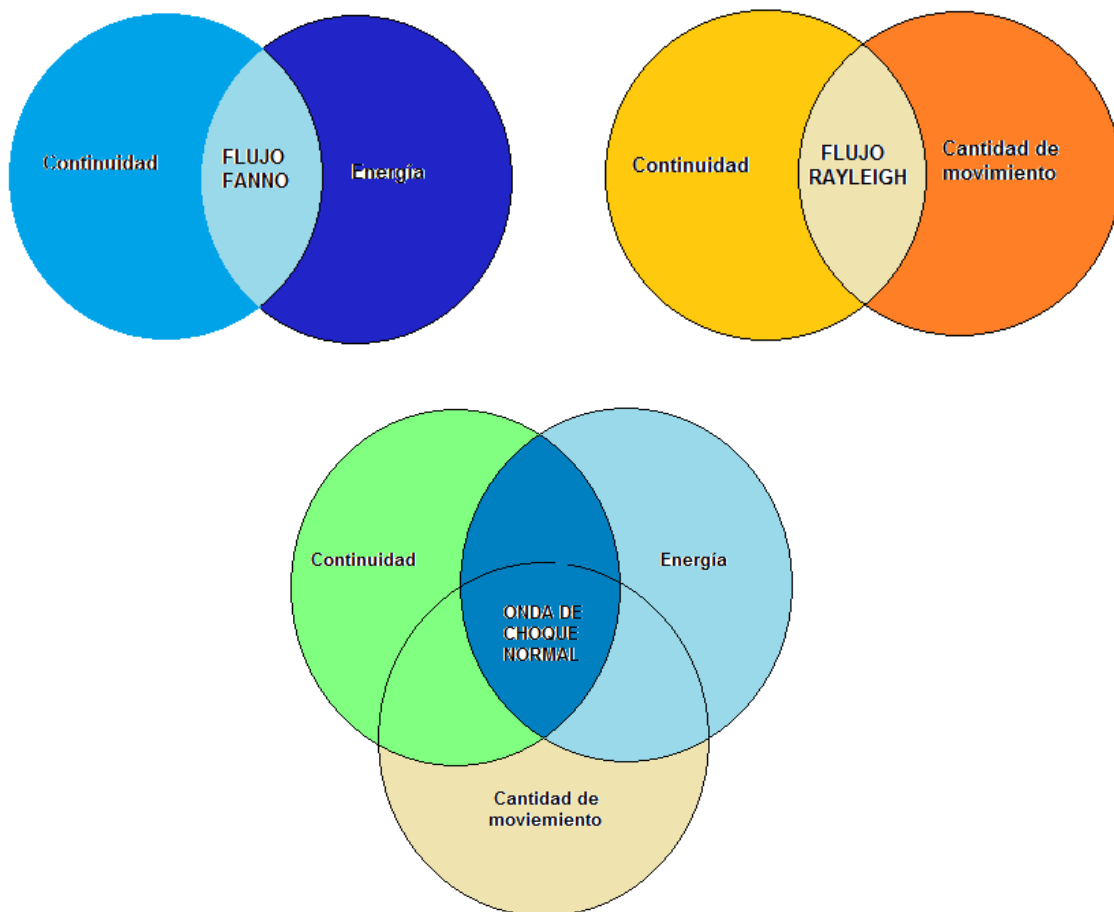
Según Gerhart (1995): Son aquellas que se presentan al igual que el caso anterior en estado supersónico cuando esta inclinada en un ángulo constante respecto al flujo corriente arriba; el flujo sufre un cambio de dirección. El flujo supersónico varía su velocidad, pero continúa siendo supersónico.

6.1.3. Ondas de choque cónicas

Son aquellas que se presentan cuando un flujo es supersónico y encuentra en su trayectoria algún objeto, o cuando el objeto tiene velocidad supersónica y se desplaza en un medio gaseoso.

El origen de este tipo de ondas está en el breve tiempo que tienen las partículas para acomodarse a la forma geométrica del objeto, produciéndose así un choque violento entre partículas y entre las partículas con el sólido (se les llama también ondas de expansión cónica).

Resumiendo, se tiene:

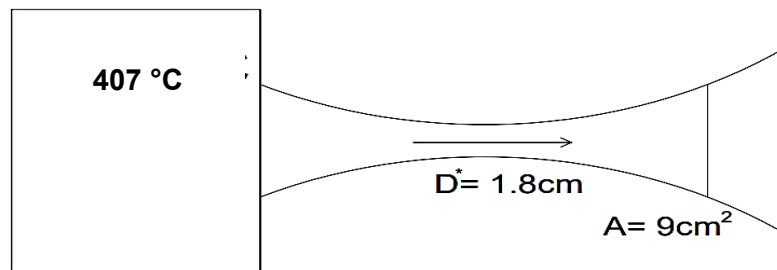


6.2. Aplicaciones:

6.1. Un gran depósito contiene aire a 407°C, se le conecta una tobera convergente-divergente, con diámetro en la garganta de 1.8 cm; en una sección corriente abajo en la tobera se tiene una área de 9 cm², en donde se presenta una o.ch.n, después de ésta el aire se encuentra a 1,4 bar, se pide:

- La presión del aire en la garganta, bar
- La presión en el depósito, bar
- El flujo másico máximo que circula, kg/s

Solución:



$A^* = \frac{\pi}{4} (1.8)^2 = 2.545 \text{ cm}^2$, se tiene: $\frac{A_x}{A^*} = 3.5363$, con este valor a T.F.I. de donde se obtiene el $M_x = 2.81$, con este valor a T.O.CH.N. de donde se obtiene:

$$\frac{p_y}{p_x} = 9.0454; \frac{T_y}{T_x} = 2.4622, \text{ luego se tiene: } p_x = 2.4/9.0454 = 0.2653 \text{ bar abs.}$$

Se calcula la presión del depósito $p_0 = 0.2653(1 + 0.2(2.81)^2)^{3.5} = \mathbf{7.31 \text{ bar abs}}$, entonces la presión en la garganta será: $p^* = 0.5283(7.31) = \mathbf{3.862 \text{ bar abs}}$

El flujo másico máximo se obtiene reemplazando valores:

$$\dot{m}_{\max} = \frac{0.6847 \times 2.545 \times 0.0001 \times 731000}{\sqrt{287 \times 680}} = \mathbf{0.29 \text{ kg/s}}$$

6.2. En la cámara del motor de un cohete que se está probando en un banco a 1.38 MPa abs y 2760 °C, la tobera por donde circulan los gases ($k = 1.4$; R

= 355 N.m/kg k), tiene un área de garganta de 0,02 m²; si el área de salida es 0.05 m² y en una sección de 0.04 m² se presenta una ochn, se pide:

- la presión de remanso después de la ochn
- diagrama T – s con valores

Solución:

si $A_x = A_y = 0.04$ y $A^* = 0.02$, se tiene: $\frac{A_x}{A^*} = 2$, ingresamos a T.F.I. obteniendo:

$$M_x = 2.2; \frac{p_x}{p_o} = 0.09352; \frac{T_x}{T_o} = 0.50813; \text{ de donde } p_x = 1.29 \text{ bar}, T_x = 1541.16$$

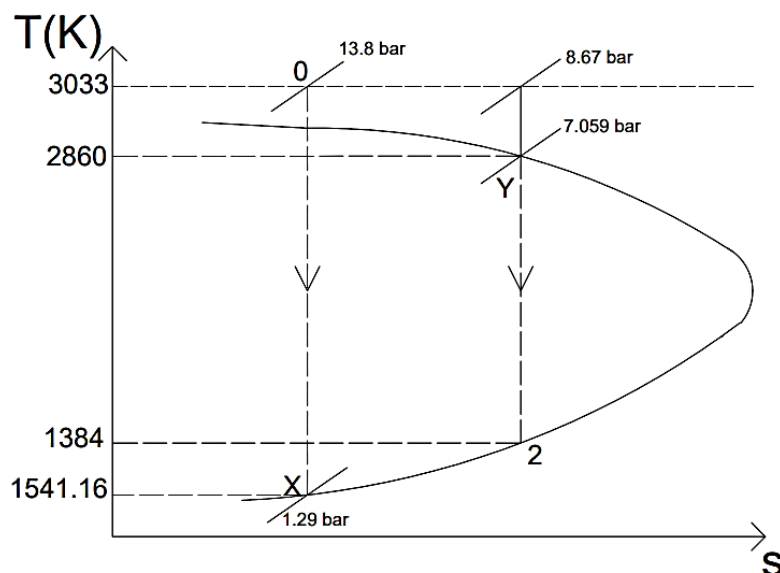
k

A tablas de ondas de choque normal con $M_x = 2.2$ de donde se tiene: $M_y = 0.54706; \frac{p_y}{p_x} = 5.48;$

$$\frac{T_y}{T_x} = 1.8569; \frac{p_{oy}}{p_{ox}} = 0.62812.$$

$$P_{0y} = 0.62812 * 1380 = \mathbf{8,67 \text{ bar}}$$

El diagrama T – s

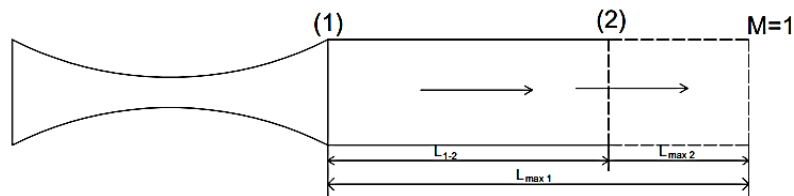


6.5. MISCELANIA de flujo compresible

6.3. Un flujo de aire con coeficiente de fricción 0,003 circula por un ducto liso adiabático de sección constante de 3x3 cm, de 180 cm de largo, descargando el fluido con un mach de 0.50 a 0,8 bar abs a un deposito que se encuentra a 27°C y 0,90 bar abs estacionariamente. En la entrada del ducto está conectada una tobera convergente-divergente isoentropica; se pide:

