UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DEL TEXTO

“TEXTO: TEORÍA DE JUEGOS”

AUTOR: Rigoberto Pelagio Ramírez Olaya

ESTUDIANTE DE APOYO: Cartagena Chuyma Benjamín (1512100016)

PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de setiembre de 2017 al 31 de agosto de 2019

Resolución de aprobación Nº 876-2017-R

Callao, 2019

I. INDICE

II. PRÓLOGO 2

III. INTRODUCCIÓN 3

IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO 4

MARCO GENERAL DE LA TEORÍA DE JUEGOS 4

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA 31

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA 73

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA 102

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA 130

V. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 154

VI. APÉNDICES 156

II. PRÓLOGO

Como docente en la facultad de economía de la universidad nacional del callo, se me asignó el curso “Teoría de Juegos” para desarrollar su temática con los estudiantes del cuarto ciclo considerando que la materia no me era ajena dado que en forma básica impartía este conocimiento como parte de los temas del curso de microeconomía II en el cual he ejercido mi labor docente.

Pasar de enseñar de forma básica los conceptos, estrategias, representación y solución inicial de la teoría de juegos como parte del curso de microeconomía II, a enseñar un curso de teoría de juegos en todo un semestre académico fue un reto que a Dios gracias considero cumplí dado el reconocimiento de los estudiantes.

No obstante, preciso que fue duro introducirme en la temática del curso de la teoría de juegos dado que los textos difieren en el uso de la nomenclatura, en la forma analítica, en la redacción de los conceptos y en el proceso para encontrar un resultado y además requieren un conocimiento previo de sus fundamentos.

Este contexto motivó la elaboración del presente texto para introducir a los estudiantes en el curso de teoría de juegos de modo que no tengan la necesidad de preguntarse o de buscar las bases para desarrollar el curso que consideramos se ha conseguido con el presente texto y que, por supuesto, está abierto a ser mejorado con los alcances que realicen los lectores.

Consideramos y estamos seguros que el presente texto teoría de juegos cumple el cometido por el cual se ha elaborado y esperamos que los estudiantes lo tengan como material de consulta y planteen sus inquietudes que podríamos incorporar o replantear la temática en caso sea necesario.

Agradezco la colaboración del estudiante Benjamín Cartagena Chuyma quién con sus valiosos comentarios y propuestas hicieron posible la culminación del texto, asimismo, a la Señora Mag. Yrene Ríos Torres que como personal administrativo contribuyó en aplicar las normas APA en la realización del presente texto.

III. INTRODUCCIÓN

El "Texto: Teoría de Juegos", se ha elaborado con la finalidad de introducir a los estudiantes de la facultad de economía de la universidad nacional del Callao y, de otras facultades o universidades en los estudios del curso y de este modo facilitar la lectura analítica de los textos actuales y despierte el interés de profundizar los conocimientos en la economía aplicada en un mercado oligopólico.

El texto, se inicia con el capítulo I Marco General de la Teoría de Juegos que comprende los antecedentes, origen, evolución, importancia y aplicaciones en la empresa y culmina con una semblanza de los premios nobel de economía otorgados en los últimos años a los avances en la teoría de juegos; en el capítulo II Juegos estáticos con información completa, en el que los jugadores toman decisiones en forma simultánea, comprende las características, elementos, representación con la matriz estratégica, nomenclatura etc.; en el capítulo III Juegos dinámicos con información completa, los jugadores toman decisiones conociendo la acción que han tomado los otros jugadores, comprende los mismos temas del capítulo II pero con el enfoque del juego dinámico en la que aparecen nuevos conceptos y formas de representación; el capítulo IV Juegos estáticos con información incompleta, es una modificación de los estáticos con información completa, incorpora la información privada que algún jugador pueda tener, su solución se realiza con los valores esperados; finalmente el Capítulo V Juegos dinámicos con información incompleta, incorpora la información privada con el enfoque de juegos dinámicos en donde aparecen otros tipos de juegos como la señalización que es muy utilizado en las aplicaciones económicas.

Estamos seguros que el presente "Texto: Teoría de Juegos", contribuirá a comprender la formalización, representación y aplicación en la teoría económica de las respuestas que esperan los tomadores de decisiones en los diferentes casos que se plantean en la vida real. En tal sentido es un material académico de suma utilidad para los alumnos de la facultad de economía y para otras carreras profesionales que consideren la asignatura de Teoría de Juegos como una asignatura que contribuirá en su formación profesional.

IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO

CAPÍTULO 1

MARCO GENERAL DE LA TEORÍA DE JUEGOS

En el presente capítulo abordaremos los siguientes temas:

1.1. Antecedentes, origen, evolución. uso y aplicaciones de la teoría de juegos.

1.2. Importancia de la Teoría de Juegos

1.3. Aplicaciones en la teoría de la empresa.

1.4. Marco General de la Teoría de Juegos

1.5. Clasificación de los juegos según sus características.

1.6. Premios nobel de Economía (Teoría de Juegos)

Objetivos del Capítulo

Al terminar de leer el presente capítulo, el estudiante estará en condiciones de conocer:

- Los antecedentes, el origen, uso y aplicaciones de la teoría de juegos.
- La importancia del análisis de la teoría de juegos y algunas aplicaciones en la teoría de la empresa.
- El Margo General de la teoría de Juegos, la clasificación de los juegos según sus características.
- Los aportes de los Premios nobel de economía en la teoría de juegos

CAPÍTULO 1

MARCO GENERAL DE LA TEORÍA DE JUEGOS

1.1. Antecedentes, origen, evolución. uso y aplicaciones de la teoría de juegos.

- Antecedentes.

  - Los juegos de azar y su lógica (1704)

La primera referencia, conocida a la fecha, del estudio de los juegos y de la lógica existente en éstos aparece en una de las obras filosóficas del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716), que se titula Nouveaux Essais sur l'entendement humain “Nuevos ensayos de entendimiento humano” y, aunque fue escrita en 1704, permaneció inédita hasta 1765 cuando se publicó una recopilación de sus obras en latín y francés. En esta obra constataba la aparición de “una nueva clase de lógica, concerniente a los grados de probabilidad […] para perseguir la investigación de los juegos de azar". Según Leibniz (1704), la mente humana “se despliega más minuciosamente en los juegos que en actividades más serias" (Tenorio A. y Martín, A., 2015).

  - La estrategia mixta y la regla minimax (1713)

La siguiente aportación relevante para la Teoría de Juegos tiene lugar en 1713 con la aparición del concepto de estrategia mixta y la regla minimax, concepto que permite obtener la hoy llamada solución minimax, por la que se minimiza la posible pérdida en el peor escenario del juego o del resultado de una situación estratégica y que coincide en el juego en cuestión con el equilibrio de Nash, concepto que se establece posteriormente y que se convierte en la base de análisis de la teoría de juegos,.

Sería precisamente el matemático francés Pierre-Rémond de Montmort (1678-1719) quien las publicaría en la segunda edición de su obra Essay d'analyse sur les jeux de hasard “Ensayo de análisis sobre juegos de azar”, edición que completaba sustancialmente la anterior e incluía toda su correspondencia con el matemático suizo Nicolaus I Bernoulli (1687-1759) entre 1710 y 1713. En esa correspondencia le planteaba Montmort a Bernoulli el problema de encontrar una solución de equilibrio basado en la regla minimax de estrategia mixta para resolver una versión con dos jugadores de un juego de carta clásico denominado “Le Her".

Este problema, según reconoce el propio Montmort en sus cartas a Bernoulli, le fue comunicado por correspondencia por “Monsieur de Waldegrave", quien no solo lo planteó, sino que, en una carta a Bernoulli, incluía una resolución del problema usando una estrategia basada en lo que hoy se denomina regla minimax. Montomort, Bernoulli y Waldegrave continuaron su correspondencia sobre esta cuestión (inconclusa en la fecha de publicación de la obra de Montmort) y un segundo problema que Montmort denominó “Probléme de la Poulle" en su obra y que Todhunter renombraría como Problema de Waldegrave. (Tenorio A. y Martín, A., 2015, 77-95).

- Trabajos pioneros en economía de la empresa (1830 – 1910)

También son de destacar los trabajos formales y exploratorios que hicieron los economistas como Cournot (1838) y Edgeworth (1881) en los cuales se dieron inicio a ciertas ideas sobre las interacciones de los jugadores (empresas) en la búsqueda de obtener los mejores resultados. A estos trabajos se sumaron otros posteriores de los matemáticos Borel y Zermelo que en uno de sus trabajos (1913) muestra que los juegos como el ajedrez son resolubles. (Bravo, J., 2008)

Tradicionalmente se ha considerado que el primer teorema formal en Teoría de Juegos fue demostrado por E. Zermelo en un artículo sobre el Ajedrez publicado en alemán en 1913. (Meca, A., s.f, p.15-23)

- Bases de la Teoría de Juegos

Los trabajos anteriores de los matemáticos Zermelo (1913), Borel (1921) y del propio Von Neumann (1928), ya anticipaban parte de las bases de la Teoría de Juegos. (Pérez, J., 2004)

El enfoque moderno del análisis de las situaciones conflictivas es generalmente atribuido a John von Neumann, por sus artículos de 1928 y 1937 en los que prueba el Teorema Minimax.

No obstante, y antes de Von Neumann, Borel escribe entre los años 1921 - 1924 algunos trabajos en los que demuestra el Teorema Minimax para ciertas situaciones particulares, aunque conjetura que es falso en general. Además, formaliza el concepto de estrategia mixta (Fréchet y von Neumann publican en 1953 un comentario sobre los artículos de Borel). (Meca, A., s.f, p.15-23)

- **Origen de la Teoría de Juegos (1944)**

La Teoría de Juegos no recibió prácticamente ninguna atención hasta que Von Neumann coincidió en la Universidad de Princeton con el economista Oskar Morgenstern, y ambos publicaron en 1944 su ya famoso libro significativamente titulado "Theory of Games and Economic Behavior" ("Teoría de juegos y el bienestar económico"), en el que los autores reúnen todas sus ideas sobre cómo modelar y explicar el comportamiento económico. La publicación de esta obra causó enorme impacto entre matemáticos y economistas.

Este es el inicio de la disciplina "Teoría de Juegos", en la que se formalizan las ideas para modelar y explicar la interacción de los agentes en la economía, como bien lo señalan:

"La Teoría de Juegos comienza entonces su propio camino como una disciplina científica." (Meca, A., s.f, p.15-23)

"Suele considerarse que el nacimiento de la teoría de juegos como disciplina ocurre en 1944 con esta publicación de Von Neumann y Morgenstern." (Pérez, J., 2004)

"La teoría de juegos como tal fue creada por el matemático húngaro John

Von Neumann (1903-1957) y el economista por Oskar Morgenstern (1902-1976) en 1944 gracias a la publicación de su libro "The Theory of Games Behavior". (Bravo, J., 2008)

Con la aparición del libro de Von Neumann y Morgenstern, recién se comprende la importancia de la teoría de juegos para estudiar las relaciones humanas, al investigar dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. En la primera parte de su libro detalla el planteamiento estratégico o no cooperativo que requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. En la segunda parte de su libro, desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. (Bravo, J., 2008)

Von Neumann y Morgenstern establecen las bases de lo que actualmente se conoce como Teoría de Juegos clásica, proporcionando una solución para juegos de suma cero (aquellos en los que los jugadores se encuentran en conflicto absoluto) y estableciendo los fundamentos para el análisis de juegos con más de dos jugadores. (Pérez, J., 2004)

En este sentido, crean una teoría unificada y sistemática que incluye como casos particulares las aportaciones anteriores, y que hace factible su desarrollo posterior. (Pérez, J., 2004)

- **Avances en la teoría de juegos**

John Forbes Nash (1928- 2015) en 1950 a 1951 establece las bases generales para la teoría no cooperativa definiendo y estudiando el concepto de equilibrio no cooperativo; y también para la teoría cooperativa, a través del problema de regateo. (Meca, A., s.f, p.15-23)

En esos años de los cincuenta, Nash aporta algunos de los conceptos más importantes (equilibrio de Nash y solución de negociación de Nash) para una gama más amplia de juegos (no sólo para aquellos que modelizan el conflicto puro). (Pérez, J., 2004)

John Forbes Nash, es el nombre más destacado relacionado con la teoría de juegos. A los 21 años escribió una tesina de menos de treinta páginas en la que expuso por primera vez su solución para juegos estratégicos no cooperativos, lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash", que tuvo un inmediato reconocimiento entre todos los especialistas. (Bravo, J., 2008)

Para la solución formal del problema, Nash utilizó funciones de mejor respuesta y el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani. (Bravo, J., 2008)

En los años siguientes, Nash publicó nuevos escritos con originales soluciones para algunos problemas matemáticos y de la teoría de juegos, destacando la "solución de regateo de Nash" para juegos bipersonales cooperativos. Propuso también lo que se ha dado en llamar "el programa de Nash" para la reducción de todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo. (Bravo, J., 2008)

En los años 50 hubo un desarrollo importante de estas ideas en Princeton, en la que Nash (1950) definió el equilibrio que lleva su nombre, lo que permitió extender la teoría de juegos no cooperativos más generales que los de suma cero. Durante esa época, el Departamento de Defensa de los EE.UU. fue el que financió las investigaciones en el tema, debido a que la mayor parte de las aplicaciones de los juegos de tipo suma-cero se concentraban en temas de estrategia militar, luego Albert Kuhn (1953) que permitió establecer una forma de solucionar los juegos cooperativos y, posteriormente Luce and Raiffa (1957), difundiendo los resultados en su libro introductoria. (Bravo, J., 2008)

También, Lloyd Shapley (1953) define un valor para juegos cooperativos y coinventa el Core con D.B. Gillies (1953). (Meca, A., s.f, p.15-23)

Entre tanto Albert Tucker (1955) formaliza el dilema del prisionero, un ejemplo de juego bipersonal de suma no nula introducido en Flood (1952) y extensamente estudiado en Teoría de Juegos. (Meca, A., s.f, p.15-23)

En esa década se celebran, en Princeton, tres conferencias en Teoría de Juegos con la participación activa de von Neumann y Morgenstern. Posteriormente, dicha universidad publicó los cuatro volúmenes clásicos de Contributions to the Theory of Games. La Rand Corporation (RAND) acaba de abrir sus puertas en Santa Mónica y durante muchos años será un centro principal de investigación en Teoría de Juegos. Prueba de ello son las publicaciones de los libros Games and Decisions (R. Luce and H. Raiffa, 1957) y The Strategic of Conflict (T.C. Schelling, 1960). (Meca, A., s.f, p.15-23)

A mediados de los 60 se asistió a un cierto estancamiento de la Teoría de Juegos: las enormes expectativas que despertó en un principio se revelaron excesivas, puesto que muchos habían visto en ella un instrumento capaz de revolucionar en pocos años las Ciencias Sociales. A pesar de que esta mitad de década no fue gloriosa para la Teoría de Juegos, cabe destacar su expansión geográfica, atravesando las fronteras de Princeton y la RAND; se establecen importantes centros de investigación en Israel, Alemania, Bélgica y la antigua Unión Soviética. (Meca, A., s.f, p.15-23).

En los años setenta investigadores como Selten (en los juegos dinámicos) y Harsanyi (en los juegos con información incompleta) desarrollan los conceptos que permitirán la aplicación fructífera de la teoría de juegos a la economía y otras disciplinas. (Pérez, J., 2004), …la teoría de juegos de información incompleta, [son] aquellos en que los jugadores no conocen todas las características del juego: por ejemplo, no saben lo que obtienen los otros jugadores como recompensa. (Bravo, J., 2008).

Pasado el entusiasmo inicial, cuando las cosas se pusieron en su lugar, se comprobó que la Teoría de Juegos es una teoría matemática de gran utilidad para el estudio riguroso de las Ciencias Sociales. Entonces comenzó su verdadero auge (coincidiendo en el tiempo con la aparición de la revista International Journal of Game Theory, fundada por Oskar Morgenstern que comprende desde los años 70 hasta la actualidad. (Meca, A., s.f, p.15-23).

Ante la multiplicidad de equilibrios de Nash, muchos de los cuales no eran soluciones razonables a juegos, Selten (1975) definió el concepto de equilibrio perfecto en el subjuego para juegos de información completa y una generalización para el caso de juegos de información imperfecta. (Bravo, J., 2008).

El renacimiento de la teoría fue decisivamente impulsado por el desarrollo de los modelos no cooperativos. (Meca, A., s.f, p.15-23)

Avances como los refinamientos del equilibrio de Nash, que se originan en Selten (1975), o los juegos con información incompleta, desarrollados en Harsanyi (1967, 1968), abren un inmenso panorama de aplicación en el Análisis Económico y son la base a partir de la cual se desarrolla la llamada economía de la información. (Meca, A., s.f, p.15-23).

En enero de 1999 se funda la Sociedad Internacional de Teoría de Juegos (Game Theory Society), presidida por Robert J. Aumann, con el fin de promover la investigación y aplicación de la Teoría de Juegos. (Meca, A., s.f, p.15-23).

El avance de la teoría de juegos en los años posteriores los podemos observar en el numeral 6 del presente capítulo, de los premios nobel de economía (Teoría de juegos)

1.2. Importancia de la Teoría de Juegos

El reconocimiento público de la gran importancia que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo del Análisis Económico moderno se produjo en 1994, cuando se concedió el premio Nobel de Economía a tres especialistas en Teoría de Juegos: John Harsanyi, John Nash y Reinhard Selten. Y como ya hemos anunciado, se ha confirmado en 2005 con la concesión del premio Nobel de Economía los profesores R.J. Aumann y T.C. Schelling. (Meca, A., s.f, p.15-23).

En años recientes, la teoría de juegos ha recibido un gran respaldo académico, al recibir el Premio Nobel de Economía algunos de sus pioneros y practicantes (en 1994 Nash, Selten y Harsanyi, y en 1996 Vickrey y Mirlees). (Pérez, J., 2004).

La última aportación importante a la teoría de juegos es de Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling, por la que han obtenido el premio Nóbel de economía en el año 2005. (Bravo, J., 2008).

En The Strategy of Conflict, Schelling, aplica la teoría del juego a las ciencias sociales. Sus estudios explican de qué forma un partido puede sacar provecho del empeoramiento de sus propias opciones de decisión y cómo la capacidad de represalia puede ser más útil que la habilidad para resistir un ataque. (Bravo, J., 2008).

Aumann fue pionero en realizar un amplio análisis formal de los juegos con sucesos repetidos. La teoría de los juegos repetidos es útil para entender los requisitos para una cooperación eficiente y explica por qué es más difícil la cooperación cuando hay muchos participantes y cuándo hay más probabilidad de que se rompa la interacción. La profundización en estos asuntos ayuda a explicar algunos conflictos, como la guerra de precios y las guerras comerciales. (Bravo, J., 2008).

1.3. Aplicaciones en la Teoría de la Empresa

Las primeras aplicaciones que se conocen y aun cuando todavía no había nacido la teoría de juegos, son:

El duopolio de Cournot y el de Bertrand como juegos estáticos de información completa, en la que los agentes toman decisiones racionales teniendo en cuenta la reacción que puede tener el otro agente.

El liderazgo de Stackelberg, como juego dinámico en la que analiza los pagos de una empresa cuando toma la decisión de adelantar la producción del otro jugador y teniendo en cuenta la reacción de este respecto a su producción y las condiciones de mercado.

Como se aprecia y dados los componentes del juego, los modelos de competencia imperfecta caen en el ámbito de análisis de la teoría de juegos.

1.4. Marco General de la Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos, involucra dos (2) conceptos claramente diferenciados el concepto de Teoría y el concepto de Juegos, los que podemos definir:

Teoría. Es un conjunto de hipótesis probadas que se aceptan como una explicación válida de un determinado fenómeno. Bajo esta perspectiva, la teoría busca interpretar, explicar y predecir los fenómenos de estudio.

Juegos. Es cualquier situación en la que dos o más jugadores, cumpliendo reglas, toman decisiones estratégicas en la búsqueda de obtener el mejor resultado. En el caso, las características de un juego es que los jugadores son racionales, tienen reglas establecidas, hacen uso de estrategias y toman decisiones.

El marco general en que se desenvuelven los juegos y el análisis que de ellos se hacen para su mejor comprensión, explicación y predicción, es el siguiente:

- **Juegos estáticos con información completa:**
  Son juegos en donde la función de ganancias de cada jugador (que

determina la ganancia de cada jugador a partir de acciones elegidas por los jugadores) es conocida por todos los jugadores. (Gibbons R, 1992)

- **Juegos estáticos con información incompleta:**
  Son juegos en los cuales al menos uno de los jugadores no tiene información completa sobre la función objetivo de al menos uno de sus contrincantes. En muchos ejemplos cada jugador conoce la forma de la función de utilidad de sus contrincantes, pero desconoce algún parámetro de esta función de utilidad. Ese parámetro define por completo al individuo y es conocido como el "tipo". El tipo de un individuo es conocido sólo por él, significando el comportamiento en determinadas circunstancias. (Eslava, M., s.f, p. 35-39).

- **Juegos dinámicos con información completa:**
  Son juegos que tienen dos características centrales: 1. Al menos un jugador observa cómo actúa el otro jugador antes de tomar su propia decisión por lo que las movidas son secuenciales (al menos algunas) y, 2. cada jugador conoce la función objetivo de cada uno de sus contrincantes. (Eslava, M., s.f, p. 35-39).

- **Juegos dinámicos con información incompleta:**
  En este caso el jugador desconoce con certeza el "tipo" del otro jugador.

- **Juegos Cooperativos**
  Son juegos en los que los jugadores se unen para obtener máxima ganancia que no se produciría si hubiera competencia entre ellos.

1.5. Clasificación de los Juegos según sus características:

Para analizar los juegos desde bajo los grandes conceptos señalados anteriormente y en los que se identifican los componentes, la racionalidad, el tipo de información, nos permitimos clasificarlos según sus características como sigue:

- **Según el acceso a la información:**
  - Juegos con Información Completa:

    Son juegos en donde la información es de dominio de cada jugador que conoce las recompensas y estrategias disponibles para si mismo y para los demás jugadores y, todos saben que todos saben sobre la información.

  - Juegos con Información Incompleta:

    Son aquellos juegos en los cuales los jugadores tienen información privada sobre sus preferencias u otros parámetros relevantes del juego.

- **Según el tipo de Información**
  - Juegos con Información perfecta

    Un juego es de información perfecta si cada conjunto de información de cualquiera de sus jugadores es unitario.

    Los jugadores conocen las jugadas de los demás rivales.

  - Juegos con Información imperfecta

    Un juego es de información imperfecta si existe un jugador con un conjunto de información no unitario.
    Al menos un jugador no conoce al menos una jugada de al menos un jugador.

- **Según la cooperación:**
  - Juegos Cooperativos:

    Son juegos en los cuales los jugadores colaboran mutuamente para lograr un mismo objetivo (máximo pago), el cual no se podría alcanzar si los jugadores no cooperan.

    Se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno).

(Pérez, J., 2004).

- Juegos No Cooperativos:

  Son juegos en los que se analizan las decisiones de un jugador en ausencia de un acuerdo previo). (Pérez, J., 2004).

- **Según los pagos:**
  - Juegos de Suma Cero:

    Son juegos en que los intereses de los jugadores son contrapuestos, es decir lo que gana un jugador es igual a lo que pierde el otro jugador. Los jugadores se encuentran en conflicto absoluto. (Lopez, B., s.f)

  - Juegos de Suma Variable:

    Son juegos en que los intereses de los jugadores no se hallan totalmente contrapuestos y las ganancias son variables. (Lopez, B., s.f)

  - Juegos de Suma Constante

    Son juegos en que los intereses de los jugadores no se hallan totalmente contrapuestos y las ganancias no se modifican.

- **Según la interacción estratégica:**
  - Juegos Simultáneos (Estáticos):

    Son juegos en los que los jugadores actúan simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de los otros jugadores. (Lopez, B., s.f)

  - Juegos Secuenciales (Dinámicos):

    Son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas. (Lopez, B., s.f)

- **Según la temporalidad**

  El concepto de juegos finitos e infinitos fue originalmente publicado por James Carse en su libro *"Finite and Infinte Games: A vision for life, play and possibility"*.

- Juegos Finitos

  Son juegos que se caracterizan porque se dan por un periodo determinado, se les suele llamar juegos de un solo turno, es decir, tienen fin y por tanto sus reglas están establecidas, el tiempo definido y existe un resultado.

  Ejemplos de estos juegos son los juegos de deporte como el béisbol, el futbol, las olimpíadas, etc. Todos estos juegos tienen una serie de reglas, tienen un tiempo limitado, son regulados por un ente oficial y al final del tiempo, tenemos un ganador y tenemos un perdedor.

- Juegos infinitos

  Su característica principal es que son juegos que no tienen término y por tanto no tienen ganadores ni perdedores y se juega con el propósito de continuar jugando.

  Las características de estos juegos son:

  - Se permite el cambio, la opción, la elección
  - La duración, la dirección y el resultado permanecen inciertos
  - Validación/satisfacción proviene de adentro del jugador (intrínsica)
  - La meta ES el juego mismo y el acto de jugar.
  - Crea jugadores infinitos, colaboradores, compañeros de juego.
  - Permite espacio para la improvisación, la flexibilidad, y la creatividad espontánea.
  - Fomenta relaciones y experiencias genuinas y relevantes.

- Los niños, las personas, juegan juegos infinitos naturalmente (si se les permite).
- Siempre es evidente el elemento de la elección

Ejemplo de un juego infinito en la vida sería el **ser** un amigo para alguien. Mientras vamos teniendo la experiencia de una amistad hacemos planes el uno con el otro, tenemos desacuerdos, los resolvemos juntos, y ajustamos nuestras interacciones en el camino para ayudar que la amistad continúe. En este "juego" no hay un fin determinado; la amistad en sí y el mantenerla es el objetivo. http://alex.agilelearningcenters.org/2015/07/20/juegos-finitos-vs-juegos-infinitos/

- Juegos repetidos

También denominados super-juegos, son los que se juegan una y otra vez por un tiempo determinado por lo que se representan generalmente en la forma extensiva.

Forman parte de los juegos dinámicos con información completa y se desconocen las jugadas de sus rivales.

- **Según la simetría de estrategias**
  - Juegos Simétricos:

Es un juego en el que las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue., También, Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico. (Lopez, B., s.f)

  - Juegos Asimétricos:

Son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores. (Lopez, B., s.f).

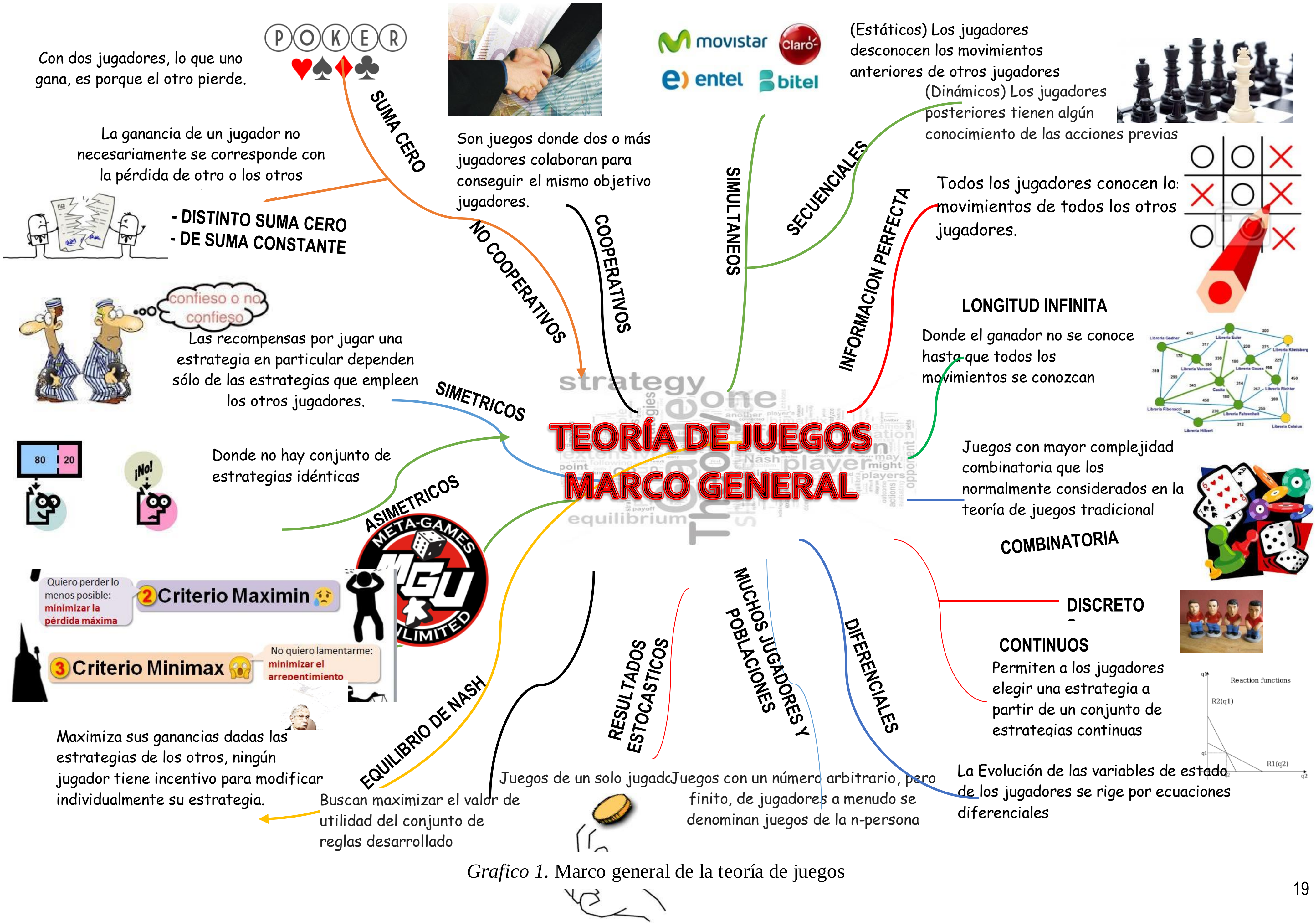


Grafico 1. Marco general de la teoría de juegos

1.6.Premios Nobel de Economía

Los premios nobel en economía se instauran a partir de "…1968, el Sveriges Riksbank (Banco Central de Suecia), decide financiar el premio de Ciencias Económicas con motivo del tercer centenario del banco y que, desde entonces, gestiona la Real Academia Sueca de las Ciencias. De hecho, oficialmente se denomina "Premio Banco de Suecia en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel". Esta controversia es animada, más aún, por las críticas de aquéllos que no consideran a la Economía como una ciencia o, al menos, no como una ciencia experimental." (Jiménez, F., 2012)

El premio en economía se entrega desde 1969. Los nombres de los galardonados y sus aportes, desde ese entonces son:

Tabla 1

Premios nobel en economía y sus aportes en el avance de la ciencia económica y la teoría de juegos.

