UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

INTEGRACIÓN SOBRE VARIEDADES

COMPACTAS EN $\mathbb{R}^n$

Tesis para optar el título profesional de
Licenciado en matemática

Bach. JERRY ANGEMAR CRISOSTOMO MARTINEZ

Callao, mayo del 2017

PERÚ

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"INTEGRACIÓN SOBRE VARIEDADES COMPACTAS EN $\mathbb{R}^n$"

Jerry Angemar Crisóstomo Martínez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe
Presidente

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Vocal

Lic. Juan Benito Bernui Barrios
Secretario

Callao, mayo del 2017
Perú

DEDICATORIA

A mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por siempre estar a mi lado y ayudarme en las distintas actividades que he realizado en mi camino.

A mis padres Pedro Pablo Crisóstomo Tamayo y Rocío del Pilar Martínez Castro por el apoyo que siempre me han brindado en cada proyecto de mi vida y por la incansable labor que han hecho en mi educación y formación como persona, siempre les estaré agradecido por todo el amor que me han brindado.

A quien fue en vida el Mg. Ezequiel Fajardo Campos, no solo por su paciencia y tiempo que me dedicó para preparar mejor este trabajo sino también por su amistad, confianza, exigencia y motivación en esta hermosa carrera, la cual disfruto.

A Beatriz Bellido C. una persona especial que me presto apoyo incondicional en el proceso de desarrollo de este trabajo, decirle que le agradezco por todo el aliento y compañía.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

INTEGRACIÓN SOBRE VARIEDADES COMPACTAS EN $\mathbb{R}^n$

JERRY ANGEMAR CRISOSTOMO MARTINEZ

Callao, mayo del 2017

Asesor: Mg. Ezequiel Fajardo Campos

Título obtenido: Licenciado en Matemática

Iniciamos este trabajo con la revisión de Topología y Geometría diferencial estudiando temas especiales como: variedades diferenciables, aplicaciones diferenciables, orientación de variedades, espacios tangentes, transversalidad, grupos de Lie, campos invariantes, integración sobre $\mathbb{R}^n$, particiones de la unidad sobre variedades.

Seguidamente estudiamos el espacio exterior, campos tensoriales y formas diferenciables (herramienta que constituye la base de nuestro trabajo), la derivada exterior (derivada de Lie).

Finalmente estudiamos integración de n-formas sobre cadenas, particularmente presentamos el teorema de Stokes sobre cadenas.

Concluyendo que la teoría de integración sobre $\mathbb{R}^N$ puede ser extendida a variedades orientadas y grupos de Lie(particularmente grupos de Lie compactos).

El objetivo principal de esta tesis es estudiar y profundizar la integración sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$.Palabras claves:

- Variedades
- Integración
- “c” cadenas que son combinaciones de cubos.
- $\mathbb{R}^n_p$ espacio tangente en $\mathbb{R}^n$ en el punto p.
- $\Delta^k(V)$ espacio de tensores alternados sobre el espacio v.
- $w: \mathbb{R}^n \to \Delta^k(\mathbb{R}^n_p)$ forma diferencial.

ABSTRACT

"INTEGRATION IN VARIETY COMPACTS $\mathbb{R}^{n}$"

JERRY ANGEMAR CRISÓSTOMO MARTINEZ

Callao, May 2017

Adviser: Mg. Ezequiel Fajardo Campos

Obtained title: Licenciated in Mathematic

We started this work with the review of Topology and differential Geometry studying special topics such as: differentiable varieties, differentiable applications, variety orientation, tangent spaces, transversality, Lie groups, invariant fields, integration on $\mathbb{R}^n$, partitions of the unit on varieties.

Then we study the outer space, tensor fields and differentiable forms (tool that forms the basis of our work), the external derivative (derived from Lie).

Finally, we study the integration of n-forms on $\mathbb{R}^n$ chains, particularly we present the Stokes theorem on chains.

Concluding that the integration theory on can be extended to oriented varieties and Lie groups (particularly compact Lie groups).

The main objective of this thesis is to study and deepen the integration of compact varieties in $\mathbb{R}^n$.

Keywords:

- Variety.
- Integration.
- "C" chains which are combinations of cubes.
- $\mathbb{R}^n_p$ tangent space $\mathbb{R}^n$ on the point p.
- $\Delta^k(V)$ tensioners alternate space on the space v.
- $w: \mathbb{R}^n \to \Delta^k(\mathbb{R}^n_p)$ forma diferencial.

I. Planteamiento de la investigación

1.1 Determinación del problema:

Sobre el espacio $\mathbb{R}^3$, con las diferenciales canónicas dx; dy; dz, se obtienen los clásicos teoremas de Green y Stokes. Con el surgimiento de las variedades diferenciables en el presente trabajo se plantea el problema de profundizar el estudio del teorema de Stokes sobre variedades en $\mathbb{R}^n$.

1.2 Formulación del problema

Dada una (n-1)-forma se tiene las interrogantes:

- ¿Se tendrá el teorema de Stokes sobre una k-cadena c? o sea:

$$\int_c dw = \int_{dc} w$$

- ¿Se tendrá el teorema de Stokes sobre una k-variedad compacta M? o sea:

$$\int_M dw = \int_{dM} w$$

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Estudiar los teoremas de Stokes sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Objetivos específicos

- Construir el espacio $\Delta^k(V)$ de tensores alternados.

- Formalizar y extender las diferenciales clásicas dx; dy; dz en $\mathbb{R}^3$ mediante la introducción de las n-formas.
- Establecer los teoremas fundamentales de integración como el teorema de Stokes de formas sobre cadenas.
- Establecer integración de formas sobre cadenas y variedades.

1.4. Justificación:

La justificación de estudiar la integración sobre variedades compactas radica en que se estaría obteniendo teoremas de integración clásicos del cálculo en $\mathbb{R}^3$ a través de las formas diferenciables, cuadrando cadenas de simplejos singulares sobre estas variedades compactas.

1.5. Importancia

La extensión de la teoría de integración sobre variedades resulta de mucha importancia pues por ejemplo las variedades como grupos de Lie son usados en Física, ciencias e ingenierías sobre todo a través de los teoremas fundamentales y Stokes, con el caso particular en mecánica de fluidos. El sector que se verá beneficiado con los resultados de esta investigación son todos los estudiantes del ambiente universitario.

II. MARCO TEORICO

2.1. Variedades diferenciables

Estudiaremos aquellos espacios topológicos cuyos puntos podamos asignarles (localmente) un conjunto de números reales de tal forma que esta correspondencia venga dada por un homeomorfismo. A grosso modo una variedad diferenciable es un espacio topológico donde cada punto tiene un entorno que está parametrizado de tal forma que la transformación entre dos conjuntos de parámetros está dada por funciones diferenciables. Una función sobre tal espacio topológico puede ser considerada localmente como una función de estos parámetros. Por lo tanto, podemos definir la diferenciabilidad de funciones y aplicaciones. Usando la idea de diferencial. Podemos linealizar un entorno suficientemente pequeño de un punto sobre una variedad y considerar un espacio tangente.

Definición 2.1.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto del espacio euclídeo m-dimensional $\mathbb{R}^m$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de variable real. Se dice que f es diferenciable de clase C^k sobre U, o simplemente que f es de clase C^k (k entero no negativo) si existen las derivadas parciales y son funciones continuas en U.

En particular f es de clase C^0 si f es continua; y f es de clase C^1 si existen y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial r^i}$ siendo $r^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, la i-ésima proyección canónica (i= 1…m)

Una aplicación $F: U \to \mathbb{R}^m$, se dice que es diferenciable de clase C^k si cada una de sus funciones componentes, $F^i = r^i \circ F$ (i=1…m) es de clase C^k. Se dice que F es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \geq 0$.

Definición 2.1.2 Sea C un conjunto, $\tau \subset P(C)$ (conjunto de partes de C), es una topología en C si:

i) $\phi, C \in \tau$

ii) Sea la colección de abiertos $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Delta\} \rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Delta} U_\lambda \in \tau$

iii) $U_i \in \tau,\ 1 \leq i \leq m \rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} U_i \in \tau$

El par (C, τ) se le denomina espacio topológico.

Definición 2.1.3 El par (C, τ)**,** es un espacio topológico de Hausdorff si: para todo par de puntos $p, q \in C$ diferentes, existen entornos U_p, U_q tal que $p \in U_p$; $q \in U_q$ y $U_p \cap U_q = \phi$.

Definición 2.1.4 C es localmente euclídeo, si para cada punto $p \in C$, existe un abierto U_p entorno de p homeomorfo a un subconjunto abierto de lR^m.

Definición 2.1.5 Una variedad topológica m dimensional M es un espacio topológico de Hausdorff, de base numerable y localmente euclidiano.

Definición 2.1.6 Si $x: U \rightarrow x(U) \subset lR^m$ es uno de los homeomorfismos mencionada en la definición 2.1.4, siendo U un abierto conexo, x recibe el nombre de homeomorfismo coordenado; u abierto coordenado; al par (U, x) se le denomina sistema coordenado o carta. Cada aplicación continua $x^i = r^i{}_o x$ se le denomina función coordenada; y la n-upla $(x^1, x^2 \ldots x^n)$ se dice que es el sistema de funciones coordenadas asociados a la carta (U, x).

En ocasiones la carta (U, x) se representa por $(U, (x^1 \ldots x^n))$.

Definición 2.1.7 Un conjunto de cartas $\mathscr{H} = \{(U_\lambda, x_\lambda) / \lambda \in \Delta\}$ se denomina atlas de M si verifica lo siguiente: $\bigcup_{\lambda\epsilon\Delta} U = M$

Definición 2.1.8 Una estructura diferenciable de clase C^k $(1 \leq i \leq \infty)$ sobre una variedad topológica M de dimensión m es una colección

$\mathscr{H} = \{(U_\lambda, x_\lambda) / \lambda \in \Delta\}$

De sistemas coordenadas verificando las tres condiciones siguientes.

$\bigcup_{\lambda\epsilon\Delta} U = M$ ($\mathscr{H}$ es un Atlas de M)

i) Dados $x: U \rightarrow lR^m$, $y : V \rightarrow lR^m$ pertenecientes a $\mathscr{H}$ con $U \cap V \neq \Phi$ entonces el cambio de coordenadas φ_{xy}: $x(U\cap V) \rightarrow y(U\cap V)$ es homeomorfismo de clase C^k.

ii) La colección $\mathscr{H}$ es llamado Atlas Maximal de dimensión m y clase C^k, con respecto a la condición ii, es decir, si (W,z) es un sistema coordenadas dado por el homeomorfismo $z : W \rightarrow lR^m$ de un abierto $W \subset M$ sobre un abierto $z(W) \subset lR^m$ tal que φ_{xz} , φ_{zx} son de clase C^k para cada $x \in \mathscr{H}$ entonces $z \in \mathscr{H}$.

Definición 2.1.9 Una variedad diferenciable de clase C^k es un par $(M, \mathscr{H})$ formado por una variedad topológica M de dimensión m y una estructura diferenciable $\mathscr{H}$ de clase C^k sobre M.

Definición 2.1.10 (Subvariedades Abiertas) Un conjunto abierto W de una variedad M clase C^k tiene una estructura natural de variedad de clase C^k dada por el atlas maximal en W conformado por todas las coordenadas admisibles $x : U \to lR^m$ en M, cuyos dominios U están contenidos en W.

Definición 2.1.11 (Codimensión) Si M es una n-variedad y B una subvariedad de M, la codimensión de B en M es definida por codim(B) = dim(M) – dim(B).

Notar que las subvariedades abiertas tienen codimensión cero.

Definición 2.1.12 (Producto de Variedades) Sean $(M^m, \mathscr{H})$ y $(N^n, \mathscr{B})$ variedades de clase C^k. En el espacio topológico producto MxN podemos definir una estructura de variedad de dimensión m+n y clase C^k por medio del atlas $\mathscr{H} \times \mathscr{B}$ formado por los sistemas de coordenadas $x \times y : U \times V \to lR^{m+n}$ dado por $(x \times y)(p,q) = (x(p), y(q))$, $x \in \mathscr{H}$, $y \in \mathscr{B}$.

Como $(x_1 \times y_1)(x \times y)^{-1} = (x_1 x^{-1}) \times (y_1 y^{-1})$ se sigue que $\mathscr{H} \times \mathscr{B}$ es un atlas de clase C^k. Este atlas está contenido en un único atlas maximal de clase C^k que define en MxN una estructura de variedad producto.

Variedades 2-dimensionales Conexas Compactas

En adelante nos referiremos a una variedad 2- dimensional como una 2-variedad.

Un ejemplo simple de una 2-variedad conexa compacta es la esfera S^2.

Otro ejemplo importante es el toro. El cuál puede describirse como cualquier 2-variedad conexa compacta homeomorfa a la 2-variedad conexa de una rosquilla o anillo sólido.

Con más precisión el toro puede definirse como:

a) Cualquier espacio topológico homeomorfo al producto de dos circunferencias.

b) Cualquier espacio topológico homeomorfo al siguiente subconjunto de lR^3:

$\{(x, y, z) \in lR^3 \,;\, [(x^2+y^2)^{½} - 2]^2 + z^2 = 1\}$ "Este conjunto se obtiene por rotación del círculo $(x-2)^2+z^2 = 1$ del plano XZ alrededor del eje Z"

c) Sea X el cuadrado unidad en el plano lR^2 ò sea

$\{(x, y) \in lR^2 \,;\, 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 1\}$

Estos tres espacios topológicos son homeomorfo. Entonces un toro es cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X obtenido por identificación de los lados opuestos del cuadrado X según las reglas: Se identifican los puntos (0, y) y (1, y) para $0 \le y \le 1$, los puntos (x, 0) y (x, 1) para $0 \le x \le 1$. Mediante la figura 2.1.1 los lados que se identifican están indicados con la misma letra del alfabeto y las identificaciones deben hacerse de forma que las direcciones indicadas por las flechas coincidan:

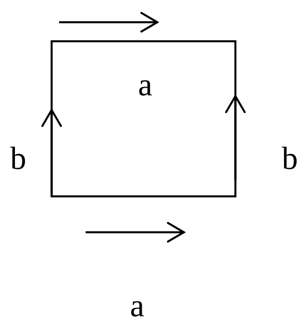


Figura 2.1.1 Descripción del toro 2-dimensional.

Definición 2.1.13 (Variedades con borde) Una variedad n-dimensional M con borde es un espacio de Hausdorff tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo al disco abierto U de $H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in lR^n \,;\, x_n \ge 0\}$. El borde del semiespacio H^n es dado por $\partial(H^n) = lR^{n-1} \times \{0\}$ el borde de M denotado por $\partial(M)$ será el conjunto de todos los puntos de M que por el homeomorfismo corresponden a puntos de $\partial(H^n)$. Además $M - \partial(M)$ es llamado el interior de M.

Ejemplo 2.1.1

El disco cerrado ó bola En = $\{x \in lR^n \; ; \; | x | \leq 1\}$ es una variedad topológica n-dimensional con borde. La esfera S^{n-1} es su borde y el disco abierto U^n su interior.

Observación 2.1.1

El conjunto de puntos del borde y el conjunto de puntos interiores son mutuamente disjuntos. Se ve fácilmente que el conjunto de puntos interiores es un subconjunto abierto denso, por tanto, el conjunto de puntos del borde es un conjunto cerrado. El conjunto de puntos del borde de una variedad topológica n-dimensional es una variedad topológica (n-1)-dimensional.

2.1.1. Aplicaciones entre variedades diferenciables

Definición 2.1.14 Sean M, N variedades de clase C^r $(r \geq 1)$ con dimensiones m, n respectivamente se dice que una aplicación $f : M \to N$ es diferenciable en el punto $p \in M$ si existen sistemas de coordenadas $x : U \to lR^m$ en M, $y : V \to lR^n$ en N, con $p \in U$, $f(U) \subset V$ tales que $y_o f_o x^{-1} : x(U) \to y(V) \subset lR^n$ es diferenciable en x(p), figura 2.1.2. La aplicación $fxy = y_o f_o x^{-1}$ es la expresión de f en las coordenadas locales x, y.

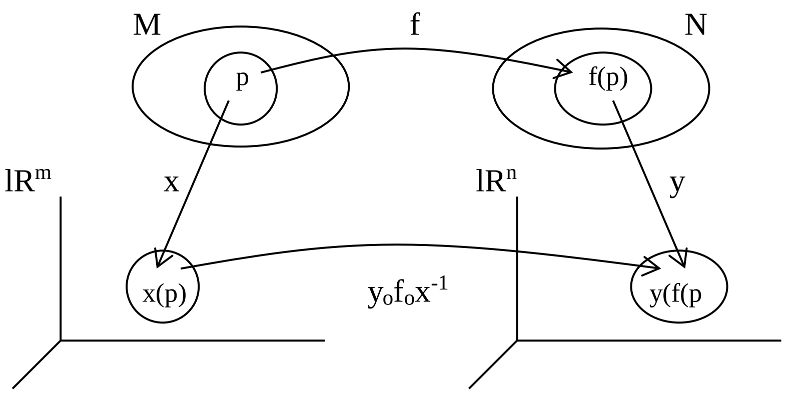


Figura 2.1.2 Aplicación entre variedades diferenciables.

Observar que en particular f es continua en $p \in M$.

Como los cambios de coordenadas en M y N son difeomorfismos de clase C^r, la diferenciabilidad depende de las coordenadas $x': U' \to lR^m$ en M, $y': V' \to lR^n$ en N con $p \in U'$, $f(U') \subset V'$ la aplicación $f_{x'y'} = y'_o f_o (x')^{-1}$ será diferenciable en $x'(p)$.

Diremos que $f : M \to N$ es diferenciable si es diferenciable en todo punto de M.

Finalmente $f : M \to N$ es de clase C^k $(k \leq r)$ si para cada $p \in M$ existen sistemas de coordenadas locales $x : U \to lR^m$ en M, $y : V \to lR^n$ en N con $p \in U$, $f(U) \subset V$ tal que $y_o f_o x^{-1} : x(U) \to y(V)$ es de clase C^k. Cuando decimos que $f : M \to N$ es de clase C^k admitiremos al menos implícitamente que M y N son de clase C^r, $r \geq k$.

Dadas $f : M \to N$, $g : N \to P$ de clase C^k la compuesta es de clase C^k.

Ejemplo 2.1.2

Sean $U \subset lR^m$ un abierto y $f : U \to lR^n$ una aplicación. Podemos considerar U como variedad de clase C^k entonces f es diferenciable como aplicación entre variedades diferenciables si solo si f es diferenciable.

Ejemplo 2.1.3

Sea M una n-variedad de clase C^k y $x : U \to lR$ un sistema de coordenadas en M. Consideremos en U la estructura de subvariedad abierta de M. Entonces x es un difeomorfismo de clase C^k de U sobre x(U). De hecho la expresión de x e x^{-1} en los sistemas de coordenadas locales x e $l_d : lR^m \to lR^m$ identidad de x(U). En particular dada una parametrización $\varphi : U_0 \to U \subset M$ (superficie de clase C^k). $M^m \subset lR^n$ se tiene que φ y φ^{-1} son difeomorfismos de clase C^k.

Ejemplo 2.1.4

Sean M, N_1, N_2 variedades de clase C^r. Una aplicación $f : M \to N_1 x\, N_2$ es de clase C^k $(k \leq r)$ si solamente si $f = (f_1, f_2)$ donde las coordenadas $f_1: M \to N_1$, $f_2 : M \to N_2$ son de clase C^k. Consideremos N_1 x N_2 los sistemas de coordenadas locales de tipo $y_1 x\, y_2 : V_1 x V_2 \to lR^n x lR^m$ entonces se tiene que $(y_1 x\, y_2)_o f_o x^{-1} = (y_{1\,o}\, f_{1\,o}\, x^{-1}\,{}_o y_{2\,o}\, f_{2\,o}\, x^{-1})$ así se tiene que $g = (g_1, g_2) : x(U) \to lR^n x lR^m$ es de clase C^k si solo si $g_1 : x(U) \to lR^n$ y $g_2 : x(U) \to lR^m$ son de clase C^k.

Espacios Tangentes y Derivadas en Variedades Euclidianas

Para definir la derivada $f'(x) = df_x$ de una aplicación diferenciable $f ; M \to N$ de Variedades diferenciables primero asociaremos con cada $x \in M \subset lR^k$ un subespacio vectorial $T_xM \subset lR^k$ de dimensión m llamado espacio tangente de M en x, cuyos elementos son llamados vectores tangentes(derivaciones) a M en x. Así $df_x : T_xM \rightarrow T_yM$; y = f(x) llevará vectores tangentes a M en p a vectores tangentes a N en f(p).

Intuitivamente se puede pensar de los hiperplanos m-dimensionales en lR^k el cuál se aproxima a M en x. Entonces T_xM es paralelo al hiperplano m- dimensional por el origen. Similarmente una de las aplicaciones no homogéneas lineal del hiperplano tangente a x hacia el hiperplano tangente a y = f(x) la cual se aproxima a f. Trasladando ambos hiperplanos al origen obtenemos df_x.

Ahora con la idea que un vector $v = (v_1, ...,v_n)$ en un punto $p \in lR^n$ puede ser considerado como un operador sobre funciones diferenciables f en una vecindad U de p ó sea:

$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_p$ derivada en la dirección de v en p satisfaciendo la regla de Leibniz:

i) $v(f+\lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$

ii) $v(f.g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$. Con esto podemos definir:

Definición 2.1.15 Dada M variedad diferenciable $p \in M$. Una derivación lineal (vector tangente) de clase C^∞ es el operador $x_p : C^\infty(p) \rightarrow lR$ la cuál es lineal y satisface la regla de Leibniz:

$x_p(f+\lambda g) = x_p(f)+ \lambda x_p(g)$

$x_p(f.g) = f(p)x_p(g)+ g(p)x_p(f)$

Donde $C^{\infty}(p) = \frac{C^{\infty}(U)}{\approx}$, $C^{\infty}(U)$ funciones C^{∞} en vecindades U de p en lR.

La relación $\approx$ dada por: $f \approx g \Leftrightarrow \exists\, U(p) \,/\, f/_{U(P)} = g/_{U(P)}$. Así las operaciones de adición y multiplicación dan estructura de álgebra a $C^{\infty}(p)$.

El **Espacio Tangente** a M en p (T_pM) es el conjunto de todas las derivaciones en el punto p de M ó sea $x_p \in T_pM$.

Observación 2.1.2

1.- Las derivaciones x_p dan a T_pM la estructura natural de lR-espacio vectorial.

2.- Cada sistema de coordenadas $x : U \rightarrow lR^m$ en la variedad M , $p \in U$ produce una biyección $\theta :\ T_pM \rightarrow lR^m$; $\lambda \rightarrow (x\, {}_o\lambda)'(0)$. Además:

i) $\overset{o}{\lambda} + \overset{o}{\mu} = \theta^{-1}(\theta(\overset{o}{\lambda}) + \theta(\overset{o}{\mu}))$

ii) $c\overset{o}{\lambda} = \theta^{-1}(c\theta(\overset{o}{\lambda}))$

Estas operaciones no dependen de la elección del sistema de coordenadas. Esto es cuando $\gamma : V \rightarrow lR^m$ es otro sistema coordenado entonces $\phi = (\gamma_o\theta^{-1})'_o\chi : T_pM \rightarrow lR^m$. Ahora como $(\phi_o\theta^{-1})'(\chi(p))$ es isomorfismo los sistemas de coordenadas originan la misma estructura de espacio vectorial en T_pM.

Así podemos concluir que T_pM y lR^m tienen la misma dimensión.

3.- Dado un sistema de coordenadas locales x : U $\rightarrow$ lR^m en M en un punto p $\in$U de (2) podemos denotar con $\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p , ..., \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \}$ la base de T_pM correspondiente a la base canónica $\{e_1, ..., e_m\}$ de lR^m. Es usual escribir $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ Por otro lado: $(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p)(f) = \left.\frac{\partial(f\chi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\chi(p)}$; f : U $\rightarrow$ lR^m. Esto se entiende como la derivada direccional de f en p en la dirección de la coordenada x^i.

