UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“EXISTENCIA, UNICIDAD Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN FUERTE DE UNA ECUACIÓN DE ONDA NO LINEAL CON DISIPACIÓN FRICCIONAL”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

REYNALDO ARTURO EGOCHEAGA DÍAZ

Callao, 2019
PERÚ

Bach. Reynaldo Arturo Egocheaga Díaz

Autor

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Asesor

Hoja de referencia del Jurado y aprobación

"Existencia, unicidad y comportamiento asintótico de la solución fuerte de una ecuación de onda no lineal con disipación friccional"

Reynaldo Arturo Egocheaga Díaz

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N° 232−2019−D−FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega
Presidente

Mg. Ruth Medina Aparcana
Secretaria

Lic. César Augusto Ávila Celis
Vocal

Mg. Franco Manuel Díaz Vega
Suplente

DEDICATORIA

A mis padres Arturo y Norma
por su incansable e incondicional
apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos a todos aquellos que contribuyeron de muchas maneras en culminar algo pendiente en mi formación profesional.

Agradezco a Dios por darme la vida, por poner en mi camino a las personas y circunstancias indicadas pues todo ello me dio la posibilidad de aprender y saber afrontar lo bueno y lo malo.

Agradezco a mis padres Arturo y Norma por todo lo que me enseñaron y aprendí de ellos, por toda la paciencia y libertad que me dieron para tomar mis decisiones, porque toda mi esencia es de ellos, porque de ellos con su ejemplo puedo hacer lo correcto, lo justo para todos y para mi.

Agradezco a mi alma mater, la Universidad Nacional del Callao, en especial a la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por haberme cobijado en sus aulas y haber contribuido con tanto en mi formación profesional pues a pesar de ser una universidad joven que tal vez aún no tiene el renombre de otras, queda en sus egresados, la hermosa oportunidad de hacerla reconocida como muestra de gratitud hacia ella.

Agradezco al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por sus enseñanzas en los cursos de la línea de las EDP y Análisis funcional, por haberme proporcionado el tema de esta tesis de licenciatura, por su tiempo y aportes concedidos a ella gracias a su larga y reconocida trayectoria académica.

Agradezco al Mg. Orlando Moreno Vega por el apoyo que me permitió obtener el Bachiller en Matemática, gracias a ello se pudieron abrir muchas puertas; por su aporte académico, su sencillez y humildad que es ejemplo para todos los que ejercemos la docencia universitaria.

Agradezco al Mg Roel Vidal Guzman, Decano de la FCNM y al Lic. Absalón Castillo Valdiviezo, docente de la FCNM por tener presente siempre en sus gestiones el bienestar de los alumnos y egresados de nuestra facultad

Agradezco a todos los amigos que conocí en la UNAC, con los que compartí tantos momentos y vivencias pues con sus presencias enriquecieron mi perspectiva de conocer un poco mas de todas las sangres del Perú.

Índice general

RESUMEN

"EXISTENCIA, UNICIDAD Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN FUERTE DE UNA ECUACIÓN DE ONDA NO LINEAL CON DISIPACIÓN FRICCIONAL"

REYNALDO ARTURO EGOCHEAGA DÍAZ

Diciembre del 2019

Asesor	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Título obtenido	:	Licenciado en Matemática

En esta investigación demostramos la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de la solución fuerte de la siguiente ecuación de onda no lineal con disipación friccional (término disipativo):

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \quad \text{en} \quad Q = \Omega \times]0; T[\\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0; T[\\ u(x; 0) = u_0(x) \\ u'(x; 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Realizamos la prueba de la existencia de la solución fuerte mediante el método de Faedo Galerkin, la unicidad es obtenida por el método de la energía y el comportamiento asintótico mediante el Lema de Komornik.

Palabras claves
Solución fuerte, Método de Faedo-Galerkin, existencia de solución, unicidad, comportamiento asintótico, Lema de Komornik.

ABSTRACT

"EXISTENCE, UNICITY AND ASYNTOTIC BEHAVIOR OF THE STRONG SOLUTION OF A NON-LINEAR WAVE EQUATION WITH FRICTIONAL DISSIPATION"

REYNALDO ARTURO EGOCHEAGA DÍAZ

December of the 2019

Adviser	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Title obtained	:	Licenciated in Mathematic

In this research we demonstrate the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the strong solution of the following non-linear wave equation with frictional dissipation (dissipative term):

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \quad \text{en} \quad Q = \Omega \times]0;T[\\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0;T[\\ u(x;0) = u_0(x) \\ u'(x;0) = u_1(x) \end{cases}$$

We perform the proof the existence of the strong solution through the method of Faedo Galerkin, the uniqueness is obtained by the method of energy and asymptotic behavior by means of the Lemma of Komornik.

Keywords
Strong solution, Faedo-Galerkin method, existence of solution, uniqueness, asymptotic behavior, Lemma of Komornik.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) son de gran utilidad en Matemática y ciencias aplicadas pues permiten representar muchos fenómenos físicos mediante modelos de evolución; éstos describen la dinámica que las gobierna en función de espacio y tiempo. Entre las EDP's mas importantes tenemos la ecuación de la onda que matemáticamente describe la propagación de ondas de luz, ondas en el agua, transmisión de ondas en materiales compuestos, vibraciones transversales de placas con rigidez, modelos fundamentales de la mecánica cuántica, etc. y en general, aplicaciones en campos como la matemática, física, ingeniería, biología y la economía. Históricamente este tipo de problemas ha sido estudiado desde el siglo XVIII y aún continúa en la actualidad.

En realidad no existen comportamientos lineales en los sistemas por lo que se hacen estudios sobre ecuaciones de onda no lineales con términos disipativos; este tipo de ecuaciones se presentan en algunos fenómenos tales como los movimientos sísmicos producidos sobre estructuras de gran altitud y que mediante la disipación, es posible lograr que no se generen grandes daños asi como también en procesos mecánico-hidráulicos, que estando expuestos a factores externos, requieren de algún tipo de amortiguamiento.

En esta tesis, la ecuación de estudio pertenece al campo de la Mecánica cuántica y recibe el nombre de Ecuación de Klein-Gordon no lineal (NKG) conocida físicamente como Modelo u^4. Una ecuación de NKG presenta la forma $u_{tt} - \Delta u + \dfrac{V(u)}{du} = 0$; luego, considerando la función potencial $V(u) = \dfrac{u^4}{4}$ y proporcionándole cierta amortiguación obtenemos $u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0$ que es la ecuación base de nuestro estudio; físicamente, el operador laplaciano tiende a dispersar las ondas mientras que el término no lineal tiende a concentrarlas.

Muchas EDP's presentan dificultades para poder determinar sus soluciones explícitas, y en los casos que se obtengan implícitamente no existe garantía de que sean acotadas o únicas siendo éstas características muy importantes en el sentido físico real; por ello, en ésta investigación procuramos garantizar la existencia de la solución, resolver problemas como la unicidad, analizar el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema.

Nuestra investigación está conformada por seis capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el capítulo I, se presenta el planteamiento del problema; en el capítulo II, el marco teórico y algunos resultados preliminares para el desarrollo de nuestro trabajo; en el capítulo III, se dan las hipótesis y variables; en el capítulo IV describiremos la metodología implementada en nuestra investigación. El capítulo V es el corazón de la tesis y se mostrará la existencia, unicidad de la solución de la ecuación de la onda estudiada asi como la obtención del decaimiento exponencial de la energía (comportamiento asintótico), en el capítulo VI, realizamos la contrastación de las hipótesis con los resultados y con éstos, la comparación con estudios similares.

Finalmente damos conclusiones y recomendaciones que permitirán a otros investigadores complementar nuestro trabajo así como las referencias bibliográficas respecto a los libros y artículos considerados.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Existen EDPs que pueden ser resueltas mediante métodos clásicos tales como el Método de Fourier pero a pesar de ser posible la obtención de la solución en forma explícita, no permite estudiar situaciones en las que las funciones involucradas no presentan derivadas clásicas lo que afecta notablemente la unicidad y generalidad de los resultados esperados; por ello se recurre al uso de una derivada generalizada llamada distribución que permite tratar el estudio de las EDPs en espacios funcionales adecuados tales como los Espacios de Sobolev que es una herramienta matemática aplicable a una variedad de problemas y que elimina las restricciones que no son impuestas por el fenómeno físico. En esta investigación consideramos la ecuación:

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \quad \text{en} \quad Q = \Omega \times]0;T[\\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0;T[\\ u(x;0) = u_0(x) \\ u'(x;0) = u_1(x) \end{cases}$$

donde:
Ω: Conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^3$
$\Gamma = \partial\Omega$: Frontera bien regular de Ω
$u : Q \to \mathbb{R}$; $u = u(x,t)$
$\alpha > 0$.
que siendo una EDP no lineal con disipación friccional o término disipativo, nos centraremos en mostrar la existencia y unicidad de la solución fuerte asi como el comportamiento asintótico de la energía asociada a ella.

1.2. Formulación del problema

Problema general
¿Existe única solución fuerte en (1) que asegure el decaimiento exponencial de la energía a medida que transcurre el tiempo?

Problemas específicos
¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución fuerte sea única?

¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que la energía presente decaimiento exponencial a medida que transcurra el tiempo?

1.3. Objetivos

Objetivo General

Demostrar la existencia y unicidad de la solución fuerte de (1) que asegure el decaimiento exponencial de la energía a medida que transcurre el tiempo.

Objetivos Específicos

-Establecer condiciones adecuadas sobre los datos inciales u_0 y u_1 para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución fuerte en (1).

-Analizar el comportamiento asintótico de la energía del sistema estableciendo condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que la energía presente decaimiento exponencial a medida que transcurre el tiempo.

1.4. Limitantes de la investigación

Limitante teórico
El limitante teórico donde se circunscribe nuestra investigación es:

a) Ecuaciones en derivadas parciales
b) Análisis funcional
c) Espacios de Sobolev

Limitante temporal
El proceso de la investigación duró aproximadamente un año; consideramos a nuestra investigación como un estudio longitudinal pues en ella el estudio de las EDP's, en particular de ecuaciones de onda, se trata en diferentes procesos a través de los años por lo cual se tuvo que recabar información de estudios pasados. En este tipo de investigaciones del ámbito matemático, a partir de hipótesis se obtienen nuevos resultados, por ello, siendo el análisis netamente matemático escapa el detalle que se pueden estudiar diferentes variables.

Limitante espacial
Por el tipo de investigación, adecuamos el limitante espacial hacia el estudio de características de soluciones en algunos tipos de ecuación de onda con término no lineal y disipación friccional.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Nacionales

1. Peña, C. (2014) en su artículo ***"Decaimiento exponencial de la ecuación de onda semilineal con disipación localizada"*** estudia el siguiente problema:

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

donde prueba el decaimiento exponencial uniforme de la energía con disipación localizada empleando el Principio de continuación única. Esta ecuación describe las oscilaciones de una cuerda elástica sujeta a una fuente disipativa interna local. En los problemas localmente distribuidos el efecto físico que se da en una vecindad es suficiente para tener información de lo que ocurre en todo el cuerpo. Ver [1]

2. Cabanillas, E. (2001) en su artículo ***"Observaciones sobre la existencia global de las soluciones de una ecuación de Kirchoff no lineal via el Método de Tartar"*** estudia el siguiente problema:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + a(x)u' - u^3 = f \quad \text{en} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ u = 0 \quad \text{en} \quad \sum = \Gamma\times]0;T[\\ u(x;0) = u_0(x), u'(x;0) = u_1(x) \text{ en } \Omega \end{array} \right.$$

donde prueba el decaimiento exponencial uniforme de la energía con disipación localizada empleando el Principio de continuación única. Resaltamos el uso de una Inmersión de Sobolev que es la que aplicamos en nuestra investigación. El problema modela las oscilaciones no lineales de los materiales viscoelásticos. Ver [2]

3. Ramos, O. (1985) en su artículo ***"Observaciones sobre un problema no lineal sin estimativos globais a priori"*** estudia el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sqrt{1 + a(u)}\ \Delta u - u^3 = f$$

de ella, tomamos la consideración que si se tuviese el término $+u^3$ se puede resolver aplicando el método de la energía. Hace uso del método "pozo de potencial" junto al Método de Galerkin probando la existencia de la solución débil local. La ecuación describe las vibraciones transversales de una cuerda elástica. Ver [3]

Internacionales

1. Adauto, Límaco y Lopes (2012) en su artículo ***"On Wave Equations Without a Priori estimates"*** estudia el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho = f \text{ en } Q,\ \rho > 1 \\ u(x;0) = u_0(x);\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x;0) = u_1(x) \quad \text{para } x \in \Omega \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma \end{cases}$$

investigando la existencia y singularidad de una solución débil para el problema mixto. El modelo surge como un caso en la teoría relativista de los campos de mesones escalares Ver [4]