Año	**Laureado,**	**Origen y, Aporte**
1969	Ragnar Frisch (1895 - 1973)	Oslo, Noruega
	Jan Tinbergen (1903 - 1994)	La Haya, Holanda
	«Por desarrollar y aplicar los modelos dinámicos para el análisis de los procesos económicos»	
1970	Paul A. Samuelson (1915-2009)	Gary, Indiana, Estados Unidos
	«Por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado una teoría para la economía, Estática y Dinámica, contribuyendo a elevar el nivel de análisis en la ciencia económica»	
1971	Simon Kuznets (1901 - 1985)	Pinsk, Imperio Ruso (Actual Bielorrusia)
	«Por su interpretación empíricamente fundada del crecimiento económico, que ha llevado a un nuevo y más profundo acercamiento a la estructura económica y social y a los procesos de desarrollo»	

1972	John R. Hicks (1904 - 1989)	Warwick, Inglaterra
	Kenneth J. Arrow (1921-2017)	Nueva York, Estados Unidos
	«Por sus contribuciones a la teoría del equilibrio económico y del bienestar»	
1973	Wassily Leontief	Múnich, Imperio Alemán (Hoy Alemania)
	«Por el desarrollo del método Modelo Input-Output, y por su aplicación a importantes problemas económicos»	
1974	Gunnar Myrdal	Gagnef, Suecia
	Friedrich August von Hayek (1899 - 1992)	Vienna, Imperio Astrohúngaro (Hoy Austria)
	«Por sus trabajos en la Teoría cuantitativa del dinero y de las fluctuaciones y por su análisis de la independencia de los fenómenos económicos, sociales e institucionales»	
1975	Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912 - 1986)	San Petersburgo, Imperio Ruso
	Tjalling C. Koopmans (1910 - 1985)	Graveland, Holanda
	«Por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos»	
1976	Milton Friedman (1912-2006)	Brooklyn, Nueva York, Estados Unidos
	«Por sus triunfos en el campo del análisis del consumo, la historia y teoría monetaria, y por su demostración acerca de la complejidad de la estabilización política»	
1977	Bertil Ohlin (1899 - 1979)	Kristiandstad, Suecia.
	James E. Meade (1907 - 1995)	Dorset, Inglaterra
	«Por su contribución conjunta a la teoría del comercio internacional»	
1978	Herbert Alexander Simon (1916 - 2001)	Milwaukee, Wisconsin, EE.UU.
	«Por su investigación pionera en el proceso de adopción de decisiones en las organizaciones económicas»	

1979	Theodore W. Schultz (1902 - 1998)	Arlington, Dakota del Sur, Estados Unidos
	Sir Arthur Lewis (1915 - 1991)	Castries, Santa Lucía
	«Por sus investigaciones en el desarrollo económico, particularmente las referidas a los problemas de desarrollo de los distintos países»	
1980	Lawrence R. Klein (1920-2013)	Canton, Dakota del Sur, Estados Unidos
	«Por la creación de modelos econométricos y la aplicación del análisis de las fluctuaciones y políticas económicas»	
1981	James Tobin (1918 - 2002)	Champaing, Illinois, Estados Unidos
	«Por sus análisis de los mercados financieros y sus relaciones con el empleo, producción y precios»	
1982	George J. Stigler (1911 - 1991)	Renton, Washington, EE.UU.
	«Por sus estudios de las estructuras industriales que funcionan como mercados y las causas y efectos de la regulación pública»	
1983	Gerard Debreu (1921)	Calais, Francia
	«Por incorporar nuevos métodos analíticos a la teoría económica y por su rigurosa reformulación de la teoría del equilibrio general»	
1984	Richard Stone (1913 - 1991)	Londres, Reino Unido
	«Por sus contribuciones fundamentales al desarrollo de las cuentas nacionales, desde el cual se han podido mejorar en gran medida las bases para el análisis económico empírico»	
1985	Franco Modigliani (1918-2003)	Roma, Italia
	«Por sus análisis de los mercados de ahorro y de los mercados financieros»	
1986	James M. Buchanan Jr (1919)	Mecersburg, Pensilvania, Estados Unidos
	Por su «Desarrollo de las bases contractuales y constitucionales para la teoría del proceso de las decisiones económicas y políticas»	

1987	Robert M. Solow (1924)	Nueva York, Estados Unidos
	«Por sus contribuciones a la teoría del crecimiento económico»	
1988	Maurice Allais (1911)	Paris, Francia
	«Por sus contribuciones a la teoría de los mercados y la eficiente utilización de los recursos»	
1989	Trygve Haavelmo (1911 - 1999)	Akershus, Noruega
	«Por clarificar los fundamentos de la teoría econométrica y por sus análisis de las estructuras simultáneas económicas»	
1990	Harry M. Markowitz (1927)	Chicago, Estados Unidos
	Merton H. Miller (1923 - 2000)	Boston, Estados Unidos
	William F. Sharpe (1934)	Boston, Estados Unidoss
	«Por sus trabajos pioneros para establecer la teoría de la economía financiera»	
1991	Ronald H. Coase (1910-2013)	Londres, Reino Unido
	«Por su descubrimiento acerca del significado de los Costos de transacción y los derechos de propiedad para la estructura institucional y funcionamiento de la economía»	
1992	Gary S. Becker (1930-2014)	Pottsville, Estados Unidos
	«Por extender el dominio del análisis microeconómico hacia nuevos dominios del comportamiento y de las relaciones humanas, incluso más allá de los límites del mercado»	
1993	Robert W. Fogel (1926-2013)	Nueva York, Estados Unidos
	Douglass C. North (1920-2015)	Cambridge, Estados Unidos
	«Por renovar la investigación de la historia económica, aplicando teorías y métodos para explicar los cambios tanto económicos como institucionales»	
1994	John Forbes Nash (1928-2015)	Bluefield, Virginia Occidental
	Reinhard Selten (1930-2016)	Breslau, Polonia (Actual Wrocław)
	John C. Harsanyi (1920 - 2000)	Budapest, Hungría
	«Por sus análisis del Equilibrio de Nash en la teoría de juegos» y, *"un análisis pionero del equilibrio en la teoría de juegos no*	

	cooperativos".	
1995	Robert E. Lucas Jr (1937)	Yakima, Washington, Estados Unidos
	«Por desarrollar la hipótesis de las expectativas racionales, que transformó el análisis de la macroeconomía y permitió profundizar en el conocimiento de la política económica».	
1996	James A. Mirrlees (1936)	Minnigaff, Escocia
	William Vickrey (1914 - 1996)	Victoria, Columbia Británica, Canadá
	«Por sus contribuciones a la teoría económica de los incentivos bajo la información asimétrica»	
1997	Robert C. Merton (1944)	Nueva York, Estados Unidos
	Myron S. Scholes (1941)	Timmins, Ontario, Canadá
	«Por su nuevo método para determinar el valor de los instrumentos derivados»	
1998	Amartya Sen (1933)	Manikganj, Raj Británico (Hoy Bangladésh)
	«Por sus contribuciones al análisis del bienestar económico»	
1999	Robert A. Mundell (1932)	Kingston, Canadá
	«Por su análisis de la política fiscal y la política monetaria bajo diferentes regímenes de tipo de cambio y de las zonas monetarias óptimas»	
2000	James J. Heckman (1944)	Chicago, Estados Unidos
	«Por diseñar métodos para comprender los comportamientos económicos de las economías familiares y los individuos»	
	Daniel L. McFadden (1937)	Raleigh, Carolina del Norte, Estados Unidos
2001	Joseph E. Stiglitz (1943)	Gary, Indiana, Estados Unidos
	George Akerlof (1940)	New Haven, Connecticut, EE.UU.
	A. Michael Spence (1940)	Montclair, Nueva Jersey, EE.UU.
	«Por su investigación en teoría de los mercados con información asimétrica»	
2002	Daniel Kahneman (1934)	Tel Aviv, Israel

	Vernon Smith (1927)	Wichita, Kansas, EE.UU.
	«Por integrar aspectos de la teoría psicológica sobre el comportamiento económico del ser humano en momentos de incertidumbre y realizar análisis empíricos de laboratorio, especialmente sobre mecanismos alternativos de mercado»	
2003	Robert F. Engle (1942)	Siracusa, Estados Unidos
	Clive W. J. Granger (1934)	Swansea, Reino Unido
	«*Por sus métodos estadísticos en series temporales económicas que permiten incorporar elementos no previsibles*»	
2004	Finn E. Kydland (1943)	Ålgård, Noruega
	Edward C. Prescott (1940)	Glens Falls, Neueva York, EE.UU.
	«Por sus contribuciones a la teoría de la macroeconomía dinámica»	
2005	Robert J. Aumann (1930)	Frankfurt am Main, Alemania
	Thomas C. Schelling (1921-2016)	Oakland, Estados Unidos
	«Por ampliar la comprensión del conflicto y la cooperación a través de análisis basados en la teoría de juegos»	
2006	Edmund S. Phelps (1933)	Evanston, Illinois, EE.UU.
	«Por sus investigaciones sobre la interacción entre los precios, el desempleo y las expectativas de inflación»	
2007	Leonid Hurwicz (1917-2008)	Moscú, Rusia
	Eric Maskin (1959)	Nueva York, Estados Unidos
	Roger B. Myerson (1951)	Boston, Estados Unidos
	«Por establecer las bases de la teoría del diseño de los mecanismos, que determina cuándo los mercados están trabajando de manera efectiva»	
2008	Paul Krugman (1953)	Long Island, Nueva York, Estados Unidos
	Por su «Análisis de patrones comerciales y la localización de actividad económica»	
2009	Elinor Ostrom (1933-2012)	Los Ángeles, California, Estados

Unidos, (Primera mujer que gana el nobel de economía, por sus teorías sobre la gestión de la propiedad pública, cuyo trabajo ha desafiado la creencia convencional de que la propiedad común es gestionada de manera pobre y debería ser regulada por las autoridades centrales o privatizada.

Oliver E. Williamson (1932) Wisconsin, Estados Unidos

Por sus «Teorías sobre el papel de las empresas en la resolución de conflictos» y por el «Análisis del papel de las empresas como estructuras de gobierno alternativas y sus límites»

2010 Peter A. Diamond (1940) Nueva York, Estados Unidos

Dale T. Mortensen (1939-2014) Enterprise, Oregón, Estados Unidos

Christopher A. Pissarides (1948) Nicosia, Chipre

Por las «Teorías sobre el desempleo y el mercado de trabajo» en la que enfatiza que compradores y vendedores tienen dificultades para encontrarse el uno al otro**.**

2011 Thomas J. Sargent (1943) Pasadena, California, Estados Unidos

Christopher A. Sims (1942) Washington, Estados Unidos

Por sus investigaciones de los efectos de las medidas políticas -como gasto público o tipos de interés- sobre la economía. Las investigaciones plantean los métodos para estudiar "qué causa qué", unas «herramientas que se han convertido en dominantes en los estudios macroeconómicos prácticos"

2012 Alvin E. Roth (1951) U. Stanford, Nueva York, EE.UU.

Lloyd Shapley UCLA Cambridge, Massachusetts, EE.UU.

Por sus aportes a la teoría de la asignación de recursos en mercados bilaterales y mejoras al funcionamiento de mercados centralizados.

«teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado»

2013 Eugene Fama (1939) Boston, Massachusetts, EE.UU.

Lars Peter Hansen (1952) Urbana, Illinois, EE.UU.

Robert J. Shiller (1946) Detroit, Michigan, EE.UU.

	Por su trabajo en *«El análisis empírico del precio de los activos»*	
2014	Jean Tirole (1953)	U Toulouse, Troyes, Francia
	Por sus análisis sobre *«El poder y las regulaciones del mercado»* que analiza aspectos del funcionamiento de los mercados y los límites que tienen las empresas y las transacciones para operar.	
2015	Angus Deaton (1945)	Edinburgo, Escocia
	Por el análisis sobre *«Los sistemas de demanda, el consumo, la pobreza y el bienestar»*	
2016	Oliver Hart (1948)	Londres, Inglaterra
	Bengt R. Holmström (1949)	Helsinki, Finlandia
	Por sus contribuciones a *«La teoría de los contratos.»* que analiza cómo se elabora la contratación y sus diversos efectos, sobre todo en el mundo de la empresa.	
2017**:**	Richard H. Thaler	EE.UU 72 años
	Por su contribución a la *«Economía del comportamiento»*, esto es, básicamente por el estudio de las consecuencias de los mecanismos psicológicos y sociales en la economía.	

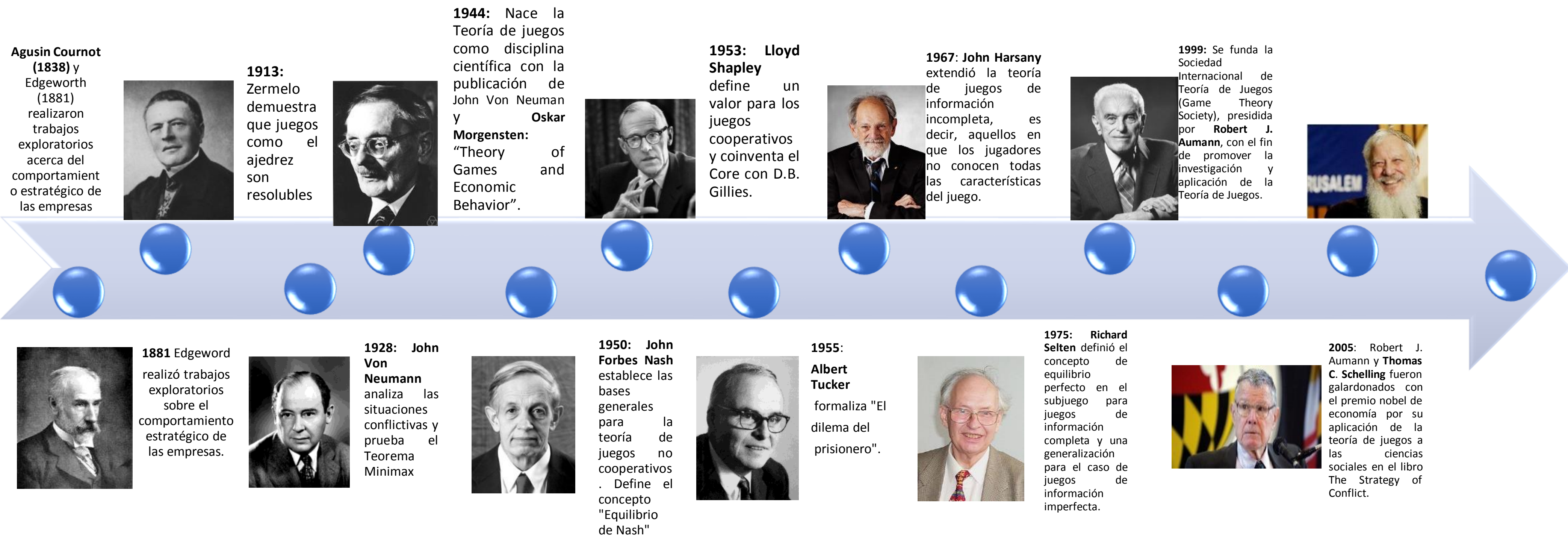


Grafico 2. Línea de tiempo en los antecedentes, el origen y evolución de la teoría de juegos

Resumen del capítulo I.

1. Antecedentes

   La primera referencia conocida, del estudio de los juegos y de la lógica existente en éstos aparece en la obra "Nuevos ensayos de entendimiento humano" (1704) del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716) en la que analiza los juegos de azar con los grados de probabilidad, luego aparece el concepto estrategia mixta y la regla minimax en 1713 planteado por Monsieur de Waldegrave, posteriormente aparecieron los trabajos pioneros que hicieron los economistas Cournot (1838) y Edgeworth (1881) que dieron inicio a ciertas ideas sobre las interacciones de los jugadores (empresas) en la búsqueda de obtener los mejores resultados a los que se sumaron los trabajos de Borel y Zermelo, éste último se ha considerado que demostró el primer teorema formal de la teoría de juegos

2. Origen y evolución de la teoría de juegos (1944)

   Se produjo en 1944 con la publicación del libro "Teoría de juegos y el bienestar económico" del matemático húngaro John Von Neumann y el economista por Oskar Morgenstern, que establecen las bases de la Teoría de Juegos con los fundamentos para el análisis de los juegos.

   Luego se consolida su evolución en 1950 con uno de los conceptos más importantes de la teoría de juegos que es el Equilibrio de Nash denominado así por su creador John Forbes Nash, luego Albert Kuhn (1953) que permitió establecer una forma de solucionar los juegos cooperativos y, posteriormente Luce and Raiffa (1957), difundiendo los resultados en su libro introductoria. (Bravo, J., 2008), entre otros.

   En los años setenta investigadores como Selten (en los juegos dinámicos) y Harsanyi (en los juegos con información incompleta) desarrollan los conceptos que permitirán la aplicación fructífera de la teoría de juegos a la economía y otras disciplinas. (Pérez, J., 2004)

El avance de la teoría de juegos en los años posteriores los podemos observar con los trabajos realizados por matemáticos y economistas que se hicieron merecedores de premios nobel de economía

3. Aplicaciones en la teoría de la empresa

   Las primeras aplicaciones que se conocen y aun cuando todavía no había nacido la teoría de juegos, son el duopolio de Cournot y el de Bertrand como juegos estáticos de información completa, luego el liderazgo de Stackelberg, como juego dinámico, una ve establecida la teoría de juegos se han analizado distintas aplicaciones en función del tipo de juego.

4. Marco General de la Teoría de Juegos.

   Se identifican y definen los distintos tipos de juego como son los competitivos que pueden ser estáticos o dinámicos con información completa o incompleta y, los juegos cooperativos.

   Para una mejor comprensión se clasifican los juegos según sus características: según el acceso a la información, juegos con información completa o incompleta; según el tipo de información están los juegos con información perfecta e imperfecta; según la cooperación, los juegos cooperativos, juegos no cooperativos; según los pagos, juegos de suma cero, de suma variable, de suma constante;

   También se clasifican según la interacción estratégica, juegos simultáneos, juegos secuenciales; según la interacción estratégica, juegos simultáneos o secuenciales; según la temporalidad, juegos finitos, infinitos o repetidos; según la simetría de estrategias, juegos simétricos o asimétricos

5. Premios nobel de Economía

   Identifica los estudios realizados por matemáticos y economistas que se hicieron merecedores al premio nobel de economía en el que se reseña una semblanza del galardonado y su trabajo de investigación desde la instauración del premio nobel hasta el año 2017.

CAPÍTULO 2

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

Índice temático

En el presente capítulo abordaremos los siguientes temas:

2.1 Definición y características de juegos estáticos con información completa.

2.2 Elementos, Representación y Nomenclatura del juego estático con información completa.

2.3 Métodos de solución del juego.

2.4 Los equilibrios del juego.

2.5 Las estrategias mixtas

2.6 Juegos básicos y ejemplos.

Resumen

Objetivos del Capítulo

Al terminar de leer el presente capítulo, el estudiante estará en condiciones de:

- Interpretar el juego estático con información completa.
- Analizar sus componentes y sus interrelaciones,
- Obtener la solución del juego estático.
- Reflejar algunas aplicaciones de la vida real de nuestro país.

CAPÍTULO 2

EL JUEGO ESTÁTICO CON INFORMACIÓN COMPLETA

2.1 Definición y características de juegos estáticos con información completa.

Para una definición que se acerque a lo que se quiere conocer, desglosamos el tema en sus partes componentes e interpretamos cada parte de modo que finalmente lo integremos para comprender el significado que buscamos, así tenemos:

2.1.1 ¿Qué es un juego?

Si observamos en la vida diaria, las personas interactúan entre ellas en la búsqueda de un resultado que le proporcione satisfacciones (obtener beneficios ya sea compitiendo entre individuos o entre grupos de individuos o colaborando con el contendor) o en la búsqueda de la solución de un(os) problema(as) cuyas consecuencias pueden concernir a una o a más personas.

En estas consideraciones tenemos algunos juegos de la vida diaria que ayudan a las personas a mantenerse en buen estado de salud que constituye, por tanto, un estilo de vida cuyo mantenimiento y mejor resultado también es un juego.

También podemos considerar como juegos las interacciones sociales, económicas, entre otras, que afectan en distinta manera a las personas. Veamos algunos de ellos:

- **Juegos competitivos**

Figura 1. Juegos deportivos

JUEGOS SOCIALES
Partidos Políticos

Figura 2. Juegos sociales

JUEGOS ECONÓMICOS

Jugadores: Empresas

Figura 3. Juegos económicos

Algunos autores definen el juego como:

“Una situación en la que compiten dos o más jugadores” (Ferguson y Gould, 1975).

“Cualquier problema de toma de decisiones, donde el rendimiento (que obtiene una persona) *depende* no sólo de sus propias decisiones sino también de las decisiones de las otras personas que participan en el juego” (Maddala y Miller, 1996).

“Un juego es cualquier situación en la que los individuos deben tomar decisiones estratégicas y en la que el resultado final depende de lo que cada uno decida hacer” (Nicholson, 2008).

Podemos definir el juego, como:

“Es cualquier situación de toma de decisiones, caracterizada por una interdependencia estratégica (S), en la que los jugadores, teniendo que cumplir reglas, buscan obtener el mejor resultado. Intentan ganar, pero pueden perder.”

2.1.2 ¿Qué son juegos estáticos?

El término estático está referido a la permanencia de algo en un mismo estado y no experimenta cambios.

En el caso de un juego, éste siempre va ha tener los mismos resultados si los jugadores toman las mismas acciones que también están definidas.

En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente, en el mismo momento y, sin conocer las decisiones que han tomado los otros jugadores o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores.

2.1.3 ¿Qué es información completa?

Se dice que la Información es completa si el conocimiento de la estructura del juego es de dominio de todos los jugadores y en donde cada jugador conoce las recompensas o ganancias y, las estrategias disponibles que tienen todos los jugadores, incluido él mismo.

Por ejemplo. Supóngase un juego en el que participan 2 jugadores.

La primera hipótesis de que ambos jugadores conocen el pago que correspondería al otro jugador no permite el mismo análisis del juego, ni la misma predicción sobre su desarrollo esperable, que la segunda hipótesis de que ambos jugadores conocen dicho pago y ***además saben que el otro lo conoce***.

En efecto, la segunda hipótesis permite predecir que el jugador 1 jugará (basándonos en que dicho jugador razonaría que el jugador 2, si tuviera que optar entre las acciones disponibles optaría por aquella, que sabe que le va a producir un pago mayor que cualquier otra, mientras que la primera hipótesis no permite tal predicción. Puesto que esta distinción entre saber algo y saber que todos lo saben puede extenderse a sucesivos niveles de conocimiento mutuo, como, saber que todos saben que todos lo saben. (Pérez, J., 2004)

Si se define una situación del juego en el que se contenga todos los niveles del conocimiento, de modo que no permita nuevas ampliaciones, se puede establecer si:

- Todos los jugadores J saben o conocen toda la información I del juego.
- Todos los jugadores J saben que todos ellos saben I.
- Todos los jugadores J saben que todos ellos saben que todos ellos saben I y, así sucesivamente.

2.1.4 Definición de Juegos estáticos con información completa.

Integrando los componentes analizados anteriormente y, comparando con la interpretación y definición que establecen algunos autores:

"En este capítulo consideramos juegos simples *(estáticos con información completa)* de la siguiente forma: primero los jugadores toman decisiones simultáneamente; a continuación, reciben sus ganancias, que dependen de la combinación de acciones que acaban de elegir. Dentro de la clase de estos juegos estáticos (o de información simultánea), restringimos nuestra atención a los juegos con información completa. Es decir, la función de ganancias de cada jugador (la función que determina la ganancia de cada jugador a partir de la combinación de acciones elegidas por los jugadores) es conocida por los jugadores". (Gibbons, R., 1992)

"En este caso, los jugadores toman sus decisiones simultáneamente (o dicho con más precisión, sin conocer las decisiones de los otros) y de una sola vez, y a continuación reciben las ganancias, que dependen de la combinación de decisiones tomadas. Por esta razón, los juegos estáticos reciben también el nombre de «juegos con jugadas simultáneas». Además, se supone que es de dominio público el conocimiento de la estructura completa del juego. Es decir, todos los jugadores conocen las estrategias o acciones disponibles para cada jugador y las ganancias resultantes de cada combinación de acciones, y además todos saben que todos las conocen, y todos saben que todos saben que todos las conocen... y así sucesivamente". (Pérez, J., 2004)

"En esta sección estudiaremos juegos con las siguientes reglas. Primero, los jugadores eligen simultáneamente acciones. Segundo, los jugadores reciben pagos que dependen de la combinación de acciones resultante (también se conocen por juegos estratégicos). A estos juegos se les conoce por estáticos, porque ningún jugador sabe qué combinación de acciones eligió cada uno de los restantes jugadores; no hay tiempo para reaccionar. El dilema de los prisioneros es un juego estático". (Galetovic, A., 2002)

Frente a la situación expuesta nos atrevemos a definir:

Juegos estáticos con información completa

"Es cualquier situación en la que los jugadores teniendo el conocimiento de la estructura del juego, reglas, recompensas y, estrategias que son de conocimiento y dominio de todos y cada uno de ellos y, de que todos saben que todos saben de ese conocimiento y dominio, actúan con interdependencia estratégica y, toman sus decisiones simultáneamente, buscando obtener el mejor resultado."

2.1.5 Características del juego estático con información completa.

- Decisiones Simultáneas.

  Cada jugador toma su decisión sin conocer las decisiones que los otros jugadores pueden tomar y de una sola vez, recibiendo luego las ganancias que dependen de la combinación de decisiones tomadas.

- Información completa.

  La información es de conocimiento y dominio de todos y cada uno de los jugadores y, que todos saben que todos saben de ese conocimiento y dominio sobre la estructura, los pagos y las estrategias del juego.

- Jugadores Racionales.

  Las decisiones que toma el jugador son para maximizar sus ganancias u optar por el mejor pago que resulte de la elección de la estrategia o estrategias del juego.

2.2 Elementos, Representación y Nomenclatura del juego estático con información completa.

2.2.1 Elementos del Juego

- Jugadores

  Son todos las personas o agentes que participan en el juego

- Estrategias

  Son las decisiones que toma un jugador dada la decisión del otro o son las acciones que realiza un jugador dada la acción del otro.

  Las acciones se convierten en estrategias cuando la decisión de realizarla toma en cuenta la acción que realiza o puede realizar el otro jugador.

  Las Estrategias pueden ser:

  - Por su extensión

    Estrategias Discretas

    Cuando existe un número finito de acciones posibles.

    Ejm. Juego de la moneda (Cara, Sello), Yankempó (Piedra, Tijera, Papel) etc.

    Estrategias Continuas

    Cuando existe un número infinito de acciones posibles.

    Ejm. Fijar precio entre 1 y 100 u.m. (1, …, 1.20, …, 2, 2.1, …,99.10, …100)

  - Por su certeza

    Estrategias Puras

La elección de la acción se realiza con un 100% de certeza sobre el resultado, es decir, si tomo la decisión de realizar una acción concreta el resultado es seguro.

Ejm. Iré a Talara (Estoy en Lima).

Si se realiza la acción de ir a Talara entonces al término de la acción estaré en talara.

Estrategias Mixtas

La elección de la acción se toma con una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras.

Ejm. Iré a Talara con una probabilidad de 50%

Existe incertidumbre que la acción se realice

- Pagos

  Son los resultados del juego que se producen por las decisiones que han tomado los jugadores. Los pagos pueden ordenarse, medirse en cantidad o mediante el valor esperado etc.

- Racionalidad

  Se asume siempre el comportamiento racional del jugador, busca el resultado que le da máxima ganancia (No hay posibilidad de especular o de decir pierdo hoy para ganar mañana).

- Reglas

  Las reglas están bien establecidas y son perfectamente conocidas antes de jugar.

- Conocimiento común

  La información es completa o de dominio de todos los jugadores sobre las consecuencias para si mismo y para los demás.

Representación del juego estático con información completa.

La representación del juego estático es una “Matriz” y se le denomina “Matriz de Pagos”, también se le suele llamar “Forma Estratégica” o “Forma Normal”.

En el supuesto de un juego de interacción estratégica con dos (2) jugadores, Juan (J1) y Pedro (J2) y, dos (2) acciones para cada uno; acciones de J1: Arriba (A) y abajo (B) y acciones de J2: izquierda (I) y Derecha (D), con lo cual se elabora la siguiente forma matricial:

Forma Estratégica o Normal		J2		F1
		I	D	F2
J1	A	u_1^A, u_2^I	u_1^A, u_2^D	F3
	B	u_1^B, u_2^I	u_1^B, u_2^D	F4
C1	C2	C3	C4	

Figura 4. Matriz de pagos, forma estratégica

La elaboración de la matriz presenta el siguiente procedimiento:

El jugador 1, J1 se anota en la primera columna (C1) de la matriz, sus acciones (A y B), se anotan en la columna 2, cada en una celda de la columna y se leen de arriba hacia abajo.

El J2 se anota en la fila 1 (F1) y sus acciones (I y D), se anotan en la fila 2 (F2) cada una en una celda de la matriz, y se leen de izquierda a derecha.

Cada celda representa la interacción estratégica de los jugadores, por ejemplo, la celda (A, I) representa la acción “A” que realiza J1 cuando J2 realiza la acción “I” o lo que es lo mismo, en la misma celda representa la acción “I” de J2 cuando J1 realiza la acción “A”.

La interdependencia entre los jugadores que son las acciones que elige un jugador teniendo en cuenta las acciones que realizan los otros, constituyen sus estrategias y, son definidas para cada jugador como perfil de estrategias.

Por ejemplo, dada la estrategia (A,I) se define el perfil estratégico de cada jugador en la celda de la matriz que intersectan la acción A de J1 y la acción I de J2, en la que se genera el perfil estratégico (s_1^1, s_2^1) en donde s_1^1 es el perfil estratégico de J1 cuando realiza la acción 1 (en el caso A) y, s_2^1 es el perfil estratégico del J2 cuando realiza su propia acción 1 (en el caso I), estos perfiles estratégicos de los jugadores en cada una de las celdas dan lugar a los pagos por el resultado que se produce.

Si los jugadores no estuvieran jugando sus acciones serían independientes de las acciones del otro jugador, pero cuando juegan las acciones son interdependientes y determinan un resultado (pagos), es decir, las realizan teniendo en cuenta qué acción puede decidir el otro jugador convirtiéndose en estrategia del jugador y por tanto las acciones interdependientes son estratégicas.

Los pagos (u_i) para cada jugador se registran en las celdas de la matriz dependiendo de la estrategia que han tomado, así tenemos:

u_1^A, u_2^I Pago al J1 cuando realiza la acción A y suponiendo que J2 ha realizado la acción I y, Pago al J2 cuando realiza la acción I y suponiendo que J1 ha realizado la acción A.

$u_1^A, u_2^D =$ Pago al J1 cuando realiza la acción A y suponiendo que J2 ha realizado la acción D y, Pago al J2 cuando realiza la acción D y suponiendo que J1 ha realizado la acción A.

u_1^B, u_2^I Pago al J1 cuando realiza la acción B y suponiendo que J2 ha realizado la acción I y, Pago al J2 cuando realiza la acción I y suponiendo que J1 ha realizado la acción B.

u_1^B, u_2^D Pago al J1 cuando realiza la acción B y suponiendo que J2 ha realizado la acción D y, Pago al J2 cuando realiza la acción D y suponiendo que J1 ha realizado la acción B.

En esta matriz de pagos que representa un juego determinado y de los cuales podemos mencionar los juegos clásicos como “El dilema del prisionero” o “La batalla de los sexos” entre otros, los que serán analizados para determinar los métodos de solución y los resultados del juego.

El análisis de los juegos clásicos nos permitirá compararlos con juegos que pueden producirse en la vida real asumiendo comportamientos estratégicos

Nomenclatura del juego.