Denotamos $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$ por $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(f)$. Así v$\in T_pM$ se tiene v = $\sum_{i=1}^{m} v(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$

Aquí y en adelante se trabajará con v(f) en lugar de v (de la clase de f).

4.- Si aplicamos (3) al sistema de coordenadas canónicas $r_1... r_m$ sobre lR^m, entonces los vectores tangentes son nuestras conocidas derivadas parciales ordinarias $\frac{\partial}{\partial r_i}$

Teorema 2.1.1 Dada F : M $\rightarrow$ N aplicación de clase C^∞ . Para p$\in$M, q = f(p), U vecindad de p, V vecindad de q se tiene que la aplicación F^*: $C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U)$ definida por $F^*(f)$ = f(F) es un homomorfismo de álgebras e induce un homomorfismo de espacios vectoriales dado por dF = F_* : $T_pM \rightarrow T_qN$ tal que $dF(x_p)(f) = (F_* (x_p))(f) = x_p (F^*f) = x_p(f F)$ (aplicación tangente ó diferencial)

Si F es la identidad $\Rightarrow F^*, F_*$ son isomorfismos identidad.

Si H = G F $\Rightarrow H^* = F^* G^*$, $G_* = G_* F_*$

Si F es difeomorfismo $\Rightarrow F_*$ es isomorfismo

Para la demostración ver ([5], Elon Lages Lima, (1973))

Corolario 2.1.2 A una vecindad coordenada U sobre M le corresponde una base natural $E_{1p}, \ldots E_{np}$ de T_pM para todo $p \in U$ en particular $\dim(T_pM) = \dim(M)$.

Definición 2.1.17 (Espacio Cotangente) Sea $\vartheta(p) = \{ f \in C^\infty(p) \ / \ \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p f = 0;$ $j = 1,2, \ldots m \}$ subespacio vectorial de $C^\infty(p)$ el cociente $(T_p M)^* = \frac{C^\infty(p)}{\vartheta(p)}$ es llamado espacio Cotangente con proyección natural $C^\infty(p) \to (T_p M)^*$ tal que $f \to [\, f \,]$

Dada $F : M \to N$ de clase C^∞ obtenemos la **aplicación dual** $\delta F : (T_qN)^* \to (T_pM)^*$; $\delta F(w)(v) = w(dF(v))$; $w \in T_{F(p)}N$, $v \in T_pM$. En el caso especial que $F : M \to lR$ de clase C^∞, si $v \in T_pM$ y $F(p) = r_0$ entonces $dF(v) = v(F) \left.\frac{d}{dr}\right|_{r_o}$. Así podemos considerar sin confusión dF como un elemento de $(T_pM)^*$ ó sea $dF(v) = v(F)$.

Teorema 2.1.3 Sea M una Variedad diferenciable de dimensión n, (U, x) una carta: x^i ; $_{i = 1,..,n}$ funciones coordenadas entonces $([\, x^1 \,], [\, x^2 \,], \ldots, [\, x^n \,])$ es base de $(T_pM)^*$. O sea $\{dx^i|_p\}$ es la base de $(T_pM)^*$ dual a $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$.

Ahora si $F : M \to lR$ de clase C^∞ entonces $dF_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_p \left. dx^i \right|_p$

Para la demostración ver ([5], Elon lages Lima, (1973))

Conclusiones Importantes:

i) Dadas f: M $\rightarrow$ N y (U, x^1, ..., x^k) , (V, y^1, ..., y^d) sistemas de coordenadas alrededor de p y f(p) respectivamente entonces df$\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right)$ = $\sum_{i=1}^{d} \left. \frac{\partial (y^i f)}{\partial x^j} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{f(p)}$ la matriz $\left(\frac{\partial (y^i f}{\partial x^j} \right)$ es llamado el Matriz Jacobiana de la aplicación f (respecto del sistema coordenado dado).

ii) En espacios Euclidianos la matriz será siempre dada respecto del sistema coordenado canónico. O sea dados U$\subset \mathbb{R}^k$, V$\subset \mathbb{R}^d$ y una aplicación diferenciable f : U $\rightarrow$ V la aplicación diferencial derivada f´(x) = $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ es dada por:

$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right]$; x$\in$U, h$\in \mathbb{R}^k$ bastante conocida.

iii) Una aplicación σ : (a, b) $\rightarrow$ M de clase C^∞ es una curva suave en M. Sea t$\in$(a, b) entonces el vector tangente a la curva σ en t es $\sigma'(t) = \overset{o}{\sigma}(t)$ = d$\sigma\left(\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_t \right) \in T_{\sigma(t)}M$.

Ahora si v$\in T_pM$ entonces v es el vector tangente a la curva suave en M. Para simplificar podemos elegir un sistema de coordenadas (U, φ) en p para el cuál

$v = d\varphi\left(\left.\frac{\partial}{\partial r'}\right|_0\right)$. Entonces v es el vector tangente en 0 a la curva $t \to \varphi^{-1}(t, 0,\ldots, 0)$.

Observar que muchas curvas pueden tener el mismo vector tangente y que las curvas suaves σ y τ en M paras las cuales $\sigma(t_0) = \tau(t_0) = p$ tienen el mismo vector tangente a t_0 si solo si $\left.\frac{d(f\sigma)}{dr}\right|_{t_0} = \left.\frac{d(f\tau)}{dr}\right|_{t_0}$ para las funciones f de clase C^∞ sobre una vecindad de p.

Si σ pasa a ser una curva en un espacio Euclidiano lR^n entonces:

$$\overset{o}{\sigma}(t) = \left.\frac{d(\sigma_1)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_{\sigma(t)} + \ldots\ldots\ldots + \left.\frac{d(\sigma_n)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial r^n}\right|_{\sigma(t)}$$

Identifiquemos este vector tangente con $\left(\left.\frac{d(\sigma_1)}{dr}\right|_t, \ldots\ldots\ldots, \left.\frac{d(\sigma_n)}{dr}\right|_t\right) \in \mathbb{R}^n$

Entonces $\overset{o}{\sigma}(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sigma(t+h)-\sigma(t)}{h}$ con esta identificación la idea de vector tangente coincide en este caso especial con la noción geométrica de una tangente a una curva en espacios euclidianos.

iii) La función inversa en $\mathbb{R}^n$: Si la aplicación derivada $dfx : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es no singular entonces f aplica cada conjunto abierto suficientemente pequeño U´ conteniendo x difeomorficamente sobre el abierto f(U´).

Ver ([5], Elon Lages Lima, (1973))

Teniéndose el espacio T_xM para una variedad C^∞ diferenciable arbitraria $M \subset lR^k$.

Tomando una parametrización $g : U \to M \subset lR^k$ de una vecindad g(U) de x en M con g(u) = x donde U es un conjunto abierto de lR^m. Pensar $g : U \to lR^k$.

Así la derivada $dg_u : lR^m \rightarrow lR^k$ define $dg_u(lR^m) = T_xM$.

iv) Regla de la cadena: Si $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ son aplicaciones diferenciables C^∞ $f(x) = y$ entonces $d(g_of)_x = dg_{y\ o}\ df_x$

v) Si $\psi : M \rightarrow N$, $f : N \rightarrow lR$ son C^∞ entonces $\delta\psi(df_{\psi(p)}) = d(f\psi)_p$ para $\delta\psi(df_{\psi(p)})(v)= df(d\psi(v)) = d(f\psi)_p(v)$ cuando $v\in T_pM$.

vi) Preservación a través de df_x : Si I es la identidad de M entonces dI_x es la identidad de TM_x. Mas general si $M \subset N$ con la aplicación inclusión i entonces $T_xM \subset T_x N$ con la aplicación di_x. Ver figura 2.1.3.

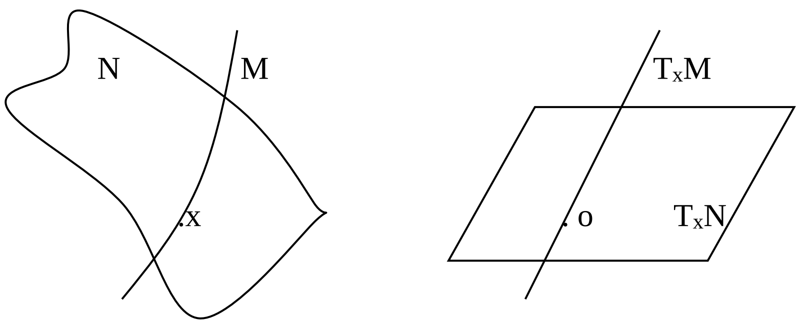


Figura 2.1.3. Preservación de espacios tangentes

Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $df_x : T_xM \rightarrow T_yN$ es un difeomorfismo de espacios vectoriales. En particular la dimensión de M es igual a la dimensión de N.

2.1.2. Inmersiones, submersiones, inmersión bicontínua:

Definición 2.1.18 Dada una aplicación C^r ($r\geq 1$) , $f : M \rightarrow N$ diremos que f es una **inmersión** si para todo $x\in M$. $Df(x) : T_xM \rightarrow T_yM$, $y = f(x)$ es inyectiva. Diremos que f es una **submersión** si para todo $x\in M$. $Df(x) : T_xM \rightarrow T_yM$, $y = f(x)$ es sobreyectiva.

Definición 2.1.19 Se dice que f es inmersión bicontínua si $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ es un homeomorfismo, considerándose a f(M) con la topología inducida por la topología de N. En particular si $f : M \rightarrow N$ es inmersión bicontínua entonces f es una inmersión biunívoca sin embargo la recíproca es falsa pues existen inmersiones biunívocas que no son inmersiones bicontínuas.

Teorema 2.1.4 (Forma local de las inmersiones)

Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ de clase C^r ($r\geq 1$). Supongamos que $Df(p) : T_pM \rightarrow T_qN$, $q = f(p)$ es inyectiva. Entonces existen cartas locales $\varphi :U \rightarrow lR^m$, $p\in U$, y $\psi : V \rightarrow lR^n$, $q\in V$ y una descomposición $lR^n = lR^m \times lR^{n-m}$ tal que $f(U) \subset V$ y la expresión de f en las cartas (U, φ), (V, ψ) y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$ si $x\in\varphi(U)$. En otras palabras f es localmente equivalente a la inmersión local $x \rightarrow (x, 0)$.

Ver ([5], Elon Lages Lima, (1973))

Teorema 2.1.5 (Forma local de las submersiones)

Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ de clase C^r ($r\geq 1$). Supongamos que $Df(p) : T_pM \rightarrow T_qN$, $q = f(p)$ es sobreyectiva Entonces existen cartas locales $\varphi :U \rightarrow lR^m$, $p\in U$, y

$\psi : V \to lR^n$, $q \in V$ y una descomposición $lR^m = lR^n \times lR^{m-n}$ tal que $f(U) \subset V$ y la expresión de f en (U, φ), (V, ψ) y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x$. Aquí f es localmente equivalente a la proyección $x \to (x, 0)$

Ver ([5], Elon Lages Lima, (1973))

Definición 2.1.20. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades de igual dimensión. Diremos que $x \in M$ es punto regular de f si la derivada df_x es no singular.

En este caso se sigue de la función inversa que f aplica una vecindad de x en M difeomorficamente sobre un conjunto abierto en N.

El punto $y \in N$ es llamado **valor regular** si $f^{-1}(y)$ contiene solo puntos regulares.

Si df_x es singular entonces x es llamado un punto crítico de f y la imagen f(x) es **llamado un valor crítico** así cada $y \in N$ es valor crítico ó un valor regular de acuerdo a como $f^{-1}(y)$ contiene ó no puntos críticos. De la forma local de las submersiones se tiene el teorema:

Teorema 2.1.6 Sea $f : M \to N$ de clase C^r $(r \geq 1)$. Si $q \in N$ es valor regular de f y $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M de clase C^r y codimensión igual a dim(N).

Ejemplo 2.1.5

$S^n = f^{-1}(1)$ donde $f(x_1, \ldots\ldots.., x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$

Ejemplo 2.1.6

Sea M una variedad sin borde y sea $g : M \to \mathbb{R}$ con valor regular en 0 entonces $N = \{x \in M ; g(x) \geq 0\}$ es una variedad diferenciable C^∞ tal que $\partial(N) = g^{-1}(0)$

2.1.3. Transversalidad

Definición 2.1.21 Sean $f: M \rightarrow N$ de clase C^r $(r \geq 1)$ y $S \subset N$ una subvariedad de N. Diremos que f es transversal a S en $x \in M$ si $y = f(x) \notin S$ ó si $y = f(x) \in S$ satisfaciendo la siguiente condición: $T_yN = T_yS + Df(x).(T_xM)$. Cuando f es transversal a S en todos los puntos de M diremos que f es transversal a S.

Teorema 2.1.7 (Caracterización local de las transversalidades)

Sean $f : M^m \rightarrow N^n$ de clase C^r $(r \geq 1)$ y $S^s \subset N$ una subvariedad de clase C^r de N. Sea $p \in M$ con $q = f(p) \in S$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea transversal a S en p es que existan una carta local $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q \in V$, una vecindad U de p en M y una descomposición $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s x \mathbb{R}^{n-s}$ tales que $f(U) \subset V$, $\psi(S \cap V) \subset \mathbb{R}^s x \{0\}$ y una aplicación $\pi_2 \circ \psi \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ una submersión donde $\pi_2 : \mathbb{R}^s x \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ es la segunda proyección.

Ver ([1], Elon Lages Lima, (1982))

Observación 2.1.3

Sean $f : M \rightarrow N$ de clase C^r $(r \geq 1)$ y $S^s \subset N$ una subvariedad de clase C^r de N. Si f es transversal a S y $f^{-1}(S) \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(S)$ es una subvariedad de clase C^r de M siendo la codimensión de $f^{-1}(S)$ igual a la codimensión de S.

Cuando S^s, $M^m \subset N^n$ son dos subvariedades de clase C^r de N, diremos que S intersecta M transversalmente en $x \in S$, si el mergulho $i : S \rightarrow N$, $i(y) = y$ es transversal a M en x.

Equivalentemente $T_xN = T_xM + T_xS$ donde $x \in S \cap M$.

Teorema 2.1.8 (Haz Fibrado) Dados E; B; F variedades diferenciables. Un haz fibrado diferenciable es dado por: $\varepsilon = (E, \pi, B, F)$ donde:

i) $\pi : E \to B$ es proyección diferenciable.

ii) $\exists \{U_\alpha\}$ cubrimiento de B y $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha xF$ son difeomorfismos.

iii) F y la fibra $F_x = \pi^{-1}(x)$ son espacios vectoriales rales ; $\pi\varphi_\alpha^{-1}(b, f) = b$.

iv) $\varphi_{\alpha,x} : F \to F_x$ / $\varphi_{\alpha,x}(f) = \varphi_\alpha^{-1}(x, f)$ isomorfismo lineal.

Para algunos ejemplos ver ([12], W. Geub, (1973)).

Definición 2.1.22 Una **sección transversal** diferenciable de un haz vectorial fibrado E es una aplicación diferenciable $s : B \to E$ / $\pi s = l_B$

Definición 2.1.23 (Haz Fibrado Tangente) Sea M una n-variedad considerar la unión disjunta $TM = \bigcup_{a\in M} T_aM$ y sea $\pi_M : TM \to M$ la proyección tal que $\pi_M(\varepsilon) = a$, $\varepsilon \in T_aM$. Obteniéndose $\tau = (TM, \pi_M, M, lR^n)$ el haz sobre M con fibra en $a \in M$ el espacio T_aM. Este haz es llamado haz fibrado tangente de M.

Para más información ver ([12], W. Geub, (1973)).

Definición 2.1.24 (Haz Fibrado Cotangente) Sea M una n-variedad considerando la unión disjunta $(TM)^* = \cup_{\lambda\epsilon\Delta}(T_aM)^*$ Obteniéndose $\tau_M^* = ((TM)^*, \pi_M^*, M, lR^n)$

el haz sobre M con fibra en $a \in M$ el espacio $(T_aM)^*$. Este haz es llamado haz fibrado cotangente de M.

Observación 2.1.4

Las proyecciones naturales de los haces anteriores están dadas por:

$\pi_M : TM \to M$; $\pi_M(v) = m$ si $v \in T_mM$, $\pi_M^*: (TM)^* \to M$; $\pi_M^*(\tau) = m$ si $\tau \in (TM)^*$

Si $(U, \varphi) \in \Im$ atlas de M con coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ podemos definir:

$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to lR^{2d}$; $\tilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)), \ldots, x_d(\pi(v)), dx_1(v), \ldots, dx_d(v))$; $v \in \pi^{-1}(U)$

$\tilde{\varphi}^*: (\pi^*)^{-1}(U) \to lR^{2d}$; $\tilde{\varphi}^*(\tau) = (x_1(\pi^*(\tau)), \ldots, x_d(\pi^*(\tau)), \tau(\frac{\partial}{\partial x_1}), \ldots, \tau(\frac{\partial}{\partial x_d}))$; $\tau \in (\pi^*)^{-1}(U)$

Así se cumplen:

- Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \Im$ entonces $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}^{-1}$ son C^∞.
- La colección $\{\tilde{\varphi}^{-1}(W)$; W es abierto en lR^d, $(U, \varphi) \in \Im\}$ es una base para la topología sobre TM y será un 2d-dimensional espacio localmente euclidiano 2-contable
- Sea $\tilde{\Im}$ atlas maximal conteniendo $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$; $(U, \varphi) \in \Im\}$ entonces $\tilde{\Im}$ tiene estructura diferencial sobre TM.

2.1.4. Campos vectoriales sobre variedades

Definición 2.1.25 Un campo vectorial X a lo largo de una curva $\alpha : [a, b] \to M$(variedad) es una aplicación $X : [a, b] \to TM$ tal que $\pi_M \circ X = \alpha$, $\pi_M : TM \to M$ la proyección canónica. Ver figura 2.1.5. Además X es C^∞ a lo largo de α si esta es C^∞.

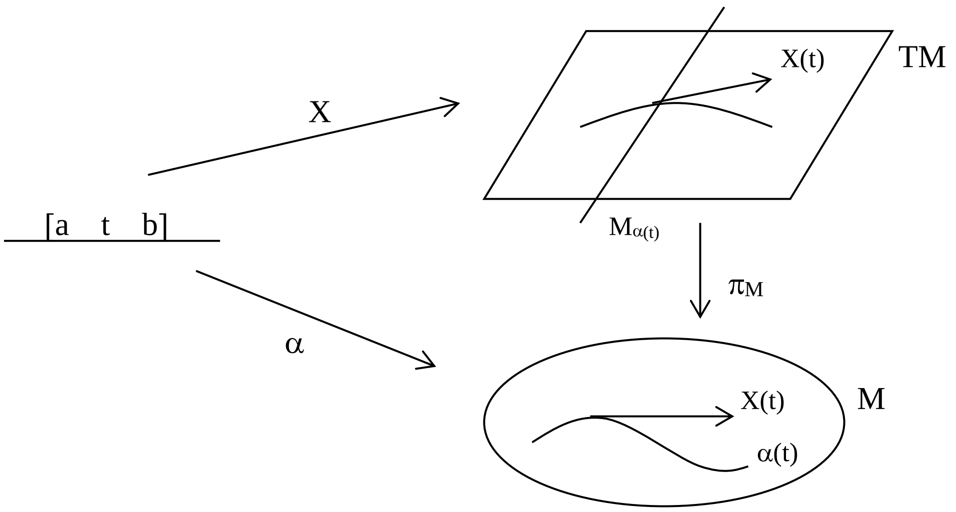


Figura 2.1.4. Campo vectorial a lo largo de una curva

Definición 2.1.26 Un campo vectorial X en un conjunto abierto $U \subset M$ (variedad) es una elevación de U en TM esto es una aplicación $X: U \to TM$ tal que $\pi_M \circ X = l_U$. Si el campo vectorial en $U \subset M$ es C^∞ se dirá que $X \in C^\infty(U, TM)$

En particular si U = M, X es el campo vectorial en M ó sea $\pi_M \circ X = l_M$ y si X es C^∞ entonces $X \in C^\infty(M, TM) = \mathcal{X}(M)$.

Observación 2.1.5

1) $C^\infty(U, TM)$ es un lR-espacio vectorial para lo cuál bastará considerar:

i) $(X+Y)(m) = X(m)+Y(m)$; $\pi_M(X(m)+Y(m)) = m \Rightarrow \pi_M(X+Y) = l_M$

ii) $(\lambda X)(m) = \lambda X(m)$; $\lambda \in lR$, $X \in C^\infty(U, TM)$

2) $C^\infty(U, TM)$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(U)$. Bastará considerar:

$$C^\infty(U) \times C^\infty(U, TM) \to C^\infty(U, TM)$$

$$(f, X) \rightarrow f X \; ; \; f X(m) = f(m) X(m)$$

3) Existe un isomorfismo canónico de $\mathcal{X}(M)$ sobre el $C^\infty(U)$-módulo $Der(C^\infty(U))$ derivaciones lineales $C^\infty(U)$ para lo cual bastará considerar:

$X(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in C^\infty(U)$, $X \in C^\infty(U, TM)$. $M \rightarrow X f(m) = X_m(f)$

4) Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ entonces son equivalentes

i) X es C^∞

ii) Si (U, X) es una carta con coordenadas $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^m$ y si $\{\lambda^i\}$ es la colección de funciones sobre U definida por $X/_U = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ entonces $\lambda^i \in C^\infty(U)$.

iii) Si V(abierto) $\subset M$, $f \in C^\infty(V) \Rightarrow X(f) \in C^\infty(V)$

Ver ([10], Warner, Frank W. (1970))

Definición 2.1.26. Sea X un campo vectorial C^∞ sobre M (variedad). Una curva σ en M de clase C^∞ es una curva integral de X si $\overset{o}{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$ para cada t en dominio de σ.

Observación 2.1.6

Sea X un campo vectorial C^∞ sobre M, $m \in M$. Así se tiene la siguiente interrogante ¿Habrá una única curva integral a través de m?

Si $\gamma : \langle a, b\rangle \to M$ una curva integral de X entonces:

(*) $d\gamma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_t\right) = X(\gamma(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$. En coordenadas se tiene: Si $0 \in \langle a, b\rangle$, $\gamma(0) = m$.

Elegir un sistema de coordenadas (U, φ) con coordenadas $x_1, x_2, ..., x_d$ en m por la observación anterior 2.1.5(ii) se tiene $X/_U = \sum_{i=1}^{d} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ donde f_i es C^∞ sobre U. Además para cada t tal $\gamma(t) \in U$ se tiene $d\gamma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_t\right) = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{d(x_i\gamma)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)}$

Así (*) toma la forma $\sum_{i=1}^{d} \left.\frac{d(x_i\gamma)}{dr}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{d} f_i(\gamma(t)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)}$

Entonces γ es una curva integral de X sobre $\gamma^{-1}(U) \Leftrightarrow \left.\frac{d\gamma_i}{dr}\right|_t = f_i\, \varphi^{-1}(\gamma_1(t), .., \gamma_d(t))$; $i = 1, ..d$, $t \in \gamma^{-1}(U)$; $\gamma_i = x_i\, \gamma$. Pero esta última ecuación da un sistema diferencial de primer orden que satisface el teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales.

2.2 . Integración sobre $\mathbb{R}^n$

2.2.1. Partición de intervalos en $\mathbb{R}^n$

Recuérdese que una partición Q de un intervalo $[a, b] \subset lR$ es una sucesión $t_0, ..., t_k$ donde $a = t_0 \leq t_1 \leq ...... t_k = b$. Esta partición divide el intervalo [a, b] en k subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$.

Análogamente sea una partición $P = (P_1, ..., P_n)$ de un rectángulo $[a_1, b_1]x .... x[a_n, b_n] \subset lR^n$. Donde P_i es una partición que divide el intervalo $[a_i, b_i]$ en N_i subintervalos entonces P divide $[a_1, b_1]x .... x[a_n, b_n]$ en $N = N_1.....N_n$ subrectangulos de la partición.

Supóngase ahora que $A \subset lR^n$ es un rectángulo y $f : A \rightarrow lR$ es una función acotada y P una partición de A para cada sub-rectángulo S de la partición se tiene:

$m_S(f) = \inf\{ f(x) : x \in S \}$, $M_S(f) = \sup\{ f(x) : x \in S \}$.