- la velocidad del gas a la entrada del ducto. m/s
- la velocidad del gas a la salida del ducto, m/s
- la viscosidad del aire a la entrada del ducto, m²/s
- la fuerza que ejerce el ducto sobre el gas, N

Solución:



a la salida del ducto se tiene $M_2 = 0.50$, con este dato a T.F.F de donde se obtiene:

$$\frac{T_2}{T^*} = 1.1429; \frac{p_2}{p^*} = 2.1381; \frac{p_{02}}{p_0^*} = 1.3399; \frac{f L_{max 2}}{D_H} = 1.06908$$

Desde la entrada hasta la salida del ducto se tiene:

$$\frac{f L_{max 1}}{D_H} = \frac{f L_{max 2}}{D_H} + \frac{f L_{1-2}}{D_H} \rightarrow \frac{f L_{max 1}}{D_H} = 1.06908 + \frac{0.012 \times 1.8}{0.03} = 1.789, \text{ con este}$$

dato a T.F.F de donde se obtiene: $M_1 = 0.43; \frac{T_1}{T^*} = 1.1572; \frac{p_1}{p^*} = 2.5017; \frac{p_0}{p_0^*} = 1.5007$

Conociendo $p_2 = 0.8$ bar abs en la salida se tiene $p^* = 0.37416$, luego la presión de entrada al ducto es $p_1 = 0.37416 \times 2.5017 = 0.936$ bar abs

También $p_0^* = \frac{0.90}{1.3399} = 0.6717$ bar abs y $p_{01} = 1.5007 \times 0.6717 = 1.008$ bar abs

Con $M_1 = 0.43$ a T.F.I. obteniéndose $\frac{p_1}{p_0} = 0.88065$; $\frac{T_1}{T_{01}} = 0.96434$, entonces

$T_1 = 0.96434 \times 300 = 289.3\text{K}$, luego la densidad al ingreso al ducto es $\rho_1 = \frac{93.6}{0.287 \times 289.3} = 1.1273 \text{ kg/m}^3$, también

$$300 = 289.3 + \frac{V_1^2}{2 \times 1003.5}; \text{ se obtiene la } \mathbf{V_1 = 146.54 \text{ m/s}}$$

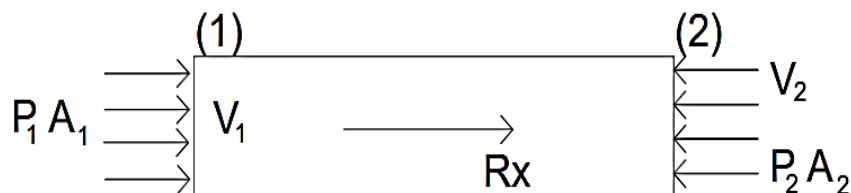
$$T^* = \frac{289.3}{1.1572} = 250 \text{ k, de donde } T^* = 250 \text{ k, luego } T_2 = 250 \times 1.1429 = 285.725$$

k y

$$\rho_2 = \frac{80}{0.287 \times 285.725} = 0.9756 \text{ kg/ m}^3$$

$$\text{Por continuidad se tiene: } \mathbf{V_2 = \frac{146.54 \times 1.1273}{0.9756} = 169.326 \text{ m/s}}$$

Como el ducto es liso se tiene: $0.012 = \frac{0.316}{Re^{0.25}}$ de donde se obtiene $Re = 4.8 \times 10^5$, para luego calcular $\nu = \frac{146.54 \times 0.03}{4.8 \times 10^5} = 9.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$

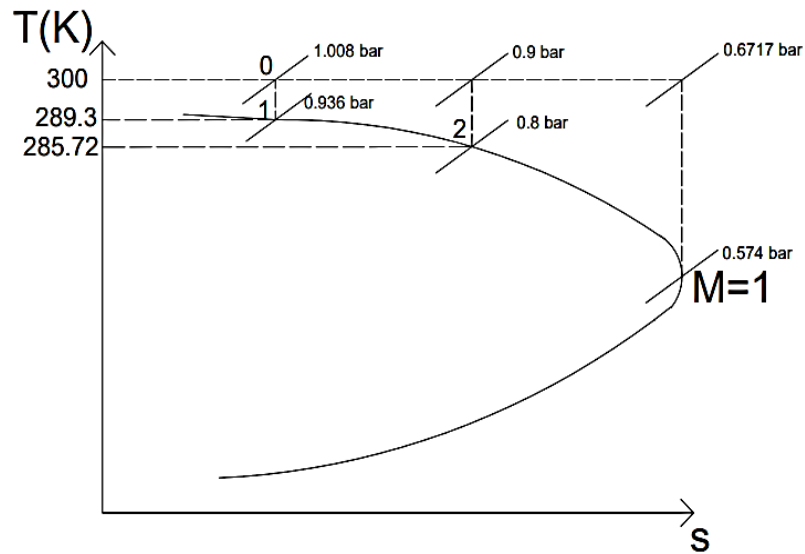


El flujo másico es: $\dot{m} = 0.9756 \times 169.326 \times 0.03 \times 0.03 = 0.1487 \text{ kg/s}$

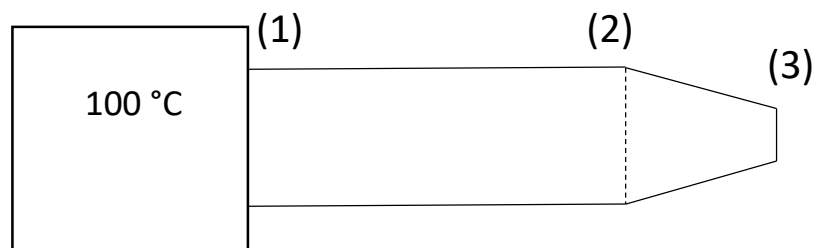
Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento entre la entrada y salida del ducto:

$$P_1 A_1 - p_2 A_2 - R_x = \dot{m} (V_2 - V_1); \text{ reemplazando valores se obtiene: } \mathbf{R_x = 8,85 \text{ N}}$$

Diagrama T - s



- 6.4. En un tanque se encuentra aire estacionariamente a 100°C , se le hace fluir con un gasto de 4 kg/s por un ducto de sección constante adiabático de 6 cm de diámetro interior, coeficiente de fricción 0.006 ; a la salida se le conecta una tobera convergente de diámetro interior de salida 5 cm , en donde el gas se encuentra bloqueado; se pide: el número de Mach, velocidad de entrada y salida del gas en el ducto y la presión en el tanque. Mostrar el diagrama $T - s$, con valores de T , p , estática y totales
- Solución:



Con la relación de áreas en la tobera se tiene: $\frac{A_2}{A^*} = 1.44$, con este valor a T.F.I. en donde se tiene $M_2 = 0.45$, luego con este valor a T.F.F para obtener: $\frac{p_2}{p^*} = 2.3865$; $\frac{T_2}{T^*} = 1.1533$;

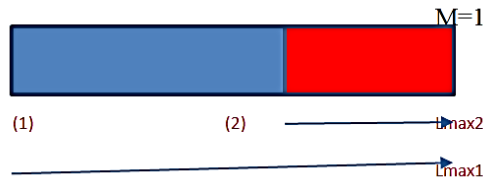
$$\frac{p_0}{p^*} = 1.4486; \frac{f x L_{max2}}{D} = 1.5664. \text{ como } Q=0 \text{ entonces } T^* = \text{cte.}$$

Luego de la relación $\frac{T_0}{T^*} = 1.2$, de donde $T^* = 311$ K, luego se tiene $T_2 = 358.68$ K y

$V_2 = 170.83$ m/s

también $\rho_2 = 8.28$ kg/m³, de donde $p_2 = 8.28 \times 0.287 \times 358.68 = 852.35$ KPa

la presión crítica será: $p^* = \frac{852.35}{2.3865} = 357.2$ KPa



Del grafico se tiene: $L_{max 1} = L_{max 2} + L_{1-2}$, entonces $\frac{f \times L_{max 1}}{D} = 1.5664 + \frac{0.024 \times 9}{0.06} = 5.1664$, con este valor a T.F.Fanno de donde se obtiene $M_1 = 0.30$ y $\frac{p_1}{p^*} = 3.619$, de donde se obtienen: $p_1 = 357.2 \times 3.619 = 1292.7$ KPa;