En la matriz anterior que representa un juego estático con información completa, podemos establecer las siguientes notaciones, nomenclatura o términos básicos cuya formalización nos va a permitir comprender, analizar y comunicar los avances y resultados en el propio lenguaje de la teoría de juegos.

En estas consideraciones, tomamos la terminología básica que vamos a utilizar y que es la más comúnmente utilizada para formalizar los argumentos que utiliza la teoría de juegos en armonía con la notación matemática para definir las estrategias (S), pagos (u_i). y otros.

Así tenemos:

Tabla 2
Terminología básica del juego estático

	Concepto	Desarrollo	
G	Juego	G = {J, S, *u*)	
J	Conjunto de jugadores	J = {1, 2, …, n}	
A	Conjunto de acciones	A_1 = {A, B}, A_2 = {I, D}	
		Donde: A_i = Acciones del jugador *i*	
S	Conjunto de estrategias	S_1 = {A, B}, S_2 = {I, D}	
		Donde: S_i = Estrategias del jugador *i*.	
s	Conjunto de perfiles de S	(A, I), (A, D), (B, I), (B, D)	
u	Conjunto de pagos	$u_1(A, I) = u_1(s_1^1, s_2^1)$	$u_2(A, I) = u_2(s_1^1, s_2^1)$
		$u_1(A, D) = u_1(s_1^1, s_2^2)$	$u_2(A, D) = u_2(s_1^1, s_2^2)$
		$u_1(B, I) = u_1(s_1^2, s_2^1)$	$u_2(B, I) = u_2(s_1^2, s_2^1)$
		$u_1(B, D) = u_1(s_1^2, s_2^2)$	$u_2(B, D) = u_2(s_1^2, s_2^2)$

Ejemplo. El juego clásico de “El dilema del prisionero”

En diversas fuentes consultadas se indica que este problema fue planteado en

1951 por Merrill M. Flood, un matemático inglés en cooperación con Melvin Dresher.

El nombre de “El Dilema del Prisionero” se debe a Albert W. Tucker, quién como profesor en Princeton, tomó estas ideas para adaptarlas y hacerlas accesibles para grupos de psicólogos.

“El dilema del prisionero” es el modelo clásico de la teoría de juegos, y cae en la categoría de juegos estáticos con información completa.

Este juego ha sido y continúa siendo útil y adaptativo a diferentes situaciones en las interacciones que se dan en la vida real, por ejemplo cuando se enfrentan:

- El interés individual al interés grupal,
- La situación competitiva a la cooperación,
- La lealtad a la traición,
- La guerra o la paz, etc.

El planteamiento del “Dilema del prisionero” con fines didácticos, es como a continuación se detalla:

> Dos delincuentes son detenidos, cuando acaban de cometer un delito, por el cual irán a prisión 2 años cada uno.
>
> Además, se sospecha de ellos de haber participado en el robo de un banco, delito cuya pena es de diez años de cárcel, pero no hay pruebas suficientes y, son encarcelados en celdas independientes, para interrogarlos.
>
> Ambos prisioneros saben que no hay pruebas que los incriminen del robo al banco y también saben que irán a la cárcel 2 años por el delito que acaban de cometer.
>
> El alcaide pacta con cada uno de ellos indicando que reducirá su condena a 6 años, si confiesan el robo del banco, proporcionando las pruebas para culpar al otro, pero si uno confiesa y el otro no confiesa se le reduce la

pena al que confiesa yendo a prisión 1 año y el que no confiesa va 10 años. https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-66312-2006-05-02.html

Con los datos del planteamiento del denominado "Dilema del prisionero" en la que se establecen incentivos y penalidades por su colaboración o resistencia a la justicia, se puede establecer la siguiente matriz de pagos:

		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-6, -6	-1, -10
	No confesar	-10, -1	-2, -2

Figura 5. El dilema del prisionero

La nomenclatura de la matriz del dilema del prisionero, l

Tabla 3

Notación de: El dilema del prisionero

Terminología	Concepto	Desarrollo de terminología
G	Juego	G ={J, S, *u*)
J	Conjunto de jugadores	J = {1, 2}
A	Conjunto de acciones	A_1 = {C, NC}, A_2 = {C, NC} C = Acción de Confesar

		NC = Acción de No Confesar
S	Conjunto de estrategias	S_1 = {C, NC}, S_2 = {C, NC} S_i = Estrategias del jugador *i*.
s	Conjunto de perfiles de S	(C, C), (C, NC), (NC, C), (NC, NC)
u	Conjunto de pagos	$u_1(C, C) = u_1(s_1^1, s_2^1) = -6$ $u_2(C, C) = u_2(s_1^1, s_2^1) = -6$ $u_1(C, NC) = u_1(s_1^1, s_2^2) = -1$ $u_2(C, NC) = u_2(s_1^1, s_2^2) = -10$ $u_1(NC, C) = u_1(s_1^2, s_2^1) = -10$ $u_2(NC, C) = u_2(s_1^2, s_2^1) = -1$ $u_1(NC, NC) = u_1(s_1^2, s_2^2) = -2$ $u_2(NC, NC) = u_2(s_1^2, s_2^2) = -2$

2.3 Métodos de solución del juego.

En los juegos siempre se ha buscado encontrar el mecanismo de elección de las estrategias que permita al jugador obtener el mejor resultado dada las acciones estratégicas que realizan los demás jugadores, no obstante, en la solución de los juegos no necesariamente un jugador obtiene su mejor resultado individual dado que está condicionado por las acciones que realizan los demás jugadores y que también buscan su mejor resultado.

Como todos los jugadores buscan el mejor resultado en el juego y al no necesariamente poder obtenerlo individualmente, la solución del juego es aquella en la que todos los jugadores se sienten cómodos al encontrarse en una situación de equilibrio donde ninguno tiene incentivos para cambiar de estrategia dado que si lo intentan se les presenta la amenaza de resultados peores.

Los equilibrios, si bien no necesariamente producen el mejor resultado, son los que se usan en la teoría de juegos para determinar la solución del juego, entre estos tenemos el equilibrio en estrategias dominantes, equilibrios a lo Nash y otros refinamientos.

Estrategia dominante.

Es aquella estrategia de un jugador cuyo resultado (pago, beneficio o utilidad) a cualquier combinación de estrategias que elijan los otros jugadores, es mayor a cualquier otra estrategia cuyo resultado puede darse con cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores.

Veamos un ejemplo de estrategia dominante con solo del jugador 1.

		J2	
		I	D
J1	A	10,	8,
	B	5,	3,

Figura 6. Matriz de pagos solo del jugador 1.

Observamos que el jugador 1, con su estrategia A tiene pagos superiores (10, 8) que cuando acciona su estrategia B (5, 3), es decir, sus pagos son superiores con su estrategia A sea cual sea la elección de J2”.

Si un jugador que es ***racional*** (elige la estrategia que le da mayor beneficio) tiene una estrategia dominante (En el juego anterior la estrategia A) entonces, se supone que dicho jugador debería jugar o utilizar dicha estrategia y, en caso de conocer que otros jugadores, que también son ***racionales*** y tienen estrategias dominantes, debe suponer que éstos también van a jugar tal clase de estrategias.

En consecuencia, pertenecerán a la solución del juego todos aquellos perfiles de estrategias en los cuales cada jugador cuenta con una estrategia dominante y la usa eliminando la estrategia dominada.

Si el jugador tiene estrategias dominantes éstas pueden ser débilmente dominantes o estrictamente dominantes.

Debemos tener en cuenta que no siempre un juego presenta estrategias dominantes para un jugador resultando en estos juegos inaplicable este concepto de solución.

Estrategia dominada. Una digresión.

Si hay estrategia dominante en la que los pagos son mayores a los pagos de la estrategia que domina entonces en la situación inversa hay estrategia dominada cuyos resultados o pagos son menores al de la estrategia dominante.

En una situación de juego con los siguientes pagos $u_i(s_i'', s_{-i}) \leq u_i(s_i', s_{-i})$ que indica que el perfil estratégico s_i' comporta mayores o iguales pagos respecto al perfil estratégico s_i'' por lo que se dice que s_i' es una estrategia débilmente dominante y de modo inverso que el perfil estratégico s_i'' presenta menor o igual pago respecto al perfil estratégico s_i' por lo que s_i'' es la estrategia débilmente dominada.

Asimismo, si los pagos son $u_i(s_i'', s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i})$ el perfil estratégico que comporta mayores pagos s_i' en relación a la estrategia s_i'' se dice que es una estrategia estrictamente dominante y la que presenta menor pago s_i'' respecto a la estrategia s_i' es una estrategia estrictamente dominada

Si un jugador es racional no elegirá nunca una estrategia dominada dado que dispone de otra que le proporciona mayores pagos (la estrategia dominante), en consecuencia, si existen estrategias dominadas éstas se descartan del juego en una eliminación iterativa hasta el punto en que no haya más estrategias dominadas

- Método de solución. Eliminación Iterativa Estricta (EIE)

  La eliminación iterativa estricta se realiza en una situación de juego en la que existe la estrategia estrictamente dominante que le proporciona mayores pagos que la estrategia que domina ésta última es eliminada sin importar las acciones que realizan el resto de jugadores.

En el juego $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, el jugador i (J_i) tiene una ***estrategia s_i' estrictamente dominante***, si los pagos que obtiene J_i con la estrategia s_i' es mayor a los pagos que obtiene con la estrategia s_i''en la combinación de las estrategias de los otros jugadores, tal que $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i'', s_{-i})$, con lo cual siempre le va a convenir usar la estrategia dominante a cualquier otra que domine, hagan lo que hagan los otros jugadores.

Decimos que s_i' es **estrictamente dominante** a s_i'' cuando:

$$u_i\left(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i'}, s_{i+1}, \dots, s_n\right) > u_i\left(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i''}, s_{i+1}, \dots, s_n\right)$$

Se cumple para toda la combinación de estrategias (s_{-i}) de los otros jugadores.

- Método de solución. Eliminación Iterativa Débil (EID).

La eliminación iterativa débil procede en una situación de juego en la que existe la estrategia débilmente dominante cuyo uso elimina la estrategia que es débilmente dominada.

En el juego $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, el jugador *i* tiene una ***estrategia s_i' débilmente dominante***, si los pagos que obtiene el jugador *i* con la estrategia s_i' es mayor o igual a los pagos que obtiene con la estrategia s_i'' en la combinación de las estrategias de los otros jugadores, tal que $u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i'', s_{-i})$, con lo cual siempre le va a convenir usar la estrategia débilmente dominante a cualquier otra que domine, hagan lo que hagan los otros jugadores:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i'}, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i''}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Resultados que se cumplen para todo perfil estratégico s_i de dicho jugador y para toda combinación de estrategias s_{-i} de los otros jugadores.

Por lo analizado para realizar el método de solución tanto mediante la eliminación iterativa estricta (EIE) y la eliminación iterativa débil (EID), podemos decir como argumento fundamental de solución:

Argumento fundamental de solución por eliminación.

Un jugador racional, que busca los mejores resultados, no juega estrategias dominadas y, si conoce que otros jugadores, que también son racionales, tienen estrategias dominadas debe suponer que estos no van a jugar tal clase de estrategias.

Ejemplo de eliminación iterativa estricta. Resolviendo el problema clásico del "Dilema del Prisionero", expuesto en la nomenclatura del juego:

		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-6, -6	-1, -10
	No confesar	-10, -1	-2, -2

Figura 7. Matriz de pagos del Dilema del prisionero para verificar si hay estrategias dominantes.

Significando: El número los años y el signo negativo son la Carcelería

Verificamos si hay estrategias dominantes:

Prisionero 1 (J1).

Su estrategia "Confesar" presenta menor tiempo en años de carcelería (-6 y -1) frente a su estrategia de "No confesar" (-10 y -2) por lo que su estrategia "Confesar" es estrictamente dominante, explícitamente si J1 elige su estrategia "Confesar" (-6) su carcelería sería de 6 años en el caso que J2 decida "Confesar" y, de (-1) carcelería de 1 año si J2 decide "No confesar"

Si J1 elige su estrategia "No confesar" la carcelería que le correspondería (-10 y -2) es claramente superior a la de su estrategia "Confesar" (-6 y -1) por lo que su estrategia "No confesar" es estrictamente dominada, es decir, si J1 elige su estrategia “No confesar” (-10) su carcelería sería de 10 años en el caso que J2 decida “Confesar” y (-2) la carcelería de 2 años en el caso que J2 decida “No Confesar”.

Dado que la estrategia del prisionero 1 “Confesar” le conviene frente a su estrategia “No confesar”, use la estrategia que use (“Confesar” o “No Confesar”) el prisionero 2, se dice que la estrategia del prisionero 1 “Confesar” es estrictamente dominante y le conviene usar esta estrategia eliminado la estrategia dominada “No confesar”.

Prisionero 2

En la misma situación se encuentra el prisionero 2, y utilizará también su estrategia “confesar” que es la estrictamente dominante y elimina la estrategia “No confesar”.

Veamos paso a paso la EIE

“DILEMA DEL PRISIONERO”		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-6, -6	-1, -10
	No confesar	-10, -1	-2, -2

Figura 8. Matriz de pagos del Dilema del prisionero para la EIE paso a paso.

Pagos de las estrategias del Prisionero 1

Son los pagos que se observan en cada fila de las estrategias de confesar y no confesar y que están de color naranja.

Para una mejor apreciación, los podemos observar en sus perfiles de estrategias que para la fila confesar, de color naranja, y para la estrategia no confesar, de color blanco, en la siguiente matriz de pagos:

"DILEMA DEL PRISIONERO"		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-6,	-1,
	No confesar	-10,	-2,

Figura 9. Matriz de pagos solo del J1

Para determinar la solución de los mejores pagos del prisionero 1, el análisis comparativo de los pagos de cada estrategia es horizontal y con los pagos del lado izquierdo en cada celda de la matriz completa y que se reproducen en la matriz anterior.

La carcelería del jugador 1 es menor cuando utiliza su estrategia "Confesar" de 6 y 1 año, cuando el jugador 2 elige su estrategia de "Confesar" o "No confesar" respectivamente, frente a la carcelería que afrontaría si su estrategia es "No confesar" que es de 10 y 2 años, cuando el jugador 1 elige su estrategia de "Confesar" o "No confesar", respectivamente. Por lo tanto, tiene una estrategia estrictamente dominante que es "Confesar"

Pagos de las estrategias del Prisionero 2.

Observamos sus pagos en la siguiente matriz de pagos:

"DILEMA DEL PRISIONERO"		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	, -6	, -10
	No confesar	, -1	, -2

Figura 10. Matriz de pagos solo del J2

La solución de los mejores pagos del jugador 2, se realiza en un análisis comparativo de los pagos del lado derecho que se observan en cada celda (pagos de su estrategia) de las columnas de la matriz (análisis vertical).

En la matriz anterior se observan los pagos, beneficios o carcelería únicamente del jugador 2, en este caso, la carcelería del jugador 2 es menor cuando utiliza su estrategia "Confesar" de 6 y 1 año, cuando el jugador 1 elige su estrategia de "Confesar" o "No confesar", respectivamente, frente a la carcelería que afrontaría si su estrategia es "No confesar" que es de 10 y 2 años, cuando el jugador 1 elige su estrategia de "Confesar" o "No confesar", respectivamente. Por lo tanto, tiene una estrategia estrictamente dominante que es "Confesar".

En consecuencia, la solución del dilema del prisionero cuando son interrogados y están incomunicados es que ambos usan la estrategia estrictamente dominante "Confesar" y van a la cárcel 6 años cada uno.

"DILEMA DEL PRISIONERO"		Prisionero 2	
		Confesar	No confesar
Prisionero 1	Confesar	-6, -6	-1, -10
	No confesar	-10, -1	-2, -2

Figura 11. Matriz de pagos y equilibrio de Nash.

No obstante, en el juego se observa que si los prisioneros hubieran tenido posibilidad de coordinar sus acciones lo que más les convenía es "No confesar" y los años de carcelería serían solo de 2 años para cada uno.

El resultado del juego es que ambos prisioneros eligen la estrategia "Confesar" debido a que la tienen como Estrategia Estrictamente

Dominante y dado que no coordinan sus acciones (son interrogados en forma separada y están incomunicados) por lo que se utiliza el método de solución de la Eliminación Iterativa Estricta (EIE).

En la ***vida real,*** el juego del "Dilema del prisionero" y en el Perú, particularmente, se relaciona directamente con los "colaboradores eficaces" que son personas que pueden estar prisioneros o pueden ir a prisión pero que testifican ("Confesar") contra otros para obtener beneficios penitenciarios**.**
No obstante, como ya se dijo, esta estructura del juego sirve para distintas disciplinas y en diferentes situaciones que también se observan en la vida real.

Nota

Si el juego tiene solo estrategias dominantes y es de temporalidad finita, entonces, en:

Eliminación iterativa estricta (EIE)

- El resultado es único
- No importa el orden de eliminación.

Eliminación iterativa débil (EID)

- El resultado puede no ser único
- Importa el orden de eliminación

2.4 Equilibrios en juego estáticos con información completa.

La Noción de equilibrio en el juego (interacción estratégica), es una situación en la que un jugador elige la estrategia que le resulte en el mejor pago, dado la elección de las estrategias con mejor pago que realizan los demás jugadores o lo que es lo mismo, es la situación en el que ninguno de los jugadores tiene incentivos para cambiar de estrategia, mientras los otros mantengan su estrategia, dado que si lo intentan o no ganan nada o pueden obtener resultados peores.

El concepto de equilibrio se debe al matemático estadounidense John Forbes Nash quién en 1949, a los 21 años, escribió un artículo de 2 páginas que en 1994 fue valorado para obtener el premio Nobel de Economía, y es por ello que la noción de equilibrio en la teoría de juegos se denomina "Equilibrio de Nash"

Para tener en cuenta:

- Muchos juegos de estrategia pura no tienen "Equilibrio de Nash", ni en los más básicos como el juego de 2 jugadores con las estrategias "Papel, piedra, tijera" y por tanto no hay resultado que satisfaga al conjunto de jugadores.
- Con el "Equilibrio de Nash", no necesariamente se logra el mejor resultado para todos los jugadores, sino que sólo se logra el mejor resultado para cada uno de ellos de manera individual, considerando la estrategia utilizada por el resto de jugadores.
- Es muy posible que en el juego se muestre que puede lograrse un mejor resultado que el del "Equilibrio de Nash" para todos los jugadores si estos, de algún modo, coordinan sus acciones.
- En economía, el "Equilibrio de Nash" se presenta en los mercados de competencia imperfecta, donde las empresas oligopólicas que producen un mismo bien, compiten en el mercado y utilizan estrategias conociendo que sus competidores reaccionarán utilizando sus propias estrategias, todas ellas con la finalidad de maximizar sus ganancias.

Equilibrios en estrategias puras

En un juego estático con estrategias puras (estrategias cuyos resultados son ciertos, es decir, tienen probabilidad de 1) se dice que hay equilibrio de Nash cuando el perfil de estrategias de cualquier jugador i es el mejor resultado (s_i^*) a cualquier otra estrategia del propio jugador i (s_i), cuando los otros o el resto de jugadores juegan sus propias estrategias que les brindan mejor resultado

(s^*_{-i}) por lo que ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia unilateralmente:

$$(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

O lo que es lo mismo: $u_i(s_i^*, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$

Si consideramos que el J_i (jugador *i*), tiene la estrategia *r* que le da mejor resultado a cualquier otra estrategia *t*, entonces decimos que hay equilibrio de Nash, con el perfil de estrategias *r*:

$$u_i(r, s^*_{-i}) \geq u_i(t, s^*_{-i})$$

Debemos tener en cuenta que independientemente del resultado del juego que puede ser único, puede haber más de un equilibrio de Nash. Por ejemplo, en un juego donde cada jugador tiene 2 estrategias y por lo que el conjunto de estrategias es S = 2 x 2, pueden haber 1, 2 o 3 equilibrios de Nash, así tenemos:

En “El dilema del prisionero”, se tiene un único resultado al utilizar el método de solución EIE (Eliminación iterativa estricta) que es “Confesar, Confesar” pero se tienen 2 equilibrios a lo Nash:

- El del único resultado (Confesar, Confesar) con una carcelería de 6 años para cada uno, que se produce cuando cada uno desconoce la acción que utilizaría el otro jugador (corresponde al caso, dado que los prisioneros deciden sus acciones cuando están incomunicados) y,
- El otro resultado es el que corresponde a (Callar, Callar) con una carcelería de 2 años para cada uno, que se daría si ambos coordinan sus acciones.

Ampliando el concepto de estrategias puras a estrategias mixtas.

Como se ha explicado, en no todos los juegos de estrategias puras podemos encontrar equilibrios de nash, como por ejemplo el juego de la moneda (Cara, Cruz), o el juego del Yan Kem Po (Piedra, Papel, tijera), es decir, no hay estrategias puras que sean mejores respuestas a otras dado que hay incentivos para cambiar a otra estrategia, entonces solo se garantiza la existencia de una solución, en este juego, cuando se les define una probabilidad de ocurrencia a cada estrategia pura de cada jugador, convirtiéndose las estrategias puras en estrategias mixtas, es decir, la función de pagos deja de ser determinista pasando a ser aleatoria.

En este sentido se amplió el concepto de estrategias puras a estrategias mixtas que amplía también el equilibrio a lo Nash, en la que las estrategias mixtas permiten que los jugadores elijan acciones aleatorias (inciertas) asignando probabilidades a las acciones ciertas.

2.5 Las Estrategias Mixtas

Se denomina estrategia mixta del jugador i (σ_i) a toda distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias del jugador i (S_i), de modo que $\sigma_i = \left(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_i^k\right)$ donde σ_i^j para j = 1, …, k. es la probabilidad que el jugador i asigna a su estrategia j y, considerando que $\sigma_i^j \geq 0$ y, $\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^k = 1$

Al considerarse estrategias mixtas, los pagos que corresponden son pagos probables o pagos esperados de acuerdo a la estrategia elegida.

En el caso de los juegos estáticos con estrategias puras en los que los pagos son ciertos y seguros, se pueden encontrar muchos de ellos en los que no hay estrategias en equilibrio siendo uno de ellos el juego de Papel, piedra y tijera, juego competitivo en los que pueden intervenir 2 o más jugadores y cuyos resultados en ningún caso presenta estrategias en equilibrio.

Analizando este tipo de juegos y su posible solución tenemos:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">“CASO 1”</td><td colspan="2">J2</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J1</td><td>A</td><td>5, 8</td><td>10, 6</td></tr>
<tr><td>B</td><td>10, 6</td><td>5, 8</td></tr>
</table>

Figura 12. Juego sin estrategias de equilibrio

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">“CASO 2”</td><td colspan="2">J2</td></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J1</td><td>X</td><td>4, 1</td><td>4, 4</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>1, 10</td><td>10, 1</td></tr>
</table>

Figura 13. Juegos sin estrategias de equilibrio

Al no contar estos juegos con equilibrios con sus estrategias puras, se asignan probabilidades a las estrategias de cada jugador para encontrar la solución.

Si suponemos que cada jugador elige de modo individual su estrategia mixta, independientemente a la del otro jugador, entonces la probabilidad conjunta del perfil de estrategias (σ) es el producto de las probabilidades de cada estrategia.

- Procedimiento de solución estrategias mixtas 1.

El procedimiento para determinar la mejor respuesta del jugador *i* a una estrategia mixta del otro jugador *j* tiene como fundamento el interpretar la estrategia mixta del jugador *j* como representación de la incertidumbre del Jugador *i* sobre lo que hará el jugador *j*.

Así tenemos que para establecer las estrategias mixtas en el juego ***caso 2***:

Supongamos que el jugador 1 ***cree*** que el jugador 2 elegirá la estrategia *x* con probabilidad "*q*" y elegirá la estrategia *y* con probabilidad "1 – *q*"; esto es, J1 supone que J2 elegirá la estrategia mixta *(q, 1 - q)*

Asimismo, supongamos que el jugador 2 ***cree*** que el jugador 1 elegirá la estrategia X con probabilidad "*p*" y elegirá la estrategia *Y* con probabilidad "*1 – p*", es decir, elige la estrategia mixta (*p*, *1 – p*).

Con los supuestos dados tenemos que la matriz de pagos del Caso 2, se puede establecer con las estrategias mixtas, como sigue:

"CASO 2"		J2		
		x	*y*	
J1	*X*	4, 1	4, 4	*p*
	Y	1, 10	10, 1	1 – *p*
		q	*1 – q*	

Figura 14. Matriz de pagos base para estrategias mixtas

Los colores identifican la probabilidad de ocurrencia que le corresponde a una estrategia:
Estrategia mixta asignada a J2
Verde intenso:
probabilidad *q*, estrategia *x*

Cálculo del pago esperado para el jugador 1, con estrategias mixtas.

- Se calcula el pago esperado del jugador 1 para cada una de sus estrategias puras con las probabilidades que cree elegirá el jugador 2.

  $U_1(X,(q.1-q))$: $q(4) + (1 - q)(4) = 4$

  $U_1(Y,(q.1-q))$: $q(1) + (1 - q)(10) = 10 - 9q$

- Se igualan los resultados de ambas estrategias y se obtiene la probabilidad de ocurrencia de q = 2/3:

  Este resultado indica que al jugador 1 le resulta indiferente jugar la estrategia X o la Y con la probabilidad de ocurrencia q = 2/3.

- Con q = 2/3, el pago esperado para el jugador 1 si elige la estrategia X o Y es de 4:

  El pago esperado de 4, es el resultado de reemplazar la probabilidad q = *2/3 obtenido en 2, al pago esperado por estrategia obtenida en 1*: X = 4; Y= 10 – 9(2/3) = 4, de modo que,

- Si q > 2/3 el jugador 1 elegirá la estrategia X (Por ejemplo q = 4/5, el pago esperado de la estrategia X seguirá siendo 4, en tanto que el pago de la estrategia Y disminuirá a 2.8), elegirá la estrategia X por ser la de mayor pago: X = 4 e Y = 2.8

  Si q < 2/3 elegirá la estrategia Y (Por ejemplo 1/3, el pago esperado de la estrategia X es 4, en tanto que el pago de la estrategia Y aumentará a 7).

  Resumiendo:

  La respuesta óptima de J1 es:

$$p \epsilon [0,1](cualquier\ estrategia: X\ o\ Y) \quad si\ q = 2/3$$

$$p = 1\ (X) \quad si\ q > 2/3$$

$$p = 0\ (Y) \quad si\ q < 2/3$$

En la siguiente figura, se observa esta respuesta óptima de J1 a cualquier estrategia mixta de J2:

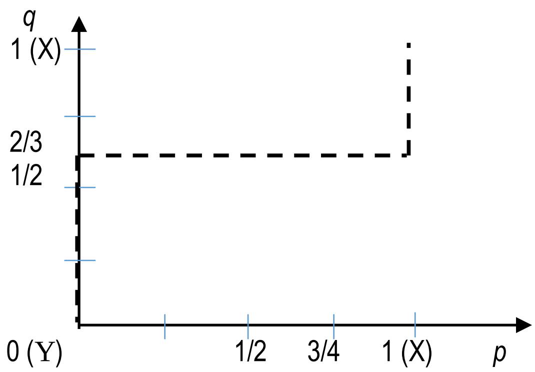


Figura 15. Respuesta óptima de J1 a cualquier estrategia mixta de J2

Cálculo del pago esperado para el jugador 2, con estrategias mixtas.

- Juega sus estrategias puras con las probabilidades que cree elegirá el jugador 1:

  $U_2\big((p, 1-p), x\big)$: $p(1) + (1 - p)(10) = 10 - 9p$

  $U_2\big((p, 1-p), y\big)$: $p(4) + (1 - p)(1) = 1 + 3p$

- Igualando los resultados de ambas estrategias obtenemos la probabilidad de ocurrencia p = 3/4:

  Este resultado indica que al jugador 2 le resulta indiferente jugar la estrategia x o la y con la probabilidad de ocurrencia p = 3/4.

- Con p = 3/4, el pago esperado para el jugador 2 ya sea que elija la estrategia x o y es de 13/4:

  El pago esperado de 13/4, es el resultado de reemplazar la probabilidad $p = 3/4$ obtenido en 2., al pago esperado por estrategia obtenida en 1, como sigue: $x = 10 – 9(3/4)$; $y = 1 + 3(3/4) = 13/4$, de modo que,

- Si $p > 3/4$ el jugador 2 elegirá la estrategia y, y si $p < 3/4$ elegirá la estrategia x.

Resumiendo:

La respuesta óptima de J2 es:

$$q \in [0,1](cualquier\ estrategia: x\ o\ y) \quad si\ p = 3/4$$

$$q = 1\ (y) \qquad si\ p > 3/4$$

$$q = 0\ (x) \qquad si\ p < 3/4$$

En la siguiente figura, se obsrva la respuesta óptima de J2 a cualquier estrategia mixta de J1:

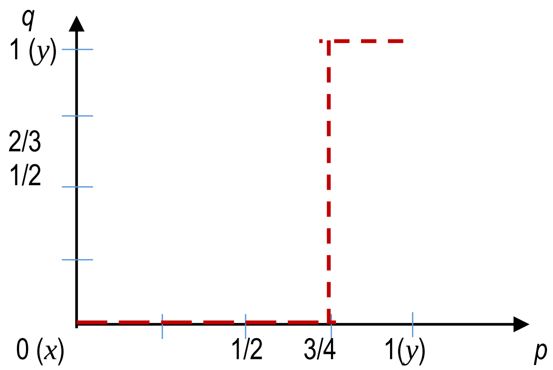


Figura 16. Respuesta óptima de J2 a cualquier estrategia mixta de J1

En la siguiente figura 17, se unen las figuras 15 y 16, para resumir el mejor resultado que obtiene cada jugador teniendo en cuenta el mejor resultado que obtiene el otro jugador, en el caso del resultado de J1 y si supone que el jugador 2 juega su estrategia *x* con probabilidad de q = 2/3 entonces a J1 le resulta indiferente jugar su estrategia X o su estrategia Y (q = 2/3: X o Y; q > 2/3: X: q < 2/3: Y) cuando juega sus estrategias J2 y los resultados de J2 (p = 3/4: *x* o *y*; p > 3/4: *y*; p < 3/4: *x*) cuando juega sus estrategias J1, se obtiene:

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Este equilibrio se establece en el punto en que los resultados óptimos que alcanza cada jugador cuando juega sus estrategias el otro jugador, se cortan, en el caso cuando $q = 2/3\ \ y\ \ p\ \ = 3/4$.

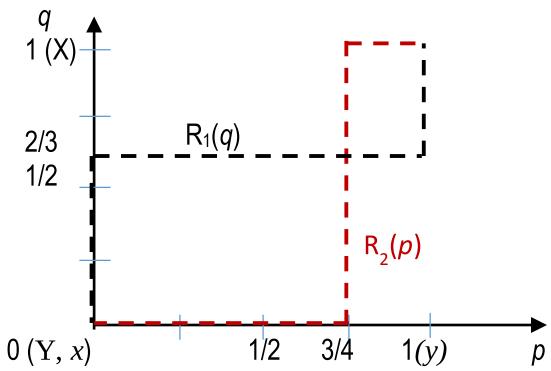


Figura 17. Equilibrio de Nash de estrategias mixtas

Se puede observar en el gráfico que el equilibrio de nash se produce cuando el J1 juega su estrategia *X* con la probabilidad de *p* = 3/4 y, el J2 juega su estrategia *x* con la probabilidad *q* = 2/3 (donde se cruzan las líneas que resultan de las probabilidades) que corresponde a la estrategia (*Y*, *x*).

