UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL

“MODOS DE PENSAMIENTO EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LOS ESTUDIANTES DEL I CICLO DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2020”

ANA MARIA REYNA SEGURA

Callao, 2021

PERÚ

DEDICATORIA

A mi madre, hija y hermanos por su apoyo incondicional.

A mis alumnos de Matemática Básica que colaboraron en la realización de este trabajo. .

AGRADECIMIENTO

Al Mg. Roger Reyna Segura y a la alumna Srta. Carmen Jheny Huaraca Santivañez por su apoyo en la presente investigación.

A la UNAC por el financiamiento del desarrollo de la investigación a través del Fondo Especial de Desarrollo Universitario (FEDU).

TABLAS DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue mostrar los modos de pensamiento que aplican los estudiantes en el desarrollo de un sistema de ecuaciones lineales en la asignatura de matemática básica ofrecida en la Universidad Nacional del Callao.

La investigación fue desarrollada con estudiantes de primer semestre de ingeniería química de la institución mencionada anteriormente, y se muestran los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska.

Nuestra problemática se sitúo en la enseñanza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales.

Como resultado de investigación, se obtuvo la información y datos significativos obtenidos en estudiantes de nivel universitario, que nos permiten dar cuenta de los modos de pensar el concepto, en la perspectiva de que el estudiante que logra transitar entre estos tres modos obtiene una comprensión plena los sistemas de ecuaciones.

PALABRAS CLAVE: modos de pensamiento, enseñanza-aprendizaje, sistema de ecuaciones lineales

ABSTRACT

The objective of this research was to show the ways of thinking that students apply in the development of a system of linear equations in the subject of basic mathematics offered at the National University of Callao.

The research was developed with first semester students of chemical engineering from the institution mentioned above, and the articulating mathematical elements in the ways of thinking are shown. These modes have been supported by Sierpinska's practical and theoretical thought.

Our problem was located in the teaching-learning of systems of linear equations.

As a result of research, the information and significant data obtained in university-level students were obtained, which allow us to account for the ways of thinking about the concept, from the perspective that the student who manages to move between these three modes obtains a full understanding systems of equations.

KEY WORDS: modes of thought, teaching-learning, system of linear equations.

INTRODUCCIÓN

La relación entre el desarrollo de las matemáticas pensamiento y creatividad con planteamiento y resolución de problemas matemáticos; la creatividad y las matemáticas son disciplinas que no suelen aparecer juntos.

Los fenómenos de interés en la enseñanza están relacionados con el acto de enseñar, el contexto, y sobre todo con el aprendizaje; todos ellos íntimamente orientados hacia la evaluación. Las actuales investigaciones en el campo de la enseñanza aprendizaje de las ciencias se orientan y fundamentan en las teorías cognitivas.

Lo más importante para lograr el aprendizaje significativo es el conocimiento previo, la experiencia previa, o la percepción previa, donde el aprendiz debe manifestar una predisposición para relacionar de manera no-arbitraria y no literal el nuevo conocimiento con el adquirido previamente.

La educación matemática como campo de investigación es aún joven; sin embargo, es fuente de muchos estudios con métodos y paradigmas variados; este aspecto es consecuencia de que recibe aportaciones de diversas áreas como la psicología, pedagogía, filosofía, matemáticas e historia de las ciencias, entre otras.

Tal variedad de contribuciones hace que afloren distintas facetas y consideraciones dinámicas entre la teoría y la práctica en educación matemática (Torralbo et al., 2001); así mismo hay enriquecimiento con las interacciones que se establecen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como consecuencia de esta múltiple conexión de la educación matemática.

El presente trabajo de investigación se desarrollará en tres etapas: la primera, donde se recogen los sustentos teóricos que nos permitan elaborar una propuesta de enseñanza de los sistemas de ecuaciones con respecto a los modos de pensamiento de los alumnos del I ciclo. Una segunda etapa, donde se pone en funcionamiento la propuesta en un experimento piloto y una etapa final, donde se aplica en forma definitiva la propuesta de estudio.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En la Facultad de Ingeniería Química, como docente en el área de matemática, en particular en los primeros ciclos, nos hemos dado cuenta que la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en el modo de pensamiento sintético-geométrico y además no muestran un vínculo adecuado entre los modos sintético y analítico, en particular en lo referente a los sistemas de ecuaciones lineales.

Es claro que el Álgebra Lineal es un área de las matemáticas que tiene aplicabilidad en muchas otras, por ejemplo, en análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, entre otras. Uno de los conceptos que más aplicaciones tiene dentro del Álgebra Lineal y fuera de ella son los sistemas de ecuaciones lineales.

En nuestro sistema educativo este tema es abordado a partir en la educación secundaria y en general en los ciclos básicos de los programas universitarios se estudian temas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales donde se busca desarrollar una teoría más formal sobre los mismos. El énfasis en la secundaria se centra en los métodos de solución de un sistema: reducción, eliminación y sustitución; de tal manera que al ingresar a la universidad los estudiantes conciben que al tener un sistema de ecuaciones basta con aplicar algún método de solución.

Esto ha minimizado la importancia de este concepto para resolver problemas y ha hecho de este un proceso mecánico que no le permite al estudiante comprender el significado de la solución a un sistema de Ecuaciones lineal.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

¿Cuáles son los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020?

1.2.2. Problemas específicos

a) ¿Como se identifican los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020?

b) ¿Como analizar los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Determinar los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

1.3.2. Objetivos Específicos

a) Identificar diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

b) Analizar diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

1.4. Limitantes de la Investigación

Las condiciones limitantes que afectan a la investigación son:

1.4.1. Limitante teórica.

La investigación a la variable modos del pensamiento solo se estudiará la dimensión sintético-geométrico y no los vínculos adecuado entre los modos sintético y analítico, sino sería muy extenso para el tiempo asignado para este trabajo.

1.4.2 Limitante temporal.

Los datos a utilizar corresponden a los estudiantes del I ciclo de Ingeniería Química del año 2020.

1.4.3 Limitante Espacial.

Se trabajó con estudiantes solo que llevan cursos de Matemática Básica, además, se llevaron a cabo las sesiones en forma virtual con los estudiantes del I ciclo de Ingeniería Química del año 2020.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Antecedentes Internacionales

Castilla. (2004) en su trabajo de investigación titulado: "Análisis de los modos de pensamiento en la interpretación geométrica del concepto dependencia/independencia lineal en $\mathbb{R}^2$ ", analizaron los diversos modos de pensamiento que un grupo de estudiantes de nivel superior utilizaron para resolver problemas que involucraron el concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, y se trató de descubrir si lograron conectar los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético al resolver los problemas relacionados con dicho concepto. Para ello se aplicaron dos pruebas: la primera (fase exploratoria) consistió en 9 reactivos y tuvo como objetivo conocer los niveles de conocimiento que los estudiantes tenían sobre el concepto; con base en los resultados obtenidos, en la segunda prueba (fase final) se diseñó una situación de aprendizaje con 5 reactivos que indujeran el uso de distintas representaciones del concepto dependencia/independencia lineal provocando la conexión entre los modos de pensamiento analítico y sintético, provocando el uso de las gráficas (pensamiento sintético-geométrico) sobre los procedimientos algebraicos o aritméticos (pensamiento analítico-aritmético). Todo lo anterior con el fin de que el estudiante actúe, reflexione, evolucione su propio conocimiento y lo conduzca a construir dicho concepto. Se identificaron las dificultades que los estudiantes presentaron para la comprensión del concepto dependencia/independencia. Se mostró que el valor del debate, el uso de distintos modos de pensamiento y la incorporación de gráficas como parte de una actividad matemática, favorecen notablemente el proceso de aprendizaje y comprensión del concepto de dependencia/independencia en Álgebra Lineal.