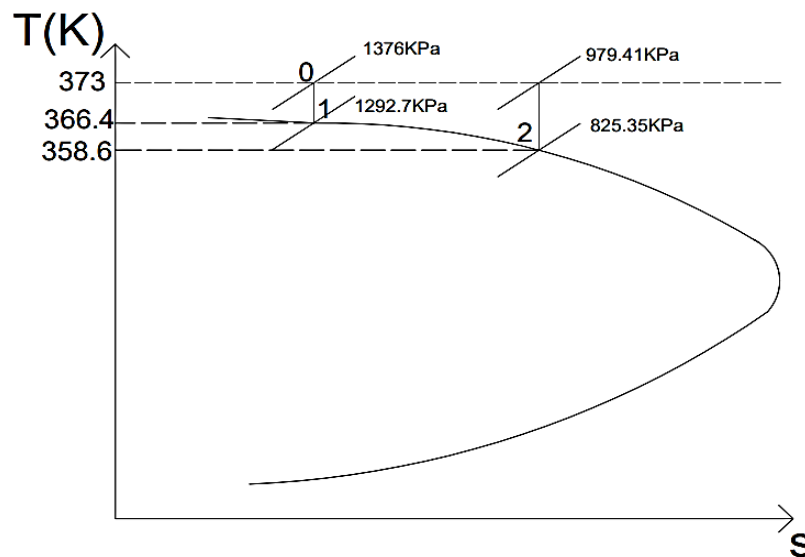
$\rho_{01} = 1292.7(1 + 0.2(0.3)^2)^{3.5} = 1376$ KPa

$\rho_{02} = 852.35(1 + 0.2(0.45)^2)^{3.5} = 979.41$ KPa

con $M_1 = 0.30$ a T.F.I. obteniéndose: $\frac{T_1}{T_{01}} = 0.98232$, entonces $T_1 = 366.4$ K,

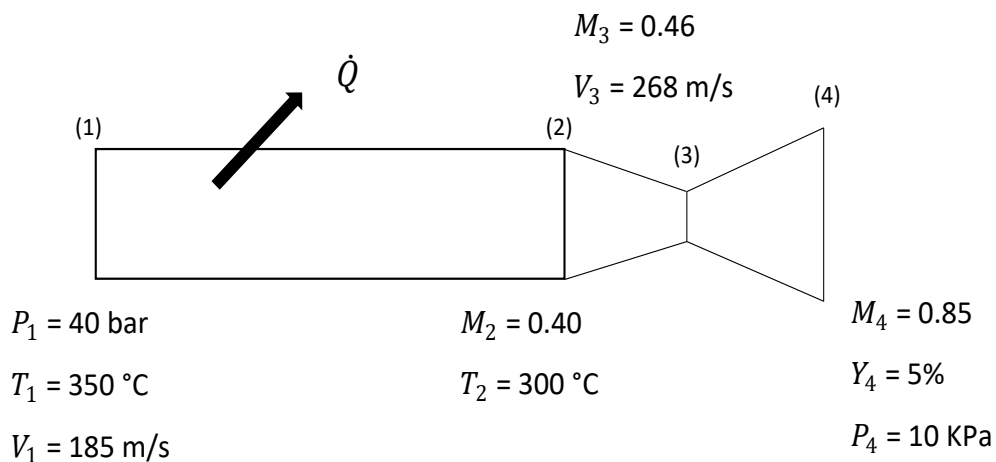
también la

$\rho_1 = 12.293$ kg/m³, para determinar la velocidad a la entrada al ducto **$V_1 = 115$ m/s**



- 6.5. Vapor de agua proveniente del colector de una caldera ingresa a una tubería de sección constante de 2 ½" sch 80 a 40 bar abs, 350°C con 185 m/s y al final de ella se encuentra a 300°C, con $M = 0.40$, como consecuencia del calor transferido; la tubería está unida a una tobera convergente y sale de ella con $M = 0,46$ y 268 m/s. Al salir de la tobera ingresa a la turbina a vapor, donde se expande adiabáticamente escapando de ella con $M = 0,85$ a 10 KPa y una humedad de 5%; se pide:
- la temperatura y presión del vapor en el colector, °C
 - la presión del vapor al final del tubo, bar
 - el calor transferido por el vapor en el tubo, kw
 - la potencia que entrega la turbina, si sus pérdidas externas son de 10%, HP

Solución:



de las tablas termodinámicas se tiene: $\rho_1 = 15.05 \text{ kg/m}^3$, el número de Mach será:

$$M_1 = \frac{185}{\sqrt{1.327 \times 461.5 \times 623}} = 0.30$$

la velocidad del sonido a la salida del tubo $C_2 = \sqrt{1.327 \times 461.5 \times 673} = 640.3 \text{ m/s}$

el flujo másico de vapor que circula: $\dot{m} = 15.05 \times 185 \times (0.059)^2 \times \pi/4 = 7.612 \text{ kg/s}$

la temperatura singular a la entrada del tubo: $T_{01} = 623 + \frac{(185)^2}{2 \times 1872.3} = 632.14$

K.

La velocidad del vapor a la salida $V_2 = 640.3 \times 0.40 = 256.12 \text{ m/s}$, con esto obtenemos la densidad $\rho_2 = 10.87$ y de esta el volumen específico $v_2 = 0.092 \text{ m}^3/\text{kg}$; interpolando se tiene la presión de **$p_2 = 32.48 \text{ bar}$**

la temperatura total a la salida es: $T_{02} = 573 + \frac{(256.12)^2}{2 \times 1872.3} = 590.52 \text{ k}$, luego el calor transferido del vapor en el tubo es **$Q = 7.612 \times 1.872.3(590.52 - 632.14) = 593.17 \text{ kw}$**

la presión en el colector de vapor $p_{01} = 40 (1 + 0.6635 \times (0.30)^2)^{4.058} =$
 42.44 bar

la velocidad del sonido a la salida de la tobera $C_3 = \frac{268}{0.46} = 582.61 \text{ k}$, luego $582.61 = \sqrt{1.327 \times 461.5 \times T_3}$, despejando $T_3 = 554.26 \text{ k}$.

Como la $p_{02} = p_{03} = p_3(1 + 0.6635 \times (0.46)^2)^{4.058} \rightarrow p_3 = 31.42 \text{ bar}$. Con 31.42 bar y 281.26°C a tablas de vapor se obtiene $h_3 = 2980 \text{ kJ/kg}$ (entrada a la turbina)

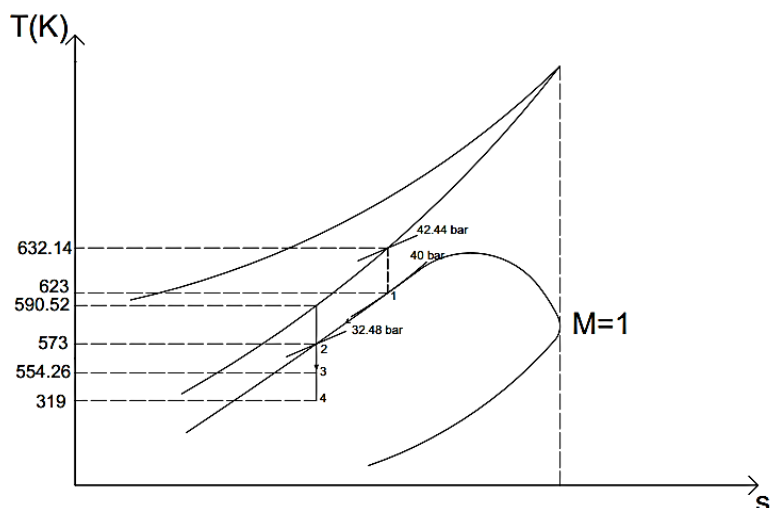
La velocidad del vapor a la salida de la turbina

$V_4 = 0.85 \sqrt{1.327 \times 461.5 \times 318.81} = 375.58 \text{ m/s}$; la entalpia a la descarga de la turbina:

$h_4 = 191.83 + 0.95(2392.8) = 2465$, luego la potencia generada por la turbina es

$W_T = 7.612 \left((2980 - 2465) + \frac{268^2 - 375.58^2}{2000} \right) = 3656.76 \text{ Kw} = 4901.7 \text{ HP}$, la turbina entrega al consumidor **$W_T = 4411.53 \text{ HP}$**