Procedimiento de solución con estrategias mixtas, 2.

En el mismo juego de 2 x 2 estrategias de 2 jugadores, se utilizan las probabilidades de ambos jugadores, en términos generales, para establecer la función de pagos esperados de cada jugador y finalmente se maximiza el pago esperado encontrado para cada jugador mediante el cálculo diferencial a fin de obtener el resultado óptimo de un jugador a las estrategias mixtas del otro, como se puede observar en el análisis de la siguiente matriz de pagos.

"CASO 2"		J2		
		x	*y*	
J1	*X*	4, 1	4, 4	*p*
	Y	1, 10	10, 1	1 – *p*
		q	*1 – q*	

Figura 18. Matriz de Pagos base estrategias mixtas caso 2

1. Se determina la función del pago esperado del J1

$$U_1[(p,1-p),(q,1-q)]$$
$$= pU_1\big(X,(q,1-q)\big) + (1-p)U_1\big(Y(q,1-q)\big)$$
$$= p[q(4)+(1-q)(4)] + (1-p)[q(1)+(1-q)(10)]$$
$$= 4pq + 4p - 4pq + q - pq + 10 - 10p - 10q + 10pq$$
$$= -6p - 9q + 9pq + 10$$

2. Se maximiza la función del pago esperado:

$$\max_p U_1[(p,1-p),(q,1-q)] = -6p - 9q + 9pq + 10$$

Si existen soluciones interiores, se determinan derivando la utilidad esperado del J1 con respecto a p e igualando a cero, como sigue:

$$\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0 = -6 + 9q \Longrightarrow q = 2/3$$

Del mismo modo se procede con el pago esperado del J2: $p = 3/4$

Determinado los pagos esperados de las estrategias mixtas.

Encontrando los pagos de las estrategias que elige un jugador y de acuerdo a las probabilidades que les asigna.

- Conocemos las probabilidades que asigna el J1 y J2:

  Probabilidades en “Caso 2”

$$\sigma_1 = (3/4,\ 1/4) \text{ y } \qquad \sigma_2 = (2/3,\ 1/3)$$

- Separamos en matrices los pagos de estrategias puras de cada jugador:

$$A_1 = \left[u_1\left(s_1^i . s_2^j\right)\right] \quad y \quad A_2 = \left[u_2\left(s_1^i . s_2^j\right)\right]$$

  Matrices de “Caso 2”:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinamos los pagos esperados de la estrategia mixta:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \qquad U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = (3/4, \ \ 1/4)\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = (13/4 \ \ 22/4)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 4$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = (3/4, \ \ 1/4)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = (13/4 \ \ 13/4)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 13/4$$

2.6 Juegos básicos y ejemplos.

En los juegos estáticos con información completa de 2 x 2 como el modelo de "El dilema del prisionero" que sirve de modelo para comprender algunos conceptos, en la que los jugadores eligen estrategias como respuesta a lo que considera las estrategias que elige el otro jugador y cuya base de elección es la racionalidad o el beneficio que obtiene en la elección de su estrategia debemos indicar que se han estudiado otros juegos similares y variantes como son:

"El halcón y la paloma", "La caza del ciervo", "El juego de la gallina", "La batalla de los sexos", que junto con "El dilema del prisionero" son juegos simétricos donde las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien los pagos de las estrategias:

"Dilema del Prisionero"		J2	
		C	*NC*
J1	*C*	-6, -6	-1, -10
	NC	-10, -1	-2, -2

Figura 19. Matriz de pagos Equilibrio de Nash y equilibrio cooperativo.

En el juego competitivo se tiene:

Un Equilibrio a lo Nash (EN), de color celeste, con el perfil C-C que coincide con la solución con EIE, C-C.

Si el juego es no competitivo (Cooperativo):

Un resultado mejor es NC-NC" que no es EN.

También podemos identificar el equilibrio a lo Nash en el Juego, el Halcón y la Paloma, como sigue:

"Halcón y la Paloma"		J2	
		H	*P*
J1	*H*	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
	P	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

Figura 20. Matriz de pagos Equilibrio de Nash (H-H) y equilibrio cooperativo (P-P).

Si compiten los jugadores, hay:

Un EN. H-H y una solución con EIE. H-H

Si el juego es cooperativo se tiene:

Un mejor resultado para ambos dado el comportamiento del otro es con *P* - *P*.

Asimismo, en el "Juego de la Gallina", como sigue:

"Juego de la Gallina"		Pedro	
		Enfrenta	*Desvía*
Juan	*Enfrenta*	-100, -100	1, -1
	Desvía	-1, 1	0, 0

Figura 21. Matriz de pagos Equilibrio de Nash de no arriesgar.

Juego simétrico contrario a los resultados del dilema del prisionero

Hay 2 equilibrios de Nash

El mejor resultado es que uno o ambos desvíen, dado que no tendrán daño los participantes o solo el calificativo de gallina.

También, en el juego "La caza del Ciervo":

"La caza del ciervo"		Pedro	
		Ciervo	*Conejo*
Juan	*Ciervo*	4, 4	0, 3
	Conejo	3, 0	3, 3

Figura 22. Matriz de pagos Equilibrio de Nash coordinando o sin coordinar.

La solución se da cuando ambos coordinan la caza del ciervo o cuando ambos van a la caza del conejo sin coordinación.

En la “Batalla de los sexos”

“Batalla de los sexos”		Luisa	
		Cine	*Futbol*
Juan	*Cine*	2, 4	1, 1
	Futbol	2, 2	4, 2

Este es un juego asimétrico dado que, al cambiar las identidades de los jugadores, cambian los pagos que corresponden a las estrategias cuando ambos asisten juntos al Cine o al futbol.

Figura 23. Matriz de pagos Equilibrio de Nash y equilibrio cooperativo.

Respecto a los juegos que no presentan equilibrio a lo Nash en estrategias puras, tenemos “El juego de la moneda”, “Pares y Nones”, que son simétricos.

Estos juegos para que presenten resultados con equilibrio a lo Nash, deberán considerarse probabilidades de ocurrencia de las estrategias puras.

Juego sin solución en estrategias puras, pero tiene solución como estrategias mixtas, en las que se juegan con probabilidades de ocurrencias que le asignan los jugadores creyendo la probabilidad que el otro jugador elegiría.

“El juego de las monedas”		Pedro	
		Cara	*Cruz*
Juan	*Cara*	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Figura 24. Matriz de pagos Juego sin solución.

Similar al anterior, es el juego de “pares e impares” o “pares y nones”, como:

“Pares y Nones”		Pedro	
		Pares	*Nones*
Juan	*Pares*	1, -1	-1, 1
	Nones	-1, 1	1, -1

Figura 25. Matriz de pagos Juego sin equilibrio.

Del mismo modo con el Juego del “Yan Kem Po” (Piedra, Papel, Tijera).

‘Yan Kem Po”		Pedro		
		Piedra	*Papeles*	*Tijera*
Juan	*Piedra*	0, 0	-1, 1	1, -1
	Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	Tijera	-1, 1	1, -1	0, 0

Figura 26. Matriz de pagos Juego sin equilibrio.

Todos estos juegos tienen la característica que son competitivos y sobre la base de ellos se han modelados juegos en la ciencia económica como en el oligopolio.

Aplicación de los Juegos en la Ciencia Económica

Los juegos hasta ahora explicados, pueden utilizarse o aplicarse en la ciencia económica, específicamente en un mercado de oligopolio de competencia imperfecta, como los siguientes:

El juego de la publicidad en empresas con diferenciación de producto y que prestan la misma funcionalidad.

Juego de la publicidad		Empresa 2	
		Publicidad	*Sin Publicidad*
Empresa 1	*Publicidad*	10, 5	15, 0
	in publicidad	6, 8	6, 2

Hay un solo equilibrio a lo Nash en donde ambos hacen publicidad. Asimismo, se observa la solución con EIE.

Figura 27. Matriz de pagos Equilibrio de Nash en publicidad.

El aumento del tamaño de planta (Invertir o no) frente a potenciales entrantes (Entrar o no entrar). que también puede llamarse el juego de la amenaza:

"Juego de la amenaza"		Empresa 2	
		Entrar	*No entrar*
Empresa 1	*Invertir*	10, 5	15, 0
	No invertir	6, 8	10, 2

Figura 28. Matriz de pagos Equilibrio de Nash Invertir E1 y entrar E2.

Producir un nuevo avión o no.

"Nuevos aviones"		Empresa 2	
		Producir	*No producir*
Empresa 1	*Producir*	-10, -10	100, 0
	No producir	0, 100	0, 0

Figura 29. Matriz de pagos Juego sin equilibrio. (Pyndick Pág. 504)

Resumen del Capítulo II.

1. Juegos estáticos con información completa.

   Es cualquier situación en la que los jugadores teniendo el conocimiento de la estructura del juego, reglas, recompensas y, estrategias que son de dominio de todos y cada uno de ellos, actúan con interdependencia estratégica y, toman sus decisiones simultáneamente o desconociendo la decisión que toman los otros jugadores, buscando obtener el mejor resultado.

2. Estrategias Puras (ciertas)

   La elección de la acción se realiza con el 100% de certeza sobre el resutado (El resultado es seguro).

   La representación del juego es una matriz de pagos que usualmente es de 2 jugadores (J1 y J2, pudiendo haber más jugadores) y si cada uno tiene 2 acciones entonces tendría el número de estrategias de 2x2, si de J1 tiene 3 acciones y J2 tiene 2 acciones entonces el número de estrategias es de 3x2, etc.

Ejemplo, en términos generales:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Forma Estratégica o Normal</td><td colspan="2">J2</td></tr>
<tr><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J1</td><td>A</td><td>u_1^A, u_2^C</td><td>u_1^A, u_2^D</td></tr>
<tr><td>B</td><td>u_1^B, u_2^C</td><td>u_1^B, u_2^D</td></tr>
</table>

Figura 30. Matriz de pagos

Jugadores (2): J1 y J2
Acciones: J1, A y B; J2, C y D.
Estrategias: (A, C), (A, D), (B, C), (B, D)
Pagos: $(u_1^A, u_2^C)(u_1^A, u_2^D), (u_1^B, u_2^C), (u_1^B, u_2^D)$
Donde: $u_1^A =$ es la utilidad del jugador 1 cuando realiza la acción A.

Se establece la elección de las mejores estrategias en la teoría de juegos, mediante el Equilibrio a lo Nash que es una situación de juego en la que un jugador elige la estrategia que le resulte en el mejor pago, dado la elección de las estrategias con mejor pago que realizan los demás jugadores.

Estrategias dominantes. Es aquella estrategia de un jugador cuyo resultado a cualquier combinación de estrategias que elijan los otros jugadores, es mayor a cualquier resultado de otra estrategia que puede darse con cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores, es decir, el jugador elige la estrategia que le resulte en el mejor pago independientemente de la elección que realicen el resto de jugadores.

3. Las estrategias dominantes:

   Estrategias estrictamente dominantes:

   Se da cuando la estrategia s_i' tiene un mayor pago a s_i'' para toda la combinación de estrategias (s_{-i}) de los otros jugadores, :

$$u_i\big(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i'}, s_{i+1}, \dots, s_n\big) > u_i\big(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i''}, s_{i+1}, \dots, s_n\big)$$

   También: $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$

   Estrategias débilmente dominantes

   Se da cuando la estrategia s_i' tiene un mayor o igual pago a s_i'' para toda la combinación de estrategias (s_{-i}) de los otros jugadores, :

$$u_i\big(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i'}, s_{i+1}, \dots, s_n\big) \geq u_i\big(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i''}, s_{i+1}, \dots, s_n\big)$$

   También: $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$

4. La Eliminación iterativa estricta (EIE).

   Es un método de solución del juego en la que se elije(n) la(s) estrategia(s) estrictamente dominantes, siempre que existan, desechando la(s) estrategia(s) estrictamente dominadas.

   La elección resulta en una solución única independientemente de quien inicia el juego y del orden de eliminación que se realice.

5. La Eliminación iterativa débil (EID)

   Es un método de solución del juego en la que se elije(n) la(s) estrategia(s) débilmente dominantes, desechando la(s) estrategia(s) débilmente dominada(s), siempre que existan, que resulta en una solución distinta que depende de quién inicia el juego y del orden de eliminación que se realice.

El argumento básico de solución por eliminación es que ningún jugador racional juega estrategias dominadas (ni estrictamente dominadas, ni débilmente dominadas)

Si hay estrategias dominantes, entonces a las estrategias que domina se les conoce como estrategias dominadas.

Cuando no hay equilibrio de Nash en el juego con estrategias puras se extiende el juego a estrategias mixtas y se amplia también la solución en equilibrio de Nash.

6. Estrategias Mixtas (Estrategias aleatorias, con incertidumbre)

   Si el juego de estrategias puras no presenta equilibrios de nash, las estrategias mixtas garantizan la existencia de una solución, cuando se les define una probabilidad de ocurrencia a cada estrategia pura de cada jugador, convirtiéndose las estrategias puras en estrategias mixtas, es decir, la función de pagos deja de ser determinista pasando a ser aleatoria.

   Se denomina estrategia mixta del jugador *i* (σ_i) a toda distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras del jugador *i* (S_i), de modo que $\sigma_i = \left(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^k\right)$ donde σ_i^j para *j* = 1, …, *k*. es la probabilidad que el jugador *i* asigna a su estrategia *j* y, considerando que $\sigma_i^j \geq 0$ y, $\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^k = 1$

   Al considerarse probabilidades de ocurrencia a las estrategias de cada jugador (estrategias mixtas,) entonces los pagos que corresponden son pagos probables o pagos esperados de acuerdo a la estrategia elegida.

7. Procedimiento 1 de solución estrategias mixtas.

   En un juego de 2(X, Y) x 2 (*x*, *y*) estrtategias, es cuando J1 juega sus estrategias puras (A, B) considerando las probabilidades de J2 (*q*, *1* - *q*) para jugar sus estrategias puras (*x*, *y*) y cuando J2 juega sus estrategias puras considerando las probabilidades de J1 (*p*, *1 - p*) para jugar sus estrategias puras (X, Y):

"CASO 2"		J2		
		x	*y*	
J1	*X*	4, 1	4, 4	*p*
	Y	1, 10	10, 1	$1-p$
		q	$1-q$	

$U_1(X,(q.1-q))$: $q(4) + (1 - q)(4) = 4$

$U_1(Y,(q.1-q))$: $q(1) + (1 - q)(10) = 10 - 9q$

$U_1(X,(q.1-q)) + U_1(Y,(q.1-q))$:
$4 = 10 - 9q \dashrightarrow q = 2/3$

Figura 31. Matriz de pagos base para estrategias mixtas.

Con q = 2/3 J1 es indiferente entre sus estrategias X o Y. Para J2, *p* = 3/4

ENEM = {(3/4 X + 1/4 Y, 2/3 *x* + 1/3 *y*)}

Tabla 4 *Respuesta óptima de cada jugador*

Respuesta óptima de J1		Respuesta óptima de J2	
$q = 2/3$	$p\epsilon[0,1]; X \ o \ Y$	$p = 3/4$	$q\epsilon[0,1]; x \ o \ y$
$q > 2/3$	$p = 1 \ (X)$	$p > 2/3$	$q = 1 \ (y)$
$q < 2/3$	$p = 0 \ (Y)$	$p < 2/3$	$q = (x)$

Procedimiento 2 de solución estrategias mixtas para juegos de 2 x 2. En este caso, se utilizan las probabilidades de ambos jugadores, en términos generales, para establecer la función de pagos de cada jugador y finalmente utilizar el cálculo diferencial a fin de obtener el resultado óptimo de un jugador a las estrategias mixtas del otro.

CASO 2”

		J2		
		x	y	
J1	X	4, 1	4, 4	p
	Y	1, 10	10, 1	$1-p$
		q	$1-q$	

Figura 32. Matriz de pagos base para estrategias mixtas.

$$U_1[(p,1-p),(q,1-q)]$$

$$= pU_1\big(X,(q,1-q)\big) + \ (1-p)U_1\big(Y(q,1-q)\big)$$

$$= \ p[q(4)+(1-q)(4)] + (1-p)[q(1)+(1-q)(10)]$$

$$= 4pq + 4p - 4pq + q - pq + 10 - 10p - 10q + 10pq$$

$$= -6p - 9q + 9pq + 10$$

$$\max_{p} U_1[(p,1-p),(q,1-q)] = -6p - 9q + 9pq + 10$$

Si existen soluciones interiores, se determinan derivando la utilidad esperada de J1 con respecto a p e igualando a cero, como sigue:

$$\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0 = -6 + 9q \Longrightarrow q = 2/3$$

De igual modo para J2: $p = 3/4$

Determinando los pagos esperados de las estrategias mixtas.

a. Con las probabilidades de las estrategias de J1 y J2.

$$\sigma_1 = (3/4,\ 1/4) \ \text{y} \qquad \sigma_2 = (2/3,\ 1/3)$$

b. Separamos en matrices los pagos de estrategias puras de cada jugador:

$$A_1 = \left[u_1\left(s_1^i . s_2^j\right)\right] \quad y \quad A_2 = \left[u_2\left(s_1^i . s_2^j\right)\right]$$

Matrices de “Caso 2”:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Determinamos los pagos esperados de la estrategia mixta:

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_1 \sigma_2^t \qquad U_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A_2 \sigma_2^t$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = (3/4, \; 1/4) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = (13/4 \;\; 22/4) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 4$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = (3/4, \qquad 1/4) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = (13/4, \qquad 13/4) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 13/4$$

Pagos esperados con equilibrio de Nash en estrategias mixtas (ENEM): $(4, \; 13/4)$

CAPÍTULO 3

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

Índice temático.

En el presente capítulo se abordan los siguientes temas:

3.1 Definición y características de juegos dinámicos con información completa.

3.2 Nomenclatura y elementos del juego dinámico con información completa.

3.3 Forma de representación del juego

3.4 Relación del juego dinámico con información completa y el juego estático con información completa

3.5 Identificación de acciones, estrategias y perfil estratégico de un juego dinámico con información completa

3.6 Los subjuegos de un juego dinámico

3.7 Métodos de solución del juego dinámico

3.8 Las estrategias mixtas en los juegos dinámicos

3.9 El Juego dinámico. Ejemplo de aplicación en la economía.

Resumen

Objetivos del Capítulo

- Interpretar el juego dinámico con información completa (Perfecta e Imperfecta).
- Analizar sus componentes y sus interrelaciones.
- Obtener la solución del juego dinámico.
- Identificar la aplicación en la economía.

CAPÍTULO 3

LOS JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

(Perfecta e Imperfecta)

3.1 Definición y características

En el capítulo 2, habíamos definido que es un juego luego, que es un juego estático para finalmente definir el Juego estático con información completa.

En este capítulo corresponde definir los juegos dinámicos con información completa, observándose que lo que cambia es el concepto de estático por dinámico. En tal sentido, y teniendo en cuenta que la característica fundamental de los juegos estáticos es que las decisiones que toman los jugadores son simultáneas o la efectúan sin conocer las decisiones que han tomado los otros jugadores, podemos indicar que:

Se denominan juegos dinámicos cuando los jugadores toman sus decisiones conociendo la decisión que ha tomado el otro jugador, es decir, sus decisiones son secuenciales, uno después del otro, conociéndose, además:

a. El momento que se encuentra en el juego,
b. A que jugador le corresponde jugar,
c. Que acciones puede realizar cuando le toque jugar,
d. Que sabe dicho jugador del desarrollo anterior del juego y
e. Cuál es el resultado del juego para cada curso de acción que se elija.

En consecuencia, se define:

Juegos dinámicos con información completa

"Es cualquier situación en la que los jugadores teniendo el conocimiento de la estructura del juego, reglas, acciones y recompensas que son de dominio de todos y cada uno de ellos, actúan con interdependencia estratégica y, toman sus decisiones en el momento del juego que le corresponde jugar, *conociendo* las decisiones que han tomado el resto de jugadores (sus decisiones son ***secuenciales***), buscando obtener el mejor resultado."

Características del juego dinámico con información completa.

- Decisiones secuenciales

  Cada jugador toma su decisión conociendo las decisiones que tomaron los otros jugadores por lo que el jugador conoce el desarrollo anterior del juego, el momento en que se encuentra el juego, la jugada última que se ha realizado y a quién le corresponde jugar.

- Información completa.

  La información es de dominio de todos y cada uno de los jugadores, sobre la estructura, reglas, acciones y, recompensas o pagos.

- Jugadores Racionales.

  Las decisiones que toma el jugador buscan obtener la maximiza ganancia u optar por el mejor pago que resulte de la elección de la acción o acciones del juego.

3.2 Nomenclatura y elementos del juego dinámico con información completa.

Elementos del Juego dinámico. (Términos básicos)

Son los mismos que se han especificado para los juegos estáticos con información completa en lo referente a los jugadores, acciones, pagos, racionalidad, reglas y conocimiento común de la información a los cuales se adicionan los nodos, acciones, información.

Nomenclatura

La nomenclatura de los términos básicos o elementos de un juego dinámico, es:

$\Gamma = \{J, (X, \sigma, s), (A, \alpha, \text{a}), \{H, h\}, (A(h))_{h \in H}, \rho, r\}$, donde:

Γ **=** Juego dinámico

$\boldsymbol{J}$ = Conjunto de Jugadores

Identifica todos los jugadores del juego o quienes participan en el juego tomando decisiones que al ser un juego secuencial se tiene en cuenta:

- El momento del Juego

  Es el momento en que al jugador le corresponde jugar.

- La información de las alternativas de decisión

  Es la información que tiene el jugador de las acciones que puede realizar cuando le corresponde jugar

- Información del desarrollo previo al momento del juego

  Es la información que tiene el jugador de las acciones previas ocurridas al momento que le corresponde jugar

  X = Nodos.

  Los nodos identifican el momento del juego que se encuentra el jugador, el conocimiento que tiene sobre el desarrollo del juego y la información que cuenta para continuar el juego y, para obtener el pago producto del resultado de su decisión como respuesta a las decisiones de los otros jugadores.

  x = Un nodo.

  Representa una posible situación del juego

  Podemos identificar los diferentes nodos del juego, ***según la ubicación*** en que se encuentra en el juego: Nodo inicial, nodos de decisión y nodos terminales y ***según el momento*** del juego: Nodos predecesores y Nodos siguientes, como sigue:

  - X_0 = Nodo inicial.

    Identifica el inicio o comienzo del juego que puede ser realizado por un jugador o por el azar. A este nodo no le precede ningún otro nodo.

  - XT = Nodos finales o Terminales.

Identifican el final del juego y los resultados o pagos (ganancias) que cada uno de ellos presenta. A este nodo no le sigue ningún otro nodo o este nodo no precede a ningún otro nodo.

- XD = Nodos de decisión.

  Identifican los momentos en que el jugador debe tomar la decisión para realizar la acción que más le conviene.

- XZ = Nodos de azar.

  Son nodos que representan una jugada de azar

- **σ** = Nodos predecesores.

  Son los nodos anteriores a un único nodo *x* de un nodo de decisión (XD) o de un nodo terminal (XT).

- **s** = Nodos siguientes.

  Son los nodos siguientes a un único nodo *x* de un nodo de decisión (XD) o de un nodo inicial (X_0).

A = Conjunto de acciones del juego.

Son todas las acciones de elección que tienen los jugadores que participan en el juego o todas las alternativas de acciones que presenta el juego.

- A*i* = Conjunto de acciones del jugador i.

  Son todas las alternativas de acción que tiene un jugador *i* ya sea en el inicio del juego o como reacción de la acción realizada por otro jugador que lo ha antecedido en el juego.

- **α =** Acciones predecesoras.

  Son las acciones anteriores al nodo de decisión.

- a = Acciones siguientes.

  Son las acciones siguientes al nodo que se alude

H = Familia de conjuntos de información del juego.

Son todos los conjuntos de información que tienen todos los jugadores en cada uno de sus nodos y cuyas acciones disponibles son de su elección.

- h_i = El conjunto de información del jugador i.

  Son todos los conjuntos de información que contienen los nodos de decisión que pertenecen a un mismo jugador y cuyas acciones disponibles son de su elección.

- h_x = El conjunto de información de un nodo.

  Es el conjunto de información que presenta un nodo x que pertenece a un nodo X, de cuyas acciones disponibles los jugadores deben decidir qué acción tomar. Se tiene en cuenta que el jugador dependiendo del juego puede o no conocer en que nodo de dicho conjunto de nodos se encuentra.

3.3 Forma de representación del juego

La representación del juego dinámico se realiza mediante el denominado ***"árbol de decisiones"***, que se compone por:

- Las ramas.

  Representadas por flechas direccionadas, indican las distintas acciones que pueden tomar a elección de los jugadores en sus decisiones que realizan en el nodo en que se encuentran.

- Los Nodos (Círculos que pueden o no ser rellenos).

  Son el inicio de las ramas e identifican el inicio de las acciones.

  Gráfico de los árboles de decisión

  Los "árboles de decisión" se pueden graficar orientando la dirección de las ramas de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo.

En los árboles de decisión con orientación de arriba hacia abajo, los nodos y acciones se leen de arriba hacia abajo hasta llegar al resultado del juego y para evaluar la decisión se comparan de izquierda a derecha.

En los árboles de decisión con orientación de izquierda a derecha, los nodos y sus acciones se leen de izquierda a derecha hasta llegar al resultado del juego y para evaluar la decisión se comparan de arriba hacia abajo.

Veamos la representación de un juego dinámico (forma extensiva), que en la primera representación del juego las ramas van de arriba hacia abajo y en la segunda representación del juego, las ramas van de izquierda a derecha, como se aprecia en las siguientes figuras:

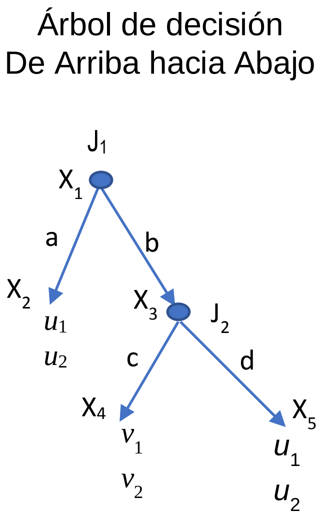


Figura 33. Árbol de decisión de arriba hacia abajo modo general

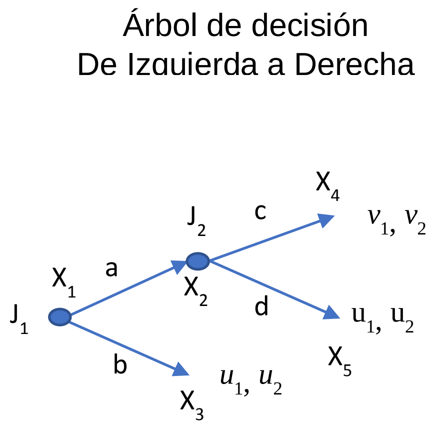


Figura 34. Árbol de decisión de izquierda a derecha

Jugadores, dos: J_1 y J_2

Nodos, 5: X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

Nodos de decisión, 2: X_1, X_3

Nodos Terminales, 3: X_2, X_4, X_5

Jugadores, dos: J_1 y J_2

Nodos, 5: X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

Nodos de decisión, 2: X_1, X_2

Nodos Terminales, 3: X_3, X_4, X_5

Resultados (Pagos), 3: $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \end{bmatrix}$ Resultados (Pagos), 3: (u_1, u_2)

(v_1, v_2)

$(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$

Acciones, 4: J1: (a, b) Acciones, 4: J1 $\begin{bmatrix} a, \\ b \end{bmatrix}$ J2 $\begin{bmatrix} c, \\ d \end{bmatrix}$

J2: (c, d)

Las estrategias, en el presente caso corresponden a sus propias acciones dado que se realizan por oportunidad iniciando el juego o como respuesta a la decisión tomada por un jugador.

3.4 Relación del juego dinámico (secuencial) con información completa y el juego estático (simultáneo) con información completa

Si bien existe una diferencia que es significativa entre estos 2 juegos y es el conocimiento de la jugada del adversario, esto no quiere decir que ambos juegos son excluyentes sino que por el contrario el juego estático es una particularidad del juego dinámico o lo que es lo mismo en términos formales el juego estático está contenido en el juego dinámico en el cual las jugadas se realizan secuencialmente, siendo estático cuando cada jugador en el momento de su jugada desconoce la jugada de quién lo antecedió y es un juego dinámico si es que conoce la jugada que hizo el jugador que lo antecede.

No obstante, como ya se ha mencionado, el juego estático al estar contenido en el juego dinámico, conserva las mismas características dado que al pasar del juego estático se le quita la simultaneidad de las decisiones para convertirla en una decisión secuencial y de este modo transformar el juego estático a juego dinámico sin perder los niveles de análisis y de decisión que se dan en este último.

Como consecuencia de lo anterior podemos afirmar que todo juego estático se transforma en un juego dinámico sin perder la esencia del juego y, el análisis del mismo no cambia.

Sin embargo, no podemos decir lo mismo si la transformación es de un juego dinámico a un juego estático, dado que en este caso como juego estático puede distorsionar la información original del juego dinámico.

Ejemplo de transformación de un juego estático a juego dinámico:

		J2	
		Confiesa	No confiesa
J1	Confiesa	3, 3	6, 1
	No confiesa	1, 6	5, 5

Figura 35. Matriz de pagos El dilema del prisionero con beneficios

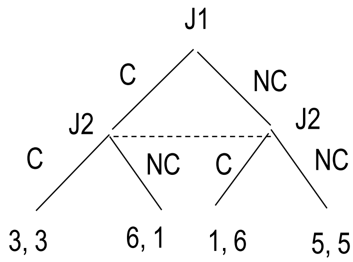


Figura 36. Árbol de decisión del juego estático

En ambos casos el análisis de resolución del juego produce el mismo resultado que es que ambos prisioneros Confiesen.

En el árbol de decisión del juego dinámico, observamos una línea discontinua que une los nodos de decisión del jugador 2 que identifica que este jugador no tiene conocimiento de la decisión (acción) que ha tomado el jugador 1 por lo que la decisión de J2 será la que le reporta mejor beneficio teniendo en cuenta que la decisión que tomará el J1 también debe ser la que le reporta mejor beneficio.

3.5 Identificación de acciones, estrategias y perfil estratégico de un juego dinámico con información completa.

En esta parte del desarrollo de los juegos dinámicos con información completa mostramos las acciones y estrategias de casos que se desarrollan en un juego extensivo para ser vistas en una transformación a la forma estratégica.

Ejemplo. Árboles de decisión de un Juego dinámico

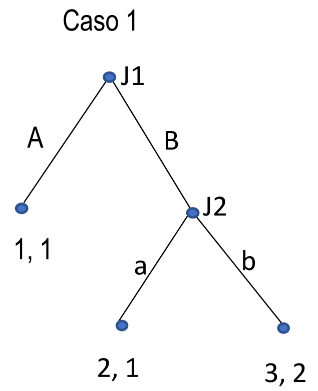


Figura 37. Árbol de decisión de pago de J1 con acción A (1, 1)

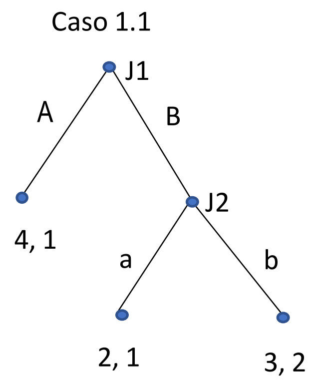


Figura 38. Árbol de decisión pago de J1 con acción A (4, 1)

Es un juego dinámico en la que intervienen 2 jugadores (J_1 y J_2) y en la que cada jugador tiene 2 acciones para elegir ($A_1 = \{A, B\}$ y $A_2 = \{a, b\}$) y en la que las estrategias de cada jugador son sus propias acciones.