2. Khalifa, M. (2003) en su artículo ***" Existence of almost everywhere solution for nonlinear hyperbolic–parabolic system"*** estudia el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^\rho u_t = F(v) \quad \text{en} \quad Q_T \\ v_t - \Delta v + |v|^\mu v = G(u_t) \quad \text{en} \quad Q_T \\ u(0,x) = \alpha(x), u_t(0,x) = \beta(x), v(0,x) = \gamma(x) \text{ para } x \in \Omega \\ u(t,x)|_S = v(t,x)|_S = 0 \end{cases}$$

Prueba la existencia de una solución utilizando el método de Galerkin. El sistema está formado por ecuaciones de termoelasticidad, éstas describen el comportamiento elástico y térmico de los medios elásticos conductores de calor. Son un acoplamiento de la ecuaciones de elasticidad de segundo orden y de la ecuación de calor y por lo tanto, consisten en un sistema hiperbólico-parabólico no lineal. Ver [5]

3. Aassila, M. (1999) en su artículo ***" Uniform stabilization of solutions to a quasilinear wave equation with damping and source terms"*** estudia el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\alpha + 2\beta|\nabla u|_2^2\right) \Delta u + \delta u_t = \mu u^3 \quad \text{en} \quad Q = \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \sum = \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(0;x) = u_0(x), u_t(0;x) = u_1(x) \text{ en } \Omega \end{cases}$$

demostrando el decaimiento exponencial de las soluciones de una ecuación de onda con amortiguamiento lineal y términos fuente. Resaltamos de este trabajo, la aplicación del Lema de Komornik usado también en nuestra investigación. Ver [6]

4. Nakao, M. (1977) en su artículo ***"Decay of classical solutions of a semilinear wave equation"*** estudia el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha \dfrac{\partial}{\partial t} u + u^3 = f \quad en \quad Q = \Omega \times]0;\infty[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x;0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x;0) = u_1(x) \end{cases}$$

con el objetivo de mostrar el decaimiento exponencial en el tiempo de las soluciones clásicas de la ecuación de onda no lineal con término disipativo mediante desigualdades algebraicas. Ver [7]

5. Sather, J. (1966) en su artículo ***"The existence of a global classical solution of the initial boundary value problem for*** $\Box u + u^3 = f$***"*** estudia el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Box u + u^3 = f \\ u(x;0) = u_0(x), \ D_t u(x;0) = (D_t u)_0(x) \end{cases}$$

donde $\Box = D_t^2 - \Delta$ representa el operador de D'alembert, haciendo referencia a algunos estudios predecesores sobre soluciones débiles o generalizadas mientras que su trabajo garantiza la existencia de una solución clasica global tomando como referencia el Método de Faedo Galerkin. Esta ecuación es importante en la mecánica cuántica relativista. en espacio-tiempo de 4 dimensiones, donde la función u representa alguna cantidad de campo y la función f representa fuentes de energía en el campo. Posibles interacciones del campo consigo mismo se describen mediante el término no lineal. Ver [8]

2.2. Bases teóricas:

Espacios escalares $L^p(\Omega)$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, se define a $L^p(\Omega)$ como el conjunto (de las clases) de funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ es Lebesgue integrable sobre Ω, es decir:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}/u \text{ es medible}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Teorema 2.1
El espacio $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ es un espacio de Banach asociado a la norma:

$$|u|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Demostración Ver [9, Pág. 57]

Para $p = 2$ se tiene que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Para $p = \infty$, la definiremos como el conjunto (de las clases) de funciones Lebesgue medibles u acotadas casi siempre (c.s) en Ω, es decir:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ medible y } |u(x)| \leq M \text{ c.s en } \Omega, M > 0\}$$

Se define el supremo esencial como:

$$\sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)| = \inf\{M > 0; |u(x)| \leq M \text{ c.s en } \Omega\}$$

Teorema 2.2
El espacio $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach asociado a la norma:

$$|u|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)|$$

Demostración Ver [9, Pág. 57]

Teorema 2.3 (Desigualdad de Holder generalizada)
Sean $f_1, f_2, \cdots, f_k$ funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geqslant 1$, $1 \leq i \leq k$ donde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ entonces el producto $f = f_1 f_2 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ y

$$|f|_p \leq |f_1|_{p_1} |f_2|_{p_2} \cdots |f_k|_{p_k}$$

Demostración Ver [10, Pág. 623]

Corolario 2.4 (Desigualdad de Holder)
Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ tal que $1 \leq p \leq \infty$ verificando que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene la desigualdad $\displaystyle\int_\Omega |uv| \leq |u|_p |v|_q$

Demostración Ver [9, Pág. 56]

Proposición 2.5 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para funciones $L^2(\Omega)$)
Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones cuadrado integrales entonces

$$|(f,g)| \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = |f|_2 |g|_2$$

Inmersión continua
Sean V, W espacios de Banach con $V \subseteq W$ como subespacio vectorial. Se dice que V esta inmerso continuamente en W denotado por $V \hookrightarrow W$ si y solo si existe $C > 0$ tal que $|u|_W \leq C|u|_V, \forall u \in V$.

Teorema 2.6
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } |u|_p \leq |u|_q (med(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

Demostración Ver [11, Pág. 25]

De lo anterior, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ se tiene las siguientes inmersiones continuas:

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

Definición 2.7 El espacio vectorial de las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subseteq \Omega$ es representado por $L^p_{loc}(\Omega)$.

Teorema 2.8
Sea (f_n) una sucesión en L^p y f en L^p tales que $|f_n - f|_p \to 0$. Entonces existe una subsucesión (f_ν) tal que
a) $f_\nu(x) \to f(x)$ c.s en Ω.
b) $|f_\nu| \leq h(x), \forall \nu$ c.s en Ω, $h(x) \in L^p$.

Demostración Ver [9, Pág. 58]

Teorema 2.9
L^p es reflexivo si $1 < p < \infty$

Demostración. Ver [9, Pág. 59]

Teorema 2.10
L^p es separable si $1 \leq p < \infty$

Demostración. Ver [11, Pág. 29]

Observación
En adelante usaremos la notación $\langle f, x\rangle$ en vez de $f(x)$ cuando $f \in V'$ y $x \in V$ es decir, se acostumbra escribir $\langle f, x\rangle_{V'\times V}$ para indicar que se tiene una dualidad V', V.

Teorema 2.11 (Representación de Riesz en espacios de Hilbert
Sea V un espacio de Hilbert y $f \in V'$. Entonces existe único $\tilde{f} \in V$ tal que:

$$\langle f, x\rangle_{V'\times V} = (\tilde{f}, x)_V, \forall x \in V$$

Demostración.Ver [9, Pág. 81]

Teorema 2.12 (Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)
Sea $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y $T \in [L^p(\Omega)]'$. Entonces existe $v \in L^q(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Además $|v|_q = |T|_{[L^p(\Omega)]'}$, asi $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$

Demostración.Ver [11, Pág. 41]

Teorema 2.13 (Representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)
Sea $T \in [L^1(\Omega)]'$. Entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Además $|v|_\infty = |T|_{[L^1(\Omega)]'}$, asi $[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)$

Demostración. Ver [11, Pág. 41]

Distribuciones escalares

Denotaremos las derivadas de una función de manera concisa por subíndices y superíndices. Sea el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y el operador de derivación de orden α dado por:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Además, cuando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ se define $D^0 u = u$, $\forall u$

El Espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ de las funciones de prueba

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua.

El soporte de φ es el conjunto cerrado en Ω de los puntos x pertenecientes a Ω donde φ no se anula, es decir:

$$\operatorname{Sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}$$

Seguidamente, consideramos como $C_0^\infty(\Omega)$ al espacio vectorial de las funciones $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ con soporte compacto contenido en Ω tal que sus derivadas parciales de todos los órdenes sean continuas, es decir:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} / \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ con } \operatorname{Sop}(\varphi) \,\text{compacto} \subseteq \Omega\}$$

Teorema 2.14
C_0^∞ es denso *en* $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$

Demostración. Ver [11, Pág. 31]

Definición 2.15 Diremos que la sucesión $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ en $C_0^\infty(\Omega)$ si y solamente si:

a) Existe un conjunto compacto K de Ω tal que $\operatorname{Sop}(\varphi_\nu - \varphi) \subset K$, $\forall\, \nu \geq 1$

b) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en K, es decir:

$$\max_{x \in K} |D^\alpha \varphi_\nu(x) - D^\alpha \varphi(x)| \longrightarrow 0, \text{ si}\, \nu \to \infty, \, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de la convergencia anterior se llama "Espacio de las funciones de prueba" denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

El espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$

Una distribución sobre Ω es un funcional lineal continuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dotado de la convergencia definida en $\mathcal{D}(\Omega)$ es decir:

i) $T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$
ii)Si $(\varphi_\nu) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ entonces $T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi)$.

El espacio vectorial de las distribuciones es denotado por $\mathcal{D}'$ tal que con lo anterior se tiene:

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} / T \text{ es lineal y continua}\}$$

El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ (dualidad entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$).

Los casos más sencillos de distribuciones son las funciones localmente integrables, especificamente a cada función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se le puede asociar la distribución Tu considerando la siguiente:

Definición 2.16
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Definimos la distribución:

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Lema 2.17 (Du Bois Raymond)
Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega u(x)\varphi(x) = 0$, para todo φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $u(x) = 0$ c.s. en Ω.
Demostración. [12, Pág. 9]

Del lema anterior se tiene que para cada función u localmente integrable en Ω, T_u queda univocamente determinada por u c.s sobre Ω en el siguiente sentido: si u, v son localmente integrables entonces $T_u = T_v$ si y solamente si $u = v$ c.s en Ω.
Por ello de ahora en adelante, no haremos distinciones entre funciones localmente integrales u y la distribución Tu generada por u, al decir que la distribución T es una función estamos afirmando que existe una función localmente integrable u tal que $T = T_u$

Derivadas de distribuciones

Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-índice, se denomina derivada de orden α de T a la distribución $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \,, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Se observa que cada distribución T sobre Ω posee derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.

Observaciones
El operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es lineal y continuo en el sentido de la convergencia definida en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es decir:

$$\lim_{v\to\infty} T_v = T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ entonces } \lim_{v\to\infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

La derivada distribucional de una función de $L^1_{loc}(\Omega)$ no es en general una función de $L^1_{loc}(\Omega)$ lo que motiva una nueva clase de espacios de Banach de funciones llamados los espacios de Sobolev.

Espacios de Sobolev

Definición 2.18
Sea Ω un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ bien regular, $1 \leq p < \infty$ se define el espacio de Sobolev como:

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega);\ \forall\ |\alpha| \leq m\right\}$$

donde D^α es el operador de derivación de orden α, en el sentido de las distribuciones.

De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{u \in L^2(\Omega);\ Du \in L^2(\Omega)\right\} \\ H^2(\Omega) &= \left\{u \in L^2(\Omega);\ Du \in L^2(\Omega); D^2u \in L^2(\Omega)\right\} \end{aligned}$$

El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Dadas las funciones $u\,, v \in H^m(\Omega)$ definimos el producto interno:

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

cuya norma inducida es

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Que $\mathcal{D}(\Omega)$ sea denso en $L^p(\Omega)$ no necesariamente se verifica sobre $H^1(\Omega)$ lo que motiva a definir un nuevo espacio de Hilbert denotado por $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\ \|_{H^1(\Omega)}}$ con lo que se tiene:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega), u|_\Gamma = 0\right\}$$

Teorema 2.19 (Desigualdad de Poincaré)
Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$ entonces existe una constante C (dependiendo de Ω y p) tal que

$$|u|_2 \leq C|\nabla u|_2,\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración. Ver [9, Pág. 174]

Observación 1
De la definición, la norma en $H^1(\Omega)$ es

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(|u|_2^2 + |\nabla u|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego, la forma bilineal $((.,.)) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$((u,v)) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}.\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = (\nabla u, \nabla v)$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ con norma denotada por $\|\ \|$ tal que

$$\|u\|^2 = ((u,u)) = (\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|^2$$

Proposición 2.20
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Γ bien regular entonces las normas en $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ son equivalentes.