Parraguez. (2013), en su trabajo de investigación titulado "los modos de pensar el álgebra lineal y ejemplos AD HOC en problemas específicos de su enseñanza y aprendizaje " presenta un análisis de distintos hechos didácticos específicos en el álgebra lineal, a través de dos ejemplos. El primero se aborda, bajo el enfoque de la teoría de los modos de pensar el álgebra lineal de Anna Sierpinska (sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural) para indagar cómo estudiantes universitarios se enfrentan a los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El segundo ejemplo se sitúa en las construcciones mentales que permiten, en estudiantes universitarios, la construcción del teorema cambio base para vectores bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) como marco teórico y metodológico.

Bonilla. (2013) en su trabajo de investigación titulado "las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento" se sustenta una propuesta didáctica para la comprensión de las cónicas en estudiantes de16 a18 años de edad, a partir de una investigación con enfoque cognitivo, desde la teoría los modos de pensamiento de Anna Sierpinska, donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analíticoaritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Nuestra problemática se sitúa en la enseñanza-aprendizaje de las cónicas cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen. Consideramos que el énfasis en esas ecuaciones, promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico.

Como resultado de investigación, se diseña una propuesta didáctica exploratoria en la geometría del taxi, con la convicción de que el aprendiz entiende las cónicas cuando transita entre los distintos modos de comprenderlas: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico).

2.1.2 Antecedentes Nacionales

Macedo. (2018) en la investigación titulada “pensamiento crítico y rendimiento académico en los ingresantes del curso de estadística i en la facultad de ingeniería económica, estadística y ciencias sociales. Universidad Nacional de Ingeniería - 2017”, tesis para optar el grado de maestro en educación con mención en docencia e investigación en educación superior, tuvo como objetivo determinar la relación entre el pensamiento crítico y el rendimiento académico en los ingresantes del Curso de Estadística I en la Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Ingeniería - 2017. La investigación es de tipo descriptivo correlacional con diseño no experimental transversal. La metodología tiene un enfoque cuantitativo; se aplicó el instrumento de Watson-Glaser (1980, 2008) para evaluar el pensamiento crítico a un total de 91 estudiantes.

2.2 Bases Teóricas

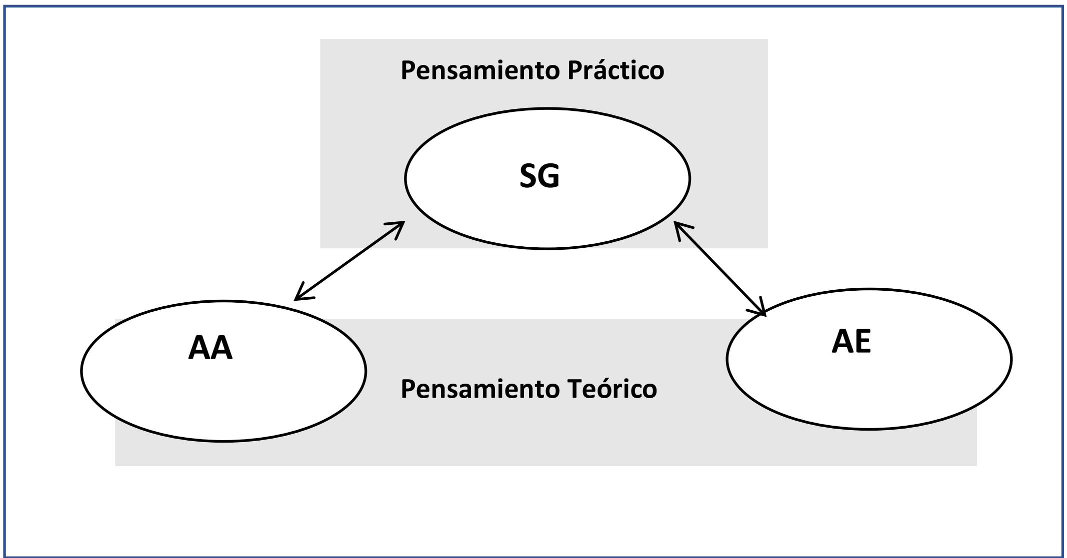
Modos de pensamiento

En el desarrollo del pensamiento algebraico, los modos de pensar planteados por Sierpinska (2000) no tienen un orden secuencial que permita priorizar un modo de otro, es importante considerar que los modos de pensar se deben utilizar de acuerdo al contexto matemático. Sin embargo, la interacción entre los tres modos de pensamiento proporciona una mayor comprensión del objeto matemático. Asimismo, la teoría proporciona una comprensión desde distintas perspectivas del objeto, considerando el pensamiento práctico desde su representación gráfica, y el pensamiento teórico como el álgebra y las propiedades que describen el objeto.

A continuación, se esquematizan los modos de pensar:

Figura 1

Representación de los modos de pensamiento



Fuente: Anna Sierpinska (2000)

Los modos de pensamiento es un marco teórico de la didáctica de la matemática formulado por Anna Sierpinska (2000) , la cual sostiene que el desarrollo del álgebra lineal se inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico, considerando que desde una perspectiva muy general, se podrían distinguir, dos grandes pasos referidos a dos procesos: el primero la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en $\mathbb{R}^3$ y el segundo la desaritmetización del espacio a su estructuración, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los ataban a los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de axiomas.

De esta forma Sierpinska (2000) define tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural, que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos: uno que rechaza los números dentro de la geometría y el otro, que rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones.

- El *modo de pensamiento sintético-geométrico* utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.
- En *el modo analítico-aritmético* las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores son importantes. Así, por ejemplo: una recta vectorial será reconocida por sus generadores, es decir

- $\ell_{v} = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \rangle$, donde $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

- El *pensamiento analítico-estructural* va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Por ejemplo, reconoceremos que un estudiante posee este modo de pensar, si a través del concepto de dimensión logra establecer que dos subespacios vectoriales son isomorfos.