A estos juegos también se les conoce como juegos con información perfecta, dado que cada uno de los jugadores conoce las estrategias del otro jugador y toman las decisiones conociendo la decisión que toma el otro jugador.

Veamos el Caso 1, transformado en un juego de forma estratégica:

		J2	
		a	B
J1	A	1, 1	1, 1
	B	2, 1	3, 2

Figura 39. Matriz de pagos, forma estratégica del juego dinámico

Los perfiles estratégicos A-a y A-b no existen en el juego extensivo puesto que el juego termina con la acción del jugador 1 cuando elige A.
El equilibrio de Nash, que es único, se establece en el perfil B-b que es el mismo del juego extensivo.

Como se observa la estrategia B de J1 es estrictamente dominante a la estrategia A y la estrategia b de J2 es débilmente dominante a la estrategia a, al tener ambos, estrategias dominantes no juegan las estrategias dominadas y obtienen su mejor beneficio en la estrategia (B, b).

Ahora veamos la variante en el caso 1.1

En este juego extensivo que es una variante del juego extensivo del caso 1, únicamente en el resultado de (4, 1) cuando J1 juega A, en vez de (1, 1) del caso 1.1 y, por tanto, al ser el J1 que inicia el juego éste juega su estrategia A y acaba el juego.

Ahora veamos esta forma extensiva del Caso 1.1. transformada en su forma estratégica, en la que el análisis es como sigue:

		J2	
		a	b
J1	A	4, 1	1, 1
	B	2, 1	3, 2

Figura 40. Matriz de pagos, 2 equilibrios a lo Nash.

Hay 2 equilibrios a lo Nash A-a y B-b, ambos favorables al J1 siendo mejor resultado (MR) para J1 el perfil estratégico (A-a).

Con el método de solución EID, el perfil estratégico que sobrevive es B-b, diferente a la solución del juego extensivo que terminaría el juego cuando el J1 elige la acción A con pagos de (4, 1).

Ejemplos, Juegos dinámicos: Casos 2 y 2.1

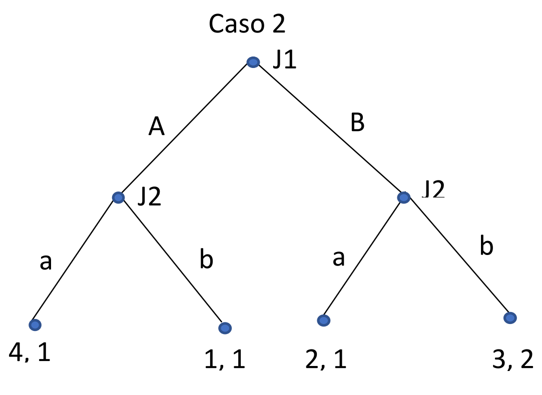


Figura 41. Juego con información perfecta, los conjuntos de información son unitarios.

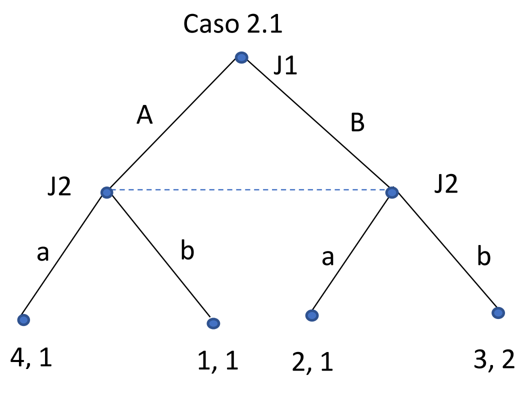


Figura 42. Juego con Información imperfecta.

El conjunto de información es:

Acciones	binario.
Acciones de J1, A_1 (A, B);	Acciones de J1, A_1 (A, B);
Acciones de J2, A_2 (a, b)	Acciones de J2, A_2 (a, b)
Estrategias	Estrategias
Estrategias de J1, S_1 (A, B)	Estrategias de J1, S_1 (A, B)
Estrategias de J2, S_2 (aa, ab, ba, bb)	Estrategias de J2, S_2 (a, b)

Se lee: ab, J2 juega a si J1 juega A y J2 juega b si J1 juega B y así…

El juego extensivo en la forma estratégica

Caso 2		J2			
		aa	ab	ba	bb
J1	A	4, 1	4, 1	1, 1	1, 1
	B	2, 1	3, 2	2, 1	3, 2

Figura 43. Matriz de pagos del Juego dinámico Caso 2

Caso 2.1		J2	
		a	b
J1	A	4, 1	1, 1
	B	2, 1	3, 2

Figura 44. Matriz de pagos del J. dinámico Caso 2.1.

En estos juegos de los casos 2 y 2.1 se diferencian en que, en el primer caso, las estrategias del jugador 2 son establecidas relacionando las acciones que pudiera elegir en sus distintos nodos de decisión y que derivan de las elecciones que realiza el jugador 1, en tanto que las estrategias del jugador 2 en el caso 2.1 se derivan de la observación de la línea punteada que une los nodos de decisión y que identifican la decisión de J2 desconociendo la elección que ha realizado el J1 o lo que es lo mismo decidiendo simultáneamente a la decisión del J1.

La transformación del juego extensivo a un juego en forma estratégica es sustancialmente diferente si las decisiones de un jugador se revelan simultáneas mediante la línea punteada en los nodos de decisión o secuenciales en las que no existe vinculación en los nodos de decisión.

En el caso 2, la estrategia A ab, se lee que el jugador 2 elige a si el jugador 1 elige A y elegiría b si el jugador 1 elige B y de la misma manera con las otras estrategias. Ejemplo.

Árboles de decisión

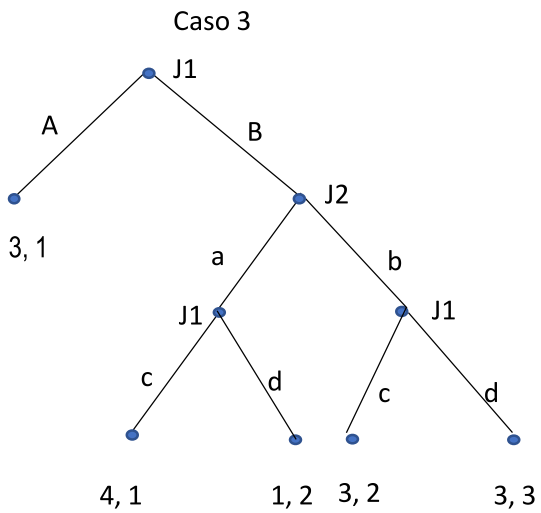


Figura 45. Juego dinámico Caso 3.

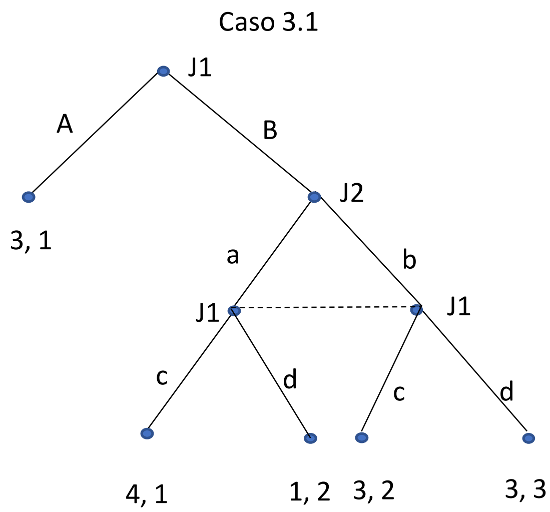


Figura 46. Juego dinámico Caso 3.1.

Acciones

Acciones de J1, A1 (A, B, c, d);

Acciones del J2, A2 (a, b)

Estrategias

Estrategias de J1, S1 (A cc, A cd, A dc, A dd B cc, B cd, B dc, B dd)

Estrategias de J2, S2 (a, b)

Acciones

Acciones de J1, A1 (A, B, c, d);

Acciones de J2, A2 (a, b)

Estrategias

Estrategias de J1, S1 (A c, A d, (B c, B d)

Estrategias de J2, S2 (a, b)

		J2	
		a	b
J1	A cc	3, 1	3, 1
	A cd	3, 1	3, 1
	A dc	3, 1	3, 1
	A dd	3, 1	3, 1
	B cc	4, 1	3, 2
	B cd	4, 1	3, 3
	B dc	1, 2	3, 2
	B dd	1, 2	3, 3

Figura 47. Matriz de pagos del Juego Dinámico Caso 3.

		J2	
		a	b
J1	A c	3, 1	3, 1
	A d	3, 1	3, 1
	B c	4, 1	3, 2
	B d	1, 2	3, 3

Figura 48. Matriz de pagos del juego dinámico Caso 3.1.

3.6 Los Subjuegos de un juego dinámico

En un juego G dinámico y con información completa se denominan subjuegos G’ a la parte del juego G que tiene inicio en un nodo de decisión x hasta el resultado final, donde el nodo x es un conjunto de información unitario (no se rompe ningún conjunto de información).

Reglas para determinar un subjuego.

- El juego G es también un subjuego de sí mismo y los subjuegos G’ que son parte de G se les llama subjuegos **propios**.
- Si el juego G es de información perfecta, cualquier parte del juego que comience en un nodo de decisión es un subjuego, dado que su conjunto de información es unitario.
- Un subjuego puede empezar en un nodo de azar, si el conjunto de información es unitario y lo es si la información es perfecta.
- También es un subjuego si sólo interviene un jugador.
- Se tiene en cuenta que las decisiones del jugador deben ser coherentes en el momento de tomar una decisión y lo que consideraban antes de iniciar el juego.

- Si un juego extensivo es representación de un juego estratégico (normal) éste no tiene ningún subjuego propio, debido a que solo hay un único conjunto de información unitaria que se da en el nodo inicial.

Ejemplos.

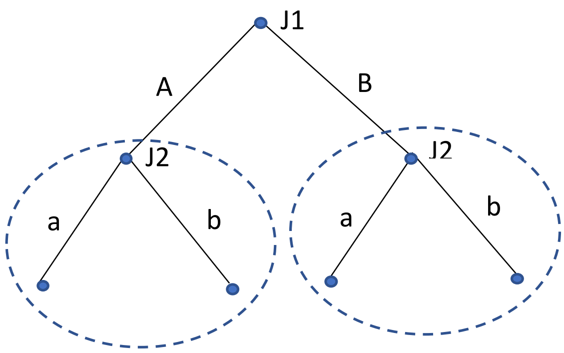


Figura 49. 2 sub juegos propios
3 subjuegos que incluye el mismo juego
Caso 4.

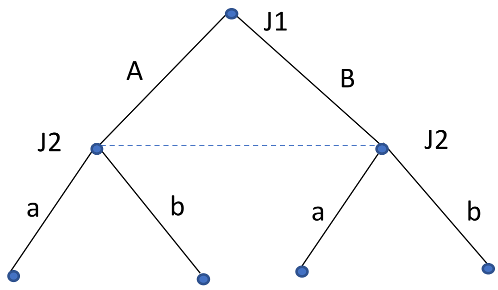


Figura 50. Ningún subjuego propio
1 subjuego que es el mismo juego
Caso 4.1

3.7 Métodos de solución del juego Dinámico

Equilibrios de Nash de un juego dinámico derivado de los resultados en su representación de forma estratégica.

Una propuesta de solución son los equilibrios de Nash que resultan de un juego dinámico en su representación de forma Estratégica, esto es posible considerando que todo juego dinámico que se representa en forma extensiva puede representarse también en forma estratégica (normal) aun cuando en esta representación ***se pierde información*** por lo que se debe considerar que la razonabilidad de los equilibrios en la forma estratégica no es la misma razonabilidad de los equilibrios en la forma extensiva.

Ejemplo

En el siguiente juego básico que deriva del caso 4 y en la que la empresa 1 produce un bien que para competir con la empresa 2 son diferenciados identificándolos como A y B o también se puede indicar que la empresa 1 produce 2 tipos de bienes, en tanto la segunda empresa reacciona produciendo sus propios bienes diferenciados a y b o sus propios bienes que harán competencia a los bienes que produce la empresa 1, representando el juego:

Del ejemplo Caso 4 se consideran pagos.

		J2			
		aa	ab	ba	bb
J1	A	2, 3	2, 3	3, 1	3, 1
	B	1, 2	5, 3	1, 2	5, 3

Figura 51. Matriz de pagos del juego dinámico Caso 4 con pagos

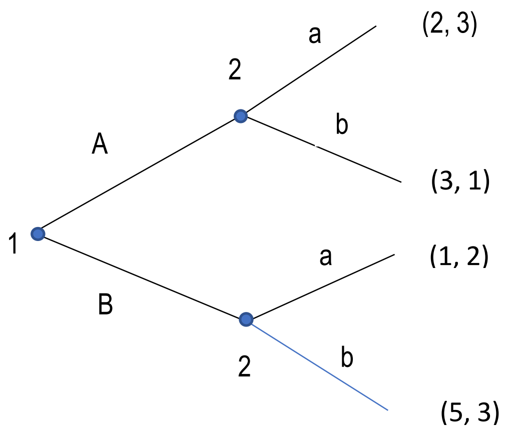


Figura 52. Juego dinámico forma extensiva hacia la derecha Caso 4.

En la forma estratégica se observa que hay 3 equilibrios a lo Nash, (A, aa), (B, ab) y (B, bb) y de los cuales se desprende que cuando el jugador 1 juega A el jugador 2 reacciona jugando también y resultando en el pago (2, 3) y, cuando el jugador 1 juega B el jugador 2 reacciona jugando b que presenta el pago (5, 3) y es lo que se daría también en el juego dinámico, como veremos luego.

Ahora, veamos una variante del juego anterior que es modificado y corresponde al caso 4.1, considerando que el jugador 2 decide su elección sin conocer la elección que ha hecho el jugador 1, se convierte en el juego estático con información completa.

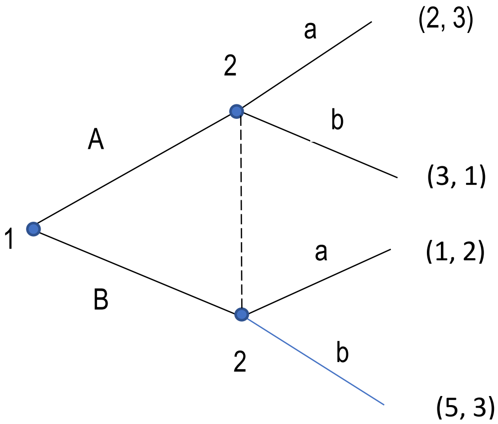


Figura 53. Forma extensiva
Caso 4.1. Información incompleta.

		J2	
		a	b
J1	A	2, 3	3, 1
	B	1, 2	5, 3

Figura 54. Forma estratégica del juego dinámico Caso 4.1

En este juego se observa directamente tanto en la forma matricial como en la forma extensiva los equilibrios a lo Nash que se dan en los perfiles estratégicos Aa y Bb.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS)

Este concepto de equilibrio fue propuesto en 1965 por Reinhard Selten, quién recibió el premio Nobel de Economía en 1994, por éste y otros conceptos de equilibrio como el equilibrio perfecto de mano temblorosa que contribuyeron a la teoría de Juegos.

El Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) se da en un juego dinámico cuando un perfil de estrategias s del juego G es un equilibrio de Nash EN y si la restricción s a cualquier subjuego de G es un EN del subjuego.

El Resultado Perfecto en Subjuegos (RPS), se da cuando un resultado r del juego G puede obtenerse como desarrollo de un perfil estratégico s que es un ENPS.

Ejemplo

En el caso 4, vimos que en la forma estratégica del juego hay 3 equilibrios a lo Nash que están en los perfiles estratégicos (A, aa), (B, ab) y, (B, bb).

En el análisis del juego global, podemos ver que el sub-juego propio del jugador 2 derivado de la acción A del jugador 1 tiene como mejor resultado a, sin embargo esa opción de juego es nula dado que el jugador 1 no elegirá A debido que su mejor elección es B y en la que el equilibrio de Nash es la senda Bb con un pago de (5,3) por lo que el ENPS en este caso es Bb en el juego global que se corresponde con el EN en el perfil estratégico (B, ab) y (b, bb).

Asimismo, en el caso 2.1 se identificó en la forma estratégica 2 equilibrios a lo Nash en los perfiles (A, a) y (B, b).

En el análisis global del juego en el caso 2,1 podemos identificar que no hay subjuegos propios y que el único EN es el del sendero Bb que se corresponde con el EN de la forma estratégica que está en el perfil (B, b) por tanto el **ENPS** es Bb con los pagos (5, 3)

Debemos enfatizar que el ENPS se da cuando el juego dinámico presenta subjuegos propios o lo que es lo mismo cuenta con conjuntos de información unitaria.

Asimismo, podemos establecer que todo juego estático finito al contar con un equilibrio de Nash tiene también un ENPS, lo mismo ocurre con los juegos dinámicos finitos. (pag. 243 -252 Joaquín Pérez)

Juegos Dinámicos con Información completa y Perfecta.

Inducción hacia atrás

Inducción hacia atrás es un método de solución para los juegos dinámicos con información completa y perfecta, el resultado se relaciona con el concepto de ENPS que es único cuando ningún jugador tiene más de una acción óptima en cada nodo de decisión

El algoritmo para encontrar el resultado con el método de inducción hacia atrás es como sigue:

- Se identifican todos los subjuegos de los últimos lugares que se corresponden con los nodos de decisión que preceden a los nodos terminales. En esas condiciones, estos subjuegos tienen un único jugador.
- Se elimina cada uno de esos subjuegos que no tengan acción óptima del jugador que interviene, salvo su nodo de comienzo que tiene la acción óptima y pasa a ser nodo terminal del juego global.
- Se repite el procedimiento de eliminación de los últimos subjuegos hasta llegar al nodo inicial del juego, en el que se identifica la acción óptima en cada nodo de decisión y el perfil estratégico óptimo para cada jugador.
- Se identifica también el sendero de elección de acciones de cada jugador que conduce del nodo inicial al nodo final que contiene el perfil estratégico óptimo y que es ENPS del juego.

Otras consideraciones del algoritmo de inducción hacia atrás.

- Si en un nodo de decisión hay varias acciones óptimas entonces habrá varios resultados perfectos en subjuegos y varios ENPS.
- Si el juego no es de información perfecta (contiene conjunto no unitario) el algoritmo puede ser no aplicable y generalmente no lo es.

Ejemplos de solución con el algoritmo de inducción hacia atrás

Para que haya solución con el algoritmo de inducción hacia atrás, debemos recordar que el juego dinámico debe ser de información completa y perfecta, es decir, que el conjunto de información de cada jugador debe ser unitario.

En este juego con los requisitos anteriores, utilizamos el algoritmo de inducción hacia atrás:

- Se identifican los últimos subjuegos

En el caso corresponden a los subjuegos propios que se inician en los nodos de decisión del jugador 2 con las acciones a y b.

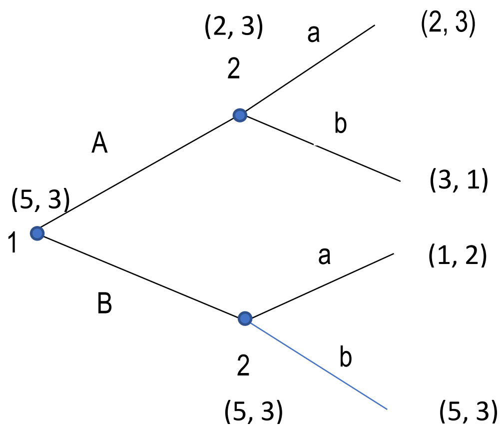


Figura 55. Juego dinámico Caso 4 con información completa e inducción hacia atrás.

- Se identifican los mejores resultados para el jugador 2 en cada subjuego último, que son:

  (2, 3) cuando el jugador 1 ha elegido A y el J2 elige a, y

  (5, 3) cuando el J1 ha elegido B y el jugador 2 elige también b.

- Estos valores se ubican a la altura de los correspondientes nodos de decisión del jugador 2
- El jugador 1 compara los resultados mejores que se encuentran a la altura de los nodos de decisión del J2 y elige el que le resulte un mejor pago, en el caso es (5, 3) que es el ENPS y cuyo resultado se da en el sendero de las acciones Bb.

3.8 Las estrategias mixtas en los juegos dinámicos

Las estrategias mixtas se determinan cuando en una forma estratégica derivada de un juego dinámico no se identifica en estrategias puras un equilibrio a lo Nash.

La solución del juego con estrategias mixtas al estar representada mediante una matriz de pago o en su forma estratégica se desarrolla tan igual como se ha desarrollado la solución en los juegos estáticos.

3.9 El Juego dinámico. Ejemplo de aplicación en la economía

DUOPOLIO DE STACKELBERG (1934)

Este es un modelo elaborado por Stackelberg que constituye un ejemplo de un juego dinámico con información completa y perfecta. En la que dos empresas que compiten en un mercado y en la que las acciones son continuas y secuenciales en 2 etapas.

Actualmente a este modelo se le identifica con el momento de intervención que tienen las empresas donde la que actúa primero es la empresa Líder o se convierte en la empresa Líder que produce la cantidad de bien conociendo que la otra empresa reaccionará para producir buscando su mejor beneficio por lo que esta última interviene conociendo la acción de la primera empresa es la seguidora.

El modelo

- Representemos las empresas con las siglas E1 y E2
- El producto es un bien homogéneo
- La demanda de mercado es decreciente (pendiente negativa) y lineal en el intervalo [0, a] siendo la función de demanda inversa P =a - Q
- Los costos marginales de ambas empresas son constantes, iguales y menores que a de la demanda de mercado
- Que en el mercado se vende toda la producción (de las dos empresas).

Aplicación

De acuerdo al modelo se tiene:

La función de demanda inversa: $P(Q) = a - Q$ donde $Q < a$ y $Q = q_1 + q_2$

La función de costes: $C_1(q_1) = cq_1$ $c_2(q_2) = cq_2$

Con las funciones de Demanda y costos de la empresa se establecen los beneficios de la empresa:

$\Pi_1 = (a – Q)q_1 – C_1$ $\Pi_2 = (a – Q)q_2 – C_2$

$\Pi_1 = aq_1 – (q_1 + q2)q_1 – cq_1$ $\Pi_2 = aq_1 – (q_1 + q_2)q_2 – cq_2$

$\Pi_1 = q_1(a – q_1 - q_2 – c)$ $\Pi_2 = q_2(a – q_1 – q_2 – c)$

Solución del modelo de Stackelberg (nivel de producción de cada empresa Líder y seguidora)

Inducción hacia atrás (supone que la E_2 reacciona al nivel de producción realizado por E_1)

a. Maximizamos el beneficio de la E2, que tiene en cuenta la producción de E1.

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0; \quad (a - q_1 - 2q_2 - c)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0; \; -a + q_1 + 2q_2 + c = 0$$

Establecemos la producción q_2 de la E_2, en términos de la producción q_1 de E_1, dando como resultado la función de reacción de la E_2 (*FR_2*):

$$FR_2: \; q_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

b. Calculamos la producción de E1 que se anticipa a la producción q2 de E2. En el beneficio de la E1 reemplazamos q2 por la FR2, quedando el beneficio:

$$q_1[a - q_1 - FR_2 - c] = 0$$
$$q_1\left[a - q_1 - \frac{a - q_1 - c}{2} - c\right] = 0$$

Maximizando el beneficio de E1, mediante la condición de 1er. orden

$\frac{a-2q_1-c}{2} = 0$ de donde se deduce

$$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

Resultado de la producción de cada empresa por el método de inducción hacia atrás:

$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ y $q_2^* = \frac{a-c}{4}$ (reemplazando q_1 en FR_2)

Estos resultados representan también el ENPS:

$s^* = (s_1^* = q_1^*,\ s_2^* = q_2^* = FR_2)$

Resultados en el mercado:

$Q^* = q_1^* + q_2^*$ $\qquad Q^* = \frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4}$ $\qquad Q^* = 3\,\frac{a-c}{4}$

$P^* = a - Q$ $\qquad P^* = a - 3\,\frac{a-c}{4}$ $\qquad P^* = \frac{a+3c}{4}$

Beneficio de la empresa 1:

$\pi_1^* = q_1^*(a - q_1^* - q_2^* - c)$

$\pi_1^* = \frac{a-c}{2}\left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-c}{4} - c\right)$ $\qquad \pi_1^* = \frac{a-c}{2}\left(\frac{a-c}{4}\right)$

$\pi_1^* = \frac{(a-c)^2}{8}$

Beneficio de la empresa 2:

$\pi_2^* = q_2^*(a - q_1^* - q_2^* - c)$

$\pi_2^* = \frac{a-c}{4}\left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-c}{4} - c\right)$ $\qquad \pi_2^* = \frac{a-c}{4}\left(\frac{a-c}{4}\right)$

$\pi_2^* = \frac{(a-c)^2}{16}$

En la solución del modelo de Stackelberg se determina que la empresa que actúa primero, aun cuando las dos empresas tienen la misma tecnología, se convierte en Líder y mejora sus beneficios en detrimento de la empresa 2 que se convierte en seguidora, siendo perjudicada por actuar posteriormente a la acción de la empresa 1.

Qué pasa si la E2 habiendo observado la producción de E1 decide producir la misma cantidad de la producción de la E1, veamos:

Sabemos que. $q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $\Longrightarrow$ $q_2^* = \frac{a-c}{2}$

Las variables en el mercado:

Si: $P = a - Q$ y con: $Q = q_1 + q_2$

$Q^* = \frac{(a-c)}{2} + \frac{(a-c)}{2}$ $Q^* = \frac{2(a-c)}{2}$ $Q^* = a - c$

$P^* = a - (a - c)$ $P^* = c$ Mercado Competitivo

$\pi_1^* = P^* q_1^* - c q_1^*$ $\pi_1^* = c q_1^* - c q_1^*$ $\pi_1^* = 0$

De otro modo:

$$\pi_1^* = (q_1^*)(a - q_1^* - q_2^* - c)$$

$$\pi_1^* = \left(\frac{a-c}{2}\right)\left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-c}{2} - c\right)$$

$$\pi_1^* = \left(\frac{a-c}{2}\right)(a - (a - c) - c)$$

$\pi_1^* = 0$ $\pi_2^* = 0$

Existen ganancias normales. (Joaquín Pérez, 266 – 276)

Modelos desarrollados que se utilizan como aplicación en la economía

Modelo de Stackelberg (1934)

Modelo de Leontief (1946) de determinación de salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación de un sindicato.

Modelo de negociación de Rubinstein

Modelos de Diamond y Dybvig (1983) de pánico bancario

Modelo de aranceles y de competencia internacional

Modelo de los torneos de Lazear y Rosen (1981)

Modelo de Friedman (1971) de colusión entre duopolistas de Cournot

Modelo de Shapiro y Stiglitz (1984) de salarios de eficiencia

Modelo de Barro y Gordon (1983) de política monetaria

(Robert Gibbons, 1992, Pág, 54)

Resumen del Capítulo III.

En este capítulo se ha abordado el tema de juegos dinámicos con información completa perfecta e imperfecta estableciéndose su definición, nomenclatura, forma de representación, subjuegos y métodos de solución.

1. Los juegos dinámicos con información completa.

   Se le define como cualquier situación en la que los jugadores teniendo el conocimiento de la estructura del juego, reglas, acciones y recompensas que son de dominio de todos y cada uno de ellos, actúan con interdependencia estratégica y, toman sus decisiones en el momento del juego que le corresponde jugar, *conociendo* las decisiones que han tomado el resto de jugadores (sus decisiones son *secuenciales*), buscando obtener el mejor resultado.

2. La nomenclatura de los juegos dinámicos.

   Difiere de la de juegos estáticos considerando que se consideran otros elementos como el conjunto de nodos (X), nodo de inicio (*O*), nodos de decisión (XD), nodos terminales (XT), asimismo, otros elementos con su respectiva especificación como el conjunto de acciones (A), el conjunto de información (H).

3. Representación del juego dinámico.

   Las decisiones se toman de modo secuencial por lo que se representa mediante el denominado árbol de decisiones donde las ramas representan las acciones de elección y los frutos son los pagos de un sendero de acciones. El árbol de decisiones puede ser orientado de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo.

   El juego dinámico es una generalización del juego estático por lo que se puede realizar la transformación del juego estático a juego dinámico sin perder la esencia del análisis que difiere de la representación del juego dinámico y su transformación a juego estático donde el análisis puede diferir según la representación que se está utilizando.

4. Acciones, estrategias y perfil estratégico del juego dinámico

En un juego dinámico es importante identificar las acciones, estrategias y el perfil estratégico del juego para poder transformar su representación a la de un juego estático y realizar el análisis para encontrar el equilibrio de Nash como una solución del juego.

5. Subjuegos del juego dinámico

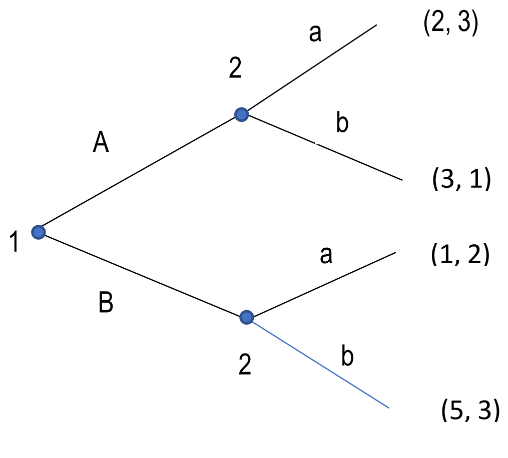
   Se identifican los subjuegos del juego dinámico mediante el conjunto de información unitario como medio para determinar el equilibrio de nash perfecto en subjuegos y utilizar el método de solución de inducción hacia atrás.

6. Métodos de solución del juego dinámico

   Se establecen los distintos métodos de solución del juego dinámico como el equilibrio de Nash derivados de su representación estratégica, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos y la inducción hacia atrás de juego con información completa (perfecta e imperfecta).

   Ejemplo

   En el siguiente juego básico en la que la empresa 1 produce un bien que para competir con la empresa 2 son diferenciados identificándolos como A y B o también se puede indicar que la empresa 1 produce 2 tipos de bienes, en tanto la segunda empresa reacciona produciendo sus propios bienes diferenciados a y b o sus propios bienes que harán competencia a los bienes que produce la empresa 1, representando el juego:



		J2			
		aa	ab	ba	bb
J1	A	2, 3	2, 3	3, 1	3, 1
	B	1, 2	5, 3	1, 2	5, 3

Figura 51. Matriz de pagos del juego dinámico Caso 4

Figura 52. Se repite el juego dinámico Caso 4

En la forma estratégica se observa que hay 3 equilibrios a lo Nash, (A, aa), (B, ab) y (B, bb) y de los cuales se desprende que cuando el jugador 1 juega A el jugador 2 reacciona jugando también y resultando en el pago (2, 3) y, cuando el jugador 1 juega B el jugador 2 reacciona jugando b que presenta el pago (5, 3) y es lo que se daría también en el juego dinámico, como veremos luego.