Luego las sumas inferior y superior de f correspondientes a la partición P están dadas por: $L(f, P) = \sum_S m_S(f)v(S)$, $U(f, P) = \sum_S M_S(f)v(S)$

Donde v(S) es el volumen del rectángulo S. Inmediatamente $L(f, P) \leq U(f, P)$.

Además, si P´ es partición más fina que P (Los sub-rectángulos de P´ están contenidas en P). Entonces $L(f, P) \leq L(f, P')$, $U(f, P') \leq U(f, P)$.

De lo cuál para P, P´ particiones de un rectángulo se tiene $L(f, P') \leq U(f, P)$.

Definición 2.2.1 Dado el rectángulo $A \subset \mathrm{lR}^n$ se dice que una función $f : A \to \mathrm{lR}$ es integrable en A si es acotada y sup{L(f, P)} = inf{U(f, P) }. El número en la igualdad se denota: $\int_A f = \int_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$ denominado integral de f sobre A según Riemman..

En particular para $A \subset \mathbb{R}^2$ denotamos $\int_A f = \iint_A f$

Ejemplo 2.2.1

$f : A \to \mathrm{lR}$ una función constante f(x) = c. Entonces para cada partición P y un sub-rectángulo S se tiene que $m_S(f) = M_S(f) = c$.

Así L(f, P) = U(f, P) = $\sum_S cv(S)$ = cv(A).

Entonces $\int_A f$ = cv(A). Por lo tanto f es integrable

Observación 2.2.1

1.- Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, una condición necesaria y suficiente para que $f : A \to \mathrm{lR}$ sea integrable es que $\forall \varepsilon > 0$ exista una partición P de A tal que U(f, P) – L(f, P) < ε. Se deduce de la definición.

2.-No toda función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathrm{lR}$ es integrable,

$f(x, y) = \begin{cases} 0 & : si\ x\ es\ racional \\ 1 & : si\ x\ es\ irracional \end{cases}$ Si P es una partición entonces cada sub-rectángulo S contiene puntos (x, y) con x racional y también puntos (x, y) con x irracional. Así $m_S(f) = 0$, $M_S(f) = 1$ entonces: $L(f, P) = \sum_S 0v(S) = 0$, $U(f, P) = \sum_S 1v(S) = v([0, 1]x[0, 1]) = 1$

Por lo tanto, f no es integrable.

2.2.2. Medida y contenido cero

Definición 2.2.2 Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tiene medida n-dimensional cero si $\forall \varepsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_i\}$ de A por rectángulos cerrados o abiertos tal que: $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$.

Observación 2.2.2

1.- Si A tiene medida cero y $B \subset A$ entonces B tiene medida cero.

2.- El conjunto de un número finito de puntos tiene medida cero . Así mismo un conjunto ordenado infinito de puntos tiene medida cero ya que este conjunto forma una sucesión $a_1, ..., a_n, ...$ y para cada $\varepsilon > 0$ se puede elegir U_n rectángulo cerrado conteniendo a_n con $v(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

3.- Sí A es unión ordenada de conjuntos de medida cero entonces A tiene medida cero.

Definición 2.2.3 Un subconjunto A de lR^n tiene contenido n-dimensional cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito $\{ U_1, ..., U_n \}$ de A por rectángulos cerrados o abiertos tal que $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$.

Observación 2.2.3

1.- Si A tiene contenido cero es inmediato que A tiene medida cero.

2.- Si a < b entonces $[a, b] \subset$ lR no tiene contenido cero pues si $\{U_1, ..., U_n\}$ es un recubrimiento finito de [a, b] por intervalos cerrados entonces $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) \geq b - a$.

3.- Si A es compacto y tiene medida cero entonces A tiene contenido cero pues dado $\varepsilon > 0$, como A tiene medida cero existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de A por rectángulos abierto tales que $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Ahora como A es compacto un número finito $U_1, ..., U_n$ de los U_i recubren también A entonces: $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$.

4.- Considerando $M(x, f, \delta) = \sup\{f(z) \,;\, z \in A,\ | z-x | < \delta \}$

$$m(x, f, \delta) = \inf\{f(z) \,;\, z \in A,\ | z-x | < \delta \}$$

Se define la **Oscilación** de f en x por: $o(f, x) = \lim_{\delta \to 0} \{M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)\}$

Ahora si A es un rectángulo cerrado y f : A $\to$ lR una función acotada tal que $o(f, x) < \varepsilon$ para todo x $\in$ A. Entonces existe una partición P de A con U(f, P)-L(f, P) < εv(A).

5.- Sea A un rectángulo cerrado, f : A $\to$ lR una función acotada y B = {x ; f no es continua en x}. Entonces f es integrable si solo si B es un conjunto de medida cero. Lo cual se obtiene de (4) y de la observación 2.2.2.

6.- Si C $\subset$ lR^n se define la función característica χ_C de C por $\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin C \\ 1 & ; x \in C \end{cases}$

Ahora dado C $\subset$ A (rectángulo), f : A $\to$ lR función acotada si existe $\int_A f\chi_C$ se define $\int_C f = \int_A f\chi_C$.

7.- La función χ_C : A $\to$ lR es integrable si, y solo si la frontera de C tiene medida cero(por tanto contenido cero). Esto puede ser deducido como sigue:

Si x pertenece al interior de C entonces existe un rectángulo abierto U con x $\in$ U $\subset$ C.

Así χ_C = 1 en U y χ_C es continua en x.

Análogamente si x pertenece al exterior de C existe un rectángulo abierto U con x$\in$U $\subset$ lR^n – C. Por tanto χ_C = 0 en U y χ_C es continua en x.

Si x pertenece a la frontera de C entonces para cada rectángulo abierto U que contiene x existe $y_1 \in U \cap C$ tal que $\chi_C(y_1) = 1$ y existe $y_2 \in U \cap$ (lR^n- C) tal que $\chi_C(y_2) = 0$ entonces χ_C no es continua en x.

Luego $\{x\ ;\ \chi_C$ no es continua en $x\}$ = Frontera de C y el resultado se sigue de la misma observación (5)

8.- Un conjunto C cuya frontera tiene medida cero se denomina medible Jordán.

La integral $\int_C 1$ se denomina contenido (n-dimensional) de C o volumen n dimensional de C. Naturalmente que el volumen 1-dimensional se llama longitud y el 2-dimensional área. Tomar en cuenta aquí que puede haber conjunto abierto C no medible Jordan. Por ejemplo, $C \subset [0, 1]$ el cuál es la unión de intervalos abiertos $\langle a_i, b_i \rangle$ tales que cada número racional de $\langle 0, 1 \rangle$ está contenido en algún $\langle a_i, b_i \rangle$.

Teorema 2.2.1 (De Fubini) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos cerrados y sea $f : AxB \to \mathbb{R}$ integrable. Para $x \in A$ sea $g_x : B \to \mathbb{R}$ definida por $g_x(y) = f(x, y)$ y sean:

$\mathscr{L}(x) = L\int_B g_x = L\int_B f(x,y)dy$, $\mu(x) = U\int_B g_x = U\int_B f(x,y)dy$ extremo superior de las sumas inferiores y extremo inferior de las sumas superiores para g_x respectivamente. Entonces $\mathscr{L}$, μ son integrables en A y

$$\int_{AxB} f = \int_A \mathscr{L} = \int_A (L\int_B f(x,y)dy)dx\ ,\quad \int_{AxB} f = \int_A \mu = \int_A (U\int_B f(x,y)dy)dx$$

donde las integrales del 2do miembro se llaman integrales iteradas de f.

Demostración:

Sean P_A una partición de A y P_B una partición de B obteniendo una partición de P de A x B en la cual cada sub-rectángulo S es de la forma $S_A \times S_B$ donde S_A sub-rectángulo correspondiente a P_A y S_B sub-rectángulo correspondiente a P_B. Así

L(f, P) = $\sum_{S} m_S(f)v(S) = \sum_{S_A,S_B} m_{S_A x S_B}(f)v(S_A x S_B) =$

$$\sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A x S_B}(f)v(S_B)\right)v(S_A)$$

Ahora si x ∈ $S_A \Rightarrow m_{S_A x S_B}(f) \le m_{S_B}(g_x)$

Luego $\sum_{S_B} m_{S_A x S_B}(f)v(S_B) \le \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x)v(S_B) \le L\int_B g_x = \mathscr{L}(x)$

También $\sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A x S_B}(f)v(S_B)\right)v(S_A) \le$ L($\mathscr{L}$, P_A)

Así L(f, P) ≤ L($\mathscr{L}$, P_A) ≤ U($\mathscr{L}$, P_A) ≤ U(μ, P_A) ≤ U(f, P_A)

Ahora como f es integrable sup{L(f, P)} = inf{U(f, P)} = $\int_{AxB} f$

Por lo tanto sup{L(L, P_A)} = inf{U(L, P_A)} = $\int_{AxB} f$. O sea $\mathscr{L}$ es integrable en A

y $\int_{AxB} f = \int_A \mathscr{L}$. La igualdad para μ se deduce análogamente.

Observación 2.2.4

1.- De la misma forma que en el teorema se puede verificar el orden inverso de las integrales iteradas ó sea $\int_{AxB} f = \int_B \left(L\int_A f(x,y)dx\right)dy = \int_B \left(U\int_A f(x,y)dx\right)dy$

2.- El teorema 2.2.1 se puede ver en la figura 2.2.1. Dada la función continua positiva f : [a, b]x[c, d] → lR. Sean t_0, ..., t_n una partición de [a, b] y dividir [a, b]x[c, d] en n bandas por medio de los segmentos (t_i x [c, d]).

Si $g_x(y) = f(x, y)$ entonces el área de la región debajo de f y por encima de

($x \times [c, d]$) es dada $\int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$.

El volumen de la región debajo del gráfico de f y por encima de $[t_{i-1}, t_i]x[c, d]$

es aproximadamente $(t_i - t_{i-1})\int_c^d f(x,y)dy$ para cada $x \in [t_{i-1}, t_i]$ entonces:

$\int\limits_{[a,b]x[c,d]} f = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{[t_{i-1},t_i]x[c,d]} f$ es aproximadamente $\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\int\limits_c^d f(x_i,y)dy$; $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Por otro lado, sumas análogas a esta aparecen en la definición de

$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$.

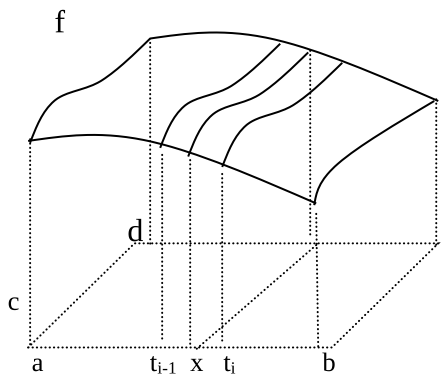


Figura 2.2.1. El teorema de Fubini sobre un rectángulo.

Ahora si $h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$ es razonable esperar que h sea integrable en

[a, b] y que $\int\limits_{[a,b]x[c,d]} f = \int\limits_a^b h = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$. Lo cual resultara cierto si f es

continua, pero en el caso general se tienen dificultades por ejemplo si el conjunto de discontinuidades de la función f es (x_0 x [c, d]), $x_0 \in$ [a, b]. Entonces f resulta integrable en [a, b] x [c, d] pero h(x_0) = $\int_c^d f(x_0, y)dy$ puede no estar definida.

3.- En el teorema de Fubini la mayor irregularidad ocurre cuando g_x no es integrable para un número finito de $x \in A$. En este caso $\mathscr{L}(x) = \int_B f(x,y)dy$ salvo en este número finito de x. Puesto que $\int_A \mathscr{L}$ no se altera si $\mathscr{L}$ se define de nuevo en un número finito de puntos podemos escribir: $\int_{AxB} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy \right) dx$ siempre que $\int_B f(x,y)dy$ se defina arbitrariamente por ejemplo dándole el valor cero cuando no existe.

Sin embargo, hay casos donde esto no se puede hacer por ejemplo:

$$\text{Si } f : [0, 1]x[0, 1] \to \mathbb{R} \;;\quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & ;\ x \text{ es irracional} \\ 1 & ;\ x \text{ es racional, y irracional} \\ 1 - \frac{1}{q} & ;\ x = \frac{p}{q} \text{ irreducible, y racional} \end{cases}$$

entonces f es integrable y $\int_{[0,1]x[0,1]} f = 1$.

Ahora $\int_0^1 f(x,y)dy = 1$ si x es irracional y no existe si x es racional. Por lo tanto h no es integrable si se pone h(x) = $\int_0^1 f(x,y)dx$ igual a cero cuando la integral no existe.

4.- Si A = $[a_1, b_1]$x .... x$[a_n, b_n]$ y f : A $\rightarrow$ lR aplicando repetidamente el teorema

de Fubini se obtiene: $\int_{a_n}^{b_n}\left(\ldots\ldots\ldots\left(\int_{a_n}^{b_1} f(x_1,\ldots\ldots\ldots,x_n)\,dx_1\right)\ldots\ldots\ldots\right)dx_n$

5.- Si C $\subset$ A el teorema de Fubini se puede utilizar para calcular $\int_C f = \int_A \chi_C f$.

Por ejemplo:

Si C = [-1, 1]x[-1, 1]-{(x, y) ; |(x, y)|<1} $\Rightarrow \int_C f = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\chi_C(x,y)dy\right)dx$

Ahora $\chi_C(x, y) = \begin{cases} 1 & ; \text{ Si } y > \sqrt{1-x^2}, y < -\sqrt{1-x^2} \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$

Por lo tanto $\int_{-1}^{1} f(x,y)\chi_C(x,y)dy = \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)dy$

En general si C $\subset$ A x B determinando C $\cap$ ({x} x B), x $\in$A se puede deducir

$\int_C f$. Si se tiene C $\cap$ (Ax{y}), y$\in$B podemos utilizar la integral iterada

$$\int_C f = \int_B\left(\int_A f(x,y)\chi_C(x,y)dx\right)dy$$

2.2.3. Particiones de la unidad

Definición 2.2.4 Sea $\Omega \subset$ lR^n, u : $\Omega \rightarrow$ lK(lR ó $\mathbb{C}$) y S(u) = {x$\in\Omega$/ u(x) $\neq$ 0}

definimos **soporte** de u; Sop(u) = $\overline{S(u)} = \overline{u^{-1}(lK-\{0\})}$ adherencia respecto de

la topología relativa.

Ejemplo 2.2.2

Sea u: $lR^n \to lR$; Ω(abierto) $\subset lR^n$, u(x) = $\begin{cases} 1 & ; x \in \Omega \\ 0 & ; x \notin \Omega \end{cases}$ $\Rightarrow$ Sop(u) = $\overline{\Omega}$

Para el Sop($u/_\Omega$) , se tiene $u/_\Omega : \Omega \to lR$, $u/_\Omega \equiv 1$.

En particular para n = 2 , Ω = B(0,1), u : $lR^n \to lR$, u(x) = $\begin{cases} 1 & ; x \in B(0,1) \\ 0 & ; x \notin B(0,1) \end{cases}$

Sop(u) = $\overline{B(0,1)}$ = $\{x \in lR^2 /\ \| x \| \leq 1\}$. Ver figura 2.2.2

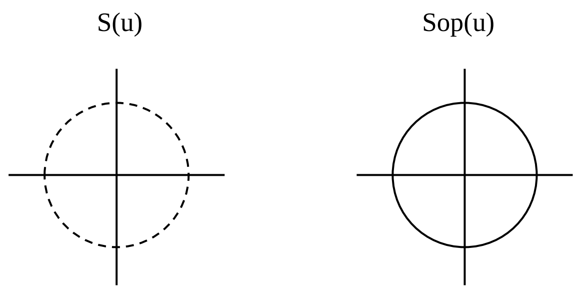


Figura 2.2.2 Soporte de una función.

Observación 2.2.5

1.- Sop(u) es el menor cerrado de Ω fuera del cuál u = 0 en el siguiente sentido:

i) Sop(u) es un cerrado de Ω y u = 0 en Ω-sop(u).

ii) Si X es cerrado en Ω y U = 0 en Ω-X entonces Sop(u) $\subset$X.

Aquí (i) es claro de la definición de sop(u). Por otro lado en (ii) supóngase que X es cerrado y u = 0 en Ω-X así S(u) = $\{x \in \Omega \ /\ u(x) \neq 0\} \subset X$, Sop(u) $\subset \overline{X}$ = X.

2.- u tendrá soporte compacto si sop(u) es compacto.

3.- Sean u, v : $\Omega \to lK$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in lK$ entonces Sop(u+v) $\subset$ Sop(u) $\cup$ Sop(v)

$$\text{Sop}(uv) \subset \text{Sop}(u) \cap \text{Sop}(v)$$

$$\text{Sop}(\lambda u) = \text{Sop}(u).$$

4.- Sean u, v : $\Omega \to$ lK uno de ellos con soporte compacto tal que existe la convolución de u por v ó sea existe $u{*}v = \int_{lR^n} u(x-y)v(y)dy$ entonces $\text{Sop}(u{*}v) \subset \text{Sop}(u) + \text{Sop}(v)$.

5.- Sea f : $lR^n \to$ lK función entonces $\text{Sop}(f^{v}) = -\text{Sop}(f)$, $\text{Sop}(\tau_{x_0} f) = x_0 + \text{Sop}(f)$ donde $f^{v}(x) = f(-x)$ es la simétrica de f , $(\tau_{x_0} f)(x)$ $f(x-x_0)$ es la traslación de f en x_0

6.- f : U $\to$ lK , g : V $\to$ lK entonces $\text{Sop}(f \otimes g) = \text{Sop}(f)x\text{Sop}(g)$ donde $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$ producto directo de f por g.

Para las verificaciones ver([1], Lages Lima Elon, (1982))

Definición 2.2.5 Dada A $\subset lR^n$ una colección $\Phi = \{\varphi$ de funciones definidas en un abierto que contiene A, clase $C^{\infty}\}$ se denomina partición de la unidad para A con funciones C^{∞} si:

i) Para cada $x \in A$ se tiene $0 \le \varphi(x) \le 1$.

ii) Para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto V que contiene x tal que $\varphi = 0$ en V, $\forall \varphi \in \Phi$ excepto un número finito.

iii) Para cada $x \in A$ se tiene $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ (Inmediatamente de (ii) para cada x esta suma es finita en un conjunto abierto que contiene x.) Además esta partición de la unidad Φ se dice que está subordinada a un cubrimiento $\Im$ por abiertos de A si se verifica:

iv) Para cada $\varphi \in \Phi$ existe un conjunto abierto U en $\Im$ tal que $\varphi = 0$ al exterior de un conjunto cerrado contenido en U.

Teorema 2.2.2 Sea $A \subset \mathrm{l R}^n$ y sea $\Im$ un cubrimiento abierto de A. Entonces existe una colección Φ de funciones φ de clase C^∞ definidas en un conjunto abierto que contiene A satisfaciendo: (i), (ii), (iii), (iv) de la definición anterior.

Demostración

Caso I (A compacto)

En este caso un número finito $U_1, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos de $\Im$ cubren A.

Luego será suficiente construir una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{ U_1, \ldots, U_n \}$. Se buscarán primero conjuntos compactos $D_i \subset U_i$ cuyos interiores cubran A. Los D_i se construyen inductivamente como siguen: Supóngase que $D_1, \ldots, D_k$ se han elegido de manera que $\{ int(D_1), \ldots, int(D_k), D_{k+1}, \ldots, D_n \}$ cubran A.

Sea $C_{k+1} = A - \{ int(D_1) \cup \ldots \cup int(D_k) \cup D_{k+1} \cup \ldots \cup D_n \} \Rightarrow C_{k+1} \subset U_{k+1}$ y C_{k+1} es compacto.

Así existe un compacto D_{k+1} tal que $C_{k+1} \subset int(D_{k+1})$, $D_{k+1} \subset U_{k+1}$

Ahora sean ψ_i funciones C^∞ que sean no negativa, positiva en D_i y cero en el exterior de un conjunto cerrado contenido en U_i. Como $\{ D_1, \ldots, D_n \}$ recubre A se tiene $\psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) > 0$ para todo x en un abierto U que contiene A .

U se puede definir tal que $\varphi_i(x) = \dfrac{\psi_i(x)}{\psi_1(x)+.......+\psi_n(x)}$.

Si $f : U \to [0, 1]$ es una función C^∞ que es 1 en A y cero en el exterior de un conjunto cerrado contenido en U entonces $\Phi = \{f\varphi_1, ..., f\varphi_n\}$ es la partición de la unidad deseada.

Caso II:

($A = A_1 \cup A_2 \cup$ .... con A_i compacto, $A_i \subset int(A_{i+1})$) Del caso I aquí también se obtiene partición de la unidad.

Caso III (A es abierto) Bastará aplicar el caso II con $A_i = \{x \in A ; | x | \leq i$, distancia de la frontera de $A \geq 1/i \}$.

Caso IV (A es arbitrario) Sea B la unión de todos los U en $\Im$. Del caso III existe una partición de la unidad para B la cual también será partición de la unidad para A.

Definición 2.2.6 (Partición de unidad sobre variedades) Una partición de la unidad sobre una variedad M es una colección $\{\varphi_i ; i \in I$ (conjunto de índices)$\}$ funciones de clase C^∞ sobre M tal que:

i) La colección de soportes $\{sop(\varphi_i) ; i \in I\}$ es localmente finita. O sea, para cada $m \in M$ hay una vecindad V_m de m tal que $V_m \cap sop(\varphi_i) \neq \phi$ para un número finito de índices i.

ii) $\sum_{i\in I}\varphi_i(p)=1$ para todo p$\in$M, $\varphi_i(p) \geq 0$, i$\in$I. Además, la partición de la unidad $\{\varphi_i\ ;\ i\in I\}$ es subordinada a la cubierta $\{U_j\ ;\ j\in J\}$ de M si para cada índice i existe un índice j tal que sop(φ_i) $\subset U_j$ (puede suceder que I = J).

Observación 2.2.6

1.- Con la condición (ii) en el teorema 4.2.2 sea C compacto incluido en A. Para cada x $\in$ C existe un conjunto abierto V_x que contiene x tal que solo un número finito de $\varphi \in \Phi$ no son cero en V_x . Puesto que C es compacto un número finito de tales V_x recubren C. Así solo un número finito de $\varphi \in \Phi$ no son cero en C.

2.- Las particiones de la unidad nos permiten componer resultados locales para obtener resultados globales. Recordar que $\int_A f$ puede no existir a pesar de ser A un conjunto abierto acotado y {x : f es continua en x} tener medida cero. Ahora bien si A es un conjunto abierto cualquiera, existe ciertamente u recubrimiento abierto $\Im$ de A tal que cada U$\in\Im$ está contenido en A y es medible Jordan(por ejemplo A es unión de rectángulos abiertos). Si $\Im$ es uno de estos recubrimientos y Φ es una partición de la unidad para A subordinada a $\Im$ entonces φf será integrable para cada $\varphi\in\Phi$ se define:

$$\int_A f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi . f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta)$$

(supuesto que esta suma converge, la cual puede converger siendo A, f no acotados)

3.- Si A es acotado , f : A $\rightarrow$ lR es una función acotada, $\{x : f$ es continua en $x\}$ tiene medida cero entonces $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi . f$ converge.

Ver ([9], Spivak. M, (1965)).

4.- Si ϑ' es otro de estos recubrimientos y Φ' es una partición de la unidad subordinada a ϑ' entonces $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi . f = \sum_{\psi\in\Phi'} \int_A \psi . f$

Ver ([9], Spivak. M, (1965)).

5.- Si A es medible Jordan, f : A $\rightarrow$ lR es integrable entonces la definición en (Δ) para $\int_A f$ coincide con la antigua.

2.2.4. Cambio de variable

Recordar que si g : [a, b] $\rightarrow$ lR es función contínua, diferenciable y f : lR $\rightarrow$ lR se sabe $\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f.g).g'$ basta considera f = F´ y los extremos de la igualdad integral coinciden en F(g(b))-F(g(a)). Por otro lado si g es 1-1 contínua se tiene $\int_{g((a,b))} f = \int_{(a,b)} (f.g).|g'|$ bastará considerar g creciente o decreciente.