Astorga (2015) define los modos de pensar como:

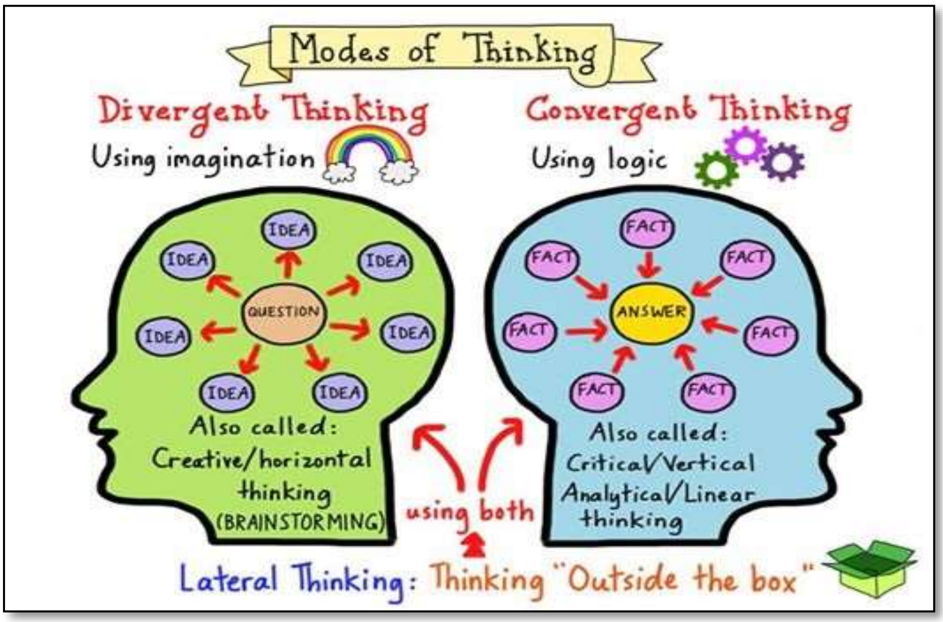
- Sintético – Geométrico (SG): Modo desde el pensamiento práctico, el cual describe el objeto en su forma, desde la representación gráfica convencional, utilizando elementos de la geometría como puntos, líneas, curvas, planos, por mencionar algunos.
- Analítico – Aritmético (AA): Modo adscrito al pensamiento teórico, utiliza el álgebra para describir el objeto, a través de fórmulas, relaciones numéricas o ecuaciones.
- Analítico – Estructural (AE): Modo de pensamiento teórico, que utiliza la axiomática, propiedades o invariantes para describir el objeto.

Allison Green (2019) : Expresa los tres modos de pensar:

Es esencial para la naturaleza humana poder pensar de manera crítica y creativa. Nuestra capacidad y tendencia a pensar de manera crítica y cuidadosa tiene prioridad sobre el conocimiento del contenido, no solo en el aula sino en el mundo más amplio que nos rodea. Se cree que hay tres modos diferentes de pensamiento: pensamiento lateral, divergente y convergente.

Figura 2

Modos de pensamiento.



Fuente: Allison Green-Boston Tutoring Services (2019)

- **Pensamiento convergente (usando lógica).** Este tipo de pensamiento también se denomina pensamiento crítico, vertical, analítico o lineal. Generalmente se refiere a la capacidad de dar la respuesta "correcta" a preguntas estándar que no requieren una creatividad significativa. Esto incluye la mayoría de las tareas en la escuela y en las pruebas estandarizadas. El pensamiento convergente es el tipo de pensamiento que se enfoca en dar una respuesta única y bien establecida a un problema. Cuando un individuo usa el pensamiento convergente para resolver un problema, conscientemente usa estándares o probabilidades para emitir juicios.

- **Pensamiento divergente (usando la imaginación).** Este tipo de pensamiento también se llama pensamiento creativo u horizontal. Es un proceso de pensamiento o método utilizado para generar ideas creativas mediante la exploración de muchas soluciones posibles. Cuando un estudiante usa el pensamiento divergente, los pensamientos generalmente ocurren de manera espontánea y fluida. Se exploran muchas soluciones posibles en un corto período de tiempo y las conexiones inesperadas se establecen más fácilmente. Una vez completado el proceso de pensamiento divergente, las ideas y la información se organizan y estructuran utilizando el pensamiento convergente.

- **Pensamiento lateral (utilizando tanto la lógica como la imaginación).** Este tipo de pensamiento se conoce comúnmente como "pensar fuera de la caja". Implica resolver problemas a través de un enfoque indirecto y creativo, utilizando un razonamiento que no es inmediatamente obvio e involucrando ideas que pueden no ser obtenibles usando solo la lógica tradicional paso a paso. Para comprender el pensamiento lateral, es necesario comparar el pensamiento convergente y divergente y construir una relación de trabajo entre los dos tipos.

La enseñanza del álgebra lineal

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra lineal es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics, y Oktaç (1997): hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de esa materia o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a esa enseñanza explícitamente vinculados con la investigación.

Los estudios del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) acerca del álgebra lineal son una excepción. Maracci (2008) indica que no ha habido muchas investigaciones en que las dificultades hayan sido objeto de un proyecto de investigación. Incluso, Dorier y Sierpinska (2001) expresa que es ésta un área relativamente nueva en la Didáctica de Matemáticas avanzadas. Los estudios de Dubinsky (1997), Harel (1989) y Sierpinska, Dreyufus y Hillel (1999) confirman que, a veces, esta materia produce una detención en el aprendizaje. La dificultad parece estar en la naturaleza abstracta de los objetos involucrados, Harel (1990) advierte que la representación visual de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar no ayuda como este supone.

Cuando un alumno tiene que plantear un problema, tiene que pensar, analizar la formulación críticamente, examinar los datos de dicha formulación y manejar tales estrategias de resolución que permitan obtener la solución a dicho problema, todo esto también se practica resolviendo problemas.

La resolución y el planteamiento de los problemas ayudan a fortalecer lo que se está aprendiendo; por tanto, Noda (2000) dice que ambas actividades son importantes para la construcción de conocimientos matemáticos, que es una acción cognitiva básica esencial para la teoría de la educación y práctica; por esa razón, el concepto de número y la resolución de problemas y las poses se consideran la columna vertebral del conocimiento matemático escolar. (Ayllón, 2012).

La resolución de problemas es un componente básico para el aprendizaje, así como para la adquisición de conocimientos. García (1998) considera que el planteamiento de problemas es una prioridad para consolidar y mejorar el conocimiento, también advierte que los investigadores pueden alcanzar logros a través de sus teorías científicas cuando formular, descubrir o afrontar nuevos campos problemáticos.

Cuando un estudiante tiene que resolver un problema, a priori, piensa que no es una tarea muy fácil, que es un desafío para desarrollar su creatividad y habilidades matemáticas.

Estas circunstancias también se dan en el planteamiento del problema; posicionar el problema permite obtener un aprendizaje significativo e investiga las habilidades de la persona, al establecer relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos, así como estructuras numéricas. Para plantear problemas es necesario tener un alto nivel de abstracción y exige reflexión, que permite llegar a una fase de razonamiento que facilita la matemática construcción de conocimiento.

La persona que plantea un problema matemático se basa en sus propias ideas, siguiendo un proceso creativo, por tanto, un problema que plantea constituye el planteamiento propio del individuo y no una reformulación de un problema ya planteado.

Desde el nacimiento, la gente busca explicaciones para todo lo que rodea, poniendo su creatividad a trabajar. la creatividad debe desarrollarse, estimulado y animado, por ello, es necesario educarlo e incluirlo en las escuelas. Barbarán y Huguet (2013) consideran que una corriente en el sistema educativo no fomenta la creatividad, también dicen que la dificulta en algunos casos.

Varios investigadores relacionan el problema planteado con el conocimiento matemático y desarrollo de la creatividad; autores como Krutetskii (1969) y Ellertoh (1986) indican la existencia de una relación implícita entre la capacidad requerida plantear un problema y el nivel de creatividad, así como la competencia matemática. También existe una relación evidente entre creatividad y resolución de problemas (Callejo, 2003) desde cuando cada persona tiene que resolver un problema, la creatividad se activa al realizar ese encargo. Ayllón y Gómez (2014) dicen que las asignaciones de planteamiento de problemas desarrollan la creatividad en escolares y mejorar la adquisición de conceptos matemáticos.