Demostración. Ver [13, Pág. 37]

Observación 2
Sea el espacio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tal que

$$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega)/\, u|_\Gamma = 0\right\}$$

entonces la forma bilineal

$$(.,.)_\Delta : (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \to \mathbb{R}$$

define el producto interno

$$(u,v)_\Delta = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)dx = (\Delta u, \Delta v)$$

e induce una norma que denotaremos por $\| \|_\Delta$ tal que

$$\|u\|_\Delta^2 = (u,u)_\Delta = (\Delta u, \Delta u) = |\Delta u|_2^2$$

Proposición 2.21
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Γ bien regular y $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces las normas $\|u\|_\Delta = \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ y $\|u\|_{H^2(\Omega)} = \sum_{\alpha \leq 2} |D^\alpha u|_2^2$ son equivalentes.

Demostración. Ver [14, Pág. 105]

Inmersión compacta
La inmersión continua $V \hookrightarrow H$ es llamada compacta si y solamente si cada sucesión acotada (u_n) en V posee una subsucesión (u_{n_k}) que converge en H.

Teorema 2.22 (Inmersión de Sobolev)
Sea Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ entonces se tiene

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; 1 \leq q \leq 6$$

Demostración. Ver [10, Pág. 265]

Teorema 2.23
Sea Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ de clase C^1 entonces se tiene

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \; 1 \leq q \leq 6$$

Demostración. Ver [9, Pág. 169]

Teorema 2.24 (Identidad de Green)
Sea Ω un conjunto abierto, acotado y regular de $\mathbb{R}^n$ y situado a un mismo lado de su frontera $\partial\Omega$. Entonces para todo $u \in H^2(\Omega),\ v \in H^1(\Omega)$ se tiene:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega (\Delta u) v dx + \int_\Gamma v \frac{du}{d\nu} d\Gamma$$

donde $\dfrac{du}{d\nu}$ designa la derivada normal exterior de u siendo $\vec{\nu}$ el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$ y $d\Gamma$ es la medida de Lebesgue sobre la superficie $d\Gamma$.

Demostración Ver [15, Pág. 103]

Proposición 2.25 (Regularidad de los problemas elipticos)
Sea Ω un abierto acotado de clase C^2 con frontera Γ y sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

entonces $u \in H^2(\Omega)$ y $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c|f|_2$ donde c es constante que solo depende de Ω.

Demostración Ver [9, Pág. 181]

Espacios vectoriales $L^p(0, T; V)$

En el estudio de las EDPs es necesario que también utilicemos espacios vectoriales formados por funciones definidas en algún intervalo asumiendo valores en un espacio de Banach.

Definición 2.26 Diremos que una función vectorial $u :]0, T[\to V$ es fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples u_n tal que $u_n(t) \to u(t)$ en V c.s en $]0, T[$.

Definición 2.27 Sea V un espacio de Banach cuyo dual topológico es denotado por V' y el intervalo $]0, T[\subset \mathbb{R}$ asociado a la medida de Lebesgue, el espacio $L^p(0, T; V)$, $1 \leqslant p < \infty$, es el espacio vectorial de las (clases de) funciones $u :]0, T[\longrightarrow V$ vectoriales definidas c.s en $]0, T[$ con valores en V, fuertemente medibles y tales que la función numérica $\|u\|_V^p$ es integrable en $]0, T[$, es decir:

$$L^p(0, T; V) = \{u :]0, T[\longrightarrow V \ / \ u \text{ es medible} \wedge \int_0^T \|u(t)\|_V^p dt < \infty\}$$

Además, $L^p(0, T; V)$ es un espacio de Banach dotado de la norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ representaremos por $L^\infty(0,T;V)$ al conjunto (de las clases) de funciones vectoriales medibles $u :]0,T[\longrightarrow V$ tal que $\|u\|_V$ pertenece a $L^\infty(0,T)$, es decir:

$$L^\infty(0,T;V) = \{u :]0,T[\longrightarrow V \ / \ u \text{ es medible}, \|u(t)\|_V \leqslant C \ \text{ c.s } \ \text{en }]0,\mathrm{T}[\ \}$$

Además $L^\infty(0,T;V)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0,T;V)} &= \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\|u(t)\|_V \\ &= \inf\{C/ \ \|u(t)\|_V \leq C \ \text{ c.s en } [0,T]\} \end{aligned}$$

Si $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert entonces el espacio $L^2(0,T;V)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno está dado por:

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V dt$$

Particularmente consideremos:
En el caso $V = L^p(\Omega)$

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = \{u :]0,T[\longrightarrow L^p(\Omega) \ / \ u \text{ es medible } \wedge \int_0^T |u(t)|_p^p dt < \infty\}$$

En el caso $V = H_0^1(\Omega)$

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) = \{u :]0,T[\longrightarrow H_0^1(\Omega) \ / \ u \text{ es medible} \wedge \|u(t)\| \leqslant C \ \text{ c.s } \ \text{en }]0,\mathrm{T}[\}$$

Teorema 2.28
Sea V un espacio de Banach y V' su dual. Considerando $p, q \in \mathbb{R}$ con $1 \leqslant p < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces se puede identificar:

$$[L^p(0,T;V)]' \approx L^q(0,T;V')$$

Demostración. Ver [16, Pág. 411]

Proposición 2.29
Sea V un espacio de Banach reflexivo y separable, $1 < p < \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces $L^p(0,T;V)$ es un espacio reflexivo y separable, cuyo dual topológico se identifica con el espacio de Banach $L^q(0,T;V')$; donde p e q son exponentes conjugados. La dualidad entre esos espacios es dada en forma integral por:

$$\langle v,u\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X} dt$$

Demostración. Ver [16, Pág. 411]

Teorema 2.30
Sean X e Y espacios de Banach y sea la inmersión continua $X \hookrightarrow Y$ tal que $1 \leq q \leq p \leq \infty$ entonces

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$$

Demostración. Ver [16, Pág. 407]

Teorema 2.31
Sean X e Y espacios de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$, $u \in L^p(0,T;X)$ y $u' \in L^p(0,T;Y)$; $1 \leq p \leq \infty$ entonces $u \in C^0([0,T];Y)$

Demostración. Ver [17, Pág. 11]

Teorema 2.32
Sea X un espacio de Banach con $1 \leq p < \infty$ entonces $C([0,T];X)$ es denso en $u \in L^p(0,T;X)$ y $C([0,T];X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$

Demostración. Ver [16, Pág. 407]

Observación
Siendo $Q = \Omega \times]0,T[\subset \mathbb{R}^{n+1}$ con Ω regular, $T > 0$, consideraremos la siguiente identificación:

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) \equiv L^p(Q)$$

Distribuciones vectoriales

El espacio de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$ con valores en V y denotado por $\mathcal{D}'(0,T;V)$ es el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(0,T)$ en V.

Si $u \in L^p(0,T;X)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces asociamos a u la distribución $T_u : \mathcal{D}(0,T) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

La aplicación $u \mapsto T_u$ es inyectiva de modo que podemos identificar T_u con u; luego se tiene que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$$

Lema 2.33
Sean V, H, V' espacios de Hilbert con la inclusión densa $V \subseteq H \equiv H' \subseteq V'$ donde V' es el dual de V. Si $u \in L^2(0,T;V)$ y $u' \in L^2(0,T;V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$ y se tiene la igualdad:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.

Demostración. Ver [18, Pág. 205]

Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Sea V un espacio de Banach.

Definición 2.34 (Convergencia fuerte)
Sea (u_k) una sucesión de V, diremos que (u_k) converge fuerte en V, si $\exists u \in V$ tal que $\|u_k - u\| \to 0$ cuando $k \to \infty$ y lo denotamos por $u_k \to u$.

Definición 2.35 (Convergencia débil)
Sea (u_k) una sucesión de V, diremos que (u_k) converge débil en V si $\exists u \in V$ tal que

$$\langle \varphi, u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle \varphi, u\rangle_{V'\times V}; \quad k \to \infty; \forall \varphi \in V'$$

y lo denotamos por: $u_k \rightharpoonup u$.

De lo anterior, sea (u_k) una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$, se dice que (u_k) converge débilmente a u en $L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} \to \langle f, u\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}; \forall f \in L^q(0,T;V'),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

que equivale a:

$$\int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt;\ \forall f \in L^q(0,T;V')$$

Definición 2.36 (Convergencia débil estrella)
Sea (φ_k) una sucesión de V', diremos que (φ_k) converge débil estrella a φ en V' si

$$\langle \varphi_k, u\rangle_{V'\times V} \to \langle \varphi, u\rangle_{V'\times V},\ k \to \infty,\ \forall u \in V$$

y lo denotamos por: $\varphi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

De lo anterior, $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;V')$ si y solo si

$$\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)},\ \forall w \in L^1(0,T;V)$$

es decir:

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt,\ \forall w \in L^1(0,T;V)$$

Teorema 2.37
Sea V un espacio de Banach separable y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de V'. Entonces existe una subsucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de (x_n) y $x \in V'$ tal que $x_m \overset{*}{\rightharpoonup} x$ en V'.

Demostración.Ver [9, Pág. 50]

Teorema 2.38
Sea V un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en V. Entonces existe una subsucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de (x_n) y $x \in V$ tal que $x_m \rightharpoonup x$ en V.

Demostración. Ver [9, Pág. 50]

Conceptos complementarios

Lema 2.39 (de compacidad de Aubin-Lions)
Sean B_0, B, B_1 espacios de Banach reflexivos tales que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$. Sea el espacio

$$W = \{u \in L^{p_o}(0,T,B_0); u' \in L^{p_1}(0,T,B_1)\}$$

dotado de la norma $\|u\|_W = |u|_{L^{p_o}(0,T;B_0)} + |u'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$ tal que $1 < p_0, p_1 < \infty$ entonces la inmersión de W en $L^{p_o}(0,T,B)$ es compacta.

Demostración. Ver [19, Pág. 57]

La consecuencia de este lema es que si la sucesión (u_ν) es acotada en $L^{p_o}(0,T,B_0)$ y (u'_ν) es acotada en $L^{p_1}(0,T,B_1)$ entonces u_ν es acotada en W. Luego de la inmersión compacta, existe una subsucesión denotada de la misma manera u_ν tal que $u_\nu \to u$ fuerte en $L^{p_o}(0,T,B)$.

Lema 2.40 (de Lions)
Sea $\mathcal{O}$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, g_m y g dos funciones de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$ tales que:

$$|g_m|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C,\ g_m \longrightarrow g \ \text{ c.s en } \mathcal{O}$$

entonces $g_m \rightharpoonup g$ débil en $L^q(\mathcal{O})$.

Demostración. Ver [19, Pág. 12]

Lema 2.41 (Desigualdad de Gronwall)
Sea $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ y $\varphi(t) \geq 0$; $\forall t \in [0,T]$. Supongamos que existen $K_1, K_2 \geq 0$ tal que $\varphi(t) \leq K_1 + K_2 \int_0^t \varphi(s)ds$; $\forall t \in [0,T]$ entonces se cumple que $\varphi(t) \leq K_1 exp(K_2 t)$; $\forall t \in [0,T]$.

Demostración. Ver [14, Pág. 177]

Definición 2.42 (Base Hilbertiana)
Sea H un espacio de Hilbert. Se llama base Hilbertiana de H a toda sucesión $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de H tales que:

a) $|w_j| = 1, \forall j; \langle w_i, w_j\rangle = 0, i \neq j$

b) El espacio vectorial generado por los (w_j) es denso en H.

El teorema espectral

El Teorema espectral nos permite obtener bases adecuadas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

Teorema 2.43
Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una sucesión de números reales $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

donde $\lambda_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$ y una base hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ tales que $w_j \in H_0^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta w_j & = & \lambda_j w_j \;\text{ en } \Omega \\ w_j & = & 0 \;\text{ sobre } \Gamma \end{array} \right.$$

Se dice que los números (λ_m) son los autovalores de $-\Delta$ (con la condición de Dirichlet) y que las $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son las autofunciones asociadas.

Demostración. Ver [10, Pág. 355]

Teorema 2.44
Todo espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana.

Demostración Ver [9, Pág. 86]

Existencia y prolongamiento de soluciones aproximadas

Sea $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto cuyos elementos son denotados por $(t,x) \in G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea la función $f : G \to \mathbb{R}^n$ no necesariamente continua. Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$x'(t) = f(t,x) \tag{2.1}$$

y consideremos el problema de valor inicial:

$$(I) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Se dice que $f : G \to \mathbb{R}^n$ satisface las Condiciones de Caratheodory sobre G si:

i) $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo.

ii) $f(t,x)$ es continua en x para casi todo t fijo.

iii) Para cada compacto $K \subseteq G$, existe una función real $m_k(t)$ integrable tal que:

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_k(t), \forall (t,x) \in K$$

Consideremos el rectángulo:

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t-t_0| \leq a,\ |x-x_0|_{\mathbb{R}^n} \leq b,\ a>0, b>0\}$$

Teorema 2.45 (de Caratheodory)
Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las condiciones de Caratheodory sobre R entonces existe una solución $x(t)$ de (I) sobre algún intervalo $|t-t_0| \leq \alpha, \alpha > 0$

Demostración Ver [12, Pág.157]

Sea $\varphi(t)$ una solución de (2.1) sobre I y $I \subset I_1$ entonces se dice que $\varphi(t)$ tiene un prolongamiento hasta I_1 si existe $\varphi_1(t)$ tal que $\varphi_1(t)$ es una solución de (2.1) sobre I_1 y $\varphi_1(t) = \varphi(t), \forall t \in I$.