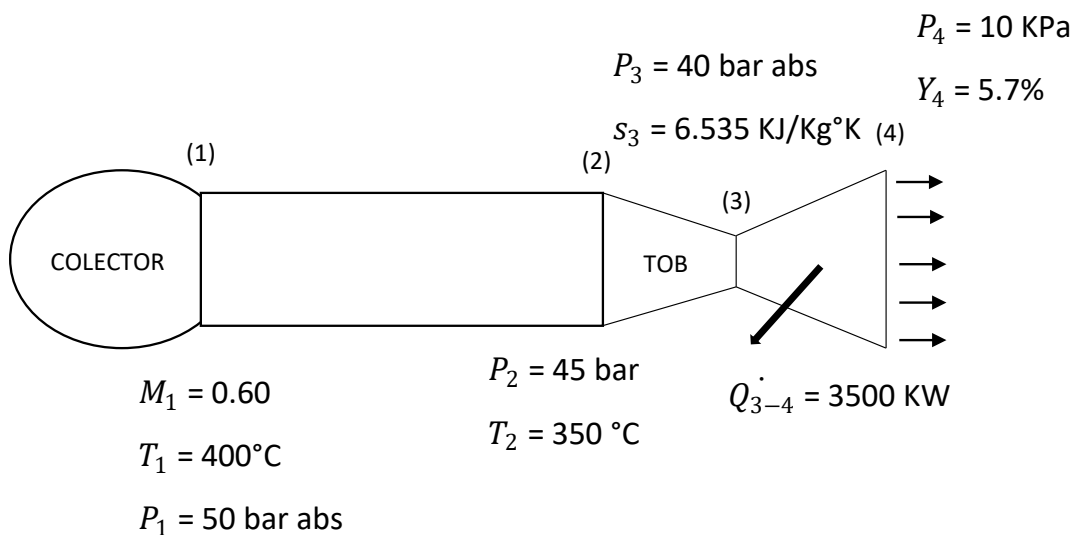
Diagrama T-s



6.3. Vapor de agua ($C_p=1.8723$, $R=0.4615$ kJ/kg k, respectivamente) proveniente del colector principal de una caldera ingresa a una tubería desnuda de ϕ 3" sch 80 con $M=0.60$, a 400°C , 50 bar abs; en un punto corriente abajo se encuentra a 45 bar abs, a 350°C , en donde se le acopla una tobera alcanzando a la salida 40 bar abs con 6.535 kJ/kg k, finalmente pasa por una turbina de donde el vapor sale a 10 KPa con 5.7% de humedad, transfiriendo 3500 kw de calor; se pide:

- El calor transferido entre los dos puntos en la tubería, kw
- El número de mach que alcanza el vapor al ingreso a la turbina
- La potencia que entrega la turbina (HP) si el vapor a la salida alcanza una velocidad de 500 m/s

Solución:



La temperatura del vapor en el colector: $T_{01} = 673(1 + 0.1635(0.60)^2) = 712.61$ k

De tablas termodinámicas $v_1 = 0.05781$; $v_2 = 0.05135$ m³/kg respectivamente. Por continuidad entre los dos punto se tiene $V_2 = \frac{v_2}{v_1} \times V_1$

.....(a)

La velocidad del vapor al ingreso a la tubería, $V_1 = 0.6\sqrt{1.327 \times 461.5 \times 673} = 385.2$ m/s

Reemplazando en (a) se tiene $V_2 = 343.16$ m/s

El flujo másico $\dot{m} = \frac{385.2 \times \pi \times (0.0737)^2}{0.05781 \times 4} \rightarrow \dot{m} = 28.43$ kg/s

En el punto aguas debajo de (1) se tiene: $M_2 = \frac{343.16}{\sqrt{1.327 \times 461.5 \times 623}} = 0.56$,

luego

$$T_{02} = 623[1 + 0.1635(0.56)^2] = 655 \text{ K}$$

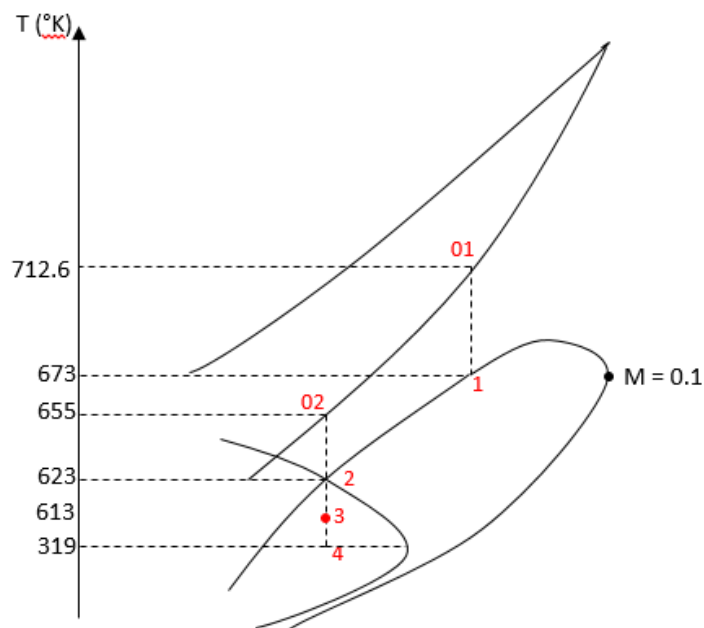
El calor transferido es $\dot{Q} = 28.43 \times 1.8723(655 - 712.61) \rightarrow \dot{Q} = 3067 \text{ kw}$

De tablas la $T_3 = 340^\circ\text{C}$, luego $655 = 613 + \frac{V_3^2}{2 \times 1872.3}$, de donde $V_3 = 396.58$ m/s

La velocidad del sonido $C_3 = \sqrt{1.327 \times 461.5 \times 613} = 612.71$ m/s, luego $M_3 = 0.65$

Aplicando la primera ley de la termodinámica:

$$\dot{W}_t = -3500 + 28.43 \left[(3080 - 2450) + \frac{396.58^2 - 460^2}{2000} \right] \rightarrow \dot{W}_t = 17082.66 \text{ Kw} = 22900 \text{ HP}$$

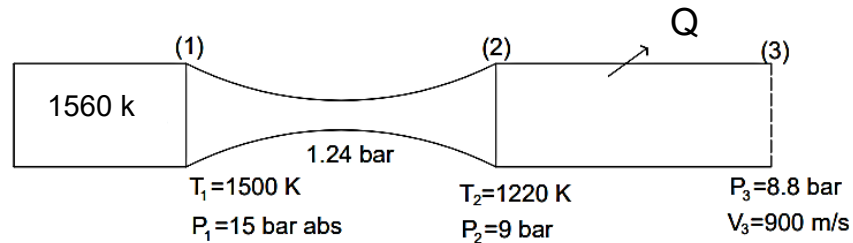


6.4. Los gases de una combustión se encuentran en estacionariamente a 1560K , ingresan a razón de 80 kg/s a una tobera de a 1500 K , 14 bar , donde se expanden siguiendo un proceso con $n=1.38$ con $C_p = 1.046 \text{ kJ/kg K}$, saliendo a 1220 K , 9 bar abs ; luego ingresan a un ducto de sección constante, transfiriendo 2500 kw , hasta abandonarlo a 8.8 bar abs , con 900 m/s ; se pide:

a. La temperatura total a la salida del ducto, $^\circ\text{C}$

- b. La densidad del aire a la salida del ducto, kg/m³
- c. El número de mach a la salida de la tobera
- d. El diámetro del ducto, cm

Solución:



La constante particular es: $R = 0,288 \text{ kJ/k}_s\text{k}$

Sabemos:

$$1560 = 1500 + \frac{V_1^2}{2 \times 1046} \Rightarrow V_1 = 354.3 \text{ m/s}$$

$$C_1 = \sqrt{1.38 \times 288 \times 1500} = 772.11 \text{ m/s}$$

$$M_1 = \frac{354.3}{772.11} = 0.46$$

Tambien:

$$1560 = 1220 + \frac{V_2^2}{2 \times 1046} \Rightarrow V_2 = 843.37 \text{ m/s}$$

$$M_2 = \frac{843.37}{\sqrt{1.38 \times 288 \times 1220}} \Rightarrow M_2 = 1.21;$$

Por la primera ley de la termodinámica:

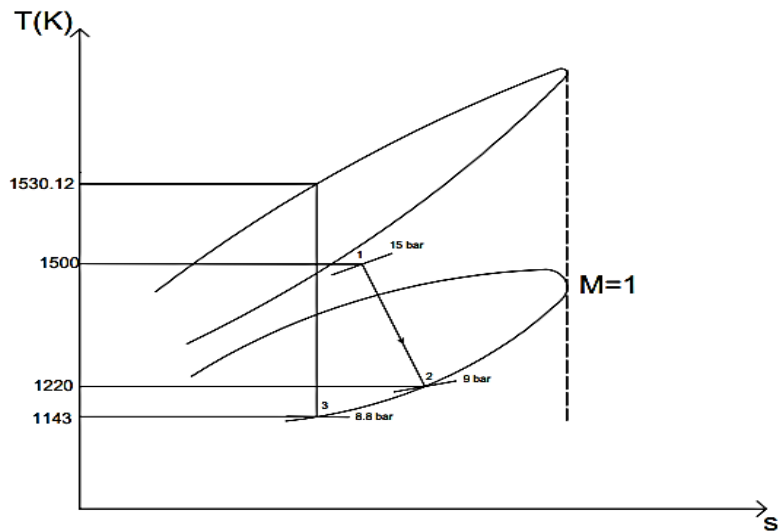
$$-2500 = 80 \times 1.046 (T_{03} - 1560)$$

$$T_{03} = 1530.12 \text{ K} \Rightarrow T_{03} = 1257.12 \text{ °C}$$

$$1530.12 = T_3 + \frac{(900)^2}{2 \times 1046} \Rightarrow T_3 = 1143 \text{ K}$$

$$\rho_3 = \frac{880}{0.288 \times 1143} = 2.673 \text{ kg/m}^3$$

$$80 = \frac{\pi}{4} D_3^2 \times 2.673 \times 900 \Rightarrow D_3 = 20.6 \text{ cm}$$