La importancia depende de dos razones fundamentales (Harel 1989; Kolman y Hill 2008):

- Primero, el álgebra lineal tiene una amplia gama de aplicaciones en diferentes campos como ecuaciones diferenciales, análisis y probabilidad. Los campos de estudio de la física, la química, también se pueden agregar a la lista biología, economía, finanzas e ingeniería. Google y el sistema de posicionamiento global (GPS) son ejemplos de aplicaciones modernas de álgebra lineal (Kolman y Hill 2008).
- Segundo: La razón fundamental es que brinda a los estudiantes la oportunidad de aprender a realizar abstracciones matemáticas.

  Refiriéndose a estos problemas persistentes sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, Sierpinska (2000, p. 211) afirmó que "entendimos que a pesar de todas las innovaciones que hicimos al presentar la teoría a los estudiantes, aún queríamos que entendieran lo mismo teoría: la teoría estructural del álgebra lineal, pero los estudiantes de nuestros experimentos no pudieron comprender la teoría porque parecían querer comprenderla con una mente 'práctica' en lugar de 'teórica' ".

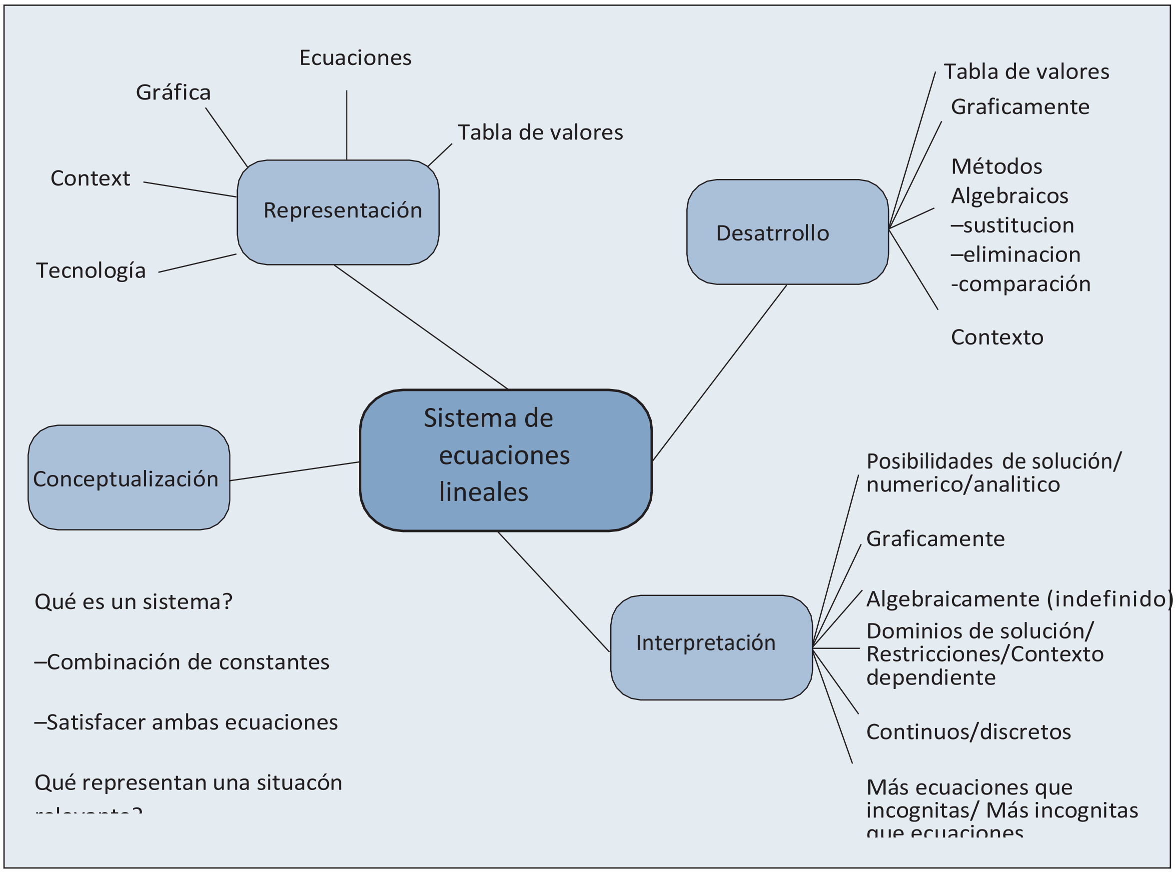
Sierpinska (2000) expresó que a pesar de las implementaciones enfocadas en mejorar la enseñanza, los estudiantes continuaron teniendo dificultades para comprender conceptos en álgebra lineal, afirmó que la inconsistencia entre la naturaleza del álgebra lineal y los modos de pensamiento de los estudiantes causó este resultado. Desde este punto de vista, este estudio tiene como objetivo explorar las formas de pensar de los estudiantes de pregrado mientras resuelven problemas en el modo de descripción y representación abstracta en álgebra lineal, específicamente en conceptos de independencia / dependencia lineal.

Hillel (2000) reveló tres modos de descripción y el problema de la representación en el álgebra lineal y uno de ellos es el modo abstracto. Ser consciente de los modos de pensamiento de los estudiantes asociados con las definiciones de los conceptos fundamentales del álgebra lineal podría ser útil para fines pedagógicos. De esta manera, los profesores no solo serían conscientes de cómo piensan los estudiantes de pregrado sobre los conceptos fundamentales del álgebra lineal, como la independencia / dependencia lineal, sino que también pueden utilizar esta información como base para un entorno de enseñanza significativo.

Enseñanza de Sistema de ecuaciones lineales

Figura 3

Mapa conceptual de Sistema de Ecuaciones



Fuente: Ana Reyna Segura (2017)

Modos de resolver un sistema de ecuaciones

Una meta de la enseñanza de sistemas de ecuaciones en matemáticas en la escuela secundaria es proporcionar a los estudiantes una herramienta matemática para resolver una clase particular de problemas. Debido al dominio del álgebra en matemáticas, la mayoría de los métodos de resolución de problemas son algebraicos (se considera que los métodos algebraicos son más rigurosos que otros). Pero el deseo de rigor puede conducir a una comprensión incompleta e inadecuada comprensión del concepto de sistema de ecuaciones, como ilustra la investigación de Sfard y Linchevski (1994). Por lo tanto, además de los métodos algebraicos (de sustitución, eliminación y comparación), las tablas de valores y los gráficos también son medios importantes para comprender y resolver sistemas. Amplían la concepción del estudiante de un sistema de ecuaciones.

Los estudiantes deben poder explorar la variedad de métodos para resolver sistemas a fin de comprender las fortalezas y debilidades de cada método; luego, cuando los estudiantes trabajan con sistemas de ecuaciones, pueden tomar decisiones críticas en su modelado matemático. Además, cada método requiere el uso de matemáticas difíciles y ricas y habilidades matemáticas. Por ejemplo, ser capaz de interpretar visualmente variaciones en el gráfico es matemáticamente significativo para comprender la situación gráficamente, una perspectiva única que no se puede evaluar con métodos algebraicos. Sin embargo, los valores numéricos precisos a menudo están fuera de su alcance cuando se utilizan métodos gráficos.