Teorema 2.46
Sea G abierto, acotado y conexo en $\mathbb{R}^{n+1}$, f satisfaciendo las dos primeras condiciones de Caratheodory sobre G y exista una función integrable $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t), \forall (t,x) \in G$. Sea φ una solución de (2.1) sobre el intervalo $]a,b[$ entonces:

a) Existen $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$.

b) Si $(b, \varphi(b-0)) \in G$ entonces φ puede ser prolongado hasta $]a, b+\delta]$ para algún $\delta > 0$. El resultado es análogo para a.

c) $\varphi(t)$ puede ser prolongada hasta un intervalo $]\gamma, \omega[$ de tal manera que $(\gamma, \varphi(\gamma+0))$, $(\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial G$. ($\partial G$ frontera de G).

d) Si f puede extenderse a $\overline{G}$ sin que ella pierda sus propiedades, entonces $\varphi(t)$ puede ser prolongada hasta un intervalo $[\gamma,\omega]$ tal que $(\gamma,\varphi(\gamma+0)),\ (\omega,\varphi(\omega-0))\in\partial G$.

Demostración Ver [12, Pág. 160]

Teorema 2.47 (Prolongamiento de soluciones)
Sea $G=[0,T]\times B$, T finito, $B=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\leq b,b>0\}$ y f en las condiciones del teorema de Caratheodory. Sea $\varphi(t)$ una solución de:

$$\begin{cases} x'=f(t,x)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

Supongamos que en cualquier intervalo I donde $\varphi(t)$ esté definida se tenga $|\varphi(t)|\leq M,\ \forall t\in I$ además, M independiente de I tal que $M<b$. Entonces $\varphi(t)$ se puede prolongar hasta $[0,T]$.

Demostración. Ver [12, Pág. 164]

Método de Faedo-Galerkin

Consiste en proyectar el problema (1) a espacios de dimensión finita V_m para aproximarnos a la solución u mediante soluciones de la forma (u_m) y estimativas a priori establecer que (u_m) pertenece a ciertos conjuntos (espacios normados). Luego con resultados de compacidad extraemos subsucesiones que permiten realizar el pasaje al límite hacia la solución u y que verifica las condiciones iniciales para después comprobar que es única. **Ver** [20, Pág. 507]. En resumen, el plan de estudio es el siguiente:

I. Existencia de la solución.
   a. Formulación del problema aproximado.
   b. Estimativas a priori.
   c. Pasaje al límite.
   d. Verificación de datos iniciales.

II. Unicidad de la solución.

Lema 2.48 (Lema de Komornik)
Sea $E:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ una función no creciente y $T>0$ tal que para todo $t\geqslant 0$ $\displaystyle\int_t^\infty E(s)ds\leqslant TE(t)$ entonces $E(t)\leqslant E(0)e^{1-\frac{t}{T}},\ \forall t\geq T$.

Demostración Ver [21, Pág. 103]

Observación
La función

$$\begin{array}{rcl} u : \Omega\times]0,T[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t) \end{array}$$

la manejaremos dependiendo del contexto funcional, es decir:

a) Para t fijo consideraremos:

$$\begin{array}{rcl} u(t) \equiv u(\cdot,t) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(t)(x) = u(x,t) \end{array}$$

por lo que $u(t)$ pertenece al espacio de Sobolev V.

b) Si $t \in [0,T]$ consideraremos:

$$\begin{array}{rcl} u : [0,T] & \longrightarrow & V \\ t & \longmapsto & u(t) \end{array}$$

que representa a una función en un espacio funcional como por ejemplo $L^p(0,T;V)$.

2.3. Conceptual

Dentro de las ecuaciones en derivadas parciales que no pueden ser resueltas explicitamente existen métodos que buscan demostrar que por lo menos exista solución sujeta a ciertas características que dependen de la naturaleza del problema, es por ello que en esta investigación demostramos que dicha solución existe, que es única y que ella decae exponencialmente permitiendo que el sistema sea estable en el tiempo.
Articularemos los conceptos que nos permitieron encaminar nuestra tesis.

a) Dadas las condiciones del problema, en el sentido débil, los espacios mas adecuados para analizar nuestra ecuación serán los espacios de Sobolev.

b) Mediante el método de Faedo-Galerkin podremos mostrar la existencia de la solución.

c) Mediante el método de la energía probaremos la unicidad de la solución.

d) Mediante el Lema de Komornik, acotaremos la energía asociada al sistema demostrando asi que la solución decae exponencialmente.

2.4. Definición de términos básicos

- **Bien regular**: Un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es denominado bien regular si su frontera Γ es una variedad de clase C^∞ de dimensión $n-1$ y Ω está localmente de un mismo lado de Γ.
- **c.s (casi siempre)**: Indica que una propiedad se verifica en todo punto excepto en un conjunto de medida nula.
- **Espacio de Banach**: Es un espacio normado y completo es decir, un espacio normado donde toda sucesión de Cauchy es convergente en algún punto de dicho espacio.
- **Espacio de Hilbert**: Es un espacio normado y completo cuya norma es inducida por un producto interno.
- **Espacio separable**: Espacio que contiene un subconjunto denso y numerable.
- **Espacio reflexivo**: Espacio de Banach que coincide con su bidual.

Notaciones básicas	
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	Denota el gradiente de u.
$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Denota el laplaciano de u.
$(\cdot, \cdot)$	Representa el producto interno en $L^2(\Omega)$.
$\lvert \cdot \rvert_p$	Representa la norma en $L^p(\Omega)$.
$((\cdot, \cdot))$	Representa el producto interno en $H_0^1(\Omega)$.
$\lVert \cdot \rVert$	Representa la norma en $H_0^1(\Omega)$.
$\hookrightarrow$	Denota inmersión continua.
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	Denota inmersión compacta.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Denota dualidad.
$' = \dfrac{d}{dt}$	Operador derivada respecto a t.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General

Existe única solución fuerte en (1) que decae exponencialmente.

Hipótesis Específicas

Sean $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ entonces se garantiza la existencia y unicidad de la solución fuerte de (1).

Sean $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ y $E(t)$ la energía asociada a la ecuación (1) tal que es acotada y no creciente entonces $E(t) \leq Ce^{-\gamma t}$, $\forall t \in [0; +\infty[$; $C, \gamma > 0$.

3.2. Definición conceptual de variable

Variables independientes

- Variable espacio-temporal: $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$
- Espacios funcionales: $L^p(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $L^p(0, T; V)$, $H^m(\Omega)$.

Variable dependiente: $u(x, t)$
La función u presenta dependencia respecto a la variable espacio temporal y está sujeta a la pertenencia en ciertos espacios funcionales

Diremos que una función $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución fuerte del problema (1) cuando:

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\
&u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\
&u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\
&u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \quad \text{c.s en } Q \\
&u(0) = u_0 \quad \text{y} \quad u'(0) = u_1
\end{aligned}$$

3.3. Operacionalización de la variable

$u = u(x, t)$: Función desplazamiento.

Variable	Dimensiones	Indicadores
u	Existencia	Teorema de Caratheodory.
	Unicidad	Método de la energía.
	Comportamiento asintótico	Lema de Komornik.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de la investigación

La investigación que realizamos es de tipo básica, científica y cualitativa; esta nos permite ampliar en nuestra ecuación (1), la manera de mostrar como la energía asociada a ella decae en forma exponencial mediante el Lema de Komornik y así pueda servir como referencia para compararla con otros métodos.

El diseño utilizado fue descriptivo demostrativo pues a partir de la documentación de los contenidos en el marco teórico se demostró la existencia, unicidad de la solución fuerte y su comportamiento asintótico.

4.2. Método de investigación

El método fue analítico-deductivo iniciándose con la definición de solución fuerte, definición de los espacios de aproximación V_m, resolución del sistema aproximado, estimativas a priori, pasaje al límite, que es la aplicación del Método de Faedo Galerkin. Luego la verificación de las condiciones iniciales y prueba de la unicidad mediante el Método de la energía. Finalmente haciendo uso de desigualdades integrales hicimos el análisis del comportamiento asintótico de la solución mediante el Lema de Komornik.

4.3. Población y muestra

Población
Por el tipo de investigación que se presenta, esta carece de población por lo que solo indicamos que se trabajó con ecuaciones en derivadas parciales con las condiciones indicadas en la ecuación (1).

Muestra
Como muestra consideraremos a las ecuaciones de onda en derivadas parciales hiperbólicas no lineales con término disipativo de la forma αu_t

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

Las actividades de investigación se realizaron en las oficinas de la Facultad de Ciencias naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por un lapso aproximado en el periodo de agosto del 2018 a diciembre del 2019.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizó la técnica del Análisis documental dado que se revisó exhaustivamente libros, revistas, artículos que gracias a su confiabilidad nos permitieron validar los conceptos necesarios para nuestra investigación.
Dado el tipo de investigación, no se hizo recolección de datos del tipo estadístico ni observaciones experimentales.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Dado que no se contó con datos estadísticos u otros que se puedan adquirir mediante observaciones experimentales, no se requirió de algún tipo de análisis ni procesamiento de datos.

V. RESULTADOS

Existencia y unicidad

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, con frontera Γ suficientemente regular y el cilindro $Q = \Omega \times]0, T[,\ T > 0$ con frontera lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ y $\alpha > 0$. Con lo anterior consideremos el problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0, & x \in \Omega, \quad t \in]0; T[\\ u = 0, & x \in \Gamma, \quad t \in]0; T[\\ u(x; 0) = u_0(x),\ u'(x; 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

En esta sección, mostraremos la existencia y unicidad de la solución fuerte del problema (1) considerando u_0 y u_1 suficientemente regulares.

Definición 5.1 Diremos que una función $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución fuerte del problema (1) cuando:

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ & u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ & u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ & u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \quad \text{c.s en } Q \\ & u(0) = u_0 \quad \text{y} \quad u'(0) = u_1 \end{aligned}$$

Teorema 5.2 (Existencia y unicidad de la solución fuerte)
Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe única solución fuerte para el problema (1).

Demostración
Para probar la existencia de la solución aplicaremos el Método de Faedo-Galerkin.

Problema aproximado

Sea $\{w_1, w_2, ..., w_j, ...\}$ base hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ formada por los vectores propios de $-\Delta$, es decir, las funciones $w_i,\ i = 1, 2, ..$ tales que $-\Delta w_i = \lambda_i w_i$ equivalentemente al problema espectral:

$$((w_i, v)) = (-\Delta w_i, v) = \lambda_i (w_i, v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Denotemos por $V_m = [w_1; w_2; ....; w_m]$ al sub espacio m-dimensional de $H_0^1(\Omega)$ generado por las m primeras autofunciones w_ν, $\nu = 1, 2, 3, ..m$.

El problema aproximado asociado a (1) consiste en encontrar una solución $u_m(t) : [0, T_m] \to V_m$ de la forma:

$$u_m(t) = u_m(\,\cdot\,, t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \tag{5.1}$$

donde las funciones $g_{im}(t)$ son escogidas de modo que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sea solución del siguiente problema:

$$(2)\left|\begin{array}{l} (u''_m(t), v) + ((u_m(t), v)) + (u_m^3(t), v) + (\alpha u'_m(t), v) = 0;\ \forall v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \in V_m; \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{fuerte en} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u'_m(0) = u_{1m} \in V_m; \quad u_{1m} \to u_1 \quad \text{fuerte en} \quad H_0^1(\Omega) \end{array}\right.$$

Afirmación
Por medio del Teorema de Caratheodory, el sistema posee solución sobre $[0; T_m]$ tal que $0 < T_m < T$.