La generalización se tiene en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.3 Sea A $\subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y g : A $\rightarrow \mathbb{R}^n$ función 1-1 diferenciable con continuidad tal que $\det(g'(x)) \neq 0$ para todo $x\in A$.

Si f : g(A) → ℝ es una función integrable entonces $\int_{g(A)} f = \int_A (f.g).|\det(g')|$

Demostración:

Caso I. Si existe un recubrimiento abierto ϑ de A tal que para U $\in \vartheta$ y f integrable se tiene $\int_{g(U)} f = \int_U (f.g).|\det(g')|$. La colección de todos los g(U) es un recubrimiento g(A). Sea Φ una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento. Si φ = 0 fuera de g(U) entonces puesto que g es 1-1 se tiene (φ.f).g = 0 en el exterior de U. Por lo tanto $\int_{g(U)} \varphi.f = \int_U ((\varphi.f).g).|\det(g')|$ se puede escribir $\int_{g(A)} \varphi.f = \int_A ((\varphi.f).g).|\det(g')|$ entonces :

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{g(A)} \varphi.f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A ((\varphi.f).g)|\det(g')| = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A (\varphi.g).(f.g)|\det(g')|$$

$$= \int_A (f.g).|\det(g')|$$

Caso II. Cuando $\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f.g).|\det(|g'|)|$ donde V pertenece a un recubrimiento de g(A) del caso (I) vemos que el teorema también se cumple.

Caso III. Si f = 1 sea V un rectángulo en g(A) y P una partición de V. Para cada sub-rectángulo S de P sea f_S la función constante considerando $m_S(f)$ se tiene:

$$L(f, P) = \sum_S m_S(f)v(S) = \sum_S \int_{int(S)} f_S = \sum_S \int_{g^{-1}(int(S))} (f_S.g)|\det(g')| \le \sum_S \int_{g^{-1}(int(S))} (f.g)|\det(g')|$$

$$\le \int_{g^{-1}(V)} (f.g)|\det(g')|$$

Como $\int_V f$ es el extremo superior de todas las L(f, P) entonces:

$$\int_V f \leq \int_{g^{-1}(V)} (f.g) |\det(g')|$$

Poniendo $f_S = M_S f$ análogamente se tiene $\int_V f \geq \int_{g^{-1}(V)} (f.g) |\det(g')|$ el teorema se deduce del caso (II) lo cual se cumplirá también cuando f es constante.

Caso IV. Si el teorema es cierto para $g : A \to \mathrm{lR}^n$, $h : B \to \mathrm{lR}^n$ tal que $g(A) \subset B$ entonces :

$$\int_{h.g(A)} f = \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} (f.h) |\det(h')| = \int_A ((f.h).g) \left[|\det(h')| .g \right] . |\det(g')|$$

$$= \int_A (f.(h.g)) |\det(h.g)'|$$

Por tanto el teorema es cierto para $h_o g : A \to \mathrm{lR}^n$

Caso V. Si g es aplicación lineal para cada rectángulo U abierto se tiene:

$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det(g')|$ entonces el teorema se tiene de los casos (I), (II)

Las observación 2.2.6 prueba que se puede suponer que para cada a $\in$ A se tiene que g´(a) es la matriz idéntica pues si T es la aplicación lineal Dg(a) entonces, $(T^{-1}{}_o g)'(a) = 1$. Ahora como el teorema es cierto para T, si es cierto para $T^{-1}{}_o g$ es cierto para g.

Caso(General)

La demostración la haremos por inducción respecto de n. Los casos (I), (II), (III) demuestran el teorema para n = 1.

Ahora supongamos que el teorema se verifica para n-1. Así para cada $a \in A$ bastará encontrar un conjunto abierto U con $a \in U \subset A$ en el cual el teorema es cierto. Además podemos asumir que $g'(a) = I$.

Ahora definiendo $h : A \to \mathrm{lR}^n$ tal que $h(x) = (g_1(x), ..., g_{n-1}(x), g_n(x))$. Entonces $h'(a) = I$ y en un cierto U´ con $a \in U' \subset A$ la función h es 1-1, $\det(h'(x)) \neq 0$ definir ahora $k : h(U') \to \mathrm{lR}^n$ con $k(x) = (x_1, ..., x_{n-1}, g_{n-1}(h^{-1}(x)))$, $g = k_o h$ entonces g puede ser expresado como la composición de dos aplicaciones cada una de las cuales cambia menos de n coordenadas.

Ahora aseguremos que k es una función adecuada .

Como $(g_n h^{-1})'(h(a)) = (g_n)'(a).(h'(a))^{-1} = (g_n)'(a)$ entonces $D_n(g_n.h^{-1})(h(a)) = D_n g_n(a) = 1$. Así en un conjunto abierto V con $h(a) \in V \subset h(U')$ la función k es 1-1 y $\det(k'(x)) \neq 0$.

Tomando $U = k^{-1}(V)$ se tiene ahora $g = k_o h$ donde $h : U \to \mathrm{lR}^n$, $k : V \to \mathrm{lR}^n$ y $h(U) \subset V$. En virtud del caso (III) bastará probar el teorema para h y k. Veamos para h.

Sea W un rectángulo de la forma $D\mathrm{x}[a_n, b_n]$, donde D es un rectángulo en lR^{n-1} por el teorema de Fubini se tiene $\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_{h(D\mathrm{x}\{x_n\})} 1.dx_1 ......dx_{n-1} \right) dx_n$

Sea $h_{x_n} : D \to \mathrm{lR}^{n-1}$ tal que $h_{x_n}(x_1, ..., x_{n-1}) = (g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_n))$

Así cada h_{x_n} es 1-1 y det($(h_{x_n})´(x_1, ..., x_n)$) = det(h´$(x_1, ..., x_n)$) $\neq 0$

Además $\displaystyle\int_{h(Dx\{x_n\})} 1.dx_1......dx_{n-1} = \int_{h_{x_n}(D)} 1dx_1.......dx_{n-1}$. Por inducción

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x_n}(D)} 1.dx_1....dx_{n-1} \right) dx_n = \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D \left| \det(h_{x_n})´(x_1,.....,x_{n-1}) \right| dx_1.....dx_{n-1} \right) dx_n$$

$$= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D \left| \det(h´(x_1,.....,x_n)) \right| dx_1.......dx_{n-1} \right) dx_n = \int_W \left| \det h´ \right|$$

La prueba para k es análoga.

Teorema 2.2.4 (De Sard) Sea g : A $\rightarrow$ lR^n diferenciable con continuidad donde A $\subset$ lR^n es abierto y sea B = $\{x \in A : \det(g´(x)) = 0\}$ entonces g(B) tiene medida cero.

Para la demostración ver ([9], Michael Spivak, (1965))

Observar que en el teorema de Sard podemos deducir el teorema anterior inclusive suprimiendo la condición det(g´(x)) $\neq 0$

2.3 Tensores y formas diferenciales

En esta sección aplicaremos algunos conceptos de Álgebra Multilineal a variedades. Dado V un lR-espacio vectorial, se denotará V* como el espacio dual de V el cual consta de todas las funciones lineales reales evaluadas sobre V.

Definición 2.3.1 Dados V, W espacios vectoriales sobre lR, L espacio vectorial libre sobre lR con generadores en VxW y sea R el subespacio de L generado por los elementos de la forma $\{(v_1+ v_2,w) - (v_1,w) - (v_2,w), (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) + (\alpha v,w) - \alpha (v,w), (v, \alpha w) - \alpha (v,w) ; \alpha \in$ lR, $v_1, v_2, v_3 \in V, w_1, w_2, w_3 \in W\}$ el espacio cociente denotado y definido como $V \otimes W = \dfrac{L}{R}$ es llamado producto tensorial de V y W sus elementos se denotan $v \otimes w$.

Por construcción se tienen: $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

$$\alpha . (v \otimes w) = \alpha v \otimes w = v \otimes aw$$

Ver ([4], Micalli – Villamayor, (1976))

Las siguientes propiedades identifican el producto tensorial

i) (Caracterización Universal del producto Tensorial) Dada la aplicación bilineal $f : V \times W \to V \otimes W$ tal que $(v, w) \to v \otimes w$ entonces para cada espacio vectorial H y $g : V \times W \to H$ aplicación bilineal existe una única aplicación lineal $h : V \otimes W \to H$ que hacen conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \otimes W \arrow[dl, "h"] \\ & H & \end{tikzcd} \quad ; \quad g = h_o f$$

Además $V \otimes W$ y f son únicas que cumplen la condición anterior en el sentido que si T es un espacio vectorial y $f_1 : V \times W \rightarrow T$ es una aplicación con caracterización universal entonces existe un isomorfismo $\alpha : V \otimes W \rightarrow T$ tal que $\alpha_o f = f_1$

ii) $V \otimes W$, $W \otimes V$ son isomorfos.

iii) $V \otimes (W \otimes H)$, $(V \otimes W) \otimes H$ son isomorfos.

iv) Según (i) si Hom(V, W) está constituido por transformaciones lineales, la aplicación bilineal $\beta : V^*\otimes W \rightarrow Hom(V,W)$ tal que $\beta(f, w)(v) = f(v)w$ determina una única aplicación lineal $\alpha : V^*\otimes W \rightarrow Hom(V,W)$ isomorfismo de allí que $\dim V\otimes W = (\dim V)(\dim W)$

v) Sean $\{v_i; i = 1,...,c\}$, $\{w_j; j = 1,...,d\}$ base de V y W respectivamente entonces $\{v_i \otimes w_j ; i = 1,...,c; j = 1,...,d\}$ es base de $V\otimes W$.

Para la verificación de estas propiedades podemos remitirnos a:

([4], Micali – Villamayor, (1976)).

Observación 2.3.1 En muchas aplicaciones el elemento $v \otimes w$ se dice producto tensorial y los vectores v y w toman la forma $v : lR^m \rightarrow lR$ función multilineal llamado tensor de orden (m) = dimV, $w : lR^n \rightarrow lR$ función multilineal llamado tensor de orden (n) = dimW.

Definición 2.3.2 Considerar $\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{\text{m - veces}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{\text{n – veces}} = V_{m,n}$ de tipo (m, n) la suma directa

$E(V) = \Sigma V_{m,n}$ (m, n $\geq$ 0) es llamado el álgebra tensorial de V. Los elementos de E(V) son combinaciones lineales finitas sobre lR de elementos de $V_{m,\,n}$ y son llamados tensores. Observe que $V_{0,0}$ = lR.

E(V) es un álgebra graduada asociativa n–conmutativa con multiplicación $\otimes$

donde si: $u = u_1\otimes\ldots\otimes u_{m_1}\otimes u_1{}^*\otimes\ldots\otimes u_{n_1}{}^*\in V_{m_1,n_1}$,

$v = v_1\otimes\ldots\otimes v_{m_2}\otimes v_1{}^*\otimes\ldots\otimes v_{n_2}{}^*\in V_{m_2,n_2}$ entonces $u\otimes v\in V_{m_1+m_2,\ n_1+n_2}$.

Los espacios tensoriales $V_{m,n}$ son llamados homogéneos de grado (m, n). Un tensor homogéneo de grado (m, n) se dice que es descomponible si se puede escribir como sigue: $v_1\otimes\ldots\otimes v_m\otimes v_1{}^*\otimes\ldots\otimes v_n{}^*$; $v_i\in V$ (i = 1,…, m); $v_j{}^*\in V^*$ (j = 1,…, n).

Definición 2.3.3 Sea $F(V) = \sum_{K=0}^{\infty} V_{k,0}$ sub álgebra de E(V), I(V) el ideal a dos lados en F(V) generado por los elementos de la forma v $\otimes$ v, $v\in V$ y sea $I_k(V) = I(V)\cap V_{k,0}$ se sigue que $I(V) = \sum_{K=0}^{\infty} I_k(V)$ es ideal de F(V).

Así el **álgebra exterior graduada de V** es dada por $\Lambda(V) = \dfrac{F(V)}{I(V)}$.

Si $\Lambda_k(V) = \dfrac{V_{k,0}}{I_k(V)}$; $k\geq 2$, $\Lambda_0(V)$ = lR ; $\Lambda_1(V)$ = V. Entonces $\Lambda(V)=\sum_{K=0}^{\infty}\Lambda_{k,0}$.

El producto en $\Lambda(V)$ es denotado ($\wedge$) “producto exterior(cuña)” y la clase de $[v_1\otimes\ldots\otimes v_k]$ es dada por $v_1\wedge\ldots\ldots\wedge v_k$.

Definición 2.3.4 Una aplicación multilineal h : V×…×V → W es llamada alternada si $h(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sig}(\sigma)h(v_1\ldots v_n)$; $v_1, \ldots, v_n \in V$ y σ es una permutación en S_n, sig(σ) = +1 (σ par), sig(σ) = –1 (σ impar).

El espacio vectorial de aplicaciones multilineal alternadas $h : \underbrace{V\times\ldots\times V}_{n-\text{veces}} \to \mathbb{R}$ es denotado $A_n(V)$ y convencionalmente $A_0(V) = \mathbb{R}$.

Propiedades análogas a producto tensorial se tiene en álgebra exterior.

i) Si $u\in\Lambda_m(V)$, $v\in\Lambda_n(V)$ entonces $u\wedge u = 0$, $u\wedge v\in\Lambda_{m+n}(V)$ y $u\wedge v = (-1)^{m\,n}\, v\wedge u$.

ii) Si $\{e_1,\ldots, e_d\}$ es una base de V entonces $\{e_\phi\}$ es una base de Λ(V) donde φ recorre los conjuntos de {1,…,d} incluyendo el conjunto vacío y $e_\phi = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}$ con $i_1<\ldots<i_r$, aqui φ es el subconjunto $\{ i_1,\ldots, i_r \}$ de {1,…,d} y $e_\phi = 1$ cuando φ = ø . La base de $\Lambda_d(V)$ consta de combinaciones de d en d elementos ⇒ $\Lambda_d(V) \cong \mathbb{R}$. Además dim $\Lambda(V) = 2^d$, $\dim\Lambda_k(V) = \dfrac{d!}{k!(d-k)!}$ $0 \le k \le d$. En particular $\Lambda_{d+j}(V) =\{0\}$; j > 0.

iii) (Caracterización Universal del producto Exterior) Dada f aplicación multilineal alternada:

f: V×…×V → $\Lambda_k(V)$; $(v_1, \ldots, v_k) \to v_1\wedge \ldots \wedge v_k$. Entonces para cada espacio vectorial H y cada aplicación multilineal alternada g: V×…×V → H hay una única aplicación lineal h : $\Lambda_k(V)$ → H que hace conmutar el siguiente diagrama .

$$\begin{tikzcd} V\times\ldots\times V \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & \Lambda_k(V) \arrow[d, "h"] \\ & H \end{tikzcd} \quad ; \quad h_o f = g$$

También aquí el par $(f, \Lambda_k(V))$ es única en el sentido que si $f_1: Vx...xV \to T$ es aplicación multilineal alternada con la caracterización universal exterior existe un único isomorfismo $\alpha: \Lambda_k(V) \to T$ talque $\alpha\ _o\, f = f_1$

Para la verificación de estas propiedades podemos remitirnos a:

([4], Micali-Villamayor, (1972)).

Definición 2.3.5 Sean V, W espacios vectoriales reales finito dimensionales. Un pareamiento de V y W es una aplicación bilineal $(\ ,\ ) : VxW \to$ lR. Este pareamiento será llamado no singular si para $w \neq 0$ en W existe un elemento $v \in V$ tal que $(v, w) \neq 0$ y cuando $v \neq 0$ existe un elemento $w \in W$ talque $(v, w) = 0$.

Sean V, W pareados no singularmente por $(\ ,\ )$ y definiendo $\varphi : V \to W^*$ tal que $\varphi(v)(w) = (v, w)$; $v \in V$, $w \in W$. Se sigue que φ es inyectiva, similarmente la aplicación $W \to V^*$ es inyectiva. Por lo tanto V y W tienen la misma dimensión y φ será isomorfismo.

En particular el pareamiento no singular de $(V^*)_{r,s}$ con $V_{r,s}$; $(V^*)_{r,s} x V_{r,s} \to$ lR donde si:

$v^* = v_1^* \otimes ...... \otimes v_r^* \otimes u_{r+1} \otimes ...... \otimes u_{r+s} \in (V^*)_{r,s}$,$u = u_1 \otimes ..... \otimes u_r \otimes v_{r+1}^* \otimes ...... \otimes u_{r+s}^* \in V_{r,s}$

se obtiene $(v^*, u) = v_1^*(u_1) .... v_{r+s}^*(u_{r+s})$

Observación 2.3.2

1) En el caso especial cuando H = lR el diagrama triangular anterior establece el siguiente isomorfismo natural: $\Lambda_{k}(V)^{*} \cong A_{k}(V)$

La definición (2.3.5) establece los isomorfismos:

$(V^{*})_{r,s} \cong (V_{r,s})^{*} \cong M_{r,s}(V)$ donde $M_{r,s}(V)$ es espacio vectorial de funciones multilineales $\underbrace{Vx \ldots\ldots xV}_{\text{r-veces}} \underbrace{xV^{*} \ldots\ldots xV^{*}}_{\text{s-veces}} \to \mathbb{R}$

Así mismo $\Lambda_{k}(V)^{*} \cong A_{k}(V)$, $\Lambda_{k}(V^{*}) \cong \Lambda_{k}(V)^{*}$, $\Lambda_{k}(V^{*}) \cong A_{k}(V)$

$$\Lambda(V^{*}) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_{k}(V^{*}) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_{k}(V)^{*} \cong \Lambda(V)^{*} \cong A(V) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k}(V)$$

Pueden ser vistos en ([10], Frank W. Warner, (1970))

2) Si $\{ e_1,\ldots, e_n \}$ es base de V dual a $\{ \gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n \}$ en V^{*} entonces las bases $\{e_{\phi}\}$ y $\{\gamma_{\phi}\}$ serán bases duales de $\Lambda(V)$ y $\Lambda(V^{*})$ por los últimos isomorfismos de allí mismo también se obtiene: $\Lambda(V^{*}) \cong \Lambda(V)^{*} \cong A(V)$.

3) Dado V espacio vectorial n-dimensional y sea l transformación lineal sobre V, de la propiedad (ii), anterior se tiene $\Lambda_{n}(V)$ es 1-dimensional y la transformación lineal inducida por él, es la multiplicación por una constante sobre $\Lambda_{n}(V)$.

Se define el determinante de l por esta constante. Si A es la Matriz de 1 respecto de la base $v_{1\ldots}v_{n}$ entonces el det l = det A.

Así el detA no depende de la elección de la base elegida. Además, se cumple

detA= $\sum_{\pi}(Sig\pi)\, a_{1\pi(1)},\ldots, a_{1\pi(n)}$, A = (a_{ij}); π permutaciones n-números

$$\det AB = \det A \,.\, \det B$$

4) Dado V espacio vectorial n–dimensional con producto interno. Se extiende este producto interno a los elementos de $\Lambda(V)$ donde el producto interno de elementos homogéneos de diferentes grados es cero. Ahora si $<w_1\wedge\ldots\wedge w_p, v_1\wedge\ldots\wedge v_p> = \det<w_i, v_j>$. Si $e_1,\ldots, e_n$ es una base ortonormal de V entonces la base $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}$ es base ortonormal de $\Lambda(V)$. Asimismo $\Lambda_n(V)$ es 1- dimensional y $\Lambda_n(V)$-{0} tiene dos componentes . Una orientación sobre V es una elegida de una componente de $\Lambda_n(V)$-{0}. Si V es un espacio con producto interno orientado entonces la transformación lineal estrella $*: \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V)$ existe (esta bien definida) tal que para toda base ortonormal $\{e_1,\ldots\ldots, e_n\}$de V (y cualquier reordenamiento)

$*(1) \pm= e_1 \wedge\ldots\ldots\wedge e_n$, $*(e_1\wedge\ldots\ldots\wedge e_n) = \pm 1$

$*(e_1\wedge\ldots..\wedge e_p) = \pm\, e_{p+1}\wedge\ldots\ldots\wedge e_n$ donde el signo (+) corresponde a que $e_1\wedge\ldots\wedge e_n$ esta en la componente de $\Lambda_n(V) - \{0\}$ determinado por la orientación y (-) de otro modo.

$* : \Lambda_p(V) \rightarrow \Lambda_{n-p}(V) : *(e^{\sigma(1)}\wedge\ldots..\wedge e^{\sigma(p)}) = c_{\sigma(1)} \ldots. c_{\sigma(p)}\, Sig(\sigma)(e^{\sigma(p+1)}\wedge\ldots\wedge e^{\sigma(n)})$

Donde $\{e_1,\ldots\ldots, e_n\}$ es base orientable de V y $\{e^1,\ldots\ldots, e^n\}$ es base dual

Inmediatamente se tiene $** = (-1)^{p(n-p)}$

Además si v , w $\in \Lambda_p(V)$ entonces $<v,w> = *(w\wedge *v) = *(v\wedge *w)$,

$<v,w>\mu = (v \wedge {}^*w)$: μ es elemento de volumen respecto del producto interno.

Ver: ([10], Frank W. Warner, (1970)) , ([11], R. Abraham, (1988))

2.3.1. Campos tensoriales y formas diferenciales.

Definición 2.3.6 Dada M una variedad diferenciable los siguientes haces:

$T_{r,s}M = \bigcup_{m \in M}(T_mM)_{r,s}$ es llamado haz tensorial del tipo (r,s) sobre M.

$\Lambda_k^*M = \bigcup_{m \in M}\Lambda_k(T_mM)^*$ es llamado haz k-exterior sobre M.

$\Lambda^*M = \bigcup_{m \in M}\Lambda(T_mM)^*$ es llamado haz álgebra exterior sobre M.

Observación 2.3.3

Si (U, φ) es un sistema coordenado centrado en $m \in M$ con funciones coordenadas $y_1 \ldots y_d$ entonces las bases $\{\partial/\partial y_i\}$ de T_mM y $\{dy_i\}$ de $(T_mM)^*$ producen bases de $(T_mM)_{r,s}$, $\Lambda_k(T_mM)^*$ y Λ $(T_mM)^*$ por ejemplo la bases de $\Lambda_k(T_mM)^*$ es $\{dy_{i1} \wedge \ldots \wedge dy_{ik};\ i_1 < \ldots < i_k\}$.

Usando esta base se puede definir aplicaciones de las imágenes inversas de U en $T_{r,s}M$, Λ_k^*M, Λ^*M bajo las respectivas aplicaciones proyección a $\varphi(U)$ x (Espacios Euclidianos con sus dimensiones).

Cuando estas aplicaciones sean sistemas coordenadas, se tiene la estructura natural de variedad en $T_{r,s}M$, Λ_h^*M, Λ^*M como se dio para TM y (TM)*.

Definición 2.3.7 Las aplicaciones C^∞ ; $M \to T_{r,s}M$, $M \to \Lambda^*_kM$, $M \to \Lambda^*M$ cuya composición con la proyección canónica es la aplicación identidad son llamadas **campo tensorial C$^\infty$** del tipo (r, s) en M **, k-forma C$^\infty$** en M y **forma C$^\infty$** en M respectivamente.

Como nuestros campos tensoriales y formas diferenciales serán C$^\infty$ omitiremos C$^\infty$.

Observación 2.3.4

Una elevación α: M $\rightarrow$ $T_{r,s}M$ es un campo Tensorial C$^\infty$ de tipo (r, s) si solamente si para cada sistema coordenado (U, $y_1,\ldots,y_d$) en M se tiene que:

$$\alpha/_U = \sum a_{i_1,\ldots\ldots i_r\,;\,j_1,\ldots\ldots j_s} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y_{i_r}} \otimes dy_{j_1} \otimes \ldots\ldots \otimes dy_{j_s}\ ;\ a_{i_1,\ldots\ldots i_r\,;\,j_1,\ldots\ldots j_s}$$ es C$^\infty$(U).