Alternativamente, el uso de una tabla de valores permite un tipo particular de atención a los pares ordenados que otros métodos no permiten. En este sentido, una integración de los diversos métodos para modelar y resolver problemas parece importante para una comprensión amplia y profunda de los sistemas de ecuaciones. Este argumento incorpora más que la noción común de ofrecer múltiples estrategias para que los estudiantes puedan elegir un método para resolver un sistema. Como argumentó Janvier (por ejemplo, 1987), una comprensión sólida del tema requiere comprender la transición de un método a otro y comprender la interacción entre cada representación. Por esta razón, deberíamos ser aún más explícitos sobre el uso de representaciones múltiples en nuestra enseñanza.

Una función es lineal si y solo si puede escribirse de la forma en donde a, b son constantes, y. (Haussler, 2003, p.139). Igualmente, una función lineal se puede considerar como: “Una función de proporcionalidad directa los valores que toman las variables y son en general números reales, que corresponden a las medidas de magnitudes que intervienen en las diversas situaciones” (Godino & Font, 2003, pág. 803). Esta tiene como dominio y condominio todos lo reales (trabajando en ese conjunto), y como se mostró anteriormente su expresión analítica es una ecuación de primer grado o lineal la cual es aquella que responde a la forma.

Existen dos tipos de ecuaciones lineales:

- Si la ecuación se denomina homogénea
- Si la ecuación se denomina no homogénea o completa.

Cuando existe un conjunto de ecuaciones lineales donde se quiere que y tomen el mismo valor se llama sistema de ecuaciones lineales. En este caso se especificará el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, es decir, de dos ecuaciones, con dos incógnitas. Y se deben encontrar el valor de las incógnitas y tales que las dos ecuaciones sean verdaderas. (Kolman, 2006, p.62), generalmente en situaciones reales se hace necesario utilizar ecuaciones lineales de primer grado (dos variables) y en otras se requieren dos o más ecuaciones lineales a la vez lo que se denomina sistema de ecuaciones lineales. Las ecuaciones con una incógnita, llamadas de primer grado reciben este nombre porque el máximo exponente de la variable independiente es 1. En un sistema de ecuación lineal se pueden evidenciar tres casos:

- el sistema tiene una única solución,
- el sistema no tiene solución y
- el sistema tiene más de una solución (infinidad de soluciones), en este caso solo se trabajará el primero. Solucionar un sistema de ecuaciones lineales significa encontrar los valores solución, que son comunes a todas las ecuaciones del sistema.

Existen muchos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, pero en este caso solo trabajaremos cuatro los cuales son método gráfico, método de igualación, método de sustitución y el método de eliminación o reducción, expuestos por Gallego & Fornés (2009).

El Grupo Azarquiel, (1993) evidencia que los estudiantes tienen dificultades a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales:

Así en el método de igualación, se manifiesta que el estudiante deja de por medio la ecuación inicial y la igualdad existente entre las dos ecuaciones, lo cual se debe a un aprendizaje muy pobre y difícil de resolver; así como también los estudiantes preparan correctamente las ecuaciones para reducirlas, y encuentra correctamente un valor el cual luego lo deja de lado, terminado. luego contradiciéndose en sus resultados. Igualmente, algunos de los estudiantes solo tienen en cuenta una ecuación y dejan de lado la otra.

2.3 Conceptual

Los educadores y estudiantes, aunque la importancia es clara, perciben que enseñar y aprender álgebra lineal es una experiencia difícil (Hillel 2000).

Enseñanza y aprendizaje del algebra lineal: Durante la década de 1990, muchos investigadores realizaron estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal (Carlson 1993; Dorier et al. 2000; Dubinsky 1997; Harel 1989; Nardi 1997).

Para los estudiantes que intentan aprender muchos nuevos conceptos y teoremas junto con nuevas notaciones, el formalismo que utiliza la lógica y el lenguaje de conjuntos y la teoría de números son obstáculos que deben superar. Los investigadores afirmaron que la falta de conocimientos matemáticos específicos.

El conocimiento y las habilidades son otras razones por las que los estudiantes experimentan obstáculos en el aprendizaje del álgebra lineal (Britton y Henderson 2009; Dorier y col. 2000). Entonces, los arreglos pedagógicos deben ser hecho para facilitar el proceso de conceptualización. Desde este punto de vista, se puede concluir que los estudios describir la comprensión de los estudiantes de pregrado de los conceptos fundamentales (subespacio, lineal independencia / dependencia, base, etc.) y centrarse en los procesos de pensamiento son importantes en términos de desarrollo práctica sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal.

Por estas razones, en los últimos años, se han realizado varios estudios sobre conceptos de álgebra lineal (Bogomolny 2006; Britton y Henderson 2009;

Ertekin, Solak y Yazıcı 2010; Hristovitch 2001; Konyalıoğlu, İpek e Işık 2003; Nardi 1997; Stewart y Thomas 2009; Stewart y Thomas 2010; Wawro, Sweeney y Rabin 2011) entre estos el objetivo del estudio de Bogomolny (2006) fue identificar algunas de las dificultades que tienen los estudiantes al aprender conceptos clave en álgebra lineal (vectores y espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales y base) y definir las fuentes de estas dificultades.

2.4 Definición de términos básicos

Rendimiento

La idea rendimiento refiere a la proporción que surge entre los medios empleados para obtener algo y el resultado que se consigue. El beneficio o el provecho que brinda algo o alguien también se conoce como rendimiento.

Desempeño

Desempeño es el acto y la consecuencia de desempeñar: cumplir una obligación, realizar una actividad, dedicarse a una tarea. Esta acción también puede vincularse a la representación de un papel.

Comprensión

La comprensión, bajo el enfoque educativo, es la capacidad que desarrollan los estudiantes para hacer uso productivo de conceptos, teorías, narraciones y procedimientos disponibles en las asignaturas.

Enseñanza para la comprensión

La enseñanza para la Comprensión (EpC) corresponde a un marco metodológico de enseñanza que recoge los principios de una enseñanza basada en el constructivismo, enfoque adoptado en el diseño educativo de nuestra universidad. La metodología se presenta como una oportunidad para que los docentes diseñen y organicen actividades de aprendizaje con un claro itinerario que permita a los estudiantes realizar tareas significativas de manera individual y colectiva.

Construcción de un concepto matemático

Capacidad de usar más registros de representaciones de un concepto matemático para representarlo, haciendo tratamientos de esa representación en un mismo registro y convertir tales representaciones en otro registro de representación. D'Amore (2017).

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis General

Los modos de pensamiento desarrollan una adecuada interpretación geométrica y analítica de los sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao.

3.1.2. Hipótesis Específicas

a) Los estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao identifican adecuadamente los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao.

b) Los estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao analizan adecuadamente los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales.

3.2. Definición conceptual de variables.

Variable Independiente.

Variable X: Modos de pensamiento en la interpretación geométrica y analítica del sistema de ecuaciones lineales.

La investigación que se va desarrollar se caracteriza por ser, descriptivo, utilizando un diseño transversal ya que se puede observar una sola vez la variable a lo largo del tiempo establecido.

Por su naturaleza, la variable identificada es del tipo cualitativo.