Asimismo, en el siguiente juego modificado del anterior, en el que considera que el jugador 2 decide su elección sin conocer la elección que ha hecho el jugador 1, se convierte en el juego estático con información completa.

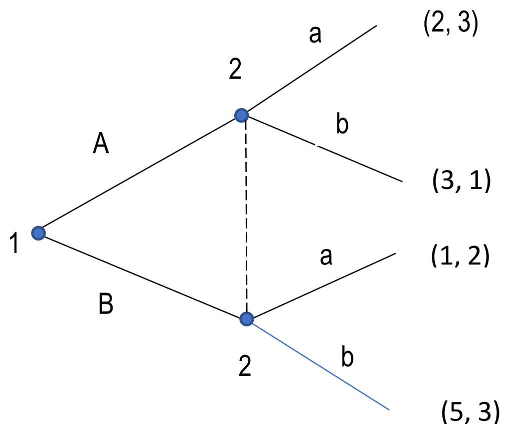


Figura 53. Forma extensiva Caso 4.1

		J2	
		a	b
J1	A	2, 3	3, 1
	B	1, 2	5, 3

Figura 54. Forma estratégica del Caso 4.1

En este juego se observa directamente tanto en la forma matricial como en la forma extensiva los equilibrios a lo Nash que se dan en los perfiles estratégicos Aa y Bb.

Modelos desarrollados que se utilizan como aplicación en la economía

Modelo de Stackelberg (1934)

Modelo de Leontief (1946) de determinación de salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación de un sindicato.

Modelo de negociación de Rubinstein

Modelos de Diamond y Dybvig (1983) de pánico bancario

Modelo de aranceles y de competencia internacional

Modelo de los torneos de Lazear y Rosen (1981)

Modelo de Friedman (1971) de colusión entre duopolistas de Cournot

Modelo de Shapiro y Stiglitz (1984) de salarios de eficiencia

Modelo de Barro y Gordon (1983) de política monetaria

(Robert Gibbons, 1992, Pág, 54)

CAPÍTULO 4

JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

Índice temático.

En el presente capítulo se abordan los siguientes temas:

4.1. Definición y características.

4.2. Representación y elementos del juego

4.3. El Equilibrio Bayesiano de Nash

4.4. Métodos de solución del equilibrio bayesiano

Ejemplos de juegos estáticos con información incompleta

El Juego en el que participan Karl Marx y Friedrich Engels

El Juego del duopolio Coca-Cola y Pespsi-Cola

Resumen

Referencias Bibliográficas

Objetivos del Capítulo

Al terminar de leer el presente capítulo, el estudiante estará en condiciones de:

- Interpretar el juego estático con información incompleta.
- Analizar sus componentes y sus interrelaciones.
- Obtener la solución del juego estático con información incompleta.
- Identificar la aplicación en la economía.

CAPÍTULO 4

LOS JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

4.1. Definiciones y características

Definición.

Este juego estático, decisiones simultáneas o decisión de un jugador sin conocer la decisión del otro, tiene como característica fundamental la información incompleta de la función de utilidad de algún jugador respecto a sus contrincantes. En consecuencia, alguno de los jugadores desconoce un parámetro (no está seguro) de la función de utilidad del otro jugador que lo define por completo, a este parámetro lo llamaremos “tipo” que tiene cada jugador asociada a una función de utilidad.

Esta falta de información (o información privada de algún jugador) se representará haciendo uso del azar considerando que un jugador conoce el resultado u observa el resultado del azar y el o los otros no.

Características.

- Racionalidad: Se asume que todos los jugadores partícipes del juego son racionales. Es decir, cada individuo deliberada y sistemáticamente trata de hacer lo mejor posible para lograr su máxima utilidad.
- Conocimiento mutuo de la racionalidad. El conocimiento de que algún jugador es racional es de dominio público: *Yo soy racional y sé que los otros jugadores son racionales y también sé que ellos saben que yo sé que ellos son racionales y que yo sé que ellos saben que yo sé que ellos son racionales …*
- Elección simultánea de estrategias: Al ser un juego estático determina que todos los jugadores elijan racionalmente sus estrategias al mismo tiempo.
- Información incompleta de pagos de algún(os) jugadores. La información sobre las funciones de ganancias de algún(os) jugadores no es de dominio público, es decir un jugador no conoce la función de ganancias del otro

jugador (contrincante) y como consecuencia no sabrá cuál será el pago que recibirá el otro jugador al elegir una determinada estrategia (no conocer el pago del otro jugador entonces no conoce cuál es la decisión que tomará).

- Incorporación de probabilidades a las decisiones de cada jugador. Debido a que existe información incompleta en la que un jugador conoce el pago por el resultado del juego en tanto que el otro jugador no conoce a la perfección la función de utilidad de otro jugador, existe incertidumbre por parte de un jugador acerca de los pagos que recibirá el otro jugador; es por ello que a cada pago le asigna una determinada probabilidad.

A los ***juegos estáticos con información incompleta*** también se les denomina ***Juegos Bayesianos*** y son también ***juegos con información asimétrica*** en la que los jugadores disponen de información distinta pues en tanto que un jugador conoce con certeza el resultado del juego debido a que tiene información completa, el otro jugador no tiene la misma información y decide desconociendo la información que conoce el primer jugador.

Veamos en un cuadro, la diferencia en información del Juego estático con información completa y el Juego estático con información incompleta

Tabla 5
Comparación de la disponibilidad de la información del juego

	Juego estático con	
	información completa	información incompleta
	✓	✓
	✓	✓
	✓	✗

El cuadro nos muestra que la información incompleta se identifica cuando algún jugador desconoce los pagos del resultado del juego. Asimismo, podemos indicar que para desconocer los pagos de los resultados del juego es necesario que exista una contingencia en un momento del juego que obliga a tomar una decisión sobre la acción a realizar, dada las estrategias del jugador.

De otro lado, sabemos que las contingencias en un momento del juego obligan a plantear probabilidades sobre las estrategias a seguir que tienen los jugadores presentándose alternativas de decisión.

Con las características del juego con información incompleta indicadas, se puede establecer que un juego que presenta probabilidad de ocurrencia en un momento del juego entonces presenta alternativas de decisión sobre una misma acción, es ahí cuando se genera la información incompleta por cuanto mientras un jugador observa el resultado del azar y por tanto toma sus decisiones con certeza sobre las acciones a seguir, al conocer los pagos del resultado final del juego, por lo que nos atrevemos a decir que sus decisiones se toman en un juego con información completa, el otro jugador toma su decisión sin conocer el resultado del azar y tomará su decisión teniendo en cuenta las probabilidades de ocurrencia de las alternativas que se plantean utilizando el valor esperado.

Ejemplo.

En este ejemplo invitamos al lector reflexionar sobre la subasta del escudo de colón para identificar si es un juego estático con información incompleta, es decir, si todos toman su decisión en el mismo momento y si la información es asimétrica.

UN MILLÓN Y MEDIO DE EUROS POR *EL ESCUDO DE COLÓN*

El privilegio que obtuvo por parte de los Reyes Católicos en 1493 al regreso del viaje del descubrimiento del Nuevo Mundo sale a subasta.

El próximo 17 de diciembre Ansorena saca a subasta la Real Provisión original otorgada por los Reyes Católicos, en 1493, a Cristóbal Colón y sus descendientes, un escudo de armas con un castillo, un león, unas islas y sus armas, como premio a sus servicios, por un precio de 1,25 a 1,55 millones de euros. El otorgamiento de este privilegio a Colón se produjo al regreso del viaje del descubrimiento del Nuevo Mundo, según explica Javier López Serrano, del

Departamento de pintura y documentos antiguos de la Casa de Subastas Ansorena.

El 15 de marzo de 1493 Colón desembarcaba en Palos y se dirigía a Barcelona, de acuerdo con las instrucciones que los Reyes le habían hecho llegar. Allí Colón relató su viaje y descubrimiento a los Reyes, las grandezas de aquellas tierras, la mansedumbre, desnudez y costumbres de los indígenas.

El documento ahora subastado se trata de un original, de la única representación del primer escudo de armas de Cristóbal Colón, un objeto de gran valor histórico que quedó custodiado por la familia del almirante, tal y como lo dejó escrito el descubridor en su testamento de 1497. El documento es el manuscrito original que fue expendido sobre pergamino de vitela de ovino de 275 x 435 milímetros con una plica de 43 milímetros de ancho de cuya parte central penden cintas de color verde parduzco que sujetaban el sello de plomo de validación, que falta.

En la parte central del texto se reserva el espacio principal en el que se producen en policromía el escudo de armas dividido en cinco partes. En la parte superior derecha se sitúa un castillo en oro (por el reino de Castilla) sobre canto blanco, y en la parte superior izquierda se sitúa un león rampante blanco (por el reino de León). En la parte inferior derecha están situadas una iconografía de las islas y una masa terrestre figurando las islas y tierra firme del Nuevo Mundo, en oro sobre ondas de mar. Mientras tanto, la parte inferior izquierda se parte en dos. En una parte superior se sitúan cinco anclas en oro por el Almirantazgo y abajo las armas representadas en rojo sobre fondo de oro con banda azul.

El documento muestra los antiguos dobleces que corresponden a la caja de madera en la que originalmente fue conservado. El texto que rodea el escudo se puede considerar inédito, en opinión de López Serrano, porque a este documento, que ha permanecido junto a los herederos 500 años, los historiadores no han tenido acceso a él. "La Real Provisión Original ha salido en dos ocasiones fuera de España para sendas exposiciones; una de ellas en 1893 en Chicago y la otra en 1976 en Washington. Pero los historiadores y estudiosos no han tenido acceso directo al documento original, solo al texto del que se hace referencia en el *registro del privilegio en* Libro de Cédulas, *de Fernández Álvarez de Toledo", argumenta el especialista. Esta es una especie de registro que se llevaba de las leyes y privilegios que otorgaban los Reyes Católicos y que se encuentra en el Archivo de Indias.*

La letra del manuscrito es la propia de los privilegios del siglo XV, de gran perfección y regularidad, en minúsculas con un correcto uso de mayúsculas, escasos nexos y abreviaturas. El documento de concesión del escudo de armas a Cristóbal Colón ha formado parte del Archivo de los Duques de Veragua y ahora de sus descendientes. Estos días, hasta su subasta, está custodiado en una caja fuerte de la Casa de Subastas.

¿El juego es Estático?

Si es una subasta en sobre cerrado podríamos decir que es estático, dado que todos toman su decisión sin conocer la decisión que toma el otro.

¿El juego es de Información incompleta?

Si bien los participantes, obtienen la misma información, sus valoraciones son distintas pues el manuscrito que se subasta tiene valor histórico, valor material, valor social, todos ellos comprendidos en un solo valor monetario por lo que dependiendo del comprador y de sus conocimientos estaríamos ante una información incompleta y asimétrica (no todos los jugadores valoran el beneficio de la misma manera).

4.2. Representación y elementos:

Representación en forma normal de los juegos bayesianos estáticos

Como se ha visto en los *juegos estáticos con información completa*, la representación analítica o formal de este tipo de juegos es la siguiente:

$$G = \{S_1, \dots., S_n;\ u_1, \dots, u_n\}$$

Donde:

$\boldsymbol{J}$: Conjunto de jugadores

$\boldsymbol{S_i}$: Espacio de estrategias del jugador i

$\boldsymbol{u_i}$: Ganancia del jugador i cuando los jugadores eligen las estrategias $(s_1, \dots., s_n)$

Cabe resaltar que en un *juego estático con información completa* para un jugador una estrategia es simplemente una acción, entonces podemos reescribir G como:

$$G = \{J; A_1, \dots., A_n;\ u_1, \dots, u_n\}$$

En donde:

$\boldsymbol{J}$: Conjunto de jugadores

$\boldsymbol{A_i}$: Espacio de acciones del jugador i

$\boldsymbol{u_i}$**:** Ganancia del jugador i cuando los jugadores eligen las acciones $(a_1, \dots., a_n)$

A continuación, representaremos en forma normal un *juego estático con información incompleta*, llamado también juego bayesiano estático.

Primero, se debe representar la idea de que cada jugador conoce su función de ganancias, pero puede no conocer las de otros jugadores. Entonces, sean las posibles funciones de ganancias de i: $u_i(a_i, a_{-i};\ t_i)$, donde t_i es el tipo del jugador i, que pertenece a un conjunto de tipos posibles (o espacio de tipos) T_i. Cada tipo t_i corresponde a una de las funciones de ganancias que el jugador i podría tener y, el jugador i conoce su tipo y por tanto su función de utilidad, pero no conoce la de los restantes $-i$ jugadores.

Como ejemplo, y por simplicidad, supongamos que el jugador i tiene dos posibles funciones de ganancias. En este caso, el jugador i tiene dos tipos, t_{i1} y t_{i2}. Por lo tanto el espacio de tipos del jugador i es $T_i = \{t_{i1},\ t_{i2}\}$; en consecuencia el jugador i tiene dos funciones de utilidad, las cuales son: $u_i(a_i, a_{-i};\ t_{i1})$ y $u_i(a_i, a_{-i};\ t_{i2})$

Nota: Los supuestos de los juegos estáticos con información completa son muy exigentes, debido a que asume que la información acerca de pagos es de dominio público; este supuesto es poco realista. Citemos un ejemplo, en el modelo duopólico de Cournot una empresa conoce los costes marginales de la otra, algo que en la realidad no se cumple.

Por lo tanto, existe una falta de conocimiento de una empresa acerca de la función de beneficios de la otra empresa; este caso recibirá un tratamiento en la clase de juegos denominada juegos estáticos con información incompleta.

4.3. El Equilibrio Bayesiano de Nash

Como vimos en la sección anterior, los supuestos de los juegos estáticos con información completa son muy exigentes, puesto que asumen que la información acerca de los pagos es de dominio público, lo que en la realidad no se cumple debido a que cada jugador tiene al menos una característica en su función de pagos que lo define por completo, que lo llamamos "tipo" y solo el jugador a que se le atribuye un determinado tipo, lo conoce.

Para modelizar estas situaciones recurriremos al aporte de John Harsanyi, según el cual: "la modelización se realiza suponiendo que el azar es un jugador ficticio que realiza antes del comienzo del juego una jugada que atribuye a cada jugador su información privada, de modo que sólo dicho jugador conoce la que se le ha asignado a él, y cada jugador tiene una creencia (expresada por medio de una suposición o conjetura probabilística) acerca de cuáles son las informaciones privadas de los otros" (Pérez, J; 2012).

Equilibrio bayesiano de Nash

Debemos introducir un concepto que caracterice lo mejor posible el equilibrio de Nash para juegos bayesianos estáticos, es claro que este equilibrio debería llamarse equilibrio bayesiano y debe cumplir con ser un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Definición del equilibrio bayesiano de Nash

Para el juego bayesiano estático

$$G_B = \{N; A_1, A_2, \dots, A_n; T_1, T_2, \dots, T_n; p_1, p_2, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

Una estrategia del jugador i es una función $s_i(t_i)$ donde, para cada tipo t_i en T_i, $s_i(t_i)$ determina la acción del conjunto factible A_i que el tipo t_i elegiría si el azar determinara que el jugador es de este tipo.

El conjunto de posibles estrategias (puras) S_i del jugador i, es el conjunto de todas las funciones posibles con dominio T_i y recorrido A_i. Por ejemplo, en una estrategia de separación, cada tipo t_i en T_i elige una acción diferente a_i de A_i.

Por el contrario, en una estrategia de agrupación, todos los tipos eligen la misma acción. Esta distinción nos ayuda a describir la gran variedad de estrategias que pueden construirse a partir de un determinado par de espacios de tipos y acciones T_i y A_i.

De manera general la definición del equilibrio bayesiano de Nash es la siguiente:

En el juego bayesiano estático:

$$G_B = \{J; A_1, A_2, \dots, A_n; T_1, T_2, \dots, T_n; p_1, p_2, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

Los perfiles estratégicos $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ forman un equilibrio bayesiano de Nash (con estrategias puras) si para cada jugador i para cada uno de sus tipos $t_i \in T_i, s_i^*(t_i)$ es una solución de:

$$\underset{a_i \in A_I}{max} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_i/t_i) u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_n^*(t_n); t)$$

Es decir, ningún jugador quiere cambiar su estrategia, incluso si el cambio supone cambiar sólo una acción para un tipo.

Ejemplo introductorio

Si el jugador 1 tiene información privada y conoce la información que es de dominio público del jugador 2, entonces el jugador 1 decidirá con información completa y maximiza sus pagos, en tanto que el jugador 2 que no conoce cierta información del jugador 1 porque es privada, entonces el jugador 2 decidirá con incertidumbre en términos del valor esperado de los pagos.

En esta situación se ha podido observar que el jugador que mantiene información privada aumenta el nivel de producción respecto al juego con información completa.

El juego expuesto se puede modelar en un gráfico de modo extensivo o en la forma matricial conocida, una con la información completa que es el que corresponde al jugador 1 y el otro con valores esperados del jugador 2 que supone probabilidades de la información privada que tiene el jugador 1:

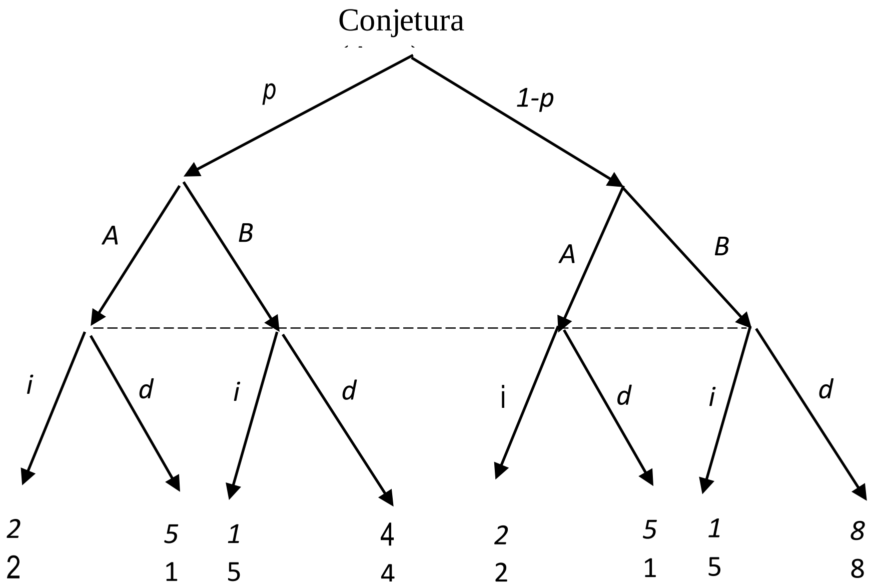


Figura 56. Juego dinámico (Forma extensiva) Información privada de J1

El gráfico de este juego permite observar desde el punto de vista del jugador 2 en la que su decisión se realiza según los valores esperados de sus pagos y teniendo en cuenta las probabilidades de ocurrencia en la decisión del J1, por lo que su representación en forma estratégica, del J. dinámico con información privada de J1, es:

		Jugador 2	
		i	d
Jugador 1	A - A	2, 2	5, 1
	A - B	5/3, 3	6, 10/3
	B - A	4/3, 4	13/3, 3
	B - B	1, 5	16/3, 16/3

Figura 57. Los Equilibrios a lo Nash en estrategias puras (transformadas de información incompleta) son (*A-A, i*) y (*A-B, d*).

Más Ejemplos.

- Duopolio de Cournot, en la que una empresa no conoce los costos marginales de la otra empresa.
- Subasta en sobre cerrado. Los participantes desconocen las valoraciones de los demás
- Negociaciones. Se desconocen las valoraciones o las disposiciones de pago.
- Mercado laboral. Empleador desconoce las capacidades y habilidades del trabajador a contratar.
- Elecciones. Votante desconoce verdadera intención del candidato.
- Batalla de los sexos. Se desconoce qué es lo que le gusta más al otro, fútbol o cine.

4.4. Métodos de solución del equilibrio bayesiano

Pasos para encontrar el equilibrio bayesiano de Nash

1. Representar el juego en su forma extensiva, colocando el azar (jugador ficticio) en el lugar que corresponda a la información incompleta, según las condiciones del juego; asignando las respectivas probabilidades a fin

de representar posibles circunstancias o eventos que se podrían producir en el juego y puedan influir sobre el comportamiento de los jugadores.

2. Colocar los pagos de acuerdo con los datos y/o condiciones del juego.
3. Aplicar retro - inducción (o inducción hacia atrás) y en el nodo de decisión que encontremos al azar (jugador ficticio), aplicar valor esperado a los pagos haciendo uso de las probabilidades que se asignaron previamente con la finalidad de hacer comparaciones entre pagos (metodología propia de la retro - inducción).

Todo esto se verá mejor con el siguiente ejemplo de aplicación:

Ejemplo

Consideremos el siguiente juego en el que participan Karl Marx y Friedrich Engels. El juego lo comienza K. Marx. Su estrategia es No escribir El Capital (A) y se acaba el juego y, si juega scribir El Capital (B) le tocará el turno a F. Engels. F. Engels tiene como estrategias Publicar los otros volúmenes de El Capital (M) o No publicar los otros volúmenes de El Capital (N).

Sin embargo, ahora supondremos que los pagos del juego también dependen de que se dé una circunstancia ajena a los jugadores (por ejemplo, que se produzca un conflicto en la ideología socialista que ambos saben que influiría fuertemente sus decisiones) y que ellos no saben, en el momento de hacer el análisis del juego, si se va a dar o no.

Esta situación puede modelizarse mediante una jugada de azar que preceda al desarrollo del juego, pero cuyo resultado ningún jugador conozca (también podría modelizarse con una jugada de azar tras cada desarrollo posible del juego, pero el análisis sería menos simple y daría, sin embargo, los mismos resultados).

Concretando, supongamos que la jugada de azar tenga probabilidad de 3/4 cuando las circunstancias para la ideología socialista sean favorables y 1//4 si son desfavorables y, que los pagos sean los indicados en la Figura 58:

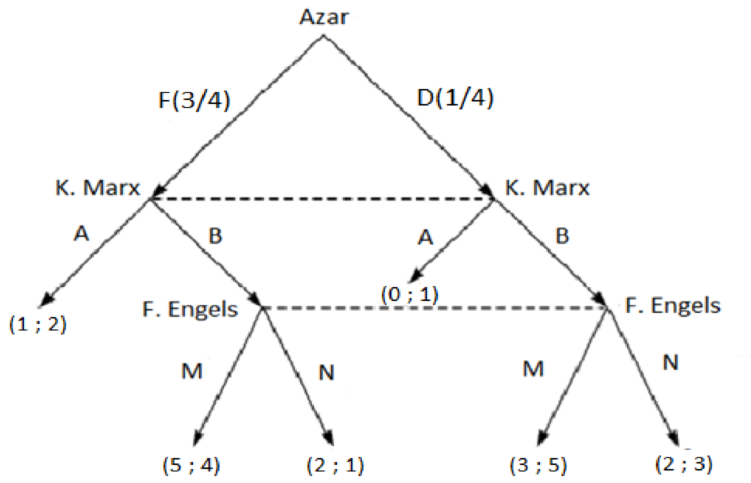


Figura 58. Escribir y publicar el capital

Debido a la existencia de posibles circunstancias favorables o desfavorables de la ideología socialista asociadas a una probabilidad ambos jugadores harían su análisis en términos de pagos esperados. Por ejemplo, ambos saben que si K. Marx juega A: No escribir El Capital, obtendrán un vector $\left(\frac{3}{4} ; \frac{7}{4}\right)$ de pagos (esperados), ya que:

$$\frac{3}{4} = 1\left(\frac{3}{4}\right) + 0\,\left(\frac{1}{4}\right) \text{ y } \frac{7}{4} = 2\left(\frac{3}{4}\right) + 1\,\left(\frac{1}{4}\right)$$

Si K. Marx juega B: Escribir El Capital, entonces le tocará el turno a F. Engels, quien tendrá dos estrategias para elegir: M o N.

Si juega M, ambos jugadores obtendrán $\left(\frac{18}{4} ; \frac{17}{4}\right)$ como vector de pagos:

$$\frac{18}{4} = 5\left(\frac{3}{4}\right) + 3\,\left(\frac{1}{4}\right) \text{ y } \frac{17}{4} = 4\left(\frac{3}{4}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right)$$

Si F. Engels elige jugar N, ambos jugadores obtendrán como vector de pagos:

$$2 = 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\,\left(\frac{1}{4}\right) \text{ y } \frac{6}{4} = 1\left(\frac{3}{4}\right) + 3\,\left(\frac{1}{4}\right)$$

Por lo tanto, el juego quedaría así:

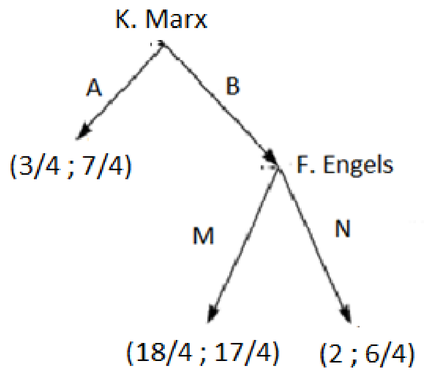


Figura 59. Escribir y publicar el capital Sub juegos

Ahora, aplicamos retro - inducción:

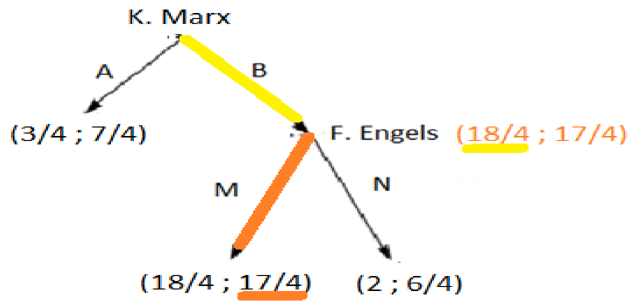


Figura 60. Escribir y publicar el capital, inducción hacia atrás.

Entonces, el equilibrio bayesiano de Nash es (B; M) que cumple con ser un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS).

Ahora analicemos el mismo juego suponiendo que Karl Marx sabe con certeza su estrategia a seguir, en tanto que Friederich Engels desconoce la estrategia que va a usar Marx.

Como las estrategias de Marx, son:

A = No escribir El Capital, y se acaba el juego, o B = Escribir El Capital, en este caso le tocará el turno a F. Engels.

Engels por su parte, tiene en cuenta que, si Marx juega B, sus estrategias son:

M = Publicar los otros volúmenes de El Capital o N = No publicar los otros volúmenes de El Capital.

En esta situación y como se ha indicado en el ejemplo anterior, se supone que los pagos del juego también dependen de que se dé una circunstancia ajena a los jugadores (por ejemplo, que se produzca un conflicto en la ideología socialista que ambos saben que influiría fuertemente sus decisiones) pero, en el momento de hacer el análisis del juego, Marx sabe, y es de dominio público que sabe, si el conflicto se va a dar o no en tanto que Engel lo desconoce, pero sí conoce las probabilidades que tiene dicha elección.

En el juego podemos suponer entonces que se realiza la contingencia al inicio del juego y es posible modelizar dicha contingencia como si fuera la consabida técnica de la jugada de azar que tenga probabilidad de 3/4 cuando las circunstancias para la ideología socialista sean favorables y 1//4 si son desfavorables y, que los pagos sean los indicados en la Figura 4.1.

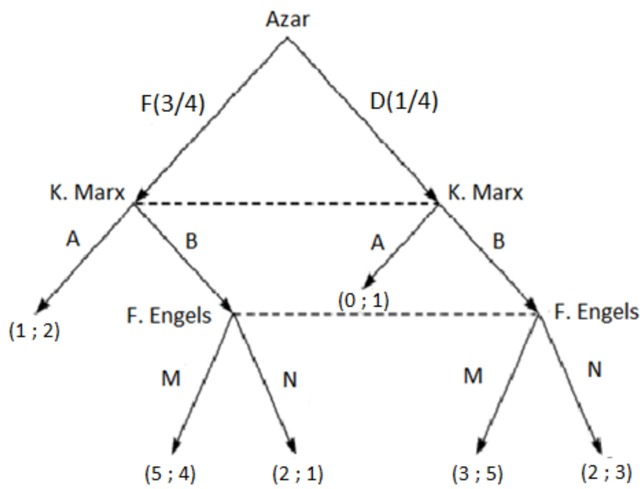


Figura 58 (Repetida). Escribir y publicar el capital

Recordemos que el jugador 1 sabe qué juego están jugando mientras que Engels solo sabe que es el primer juego con probabilidad 3/4 y el segundo juego con probabilidad 1/4.

Este juego estático donde las decisiones de Marx y Engels son simultáneas tienen la particularidad que la jugada inicial se puede modelizar como si interviniera el azar donde una puntuación alta (más de 2, en el caso podrían ser especialistas que opinan que se va a dar la situación favorable) indica que la contingencia favorable que tiene una probabilidad 3/4 es la que se va a dar y una puntuación baja (menos de 3 especialistas opinan que se va a dar la situación desfavorable) la contingencia desfavorable que tiene una probabilidad 1/4 es la que se va a dar, cuyo resultado Marx observa y Engels no, constituyendo una asimetría en la información disponible que tienen los jugadores en el momento que estos juegan y es lo que se denomina juegos estáticos con información incompleta o juegos bayesianos estáticos.

Como Marx conoce el resultado de la contingencia o jugada de azar es lógico suponer que este jugador toma su decisión de acuerdo al resultado observado, por lo que sus estrategias han de especificar una acción y consiguientemente la matriz de pagos correspondiente para cada resultado de la jugada de azar. En consecuencia, dispone de tres estrategias puras, que son: A (y se acaba el juego), (B, M), (B, N), cuya representación en la forma normal del juego se representa mediante juegos separados en la que cada uno corresponde a la opinión de los expertos que solo Marx conoce por lo que la representación es como sigue:

		Jugador 2 Engels	
		M	N
Jugador 1 Marx	A	1, 2	1, 2
	B	5, 4	2, 1

Figura 61. Resultado de Jugada de, Azar (P. 3/4). situación favorable.

		Jugador 2 Engels	
		M	N
Jugador 1 Marx	A	0, 1	0, 1
	B	3, 5	2, 3

Figura 62. Resultado de Jugada de azar (P. 1/4), situación desfavorable.

Por otra parte, Engels que no ha observado el resultado de la jugada de azar (En el caso opinión de los expertos), sus estrategias son incondicionales y se reducen a sus acciones que son M y N y sus pagos los calcula en términos de valores esperados, en consecuencia, su forma normal del juego es:

		Jugador 2 Engels	
		M	N
Jugador 1 Marx	A	3/4, 7/4	3/4, 7/4
	B	18/4, 17/4	2, 6/4

Figura 63. Forma estratégica del juego dinámico con azar.

Los pagos que aparecen en la matriz son pagos esperados que corresponde a cualquier acción de los jugadores (Marx – Engels).

EL DUOPOLIO DE COURNOT MODELIZADO CON INFORMACIÓN INCOMPLETA (ASIMÉTRICA): APLICACIÓN

El modelo original, asume:

- Hay dos empresas (Empresa 1 y Empresa 2) que compiten entre sí vía cantidades (mercado oligopólico).
- La información acerca de la función de demanda de mercado es de **dominio** público, es decir es conocida perfectamente por la empresa 1 y por la empresa 2, y es la siguiente:

$$P(Q) = a - q_1 - q_2 \text{ , donde: } Q = q_1 + q_2$$

q_1: Cantidad ofrecida por la empresa 1 en el mercado.

q_2: Cantidad ofrecida por la empresa 2 en el mercado.