En efecto
Sea $v = w_j \in V_m$, $(j = 1, 2, ..., m)$, reemplazando en la primera ecuación del problema aproximado (2)

$$(u''_m(t), w_j) + ((u_m(t), w_j)) + (u_m^3(t), w_j) + (\alpha u'_m(t), w_j) = 0$$

De (5.1) se tiene:

$$\begin{array}{rcl} u''_m(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t) w_i \\ \nabla u_m(t) & = & \nabla\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\nabla w_i \\ u'_m(t) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t) w_i \\ u_m^3(t) & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3 \end{array}$$

reemplazando en (V)

$$\left(\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t) w_i, w_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\nabla w_i, \nabla w_j\right) + \\ + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_j\right) + \left(\alpha\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t) w_i, w_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(\nabla w_i, \nabla w_j) + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_j\right) + \alpha \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(w_i, w_j) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)((w_i, w_j)) + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_j\right) + \alpha \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(w_i, w_j) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\lambda_j(w_i, w_j) + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_j\right) + \alpha \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(w_i, w_j) = 0$$

Haciendo variar i, j en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & ... & (w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & ... & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(w_1, w_1) & ... & \lambda_m(w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(w_1, w_m) & ... & \lambda_m(w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_1\right) \\ \vdots \\ \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_m\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(w_1, w_1) & ... & \alpha(w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(w_1, w_m) & ... & \alpha(w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando que la base $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es ortonormal tenemos:

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_1\right) \\ \vdots \\ \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\right)^3, w_m\right) \end{bmatrix} + \alpha I \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} ; B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} ; C = \begin{bmatrix} \alpha & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \alpha \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$G(Y_1(t)) = \begin{bmatrix} \left(\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i\right)^3, w_1\right) \\ \vdots \\ \left(\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i\right)^3, w_m\right) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

se obtiene $$Y_1''(t) + BY_1(t) + G(Y_1(t)) + CY_1'(t) = 0$$

Definiendo:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \text{ tal que } Y_2(t) = Y_1'(t)$$

se tiene

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ -BY_1(t) - G(Y_1(t)) - CY_2(t) \end{bmatrix}$$

que equivale a

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ -B_{m\times m} & -C_{m\times m} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}}_{Y(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{m\times 1} \\ G(Y_1(t)) \end{bmatrix}}_{H(Y(t))}$$

es decir:

$$Y'(t) = M\ Y(t) - H(Y(t)) = F(t, Y(t))$$

Por otro lado, para el sistema anterior determinamos su condición inicial

1. Sea $u_m(0) = u_{0m}$, con $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ entonces

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^m g_{im}(0)w_i$$

tomando producto interno con w_j

$$(u_m(0), w_j) = (u_{0m}, w_j) = \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(0)w_i, w_j\right) = g_{im}(0)$$

de donde $g_{im}(0) = (u_0, w_i)$

2. Sea $u'_m(0) = u_{1m}$, con $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ entonces
$$u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(0) w_i$$
tomando producto interno con w_j
$$(u'_m(0), w_j) = (u_{1m}, w_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(0) w_i, w_j \right) = g'_{im}(0)$$
de donde $g'_{im}(0) = (u_1, w_i)$

Con lo anterior se tiene
$$Y(0) = \begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ g_{2m}(0) \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ g'_{2m}(0) \\ \vdots \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m \times 1} = Y_0$$
de lo anterior obtenemos el sistema:
$$\left| \begin{array}{l} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

A continuación mostraremos que el sistema (5.2) cumple las condiciones de Caratheodory.

Sea $D = [0; \infty[\times E$; donde $E = \{Y \in \mathbb{R}^{2m}; \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leqslant b\}$, $b > 0$; $Y_0 \in E$.

entonces:

i) $F(t; Y) = M\ Y(t) - H(Y(t))$ es medible en t para cada Y fijo.
En efecto
Para cada Y fijo se observa que H también queda fijado, además M no depende de t (constante) entonces es medible. Por lo tanto $F(t; Y)$ es medible.

ii) $F(t; Y) = M\ Y(t) - H(Y(t))$ es continua en Y para cada t fijo.
En efecto
Para t fijo, Y queda fijado entonces junto M sería un operador lineal y por lo tanto continua.

Respecto a $H(Y(t))$, esta depende de $Y_1(t)$ por ello consideramos las funciones:
$$(g_{1m}, \cdots, g_{mm}) \longmapsto \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i = u$$
$$u \longmapsto (u^3, w_j)$$

y siendo ambas continuas entonces la composición:

$$(g_{1m}, \cdots, g_{mm}) \longmapsto \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \right)^3, w_j \right)$$

que genera a $H(Y(t))$ es continua. Por lo tanto $F(t;Y)$ es continua.

iii) Para cada compacto K de D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que

$$\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq I_K(t); \ \forall (t,Y) \in K$$

En efecto
Como Y varía en E entonces $\|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq b$ entonces

$$\begin{aligned} \|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} &= \|M\ Y(t) - H(Y(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq \|MY(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|H(Y(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq \|M\|_{\mathbb{R}^{2m\times 2m}} \|Y(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|H(Y(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq Cb + \|H(Y(t))\|_{\mathbb{R}^{2m}} \end{aligned}$$

Siendo $H(Y(t))$ continua entonces será continua en cualquier compacto entonces existe k tal que:

$$\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq Cb + k = I_k(t)$$

Como $I_k(t)$ es constante en cada compacto k de D entonces es integrable para todo $t \geqslant 0$.

A partir de lo anterior, el problema (5.2) satisface las condiciones de Caratheodory, por tanto, existe solución Y en $[0, T_m]$ con $T_m < T$ además u_m es solución del sistema aproximado (2) en el intervalo $[0, T_m]$.

Estimativas a priori

Primera estimativa a priori

Sea $v = 2u'_m(t) \in V_m$ en la primera ecuación del problema aproximado (2), entonces:

$$(u''_m(t), 2u'_m(t)) + ((u_m(t), 2u'_m(t))) + (u^3_m(t), 2u'_m(t)) + (\alpha u'_m(t), 2u'_m(t)) = 0$$

que equivale a

$$\int_\Omega 2u''_m(x,t)u'_m(x,t)dx + \int_\Omega 2\nabla u_m(x,t)\nabla u'_m(x,t)dx + \int_\Omega u^3_m(x,t)2u'_m(x,t)dx \\ + \alpha \int_\Omega u'_m(x,t)2u'_m(x,t)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}|u_m'(t)|_2^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^4 dx\right) + 2\alpha|u_m'(t)|_2^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}|u_m'(t)|_2^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_4^4 = -2\alpha|u_m'(t)|_2^2$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}|u_m'(t)|_2^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_4^4 \leq 0$$

integrando de 0 a t tal que $t \in]0; T_m[$

$$\begin{aligned} |u_m'(t)|_2^2 + |\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|u_m(t)|_4^4 &\leq |u_m'(0)|_2^2 + |\nabla u_m(0)|_2^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|_4^4 \\ &= |u_{1m}|_2^2 + |\nabla u_{0m}|_2^2 + \frac{1}{2}|u_{0m}|_4^4 \end{aligned}$$

Observación

a) $u_{1m} \longrightarrow u_1$ en $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
entonces $|u_{1m}| \longrightarrow |u_1|$ en $L^2(\Omega)$
lo que implica que (u_{1m}) es acotada en $L^2(\Omega)$
es decir, $|u_{1m}|_2 \leq c_1;\ c_1 > 0$

b) $u_{0m} \longrightarrow u_0$ en $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$
entonces $\|u_{0m}\| \longrightarrow \|u_0\|$ en $H_0^1(\Omega)$
lo que implica que (∇u_{0m}) es acotada en $L^2(\Omega)$
es decir, $|\nabla u_{0m}|_2 \leq c_2;\ c_1 > 0$

c) $u_{0m} \longrightarrow u_0$ en $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$
entonces $|u_{0m}| \longrightarrow |u_0|$ en $L^4(\Omega)$
lo que implica que (u_{0m}) es acotada en $L^4(\Omega)$
es decir, $|u_{0m}|_4 \leq c_3;\ c_3 > 0$

Por lo tanto, existe $C > 0$; C independiente de m tal que

$$|u_m'(t)|_2^2 + |\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|u_m(t)|_4^4 \leq C$$

Lo que implica por el Teorema 2.47 (del prolongamiento de soluciones), que Y en (5.2) puede ser extendida a todo el intervalo $[0, T]$ y en consecuencia $u_m(t)$ puede ser extendida a todo $[0, T]$ considerando que:

$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{5.3}$$

$$(\nabla u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{5.4}$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; L^4(\Omega)) \tag{5.5}$$

De (5.4) y de la equivalencia de normas se tiene:

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{5.6}$$

Observación
Se podría considerar de (5.5) y (5.6) que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)) = L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ pues $H_0^1 \subset L^4(\Omega)$ pero las mantendremos para no "perder" algunas acotaciones que necesitaremos mas adelante.

A partir de ahora denotaremos por C o K las diferentes constantes positivas que se presenten.

Segunda estimativa a priori
Consideremos la base ortonormal (w_ν) en $L^2(\Omega)$ y que

$$u''_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)w_i \Longrightarrow (u''_m(t), w_i)$$

de la primera ecuación del sistema aproximado (2) se tiene:

$$g''_{im}(t) = (u''_m(t), w_i) = -((u_m(t), w_i)) - (u^3_m(t), w_i) - (\alpha u'_m(t), w_i) \tag{5.7}$$

Siendo los términos del lado derecho de la doble igualdad pertenecientes a $L^2(0,T)$ entonces $g''_{im}(t) \in L^2(0,T)$. Luego

$$\int_0^T |u''_m(t)|_2^2 dt = \int_0^T |\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)w_i|_2^2 dt = g''_{im}(t) \le C\sum_{i=1}^{m}|w_i|_2^2 \int_0^T |g''_{im}(t)|^2 dt < +\infty$$

$$\Longrightarrow u''_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Considerando lo usual, que $\frac{d}{dt}$ representa la derivada distribucional en $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ y $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ entonces se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dt}u_m, \theta\rangle &= \langle u'_m, \theta\rangle \\
\langle \frac{d}{dt}u'_m, \theta\rangle &= \langle u''_m, \theta\rangle \\
\langle \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_i), \theta\rangle &= \langle (\nabla u'_m, \nabla w_i), \theta\rangle \\
\langle \frac{d}{dt}(\alpha u'_m, w_i), \theta\rangle &= \langle (\alpha u''_m, w_i), \theta\rangle \\
\langle \frac{d}{dt}(u^3_m, w_i), \theta\rangle &= \langle 3\int_\Omega u^2_m u'_m w_i dx, \theta\rangle
\end{aligned}$$

De lo anterior en (5.7)

$$\frac{d}{dt}(u''_m(t), w_i) = -(\nabla u'_m(t), \nabla w_i) - 3\int_\Omega u^2_m(t)u'_m w_i dx - (\alpha u''_m(t), w_i) \text{ en } L^2(0,T)$$

$$\Longrightarrow g'''_{im} \in L^2(0,T)$$

por lo que se tiene:

$$\int_0^T |u_m'''(t)|_2^2 dt = \int_0^T |\sum_{i=1}^m g_{im}'''(t) w_i|_2^2 dt < \infty$$

$$\Longrightarrow u_m''' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Derivando la primera ecuación del problema aproximado (2) y reemplazando $v = 2u_m''(t)$ se tiene:

$$(u_m'''(t), 2u_m''(t)) + ((u_m'(t), 2u_m''(t))) + (3u_m^2(t)u_m'(t), 2u_m''(t)) + (\alpha u_m'(t), 2u_m''(t)) = 0$$

entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u_m''(t)|_2^2 + |\nabla u_m'(t)|_2^2\right] + \alpha \int_\Omega |u_m''(t)|^2 dx + 3\int_\Omega |u_m(t)|^2 u_m'(t) u_m''(t) dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u_m''(t)|_2^2 + |\nabla u_m'(t)|_2^2\right] + \alpha \int_\Omega |u_m''(t)|^2 dx \leq 3\int_\Omega |u_m(t)|^2 |u_m'(t)||u_m''(t)| dx$$

Como $u_m(t), u_m'(t), u_m''(t) \in H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ se tiene:

$$|u_m(t)|^2 \in L^3(\Omega),\ |u_m'(t)| \in L^6(\Omega) \ \text{ y } \ |u_m''(t)| \in L^2(\Omega)$$

Además, como $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$, por la desigualdad de Holder generalizada obtenemos

$$3\int_\Omega |u_m(t)|^2 |u_m'(t)||u_m''(t)| dx \leq 3|u_m(t)|_3^2 |u_m'(t)|_6 |u_m''(t)|_2$$

Con lo que se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u_m''(t)|_2^2 + |\nabla u_m'(t)|_2^2\right] + \alpha \int_\Omega |u_m''(t)|^2 dx \leq 3|u_m(t)|_3^2 |u_m'(t)|_6 |u_m''(t)|_2$$