3.2.1 Operacionalización de la variable.

Tabla 1

Operacionalización de la variable

VARIABLE	ESCALAS	INDICADOR	TÉCNICAS ESTADÍSTICAS	MÉTODO
X = Modos de pensamiento	Escala nominal	Elección del modo de pensamiento Sintético-Geométrico Analítico-Aritmético Analítico-Estructural	Descriptiva	Lista de Cotejos

Fuente: Ana Maria Reyna Segura (2020)

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de la investigación.

El diseño de la investigación a realizarse es no experimental, con la finalidad de conocer la relación entre las variables planteadas; esta es de corte transversal ya que los datos se observan en un solo momento de tiempo.

4.2. Método de investigación.

El enfoque metodológico empleado en este estudio consistió en un análisis multinivel, conocido también como análisis lineal jerarquizado (Bickel, 2007; Murillo, 2008) con dos niveles: los estudiantes (que corresponden al nivel 1) y el aula (que corresponde al nivel 2). Estos modelos permiten estudiar el efecto de variables independientes en una variable dependiente, en donde las primeras pueden corresponder al nivel 1 (por ejemplo, sexo) o al nivel 2 (características del aula).

Según Murillo (2008), los modelos multinivel son la metodología de análisis más adecuada para trabajar con datos jerarquizados o anidados (por ejemplo, estudiantes en aulas), esto los convierte en una estrategia adecuada para la investigación educativa de carácter cuantitativo, en los casos donde se requiere conocer cómo se relacionan las características del curso asociadas al profesor, o a una sección con una variable dependiente. Esto posibilita realizar análisis tales como estimar cuánta varianza de los datos explica cada nivel de análisis en la variable dependiente (efecto del aula) o la influencia de variables independientes de distintos niveles.

Para este estudio, los modos de pensamiento de los estudiantes serán explicada a partir de las características de los entornos didácticos, incorporando variables de control. La variable dependiente, los modos de pensamiento de los estudiantes, se ve influenciada por el aula según la literatura, por lo que es necesario considerar su variación a nivel del estudiante y del aula. De este modo, el modelo multinivel representa un modo de análisis adecuado para el objetivo de esta investigación.

Desde los objetivos de investigación, ha sido pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de caso, en la medida que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad, en un período de tiempo, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992).

Se refiere a "caso" en la medida que: analiza en concreto realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas, y con profundidad en casos particulares; contrasta realidades específicas de las que pueden extraerse problemas comunes y matizaciones singulares, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada. De esta estrategia metodológica se deriva, un tipo de conocimiento conceptual, que sirve para comprender realidades concretas, dentro de un contexto global. Permite aproximarse a la complejidad de los múltiples y diferentes procesos que se desencadenan en el transcurso de una situación particular en estudio. Enfatiza tanto en aquellos elementos comunes de los casos, como en aquellos elementos diferenciadores que complejizan, diversifican y especifican cada una de las diferentes experiencias estudiadas.

“...Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;...” (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69). Según Elliot (1994), las relaciones se iluminan mediante la descripción concreta de realidades sociales y personales, a través de leyes causales y de correlaciones estadísticas. Los estudios de casos proporcionan una teoría naturalista de la situación, que en esta investigación pretende aportar a nuestra comunidad en un tema tan relevante como lo es, conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Con el propósito de indagar en los modos de pensar, SG, AA y AE, la comprensión y conexión de los conceptos en estudio, que muestran estudiantes universitarios, se diseñan instrumentos –cuestionarios– para que den luces de lo que podría estar sucediendo con la coordinación y tránsito entre estos tres modos.

A continuación detallamos algunos de los aspectos más importantes de la metodología y fase de experimentación de esta investigación.

- **Implementación de la situación**

  La situación que se implementó en la investigación corresponde a la aplicación de un cuestionario a estudiantes de la Universidad Nacional el Callao. A continuación, algunos de los detalles más importantes de los informantes a los que se aplicaron las 8 preguntas que conformaban el cuestionario.

- **Justificación de la población objetivo**

Los criterios de selección de estas unidades de estudios trabajadas como "casos", se vinculan con las siguientes categorías e indicadores:

- ✓ Estudiantes de educación superior: Los conceptos sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales son vistos en conjunto en este nivel.
- ✓ Estudiantes exitosos: Esto permite apreciar la relación entre el éxito que tienen los estudiantes en la asignatura Matemática Básica y el nivel de logro en el aprendizaje de cada uno de los conceptos matemáticos en juego. Además, consideramos que estudiantes con estas características pueden establecer mejores conexiones entre los conceptos involucrados.
- ✓ Estudiantes que aprobaron Matemática Básica: Debido a que aprobaron este curso el semestre anterior al que se encuentran actualmente, por lo que tienen mayores posibilidades de acceder a todos los conceptos principales del Álgebra Lineal que llevaran en sus próximos cursos.
- ✓ Estudiantes de Ingeniería Química: Porque es una carrera puramente científica, por lo que se espera un nivel más completo y acabado de los conceptos que en otras carreras. Con esto también buscamos que el contenido matemático no sea el principal obstáculo al momento de enfrentarse los estudiantes al cuestionario.
- ✓ Accesibilidad: Los investigadores tienen la posibilidad de acceder a estudiantes de esta Institución de Educación Superior.

4.3 Población y muestra

Población muestral

La población objetivo corresponde a 85 estudiantes de la asignatura de Matemática Básica de la Universidad nacional del Callao, de los semestres académico 2020-A y 2020-B .

4.4 Lugar de estudio

El presente trabajo de Investigación se desarrolló en la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao en un periodo de 12 meses calendarios.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

La recolección de datos fue a través de la técnica de la observación para conocer la manera como se desenvolvieron sobre los modos de aprendizaje de los Estudiantes y cuáles fueron sus resultados.

Para la observación, se elaboró la lista de cotejos, en la cual se registró las criterios que se utilizan para identificar y analizar los modos de pensamiento.

Las categorías de respuesta para los ítems pueden variar en su número y valor asignado. Por lo general, se usan cinco expresiones fijas para cada ítem Hernández, Fernández y Baptista (2007); Namakforoosh (2000); Méndez (2007) aunque pueden usarse entre dos y siete alternativas de respuesta. Cuando las opciones de respuestas se presentan en número impar se debe repartir la carga positiva y negativa de manera equilibrada por lo cual es necesaria una categoría neutra. En una escala con un número par de alternativas se elimina la opción o categoría neutral o intermedia, para comprometer al sujeto o forzarlo a que se pronuncie de manera favorable o desfavorable Hernández, Fernández y Baptista (2007); a esta escala se le conoce también como escala de opción forzada.

Noda (2000) utilizó los datos cuantitativos y cualitativos, combinando un cuestionario de tipo Likert con entrevistas semi- estructuradas, donde se solicitaron descripciones de los modos del aprendizaje eficaz mediante dos preguntas abiertas. Posteriormente se administró un cuestionario Likert elaborado, con una escala de cuatro puntos (escala forzada).

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Para el procesamiento estadístico, se usó softwares estadísticos especializados tales como: SPSS versión 25 con el cual se generaron las Tablas y gráficos, así como la contrastación de hipótesis, para la interpretación de datos se ha sumado porcentajes con el fin de ver de manera más marcada un cambio en las preguntas realizadas.