6.8 Los gases de escape ($C_p=1.028 \text{ kJ/kg K}$, $k=1.38$) provenientes de una cámara de combustión ingresan a una turbina a gas por un tubo de $D = 20\text{cm}$, con $M=0.5$, 1297°C , 13 bar , para desarrollar una potencia de $20\,000 \text{ Kw}$ y salen a 790 K , 1 bar abs , con 250 m/s , se pide:

- El flujo másico de los gases, kg/s
- La presión total del gas a la salida, bar
- El calor transferido en la turbina, kw

Solución:

$$T_{o1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) T_1$$

$$T_{o1} = [0.19(0.5)^2 + 1] \times 1570 = 1645 \text{ K}$$

$$P_{o1} = [1 + 0.19(0.5)^2]^{3.6316} \times 16 = 18.94 \text{ bar}$$

$$C_p = \frac{kR}{k-1} \Rightarrow R = 0.283 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\rho_1 = \frac{1600}{0.283 \times 1570} = 3.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; V_1 = 391.52 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = 3.107 \times \frac{\pi}{4} (0.20)^2 \times 391.52 = 38.22 \text{ kg/s}$$

$$M_2 = \frac{250}{\sqrt{1.38 \times 283 \times 790}} = 0.45$$

$$P_{o2} = [1 + 0.19(0.45)^2]^{3.6316} \times 1 = \mathbf{1.15 \text{ bar}}$$

$$\dot{Q} = 20\,000 + 38.22 \left[[1.028] 790 - 1570 + \left(\frac{250^2 - 391.52^2}{2000} \right) \right]$$

$$\dot{Q} = \mathbf{-12381.3 \text{ kw}}$$

Problemas propuestos

1. Aire sale de un compresor a 5 bar, 750 k a razón de 2.63 m³/s, para ingresar a la cámara de combustión quemando 0.90 kg/s de combustible; los gases quemados (Cp = 1.0028kj/kg k; k = 1.4) salen a 1500 k perdiendo 1 % de presión hacia el colector de gases, luego ingresan a la tobera de la turbina a gas con 200 m/s, donde se expande isoentropicamente hasta salir a 400 m/s, por un ducto de diámetro "D"; se pide:
 - a. el número de mach al ingreso a la tobera
 - b. la densidad de los gases a la salida de la tobera
 - c. el diámetro a la salida de la tobera
 Rpta: 0.26; 1.21 kg/m³ ; 14.69 cm

V. REFERENCIALES

- CENGEL, Y., & CIMBALA, J. (2006). *Mecánica de Fluidos. 2da. Edición.* México: Mc. Graw-Hill.
- CRESPO, A. (2006). *Mecánica de Fluidos.* Madrid. España: Thomson Editores Sapin Paraninfo.
- CUVELIER, C. (1988). *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations.* D. Reidel Publishing Co. Holland.
- FLORES SANCHEZ, J. (2015). *Termo-Fluidos-Teoría y Problemas.* Lima. Perú.
- FOX, R., & A.T., M. (1990). *Introducción a la Mecánica de Fluidos. 2da. Edición.* Mexico: Mc GRAW-HILL.
- FRANZINI, J., & FINNEMORES, E. (1999). *Mecánica de Fluidos con Aplicaciones en Ingeniería. 9na. Edición.* España: Mc. Graw-Hill.
- GEHART, P., & OTROS. (1995). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos. 2da. Edición.* Estados Unidos. : Addison-Wessley Iberoamericana.
- MATAIX, C. (1988). *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas. 2da. Edición.* México: Editorial Harla.
- ROBERSON, J., & CLAYTON , T. (1983). *Mecánica de Fluidos. 9na Edición.* Interamericana S.A.
- SHAMES, I. (1995). *Mecánica de Fluidos. 3ra. Edición .* Santa Fe de Bogota. Colombia: Mc. Graw-Hill.
- STREETER , V. (1983). *Mecánica de Fluidos.* México: Mc. Graw-Hill.
- WHITE, F. (1993). *Mecánica de Fluidos. 2da. Edición.* México: Mc Graw-Hill.

VI. APÉNDICES

A1: PROPIEDADES DEL AIRE A PRESIÓN ATMOSFÉRICA

<i>Temperatura</i> T (°C)	<i>Densidad</i> ρ (kg/m ³)	<i>Viscosidad</i> μ (N·s/m ²)	<i>Viscosidad cinemática</i> ν (m ² /s)	<i>Velocidad del sonido</i> c (m/s)
-50	1.582	1.46×10^{-5}	0.921×10^{-5}	299
-30	1.452	1.56	1.08×10^{-5}	312
-20	1.394	1.61	1.16	319
-10	1.342	1.67	1.24	325
0	1.292	1.72	1.33	331
10	1.247	1.76	1.42	337
20	1.204	1.81	1.51	343
30	1.164	1.86	1.60	349
40	1.127	1.91	1.69	355
50	1.092	1.95	1.79	360
60	1.060	2.00	1.89	366
70	1.030	2.05	1.99	371
80	1.000	2.09	2.09	377
90	0.973	2.13	2.19	382
100	0.946	2.17	2.30	387
200	0.746	2.57	3.45	436
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}	480

A2: UNIDADES INGLESAS PROPIEDADES DEL AIRE A PRESIÓN ATMOSFÉRICA

<i>Temperatura</i> (°F)	<i>Densidad</i> (slug/ft ³)	<i>Viscosidad</i> (lb-s/ft ²)	<i>Viscosidad cinemática</i> (ft ² /s)	<i>Velocidad del sonido</i> (ft/s)
-20	0.00280	3.34×10^{-7}	11.9×10^{-5}	1028
0	0.00268	3.38	12.6	1051
20	0.00257	3.50	13.6	1074
40	0.00247	3.62	14.6	1096
60	0.00237	3.74	15.8	1117
68	0.00233	3.81	16.0	1125
80	0.00228	3.85	16.9	1138
100	0.00220	3.96	18.0	1159
120	0.00213	4.07	18.9	1180
160	0.00199	4.23	21.3	1220
200	0.00187	4.50	24.1	1258
300	0.00162	4.98	30.7	1348
400	0.00144	5.26	36.7	1431
1000	0.000844	7.87×10^{-7}	93.2×10^{-5}	1839

A3: PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA ESTÁNDAR

<i>Altitud</i> (m)	<i>Temperatura</i> (K)	<i>Presión</i> (kPa)	<i>Densidad</i> (kg/m ³)	<i>Velocidad del sonido</i> (m/s)
0	288.2	101.3	1.225	340
500	284.9	95.43	1.167	338
1 000	281.7	89.85	1.112	336
2 000	275.2	79.48	1.007	333
4 000	262.2	61.64	0.8194	325
6 000	249.2	47.21	0.6602	316
8 000	236.2	35.65	0.5258	308
10 000	223.3	26.49	0.4136	300
12 000	216.7	19.40	0.3119	295
14 000	216.7	14.17	0.2278	295
16 000	216.7	10.35	0.1665	295
18 000	216.7	7.563	0.1216	295
20 000	216.7	5.528	0.0889	295
30 000	226.5	1.196	0.0184	302
40 000	250.4	0.287	4.00×10^{-3}	317
50 000	270.7	0.0798	1.03×10^{-3}	330
60 000	255.8	0.0225	3.06×10^{-4}	321
70 000	219.7	0.00551	8.75×10^{-5}	297
80 000	180.7	0.00103	2.00×10^{-5}	269

A4: UNIDADES INGLESAS PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA

<i>Altitud</i> (ft)	<i>Temperatura</i> (°F)	<i>Presión</i> (lb/ft ²)	<i>Densidad</i> (slugs/ft ³)	<i>Velocidad del sonido</i> (ft/s)
0	59.0	2116	0.00237	1117
1,000	55.4	2014	0.00231	1113
2,000	51.9	1968	0.00224	1109
5,000	41.2	1760	0.00205	1098
10,000	23.4	1455	0.00176	1078
15,000	5.54	1194	0.00150	1058
20,000	-12.3	973	0.00127	1037
25,000	-30.1	785	0.00107	1016
30,000	-48.0	628	0.000890	995
35,000	-65.8	498	0.000737	973
36,000	-67.6	475	0.000709	971
40,000	-67.6	392	0.000586	971
50,000	-67.6	242	0.000362	971
100,000	-51.4	23.2	3.31×10^{-5}	971