Integrando de $[0,t], t < T$ se tiene

$$\frac{1}{2}\left[|u_m''(t)|_2^2 + |\nabla u_m'(t)|_2^2\right] + \alpha \int_0^t \int_\Omega |u_m''(s)|^2 dx ds \leq |u_m''(0)|_2^2 + |\nabla u_m'(0)|_2^2 +$$
$$3\int_0^t |u_m(s)|_3^2 |u_m'(s)|_6 |u_m''(s)|_2 ds$$

De (5.6), si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces también es acotada en $L^\infty(0,T;L^3(\Omega))$ luego $\exists C > 0$ tal que $|u_m|_{L^\infty(0,T;L^3(\Omega))} \leq C; \forall m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\left[|u_m''(t)|_2^2+|\nabla u_m'(t)|_2^2\right]+\alpha\int_0^t\int_\Omega |u_m''(s)|^2dxds \leq |u_m''(0)|_2^2+|\nabla u_m'(0)|_2^2+$$
$$\frac{3}{2}|u_m|_{L^\infty(0,T;L^3(\Omega))}\int_0^t\left[|u_m'(s)|_6^2+|u_m''(s)|_2^2\right]ds$$

$$\frac{1}{2}\left[|u_m''(t)|_2^2+|\nabla u_m'(t)|_2^2\right]+\alpha\int_0^t\int_\Omega |u_m''(s)|^2dxds \leq |u_m''(0)|_2^2+|\nabla u_m'(0)|_2^2+$$
$$\frac{3C}{2}\int_0^t\left[|u_m'(s)|_6^2+|u_m''(s)|_2^2\right]ds \quad (5.8)$$

Considerando $t=0$ y $v=u_m''(0)$ en el problema aproximado (2) se tiene:

$$|u_m''(0)|_2^2=-(\nabla u_m(0),\nabla u_m''(0))-\alpha(u_m'(0),u_m''(0))-(u_m^3(0),u_m''(0))$$

Como $u_m(0)\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y $u_m''(0)\in H_0^1(\Omega)$ entonces por el Teorema 2.24 (Identidad de Green) en (5.8) se tiene:

$$\begin{aligned}
|u_m''(0)|_2^2 &= (\Delta u_m(0),u_m''(0))-\alpha(u_m'(0),u_m''(0))-(u_m^3(0),u_m''(0))\\
&= \int_\Omega \Delta u_m(0)u_m''(0)dx-\alpha\int_\Omega u_m'(0)u_m''(0)dx+\int_\Omega u_m(0)^3u_m''(0)dx\\
&\leq \int_\Omega |\Delta u_m(0)||u_m''(0)|dx+\alpha\int_\Omega |u_m'(0)||u_m''(0)|dx+\int_\Omega |u_m(0)|^3|u_m''(0)|dx\\
&\leq |\Delta u_m(0)|_2|u_m''(0)|_2+\alpha|u_m'(0)|_2|u_m''(0)|_2+|u_m(0)|_6^3|u_m''(0)|_2\\
&= \left(|\Delta u_m(0)|_2+\alpha|u_m'(0)|_2+|u_m(0)|_6^3\right)|u_m''(0)|_2
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
|u_m''(0)|_2 &\leq |\Delta u_m(0)|_2+\alpha|u_m'(0)|_2+|u_m(0)|_6^3\\
&\leq K\left(\|u_{0m}\|_{H_0^1\cap H^2}+\alpha\|u_{1m}\|+\|u_{0m}\|^2\right)\\
\Longrightarrow |u_m''(0)|_2 &\leq K
\end{aligned}$$

Considerando lo anterior en (5.8) se obtiene:

$$\frac{1}{2}[|u_m''(t)|_2^2+|\nabla u_m'(t)|_2^2]+\alpha\int_0^t\int_\Omega |u_m''(s)|^2dxds \;\leq\; K+\frac{3C}{2}\int_0^t\left[|u_m'(s)|_6^2+|u_m''(s)|_2^2\right]ds$$

Observando, del Teorema 2.22 (Inmersión de Sobolev)

$$|u_m'(t)|_6\leq C\|u_m'(t)\|$$

se tiene

$$\frac{1}{2}\left[|u_m''(t)|_2^2+\|u_m'(t)\|^2\right]+\alpha\int_0^t\int_\Omega|u_m''(s)|^2dxds\leq K+\frac{3C}{2}\int_0^t\left[\|u_m'(s)\|^2+|u_m''(s)|_2^2\right]ds$$

$$\Longrightarrow |u_m''(t)|_2^2+\|u_m'(t)\|\leq K+C\int_0^t\left[|u_m''(s)|_2^2+\|u_m'(s)\|^2\right]ds$$

del Lema 2.41 (Desigualdad de Gronwall) obtenemos que

$$|u_m''(t)|_2^2+\|u_m'(t)\|\leq C$$

Luego

$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.9}$$
$$(u_m'')_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{5.10}$$

Pasaje al límite

De las estimativas a priori se obtuvo:

$$\begin{aligned}(u_m)_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotada en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\\ (u_m')_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotada en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\\ (u_m'')_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotada en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.37 podemos asegurar la existencia de una subsucesión $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.11}$$
$$u_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.12}$$
$$u_\nu'' \overset{*}{\rightharpoonup} \beta \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{5.13}$$

A continuación mostraremos que $\alpha=u'$ y $\beta=u''$

Considerando que $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))\hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ se tiene de (5.11) que

$$u_\nu\longrightarrow u \text{ en } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$$

De la continuidad del operador derivada en el sentido de las distribuciones

$$u_\nu'\longrightarrow u' \text{ en } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$$

y por la unicidad del límite en $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ se tiene que $\alpha=u'$

Ahora, como $u_\nu'\overset{*}{\rightharpoonup} u'$ entonces se tiene

$$u_\nu'\longrightarrow u' \text{ en } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$$

de la misma manera, por la continuidad del operador derivada en el sentido de las distribuciones

$$u''_\nu \longrightarrow u'' \text{ en } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$$

por la unicidad del límite en $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ se tiene que $\beta = u''$
Por lo tanto

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.14}$$

$$u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.15}$$

$$u''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{5.16}$$

De la primera ecuación del sistema aproximado (2), considerando la subsucesión (u_ν) se tiene:

$$(u''_\nu(t),v) + ((u_\nu(t),v)) + (u^3_\nu(t),v) + (\alpha u'_\nu(t),v) = 0, \ \forall v \in V_m, \nu \geq m \tag{5.17}$$

Verificación de la convergencia de cada término

a)$(u''_\nu(t),v)$

La convergencia $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ implica que $\forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se cumple que:

$$\int_0^T (u'_\nu(t),w(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t),w(t))dt$$

Sea $w(x,t) = v(x)\theta(t) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que $v \in L^2(\Omega)$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ con lo cual se tiene:

$$\int_0^T (u'_\nu(t),v(x))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t),v(x))\theta(t)dt$$

por tanto

$$(u'_\nu(t),v) \longrightarrow (u'(t),v) \text{ en } \mathcal{D}'(0,T);\forall v \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{d}{dt}(u'_\nu(t),v) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u'(t),v)$$

$$(u''_\nu(t),v) \longrightarrow (u''(t),v) \text{ en } \mathcal{D}'(0,T);\forall v \in L^2(\Omega) \tag{5.18}$$

b) $((u_\nu(t),v))$

De la convergencia $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ se tiene $\nabla u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $\forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se tiene

$$\int_0^T (\nabla u_\nu(t),w(t))dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u(t),w(t))dt$$

En particular, si $w(x,t)=\theta(t)\nabla v(x)$ tal que $\theta\in\mathcal{D}(0,T), v\in L^2(\Omega)$ se tiene:

$$\int_0^T(\nabla u_\nu(t),\nabla v)\theta(t)dt\longrightarrow\int_0^T(\nabla u(t),\nabla v)\theta(t)dt$$

es decir

$$(\nabla u_\nu(t),\nabla v)\longrightarrow(\nabla u(t),\nabla v)\text{ en }\mathcal{D}'(0,T);\ \forall v\in L^2(\Omega)\tag{5.19}$$

c) $(u_\nu^3(t),v)$

■ **Afirmación**
(u_m^3) es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
En efecto
Como $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$, resulta que

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\hookrightarrow L^\infty(0,T;L^6(\Omega))$$

y de (5.6) resulta que

$$(u_m)\text{ es acotada en }L^\infty(0,T;L^6(\Omega))$$

$$\Longrightarrow|u_m|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))}\leq M_1;\ M_1>0$$

Luego:

$$\begin{aligned}|u_m^3|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}&=\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}|u_m^3(t)|_2=\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}\left(\int_\Omega|u_m^3(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\\&=\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}\left(\int_\Omega|u_m(x,t)|^6dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}|u_m(t)|_6^3\leq\\&\leq\left(\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}|u_m(t)|_6\right)^3\leq M_1^3<\infty\end{aligned}$$

■

Ahora, considerando las acotaciones en (5.3) y (5.6) e inmersiones definimos el conjunto

$$W=\left\{u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega));u'\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}$$

se tiene que la sucesión (u_ν) es acotada en W. Por lo tanto, del Lema 2.39 (de Aubin-Lions) existe una subsucesión (u_ν) tal que

$$u_\nu\to u\ \text{ en }L^2(0,T;L^2(\Omega))\equiv L^2(Q)$$

De esta convergencia podemos extraer una subsucesión denotada de la misma manera tal que

$$u_\nu\to u\ \text{ c.s en }\Omega\times]0,T[=Q$$

entonces

$$u_\nu^3\to u^3\ \text{ c.s en }Q\tag{5.20}$$

Como u_ν^3 es acotado en $L^2(Q)$, $\exists C > 0$ tal que

$$\|u_\nu^3\|_{L^2(Q)} \leq C \tag{5.21}$$

Por lo tanto, de acuerdo al Lema 2.40 (de Lions), considerando

$$\mathcal{O} = Q,\ g_m = u_\nu^3 \ \text{ y } \ g = u^3$$

y las condiciones (5.20) y (5.21) se tiene que

$$u_\nu^3 \rightharpoonup u^3 \text{ en } L^2(Q)$$

Luego, como u_ν^3 es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) = [L^1(0,T;L^2(\Omega))]'$ entonces

$$u_\nu^3 \overset{*}{\rightharpoonup} u^3 \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

lo que implica que:

$$\int_0^T (u_\nu^3, v)\theta dt \longrightarrow \int_0^T (u^3, v)\theta dt;\ \forall v \in L^2(\Omega),\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

$$\Longrightarrow (u_\nu^3, v) \longrightarrow (u^3, v) \text{ en } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in L^2(\Omega) \tag{5.22}$$

d) $(\alpha u_\nu'(t), v)$

Como $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ implica que $\forall w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se tiene:

$$\int_0^T (u_\nu'(t), \alpha w(t))dt \to \int_0^T (u'(t), \alpha w(t))dt;\ \alpha > 0$$

En particular, sea $w(x,t) = \alpha\theta(t)v(x)$ tal que $\theta \in \mathcal{D}(0,T), v \in L^2(\Omega)$ con lo cual se tiene:

$$\int_0^T (u_\nu'(t), \alpha\theta(t)v)dt \to \int_0^T (u'(t), \alpha\theta(t)v)dt$$

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \alpha u_\nu'(x,t)\theta(t)v(x)\ dx\right) dt \to \int_0^T \left(\int_\Omega \alpha u'(x,t)\theta(t)v(x)\ dx\right) dt$$

$$\int_0^T (\alpha u_\nu'(t), \theta(t)v)\ dt \to \int_0^T (\alpha u'(t), \theta(t)v)\ dt$$

$$\int_0^T (\alpha u_\nu'(t), v)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (\alpha u'(t), v)\theta(t)\ dt,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), v \in L^2(\Omega)$$

$$\Longrightarrow (\alpha u_\nu'(t), v) \to (\alpha u'(t), v) \text{ en } \mathcal{D}'(0,T), \forall v \in L^2(\Omega) \tag{5.23}$$

Retomando la ecuación (5.17)

$$(u_\nu''(t), v) + ((u_\nu(t), v)) + (u_\nu^3(t), v) + (\alpha u_\nu'(t), v) = 0$$

de las convergencias obtenidas finalmente en (5.18), (5.19), (5.22) y (5.23), haciendo que $\nu \to \infty$ se obtiene $\forall v \in V_m$,

$$(u''(t), v) + ((u(t), v)) + (u^3(t), v) + (\alpha u'(t), v) = 0$$

Como $H_0^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_m}$ entonces la igualdad anterior es válida para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, en particular sea $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando de 0 a T