Es usual denotar $\alpha/_U = \sum a^{i_1,\ldots\ldots,i_r}_{j_1,\ldots\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots\ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \ldots\ldots \otimes dy^{j_s}$

Por otro lado una elevación β : M $\rightarrow$ Λ_k^* M es una k - forma diferencial si solamente si para cada sistema coordenado (U, $y_1,\ldots.,y_d$) en M se tiene:

$\beta/_U = \sum_{i_1<\ldots.<i_k} b_{i_1,\ldots\ldots,i_k} dy_{i_1} \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dy_{i_k}$ Donde las $b_{i_1,\ldots\ldots i_k}$ son funciones C$^\infty$ en U.

Notación: E^k M es el conjunto de k- formas C$^\infty$ en M

E^*M es el conjunto de formas diferenciales

Observación 2.3.5

E^oM puede ser identificado con $C^\infty(M)$, aquí la variedad diferenciable $\Lambda_0{}^*M$ es simplemente $M\times\mathbb{R}$ y las elevaciones C^∞ de M en M x lR son los gráficos C^∞ en M.

Se puede agregar formas, multiplicando por escalares dando un producto($\wedge$).

Si ω, $\varphi \in E^*M$, $c\in$lR entonces $\omega+\varphi$, $c\omega$, $\omega\wedge\varphi$ son las formas que en m toman los valores $\omega_m+\varphi_m$, $c\omega_m$ y $\omega_m\wedge\varphi_m$ respectivamente.

En el caso que f es una 0- forma y $\omega \in E^*M$ escribimos $f\wedge\omega = f\omega$, y con lo cual E^*M tiene estructura de modulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ y de álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$ con multiplicación cuña.

Observación 2.3.6

Sea $\omega\in E^kM$ entonces $\omega_m\in\Lambda_k(T_mM)^*$ y puede ser considerada (por dualidad) como una función multilineal alternante en T_mM. Si $X_1, X_2,\ldots,X_k$ son campos vectoriales en M entonces $\omega(X_{1,\ldots\ldots}, X_n)$ tiene sentido, es la función cuyo valor en m es:

$$\omega(X_{1,\ldots\ldots,}X_k)(m) = \omega_m(X_1(m),\ldots.., X_k(m))\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Si Ж(M) denota el C(M) – modulo de campos vectoriales C^∞ en M entonces

$$\omega : Ж(M) \text{ x } \ldots.\text{x } Ж(M) \to C^\infty(M)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Es una aplicación multilineal alternante de el modulo Ж(M) en $C^\infty(M)$.

La multilinealidad sobre el $C^\infty(M)$-módulo Ж(M) es dada por:

ω ($X_{i,\ldots\ldots,}$ $X_{i-1,}$ f X + gY , $X_{i+1},\ldots, X_k$) = f $\omega(X_1,\ldots X_{i-1,} X, X_{i+1},\ldots, X_k)$ +

$g\omega(X_1,\ldots X_{i-1,}Y,X_{i+1},\ldots,X_k)$ .... (3)

Cuando f , g $\in C^\infty(M)$, $X_1,\ldots\ldots, X_{i-1,} X, Y, X_{i+1},\ldots\ldots,X_n \in$ Ж(M).

Por otro lado, es útil observar que cualquier aplicación multiplicación C^∞ alternante (2) del módulo Ж(M) en $C^\infty(M)$ define una forma. Para lo cual si ω es una tal aplicación entonces ω ($X_{1,\ldots\ldots,}$ $X_k)(m)$ depende solamente en los valores de los campos vectoriales X_i en M . Así ω define una función multilineal alternante ω_m en T_mM, esto define un elemento de $\Lambda_k(T_mM)^*$ Dado por $(v_1,\ldots, v_k)\in T_m M\times\ldots\times T_mM$ eligiendo $V_1,\ldots.V_k \in$ Ж(M) tal que $V_i(m)= v_i$, (i =1,….,k) y definiendo

$$\omega_m(v_1,\ldots, v_k) = \omega(V_1,\ldots V_k)(m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Por lo que se quiere que $\omega_m(v_1,\ldots, v_k)$ este bien definido independientemente de la elección de las extensiones V_i. Así ω da una elevación $m \to \omega_m$ de M en Λ^*M y se sigue que esta es C^∞ , de aquí que ω es una forma.

Ilustramos cuando ω es una aplicación lineal del módulo Ж(M) en $C^\infty(M)$. Sea X un elemento de Ж(M) se quiere probar que $\omega(X)(m)$ depende solamente de X(m).

Es suficiente probar que $\omega(X)(m) = 0$ si $X(m) = 0$

Sea $(U, X_1,\ldots,X_d)$sistema coordenado m entonces:

$X = \sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})$ en U donde $a_i(m) = 0$

Ahora sea φ una función C^∞ que toma el valor uno, en una vecindad $V \subset U$ de m y es cero en una vecindad en M-U. Entonces el campo vectorial X_i que es $\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})$ en U y cero en otra parte perteneciendo a $C^\infty(M)$ y

$$X = \sum \tilde{a_i}\ X_i + (1 - \varphi^2)\, X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\omega(X)(m) = \sum \tilde{a_i}\ (m)\ \omega(X_i)(m) + ((1 - \varphi^2)(m))(\ \omega(X)m) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Finalmente, por dualidad a los campos tensoriales se da una interpretación análoga. Si T es un campo tensorial del tipo (r,s) entonces podemos considerar T como una aplicación: $T: E^1M \wedge \ldots\ldots \wedge E^1M \times Ж(M) \times \ldots\ldots \times Ж(M) \to C^\infty(M) \ldots\ldots (7)$

Que es $C^\infty(M)$-multilineal con respecto al $C^\infty(M)$-modulo $E^1(M)$ y Ж(M). Cuando $\omega, \varphi \in E^1(M)$; $X, Y \in Ж(M) \Rightarrow \omega\wedge\varphi\ (X, Y) = \omega(X)\ \varphi(Y) - \omega(Y)\varphi(X) \ldots.$ (8)

Definición 2.3.8 (formas invariantes) Una forma diferencial ω sobre un grupo de Lie G es llamada invariante izquierda si $\delta L_a(\omega) = (L_a)^*\omega = \omega$ para todo $a \in G$.

Observación 2.3.7

1) Según la definición las formas invariantes a izquierda son diferenciables de clase C^∞.

2) Denotando $E^p_{inv}(G)$ como el conjunto de las formas invariantes a izquierda entonces $E^*_{inv}(G) = \sum_{p=0}^{dim(G)} E^p_{inv}(G)$ es sub-algebra de $E^*(G)$. Así la aplicación de $E^*_{inv}(G)$ sobre $\Lambda(T_eG)^*$ dada por $\omega \to \omega(e)$ es un isomorfismo de álgebras. En particular esta aplicación da un isomorfismo natural $E^1_{inv}(G) \cong (T_eG)^* \cong \vartheta^*$(Con lo cual se puede considerar $E^!_{inv}(G)$ como el espacio dual del álgebra de Lie de G).

Además, si ω es una 1-forma invariante a izquierda y X es un campo vectorial invariante a izquierda entonces $\omega(X)$ es una función constante sobre G, cuando ω es considerada como un elemento del espacio dual de ϑ dado en el isomorfismo

$E^1_{inv}(G) \cong \vartheta^*$

Ver: ([10], Frank W. Warner, (1970)).

Definición 2.3.9 Si $f \in C^\infty(M)$ la diferencial df es una aplicación C^∞ de T(M) en lR que es lineal en cada espacio tangente. Así df puede ser considerada como una 1-forma; $df : M \to \Lambda^*M$ llamada **derivada exterior** de la 0-forma f y este operador de diferenciación exterior d tiene una extensión a E*M dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1(Diferenciación exterior)

Existe una única antiderivación d: $E^*M \to E^*M$ de grado 1 tal que $d^2 = 0$. Veamos:

i) Cuando $f \in C^\infty(M) = E^oM$ entonces df es la diferencial de f

Aquí para $f : lR^n \to lR$ se tiene $Df(p) \in \Lambda_1(lR^n)$. Así df será la 1-forma;

$$df(p)(v|_p) = Df(p)(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i D_i f(p) = \sum_{i=1}^{n} dx_i(p)(v|_p) D_i f(p)$$

$$\text{O sea } df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

ii) Dado $p \in M$ y $E^*(p)$ el conjunto de todas las formas definidas sobre un subconjunto abierto de M. Así fijando un sistema de coordenadas $(U, x_1,...,x_k)$ en p. Si $\omega \in E^*(p)$ entonces:

$$\omega|_{(\text{dominio de } \omega) \cap U} = \sum a_\Phi dx_\Phi \quad \text{donde: } a_\Phi \in C^\infty (\text{dominio de } \omega) \cap U),$$

$\Phi = \{1, ..., k\}$ tal que: $dx_\Phi = \begin{cases} dx_{i_1} \wedge ....\wedge dx_{i_r} & ; \Phi = \{i_1 < .... < i_r\} \\ 1 & ; \Phi = \phi \end{cases}$

iii) $d\omega_p = \left(\sum da_\Phi\big|_p \wedge dx_\Phi\big|_p\right) \in \Lambda(T_pM)^*$

Sí $\omega = f.dx_1\wedge ...\wedge \hat{dx_j} ...\wedge dx_k \in E^*(p) \Rightarrow d\omega = (1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1\wedge ...... \wedge dx_k$

Ahora es fácil verificar $d^2 = 0$. Basta verificar para 0-formas.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ entonces $d^2(f) = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) = 0$

iv) $\omega \in E^r(p)$ entonces $d\omega_p \in \Lambda_r(T_pM)^*$

v) $d(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)|_p = a_1(d\omega_1)|_p + a_2(d\omega_2)|_p$

vi) $d(\omega_1 \wedge \omega_2)|_p = d\omega_1|_p \wedge \omega_2|_p + (-1)^r \omega_1|_p \wedge d\omega_2|_p$

También aquí para 0-formas se tiene directamente derivada del producto.

Si $\omega_1 = \Sigma\, g_i\, dx_{i_1} \wedge .....\wedge dx_{i_r}$, r-forma y $\omega_2 = \Sigma\, h_j\, dx_{j_1} \wedge .....\wedge dx_{j_q}$, q-forma

Por linealidad basta considerar $\omega_1 = g_i\, dx_{i_1} \wedge ......\wedge dx_{i_r}$,

$$\omega_2 = h_j\, dx_{j_1} \wedge ......\wedge dx_{j_q}$$

Entonces $\omega_1 \wedge \omega_2 = g_i\, h_j\, dx_{i_1} \wedge ....\wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge ....\wedge dx_{j_q}$

Entonces $d(\omega_1 \wedge \omega_2)|_p = d\omega_1|_p \wedge \omega_2|_p + (-1)^r \omega_1|_p \wedge d\omega_2|_p$

Ver: ([10], Frank W. Warner, (1970))

Multiplicación Interior por Campos Vectoriales.

Sea X un campo vectorial C^∞ en M y sea $\omega \in E^*M$ la multiplicación de ω por X es la forma $i(X)\omega$ cuyo valor en m es la multiplicación interior de ω_m por X_m y $(i(X)\omega)/_m = i(X_m)(\omega_m)$ además $i(X)\omega$ es C^∞ y $i(X) : E^*M \to E^*M$ es anti-derivación de grado(-1).

EFECTO DE APLICACIONES

Sea Ψ: M $\to$ N una aplicación de clase C^∞ y sea $m \in$ M obteniéndose la diferencial $d\Psi: T_mM \to T_{\Psi(m)}N$; $d\Psi(v)(f) = v(f\Psi)$ su transpuesta $\delta\Psi: (T_{\Psi(m)}N)^* \to (T_mM)^*$; $\delta\Psi(\gamma)(v) = \gamma\,(d\Psi(v))$ y el homomorfismo de álgebras inducido:

$\delta\Psi : \Lambda(T_{\Psi(m)}N)^* \to \Lambda(T_mM)^*$. Si ω es una forma en N, entonces podemos llevar ω hacia una forma en M por $\delta\Psi(\omega)/_m = \delta\psi(\omega/_{\Psi(m)})$ que identifica las formas diferenciales como sigue:

$\delta\Psi(\omega)(m)(v_1, ..., v_k) = \omega(\psi(m))((D\psi(v_1))|_{\psi(p)}, ..., (D\psi(v_k))|_{\psi(p)})$

Así $\delta\Psi(dx_i)(m)(v|_m) = dx_i(\psi(m))(D\psi(m)(v)|_{\psi(m)})$

$$= dx_i(\psi(m))\left(\sum_{j=1}^{k} v_j D_j\psi_1(m), ..., \sum_{j=1}^{k} v_j D_j\psi_k(m)\right)\Bigg|_{\psi(m)}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} v_j D_j\psi_i(m) \;=\; \sum_{j=1}^{k} D_j\psi_i(m).dx_i(m)(v|_m)$$

Por lo tanto $\delta\Psi(dx_i) = \sum_{j=1}^{k} D_j\psi_i(m).dx_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}.dx_i$

Teorema 2.3.2 Sea Ψ: M $\to$ N , φ : N $\to$ P aplicaciones C^∞ entonces.

a) $\delta\Psi$: $E^*N \to E^*M$ es un homomorfismo de álgebras.

$\delta\Psi(\omega_1 + \omega_2) = \delta\Psi(\omega_1) + \delta\Psi(\omega_2)$, $\delta\Psi(\omega_1 . \omega_2) = \delta\Psi(\omega_1) . \delta\Psi(\omega_2)$, $\delta\varphi_o\psi = \delta\psi_o\delta\varphi$

Además si g es función diferenciable C^∞ en M entonces $\delta\Psi(g.\omega) = (g_o\omega)\delta\Psi(\omega)$

En particular si f $\in C^\infty(N)$ entonces $\delta\Psi(g) = (g_o\Psi) \in C^\infty(M)$.

b) δ conmuta con d : esto es $d(\delta\Psi(\omega)) = \delta\Psi(d\omega)$; $\omega \in E^*N$

De aquí si ω es una forma invariante a izquierda($\delta L_a(\omega) = \omega$) entonces también lo es $d\omega$ pues $\delta L_a(d\omega) = d(\delta L_a(\omega)) = d\omega$

c) $\delta\Psi(\omega)(X_1,.., X_n)(m) = \omega_{\Psi(m)}(d\Psi(X_1(m)),...,d\Psi(X_k(m)))$; $\omega \in E^*N$, X_i, campos en M.

Ver: ([10], Frank W. Warner, (1970))

2.3.4. La derivada de lie

La derivada de Lie es definida como sigue: Fijemos un Campo vectorial X, clase C^∞ en una variedad M, X_t denota el grupo a 1-parámetro local de transformaciones asociados en X.

Sea Y otro campo vectorial C^∞ en M definiremos la derivada de Y respecto de X en el punto $m \in M$. Primero seguiremos la curva integral de X a través de m fuera del punto $X_t(m)$ y evaluando allí Y . Luego transferimos $Y_{X_t(m)}$ hacia T_mM sea la diferencial dX_{-t} del difeomorfismo X.

En T_mM tomamos la diferencial de los vectores $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ y Y_m dividimos la diferencia por t y luego tomamos limite cuando $t \to 0$.

En otras palabras consideremos la función de los vectores C^{∞} . (T_mM)-valuada, $t \to dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ y tomamos su derivada en t = 0 . Ver figura 2.3.1

El resultado es un vector en T_mM que es llamado la derivada de Lie de Y respecto de X en m denotada por:

$$(L_XY)_m = \lim_{t \to 0} dX_{-t} \frac{(Y_{X_t}(m)) - Y_m}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(m)}))$$

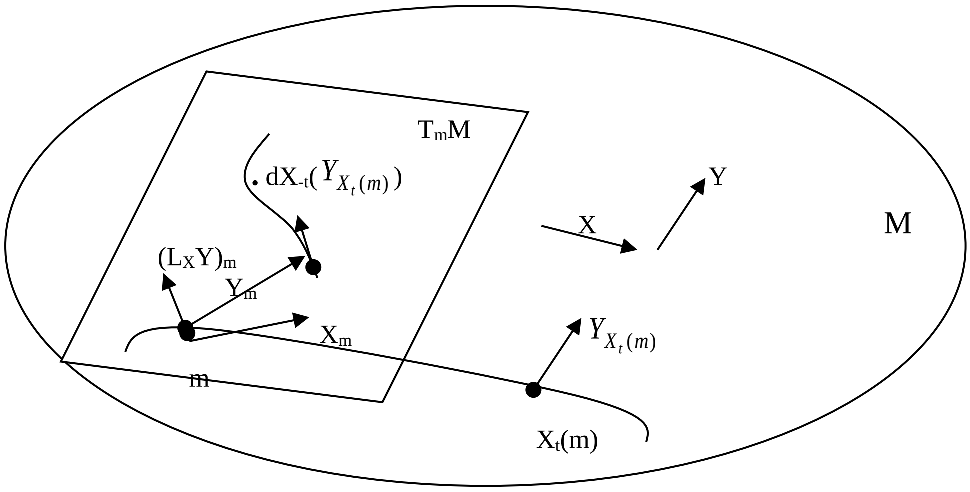


Figura 2.3.1 La derivada de Lie

De la misma forma definimos la derivada de Lie de una forma diferencial ω con respecto al campo vectorial X, excepto que en este caso evaluamos ω en X_t (m)Y llevamos δX_t al dual $\Lambda(T_mM)^*$ donde tomamos la diferencia con ω(m) dividimos por t cuando $t \to 0$.

Tenemos: $(L_X\omega)_m = \lim_{t\to 0} \frac{\partial X_t(\omega_{x_t(m)}) - \omega_m}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\partial x_t(\omega_{x_t(m)})$ Por construcción $L_X\omega$ y L_XY son diferenciables la definición de Lie L_X puede ser extendida a campos tensoriales arbitrarias en forma análoga. Si T es un campo tensorial del tipo (r,s) entonces$(L_XT)_m$ es la derivada en t = 0 de la definición $((T_mM)_{(r,s)})$-valuada cuyo valor en t es $dX_{-t}(v_1 \otimes .....\otimes v_n)\otimes\delta\, X_t(v_1^* \otimes .....\otimes v_s^*)$ si

$$T\Big|_{X_t(m)} = v_1 \otimes .....\otimes v_n \otimes v_1^* \otimes .....\otimes v_s^*$$

Teorema 2.3.3 Sea X campo vectorial C^∞ en M entonces:

i) $L_Xf = X(f)$ cuando $f\in C^\infty(M)$

ii) $L_XY = [X,Y]$ para cada campo vectorial C^∞ , Y en M.

iii) $L_X : E^*M \rightarrow E^*M$ es una derivación la cual conmuta con d.

iv) Sobre E*M se tiene $L_X = i(X).d + d.i(X)$

v) Sea $\omega\in E^pM$ y sean $Y_0,\ldots,Y_p$ campos vectoriales C^∞ en M. Entonces:

$$L_{Y_0}(\omega(Y_1,....,Y_r)) = (L_{y_0}\omega)(Y_1,....,Y_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(Y_i,....,Y_{I-1}, L_{Y_0}Y_i, Y_{I+1},.....,Y_p)$$

vi) Como en (v) $d\omega(Y_0,\ldots,Y_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} Y_i\,\omega(Y_0,...,Y_i,....,Y_P) + \sum_{i<j} (-1)^{i+1}\omega([Y_i,Y_j], \hat{Y}_0,....,\hat{Y}_i,.....,Y_r)$

Ver: ([10], Frank W. Warner, (1970))

2.4. Integración de n-formas sobre cadenas

En esta sección veremos la integración de p-formas sobre p-cadenas singulares diferenciables en variedades n-dimensionales y deducimos el teorema de Stokes. Lo cual constituye una generalización del teorema fundamental del calculo que es indudablemente el teorema más importante en el tema.

2.4.1. Orientación mediante la potencia exterior

Sea V un espacio vectorial n-dimensional. La noción de una orientación sobre V fue vista en la observación 2.3.2 (4)

Recordar que la n-ésima potencia exterior $\Lambda_n(V)$ es 1-dimensional, así $\Lambda_n(V)-\{0\}$ tiene dos componentes.

Una orientación sobre V se tiene eligiendo la de una componente de $\Lambda_n(V)-\{0\}$.

Ahora sea M una n-variedad diferenciable conexa diremos que M es orientable si es posible elegir en forma consistente una orientación sobre $(T_mM)^*$ para cada $m\in M$. Mas precisamente sea ϑ la 0-sección del n-ésima haz exterior $\Lambda_n^*(M)$ ó sea:

$$\vartheta = \bigcup_{m\in M} \{0\in\Lambda_n(T_mM)^*\}$$

Entonces como cada $\Lambda_n(T_mM)^*-\{0\}$ tiene exactamente dos componentes, se sigue que $\Lambda_n^*(M)-\vartheta$ tiene al menos dos componentes.

Decimos que M es orientable si $\Lambda_n^*(M)$-ϑ tiene dos componentes y si M es orientable una orientación sobre M es la elección de una de las dos componentes de $\Lambda_n^*(M)$-ϑ.

Una variedad no conexa M se dice que es orientable si cada componente de M es orientable y la orientación es elegida de la orientación de la componente.

Sea M orientada y $v_1, \ldots, v_n$ base de T_mM con base dual $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Decimos que la base ordenada $v_1, \ldots, v_n$ es orientada si $\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n$ pertenecen a la componente orientación.

Sean M, N variedades orientables n-dimensionales y sea $\psi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que ψ preserva orientación si la aplicación inducida $\delta\psi : \Lambda_n^*(N) \rightarrow \Lambda_n^*(M)$ lleva la componente de $\Lambda_n^*(N)$-ϑ determinando la orientación sobre N en la componente de $\Lambda_n^*(M)$-ϑ determinando la orientación sobre M.

Equivalentemente ψ es orientación preservante si $d\psi$ lleva base orientada del espacio tangente en M en base orientada del espacio tangente en N.

Teorema 2.4.1 Sea M una n-variedad diferenciable entonces son equivalentes:

a) M es Orientable

b) Hay una colección $\Phi = \{(V, \psi)$ de sistemas de coordenadas en M$\}$ tales que:

$$M = \bigcup_{(V,\psi)\in\Phi} V \ , \ \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) > 0 \ \text{ sobre } U \cap V$$

Cuando $(U, x_1, \ldots, x_n)$, $(V, y_1, \ldots, y_n) \in \Phi$

c) Existe una n-forma nunca anulándose sobre M.

Demostración

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que M es conexa.

Probaremos (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

Si M es orientable, elegir una orientación sobre M es decir elegir una de las dos componentes Δ de $\Lambda_n^*(M)$-ϑ. Observe que para cada m $\in$ M, $\Delta \cap \Lambda_n(T_mM)^*$ es precisamente una de las dos componentes de $\Lambda_n(T_mM)^*$-$\{0\}$. Ahora sea Φ todos los sistemas de coordenadas (V, y_1, ..., y_n) sobre M tal que la aplicación V $\rightarrow \Lambda_n^*(M)$ tiene rango en Δ tal que m $\rightarrow$ ($dy_1\wedge$ .... $\wedge dy_n$)(m)

Ahora si (U, x_1, ..., x_n) , (V, y_1, ..., y_n) son dos sistemas coordenadas sobre M entonces para m$\in$U$\cap$V, ($dx_1\wedge$ .... $\wedge dx_n$)(m) = $\det\left(\left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_m\right)$($dy_1\wedge$ .... $\wedge dy_n$)(m)

Si estos sistemas de coordenadas pertenecen a Φ entonces necesariamente $\det\left(\left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_m\right)>0$.

Para cada m$\in$U$\cap$V. Consecuentemente (b) se satisface y resulta (b) de (a)

Ahora asumamos (b). Sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de M dada por la vecindad coordenada en la colección Φ con φ_i subordinada a (V_i, x_1^i, ..., x_n^i) entonces $\omega = \sum_i \varphi_i \, d x_1^i \wedge ....\wedge d x_n^i$

Es una n-forma global sobre M donde $\varphi_i d x_1^i \wedge ....\wedge d x_n^i$ está definida por la 0-forma fuera de V_i. Que ω nunca se anula se sigue del hecho que para cada m, ω(m) es una suma finita con coeficientes positivos de elementos de una componente de $\Lambda_n(T_mM)^*$-{0}.

Así (c) se sigue de (b).