A5: PROPIEDADES DE GASES IDEALES

Gas	Fórmula química	Masa molar	R		c _p		k
			ft-lb	kJ	ft-lb	kJ	
			slug-°R	kg·K	slug-°R	kg·K	
Aire	—	28.97	1,716	0.287	6,012	1.004	1.40
Argón	Ar	39.94	1,244	0.2081	3,139	0.5203	1.667
Dióxido de carbono	CO ₂	44.01	1,129	0.1889	5,085	0.8418	1.287
Monóxido de carbono	CO	28.01	1,775	0.2968	6,238	1.041	1.40
Etano	C ₂ H ₆	30.07	1,653	0.2765	10,700	1.766	1.184
Helio	He	4.003	12,420	2.077	31,310	5.193	1.667
Hidrógeno	H ₂	2.016	24,660	4.124	85,930	14.21	1.40
Metano	CH ₄	16.04	3,100	0.5184	13,330	2.254	1.30
Nitrógeno	N ₂	28.02	1,774	0.2968	6,213	1.042	1.40
Oxígeno	O ₂	32.00	1,553	0.2598	5,486	0.9216	1.394
Propano	C ₃ H ₈	44.10	1,127	0.1886	10,200	1.679	1.12
Vapor	H ₂ O	18.02	2,759	0.4615	11,150	1.872	1.33

A6: PROPIEDADES DE LÍQUIDOS COMUNES A PRESIÓN ATMOSFÉRICA Y A APROXIMADAMENTE 60 A 70 °F (16 A 21 °C)

Líquido	Peso específico γ		Densidad ρ		Tensión superficial ^a σ		Presión de vapor p_v	
	lb/ft ³	N/m ³	slugs/ft ³	kg/m ³	lb/ft	N/m	psia	kPa
Alcohol, etilo	49.3	7 744	1.53	789	0.0015	0.022	—	—
Benceno	56.2	8 828	1.75	902	0.0020	0.029	1.50	10.3
Tetracloruro de carbono	99.5	15 629	3.09	1 593	0.0018	0.026	12.50	86.2
Gasolina	42.4	6 660	1.32	680	—	—	—	—
Glicerina	78.6	12 346	2.44	1 258	0.0043	0.063	2×10^{-6}	1.4×10^{-5}
Queroseno	50.5	7 933	1.57	809	0.0017	0.025	—	—
Mercurio	845.5	132 800	26.29	13 550	0.032	0.467	2.31×10^{-5}	1.59×10
Aceite SAE 10	57.4	9 016	1.78	917	0.0025	0.036	—	—
Aceite SAE 30	57.4	9 016	1.78	917	0.0024	0.035	—	—
Aguarrás	54.3	8 529	1.69	871	0.0018	0.026	7.7×10^{-3}	5.31×10^{-2}
Agua	62.4	9 810	1.94	1000	0.0050	0.073	0.34	2.34

^aEn contacto con aire.

A7: TABLA DE FLUJO ISENTRÓPICO

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0	1.0000	1.0000	∞	.96	.5532	.8444	1.0014
.02	.9997	.9999	28.9421	.98	.5407	.8389	1.0003
.04	.9989	.9997	14.4815	1.00	.5283	.8333	1.000
.06	.9975	.9993	9.6659	1.02	.5160	.8278	1.000
.08	.9955	.9987	7.2616	1.04	.5039	.8222	1.001
.10	.9930	.9980	5.8218	1.06	.4919	.8165	1.003
.12	.9900	.9971	4.8643	1.08	.4800	.8108	1.005
.14	.9864	.9961	4.1824	1.10	.4684	.8052	1.008
.16	.9823	.9949	3.6727	1.12	.4568	.7994	1.011
.18	.9776	.9936	3.2779	1.14	.4455	.7937	1.015
.20	.9725	.9921	2.9635	1.16	.4343	.7879	1.020
.22	.9668	.9904	2.7076	1.18	.4232	.7822	1.025
.24	.9607	.9886	2.4956	1.20	.4124	.7764	1.030
.26	.9541	.9867	2.3173	1.22	.4017	.7706	1.037
.28	.9470	.9846	2.1656	1.24	.3912	.7648	1.043
.30	.9395	.9823	2.0351	1.26	.3809	.7590	1.050
.32	.9315	.9799	1.9219	1.28	.3708	.7532	1.058
.34	.9231	.9774	1.8229	1.30	.3609	.7474	1.066
.36	.9143	.9747	1.7358	1.32	.3512	.7416	1.075
.38	.9052	.9719	1.6587	1.34	.3417	.7358	1.084
.40	.8956	.9690	1.5901	1.36	.3323	.7300	1.094
.42	.8857	.9659	1.5289	1.38	.3232	.7242	1.104
.44	.8755	.9627	1.4740	1.40	.3142	.7184	1.115
.46	.8650	.9594	1.4246	1.42	.3055	.7126	1.126
.48	.8541	.9560	1.3801	1.44	.2969	.7069	1.138
.50	.8430	.9524	1.3398	1.46	.2886	.7011	1.150
.52	.8317	.9487	1.3034	1.48	.2804	.6954	1.163
.54	.8201	.9449	1.2703	1.50	.2724	.6897	1.176
.56	.8082	.9410	1.2403	1.52	.2646	.6840	1.190
.58	.7962	.9370	1.2130	1.54	.2570	.6783	1.204
.60	.7840	.9328	1.1882	1.56	.2496	.6726	1.219
.62	.7716	.9286	1.1657	1.58	.2423	.6670	1.234
.64	.7591	.9243	1.1452	1.60	.2353	.6614	1.250
.66	.7465	.9199	1.1265	1.62	.2284	.6558	1.267
.68	.7338	.9153	1.1097	1.64	.2217	.6502	1.284
.70	.7209	.9107	1.0944	1.66	.2151	.6447	1.301
.72	.7080	.9061	1.0806	1.68	.2088	.6392	1.319
.74	.6951	.9013	1.0681	1.70	.2026	.6337	1.338
.76	.6821	.8964	1.0570	1.72	.1966	.6283	1.357
.78	.6691	.8915	1.0471	1.74	.1907	.6229	1.376
.80	.6560	.8865	1.0382	1.76	.1850	.6175	1.397
.82	.6430	.8815	1.0305	1.78	.1794	.6121	1.418
.84	.6300	.8763	1.0237	1.80	.1740	.6068	1.439
.86	.6170	.8711	1.0179	1.82	.1688	.6015	1.461
.88	.6041	.8659	1.0129	1.84	.1637	.5963	1.484
.90	.5913	.8606	1.0089	1.86	.1587	.5910	1.507
.92	.5785	.8552	1.0056	1.88	.1539	.5859	1.531
.94	.5658	.8498	1.0031	1.90	.1492	.5807	1.555

A8: TABLA DE FLUJO ISOENTRÓPICO (CONTINUACIÓN)