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta dt + \int_0^T ((u(t), v))\theta dt + \int_0^T (u^3(t), v)\theta dt + \int_0^T (\alpha u'(t), v)\theta dt = 0$$

De la fórmula de Green se tiene

$$(\nabla u(t), \nabla v) = -(\Delta u, v), \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (u''(t), v)\theta dt - \int_0^T (\Delta u(t), v)\theta dt + \int_0^T (u^3(t), v)\theta dt + \alpha \int_0^T (u'(t), v)\theta dt = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u''(x,t)v(x)\theta(t)dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x,t)v(x)\theta(t)dxdt +$$
$$\int_0^T \int_\Omega u^3(x,t)v(x)\theta(t)dxdt + \alpha \int_0^T \int_\Omega u'(x,t)v(x)\theta(t)dxdt = 0$$

para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0, T)$

Teniendo en cuenta que el conjunto $W = \{v\theta, v \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ y } \theta \in \mathcal{D}(0, T)\}$ es denso en $\mathcal{D}(Q)$ obtenemos:

$$\int_Q u''(x,t)\psi(x,t)dxdt - \int_Q \Delta u(x,t)\psi(x,t)dxdt +$$
$$\int_Q u^3(x,t)\psi(x,t)dxdt + \alpha \int_Q u'(x,t)\psi(x,t)dxdt = 0, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Q)$$

$$\int_Q \big(u''(x,t) - \Delta u(x,t) + u^3(x,t) + \alpha u'(x,t)\big)\, \psi(x,t)\ dxdt = 0; \ \forall\ \psi \in \mathcal{D}(Q)$$

por tanto, por el Lema 2.17 (de Du Bois Raymond) tenemos:

$$u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0, \text{ c.s en } Q \tag{5.24}$$

Como $u', u'', u^3 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ entonces $\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ luego se tiene:

$$u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0, \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

De la Proposición 2.25 (de la Regularidad de los problemas elipticos) se tiene que $u \in H^2(\Omega)$, luego:

$$\sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\|u\|_{H^2(\Omega)} = C \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\, |\Delta u|_2 < \infty$$

y de la convergencia (5.14) se obtiene

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

De la convergencia (5.15) se tiene

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$$

Verificación de los datos iniciales

Seguidamente mostraremos que para la ecuación (1) se verifican sus condiciones iniciales

a) $u(0) = u_0$
Considerando que $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ entonces $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $u' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ luego por Teorema 2.31, $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$ entonces tiene sentido $u(0)$.

Sea $v \in L^2(\Omega)$ y $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ con $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$ entonces $\theta v \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. De la convergencia (5.15) se tiene:

$$\int_0^T (u_\nu'(t), \theta(t)v)dt \to \int_0^T (u'(t), \theta(t)v)dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (u_\nu'(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt$$

Integrando por partes

$$-(u_\nu(0), v) - \int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t))dt \to -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\theta'(t))dt$$

Por otro lado, de la convergencia (5.14) obtenemos:

$$\int_0^T (u_\nu(t), v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt$$

entonces de las dos convergencias anteriores:

$$(u_\nu(0), v) \to (u(0), v)$$

entonces

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ en } L^2(\Omega)$$

Además, del sistema aproximado $(2)_2$, si $u_\nu(0) = u_{0\nu} \to u_0$ entonces

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u_0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

luego por la unicidad del límite se tiene:

$$u(0) = u_0$$

b) $u'(0) = u_1$
Considerando que si $u' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ entonces $u' \in C([0,T];L^2(\Omega))$ luego tiene sentido $u'(0)$.

Sea $\theta \in C^1([0,T])$ con $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$ y sea $v \in H_0^1(\Omega)$ entonces, θ y $\theta' \in C([0,T])$ lo que implica que θ y $\theta' \in L^2(0,T)$.

Considerando que $v\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, multiplicamos por θ en la primera ecuación del problema aproximado (2) e integramos de 0 a T:

$$\int_0^T (u_\nu''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\nu(t),\nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (u_\nu^3(t),v)\theta(t)dt + \\ + \alpha\int_0^T (u_\nu'(t),v)\theta(t)dt = 0$$

Integrando por partes

$$(u_\nu'(T),v)\theta(T) - (u_\nu'(0),v)\theta(0) - \int_0^T (u_\nu'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\nu(t),\nabla v)\theta(t)dt + \\ + \int_0^T (u_\nu^3(t),v)\theta(t)dt + \alpha\int_0^T (u_\nu'(t),v)\theta(t)dt = 0$$

$$-(u_\nu'(0),v) - \int_0^T (u_\nu'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\nu(t),\nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (u_\nu^3(t),v)\theta(t)dt + \\ + \alpha\int_0^T (u_\nu'(t),v)\theta(t)dt = 0$$

Tomando límite cuando $\nu \to \infty$ resulta:

$$-(u_1,v) - \int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (u^3(t),v)\theta(t)dt + \\ \alpha\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt = 0 \quad (5.25)$$

De la ecuación (5.24): $u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0$, c.s en Q tenemos:

$$\int_0^T (u''(t),\theta(t)v)dt - \int_0^T (\Delta u(t),\theta(t)v)dt + \int_0^T (u^3(t),\theta(t)v)dt + \alpha\int_0^T (u'(t),\theta(t)v)dt = 0$$

Integrando por partes

$$-(u'(0),v) - \int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (u^3(t),v)\theta(t)dt + \\ \alpha\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt = 0 \quad (5.26)$$

De (5.25) y (5.26) tenemos:

$$(u_1,v) = (u'(0),v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

entonces

$$u'(0) = u_1$$

Unicidad de la solución

Para demostrar la unicidad de la solución aplicaremos el Método de la energía.

Supongamos que u y v son dos soluciones fuertes de (1). Considerando $w = u - v$ entonces se verifica:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + (u^3 - v^3) + \alpha w' = 0 \quad \text{en} \quad Q = \Omega \times]0;T[\\ w = 0 \quad \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0;T[\\ w(x;0) = 0, \ w'(x;0) = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

De la primera ecuación, multiplicando por $w'(t)$ tenemos:

$$(w''(t), w'(t)) + ((w(t), w'(t))) + (u^3(t) - v^3(t), w'(t)) + \alpha(w'(t), w'(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w_m(t)|_2^2 + \int_\Omega (u^3(x,t) - v^3(x,t))w'(x,t)dx + \alpha|w_m'(t)|_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w_m'(t)|_2^2 + |\nabla w_m(t)|_2^2\right] + \alpha|w_m'(t)|^2 = \int_\Omega \left(v^3(x,t) - u^3(x,t)\right) w'(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w_m'(t)|^2 + |\nabla w_m(t)|_2^2\right] \leq \int_\Omega |v^3(x,t) - u^3(x,t)||w'(x,t)|dx \tag{5.27}$$

- **Afirmación**

$$|v^3 - u^3| \leq C\left(|u|^2 + |v|^2\right)|v - u|; \ C > 0$$

En efecto, consideremos $F(x) = x^3 \to F'(x) = 3|x|^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
Luego, como $F \in C^1(\mathbb{R})$ entonces por Teorema del valor medio, dados $a, b \in \mathbb{R}$ existe $c \in]a, b[$ tal que:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(c)||b - a|$$

$$\Rightarrow |F(b) - F(a)| = 3|c|^2|b - a|$$

Sea $\theta \in]0, 1[$ que verifica $c = a + \theta(b - a)$ y consideremos $a = u(x,t)$ y $b = v(x,t)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |v^3 - u^3| &= 3|u + \theta(v - u)|^2|v - u| \\ &\leq 3(|u| + |v| + |u|)^2|w| \\ &\leq 3(2|u| + 2|v|)^2|w| \\ &\leq 3 \cdot 4(|u| + |v|)^2|w| \\ &\leq C(|u|^2 + |v|^2)|w| \end{aligned}$$

■

Luego en (5.27) se tiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|_2^2\right] \leq C\int_\Omega \left(|u(x,t)|^2 + |v(x,t)|^2\right)|w(x,t)||w'(x,t)|dx$$

Del Teorema 2.22 de Inmersión de Sobolev se tiene que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ y como $u, v \in H_0^1(\Omega)$ entonces:

$$u, v \in L^6(\Omega), |u|^2, |v|^2 \in L^3(\Omega),\ w \in L^6(\Omega),\ w' \in L^2(\Omega)$$

Siendo $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = 1$, de la desigualdad de Holder generalizada se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|_2^2 + |\nabla w(t)|_2^2\right] &\leq C\left(\left||u(t)|^2\right|_3 + \left||v(t)|^2\right|_3\right)|w(t)|_6|w'(t)|_2 \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|_2^2 + |\nabla w(t)|_2^2\right] &\leq C\left(|u(t)|_6^2 + |v(t)|_6^2\right)|w(t)|_6|w'(t)|_2 \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ y $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ entonces

$$\sup_{t\in]0,T[} \text{ess}|u(t)|_6^2 = \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\left[\int_\Omega |u(t)|^6 dx\right]^{\frac{1}{3}} \leq \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\|u(t)\|^2 < \infty$$

Haciendo lo mismo con $v(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|_2^2 + \|w(t)\|^2\right] &\leq C|w(t)|_6|w'(t)|_2 \\ &\leq C\|w(t)\||w'(t)|_2 \\ &\leq C\left(|w'(t)|_2^2 + \|w(t)\|^2\right) \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |w'(t)|_2^2 + \|w(t)\|^2 &\leq |w'(0)|_2^2 + \|w(0)\|^2 + C\int_0^t |w'(s)|_2^2 + \|w(s)\|^2 ds \\ &\leq 0 + C\int_0^t \left(|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2\right) ds \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Gronwall

$$\begin{aligned} |w'(t)|_2^2 + \|w(t)\|^2 &\leq 0;\ \forall t \in [0, T] \\ \Rightarrow w(t) &= 0 \\ \Rightarrow u &= v \ \text{ en } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Comportamiento asintótico

Del problema (1) extraemos la ecuación

$$u'' - \Delta u + u^3 + \alpha u' = 0 \tag{5.28}$$

multiplicando por $u'(t)$ e integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned}(u''(t), u'(t)) + ((u(t), u'(t)) + (u^3(t), u'(t)) + (\alpha u'(t), u'(t)) = 0\\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|u'(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_2^2 + \frac{1}{4}|u(t)|_4^4\right] + \alpha|u'(t)|_2^2 = 0\end{aligned} \tag{5.29}$$

integrando de 0 a t

$$\frac{1}{2}|u'(t)|_2^2+\frac{1}{2}|\nabla u(t)|_2^2+\frac{1}{4}|u(t)|_4^4-\left[\frac{1}{2}|u'(0)|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(0)|_2^2 + \frac{1}{4}|u(0)|_4^4\right]+\alpha\int_0^t |u'(s)|_2^2 ds = 0$$

La expresión $E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_2^2 + \frac{1}{4}|u(t)|_4^4$ es denominada la energía del problema (1), con lo que se tiene:

$$\begin{aligned}E(t) - E(0) + \alpha\int_0^t |u'(s)|_2^2 ds = 0\\ \Longrightarrow E(t) \leq E(0)\end{aligned}$$

es decir, la energía es acotada.

De la ecuación (5.29) tenemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha|u'(t)|_2^2 \leq 0;\ \forall t \geq 0 \tag{5.30}$$

es decir, la energía es no creciente.

Teorema 5.3 (Decaimiento exponencial)
Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $E(t)$ la energía asociada al problema (1), acotada y no creciente entonces $E(t) \leq Me^{-\gamma t}$, $\forall t \in [0; +\infty[$; $M, \gamma > 0$.