- **Toma de datos**

Para recoger y registrar la información, propia del estudio de caso múltiple, y acceder a la comprensión que tenían los estudiantes sobre la temática en cuestión, es decir el concepto de dimensión de un espacio vectorial real, optamos por la técnica de las entrevistas en profundidad, para el primer momento y para el segundo momento aplicamos un cuestionario, en forma individual, realizado a la luz del marco teórico con el propósito de generar antecedentes en los dos casos del primer momento de la investigación antes mencionados. Por otra parte hemos realizado entrevistas en profundidad. Con respecto al tipo de entrevista utilizado, optamos por una entrevista estructurada, que parte de un guión- cuestionario el cual se aplicó en el estudio exploratorio (primer momento), de preguntas abiertas que se han delimitado en función del marco teórico los modos de pensamiento.

La toma de datos consistió en la aplicación del cuestionario a fines de Julio y de diciembre del año 2020, el cual respondió cada uno de los estudiantes que conforman los casos de estudio de manera individual, en 120 minutos aproximadamente. Además, para optimizar el espacio y concentración de los estudiantes, así como la observación del investigador.

- **Instrumento**

El instrumento que se aplicó corresponde a una lista de cotejos y que constituye de 09 criterios

.

Preguntas del cuestionario

Las cuatro primeras preguntas del cuestionario (Anexo) cada una de ellas son parte a) y b) relacionan los conceptos de sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ con operaciones usuales, enfocadas desde los distintos modos de pensamiento.

Las siguientes tres preguntas del cuestionario, cada una de ellas con partes (a) y (b), relacionan los conceptos dependencia e independencia lineal y solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ con operaciones usuales, enfocadas desde los distintos modos de pensamiento.

La última pregunta del cuestionario, con partes (a) y (b), relaciona los conceptos dependencia e independencia lineal y solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ con operaciones no usuales.

Objetivos generales de las preguntas

- Identificar el (los) modo(s) de pensamiento que predomina(n) en el (los) estudiante(s).
- Promover en el estudiante el tránsito entre los distintos modos de pensamiento
- Indagar algunas conexiones entre los conceptos involucrados (cada pregunta establece conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal y el de solución de un sistema de ecuaciones).

Validación del instrumento

El instrumento aplicado a los estudiantes fue sometido a diversas instancias de coevaluación por un grupo de didactas con investigaciones relacionadas y no relacionadas con la investigación. Además, la versión final del cuestionario es fruto de una reestructuración y reformulación de diseño de preguntas que buscaban rescatar desde los estudiantes las conexiones que éstos logran establecer entre los conceptos solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los de dependencia e independencia lineal de vectores.

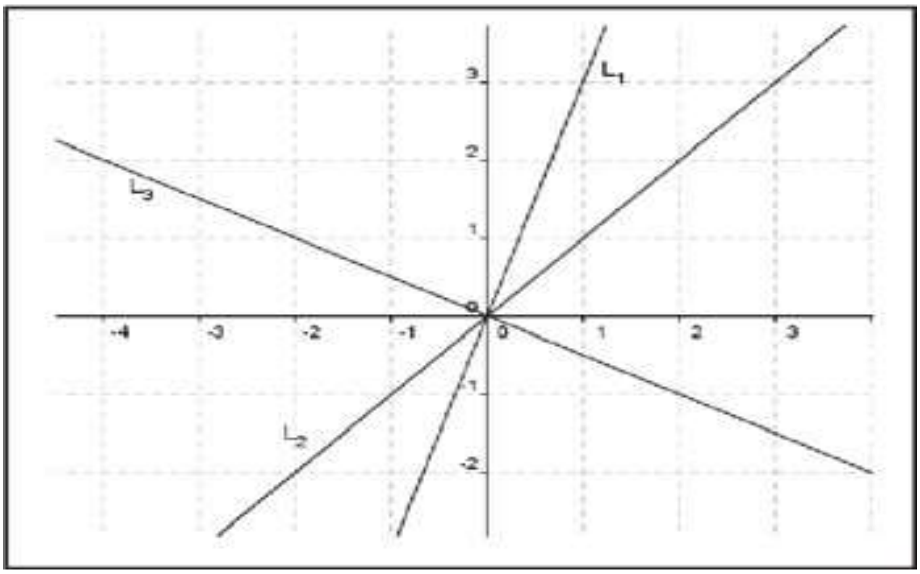
Análisis a priori de las preguntas

A continuación, se presenta el análisis a priori de dos de las preguntas del cuestionario (pregunta 1 y 5) aplicadas a los estudiantes, a través de las cuales se obtuvo información importante, la cual será confrontada posteriormente a través del análisis a posteriori.

Pregunta 1: A continuación, se presenta la solución gráfica de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

Figura 4

Solución gráfica de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:



Fuente: Geogebra

a.- En $\mathbb{R}^2$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales, ¿los vectores generadores de cada una de las rectas del sistema (vistas como subespacios de $\mathbb{R}^2$) forman un conjunto linealmente independiente? Justifique su respuesta.

b.- ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas? Justifique su respuesta.

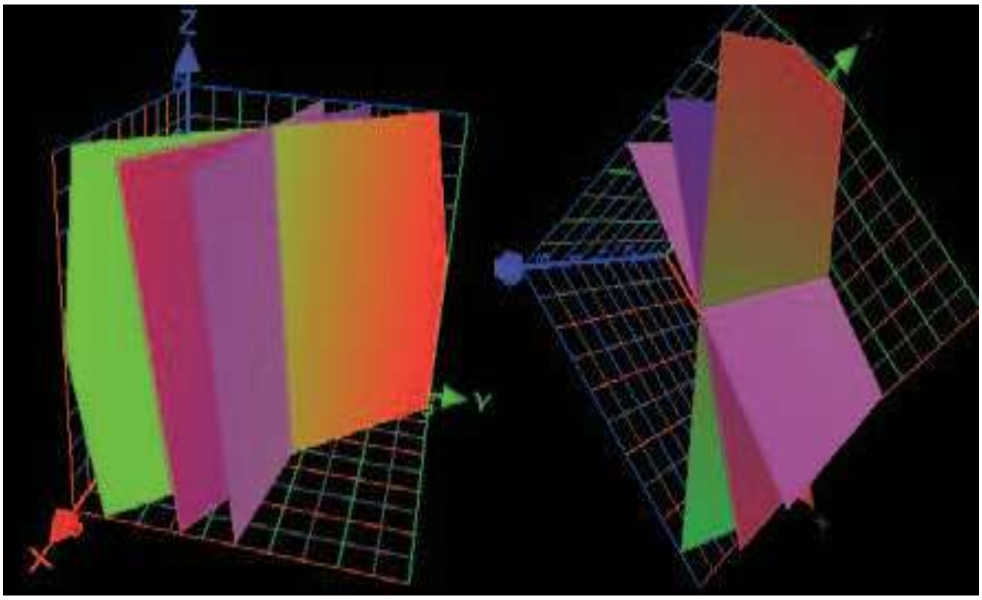
Pregunta 5: Sean $\overrightarrow{v_1} = (12, -6, 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (4, -2, 2)$, $\overrightarrow{v_3} = (-4, 2, -8)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales. Para cualquier combinación lineal de la forma:

$$x \,.\, (6, -3, 1) + y\,(2, -1, 1) + z\,(-2, 1, -4) = (0, 0, 0)$$
$$(x, y, z \in \boldsymbol{R})$$

Si se iguala coordenada a coordenada se obtiene un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya solución gráfica, vista desde distintas posiciones, es la siguiente:

Figura 5

Solución gráfica de sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas



Fuente: Ana Reyna Segura (2020)

A partir de lo anterior se pregunta:

a. ¿Cuál es el conjunto solución del sistema? Justifique su respuesta

b. ¿El conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de vectores es linealmente independiente? Justifique su respuesta

Respuesta experta pregunta 1

a. Como el sistema consta de tres rectas, el conjunto formado por los vectores generadores de cada una de ellas tiene tres vectores. Como en $\mathbb{R}^2$ el número máximo de vectores linealmente independiente es 2, este conjunto es linealmente dependiente.

b. Gráficamente se puede ver que las tres rectas del sistema pasan por el origen de coordenadas, que es el único punto común entre ellas. Por lo tanto, el sistema tiene solución única, el (0,0).