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
1.92	.1447	.5756	1.580	2.92	.3071 ⁻¹	.3696	3.924
1.94	.1403	.5705	1.606	2.94	.2980 ⁻¹	.3665	3.999
1.96	.1360	.5655	1.633	2.96	.2891 ⁻¹	.3633	4.076
1.98	.1318	.5605	1.660	2.98	.2805 ⁻¹	.3602	4.155
2.00	.1278	.5556	1.688	3.00	.2722 ⁻¹	.3571	4.235
2.02	.1239	.5506	1.716	3.02	.2642 ⁻¹	.3541	4.316
2.04	.1201	.5458	1.745	3.04	.2564 ⁻¹	.3511	4.399
2.06	.1164	.5409	1.775	3.06	.2489 ⁻¹	.3481	4.483
2.08	.1128	.5361	1.806	3.08	.2416 ⁻¹	.3452	4.570
2.10	.1094	.5313	1.837	3.10	.2345 ⁻¹	.3422	4.657
2.12	.1060	.5266	1.869	3.12	.2276 ⁻¹	.3393	4.747
2.14	.1027	.5219	1.902	3.14	.2210 ⁻¹	.3365	4.838
2.16	.9956 ⁻¹	.5173	1.935	3.16	.2146 ⁻¹	.3337	4.930
2.18	.9649 ⁻¹	.5127	1.970	3.18	.2083 ⁻¹	.3309	5.025
2.20	.9352 ⁻¹	.5081	2.005	3.20	.2023 ⁻¹	.3281	5.121
2.22	.9064 ⁻¹	.5036	2.041	3.22	.1964 ⁻¹	.3253	5.219
2.24	.8785 ⁻¹	.4991	2.078	3.24	.1908 ⁻¹	.3226	5.319
2.26	.8514 ⁻¹	.4947	2.115	3.26	.1853 ⁻¹	.3199	5.420
2.28	.8251 ⁻¹	.4903	2.154	3.28	.1799 ⁻¹	.3173	5.523
2.30	.7997 ⁻¹	.4859	2.193	3.30	.1748 ⁻¹	.3147	5.629
2.32	.7751 ⁻¹	.4816	2.233	3.32	.1698 ⁻¹	.3121	5.736
2.34	.7512 ⁻¹	.4773	2.274	3.34	.1649 ⁻¹	.3095	5.845
2.36	.7281 ⁻¹	.4731	2.316	3.36	.1602 ⁻¹	.3069	5.956
2.38	.7057 ⁻¹	.4688	2.359	3.38	.1557 ⁻¹	.3044	6.069
2.40	.6840 ⁻¹	.4647	2.403	3.40	.1512 ⁻¹	.3019	6.184
2.42	.6630 ⁻¹	.4606	2.448	3.42	.1470 ⁻¹	.2995	6.301
2.44	.6426 ⁻¹	.4565	2.494	3.44	.1428 ⁻¹	.2970	6.420
2.46	.6229 ⁻¹	.4524	2.540	3.46	.1388 ⁻¹	.2946	6.541
2.48	.6038 ⁻¹	.4484	2.588	3.48	.1349 ⁻¹	.2922	6.664
2.50	.5853 ⁻¹	.4444	2.637	3.50	.1311 ⁻¹	.2899	6.790
2.52	.5674 ⁻¹	.4405	2.686	3.52	.1274 ⁻¹	.2875	6.917
2.54	.5500 ⁻¹	.4366	2.737	3.54	.1239 ⁻¹	.2852	7.047
2.56	.5332 ⁻¹	.4328	2.789	3.56	.1204 ⁻¹	.2829	7.179
2.58	.5169 ⁻¹	.4289	2.842	3.58	.1171 ⁻¹	.2806	7.313
2.60	.5012 ⁻¹	.4252	2.896	3.60	.1138 ⁻¹	.2784	7.450
2.62	.4859 ⁻¹	.4214	2.951	3.62	.1107 ⁻¹	.2762	7.589
2.64	.4711 ⁻¹	.4177	3.007	3.64	.1076 ⁻¹	.2740	7.730
2.66	.4568 ⁻¹	.4141	3.065	3.66	.1047 ⁻¹	.2718	7.874
2.68	.4429 ⁻¹	.4104	3.123	3.68	.1018 ⁻¹	.2697	8.020
2.70	.4295 ⁻¹	.4068	3.183	3.70	.9903 ⁻²	.2675	8.169
2.72	.4165 ⁻¹	.4033	3.244	3.72	.9633 ⁻²	.2654	8.320
2.74	.4039 ⁻¹	.3998	3.306	3.74	.9370 ⁻²	.2633	8.474
2.76	.3917 ⁻¹	.3963	3.370	3.76	.9116 ⁻²	.2613	8.630
2.78	.3799 ⁻¹	.3928	3.434	3.78	.8869 ⁻²	.2592	8.789
2.80	.3685 ⁻¹	.3894	3.500	3.80	.8629 ⁻²	.2572	8.951
2.82	.3574 ⁻¹	.3860	3.567	3.82	.8396 ⁻²	.2552	9.115
2.84	.3467 ⁻¹	.3827	3.636	3.84	.8171 ⁻²	.2532	9.282
2.86	.3363 ⁻¹	.3794	3.706	3.86	.7951 ⁻²	.2513	9.451
2.88	.3263 ⁻¹	.3761	3.777	3.88	.7739 ⁻²	.2493	9.624
2.90	.3165 ⁻¹	.3729	3.850	3.90	.7532 ⁻²	.2474	9.799

A9: TABLA DE FLUJO ISOENTRÓPICO (CONTINUACIÓN)

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
3.92	.7332 ⁻²	.2455	9.977	4.54	.3288 ⁻²	.1952	17.13
3.94	.7137 ⁻²	.2436	10.16	4.56	.3207 ⁻²	.1938	17.42
3.96	.6948 ⁻²	.2418	10.34	4.58	.3129 ⁻²	.1925	17.72
3.98	.6764 ⁻²	.2399	10.53	4.60	.3053 ⁻²	.1911	18.02
4.00	.6586 ⁻²	.2381	10.72	4.62	.2978 ⁻²	.1898	18.32
4.02	.6413 ⁻²	.2363	10.91	4.64	.2906 ⁻²	.1885	18.63
4.04	.6245 ⁻²	.2345	11.11	4.66	.2836 ⁻²	.1872	18.94
4.06	.6082 ⁻²	.2327	11.31	4.68	.2768 ⁻²	.1859	19.26
4.08	.5923 ⁻²	.2310	11.51	4.70	.2701 ⁻²	.1846	19.58
4.10	.5769 ⁻²	.2293	11.71	4.72	.2637 ⁻²	.1833	19.91
4.12	.5619 ⁻²	.2275	11.92	4.74	.2573 ⁻²	.1820	20.24
4.14	.5474 ⁻²	.2258	12.14	4.76	.2512 ⁻²	.1808	20.58
4.16	.5333 ⁻²	.2242	12.35	4.78	.2452 ⁻²	.1795	20.92
4.18	.5195 ⁻²	.2225	12.57	4.80	.2394 ⁻²	.1783	21.26
4.20	.5062 ⁻²	.2208	12.79	4.82	.2338 ⁻²	.1771	21.61
4.22	.4932 ⁻²	.2192	13.02	4.84	.2283 ⁻²	.1759	21.97
4.24	.4806 ⁻²	.2176	13.25	4.86	.2229 ⁻²	.1747	22.33
4.26	.4684 ⁻²	.2160	13.48	4.88	.2177 ⁻²	.1735	22.70
4.28	.4565 ⁻²	.2144	13.72	4.90	.2126 ⁻²	.1724	23.07
4.30	.4449 ⁻²	.2129	13.95	4.92	.2076 ⁻²	.1712	23.44
4.32	.4337 ⁻²	.2113	14.20	4.94	.2028 ⁻²	.1700	23.82
4.34	.4228 ⁻²	.2098	14.45	4.96	.1981 ⁻²	.1689	24.21
4.36	.4121 ⁻²	.2083	14.70	4.98	.1935 ⁻²	.1678	24.60
4.38	.4018 ⁻²	.2067	14.95	5.00	.1890 ⁻²	.1667	25.00
4.40	.3918 ⁻²	.2053	15.21	6.00	.0633 ⁻²	.1219	53.19
4.42	.3820 ⁻²	.2038	15.47	7.00	.0242 ⁻²	.0926	104.14
4.44	.3725 ⁻²	.2023	15.74	8.00	.0102 ⁻²	.0725	109.11
4.46	.3633 ⁻²	.2009	16.01	9.00	.0474 ⁻³	.0582	327.19
4.48	.3543 ⁻²	.1994	16.28	10.00	.0236 ⁻³	.0476	535.94
4.50	.3455 ⁻²	.1980	16.56	∞	0	0	∞
4.52	.3370 ⁻²	.1966	16.84				

A10: FLUJO DE CHOQUE NORMAL

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
1.02	.9805	1.047	1.013	1.000
1.04	.9620	1.095	1.026	.9999
1.06	.9444	1.144	1.039	.9997
1.08	.9277	1.194	1.052	.9994
1.10	.9118	1.245	1.065	.9989
1.12	.8966	1.297	1.078	.9982
1.14	.8820	1.350	1.090	.9973
1.16	.8682	1.403	1.103	.9961
1.18	.8549	1.458	1.115	.9946
1.20	.8422	1.513	1.128	.9928
1.22	.8300	1.570	1.141	.9907
1.24	.8183	1.627	1.153	.9884
1.26	.8071	1.686	1.166	.9857
1.28	.7963	1.745		

A11: FLUJO DE CHOQUE NORMAL (CONTINUACIÓN)

M_1	M_2	P_2/P_1	T_2/T_1	P_{02}/P_{01}
1.30	.7860	1.805	1.191	.9794
1.32	.7760	1.866	1.204	.9758
1.34	.7664	1.928	1.216	.9718
1.36	.7572	1.991	1.229	.9676
1.38	.7483	2.055	1.242	.9630
1.40	.7397	2.120	1.255	.9582
1.42	.7314	2.186	1.268	.9531
1.44	.7235	2.253	1.281	.9476
1.46	.7157	2.320	1.294	.9420
1.48	.7083	2.389	1.307	.9360
1.50	.7011	2.458	1.320	.9298
1.52	.6941	2.529	1.334	.9233
1.54	.6874	2.600	1.347	.9166
1.56	.6809	2.673	1.361	.9097
1.58	.6746	2.746	1.374	.9026
1.60	.6684	2.820	1.388	.8952
1.62	.6625	2.895	1.402	.8877
1.64	.6568	2.971	1.416	.8799
1.66	.6512	3.048	1.430	.8720
1.68	.6458	3.126	1.444	.8640
1.70	.6405	3.205	1.458	.8557
1.72	.6355	3.285	1.473	.8474
1.74	.6305	3.366	1.487	.8389
1.76	.6257	3.447	1.502	.8302
1.78	.6210	3.530	1.517	.8215
1.80	.6165	3.613	1.532	.8127
1.82	.6121	3.698	1.547	.8038
1.84	.6078	3.783	1.562	.7948
1.86	.6036	3.870	1.577	.7857
1.88	.5996	3.957	1.592	.7765
1.90	.5956	4.045	1.608	.7674
1.92	.5918	4.134	1.624	.7581
1.94	.5880	4.224	1.639	.7488
1.96	.5844	4.315	1.655	.7395
1.98	.5808	4.407	1.671	.7302
2.00	.5774	4.500	1.688	.7209
2.02	.5740	4.594	1.704	.7115
2.04	.5707	4.689	1.720	.7022
2.06	.5675	4.784	1.737	.6928
2.08	.5643	4.881	1.754	.6835
2.10	.5613	4.978	1.770	.6742
2.12	.5583	5.077	1.787	.6649
2.14	.5554	5.176	1.805	.6557
2.16	.5525	5.277	1.822	.6464
2.18	.5498	5.378	1.839	.6373
2.20	.5471	5.480	1.857	.6281
2.22	.5444	5.583	1.875	.6191
2.24	.5418	5.687	1.892	.6100
2.26	.5393	5.792	1.910	.6011
2.28	.5368	5.898	1.929	.5921