- La función de costos de la Empresa 1 es de dominio público, **es** decir, es conocida a la perfección por la Empresa 1 y por la Empresa 2. Esta función es la que se muestra a continuación.

$$C_1(q_1) = c.q_1$$

- La información incompleta se establece con la función de costes de la empresa 2 que no es de dominio público**,** es decir solo es conocida a la perfección por la propia Empresa 2, en tanto que la empresa 1 solo tiene una información probabilística acerca de esta función.

En estas condiciones el juego estático de información incompleta es un juego de información asimétrica.

Así tenemos:

$$C_2(q_2) = (c + \varepsilon).q_2$$

Donde:

$\varepsilon = \varepsilon_0$ (Información probabilística baja), o

$\varepsilon = \varepsilon_1$ (Información probabilística alta)

Por lo que la información probabilística: $\boldsymbol{\varepsilon_0 < \varepsilon_1}$

- El factor "$(c + \varepsilon)$" sigue la siguiente distribución de probabilidad:

  $c + \varepsilon_1 \ \rightarrow p$

  $c + \varepsilon_0 \ \rightarrow (1 - p)$

- La evidencia de que existe información asimétrica (información incompleta) se da cuando la empresa 2 tiene información privada de su función de costes, mientras que la empresa 1 solo tiene una información probabilística acerca de esta función de costes.

Características del juego:

- Acciones:

$$A_1 = A_2 = [0; a]$$

- Tipos:

$$T_1 = \{c\}\ ;\ \ T_2 = \{c + \varepsilon_1;\ c + \varepsilon_0\}$$

- Conjetura de la Empresa 1 respecto a los costos de la empresa 2:

$$prob(c + \varepsilon_1) = p\ ; prob(c + \varepsilon_0) = 1 - p$$

- Pagos:

$$U_1(q_1; q_2; c + \varepsilon_1) = U_2(q_1; q_2; c + \varepsilon_0) = (a - c - q_1 - q_2)q_1$$

$$U_2(q_1; q_2; c + \varepsilon_1) = (a - (c + \varepsilon_1) - q_1 - q_2)q_2$$

$$U_2(q_1; q_2; c + \varepsilon_0) = (a - (c + \varepsilon_0) - q_1 - q_2)q_2$$

- Estrategias del jugador 1:

  Aplicaciones de T_1 a $A_1 = A_1$

- Estrategias del jugador 2:

  Aplicaciones de T_2 a A_2, es decir:

  El conjunto $\{(q_2(c+\varepsilon_1),\ q_2(c+\varepsilon_0))\}$,

  Con, $q_2(c+\varepsilon_1) \in A_2$ y $q_2(c+\varepsilon_0) \in A_2$

¿Cómo razonarán las Empresas 1 y 2 en este juego?

- Normalmente, la Empresa 2 querrá elegir una cantidad diferente (y presumiblemente menor) si se diera la situación de que su costo marginal fuese alto; y presumiblemente mayor si se diera la situación contraria: que su costo marginal sea bajo.

- Por su parte, la Empresa 1 debería prever que la Empresa 2 puede ajustar su cantidad al coste de la manera indicada. Sean $q_2^*(c+\varepsilon_1)$ y $q_2^*(c+\varepsilon_0)$ las cantidades elegidas en función de sus costes sean altos o bajos ($\varepsilon_1 > \varepsilon_0$), y sea q_1^* la cantidad elegida por la empresa 1, debemos precisar que q_1^* resulta de la maximización de la función de beneficio esperado de la empresa 1, debido a que la empresa 1 tiene una información probabilística acerca de los costos de la empresa 2. Si el coste de la empresa 2 es alto, ésta elegirá la información probabilística $q_2^*(c+\varepsilon_1)$ tal que sea solución de la siguiente función objetivo:

$$\max_{q_2}[(a-(c+\varepsilon_1)-q_1^*-q_2)q_2]$$

- De modo similar, si el coste de la empresa 2 es bajo, $q_2^*(c+\varepsilon_0)$ será la solución de:

$$\max_{q_2}[(a-(c+\varepsilon_0)-q_1^*-q_2)q_2]$$

- Finalmente, la empresa 1 asignó la probabilidad p al hecho de que el coste de la empresa 2 es alto y, la probabilidad $(1-p)$ al hecho de que el coste de la empresa 2 sea bajo; por lo que debería prever que la cantidad elegida por la empresa 2 será $q_2^*(c+\varepsilon_1)$ o $q_2^*(c+\varepsilon_0)$, dependiendo del coste de esta empresa. Por tanto, la empresa 1 elige q_1^* que resuelve la siguiente función objetivo:

$$\max_{q_1} \; p\,[a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_1)]q_1 + (1 - p)[a - c - q_1 - q_2^*(c + \varepsilon_0)]q_1$$

Para maximizar el beneficio esperado.

- Las condiciones de primer orden de estos problemas de optimización son:

✓ Para la empresa 2 con costos altos:

$$\frac{\partial \left\{\max\limits_{q_2}[(a - (c + \varepsilon_1) - q_1^* - q_2)q_2]\right\}}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial\{q_2[a - (c + \varepsilon_1)] - q_2.q_1^* - q_2^2\}}{\partial q_2} = 0$$

$$a - (c + \varepsilon_1) - q_1^* - 2q_2 = 0$$

$$q_2^*(c + \varepsilon_1) = \frac{a-(c+\varepsilon_1)-q_1^*}{2} \qquad \text{FR}_2$$

(Producción óptima de la empresa 2 si los costes son altos)

✓ Para la empresa 2 con costos bajos:

$$\frac{\partial \left\{\max\limits_{q_2}[(a - (c + \varepsilon_0) - q_1^* - q_2)q_2]\right\}}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial\{q_2[a - (c + \varepsilon_0)] - q_2.q_1^* - q_2^2\}}{\partial q_2} = 0$$

$$a - (c + \varepsilon_0) - q_1^* - 2.q_2 = 0$$

$$q_2^*(c + \varepsilon_0) = \frac{a-(c+\varepsilon_0)-q_1^*}{2} \qquad \text{FR}_2$$

(Producción óptima de la empresa 2 si los costes son bajos)

En contraste, en el caso de la empresa 1, esta maximizará la siguiente función objetivo (beneficio esperado), por ello las condiciones de primer orden será la siguiente:

$$\frac{\partial\left\{\max\limits_{q_1}\ p\,[a-c-q_1-q_2^*(c+\varepsilon_1)]q_1+(1-p)[a-c-q_1-q_2^*(c+\varepsilon_0)]q_1\right\}}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial\{p\,[(a-c)q_1-q_1^2-q_1.q_2^*(c+\varepsilon_1)]+(1-p)[(a-c).q_1-q_1^2-q_1.q_2^*(c+\varepsilon_0)]\}}{\partial q_1} = 0$$

$$p[a-c-2q_1-q_2^*(c+\varepsilon_1)]+(1-p)[a-c-2q_1-q_2^*(c+\varepsilon_0)] = 0$$

$$\underbrace{-p[2q_1]-(1-p)[2q_1]}_{-2q_1}+p[a-c-q_2^*(c+\varepsilon_1)] + (1-p)[a-c-q_2^*(c+\varepsilon_0)] = 0$$

$q_1^* = \frac{p[a-c-q_2^*(c+\varepsilon_1)]+(1-p)[a-c-q_2^*(c+\varepsilon_0)]}{2}$ FR_1

(Producción óptima de la empresa 1 con valor esperado)

Comparemos $q_2^*(c+\varepsilon_1)$, $q_2^*(c+\varepsilon_0)$ y q_1^* con el equilibrio de Cournot con información completa y costes c_1 y c_2. Suponiendo que los valores de c_1 y c_2 son tales que ambas cantidades de equilibrio son positivas.

En la generalización del Cournot con información completa la empresa i produce:

$$q_i^* = (a-2c_i-c_j)/3.$$

De modo que: $q_2^* = (a-2c_2-c_1)/3$ y,

$$q_1^* = (a-2c_1-c_2)/3$$

Por el contrario, en el caso con información incompleta:

$$q_2^*(c+\varepsilon_1) > (a-2(c+\varepsilon_1)+c)/3 \text{ y,}$$

$$q_2^*(c+\varepsilon_0) < (a-2(c+\varepsilon_0)+c)/3$$

Esto ocurre porque la empresa 2 al tener información privada, no sólo ajusta su cantidad a su coste, sino que también responde al hecho de que la empresa 1 no puede hacerlo, al no tener la información correcta de los costes de la empresa 2 y solo considerar la probabilidad de ellos, por lo que actúa en función de la valoración esperada.

Otro ejemplo con información asimétrica, Coca Cola y Pepsi Cola:

En un país X, ingresan 2 empresas: Coca-Cola (Empresa 1) y Pepsi-Cola (Empresa 2) únicas empresas que producen gaseosas (forman un mercado oligopólico), y como es de esperar, estas empresas van a competir para ganarse el mercado de gaseosas en el país X, esta competencia será bajo el Modelo de duopolio de Cournot (vía cantidades). Para ello contamos con la siguiente información:

Sea la siguiente función de demanda inversa:

$$P(Q) = 20 - Q$$

Sea también la siguiente función de costos (información de dominio público) de la Empresa Coca-Cola (Empresa 1):

$$C_1(q_1) = 4q_1$$

Sin embargo, la información sobre los costos de Empresa Pepsi-Cola (Empresa 2) no es de dominio público, solo lo conoce la empresa 2, en tanto, que la empresa 1 conoce solo las probabilidades de los costos si son altos o bajos y tiene la siguiente estructura:

$$C_2(q_2) = (4 + \varepsilon)q_2$$

donde "$(4 + \varepsilon)$" se distribuye con probabilidad de 0.35 si "ε" es alto = ε_1.

Siendo $\varepsilon_0 = 2$, y $\varepsilon_1 = 5$

Hallar las cantidades que maximizan los beneficios de ambas empresas.

Solución:

Primero identificamos la función objetivo de cada empresa de acuerdo a sus costos, que son iguales a los pagos del juego:

Beneficio de la empresa 1 (Coca-Cola):

$$U_1(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_0) = (20 - q_1 - q_2)q_1 - 4q_1$$

$$U_1(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_0) = (20 - 4 - q_1 - q_2)q_1$$

$$U_1(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_0) = (16 - q_1 - q_2)q_1$$

Beneficio de la empresa 2 (Pepsi-Cola):

Costos altos:

$$U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = (20 - (c+\varepsilon_1) - q_1 - q_2)q_2$$

$$U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = (20 - (4+\varepsilon_1) - q_1 - q_2)q_2$$

$$U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_1) = (16 - \varepsilon_1 - q_1 - q_2)q_2$$

Costos bajos

$$U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_0) = (20 - (c+\varepsilon_0) - q_1 - q_2)q_2$$

$$U_2(q_1; q_2; c+\varepsilon_0) = (16 - \varepsilon_0 - q_1 - q_2)q_2$$

Para Pepsi (Empresa 2) hay dos casos:

- Si su costo marginal es alto “$(c+\varepsilon_1)$" :
  $\max\limits_{q_2}[(20 - (c+\varepsilon_1) - q_1^* - q_2)q_2]$
- Si su costo marginal es bajo “$(c+\varepsilon_0)$" :
  $\max\limits_{q_2}[(20 - (c+\varepsilon_0) - q_1^* - q_2)q_2]$

Para Coca-Cola (Empresa 1), se tiene lo siguiente:

$$\max_{q_1} 0.35[16 - q_1 - q_2^*(c+\varepsilon_1)]q_1 + (1 - 0.35)[16 - q_1 - q_2^*(c+\varepsilon_0)]q_1$$

$$\max_{q_1} 0.35[16 - q_1 - q_2^*(c+\varepsilon_1)]q_1 + 0.65[16 - q_1 - q_2^*(c+\varepsilon_0)]q_1$$

Solución de la producción óptima de Coca-Cola (Empresa 1) y Pepsi-Cola (Empresa 2):

$$q_2^*(c+\varepsilon_1) = \frac{16 - \varepsilon_1 - q_1^*}{2} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$q_2^*(c+\varepsilon_0) = \frac{16-\varepsilon_0-q_1^*}{2} \quad .... \quad (2)$$

$$q_1^* = \frac{0.35[16-q_2^*(c+\varepsilon_1)]+0.65[16-q_2^*(c+\varepsilon_0)]}{2} \quad ..... \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$q_1^* = \frac{0.35\left[16-(\frac{16-\varepsilon_1-q_1^*}{2})\right]+0.65[16-(\frac{16-\varepsilon_0-q_1^*}{2})]}{2}$$

$$q_1^* = \frac{16+0.35\varepsilon_1+0.65\varepsilon_0}{3} \quad ..... \quad (4)$$

Como $\varepsilon_1 = 5$, y $\varepsilon_0 = 2$; entonces:

$$q_1^* = \frac{16+0.35(5)+0.65(2)}{3} = 6.35 \sim 6\, unidades$$

El redondeo a 6 unidades sólo se hace con fines de

Reemplazando $q_1^* = 6$ en (1):

$$q_2^*(c+\varepsilon_1) = \frac{16-5-6}{2} = 2.5\, unidades$$

Reemplazando $q_1^* = 6$ en (2):

$$q_2^*(c+\varepsilon_0) = \frac{16-2-6}{2} = 4\, unidades$$

Por lo tanto, las cantidades de equilibrio que lo denominamos Equilibrio de Nash (E.N.) son:

$$E.N. = \left(q_1^*; q_2^*(c+\varepsilon_1); q_2^*(c+\varepsilon_0)\right) = (6;\ 2.5, 4)$$

En consecuencia, el equilibrio de nash se obtiene, cuando:

- La empresa 1 produce 6 unidades, produzca lo que produzca la empresa 2.
- La empresa 2 produce 2.5 unidades si su costo marginal es alto y la producción de la empresa 1 es de 6 unidades.

- La empresa 2 produce 4 unidades cuando su costo marginal es bajo y la producción de la empresa 1 es de 6 unidades.

Cournot con información incompleta e información simétrica.

En este caso ambas empresas desconocen los costos marginales de la otra empresa. Veamos:

- Demanda de mercado: P = a – Q
- Beneficio de una empresa *i*: $\pi_i = (a - Q)q_i$ donde $Q = q_1 + q_2$
- Tipo (t) de una empresa, las empresas pueden tener, Costos altos C_A, Costos bajos C_B.
- La probabilidad que una empresa tenga costo alto es δ que es independiente al de la otra empresa.
- Empresa i, produciendo según el tipo t:

$$E(\pi_i) = \delta\left(a - q_i^t - q_i^A - c_t\right)q_i^t + (1 - \delta)\left(a - q_i^t - q_j^B - c_t\right)q_i^t$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i^t} = \delta\left(a - 2q_i^t - q_j^A - c_t\right) + (1 - \delta)\left(a - 2q_i^t - q_j^B - c_t\right) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i^t} = a - 2q_i^t - c_t - \left[\delta q_j^A + (1 - \delta)\left(q_j^B\right)\right] = 0$$

$$a - c_t - \left[\delta q_j^A + (1 - \delta)\left(q_j^B\right)\right] = 2q_i^t$$

$$q_i^t = \frac{a - c_t - \left[\delta q_j^A + (1 - \delta)\left(q_j^B\right)\right]}{2} \quad \ldots. (1)$$

Conociéndose que:

Costo esperado C^E de una empresa:

$c^E = \delta c_A + (1 - \delta)c_B$ …. (2)

Producción con el tipo t de una empresa es igual al de la otra empresa:

$q_i^t = q_j^t = q^t$ Por lo que la Información es Simétrica

Producción esperada de una empresa:

$q^E = \delta q^A + (1 - \delta)q^B$ … (3)

Reemplazando en 1, entonces:

$q^E = \frac{(a - c^E)}{3}$; $\qquad q_i^t = \frac{a - c_t - q^E}{2}$

Aplicación con los siguientes datos:

$a = 20$, $C_A = 5$, $C_B = 2$ $\delta = 0.5$

Costo esperado de una empresa:

$C^E = 0.5(5) + 0.5(2) = 3.5$

Producción esperada de una empresa:

$q^E = (20 – 3.5) /3 = 5.5$

Producción de una empresa con costo alto:

$q^A = (20 – 5 – 5.5) / 2 = 4.75$

Producción de una empresa con costo bajo:

$q^B = (20 – 2 – 5.5) / 2 = 6.25$

Resumen del Capítulo IV

1. Los juegos estáticos con información incompleta.

   También denominados juegos bayesianos estáticos, es una variante de los juegos con información completa y es un acercamiento a lo que acontece en la realidad debido que todo jugador o algún jugador tiene información privada por conveniencia que le ayuda a superar los retos que le plantea su competidor.

2. Información privada

   Las empresas por diferentes motivos ocultan la información de los costos, ya sea para evitar un pago mayor al estado vía impuestos o, evitar que la competencia tenga información cierta sobre su situación financiera etc.

   Este acercamiento a la realidad se modeliza mediante el argumento que en este capítulo denominamos TIPO identificado por $t_i \in T_i$ (tipo del jugador i que pertenece al conjunto de tipos del jugador i) para establecer la información relevante que el jugador (la empresa) mantiene en privado.

   El juego con la variante indicada y aplicando probabilidades según el tipo se modeliza mediante la forma matricial en la que se diferencian matrices tanto para el jugador cuya información es de dominio público y para el jugador cuya información es privada por lo que el otro jugador solo conoce la probabilidad de ocurrencia.

   Ejemplo.

   Si el jugador 1 tiene información privada y conoce la información que es de dominio público del jugador 2, entonces el jugador 1 decidirá con información completa y maximiza sus pagos, en tanto que el jugador 2 que no conoce cierta información del jugador 1 porque es privada, entonces el jugador 2 decidirá con incertidumbre en términos del valor esperado de los pagos.

   En esta situación se ha podido observar que el jugador que mantiene información privada aumenta el nivel de producción respecto al juego con información completa.

3. Representación del juego estático con información incompleta.

El juego expuesto se representa mediante un modelo en un gráfico de modo extensivo o en la forma matricial conocida, una con la información completa que es el que corresponde al jugador 1 y el otro con valores esperados del jugador 2 que supone probabilidades de la información privada que tiene el jugador 1, así tenemos:

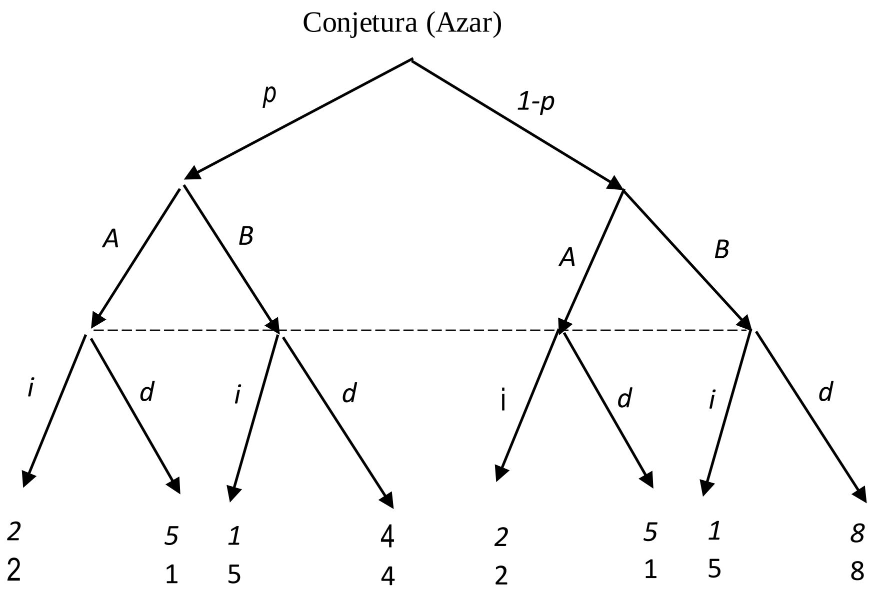


Figura 56 (repetida), Juego dinámico (Forma extensiva)
Información privada de J1

La figura 57, permite observar desde el punto de vista del jugador 2 su decisión que se realiza según los pagos esperados y considera las probabilidades de ocurrencia en la decisión del J1. Su representación en forma estratégica es:

		Jugador 2	
		i	D
Jugador 1	A - A	2, 2	5, 1
	A - B	5/3, 3	6, 10/3
	B - A	4/3, 4	13/3, 3
	B - B	1, 5	16/3, 16/3

Figura 64. Forma estratégica del juego dinámico con azar, información privada de J1 derivada de la figura 56.

CAPÍTULO 5

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

Índice temático.

En el presente capítulo se abordan los siguientes temas:

5.1 Definición, características y elementos del juego

5.2 Representación del juego

5.3 El Equilibrio Bayesiano Perfecto

5.4 Estudios y modelos de Aplicación en la economía

Resumen

Referencias Bibliográficas

Objetivos del Capítulo

Al terminar de leer el presente capítulo, el estudiante estará en condiciones de:

- Interpretar el juego dinámico con información incompleta.
- Analizar sus componentes y sus interrelaciones.
- Obtener la solución del juego dinámico con información incompleta.
- Identificar la aplicación en la economía.

CAPÍTULO 5

LOS JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

5.1. Definición, características y elementos del juego

Definición.

Es un juego de acciones secuenciales en el que al menos un jugador posee una información privada (no es conocida por los demás) acerca de sus pagos y por ende también es privada su función de utilidad.

Así tenemos que, si el jugador que tiene información privada, juega primero (no puede ser de otra manera dado que tiene ventaja sobre el resto y quiere aprovechar su ventaja, en tanto que el resto de jugadores no se atreverían a iniciar el juego ya que se expondrían a este jugador que conocen que tiene información privada), a través de las acciones escogidas por este agente se observan las señales que emite, por lo que el agente que juega después posee información adicional para actualizar la distribución de probabilidades dada por la naturaleza.

Asimismo, en cuanto al equilibrio que corresponde estudiar como concepto de solución en este tipo de juegos, es el equilibrio bayesiano perfecto.

En consecuencia, el juego dinámico con información incompleta es cuando los jugadores juegan secuencialmente y al menos un jugador desconoce la función de pagos del otro.

Características:

El juego dinámico con información completa también llamado juego de señalización posee las siguientes características:

- Es un juego dinámico o secuencial, en el que un jugador elige una acción después de que haya jugado el jugador anterior.
- Hay información incompleta, es decir la información acerca de la función de pagos de al menos un jugador, NO es de dominio público. Estrictu

sensu, información incompleta se da cuando los jugadores desconocen alguna parte de la estructura del juego, como:

- Las estrategias de los otros jugadores, o
- Sus preferencias, o
- La información que otros tengan sobre ellos mismos.

Si no se conoce alguno o el conjunto de esos elementos del juego se dice que el juego es con información incompleta, y se puede demostrar que cualquier falta de información se puede reducir a falta de información sobre las preferencias de los jugadores, o lo que es lo mismo, tendremos un juego con información incompleta cuando algún o algunos de los jugadores no conocen la totalidad de las llamadas funciones de pago (que representan las preferencias de los jugadores).

John Harsanyi, analizó los juegos con información incompleta utilizando una aproximación Bayesiana, en la que toda incertidumbre que presenta el juego debe especificarse y cuantificarse (lo hizo a través de los tipos que puede tener un jugador y la probabilidad de ocurrencia), con lo cual transforma el juego con información incompleta en el juego con información completa pero imperfecta que permitió ser objeto de análisis con las herramientas usuales de la teoría de juegos, estos trabajos sobre los juegos con información completa le posibilitó que le otorguen el premio nobel de economía.

- Existen señales, comúnmente llamados *tipos* en la estructura del juego, que podría aclarar el panorama de la información incompleta, por ejemplo, en la venta de bienes el vendedor sabe qué calidad de bien está vendiendo; sin embargo, el comprador no sabe el tipo de calidad que está comprando, en este caso el precio del bien es una señal de mercado que tendría que ser utilizada por el comprador para saber con más certeza qué tipo de calidad está comprando.
- Así como tenemos como concepto de solución los **equilibrios** dependiendo del tipo de juego, como son:

- El *equilibrio de Nash* en los juegos estáticos con información completa,
- El ***equilibrio de** Nash perfecto en subjuegos* en los juegos dinámicos con información completa,
- El equilibrio bayesiano de Nash en los juegos estáticos con información incompleta.
- En los juegos dinámicos con información incompleta tenemos al equilibrio bayesiano perfecto. (Gibbons, 1992)

Tabla 6
Los Equilibrios según el tipo de Juego.

Información	Juego	Equilibrio
Información Completa	Estático	Equilibrio de Nash
	Dinámico	Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos
Información incompleta	Estático	Equilibrio Bayesiano de Nash
	Dinámico	Equilibrio Bayesiano perfecto

Formalización de un juego con información imperfecta (Mejora de Harsanyi de la información incompleta)**.**

El juego con información completa e imperfecta es el juego de información incompleta con Señalización que para comprenderlo mejor se realiza entre dos jugadores (1 y 2) donde 1 posee información perfecta y 2 no.

El juego en su forma general es:

$$\Gamma = \{J, \{H, h\}, (A(h))_{h \in H}, u_i(a_i, a_{-i};\ t_i)\}$$

Por lo que el Juego de Señalización se descompone en los siguientes elementos:

Γ = Juego dinámico

J = {1, 2, …, n} Conjunto de n Jugadores

H = familia de todos los conjuntos de información

h_i = Conjunto de información del jugador i

$(A(h))_{h\in H}$ = donde A es el espacio de acciones de h el conjunto de información que pertenece a H la familia de acciones del juego.

$u_i(a_i, a_{-i};\ t_i)$ = función de utilidad del jugador i, en la que a_i representa las acciones del jugador i, a_{-i} son las acciones del resto de jugadores que no son el jugador i y, t_i es la seña o tipo con que juega el jugador i.

5.2. Representación del juego

Representación del juego dinámico con información incompleta.

La representación del juego dinámico es la forma extensiva, y de información incompleta que hace que se tengan alternativas de decisión según el tipo que se identifica el jugador que tiene información privada por lo cual habrá tantas formas extensivas como tipos tenga el jugador.

Modelo básico

En este apartado se recrea el modelo señalización. (Gibbons, R, 1992)

Sea Γ un juego dinámico con información incompleta y señalización, decimos que Γ es un juego con información imperfecta, si cumple:

- Tiene dos jugadores, J1 y J2. Quienes son el jugador JE (emisor) y el jugador JR (receptor), respectivamente.
- JE tiene información privada (tipo) y JR no.

  Hay una información a priori, de dominio público, que es una distribución de probabilidad de la información privada p(t) sobre el conjunto de los tipos potenciales de E: T.
- El emisor JE juega en primer lugar y el receptor JR en segundo lugar.
- Las acciones son:

m, llamada mensaje, perteneciente a un conjunto M. (El emisor al observar t_i elige un m_t del conjunto factible de mensajes M)

a, perteneciente a un conjunto A y se acaba el juego. (El receptor observa m_t (pero no t_i) y elige a continuación una acción a_k del conjunto de acciones posibles A)

En consecuencia, el conjunto de mensajes factibles depende del tipo que determina el azar y, el conjunto de acciones factibles depende del mensaje que envía el emisor.

- Los pagos correspondientes son *uJE(m, a; t)* y *uJR(m, a; t)*, dependen de las acciones realizadas m y a, y, del tipo efectivo t de E.

- El conjunto de información que es unitario para JE: $h_t = \{t\}$ por cada tipo $t \epsilon T$ que pueda observar.

  El conjunto de información de JR: $h'_m = \{t\}$ (con tantos nodos como tipos tiene el conjunto T) por cada mensaje $m \epsilon M$ de E que pueda observar.

  En consecuencia, las estrategias puras de JE son reglas de asignación que a cada tipo $t \in T$ le asocian un mensaje $m_t\ en\ M$.

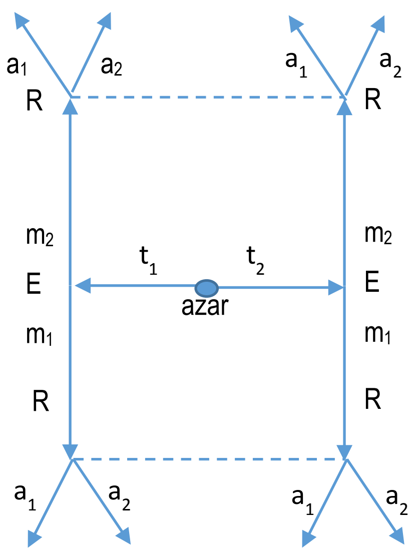


Figura 65. Estructura del juego de señalización Juego con información incompleta

Con la señalización y probabilidades de ocurrencia se identifican las acciones óptimas que juegan tanto JE como JR.

Aplicación de los modelos de señalización

- En el mercado de Trabajo (Spence 1973)

  JE Un trabajador

  JR Mercado de posibles empresarios

  t_i Capacidad productiva de un trabajador (puede ser alta o bja)

  m_i educación del trabajador

  a salario que paga el merado

- Inversión empresarial (Myers y Majluf, 1984)

  JE Una empresa

  JR un inversor potencial

  t_i rentabilidad de la empresa

  a decisión de invertir o no

Veamos otro ejemplo como el Juego de disuasión. Entrón y Disuarón en (Pérez, 2004)

En este juego, supone que una empresa Entrón quiere entrar al mercado que domina la empresa Disuarón.

Entrón quiere realizar una inversión sin que lo observe Disuarón.

Entrón tiene las estrategias alternativas de No entrar (NE), Entrar invirtiendo (Ei) y Entrar sin invertir (Esi)

Entrón inicia el juego y luego le toca el turno a Disuarón que puede competir duro (Cd) o competir suave (Cs) sin embargo, no sabe cuál es la jugada que realizó Entrón.

Los pagos son los mismos, salvo cuando Entrón decide Entrar invirtiendo, donde los pagos son diferentes si la respuesta de incumbrón es Competir duro, como sigue:

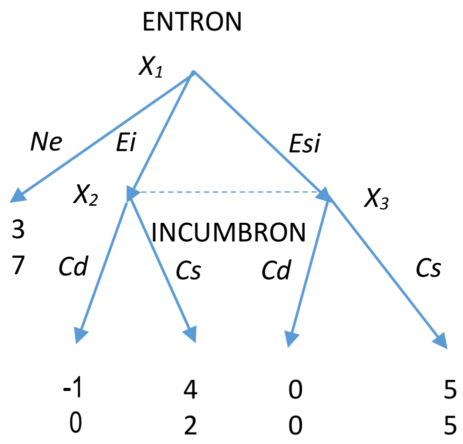


Figura 66. Juego disuasión información Incompleta

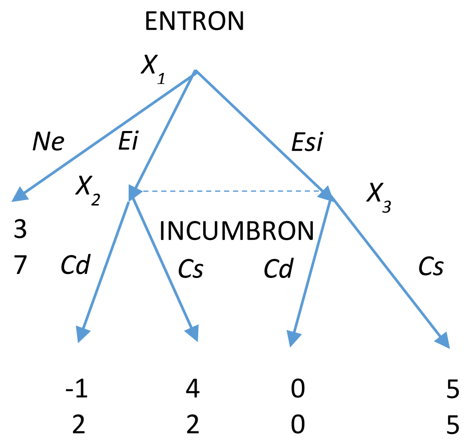


Figura 67. Juego de disuasión información incompleta

En la figura 66, (*Ne*, *Cd*), es un ENPS pero no es tan claramente insatisfactorio como en la figura 67, pues cuando ENTRON *juega Ei* la acción o estrategia *Cd* proporciona a INCUMBRON el mismo pago que *Cs*.