Finalmente sea ω una n-forma nunca anulándose y sean:

$\Delta^+ = \bigcup_{m\in M} \{a\omega(m)\ ;\ a\in \mathrm{lR}, a > 0\}$, $\Delta^- = \bigcup_{m\in M}\{a\omega(m)\ ;\ a\in \mathrm{lR}, a < 0\}$

Entonces $\Lambda_n^*(M)$-ϑ es la unión disjunta de los dos subconjuntos abiertos Δ^+, Δ^-.

Así $\Lambda_n^*(M)$-ϑ es disconexa y M es orientable.

Ejemplo 2.4.1

Todo grupo de Lie G es orientable, si $w_1, \ldots\ldots, w_n$ es una base para la 1-forma invariante a izquierda sobre G entonces $w_1\wedge \ldots\ldots\ldots \wedge w_n$ es una n-forma no anulándose sobre G.

Ejemplo 2.4.2

La orientación estándar sobre lR^d es la determinada por la d-forma $dr_1\wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dr_d$

Ejemplo 2.4.3

Sea M una variedad d-dimensional y supóngase que existe una inmersión $f : M \to \mathrm{lR}^{d+1}$. U un campo vectorial normal a lo largo de (M, f) es una aplicación C^∞ $X : M \to T(\mathrm{lR}^{d+1})$ tal que para cada $p\in M$ el vector X(p) vive en $T_{f(p)}\mathrm{lR}^{d+1}$ y es ortogonal al subespacio $df(T_pM) \subset T_{f(p)}\mathrm{lR}^{d+1}$. Además la variedad M es orientable si solo si hay un campo vectorial normal C^∞ no anulándose a lo largo de (M, f).

Ejemplo 2.4.4

Del ejemplo (2.4.3) la esfera S^n es orientable para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 2.4.5

Recordando que la aplicación antipodal sobre la n-esfera S^n preserva orientación si solo si n es impar. Luego el espacio Proyectivo real es orientable si solo si n es impar.

2.4.2. Integración de n-formas en $\mathbb{R}^n$

En la teoría básica de integración de Riemann en $\mathbb{R}^n$ uno de los principales resultados que debemos recordar en este trabajo es la fórmula del cambio de variable.

Sea φ un difeomorfismo de un conjunto abierto acotado D de $\mathbb{R}^n$ en un conjunto abierto acotado $\varphi(D)$. Sea J_φ el determinante de la matriz Jacobiana de φ: $J_\varphi = \det \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial r_j} \right)$.

Ahora si f es una función continua acotada sobre $\varphi(D)$ y sea A un subconjunto de D(En muchas aplicaciones A será un poliedro con contenido de Jordan).

Entonces $\displaystyle\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi \left| J_\varphi \right|$ .... (1)

Definición 2.4.1 Sea ω una n-forma sobre un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, $r_1, \ldots\ldots, r_n$ sistema de coordenadas canónicas sobre $\mathbb{R}^n$ entonces la orientación estándar está determinada por la n-forma $dr_1 \wedge \ldots\ldots \wedge dr_n$ y existe una única función f determinada sobre D tal que $\omega = f\, dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n$. Para $A \subset D$ se define $\int_A \omega = \int_A f$

cuando esta última integral existe.

Rescatando así la fórmula del cambio de variable dada en (1) para estudiarla en término de formas diferenciales.

Sean φ, D y A como antes y sea ω una n-forma sobre $\varphi(D)$, $|\, \varphi' \,| = |\, a_{ij} \,|$.

Inmediatamente:

$\delta\varphi(dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n)(e_1, \ldots\ldots, e_n) = dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n(d\varphi|_p(e_1), \ldots, d\varphi|_p(e_n))$

$$= dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}e_i \,, \ldots\ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}e_i \Big)$$

$$= \det(a_{ij})\, dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n$$

Como $\omega = f\, dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n$ entonces $\delta\varphi(\omega) = \delta\varphi(f\, dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n)$

$$= (f_o\varphi)\delta\varphi(dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n)$$

$$= \pm\, (f_o\varphi)|\varphi'|\, dr_1\wedge \ldots\ldots \wedge dr_n$$

$$= \pm(f_o\varphi)\, J_\varphi.\, dr_1\wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dr_n$$

Donde “ + ” se usa cuando φ preserva orientación y “ - ” si φ invierte orientación.

Entonces $\int_A \delta\varphi(\omega) = \pm\int_A (f_o\varphi).J_\varphi dr_1 \wedge \ldots\ldots\wedge dr_n = \int_A (f_o\varphi).J_\varphi$ por definición.

$= \pm \int_{\varphi(A)} f = \int_{\varphi(A)} \omega$ por cambio de variable y definición.

Por lo tanto $\int_{\varphi(A)} \omega = \pm \int_A \delta\varphi(\omega)$ .... (2)

2.4.3. Integración sobre cadenas

$\Delta_q = \{ (x_1, ..., x_q) \in lR^q \, / \; 0 \le x_i \;, \; \sum_{i=1}^{q} x_i \le 1 \}$ es el q-simplejo Standard en lR^q

Cuando p = 0 escribimos: $\Delta_0 = \{ 0 \}$.

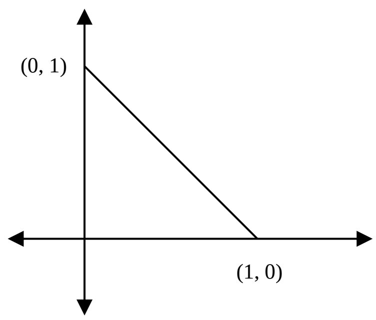
O sea Δ_0 puede ser identificado con el espacio a 1-punto { 0 }.

Ejemplo 2.4.6

En lR se tiene: $\Delta_1 = \{ \lambda_0 \, / \; 0 \le \lambda_0 \le 1 \}$. O sea Δ_1 es el segmento [0, 1] en lR

Ejemplo 2.4.7

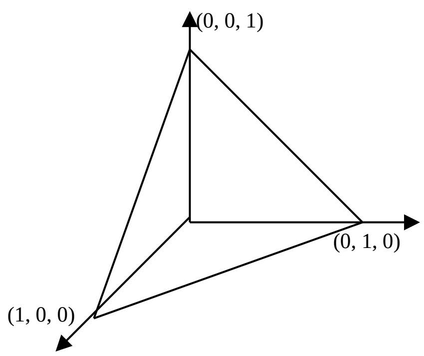
En lR^2 se tiene: $\Delta_2 = \{ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \, / \; \lambda_1 + \lambda_2 \le 1 \}$. O sea Δ_2 es triangulo en lR^2



2- simplejo

Ejemplo 2.4.8

En lR^3 se tiene: $\Delta_3 = \{ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \, / \; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \le 1 \}$. O sea Δ_3 es un tetraedro.



3- simplejo

Diremos que $0, e^1, \ldots\ldots, e^q \in \Delta_q$ son **los vértices** donde $e^i = (0,\ldots\underbrace{,1,}_{\text{lugar i}}\ldots,0) \in lR^q$

Ahora consideremos:

$\xi_j^q : \Delta_q \subset lR^q \;\to\; \Delta_{q+1} \subset lR^{q+1}$; $j = 0, 1, \ldots\ldots, q+1$, $q \geq 0$

Tal que para $q = 0$ se tiene $\xi_0^0(0) = 1$, $\xi_1^0(0) = 0$

Para $q \geq 1$ $\xi_0^q(a_1, \ldots, a_q) = (1-\sum_{i=1}^{q} a_i , a_1, \ldots\ldots, a_q)$,

$\xi_j^q(a_1, \ldots, a_q) = (a_1, \ldots\ldots, a_{j-1}, 0, a_j, \ldots\ldots, a_q)$; $1 \leq j \leq q+1$

$\mathrm{Im}(\xi_j^n) = \xi_j^n(\Delta_q) = \{ (x_1, \ldots, x_j, \ldots\ldots, x_q) \in \Delta_q \; / \; x_j = 0 \}$. Ver figura 2.4.1

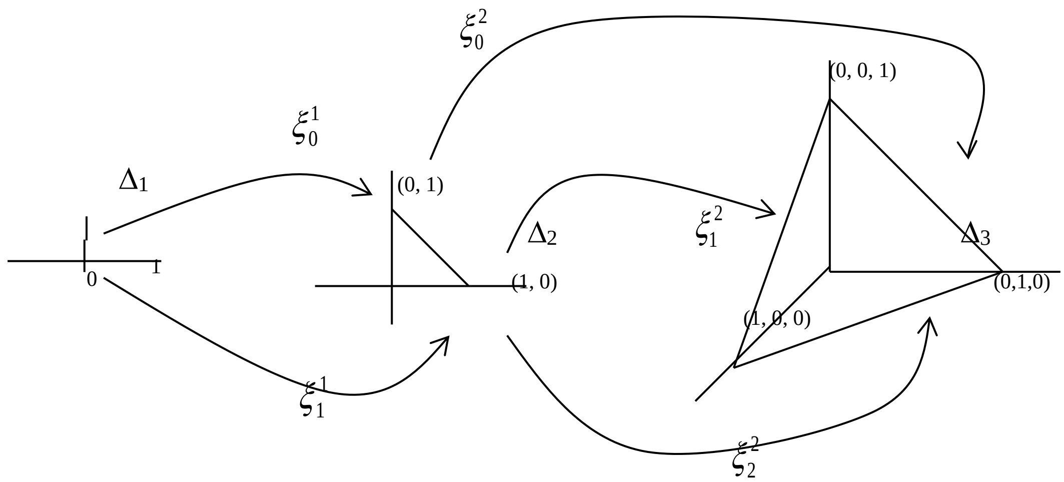


Figura 2.4.1 Face de simplejos Standard

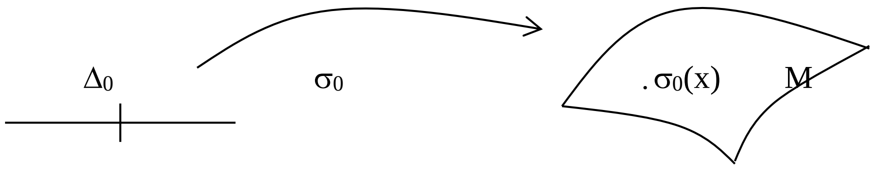
La Frontera de Δ_q es $\Delta_q^0 = \bigcup_{j=0}^{q} \mathcal{Im}(\xi_j^q)$ y para $k < i$ se tiene:

$\xi_k^{n-1} \circ \xi_i^n = \xi_i^{n-1} \circ \xi_{k-1}^n$ ....(3)

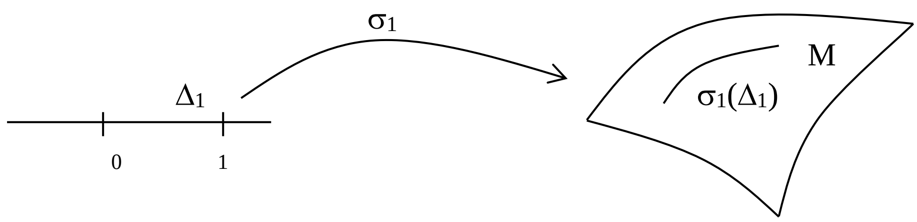
Definición 2.4.2 Sea M una variedad diferenciable. Un **q-simplejos Singular** en M es una aplicación σ_q continua diferenciable de clase C^∞ , $\sigma_q : \Delta_q \rightarrow M$; $q \geq 0$

Ejemplo 2.4.9

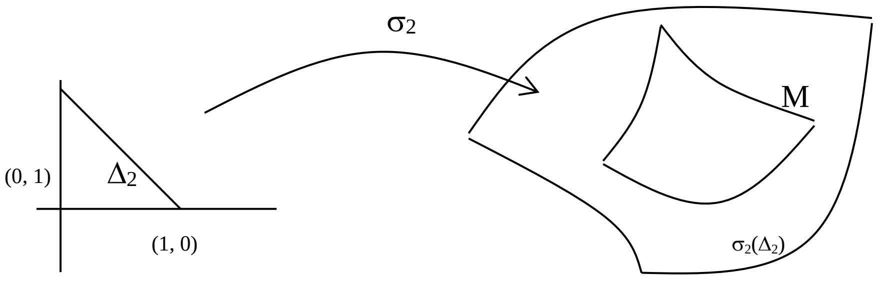
1) El 0- Simplejo Singular $\sigma_0 : \Delta_0 \rightarrow M$ es el 1-espacio $\{0\}$ en M



2) El 1 –Simplejo Singular $\sigma_1 : \Delta_1 \rightarrow M$



3) El 2 –Simplejo Singular $\sigma_2 : \Delta_2 \rightarrow M$



2.4.4. El grupo libre de simplejos singulares:

Sea $S_q(M)$ = { $\sum_i a_i \sigma_{qi}$ / $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i = 0$ excepto un número finito, σ_{qi} son q-simplejos}.

Donde $S_q(M)$ éste es un grupo Abeliano Libre cuya base está conformada por los Simplejos Singulares. $S_q(M)$ es llamada q- Cadena Singular.

Se define $S_q(M) = 0$ sí $q < 0$

Frontera ó operador borde:

$\partial_n : S_n(M) \rightarrow S_{n-1}(M)$ / $\partial_n(\sigma_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \xi_j$

Donde ξ_j es llamada la **i-ésima fase** de ∂_n y $\xi_j = \sigma_n \circ \xi_j^{n-1}$

Teorema 2.4.2 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Prueba:

La prueba será para simplejos, cualquier elemento de $S_n(M)$ se extiende por linealidad.

La i- esima fase ξ_i es la composición: $\Delta_{n-1} \xrightarrow{\xi_i^{n-1}} \Delta_n \xrightarrow{\sigma_n} M$

Para $k < i$ sabemos de (3) que $\xi_k^{n-1} \circ \xi_i^n = \xi_i^{n-1} \circ \xi_{k-1}^n$ .... (4)

Casos: i) Para $j < k < i$ ii) Para $j \geq k$, $k < i$, $j \geq i$

Así $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\sigma_n) = \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma_n)) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi_i \right)$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma_{n-1} \xi_j^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n \xi_i^n \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_j^{n-1})(\sigma_n \xi_i^n) \right]$$

$$= \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_j^{n-1})(\sigma_n \xi_i^n) \right] + \sum_{0 \le i \le j \le n-1} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_j^{n-1})(\sigma_n \xi_i^n) \right]$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_i^{n-1})(\sigma_n \xi_{j-1}^n) \right] + \sum_{0 \le i \le j \le n-1} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_j^{n-1})(\sigma_n \xi_i^n) \right]$$

Tomando $i \le j$ hacemos $i = j´-1$, $j = i´$

entonces $j´-1 \le i´ \Rightarrow j´ \le i´+1 \Rightarrow 0 \le j´ \le n-1+1 = n$

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n (\sigma_n) = \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} \left[(\sigma_{n-1} \xi_i^{n-1})(\sigma_n \xi_{j-1}^n) \right] + \sum_{0 \le j´ \le i´ \le n} (-1)^{i´+j´-1} \left[(\sigma_{n-1} \xi_{i´}^{n-1})(\sigma_n \xi_{j´-1}^n) \right]$$

$$= \sum_{0 \le j \le i \le n} [(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}] \left[(\sigma_{n-1} \xi_i^{n-1})(\sigma_n \xi_{j-1}^n) \right] = 0$$

Definición 2.4.3 Sea σ_p un p-simplejo en M y sea ω una p-forma definida sobre una vecindad de la imagen de σ_p. En muchas aplicaciones se trabaja con formas C^∞ pero aquí será suficiente que ω sea una p-forma continua.

Primero si p = 0 entonces un 0-simplejo consiste solo de un punto en M y una 0-forma es simplemente una función.

Así definimos la integral de la función ω sobre el 0-simplejo σ a el valor de ω en el punto $\sigma_0(0) \in M$: $\int_{\sigma_0} \omega = \omega(\sigma_0(0))$ .... (5)

Si $p \geq 1$ entonces σ_p se extiende a una aplicación C^{∞} de una vecindad de $\Delta_p \subset lR^p$ en M, ω puede ser evaluada vía σ_p a una p-forma $\delta\sigma_p(\omega)$ sobre una vecindad de Δ_p. En este caso definimos la integral de la p-forma ω sobre el p-simplejo σ_p como sigue:

$$\int_{\sigma_p} \omega = \int_{\Delta_p} \delta\sigma_p(\omega) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

Extendemos linealmente estas integrales a cadenas:

Si $c = \sum a_i \sigma_{pi}$ entonces $\int_c \omega = \sum a_i \int_{\sigma_{p_i}} \omega$ .... (7)

Uno de los teoremas más importantes en teoría de Integración sería el teorema de Stokes sobre Variedades. Lo cual es una generalización del teorema fundamental del Cálculo.

Cuando F es una función diferenciable C^{∞} sobre la recta real y si $\sigma_1$es un 1-simplejo C^{∞} en la recta real entonces el teorema fundamental del cálculo es dado por:

$$\int_{\partial\sigma_1} F = \int_{\sigma_1} dF \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

Donde el primer miembro es llamado integral de línea. En forma clásica la igualdad puede ser modelada con el teorema de Green: Dado $U \subset lR^2$, U tiene frontera compacta,

P, Q : U $\rightarrow$ lR diferenciables entonces: $\int_{\partial U} Pdx + Qdy = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

Teorema 2.4.3 (Teorema de stokes “integrando formas sobre cadenas”)

Sea c una p-cadena (p ≥ 1) en una variedad diferenciable M, sea ω una (p-1) forma C^∞ definida sobre una vecindad de la imagen de c entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega \text{ .... } (9)$$

Demostración

Es suficiente considerar el caso en el cual la p-cadena c es un p-simplejo singular σ_p.

Así probaremos que $\int_{\sigma_p} d\omega = \int_{\partial\sigma_p} \omega$ .... (10)

Usando las definiciones se tiene: $\int_{\sigma_p} d\omega = \int_{\Delta_p} \delta\sigma_p(d\omega) = \int_{\Delta_p} d(\delta\sigma_p(\omega))$

También:

$$\int_{\partial\sigma_p} \omega = \int_{\Delta_{p-1}} (\delta\,\partial\sigma_p)\omega = \int_{\Delta_{p-1}} (\delta\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \xi_i)(\omega) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} \delta\xi_i(\omega)$$

$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} \delta\sigma_p \xi_i^{p-1}(\omega) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} \delta\xi_i^{p-1}{}_{\circ}\delta\sigma_p(\omega)$$

Así (10) equivale a: $\int_{\Delta_p} d(\delta\sigma_p(\omega)) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} \delta\xi_i^{p-1}{}_{\circ}\delta\sigma_p(\omega)$ ...... (11)

Para el caso p = 1 como $\delta\sigma_1(\omega) = \omega_{\circ}\sigma_1$ directamente del teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\int_{\Delta_1} d(\delta\sigma_1(\omega)) = \int_{\Delta_1} \frac{d}{dr}(\omega_{\circ}\sigma_1)dr = \omega(\sigma_1(1)) - \omega(\sigma_1(0)) \text{ .... } (12)$$

Además $\sum_{i=0}^{1}(-1)^i \int_{\Delta_0} \delta\sigma_1\xi_i^0(\omega) = \int_{\Delta_0} \delta\sigma_1\xi_0^0(\omega) - \int_{\Delta_0} \delta\sigma_1\xi_1^0(\omega)$

$$= \omega(\sigma_1 \xi_0^0(0)) - \omega(\sigma_1 \xi_1^0(0))$$

$$= \omega(\sigma_1(1)) - \omega(\sigma_1(0)) \quad \text{............................} \quad (13)$$

De (12) y (13) se tiene (11) en este caso.

Ahora asumir que $p \geq 2$ entonces la (p-1)-forma $\delta\sigma_p(\omega)$ puede ser expresada como:

$$\delta\sigma_p(\omega) = \sum_{j=1}^{p} a_j\, dr_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \hat{dr_j} \wedge \ldots\ldots dr_p \quad \text{................} \quad (14)$$

Donde la cuña sobre un término dice que el término es omitido y los a_j son funciones C^∞ sobre una vecindad de Δ_p en $\mathbb{R}^p$. Ya que la integral es lineal podemos considerar el caso especial en el cuál $\delta\sigma_p(\omega) = a_j\, dr_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \hat{dr_j} \wedge \ldots\ldots dr_p$. Ahora como:

$$d(a_j\, dr_1 \wedge \ldots. \wedge \hat{dr_j} \wedge \ldots. \wedge dr_p) = (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dr_p$$

Así el lado izquierdo de (11) da $(-1)^{j-1} \int_{\Delta_p} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dr_p$

Aplicando la definición, iteración y teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$(-1)^{j-1} \int_{\Delta_p} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge dr_p = (-1)^{j-1} \int_{\Delta_p} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \ldots\ldots\ldots dr_p =$$

$$(-1)^{j-1} \int_{\Delta_{p-1}} \left[\int_0^{1-\sum_{i\neq j} r_i} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_j \right] dr_1 \ldots\ldots dr_{j-1} . \hat{dr_j} . dr_{j+1} \ldots\ldots dr_p = (-1)^{j-1}$$

$$\int_{\Delta_{p-1}} \left[a_j(r_1,..,r_{j-1}, 1-\sum_{i\neq j} r_i, r_{j+1},..,r_p) - a_j(r_1,..,r_{j-1}, 0, r_{j+1},..,r_p) \right] dr_1 \ldots\ldots dr_{j-1}\, \hat{dr_j}\, dr_{j+1} \ldots\ldots dr_p$$

$$= (-1)^{j-1} \int_{\Delta_{p-1}} a_j\,(r_1,\ldots\ldots,r_{j-1},1-\sum_{i\neq j} r_i\,, r_{j+1},\ldots\ldots,r_p\,)\, dr_1 \ldots\ldots dr_{j-1}\, \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \ldots\ldots dr_p$$

$$+ (-1)^{j} \int_{\Delta_{p-1}} a_j\,(r_1,\ldots\ldots,r_{j-1},0, r_{j+1},\ldots\ldots,r_p\,)\, dr_1 \ldots\ldots dr_{j-1}\, \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \ldots\ldots dr_p$$

Nuevamente aplicando la definición el lado izquierdo de (11) tiene la forma:

$$= (-1)^{j-1} \int_{\Delta_{p-1}} a_j\,(r_1,\ldots,r_{j-1},1-\sum_{i\neq j} r_i\,, r_{j+1},\ldots,r_p\,)\, dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots \wedge dr_p$$

$$+ (-1)^{j} \int_{\Delta_{p-1}} a_j\,(r_1,\ldots,r_{j-1},0, r_{j+1},\ldots,r_p\,)\, dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots \wedge dr_p \quad \ldots\ldots (15)$$

Ahora estudiemos el lado derecho de (11):

Recordar si r_i son las coordenadas canónicas en una vecindad de: Δ_p ; $r_i(a_1, ., a_i,.., a_p) = a_i$. Podemos también considerar s_i las coordenadas canónicas en una vecindad de Δ_{p-1}.