A12: FLUJO DE CHOQUE NORMAL (CONTINUACIÓN)







M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
3.30	.4596	12.54	3.049	.2533
3.32	.4587	12.69	3.075	.2489
3.34	.4578	12.85	3.101	.2446
3.36	.4569	13.00	3.127	.2404
3.38	.4560	13.16	3.154	.2363
3.40	.4552	13.32	3.180	.2322
3.42	.4544	13.48	3.207	.2382
3.44	.4535	13.64	3.234	.2243
3.46	.4527	13.80	3.261	.2205
3.48	.4519	13.96	3.288	.2167
3.50	.4512	14.13	3.315	.2129
3.52	.4504	14.29	3.343	.2093
3.54	.4496	14.45	3.370	.2057
3.56	.4489	14.62	3.398	.2022
3.58	.4481	14.79	3.426	.1987
3.60	.4474	14.95	3.454	.1953
3.62	.4467	15.12	3.482	.1920
3.64	.4460	15.29	3.510	.1887
3.66	.4453	15.46	3.539	.1855
3.68	.4446	15.63	3.568	.1823
3.70	.4439	15.81	3.596	.1792
3.72	.4433	15.98	3.625	.1761
3.74	.4426	16.15	3.654	.1731
3.76	.4420	16.33	3.684	.1702
3.78	.4414	16.50	3.713	.1673
3.80	.4407	16.68	3.743	.1645
3.82	.4401	16.86	3.772	.1617
3.84	.4395	17.04	3.802	.1589
3.86	.4389	17.22	3.832	.1563
3.88	.4383	17.40	3.863	.1536
3.90	.4377	17.58	3.893	.1510
3.92	.4372	17.76	3.923	.1485
3.94	.4366	17.94	3.954	.1460
3.96	.4360	18.13	3.985	.1435
3.98	.4355	18.31	4.016	.1411
4.00	.4350	18.50	4.047	.1388
4.02	.4344	18.69	4.078	.1364
4.04	.4339	18.88	4.110	.1342
4.06	.4334	19.06	4.141	.1319
4.08	.4329	19.25	4.173	.1297
4.10	.4324	19.45	4.205	.1276
4.12	.4319	19.64	4.237	.1254
4.14	.4314	19.83	4.269	.1234
4.16	.4309	20.02	4.301	.1213
4.18	.4304	20.22	4.334	.1193
4.20	.4299	20.41	4.367	.1173
4.22	.4295	20.61	4.399	.1154
4.24	.4290	20.81	4.432	.1135
4.26	.4286	21.01	4.466	.1116
4.28	.4281	21.20	4.499	.1098

A13: FLUJO DE CHOQUE NORMAL (CONTINUACIÓN)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
4.30	.4277	21.41	4.532	.1080
4.32	.4272	21.61	4.566	.1062
4.34	.4268	21.81	4.600	.1045
4.36	.4264	22.01	4.633	.1028
4.38	.4260	22.22	4.668	.1011
4.40	.4255	22.42	4.702	.9948 ⁻¹
4.42	.4251	22.63	4.736	.9787 ⁻¹
4.44	.4247	22.83	4.771	.9628 ⁻¹
4.46	.4243	23.04	4.805	.9473 ⁻¹
4.48	.4239	23.25	4.840	.9320 ⁻¹
4.50	.4236	23.46	4.875	.9170 ⁻¹
4.52	.4232	23.67	4.910	.9022 ⁻¹
4.54	.4228	23.88	4.946	.8878 ⁻¹
4.56	.4224	24.09	4.981	.8735 ⁻¹
4.58	.4220	24.31	5.017	.8596 ⁻¹
4.60	.4217	24.52	5.052	.8459 ⁻¹
4.62	.4213	24.74	5.088	.8324 ⁻¹
4.64	.4210	24.95	5.124	.8192 ⁻¹
4.66	.4206	25.17	5.160	.8062 ⁻¹
4.68	.4203	25.39	5.197	.7934 ⁻¹
4.70	.4199	25.61	5.233	.7809 ⁻¹
4.72	.4196	25.82	5.270	.7685 ⁻¹
4.74	.4192	26.05	5.307	.7564 ⁻¹
4.76	.4189	26.27	5.344	.7445 ⁻¹
4.78	.4186	26.49	5.381	.7329 ⁻¹
4.80	.4183	26.71	5.418	.7214 ⁻¹
4.82	.4179	26.94	5.456	.7101 ⁻¹
4.84	.4176	27.16	5.494	.6991 ⁻¹
4.86	.4173	27.39	5.531	.6882 ⁻¹
4.88	.4170	27.62	5.569	.6775 ⁻¹
4.90	.4167	27.85	5.607	.6670 ⁻¹
4.92	.4164	28.07	5.646	.6567 ⁻¹
4.94	.4161	28.30	5.684	.6465 ⁻¹
4.96	.4158	28.54	5.723	.6366 ⁻¹
4.98	.4155	28.77	5.761	.6268 ⁻¹
5.00	.4152	29.00	5.800	.6172 ⁻¹
6.00	.4042	41.83	7.941	.2965 ⁻¹
7.00	.3974	57.00	10.469	.1535 ⁻¹
8.00	.3929	74.50	13.387	.0849 ⁻¹
9.00	.3898	94.33	16.693	.0496 ⁻¹
10.00	.3875	116.50	20.388	.0304 ⁻¹
∞	.3780	∞	∞	0

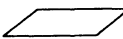



VII. ANEXOS

TABLA N° 7.1
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA FLUJOS PARA $Re < 1$

Forma	Longitud de C_D referencia
Esfera → 	D 3π
Semiesfera → 	D 8.7
Disco normal → 	D 8
Disco paralelo → 	D $\frac{16}{3}$
Barra normal → 	L $\frac{4\pi}{\ln(2L/D) + 0.5}$
Barra paralela → 	L $\frac{2\pi}{\ln(2L/D) - 0.72}$

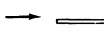


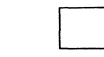

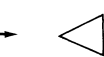



Fuente: Gerhart, 1995

TABLA N° 7.2
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA CUERPOS TRIDIMENSIONALES

Forma	Número de Reynolds	C_D
Placa plana paralela (ancho finito) → 	$> 10^5$	Usar la Fig. 8.8(b)
Placa normal → 	$> 10^3$	Véase la Fig. 8.9(c)
Cubo → 	$> 10^4$	1.10
Cubo → 	$> 10^4$	0.81


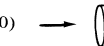




Fuente: Gerhart, 1995

TABLA N° 7.3
COEFICIENTES DE RESISTENCIA PARA CUERPOS BIDIMENSIONALES

Forma		Número de Reynolds	C_D
Placa plana paralela		$> 10^5$	Véase Fig. 8.8(b)
Placa plana normal		$> 10^3$	2.0
Cilindro circular		Todos	Véase Fig. 8.10
Barra cuadrada		$> 10^4$	2.0
Barra cuadrada		$> 10^4$	1.50
Barra de triángulo equilátero		$> 10^4$	Extremo afilado hacia delante: 1.40 Cara plana hacia delante: 2.0
Sección C		$> 10^4$	2.30
Sección C		$> 10^4$	1.20
Perfil aerodinámico		Varios	(Véase la referencia [5])

Fuente: Gerhart, 1995

TABLA N° 7.4
COEFICIENTE DE RESISTENCIA PARA OBJETOS CON SIMETRIA

Forma		Número de Reynolds	C_D
Esfera		Todos	Véase Fig. 8.10
Cilindro o disco ($L = 0$)		$> 10^4$	$L/D = 0$ 1.17 $L/D = 0.5$ 1.15 $L/D = 1$ 0.90 $L/D = 2$ 0.85 $L/D = 4$ 0.87 $L/D = 8$ 0.99
Lámina semiesférica		$> 10^4$	1.40
Lámina semiesférica		$> 10^4$	0.40
Cono de 60°		$> 10^4$	0.50
Paracaídas		$> 10^5$	1.2

Fuente: Gerhart, 1995