Demostración
De (5.28) obtenemos:

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t)\left(u''(x,t) - \Delta u(x,t) + u^3(x,t) + \alpha u'(x,t)\right) dxdt = 0$$

Desarrollando e integrando por partes el primer término:

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega |u'(x,t)|^2 dxdt\\ + \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^4\right) dxdt + \alpha\int_0^T \int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dxdt = 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T + \int_0^T\int_\Omega \left(|u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 + |u(x,t)|^4\right) dxdt +$$
$$\alpha\int_0^T\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dxdt \;=\; 2\int_0^T\int_\Omega |u'(x,t)|^2 dxdt$$

$$\Longrightarrow \left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T + \int_0^T \left(|u'(t)|_2^2 + |\nabla u(t)|_2^2 + |u(t)|_4^4\right) dt +$$
$$\alpha\int_0^T\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dxdt \;=\; 2\int_0^T\int_\Omega |u'(x,t)|^2 dxdt$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \left(|u'(t)|_2^2 + |\nabla u(t)|_2^2 + |u(t)|_4^4\right) dt = -\left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T +$$
$$\int_0^T\int_\Omega (2|u'(x,t)|^2 - \alpha u(x,t)u'(x,t))dxdt$$

Pero

$$\int_0^T E(t)dt \leq \int_0^T \left(|u'(t)|_2^2 + |\nabla u(t)|_2^2 + |u(t)|_4^4\right) dt$$

entonces

$$\int_0^T E(t)dt \leq -\left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T + \int_0^T\int_\Omega \left(2|u'(x,t)|^2 - \alpha u(x,t)u'(x,t)\right) dxdt$$

$$\Longrightarrow \int_0^T E(t)dt \leq \left|\left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right]_0^T\right| + \int_0^T\int_\Omega 2|u'(x,t)|^2 dxdt +$$
$$\alpha\left|\int_0^T\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dxdt\right| \quad (5.31)$$

Considerando que $E(t)$ es no creciente y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |u'(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_\Omega |u'(x,t)|^2dx + \int_\Omega |u(x,t)|^2dx \\
&= |u'(t)|_2^2 + |u(t)|_2^2
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Poincaré

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right| &\leq |u'(t)|_2^2 + C|\nabla u(t)|_2^2 \\
&\leq |u'(t)|_2^2 + C|\nabla u(t)|_2^2 + |u(t)|_4^4 \\
\Longrightarrow \left|\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx\right| &\leq CE(t)
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\left| \int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx \right| \leq CE(0) \tag{5.32}$$

Además

$$\left| \left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx \right]_0^T \right| = \left| \int_\Omega u(x,T)u'(x,T)dx - \int_\Omega u(x,0)u'(x,0)dx \right|$$

$$\left| \left[\int_\Omega u(x,t)u'(x,t)dx \right]_0^T \right| \leq CE(0) + CE(0) \leq 2CE(0) \tag{5.33}$$

Integrando de 0 a T en la igualdad (5.30) tenemos:

$$\alpha \int_0^T \int_\Omega |u'(x,t)|^2 dxdt = E(0) - E(T) \leq E(0) \tag{5.34}$$

Considerando (5.32), (5.33) y (5.34) en (5.31) se tiene que $\exists\ C > 0$ tal que

$$\int_0^T E(t)dt \leq CE(0)$$

y por el Lema de Komornik se obtiene que para $C > 0$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0)e^{1-\frac{t}{C}},\ \forall t \geq C \\ &= M_0 e^{-\gamma t} \text{ donde } M_0 = E(0)e,\ \gamma = \frac{1}{C} \end{aligned}$$

Como $E(t) \leq E(0)$ y $E(t)$ es continua se tiene que para $t \in [0, C]$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) = E(0)e^{\gamma t}e^{-\gamma t} \\ \Rightarrow E(t) &\leq M_1 e^{-\gamma t},\ \forall t \in [0, C] \end{aligned}$$

tomando $M = max\{M_0, M_1\}$ se obtiene finalmente

$$E(t) \leq Me^{-\gamma t},\ \forall t \geq 0$$

□

5.1. Resultados descriptivos

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se obtienen resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística inferencial, no se obtienen resultados inferenciales.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

De lo desarrollado en la presente investigación, con lo establecido en el Marco teórico y en Resultados tenemos:

a) Que las condiciones $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ son las necesarias para establecer la existencia, unicidad de la solución fuerte de la ecuación (1) y el comportamiento asintótico.

b) Las dos estimativas a priori obtenidas permitieron acotar las soluciones y asi abordar el problema aproximado para luego con el pasaje al limite determinar la convergencia probando asi la existencia de soluciones en el problema (1).

c) Para la unicidad de la solución, consideramos la existencia de dos soluciones diferentes para el problema (1) y mediante el Método de la energía encontramos que ambas deben ser iguales.

d) Considerando la energía del sistema y planteando desigualdades integrales mediante el método de Komornik se acotó la energía demostrándose asi su decaimiento exponencial.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Consideraremos las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco teórico

a) En la investigación de Oswaldo Ramos se trabaja con una ecuación de onda con término no lineal $-u^3$ mediante el Método del pozo potencial, nosotros consideramos la sugerencia de que cuando el término es u^3, la ecuación se resolvería aplicando el Método de la energía, además considera en su investigación el método de Galerkin, realiza estimativas e indica el pasaje al límite que es un procedimiento similar al nuestro pero que detallamos a mas profundidad.

b) En el artículo de Sather, a pesar que esta ecuación no tiene término disipativo, el procedimiento es similar al que realizaremos en nuestra investigación pues realiza estimaciones a priori, se extrae subsucesiones, se prueba la convergencia, la existencia y la unicidad.

c) En el artículo de Medeiros, Limaco y Lopes se investiga la existencia y singularidad de una solución débil para una ecuación de onda que contiene un término no lineal $|u|^\rho$, la no linealidad trae dificultades para obtener estimaciones globales a priori mediante el uso del método de la energía. Consideramos la aplicación de las estimativas a priori que a pesar de no corresponder las condiciones iniciales a nuestros espacios por ser solución débil, nos permitió plantearla de manera similar asi como el uso de algunas inmersiones de Sobolev.

d) En el artículo de Nakao, él trata el estudio de una ecuación de onda similar a la nuestra con la diferencia que asume la existencia de la solución clásica global como consecuencia del estudio de otros autores y solo demuestra el decaimiento exponencial mediante desigualdades algebraicas (Método de Nakao) mientras que nuestro objetivo de mostrar el decaimiento de la energía fue mediante desigualdades integrales (Método de Komornik).

6.3. Responsabilidad ética

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N^0 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación.

CONCLUSIONES

De nuestra investigación concluimos:

a) Considerando que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ se obtiene la existencia de la solución fuerte de la ecuación (1).

b) Considerando que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ se obtiene la unicidad de la solución fuerte de la ecuación (1).

c) Mediante el Lema de Komornik se demostró que la energía asociada a la ecuación (1) decae exponencialmente ($E(t) \leq Me^{-\gamma t}, \ \forall t \geq 0$) lo que nos refiere que a medida que transcurre el tiempo ($t \to \infty$) la energía se disipa ($E(t) \to 0$).

RECOMENDACIONES

a) Como alternativa a la demostración del decaimiento exponencial de la energía mediante el Lema de Komornik (Desigualdades integrales) se podría considerar el Método de semigrupos.

b) Mediante métodos numéricos, construyendo un esquema numérico que permita aproximar cuantitativamente las soluciones aproximadas de la solución exacta de nuestra EDP y evaluar adecuadamente el error cometido.

c) Se puede complementar esta investigación mediante el uso de algún software para la solución de ecuaciones diferenciales como por ejemplo el Gascoigne 3D en el entorno Linux que permite simular sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales parciales, con condiciones de contorno, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PEÑA C, PÉREZ A, GUARDIA A. Decaimiento exponencial de la ecuación de onda semilineal con disipación localizada. PESQUIMAT - Revista de la FCM-UNMSM. 2014;p. 19–34.

[2] CABANILLAS E, BERNUY J, HUARINGA Z. Observaciones sobre la existencia global de las soluciones de una ecuación de Kirchoff no lineal via el Método de Tartar. Pesquimat-UNMS. 2001;p. 57–75.

[3] RAMOS O. Observaciones sobre un problema no lineal sin estimativos globais a priori. Seminario Brasileiro de Análise, Instituto de Matemática - UFRJ. 1985;p. 37–44.

[4] MEDEIROS L, LÍMACO J, LOPES C. On Wave Equations Without Global a Priori Estimates. Bol Soc Paran Mat. 2012;p. 19–32.

[5] KHALIFA M. Existence of almost everywhere solution for nonlinear hyperbolic–parabolic system. Applied Mathematics and Computation. 2003;p. 569–577.

[6] AASSILA M. Uniform stabilization of solutions to a quasilinear wave equation with damping and source terms. CommentMathUnivCarolin. 1999;p. 223–226.

[7] NAKAO M. Decay of classical solutions of a semilinear wave equation. Math Rep XI-1. 1977;p. 39–45.

[8] SATHER J. The existence of a global classical solution of the initial-boundary value problem for $\Box u + u^3 = f$. Arch Rat Mech Anal, 22. 1966;.

[9] BRÉZIS H. Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial S.A. Madrid.; 1984.

[10] EVANS L. Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. American Mathematical Society; 1997.

[11] ADAMS R. Sobolev Spaces. Academia Press New York San Francisco.; 1975.

[12] MEDEIROS L, RIVERA P. Espaços de Sobolev y Equaçoes Diferenciais Parciais. 6th ed. Textos de Métodos Matemáticos N^o 9. IM-UFRJ; 1975.

[13] MEDEIROS L, MILLA M. Introdução aos Espaços de Sobolev y às Equaçoes Diferenciais Parciais. Instituto de Matematica - UFRJ, Rio de Janeiro-RJ; 1989.

[14] MEDEIROS L, MILLA M. Espaços de Sobolev - Inicia. Instituto de Matematica - UFRJ; 2000.

[15] KESAVAN S. Topics in Functional Analysis and Aplications. New Age International (P) Ltd, New Delhi; 1989.

[16] ZEIDLER E. Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. vol. II/A. Springer-Verlag. New York Inc; 1990.

[17] MEDEIROS L. Topicos en ecuaciones diferenciales parciales-Parte I. UFRJ, Rio de Janeiro-RJ; 2005.

[18] TEMAN R. On the theory and numerical analysis on the Navier-Stokes equations - Lecture #9. University of Maryland College Park; 1973.

[19] LIONS J. Quelques méthodes de résolutions des problémes aux límites non linéiares. Paris, Dunod Gauthier-Villars; 1969.

[20] DAUTRAY R, LIONS J. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. vol. 5. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH; 2000.

[21] KOMORNIK V. Exact Controllability and Stabilizacion. The mutiplier Method. Dudot. París, Francia: Research in Applied Mathematics; 2012.

ANEXOS

Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Variable	Dimensión	Indicador	Metodología	Población
Problema general Dada la ecuación de onda no lineal con disipación friccional (término disipativo): $(1)\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u^3+\alpha u_t=0 \\ u=0 \text{ sobre } \sum=\Gamma\times]0;T[\\ u(x;0)=u_0(x) \\ u_t(x;0)=u_1(x) \end{cases}$ tal que $u\in\Omega\times]0;T[$ ¿Existe solución fuerte y única que a su vez permita asegurar que la energía decae exponencialmente a medida que transcurre el tiempo?	**Objetivo General** Demostrar la existencia y unicidad de la solución fuerte de la ecuación de onda no lineal con término disipativo que permita que la energía tenga decaimiento exponencial a medida que transcurra el tiempo.	**Hipótesis general** Existe única solución fuerte en (1) que decae exponencialmente..	Variable dependiente cualitativa: u	Existencia Unicidad Comportamiento asintótico	Método de Faedo Galerkin Método de la energía Lema de Komornik	**Tipo y diseño de la investigación** La investigación que realizamos es de tipo básica, científica y cualitativa; esta nos permite ampliar en nuestra ecuación (1), la manera de mostrar como la energía asociada a ella decae en forma exponencial mediante el Lema de Komornik y así pueda servir como referencia para compararla con otros métodos. El diseño utilizado fue descriptivo demostrativo pues a partir de la documentación de los contenidos en el marco teórico se demostró la existencia, unicidad de la solución fuerte y su comportamiento asintótico. **Diseño de la investigación** El método fue analítico-deductivo iniciándose con la definición de solución fuerte, definición del V_m, resolución del sistema aproximado, estimativas a priori, pasaje al límite; verificación de las condiciones iniciales y prueba de la unicidad; análisis del comportamiento asintótico de la solución mediante el Lema de Komornik.	Por el tipo de investigación, esta carece de población y muestra por lo que solo indicamos que se trabajó con ecuaciones en derivadas parciales con las condiciones establecidas en (1).
Problemas específicos ¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que exista única solución fuerte?	**Objetivos Específicos** Establecer condiciones adecuadas sobre los datos inciales u_0 y u_1 para poder demostrar la existencia y unicidad de la solución fuerte en (1).	**Hipótesis específicas** Sean $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y $u_1\in H_0^1(\Omega)$ entonces se garantiza la existencia y unicidad de la solución fuerte de (1).					
¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que la energía tenga decaimiento exponencial a medida que transcurra el tiempo?	Analizar el comportamiento asintótico de la energía del sistema estableciendo condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que la energía presente decaimiento exponencial a medida que transcurra el tiempo.	Sean $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$ y $E(t)$ la energía asociada a la ecuación (1) tal que es acotada y no creciente entonces $E(t)\leq Me^{-\gamma t}$, $\forall t\in[0;+\infty[$; $M,\gamma>0$.					