En cada uno de estos juegos podemos observar:

- Jugadores: 2, Entrón y Encumbrón
- Estrategias: 3 para entrón, Ne, Ei, Esi

  2 para incumbrón, Cd, Cs
- Nodos de decisión: 3, X_1, X_2, X_3 en cada juego a o b.
- Conjuntos de información: 1. Jugador 1 (Entrón), $h_1 = \{X_1\}$

  2. Jugador 2 (Incumbrón), $h_2 = \{X_2, X_3\}$
- Perfiles estratégicos: 6, 3(Entrón) x 2(Incumbrón)

  (Ne, Cd), (Ne, Cs), (Ei, Cd), (Ei, Cs), (Esi, Cd), (Esi, Cs)

Pasando de la forma extensiva a la forma normal o estratégica:

		Incumbrón	
		Cd	Cs
Entrón	Ne	3, 7	3, 7
	Ei	-1, 0	4, 2
	Esi	0, 0	5, 5

Figura 68. Forma estratégica deri-vadel juego dinámico, figura 66

		Incumbrón	
		Cd	Cs
Entrón	Ne	3, 7	3, 7
	Ei	-1, 2	4, 2
	Esi	0, 0	5, 5

Figura 69. Forma estratégica del derivada de la figura 67

En ambos juegos los equilibrios a lo Nash son los mismos y también la estrategia de Entrón Esi es estrictamente mejor que la estrategia Ei, sin embargo en el juego a, la acción que realiza Incumbrón Cs, cuando juega, es estrictamente superior a la acción Cd y en el juego b, Cs es débilmente superior a Cd por lo que en este último caso el equilibrio a lo Nash de (Ne, Cd) es más satisfactorio que en el juego a.

Representación multiagente

Esta forma de representación fue propuesta por Selten, y recibe los nombres de representación estratégica mediante agentes y de representación multiagente (Pérez, 2004). Veamos:

Sea Γ un juego dinámico en forma extensiva. Sea $J = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de los n jugadores y sea $H = \{h_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ la familia finita de todos los conjuntos de información de Γ.

Llamamos representación estratégica mediante agentes de □ o representación multiagente de Γ al juego en forma estratégica en el cual:

- En este juego hay k jugadores, uno distinto en cada conjunto de información, que actúan de manera independiente, y cuyas acciones disponibles son las que tenía en ese conjunto de información el jugador de Γ al que le correspondía jugar allí.
- A los nuevos jugadores que actúan en conjuntos de información del jugador J_i de Γ, se les llama agentes de J_i.

- Todos los agentes de un mismo jugador J_i tienen los mismos pagos, y éstos coinciden con los pagos originales de J_i.

5.3. El Equilibrio Bayesiano Perfecto

El Equilibrio bayesiano perfecto o EBP se obtiene en el juego dinámico con información incompleta y es un refinamiento del equilibrio bayesiano de Nash. El EBP puede admitir soluciones no óptimas cuando en la estructura del juego existen conjuntos de información que no inician subjuegos, es decir, solo hay solo un subjuego y es el que corresponde al propio juego global.

Este equilibrio bayesiano perfecto, supera las limitaciones que se dan en el equilibrio de Nash para juegos de información incompleta o equilibrio bayesiano y se constituye en el concepto de equilibrio relevante para juegos dinámicos con información incompleta.

Este equilibrio Bayesiano Perfecto (EBP) debe cumplir los siguientes requisitos:

- **El jugador que decide debe formarse una conjetura,** esto debe realizarse en cada conjunto de información y, sobre el nodo del conjunto de información al que se ha llegado en el juego.
  - ✓ Para un conjunto de información con más de un elemento una conjetura es una distribución de probabilidad sobre los nodos del conjunto de información.
  - ✓ Para un conjunto de información con un único elemento, la conjetura del jugador asigna probabilidad uno al único nodo de decisión.
- **Dadas sus conjeturas, las estrategias de los jugadores deben ser sucesivamente racionales.** Es decir, en cada conjunto de información tomada por el jugador al que le toca jugar y su estrategia subsiguiente deben ser óptimas, dada la conjetura del jugador en ese conjunto de información y las subsiguientes estrategias de los demás jugadores (donde una “estrategia subsiguiente” es un plan de acción completo que cubre

cada contingencia que podría darse después de haberse alcanzado el conjunto de información).

Trayectoria de equilibrio:

Con cualquier perfil de estrategia (incluyendo la mixta),

- ✓ Un conjunto de información está en la trayectoria de equilibrio si se alcanza con probabilidad positiva durante el desarrollo del juego según las estrategias de equilibrio,
- ✓ El conjunto de información está fuera de la trayectoria de equilibrio si es seguro que no se alcanza cuando el juego se desarrolla según las estrategias de equilibrio, (donde equilibrio puede significar equilibrio de Nash, perfecto en subjuegos, bayesiano o bayesiano perfecto).

- **Determinación de las probabilidades de cada conjetura.** En cualquier conjunto de información h sobre la trayectoria de equilibrio las conjeturas u son consistentes con las estrategias del perfil estratégico s y las jugadas de azar respecto a que las probabilidades de cada conjetura están determinadas de acuerdo con la regla de Bayes y las estrategias de equilibrio de los jugadores y los movimientos que se realizan.

$$p(x_i) = u_{hi}(x_i) = \frac{prob\left({}^{x_i}/_{s}\right)}{prob\left({}^{h_i}/_{s}\right)}$$

- **Consistencia de las conjeturas.** En cualquier conjunto de información fuera de la trayectoria de equilibrio, las conjeturas o creencias son consistentes con las estrategias del perfil estratégico s, en la que las probabilidades de cada conjetura se determinan, con la actualización bayesiana y siempre que sea posible.

En general, un equilibrio bayesiano perfecto tendrá que satisfacer estos 4 requisitos, en el caso de no cumplirse una de los requisitos entonces estaremos en una definición de equilibrio bayesiano perfecto débil (EBPD)

En el ejemplo analizado del juego de la disuasión a, sabemos que el perfil estratégico s = (Esi, Cs) tiene un sistema que fundamenta su racionalidad secuencial, siendo por esto el único perfil que puede estar en el EBP. Se reproduce la forma secuencial:

JUEGO DE DISUACIÓN
(Información incompleta)

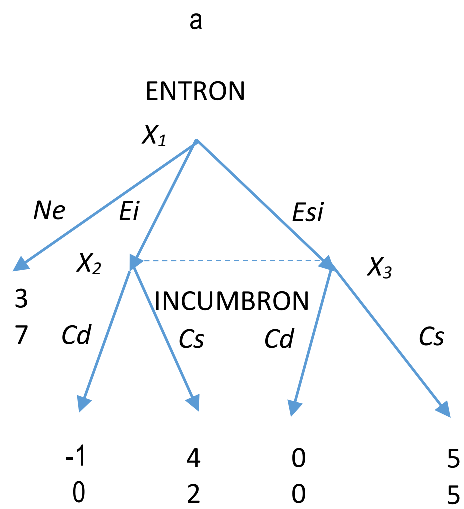


Figura 66. repetida, Juego de la disuasión.

En el caso de s = (Ne, Cd) no es un perfil de racionalidad secuencial constituyéndose en un ejemplo de ENPS que no está en un EBPD.

Por tanto, si s = (Esi, Cs) está en el EBP entonces algún sistema de conjeturas que fundamenta su racionalidad secuencial cumple con los requisitos 3 y 4 anteriormente expuestos.

Veamos:

La conjetura $p(x_2) = 0$, cumple con el requisito 3 en razón de que el conjunto de información del jugador 2, $h_2 = \{x_2, x_3\}$ está en la trayectoria de equilibrio por ser probabilidad $p(h_2/s) = 1 > 0$.

El cálculo de las probabilidades $p(x_2)$ y $p(x_3)$ se realizan mediante la regla de Bayes, como sigue:

$$p(x_2) = u_{h2}(x_2) = \frac{prob\left(x_2/_s\right)}{prob\left(h_2/_s\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Donde podemos observar:

$prob\left(x_2/_s\right) = 0$ Es la probabilidad de que ocurra X_2 dado el perfil estratégico s por lo que nunca ocurrirá, entonces es cero.

$prob\left(h_2/_s\right)$ = 1 Es la probabilidad que el conjunto de información del jugador 2 ocurra (esté en la trayectoria del EBP) dado el perfil estratégico, situación que representa la totalidad de los perfiles estratégicos, entonces es uno.

De la misma manera se realiza con el conjunto de información X_3:

$$p(x_2) = u_{h2}(x_2) = \frac{prob\left(x_3/_s\right)}{prob\left(h_2/_s\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, podemos establecer que dado el perfil estratégico s, el conjunto de información h y la $p(x_2) = 0$, $p(x_3) = 1$ estamos en una situación de EBP.

5.4. Estudios y modelos de aplicación en la economía

5.4.1 Estudios en la economía

El juego dinámico con información incompleta es estudiado en microeconomía como economía de la información, en la que se estudia la información asimétrica y donde se conocen que los contratos celebrados con información asimétrica generan una situación de selección adversa y riesgo moral (acción oculta y/o información oculta), conforme a lo siguiente:

- Selección adversa

Se produce en toda transacción en la que un agente tiene mayor o mejor información que el otro y es lo que se denomina asimetría de información por lo que los agentes terminan eligiendo en forma adversa (contraria) al beneficio que del producto esperan.

Ejemplo. Compra de un vehículo usado, en la que se paga para obtener un vehículo con la calidad acorde con el monto pagado y lo que obtiene realmente es un vehículo con menores prestaciones.

En esta situación caen todas las adquisiciones de bienes o servicios, como la contratación de trabajadores (Gerentes, funcionarios, operarios) donde estos últimos son los que conocen realmente su verdadera productividad en el puesto en el que postulan; compras de bienes, en la que el vendedor es el que conoce la verdadera calidad del bien que ofrece, etc.

- Riesgo Moral.

Es una situación en la que un agente que es parte del contrato, presenta un comportamiento contrario al que está obligado con el fin de obtener beneficios.

Ejemplo. Seguros de salud, donde el que adquiere conoce su verdadera situación de salud y declara diferente para adquirir el seguro con menos costo. Seguro contra accidentes, en la que el asegurado provoca el accidente para cobrar la cantidad que se obliga el seguro a reponer por el perjuicio ocasionado a la persona que adquirió el seguro debido a una contingencia, etc.

Las situaciones descritas también se les conoce como acción oculta y/o información oculta:

- Acción oculta.

  Son aquellas acciones que si bien son verificables se realizan al margen del cumplimiento del contrato con la finalidad de beneficiarse de él.

- Información oculta.

En este caso si bien la acción es verificable, el agente tiene una información privada que permite determinar si la acción que realiza el agente es la adecuada.

En estas situaciones se encuentran todas las transacciones que se realizan y que presentan información asimétrica.

En economía los estudios para superar la transacción con información asimétrica se realizan en el campo de la microeconomía en el tema de estudio denominado Economía de la Información, cuyos análisis y soluciones han permitido la intervención del gobierno para transparentar la información de modo que el público usuario tenga confianza en el producto que adquiere y pague la cantidad que considera vale dicho producto.

En la búsqueda de la solución óptima en transacciones que presentan información asimétrica, es decir, juegos dinámicos con información incompleta, Jhon Harsinyi (premio nobel de economía) propuso el método de solución a través del conocimiento de las señales (tipos) que emite el agente que tiene su información privada.

Como ejemplos tenemos los estudios que se han realizado y que han dado origen a los modelos denominados. El Principal y el agente, los limones (Akerlof), los seguros (Riley), señalización en el mercado laboral (modelo de Spence).

5.4.2 Modelos económicos.

- **El modelo del Principal y el Agente**

En la que el agente es el encargado (ejemplo, un gerente) para que se realicen todas las acciones que corresponden al objeto que recibe (la empresa) en beneficio del Principal (el Inversionista o dueño del objeto), sin embargo, por los intereses diferentes entre el dueño y el gerente sus objetivos están en conflicto, los beneficios que obtiene el dueño no son los esperados y supone que la diferencia ha mejorado el beneficio para el gerente, generándose conflictos por lo que estamos ante un problema de riesgo moral por acción oculta, éstos conflictos buscan solucionarse a través de mecanismos (incentivos) para que el agente oriente las actividades de modo que el dueño obtenga los beneficios esperados.

- **El modelo de "los limones"** (Akerlof,1970) o de la venta de carros usados. El precio es una señal.

Se muestra la importancia de la información en el que analizando la venta de carros usados, que pueden tener calidades diferentes, y donde el **vendedor** conoce con certeza las condiciones del carro en tanto que el comprador no, concluye que al venderse los carros con el mismo contrato no diferenciador entonces los de mejor calidad se segregan y venden sus carros fuera de este mercado en tanto que en el mercado solo serían vendidos los carros de menor calidad o de lo contrario efectuar un contrato diferenciador por ejemplo ofrecer una garantía por cualquier avería que ocurriera durante un periodo determinado.

- El **modelo de seguros** Riley (2001) modela la venta de un contrato de seguros que es un acuerdo ofrecido por el asegurador.
- **El modelo de Señalización en el mercado laboral o Modelo de Spence, (**Gibbons, R, 1992)

Explica la información asimétrica en la contratación de un trabajador que tiene mejor información de su productividad que la empresa que lo contrata, como sigue:

Formalización del modelo de Spence de señalización en el mercado laboral

✓ Este modelo plantea que el nivel de estudios de un trabajador es una señal indicadora de su productividad laboral.

✓ Publicado en 1973 y por tanto no está expresado en los términos modernos de la teoría de juegos.

✓ Ofrece algunos refinamientos del equilibrio de Nash debido a que pone de manifiesto algunas ideas y cuestiones básicas de los juegos dinámicos con información incompleta.

Descripción del juego:

- Jugador 1: Trabajador

- Jugador 2: Empresa

El jugador 1 elige un nivel de estudios $e \geq 0$, y demanda un salario $w \geq 0$ al jugador 2 (empresa). La empresa acepta o rechaza la oferta.

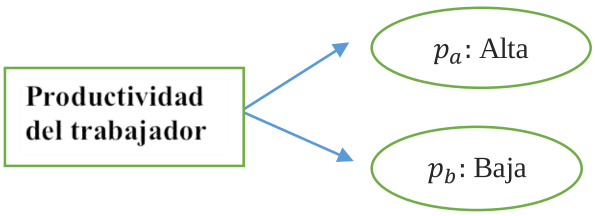


Figura 67. Estudios y salario

Solo el jugador 1 sabe cuál es su productividad. La empresa solo conoce la probabilidad a priori q y que esta probabilidad sea del jugador de alta probabilidad.

El jugador 1 tiene costes de adquisición del nivel de estudios e, el cual se representa de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{c = c(e; p)}$$

Donde:

e: Nivel de estudios

p: Tipo del jugador 1

El jugador 1 es quien emite señales al jugador 2.

Espacio de tipos del jugador 1: $T = \{p_a; p_b\}$ en donde $p_a > p_b$, este jugador elige un mensaje $(e; w) \in R_+ x\ R_+$. Este mensaje es llamado también contrato, que es observado por el jugador 2 (receptor).

El jugador 2 elige una acción $a \in \{A; RE\}$ donde A es acepta y RE es rechaza; y se acaba el juego.

$$\boldsymbol{c = c(e;p)} \; \boldsymbol{<} \; \boldsymbol{c_a < c_b} \quad \begin{cases} \boldsymbol{c(e;p_a) = e.c_a} \\ \boldsymbol{c(e;p_b) = e.c_b} \end{cases}$$

Figura 68. Coste de adquisición de estudios para ambos tipos

Función de Productividad (g): $g = g(e;p)$, donde:

$\boldsymbol{p}$**:** Tipo del emisor

$\boldsymbol{e}$: Nivel de estudios o también llamado calidad del rendimiento del estudiante

Productividad esperada a priori (φ_p)**:** Conocida por el jugador 2

$$\varphi_p = q.p_a + (1-q).p_b$$

Vector de pagos:

Dado el mensaje emitido por el jugador 1, $(e;w)$

Si J2 elige rechazar el contrato (RE), entonces el vector de pagos es $(0;0)$

Si el Jugador 2 elige aceptar el contrato (A) , existen dos posibilidades:

$(w - e.c_a, p_a)$ Si el tipo del emisor es p_a

$(w - e.c_b, p_b)$ Si el tipo del emisor es p_b

Para la empresa: $(y(p;e) - w)$

donde: $y(p;e)$: Producción de un individuo con productividad p y nivel de estudios e.

w: Salario que le paga la empresa al individuo.

El supuesto crucial en el modelo de Spence es que los trabajadores con poca capacidad encuentran la señalización más cara que los trabajadores con capacidad más alta (Gibbons, R, 1992)

$$c_e(p_0; e) > c_e(p_1; e)$$

Interpretación: El coste marginal de la educación es más alto para trabajadores de baja productividad que para los de productividad alta.

Ahora introduciremos un análisis acerca de cuanto es necesario aumentar de salario a un trabajador con un nivel educativo e_1.

En primer lugar, vamos a comparar a dos individuos: uno con productividad alta y otro con productividad baja. Ambos parten de un mismo nivel educativo: e_1.

Para llegar a e_2 requieren un salario adicional; para el caso del individuo con productividad alta (I_a) requerirá un menor salario que el que tiene productividad baja (I_b), lo cual se puede apreciar en el gráfico 5.1, en las curvas de indiferencia de ambos individuos. Debido a que la pendiente de la curva de indiferencia del individuo con productividad alta es menor a la del individuo con productividad baja.

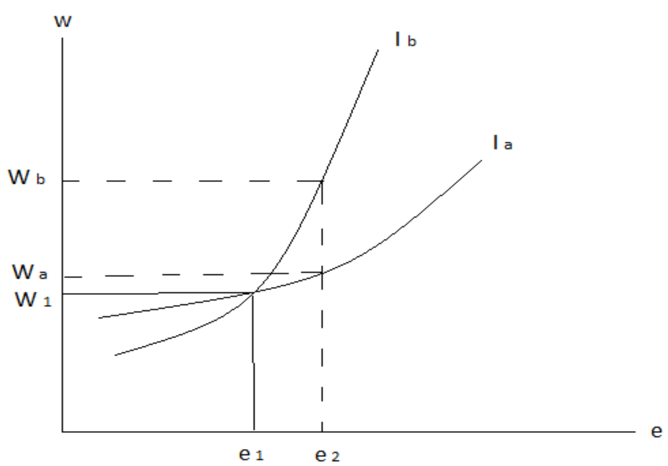


Figura 69. Educación y salario requerido

Resumen del Capítulo V

Juegos dinámicos con información incompleta

1. Definición, características y elementos del juego

   Definición.

   Es un juego de acciones secuenciales en el que al menos un jugador posee una información privada (no es conocida por los demás) acerca de sus pagos y por ende también es privada su función de utilidad.

   Características

   - El juego es dinámico o secuencial
   - Hay información incompleta, la función de pagos de al menos un jugador no es de dominio público.
   - Existen señales, que Harsanyi analizó y por el que le dieron el premio nobel de economía, llamados *tipos* en la estructura del juego y su probabilidad de ocurrencia, que transforma la información incompleta en información completa pero imperfecta.

     Ejemplo. En la venta de bienes el vendedor sabe la calidad del bien que no sabe el comprador, en este caso el precio es la señal de mercado que utilizaría el comprador para saber con más certeza qué tipo de calidad está comprando.
   - El equilibrio en el juego se denomina Equilibrio Bayesiano perfecto. hasta aquí tenemos los siguientes:

Tabla 7
Equilibrios según el tipo de juego e información

Información	Juego	Equilibrio
Información Completa	Estático	Equilibrio de Nash
	Dinámico	Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos
Información incompleta	Estático	Equilibrio Bayesiano de Nash
	Dinámico	Equilibrio Bayesiano perfecto

Formalización de un juego con información completa e imperfecta (Mejora de Harsanyi de la información incompleta con señales).

El juego en su forma general es:

$$\Gamma = \{J, \{H, h\}, (A(h))_{h \square H}, u_i(a_i, a_{-i};\ t_i)\}$$

Se identifican los jugadores *J*, el conjunto y la familia de información (*h, H*), el conjunto de acciones contenidos en el conjunto de información, los pagos según las acciones del jugador i y el resto de jugadores (-*i*) y el tipo con que juega el jugador i (t_i).

2. Representación del juego con información incompleta con señalización (Completa e imperfecta según Harsanyi).

   Con fines de enseñanza se juega con 2 jugadores y 2 tipos (señales)

- Tiene dos jugadores, J1 y J2. Quienes son el jugador JE (emisor) y el jugador JR (receptor), respectivamente.
- JE tiene información privada (tipo) y JR no.

  Hay una información a priori, de dominio público, que es una distribución de probabilidad de la información privada p(t) sobre el conjunto de los tipos potenciales de E, T.

- El emisor JE juega en primer lugar y el receptor JR en segundo lugar.
- Las acciones son:

  m, llamada mensaje, perteneciente a un conjunto M.

  a, acciones, perteneciente a un conjunto A y se acaba el juego.

- Los pagos correspondientes son *uJE(m, a; t)* y *uJR(m, a; t)*, dependen de las acciones realizadas m y a, y, del tipo efectivo t de E.
- El conjunto de información que es unitario para JE: $h_t = \{t\}$ por cada tipo $t \in T$ que pueda observar.

- El conjunto de información de JR: $h'_m = \{t\}$ (con tantos nodos como tipos tiene el conjunto T) por cada mensaje $m \epsilon M$ de E que pueda observar.
- En consecuencia, las estrategias puras de JE son reglas de asignación que a cada tipo $t \in T$ le asocian un mensaje m_t en M.

Estructura del juego de señalización (Juego con información imperfecta) podemos ver su estructura del juego en la figura 65.

Con la señalización y probabilidades de ocurrencia se identifican las acciones óptimas que juegan tanto JE como JR.

3. El equilibrio Bayesiano Perfecto

El Equilibrio bayesiano perfecto o EBP se obtiene en el juego dinámico con información incompleta y es un refinamiento del equilibrio bayesiano de Nash. El EBP puede admitir soluciones no óptimas cuando en la estructura del juego existen conjuntos de información que no inician subjuegos, es decir, hay solo un subjuego y es el que corresponde al propio juego global.

Para determinar el ENB, se tiene que cumplir los siguientes requisitos:

1. El decisor tiene que formarse conjeturas (probabilidades) sobre cada conjunto de información y, sobre el nodo del conjunto de información.
2. Dadas sus conjeturas, las estrategias de los jugadores deben ser sucesivamente racionales.
3. Determinación de las probabilidades de cada conjetura**.** En cualquier conjunto de información h sobre la trayectoria de equilibrio las conjeturas u son consistentes con las estrategias del perfil estratégico s y las jugadas de azar respecto a que las probabilidades de cada conjetura están determinadas de acuerdo con la regla de Bayes y las estrategias de equilibrio de los jugadores y los movimientos que se realizan.

$$p(x_i) = u_{hi}(x_i) = \frac{prob\left({}^{x_i}/_{s}\right)}{prob\left({}^{h_i}/_{s}\right)}$$

4. Consistencia de las conjeturas. En cualquier conjunto de información fuera de la trayectoria de equilibrio, las conjeturas o creencias son consistentes con las estrategias del perfil estratégico s, en la que las probabilidades de cada conjetura se determinan, con la actualización bayesiana y siempre que sea posible.

Ejemplo EBP

En el juego de la disuasión, sabemos que el perfil estratégico s = *(Esi, Cs)* tiene un sistema que fundamenta su racionalidad secuencial, siendo por esto el único perfil que puede estar en el EBP.

Se reproduce la forma secuencial:

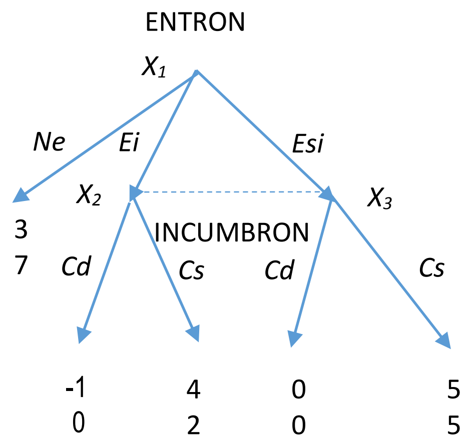


Figura 66 (Repetida). Juego disuasión información Incompleta

En el caso de s = *(Ne, Cd)* no es un perfil de racionalidad secuencial constituyéndose en un ejemplo de ENPS que no está en un EBPD.

Por tanto, si s = *(Esi, Cs)* está en el EBP entonces algún sistema de conjeturas que fundamenta su racionalidad secuencial cumple con los requisitos 3 y 4 anteriormente expuestos.

Veamos:

La conjetura $p(x_2) = 0$, cumple con el requisito 3 en razón de que el conjunto de información del jugador 2, $h_2 = \{x_2, x_3\}$ está en la trayectoria de equilibrio por ser probabilidad $p(h_2/s) = 1 > 0$.

El cálculo de las probabilidades $p(x_2)$ y $p(x_3)$ se realizan mediante la regla de Bayes, como sigue:

$$p(x_2) = u_{h2}(x_2) = \frac{prob\left(x_2/_s\right)}{prob\left(h_2/_s\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Donde podemos observar:

$prob\left(x_2/_s\right) = 0$ Es la probabilidad de que ocurra X_2 dado el perfil estratégico *s*, esta situación nunca ocurrirá, entonces es cero.

$prob\left(h_2/_s\right) = 1$ Es la probabilidad que el conjunto de información del jugador 2 ocurra (esté en la trayectoria del EBP) dado el perfil estratégico, situación que representa la totalidad de los perfiles estratégicos, entonces es uno.

De la misma manera se realiza con el conjunto de información X_3:

$$p(x_2) = u_{h2}(x_2) = \frac{prob\left(x_3/_s\right)}{prob\left(h_2/_s\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, podemos establecer que dado el perfil estratégico s, el conjunto de información h y la $p(x_2) = 0$, $p(x_3) = 1$ estamos en una situación de EBP.

V. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bonanno, G. (2015). *Game Theory*, University of California. California.

Bravo, J. (2008). *Historia de las matemáticas*: Teoría de juegos.

Cerdá, E., Pérez, J. y Jimeno. J., (2004). *Teoría de juegos*. Madrid, España, Pearson Prentice Hall.

Eslava, M. *Teoría de juegos: notas de clase*. Recuperado de https://economia.uniandes.edu.co/files/profesores/marcela_eslava/notas5_dinamicos_info_completa1.pdf

Ferguson, C y Gould, J, *Teoría Microeconómica*, 4ta. Ed., Georgetown, EE.UU., Irwing-Dorsey Limited.

Fernández, F., (2005), *Teoría de Juegos: análisis matemático de conflictos*. Recuperado de https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo1lp/5/ffernandez.pdf

Fudenberg D. y Tirole J. (1991). *Game Theory*. Recuperado de https://homepage.univie.ac.at/Mariya.Teteryatnikova/WS2011/FT.pdf.

Galetovic, A., (2002). *Microeconomía II*, Recuperado de https://www.u-cursos.cl/usuario/6c35e35ec55a71af969f59a168a300a7/mi_blog/r/Z_Apunte_Teoria_de_Juegos_Pregrado_-_60.pdf

Gibbons, Robert. (1992). *Un primer curso de teoría de juegos.* Madrid, España, Antoni Bosch editor, España,

In-Koo, C. y Kreps, D., (1987), *Signaling Games and Stable Equilibria*. Recuperado de https://www2.bc.edu/thomas-chemmanur/phdfincorp/MF891%20papers/Cho%20Kreps%201987.pdf

Jiménez, F., (2012), *¿jugamos en el mismo equipo?* Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5089652.pdf)

López, B. *Teoría de los juegos*. Recuperado de: http://www.economia.unam.mx /profesores/blopez/presjuegos.pdf

Maddala, G. y Miller, E., (1996), *Microeconomía*, México, McGraw-Hill.

Meca, A. *Génesis y evolución de la teoría de juegos y sus orígenes en España*. Recuperado de http://www.seio.es/BEIO/files/BEIOv22n1_IO_AMeca.pdf.

Nicholson, W., (2008), *Teoría Microeconómica. Principios básicos y ampliaciones*, 9na. ed., México, Cencage Learning.

Pyndick R. y Rubinfeld D. (2009). *Microeconomía*. Madrid, España, Pearson Educación S.A..

Red cultural del Banco de la Republica de Colombia. *Premios nobel en economía*. Recuperado de:

http://enciclopedia.banrepcultural.org/index.php/Premios_Nobel_de_Econom%C3%ADa

Tenorio, A. y Martín, A. (2015). *Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos*, Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/282074955_Un_paseo_por_la_historia_de_la_Teoria_de_Juegos/link/57176d0e08ae2679a8c7671f/download

Vega Redondo. (2000). *Economía y Juegos*. Barcelona, España,

VI. APÉNDICES

Teoría de Juegos y Economía.

“En los últimos veinte años la Teoría de Juegos ha experimentado una expansión significativa en tres importantes aspectos. En lo que se refiere a la investigación académica no han cesado de aumentar las publicaciones especializadas en las que se estudia o aplica la Teoría de Juegos, tanto revistas como libros. En el aspecto docente, puede decirse que ha aumentado sensiblemente su influencia en los *currícula* de algunas licenciaturas y programas de doctorado, especialmente en los de Economía (tanto a través de asignaturas clásicas de corte microeconómico y macroeconómico, como de asignaturas específicas dedicadas al estudio de la Teoría de Juegos o a materias relacionadas con la información asimétrica, economía pública, etc.). Por último, en el aspecto de divulgación y presencia pública puede decirse que el conocimiento de la Teoría de Juegos ha crecido fuertemente a partir de la concesión en 1994 del Premio Nóbel de Economía a tres de sus primeros y más importantes creadores (John Forbes Nash, Reinhard Selten y John C. Harsanyi), y especialmente tras la publicación de una interesante biografía de Nash que fue llevada exitosamente al cine en el año 2001.” (Pérez, Joaquín; 2004)

“We began this introduction with story of oligopoly pricing because we expected it to be familiar to many of our readers. But game theory has a much broader scope. The theory of non cooperative games studies the behavior of agents in any situation where each agent´s optimal choice may depend on his forecast of his opponents.”

…

“Although game theory has been applied to many fields, this book focuse on the kinds of game theory that have been most useful in the study of economic problems.” (Fudemberg & Tirole, 2005)

Traducción:

“Comenzamos esta introducción con una historia de precios de oligopolio porque esperábamos que fuera familiar para muchos de nuestros lectores. Pero la teoría de juegos tiene un alcance mucho más amplio. La teoría de los juegos no cooperativos estudia el comportamiento de los agentes en cualquier situación en la que la elección óptima de cada agente puede depender de su pronóstico de sus oponentes.”

…

“Aunque la teoría de juegos se ha aplicado a muchos campos, este libro se centra en los tipos de teoría de juegos que han sido más útiles en el estudio de problemas económicos. (Fudemberg & Tirole, 2005)

“Game theory had a major influence on the development of several branches of economics (industrial organization, international trade, labor economics, macroeconomics, etc.).” (Bonanno, Giacomo; 2015)

Traducción: “La teoría de juegos ha tenido una gran influencia en el desarrollo de varias ramas de la economía (organización industrial, comercio internacional, economía laboral, macroeconomía, etc.).” (Bonanno, Giacomo; 2015)