Luego para $1\leq i \leq p$ se tiene:

$$\delta\xi_i^{p-1}(r_j) = \begin{cases} s_j & ; \quad (1 \leq j \leq i-1) \\ 0 & \quad\quad (j=0) \\ s_{j-1} & ; (i+1 \leq j \leq p) \end{cases} \quad \ldots\ldots (16)$$

$$\delta\xi_0^{p-1}(r_j) = \begin{cases} 1-\sum_{i=1}^{p-1} s_i & ; \quad (j=1) \\ s_{j-1} & ; \quad (1 < j \leq p) \end{cases} \quad \ldots\ldots (17)$$

En particular para i =j se tiene

$\delta\xi_i^{p-1}(r_j)(s_1,\ldots\ldots,s_{p-1}) = r_j\xi_i^{p-1}(s_1,\ldots\ldots,s_{p-1})$ = $r_j(s_1, \ldots, s_{j-1}, 0, s_{j+1}, \ldots, s_{p-1})$= 0

Apliquemos (16) y (17) al lado derecho de (11) :

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\int_{\Delta_{p-1}}\delta\xi_i^{p-1}\circ\delta\sigma_p(\omega) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\int_{\Delta_{p-1}}\delta\xi_i^{p-1}(a_j dr_1\wedge\ldots\wedge\hat{dr}_j\wedge\ldots\wedge dr_p) =$$

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\int_{\Delta_{p-1}} a_j\xi_i^{p-1}\left[\delta\xi_i^{p-1}(dr_1)\wedge\ldots\wedge\delta\xi_i^{p-1}(dr_{j-1})\wedge\delta\xi_i^{p-1}(dr_{j+1})\wedge\ldots\wedge\delta\xi_i^{p-1}(dr_p)\right](s_1,\ldots,s_{p-1})$$

Dado que $\delta\xi_i^{p-1}(r_i) = 0$ solo sobreviven dos sumandos esto es cuando i = 0, j obteniendo:

$$\int_{\Delta_{p-1}} a_j(1-\sum_{i=1}^{p-1}s_i, s_1,\ldots\ldots,s_{p-1})\,d(1-\sum_{i=1}^{p-1}s_i)\wedge ds_1\wedge\ldots\ldots\wedge ds_{j-2}\wedge ds_j\wedge\ldots\wedge ds_{p-1}$$

$$+ (-1)^j\int_{\Delta_{p-1}} a_j(s_1,\ldots,s_{j-1},0,s_{j+1},\ldots,s_{p-1})\,ds_1\wedge\ldots\ldots\ldots\wedge ds_{p-1}$$

$$= (-1)^{j-1}\int_{\Delta_{p-1}} a_j(1-\sum_{i=1}^{p-1}s_i, s_1,\ldots\ldots,s_{p-1})\,ds_1\wedge\ldots\ldots\ldots\wedge ds_{p-1}$$

$$+ (-1)^j\int_{\Delta_{p-1}} a_j(s_1,\ldots,s_{j-1},0,s_{j+1},\ldots,s_{p-1})\,ds_1\wedge\ldots\ldots\ldots\wedge ds_{p-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

Cambiemos variable en las integrales de (18) con los siguientes difeomorfismos:

Para la primera integral $\varphi : (s_1, \ldots, s_{p-1}) \to (r_2, \ldots, r_{j-1}, 1-\sum_{i\neq j} r_i, r_{j+1}, \ldots, r_p)$

$$\varphi(\Delta_{p-1}) = \Delta_{p-1},\ |\varphi'| = (-1)^j,\ r_1 = 1-\sum_{i=1}^{p-1}s_i$$

Para la segunda integral $\psi : (s_1, \ldots, s_{j-1}, 0, s_j, \ldots, s_{p-1}) \to (r_1, \ldots, r_{j-1}, 0, r_{j+1}, \ldots, r_p)$

$$\psi(\Delta_{p-1}) = \Delta_{p-1}\ , \quad |\, \psi' \,| = 1$$

Con lo cual (18) tomará la forma:

$$(-1)^{j-1} \int_{\varphi(\Delta_{p-1})=\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},1-\sum_{i\neq j} r_i, r_{j+1},\ldots,r_p)(-1)^j dr_2 \wedge \ldots dr_{j-1} \wedge d(1-\sum_{i\neq j} r_i) \wedge dr_{j+1} \wedge \ldots dr_p$$

$$+(-1)^j \int_{\psi(\Delta_{p-1})=\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},0,r_{j+1},\ldots,r_p)dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{j-1} \wedge dr_{j+1} \wedge \ldots\ldots \wedge dr_p =$$

$$(-1)^{j-1} \int_{\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},1-\sum_{i\neq j} r_i, r_{j+1},\ldots,r_p)(-1)^j(-1)^j dr_1 \wedge \ldots dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots \wedge dr_p$$

$$+(-1)^j \int_{\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},0,r_{j+1},\ldots,r_p)dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots\ldots \wedge dr_p$$

$$= (-1)^{j-1} \int_{\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},1-\sum_{i\neq j} r_i, r_{j+1},\ldots,r_p)dr_1 \wedge \ldots dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots \wedge dr_p$$

$$+(-1)^j \int_{\Delta_{p-1}} a_j(r_1,\ldots,r_{j-1},0,r_{j+1},\ldots,r_p)dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_{j-1} \wedge \widehat{dr_j}\, dr_{j+1} \wedge \ldots\ldots \wedge dr_p$$

Como la igualdad final coincide con (15) se tiene (11) por lo tanto (10)

2.5.Integración sobre variedades orientadas

Tomando como referencia nuestro marco teórico integraremos n-formas sobre variedades orientadas.

DOMINIO REGULAR EN VARIEDADES.

Sea M una variedad orientada n – dimensional. Veamos integración de n – formas sobre un dominio regular en M.

Un subconjunto D de M será llamado un **dominio regular** si para cada $m \in M$ se tiene una de las posibilidades:

a) Hay una vecindad abierta de m contenida en $M - D$.

b) Hay una vecindad abierta de m contenida en D.

c) Hay un sistema de coordenadas $(U;\varphi)$ centrado alrededor de m tal que $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap H^n$ donde H^n es el semi-espacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $r_n \geq 0$.

Los puntos en D de tipo (b) son llamados puntos interiores y componen el interior de D.

Los puntos de tipo (c) son llamados puntos borde y componen el borde de D.

El sistema de coordenadas de tipo (c) restringido al ∂D hereda diferenciabilidad y da una estructura de variedad de dimensión $(n-1)$ sobre el ∂D convirtiendo ∂D en una subvariedad $(n-1)$-dimensional inmersa de M.

Sea $m \in \partial D$ un vector $v \in T_mM$ es llamado un vector fuera de D si hay una curva diferenciable C^∞, $\alpha(t)$ en M con $\alpha'(0) = v$ y con $\alpha(t) \notin D$ para $0 < t < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. La orientación sobre M induce una orientación sobre ∂D como sigue. Sea v un vector fuera del ∂D en m y sean $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, una base del espacio tangente $T_m\partial D$. Entonces definimos $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, base orientada de $T_m\partial D$ si solo si $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$, es base orientada de T_mM. Esta definición no depende del vector v elegido pues si elegimos otro vector $w \in T_mM$ exterior a D inmediatamente w, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ e base de T_mM , además $\delta_1, \ldots, \delta_n$ corresponde a la base $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ y δ', $\delta_1, \ldots, \delta_n$ corresponde a la base w, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ entonces $\delta' \wedge \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n = a\, \delta \wedge \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n$.

Así recordando que $\Lambda_n^*(M)$-ϑ : $\vartheta = \cup\{0 \in \Lambda_n(T_mM)^*\}$ tiene dos componentes orientación y existe $\delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n$ perteneciente a una de las orientaciones tal que $\delta_1, \ldots, \delta_n$ es base dual orientada de $v_1, \ldots, v_n$ la cuál será orientada por definición. Esto define una orientación diferenciable C^∞ sobre ∂D. Ahora sea ω una n–forma (n = dim M) con soporte compacto ó sea $\omega : M \to \Lambda_n(M) \cong lR$, donde $\overline{\omega^{-1}(lR - \{0\})}$ compacto y sea D un dominio regular en M. Como un caso particular D puede ser M.

Queremos definir la integral de ω sobre D. Para esto será suficiente en esta definición que ω sea una n–forma continua. Usaremos una partición de la unidad para reducir el soporte de ω a ciertos n-simplejos en M sobre las cuales podemos integrar como en el teorema 2.4.3. Primero elegimos algún n–simplejo recomendable relativo a D y ∂D.

Observación 2.5.1

Un n–simplejo σ_n en M será llamado regular si σ_n se extiende a un difeomorfismo sobre una vecindad de Δ_n. Cuando hablamos de n–simplejos regulares, asumimos que ellos se extienden a una vecindad de Δ_n. Un n–simplejo orientado regular es uno en el cual la aplicación σ_n preserva orientación (se suele tomar la orientación estándar sobre lR^n).

Asociado con un dominio regular *D*, consideramos n–simplejos regulares de los siguientes dos tipos:

(α) $\sigma_n(\Delta_n) \subset \mathrm{Int}(D)$

(β) $\sigma_n(\Delta_n) \subset D$, $\sigma_n(\Delta_n) \cap \partial D = \xi_n(\Delta_{n-1})$ que es precisamente la n–ésima fase de σ_n y vive en el borde de *D.*

Ahora cubrir *D* por conjuntos abiertos *U* de los siguientes tipos:

(α') *U* vive en el interior de un n–simplejo regular orientado σ_n de tipo (α)

(β') *U* es la imagen bajo el tipo (β) del n–simplejo regular orientado σ_n de un conjunto abierto *V* en lR^n el cual es una vecindad de un punto en la n–ésima fase de Δ_n, el cual intercepta el borde de Δ_n solo en la n–esima fase y cuya imagen bajo σ_n está contenida en $\sigma_n(\Delta_n) \cup (M - D)$.

Como (sop$\omega \cap D$) es compacto este tiene un cubrimiento finito $U_1, \ldots, U_k$ por conjuntos abiertos de tipo (α') ó (β'). Sean $\sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nk}$ n–simplejos regulares orientados asociados. Sea $U = M -$ (sop$\omega \cap D$) y sean $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $U, U_1, \ldots, U_k$ de *M* definimos la integral de ω sobre *D* por: (ver figura 2.5.1.)

$$\int_D \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_{ni}} \varphi_i \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

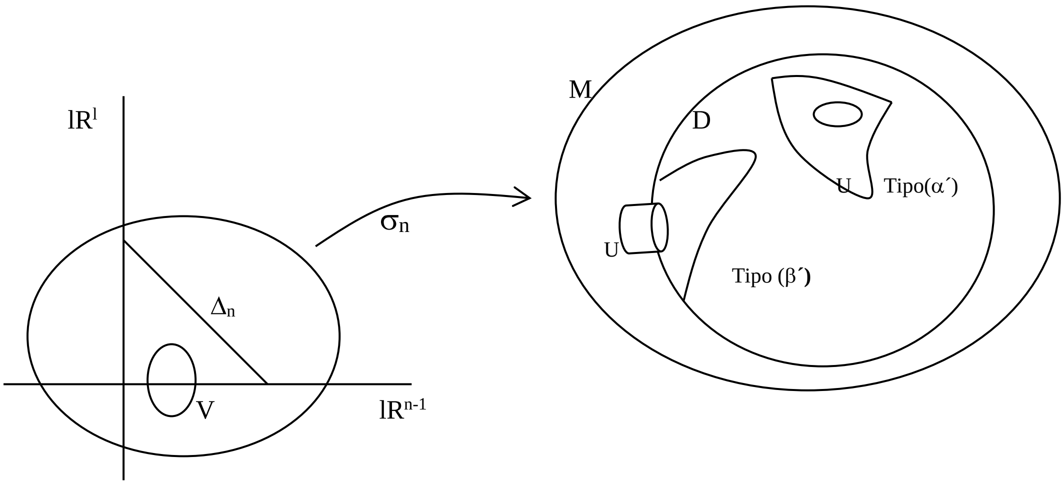


figura 2.5.1. Simplejo asociado a un dominio regular.

Queremos chequear que la definición en(1) es independiente de la cubierta y la partición de la unidad elegida.

Sean V, $V_1, V_2, \ldots, V_l$ y $\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$ otra cubierta y otra tal partición de la unidad respectivamente con V_j asociado al n–simplejo regular τ_{nj}.

Como $\Psi = 0$ sobre el sop(ω) $\cap D$ se sigue que $\sum_{j=1}^{l} \psi_j = 1$ así que:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_{n_i}} \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_{ni}} \sum_{j=1}^{l} \psi_j \varphi_i \omega = \sum_{i,j} \int_{\sigma_{ni}} \psi_j \varphi_i \omega \text{ ………......................(2)}$$

Similarmente $$\sum_{j=1}^{l} \int_{\tau_{nj}} \psi_j \omega = \sum_{i,j} \int_{\tau_{nj}} \psi_j \varphi_i \omega \text{ ………......................................…(3)}$$

Ahora como $\sigma_{ni}^{-1} \circ \tau_{nj}$ es un difeomorfismo preservando orientación sobre el conjunto abierto (posiblemente vacío) donde este está definido y como (sop $\Psi_j \varphi_i$

ω) $\cap$ $\sigma_{ni}(\Delta_n)$ = (sop $\Psi_j \varphi_i$ ω)$\cap$ $\tau_{nj}(\Delta_n)$ se sigue de la formula del cambio de variable que:

$$\int_{\sigma_{ni}} \psi_j \varphi_i \omega = \int_{\Delta_n} \delta\sigma_{ni}(\psi_j \varphi_i \omega)$$

$$= \int_{\Delta_n} \delta(\sigma_{ni}^{-1}\tau_{nj})\left[\delta\sigma_{ni}(\psi_j \varphi_i \omega)\right] = \int_{\Delta_n} \delta(\tau_{nj})\left[(\psi_j \varphi_i \omega)\right]$$

$$= \int_{\tau_{nj}} \psi_j \varphi_i \omega \ldots\ldots \quad (4)$$

Se sigue de (2), (3) y (4) que $\int_D \omega$ está bien definido y es independiente de la elección de la cubierta y partición de la unidad.

Observe que si γ es un difeomorfismo de *M* entonces:

$$\int_{\gamma(D)} \omega = \pm \int_D \delta\gamma(\omega) \ldots\ldots (5)$$

con (+) si γ preserva orientación.

Teorema 2.5.1 (Segunda versión de Stokes). Sea D un dominio regular en una variedad compacta n–dimensional orientada M y sea ω una (n–1)-forma diferenciable C^∞ de soporte compacto entonces $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$ .... (1)

Demostración:

Sean $\varphi_1,...,\varphi_k$ y $\sigma_{n1},..,\sigma_{nk}$ como en la observación 2.5.1 (1) relativo a (sop ω) $\cap$ *D*.

Como $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$ sobre una vecindad de (sop(ω)$\cap$*D*) y d($\sum\varphi_i$) = 0.

Así sobre una vecindad de (sop(ω)) $\cap D$ tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k} d(\varphi_i\omega) = \sum_{i=1}^{k} d\varphi_i \wedge \omega + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i d\omega = d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Pues $d(\varphi_i\omega) = d\varphi_i \wedge \omega + (1)^0 \varphi_i d\omega$

Si σ_{ni} es n – simplejo de tipo (α) en la observación 2.4.3

$$\int_{\partial\sigma_{ni}} \varphi_i\omega = 0 = \int_{\partial D} \varphi_i\omega \ldots\ldots \text{(3)}$$

Pues sop($\varphi_i\omega$) $\subset$ Int($\sigma_{ni}(\Delta_n)$) $\subset$ Int(D). Por otro lado supóngase que σ_{ni} es un n–simplejo del tipo (β) en la observación 2.5.1. En este caso $\varphi_i\omega$ es cero sobre el borde de σ_{ni} excepto posiblemente en puntos del interior de la n–esima fase de $\sigma_{ni}\xi_n^{n-1}$. Como $\sigma_{ni}\xi_n^{n-1}$ es un (n–1)–simplejo regular preservando orientación en ∂D si n es par y invierte orientación si n es impar.

Entonces $\int_{\partial\sigma_{ni}} \varphi_i\omega = \int_{\Delta_{n-1}} \delta\,\partial\sigma_{ni}(\varphi_i\omega) = \int_{\Delta_{n-1}} \delta \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_{ni}\xi_j^{n-1}(\varphi_i\omega)$

$$= (-1)^n \int_{\Delta_{n-1}} \delta\sigma_{ni}\xi_n^{n-1}(\varphi_i\omega) = (-1)^n \int_{\sigma_{ni}\xi_n^{n-1}} \varphi_i\omega$$

$$= (-1)^n (-1)^n \int_{\partial D} \varphi_i\omega = \int_{\partial D} \varphi_i\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

De (2), (3) y (4) y de nuestra versión (2.4.3) del teorema de Stokes vemos que:

$$\int_D d\omega = \sum_i \int_D d(\varphi_i\omega) = \sum_i \left(\sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_{ni}} \varphi_j d(\varphi_i\omega) \right) = \sum_i \left(\sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_{ni}} \varphi_j \right) d(\varphi_i\omega)$$

$$= \sum_i \int_{\sigma_{ni}} d(\varphi_i\omega) = \sum_i \int_{\partial\sigma_{ni}} \varphi_i\omega = \sum_i \int_{\partial D} \varphi_i\omega = \int_{\partial D} \omega \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5)}$$

Corolario 2.5.2 Sea ω una (n – 1)–forma diferenciable C^∞ sobre una variedad orientada compacta n–dimensional M. Entonces $\int_M d\omega = 0$

Demostración

Como M es compacta en el teorema 2.4.3 φ_1, ..., φ_k estará subordinada directamente al cubrimiento U_1, ..., U_k y de (sop$\omega \cap$M). Así solo se tiene

σ_{n1}, ..., σ_{nk}, n-simplejos del tipo 4.8(α) entonces:

$$\int_{\partial\sigma_{ni}} \varphi_1\omega = 0 = \int_{\partial M} \varphi_1\omega \;\Rightarrow\; \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0$$

Integración sobre una variedad Riemanniana.

Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n ó sea M una variedad diferenciable n – dimensional con su producto interno definido positivo $< , >_m$ sobre cada espacio tangente T_mM tal que $m \to \langle X, Y\rangle_m$ es función C^∞ sobre M cuando X, Y son campos vectoriales C^∞.

Esto además define una métrica sobre la variedad diferenciable M llamada métrica Riemanniana

Dado un punto $m \in M$ se puede hallar vecindades U las cuales son ortonormales en el sentido que forman una base ortonormal del espacio tangente a M en cada punto de U. Empezar con una vecindad coordenada (U, x_1, ... , x_n) de M, aplicar el proceso de orto normalización de Gram–Schmidt para orto normalizar los campos vectoriales $\partial/\partial x_1$, …., $\partial/\partial x_n$ simultáneamente en todos los puntos de U. Tal colección $e_1,\ldots, e_n$ es llamado campo estructura ortonormal local.

Ahora como el producto interno $< , >_m$ es un pareamiento no singular en T_mM , según la definición (2.3.5) esto induce isomorfismo φ natural de T_mM en $(T_mM)^*$, $v \rightarrow \varphi_v$ donde: $\varphi V(w) = <v, w>_m$ .... (1)

Por el isomorfismo anterior $(T_mM)^*$ hereda un producto interno. Observe que la base dual a una base ortonormal de T_mM en sí mismo es una base ortonormal para $(T_mM)^*$.

Ahora sean $e_1,\ldots, e_n$ un campo estructura ortonormal sobre U sean $\omega_1,\ldots, \omega_n$ las 1– formas duales tal que $\omega_i(e_j) = \delta_{i\,j}$ sobre U …... (2)

Entonces $\omega_1,\ldots,\omega_n$ forman un campo con estructura ortonormal local sobre U. Considerar ahora dos campos con estructura ortonormal local $\omega_1,\ldots, \omega_n$ sobre U y $\omega'_1,\ldots, \omega'_n$ sobre U'. Entonces sobre $U \cap U'$ se tiene:

$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \det(A)\omega_1' \wedge \ldots \wedge \omega_n'$ ....(3)

donde A es una matriz ortogonal cuyas entradas son funciones C^{∞} sobre $U \cap U'$.

Así $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = \pm\, \omega_1' \wedge \ldots \wedge \omega_n'$ ....(4)

Definición 2.4.4 Asumamos que M es orientada, $(U, x_1, \ldots , x_n)$ una vecindad coordenada. Un campo con estructura local $\omega_1,\ldots,\omega_n$ sobre U será llamado orientable si $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ pertenece a la orientación en cada punto de U.

Elegir un campo con estructura ortonormal local orientado alrededor de cada punto de M.

Entonces las correspondientes n–formas $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ coinciden sobre lo heredado determinando así una n – forma ω global sobre M no anulándose aquí. Esta forma

ω es llamada la forma volumen de la variedad orientada Riemanniana M "Esta integral sobre M es el volumen de M".

En la observación 2.3.2(4) el operador estrella * fue introducido sobre $\Lambda(V)$ como un producto interno orientado en V. Sobre una variedad orientada Riemanniana por tanto tenemos * definido sobre (TmM)*, para cada m es fácil ver que * lleva formas C^{∞} en formas C^{∞} . Así tenemos un operador lineal

$* : E\,p(M) \to E\,n - p(M)$ ……..… (5)

Donde según la observación 2.3.2(4) se tiene:

Donde $\{e_1,\ldots\ldots, e_n\}$ es base orientable de V y $\{e_1,\ldots\ldots, e_n\}$ es base dual

r * $(e\sigma(1)\wedge\ldots\ldots \wedge e\sigma(p)) = c\sigma(1) \ldots\ldots c\sigma(p)\, \mathrm{Sig}(\sigma)(e\sigma(p+1)\wedge\ldots\ldots \wedge e\sigma(n))$

Así $\alpha\wedge{*\beta} = \langle\alpha, \beta\rangle\omega$; $\alpha, \beta\in\Lambda p(TmM)^*$, ω forma de volumen.

Para la igualdad anterior bastará observar que $e\sigma(1)\wedge\ldots\ldots \wedge e\sigma(p)$

para $\sigma(1) < \ldots\ldots < \sigma(p)$ forman bases ortonormales para $\Lambda p(TmM)^*$

Así mismo se tiene $** = (-1)\, p(n - p)$ …………………………….……….... (6)

En la observación 2.5.1 se mostró integración de n–formas sobre una variedad n–dimensional orientada. En el caso de una variedad Riemanniana orientada M definimos la integral sobre M de una función continua f con soporte compacto como la integral de la n – forma (continua). $*f = f\,\omega$ ó sea

$\int_M f = \int_M * f = \int_M f\omega$ …...…(7)

Observación 2.5.2

La orientación fue conveniente pero no necesaria en la definición de: $\int_M f$.

Definición 2.5.2 Sea M una variedad Riemanniana (no necesariamente orientada) definimos la integral de una función continua con soporte compacto como sigue: Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de M por interiores de n–simplejos regulares $\sigma_n\alpha$ y sean ω^{α_1}, ..., ω^{α_n} un campo con estructura ortonormal local sobre una vecindad de $\sigma_n\alpha(\Delta_n)$. Entonces existen funciones C^∞, h_α sobre una vecindades de Δ_n tal que:

$$\delta\sigma_n\alpha(\omega^{\alpha_1}\wedge\ldots\ldots\wedge\omega^{\alpha_n}) = h\alpha\, dr_1\wedge\ldots\ldots\wedge dr_n$$

Sea {φ α} una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}$ y sea f una función continua con soporte compacto sobre M.

Definimos:

$$\int_M f = \sum_\alpha \int_{\Delta_n} (\varphi_\alpha f) o \sigma_{n\alpha} \,|h_\alpha|\, dr_1 \wedge \ldots\ldots\wedge dr_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Que esta definición es independiente del cubrimiento y la partición de la unidad elegida se sigue de un argumento similar al final de la observación 2.5.1 en el caso de una variedad Riemanniana orientada (8) y (7) coinciden.

Observación 2.5.3

En análisis vectorial clásico el gradiente de una función f sobre lR^n es definido por el campo vectorial $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right)\frac{\partial}{\partial r_i}$ y la divergencia de un campo vectorial $V=\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial r_i}$ es definida por la función $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial r_i}$.

Extendemos esta noción a variedades Riemannianas como sigue: Recordar el isomorfismo canónico $T_mM \cong (T_mM)^*$. Por conveniencia denotamos los elementos por el isomorfismo con una tilde. Luego si $v \in T_mM$ entonces $\tilde{v}$ será el dual correspondiente en $(T_mM)^*$ y si $\omega \in (T_mM)^*$ entonces $\tilde{\omega}$ será el correspondiente vector en T_mM. Entonces si f es una función sobre M el gradiente es el campo vectorial dado por: gradf = $\widetilde{df}$ .... (9)

Si V es un campo vectorial sobre una variedad de Riemanniana orientada entonces la divergencia es la función divV = $*d*\tilde{V}$. .... (10)

El teorema de Stokes tiene una versión equivalente sobre variedad Riemanniana orientada conocido como el teorema de la divergencia. Este teorema dice que si V es un campo vectorial C^{∞} sobre una variedad Riemanniana orientada M, D un dominio regular en M y si $\vec{n}$ es el campo vectorial normal unitario por fuera sobre el ∂D entonces $\int_D divV = \int_{\partial D} <V,\vec{n}>$ ……………................................... (11)

Bastará ver que $\int_{\partial D} *\tilde{V} = \int_{\partial D} <V,\vec{n}>$; $*\tilde{V} = \tilde{V}\, d\omega_1 \wedge \ldots\ldots. \wedge d\omega_n$

Considerar un sistema coordenado $(U, x_1, .., x_n)$ en $m \in \partial D$ y elegir un campo estructura ortonormal orientado local $e_1, .., e_n$ tal que para cada punto del ∂D, Además e1 es normal exterior unitario y $e_1, .., e_n$ es base de $T_m(\partial D)$ con $\omega_1, ..., \omega_n$ con estructura dual.

Podemos además considerar $\vec{n} = \frac{\alpha}{|\alpha|}, \quad \alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}$

Así $*\tilde{V}$ (e1, ..., en) = $\tilde{V}$ $d\omega 1 \wedge .... \wedge d\omega n$(e1, ..., en)

$= \langle V, d\omega 1 \wedge .... \wedge d\omega n(e1, ..., en) \rangle$

$= \langle V, \vec{n} \rangle (e_1 \ldots e_n)$; $e_j = \frac{\alpha}{|\alpha|}, \quad \alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\omega i(ej) = \delta ij$

Finalmente $\int_D divV = \int_D *d*\tilde{V} = \int_{\partial D} *\tilde{V}$ por teorema de Stokes 2.4.3

$= \int_{\partial D} <V, \vec{n}>$

2.6. Algunas aplicaciones

2.6.1. Integración en representaciones

Una aplicación de la integral sobre un grupo de *Li*e compacto es la siguiente. Sea G grupo de Lie y sea α: $G \to Aut(V)$ una representación en los automorfismos de un espacio *V* con producto interno real ó complejo.

La representación α es llamada unitaria (respectivamente ortogonal) en el caso que V es espacio complejo (respectivamente real) con producto interno. Si para cada v y w en V y cada $a \in G$ se tiene $\langle \alpha(a)v, \alpha(a)w \rangle = \langle v, w \rangle$ …………………. (1)

Sea G un compacto y V complejo (respectivamente real). Entonces hay un producto interno sobre V con respecto al cual α es unitario (respectivamente ortogonal).

La prueba en el caso real y en el caso complejo son similares. Sea { , } algún producto interno sobre V ponemos: $< v, w >= \int_G \{\alpha(a)v, \alpha(a)w\} da$ …..…. (2)

donde usamos da para denotar que consideramos el integrando como función de a en G.

Es inmediato que < , > es un producto interno.

Que (1) suceda se sigue de la invariancia a derecha de la integral sobre G:

$$< \alpha(b)v, \alpha(b)w > = \int_G \{\alpha(a)\alpha(b)v, \alpha(a)\alpha(b)w\} da$$

$$= \int_G \{\alpha(ab)v, \alpha(ab)w\} da$$

$$= \int_G \{\alpha(a)v, \alpha(a)w\} r_b da$$

$$= \int_G \{\alpha(a)v, \alpha(a)\omega\} da$$; por invariancia a la derecha.

$$= < v, w >$$

Por lo tanto $< \alpha(b)v, \alpha(b)w > = < v, w >$

2.6.2. Conservación de la masa.

Este principio dice que la masa local de el fluido para el cuál en el tiempo t = 0 ocupa una región W cambia después de un tiempo t esto es:

$$\int_{\varphi_t(W)} \rho_t d\mu = \int_W \rho_0 d\mu$$

(Recordemos que una región W adecuada se tiene cuando es un subconjunto abierto de M con borde diferenciable suficiente para el teorema de Stokes 2.4.3). Ahora usando la fórmula del cambio de variable, la conservación de masa puede ser escrita como:

$$\int_W \varphi_t^{\ *}(\rho_t \mu) = \int_W \rho_0 d\mu$$

para alguna región adecuada W en M.

Lo cuál es equivalente a: $\varphi_t^{\ *}(\varphi_t\mu) = \varphi_0\mu$, ó $(\varphi_t^{\ *}\varphi_t)J(\varphi_t) = \rho_0$

Donde $J(\varphi_t)$ es el Jacobiano de (φ_t). Según la derivada de Lie teorema 4.3.3 se tiene:

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi_t^{\ *}(\rho_t\mu)) = \varphi_t^{\ *}(L_\mu \rho_t \mu + \frac{\partial \rho}{\partial t}\mu) = \varphi_t^{\ *}\{(\mu[\rho_t] + \rho_t div\mu + \frac{\partial \rho}{\partial t})\mu\}$$

$$= \varphi_t^{\ *}\{(div(\rho_t\mu) + \frac{\partial \rho}{\partial t})\mu\}$$

Así: $div(\rho_t\mu) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ es la forma diferencial de la ley de conservación de masa. Además, se conoce como ecuación de continuidad.

Notar que ρ y μ pueden no ser suficiente diferencial y no satisfacer los pasos de las formas diferenciales en esta ley; la forma integral será la usada. Además, notar que aquí la métrica Riemanniana juega un rol; solo el elemento de volumen será necesario.

2.6.3. Balance de momento.

La segunda ley de Newton afirma que el cambio de coeficiente de momento de una porción del fluido es igual a la fuerza total aplicada en este. Se mostrará este principio sobre una variedad general primero cuando M $\subset$ lR^3. Aquí asumiremos el cálculo vectorial convencional y escribir los campos velocidad en diversos tipos de caras. El momento de una porción de fluido en un tiempo t que para el tiempo t = 0 ocupa la región W es:

$$\int_{\varphi_t(W)} \rho u d\mu$$

Aquí y en lo que sigue la integral es lR^3-valuada, así aplicaremos todos los teoremas sobre integración en componentes.

Para cada continuo, actúan fuerzas sobre un trozo de material de dos tipos. Primero hay **fuerzas de tensión**, donde el trozo de material es activado por fuerzas transversales en estas superficies por el resto del continuo. Segundo hay fuerzas externas ó **fuerzas de cuerpo** tal como la gravedad ó un campo magnético el cuál ejerce una fuerza por unidad de volumen sobre el continuo. La formulación de superficie fuerza de tensión en un continuo es atribuido a Cauchy. Asumimos que las fuerzas de cuerpo son dados por la fuerza densidad **b** esto es la fuerza de cuerpo total actuando sobre W y son $\int_W \rho b d\mu$ en mecánica continua las fuerzas de tensión son asumidas de la forma $\int_{\partial W} \sigma(x,t).n da$ donde da es el elemento de volumen inducido sobre el borde, **n** es la normal unitaria exterior, y σ(x, t) es un 2-tensor simétrico contravariante dependiente del tiempo llamado el tensor de tensión de Cauchy. La contracción σ(x, t).n es entendida de la siguiente manera: si σ tiene componentes σ^{ij} y **n** tiene componentes $\mathbf{n}^{\mathbf{k}}$ entonces σ.**n** es un vector con componentes $(\sigma.\mathbf{n})^i = g_{jk}\,\sigma^{ij}\,\mathbf{n}^{\mathbf{k}}$ donde g es la métrica(en nuetro caso $g_{jk} = \delta_{jk}$). El vector σ.**n** llamado vector tracción de Cauchy mide la fuerza de contacto(por unidad de área ortogonal a **n**) entre dos partes del continuo. (Un teorema de Cauchy establece que si se tiene la existencia de un campo vectorial tracción de Cuchy contínuo T(x, t, **n**) satisfaciendo el balance de momento entonces debe ser de la forma σ.**n** para un 2-tensor σ ; además si se tiene momento de momento entonces σ debe ser simétrico.) Ver ([11], R. Abraham(1988)).

Se dice que se tiene **balance de momento** si:

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(W)} \rho u d\mu = \int_{\varphi_t(W)} \rho b d\mu + \int_{\partial\varphi_t(W)} \sigma.nda$$

Para cada región W en M = lR^3. Si div(σ) denota el vector con componentes (div(σ^{1i}), div(σ^{2i}),div(σ^{3i})) entonces por el teorema de Gaus. Apéndice corolario 9.2

$$\int_{\varphi_t(W)} (div\sigma)d\mu = \int_{\partial\varphi_t(W)} \sigma.nda$$

Por la fórmula del cambio de variable y derivada de Lie tenemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(W)} \rho u^i d\mu = \int_W \frac{d}{dt}\varphi_t^{\,*}(\rho u^i d\mu) = \int_{\varphi_t(W)} \left(\frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + (L_u\rho)u^i + \rho L_u u^i + \rho u^i divu\right)d\mu$$

Así el balance de momento es equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial t}u^i + \rho\frac{\partial u^i}{\partial t} + (d\rho.u)u^i + \rho L_u u^i + \rho u^i div(u) = \rho b^i + (div(\sigma))^i$$

Pero dρu + ρdiv(u) =div(ρu) y por conservación de masa, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0$

Además: $L_u u^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)\mu^j = (u.\nabla)u^j$ así tenemos:

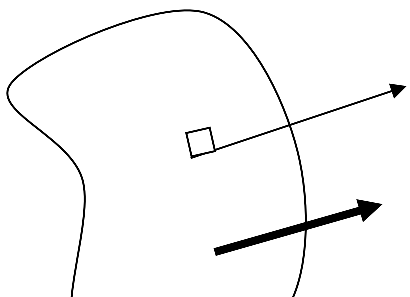
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = b + \frac{1}{\rho} div(\sigma)$$

La cuál representa las ecuaciones básicas. Aquí la cantidad $\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u$ es usualmente llamada la **derivada material** y es denotada por $\frac{Du}{dt}$. Estas ecuaciones son para cada continuo su elasticidad ó fluido.

Un **fluido ideal** es por definición un fluido cuyo tensor de tensión de Cauchy σ es dado en términos de una función p(x, t) llamada presión, $\sigma^{ij} = -pg^{ij}$. En este caso el balance de momento en forma diferencial da las ecuaciones de Euler para un fluido ideal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = b - \frac{1}{\rho} grad(p)$$

La tensión σ en un fluido ideal dice que si S es algún fluido de superficie en M con vector normal exterior unitario **n,** entonces la fuerza de tensión por unidad de área atraviesa una superficie elemental **S** en x con vector normal **n** en un tiempo t es dada: -p(x, t)**n**. Ver la figura 2.6.1 (Es la fuerza transversal)



S **n**

S = -p**n**

Figura 2.6.1 Fuerza transversal en la superficie **S**.

Ahora consideremos una variedad Riemanniana M. Primero no se tiene claro las integrales vectorial-valuadas. Pero podemos darle sentido usando transporte paralelo, hay serios problemas con la integral del momento de balance. Es decir, si cambiamos coordenadas entonces el momento de balance no se ve. Se dice que la forma integral del momento de balance no es covariante. Por tanto nos concentramos sobre las formas diferenciales y ahora con fluidos ideales (Una dificultad en dispersión de fluido es que la noción de solución inicial no es un concepto independiente de coordenada.)

Escribiendo las ecuaciones de Euler en lR^3 con subíndices esto es el plano de estas ecuaciones. Entonces la i-esima ecuación, i = 1,2,3 es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x^1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x^3} = b_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

Buscamos un invariante para la suma de los tres últimos términos sobre el lado izquierdo, fijando i tenemos:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - u \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = (L_u u^b)_i - \left(\frac{1}{\rho} d\|u\|^2\right)_i$$

Que son las ecuaciones de Euler y pueden escribirse en la forma invariante:

$$\frac{\partial u^b}{\partial t} + L_u u^b - \frac{1}{2} d(u^b(u)) = -\frac{1}{\rho} dp + b^b$$

Afirmamos que esta ecuación es el momento de balance en M para un fluido ideal. Lo cual es familiar con conexiones Riemannianas. Ver ([6], S. Kobayashi(1963)).

Esta forma es equivalente a la forma: $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u^u = -\frac{1}{\rho} grad(p) + b$ mostrando que:

$$L_u u^b = (\nabla_u U)^b + \frac{1}{2} d(u^b(u))$$

Donde ∇_u**u** es la derivada covariante **u** en sí mismo, con ∇ la conexión Riemanniana dada por g. Las condiciones de borde muestran el significado físico de fluido ideal. No muestra fricción entre el fluido y ∂M esto es **u** es tangente a ∂M. En suma, las ecuaciones de la moción de fluido ideal sobre una variedad Riemanniana compacta M con borde ∂M diferenciable y vector normal unitario exterior son:

$$\frac{\partial u^b}{\partial t} + L_u u^b - \frac{1}{2} d(u^b(u)) = -\frac{1}{\rho} dp + b^b \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0$$

Con condiciones de borde: **u** // ∂M esto es u.n = 0 sobre el ∂M.

Y condiciones iniciales: u (x, 0) = u_0(x) dada sobre M.

Por simplicidad se asume b = 0.

2.6.4. Conservación de la energía.

Un problema básico de fluido ideal dinámico es el de solucionar problemas valor frontera iniciales. Estas incógnitas son **u**, ρ y p esto es n+2 escalares incógnitas.

Tenemos sin embargo solo (n+1) ecuaciones. Para especificar la noción de fluido se necesita más ecuaciones. Esto es un hecho verdadero y la ley de conservación de la energía dará la ecuación extra necesaria en mecánica de fluidos. Ver ([11], R. Abraham, (1988)).

Para un fluido moviéndose en M con campo velocidad u la energía cinética de fluido es:

$$E_{cinetica} = \frac{1}{2}\int_M \rho \| u \|^2 \; d\mu$$

Donde $\| u \|^2 = \langle u, u \rangle$ es la longitud al cuadrado para la función vector u.

Asumimos que la energía total del fluido puede ser escrito:

$E_{total} = E_{cinetica} + E_{interna}$

Donde $E_{interna}$ es la energía que no puede verse en la escala microscópica y deriva de fuerza tales como intermolecular potencial y vibraciones moleculares. La energía es disipada en el fluido ósi permitimos el fluido al trabajo, E_{total} se cambiará.

Asumiendo que $E_{interna}$ = constante. Entonces debemos tener $E_{cinetica}$ como una constante esto es : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_M \rho \| u \|^2 \; d\mu \right) = 0$

III. VARIABLES E HIPOTESIS

3.1 Variables de la investigación

- $\int_c w$ integración de formas sobre cadenas.

- $\int_M w$ integración de formas sobre la variedades compacta M.

3.2 OPERACIONALIZACION DE LA VARIABLE

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
$\int_c w$	Integración de formas	Integración de formas sobre cadenas	Escalar	Identificar el número integral y teoremas fundamentales
$\int_M w$	Integración de formas	Integral de formas sobre la variedad compacta M	Escalar	Identificar el número integral y teoremas fundamentales

3.3 HIPOSTESIS GENERAL E HIPOTESIS ESPECIFICAS

3.3.1. Hipótesis general

Determinar integración sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$

3.3.2. Hipótesis especificas

- Establecer los teoremas fundamentales de integración como el teorema de Stokes de formas sobre cadenas.
- Establecer el teorema de Stokes de formas sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$.

IV. METODOLOGIA

4.1. Tipo de la investigación

- En presente trabajo se encuentra inmerso en un nivel de investigación básica tanto en la parte teórica como en la parte práctica, teniendo como universo la teoría de integración.
- El método a utilizar es de tipo deductivo y analítico que permitirá la comprobación de los teoremas de Stokes de una manera clara y que sirva como una motivación para que se siga investigando en ésta área de la matemática.

4.2 Diseño de la investigación

En primer lugar, describimos los elementos tensoriales e introducimos el espacio de tensores alternados $\Delta\mathbb{R}_p^n$para luego presentar las n-formas diferenciales extendiendo así las diferenciales clásicas dx; dy; dz. Así mismo con el afán de integrar sobre variedades introducimos las cadenas e integración sobre cadenas y sobre variedades para finalmente presentar los resultados de este trabajo. Teorema de Stokes sobre cadenas y variedades.

4.3 Población y muestra

Tenemos como población las funciones integrables sobre cadenas y variedades, tomando como muestra las formas diferenciables integrables sobre variedades compactas.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de nuestro trabajo se revisará bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada con teoría de integración.

4.5 Procedimiento de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto la recolección de datos consistió en la revisión bibliográfica de libros, artículos, papers, páginas webs etc.

4.6 Procesamiento estadísticos y análisis de datos

No hubo procesamiento estadístico alguno ni tampoco análisis de datos.

V. RESULTADOS

- Tomando como referencia nuestro marco teórico integraremos n-formas sobre variedades orientadas "teorema de Stokes" y finalmente sobre grupos Lie compactos mostraremos además la invarianza a derecha e izquierda de la integral y algunas aplicaciones.
- Para D un dominio regular en una variedad compacta n–dimensional orientada M y ω una (n–1)-forma diferenciable C^{∞} de soporte compacto se tiene que : $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$
- Se obtuvo la integral de una (n – 1)–forma diferenciable w, C^{∞} sobre una variedad orientada compacta n–dimensional *M.* de tal manera que

$$\int_M d\omega = 0$$

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Considerando que el presente trabajo no tiene resultados experimentales obtenidos en gabinete ó laboratorio no es posible realizar una discusión en ese sentido.

6.1. Contrastación de la hipótesis con los resultados

En la hipótesis se propuso establecer los teoremas fundamentales de integración como el teorema de Stokes de formas sobre cadenas y sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$ lo cual quedó establecido en los resultados. También se propuso de manera general determinar la integración en variedades compactas, lo cual se dio como resultado de la integración sobre cadenas junto al estudio de los espacios tensoriales.

6.2. Contrastación de resultados con otros estudios similares

En WARNER, FRANK W. (1970) [10], SPIVAK M. (1965) [9] y S. KOBAYASHI, K NOMIZU(1963) [6], se tiene un estudio de las teorías de integración sin la preparación básica que ofrece este trabajo, tampoco se verifican específicamente los teoremas de Stokes para cadenas y variedades compactas, como si los hacemos en este trabajo con la existencia del espacio de los tensores y n-formas diferenciables. En LAGES LIMA, ELON (1973) [5] se ofrece una información básica sobre variedades diferenciables pero insuficiente en cadenas y variedades compactas pues no se enfoca de manera específica en la integración sobre los espacios de estudio, los cuales son resultados de este trabajo.

VII. CONCLUSIONES

1. Una variedad determina una topología en el correspondiente conjunto subyacente definida por alguna condición geométrica, analítica, etc. No siempre se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus puntos y una serie de números, denominados coordenadas. En la mayoría de los casos nos tenemos que restringir a una parte de dicho espacio. Si además exigimos que esta biyección tenga propiedades topológicas, la dificultad de encontrarla se incrementa.

2. Para dar una estructura diferenciable sobre una variedad basta con dar un atlas diferenciable, es decir una colección de sistemas coordenados verificando las condiciones y este se buscará en general no necesariamente maximal sino lo más pequeño posible

3. Para trabajar sobre variedades hemos consideramos las n-cadenas c que son combinaciones de n-cubos.

4. Debido que al introducir la definición de variedades se crea una extensa gama de espacios trabajables, se hace necesario extender las 1-formas a n-formas, realizando particiones de la unidad sobre estos espacios y así obtener los teoremas fundamentales de la teoría de integración

5. Es indiscutible la necesidad del estudio de la teoría de integración en la formación de los estudiantes de ciencias e ingenierías, el teorema fundamental del cálculo y los teoremas de Stokes son trascendentes

6. La integración realizada en un intervalo real y en 2-variedades hechas en los trabajos anteriores es extendido en este trabajo sobre n-variedades, como es el caso de los grupos de Lie compactos, inclusive se verifica el teorema de Stokes y se dan algunas aplicaciones.

VIII. RECOMENDACIONES

1. El trabajo de tesis desarrollado presenta la Teoría de Integración sobre variedades compactas. Es natural preguntarse sobre la existencia de otras teorías de Integración y su descripción como lo hecho en este trabajo. Para esto recomendamos leer WARNER, FRANK W. (1970) [10].

2. En este trabajo se determina la Integración sobre variedades demostrando el teorema de Stokes para estos espacios por lo tanto es natural la pregunta sobre Integración en otros espacios Topológicos. Para lo cual recomendamos leer S. KOBAYASHI, K NOMIZU (1963) [6].

3. Conocida el teorema de Stokes y de Green para este espacio otra pregunta sería si hay otro tipo de demostración para este teorema. Para esto se recomienda leer CHEVALLEY. C (1946) [7].

4. El presente trabajo de investigación es útil y recomendable para los estudiantes de Ciencias e Ingenierías

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1]. LAGES LIMA, ELON, (1982). 'Curso de Analice Vol. II'.IMPA Rio de Janeiro

[2]. C. CAMACHO, F. ESCALANTE. (1998). 'Integral de Lebesgue' Monografías INCA

[3]. J. DIEUDONNE. (1978).'Elementos de Analisis' tomo II. Editorial Reverte S. A.

[4]. MICALI, VILLAMAYOR. (1976). 'Algebra Multilineal'. O. E. A.

[5]. LAGES LIMA, ELON (1973).'Variedades Diferenciveis'.IMPA Rio de Janeiro

[6]. S. KOBAYASHI, K NOMIZU(1963). 'Fundations of Diferentiable Geometry'. New York, Weley-Intercieces Vol I

[7]. CHEVALLEY. C (1946). 'Theory of Lie Groups'. Princeton University Press'

[8]. W. FRANZ (1972). 'Topología General y Algebraica'.Selecciones Científicas, Madrid.

[9]. SPIVAK M. (1965). 'Calculus on Manifoldsy of Lie Groups'. New York, W. A. Benjamín Inc. New York.

[10]. WARNER, FRANK W. (1970).' Fundations of Diferentiable Manifolds and Lie Grup'. IM Singer

[11]. R. ABRAHAM, J. MARSDEN (1988). 'Manifolds, tensor Analysis and aplications' Springer-Verlag, New York.

[12]. W. GREUB (1973). 'Connection, Curvature and Cohomology'. Academic Press.

X. ANEXOS

10.1 Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Determinación del problema: Sobre el espacio $\mathbb{R}^3$ con las diferenciales canónicas dx, dy dz se obtienen los clásicos teoremas de Green y Stokes. Con el surgimiento de las variedades diferenciables en el presente trabajo se plantea el problema de determinar el teorema de Stokes sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^3$. **Formulación del problema**: Dada una (n-1)-forma se tiene las interrogantes: - ¿Se tendrá el teorma de Stokes sobre una k-cadena c? o sea: $\int_c dw = \int_{\partial c} w$ - ¿Se tendrá el teorma de Stokes sobre una k-variedad M? o sea: $\int_M dw = \int_{\partial M} w$	**Objetivo general**: Estudiar los teoremas de Stokes sobre variedades en $\mathbb{R}^n$. **Objetivos Específicos**: -Construir el espacio Δ^k de tensores alternados. - Formalizar y extender las diferenciales clásicas dx, dy, dz en $\mathbb{R}^3$ mediante la introducción de las n-formas. - Establecer los teoremas fundamentales de integración como el teorema de Stokes de formas sobre cadenas. - Establecer integración de formas sobre cadenas y variedades.	**Hipótesis general**: Determinar integración sobre variedades compactas en $\mathbb{R}^n$. **Hipótesis Específicas**: - Establecer los teoremas fundamentales de integración como el teorema de Stokes de formas sobre cadenas. - Establecer el teorema de Stokes sobre variedades de $\mathbb{R}^n$.	**Tipo de invesigación**: En presente trabajo se encuentra inmerso en un nivel de investigación básica tanto en la parte teórica como en la parte práctica, teniendo como universo la teoría de integración. **Método**: El método a utilizar es de tipo deductivo y analítico que permitirá la comprobación de los teoremas de Stokes de una manera clara y que sirva como una motivación para que se siga investigando en ésta área de la matemática. **Diseño**: En primer lugar describimos los elementos tensoriales e introducimos el espacio de tensore alternados $\Delta(\mathbb{R}^n_p)$, para luego presentar las n-formas diferenciales extendiendo así las diferenciales clásicas dx, dy, dz. Así mismo con el afan de integrar sobre variedades introducimos las cadenas e integración sobre estas cadenas y sobre variedades para finalmente presentar los resultados de este trabajo. Teorema de Stokes sobre cadenas y variedades.	**Población**: Tenemos como población las funciones integrables sobre cadenas y variedades. **Muestra**: Tomamos como muestra las formas diferenciables integrables sobre variedades compactas.

10.2 Mapa conceptual del trabajo