Respuesta experta pregunta 5

a. Se puede ver que la solución gráfica del sistema corresponde a tres planos que se intersecan en una recta. Por lo tanto, el sistema tiene una recta solución, es decir, infinitas soluciones.

b. El sistema resuelto en la primera parte de la pregunta proviene de la combinación lineal

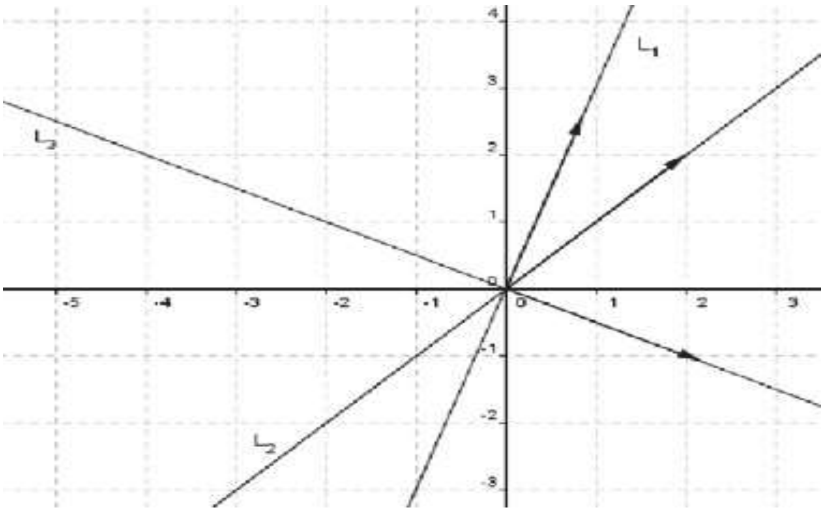
Como el sistema tiene infinitas soluciones, existen infinitas tripletas (*x,y,z*), distintas de la trivial (0,0,0), que satisfacen la combinación lineal descrita anteriormente, por lo que el conjunto es linealmente dependiente.

Análisis a priori de la pregunta 1 de las posibles respuestas de los estudiantes desde los modos de pensamiento

Si el estudiante relaciona la independencia lineal de vectores con vectores no colineales, puede interpretar la situación mostrada en la gráfica como vectores no colineales y por tanto vectores linealmente independientes (figura 6). Este argumento sitúa al estudiante en un modo de pensar SG, pues es su representación geométrica del concepto independencia lineal de vectores la que lo llevaría a concluir de esa manera. A partir de este argumento pueda darse que el estudiante relacione independencia lineal con solución única del sistema, estableciendo una conexión, errónea en este caso pues el conjunto es linealmente dependiente, entre los conceptos de independencia lineal y sistema de ecuaciones.

Figura 6

Rectas del sistema de la pregunta 3 y sus vectores generadores



Fuente. Geogebra

Aquel estudiante que argumenta a partir de la gráfica que el sistema está formado por 3 vectores en $\mathbb{R}^2$ y por tanto es linealmente dependiente podría estar situando su pensamiento en el modo AE, ya que, si bien la gráfica es lo que le permite observar 3 vectores en $\mathbb{R}^2$, es su estructura como espacio vectorial la que le permite concluir.

Se espera que algunos estudiantes continúen situándose en el modo AA para responder las preguntas. En este caso, una respuesta que reflejaría tal hecho sería el determinar las coordenadas de cada uno de los vectores generadores de las rectas y a través de ellas concluir que el conjunto de vectores es linealmente independiente o no.

Para responder la segunda parte de la pregunta, el estudiante puede observar que la única intersección común de las rectas es el (0,0) y concluir que la solución es única. En este caso, el estudiante estaría situado en el modo de pensamiento SG, pues la solución gráfica del sistema le es suficiente para resolverlo.

Es posible que algunos estudiantes determinen las ecuaciones de cada una de las rectas y a partir de ellas resuelvan el sistema mediante algún método algebraico. En este caso, el estudiante no lograría interpretar la gráfica en términos de la solución del sistema y se situaría en el modo de pensamiento AA.

En esta pregunta el estudiante podría incurrir en los siguientes errores:

- Interpretar la no colinealidad de vectores como independencia lineal del conjunto formado por ellos.
- Concluir o reafirmar que, dado que el sistema de ecuaciones tiene solución única, el conjunto de vectores es linealmente independiente debido a que solución única implica independencia lineal de vectores.

Análisis a priori de la pregunta 5 de las posibles respuestas de los estudiantes desde los modos de pensamiento.

Para poder identificar la recta intersección de los planos como la solución del sistema de ecuaciones planteado, el estudiante requiere tener una concepción geométrica del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$. Así, el estudiante que responde que el sistema tiene infinitas soluciones debido a que los tres planos se intersecan en una recta evidencia un modo de pensamiento SG, pues las gráficas presentadas en la pregunta son las que le permiten concluir.

Es posible que algún estudiante no logre situarse en un modo de pensamiento SG para resolver el problema, frente a lo cual prefiera obtener las ecuaciones del sistema a partir de la combinación lineal y luego resolver el sistema. En este caso, las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{gathered} 6x + 2y - 2z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{gathered}$$

Aquí el estudiante no utilizaría toda la información presentada en el problema y sólo recurriría a aquellos aspectos de la pregunta que le favorecen un modo de pensamiento AA, ya que al no poder interpretar la intersección de planos como la solución del sistema preferiría recurrir a sus ecuaciones y mediante algún método algebraico resolverlo y obtener el conjunto solución.

Si el estudiante logra conectar los conceptos solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y el de dependencia lineal de vectores, podrá concluir que el conjunto de vectores es linealmente dependiente debido a que el sistema de ecuaciones proveniente de la combinación lineal formada e igualada al vector nulo tiene infinitas soluciones. Si no logra establecer conexiones, es probable que el estudiante resuelva dos veces el mismo sistema, sin advertirlo.

Si el estudiante concibe la dependencia lineal como vectores colineales, es probable que concluya que el conjunto es linealmente independiente, ya que ninguno es un ponderado del otro. En este caso, si el argumento proviene de las coordenadas de los vectores, diremos que el estudiante muestra un modo de pensamiento AA, mientras que si el argumento es en base a una representación geométrica de los vectores en tres direcciones diferentes diremos que muestra un modo de pensamiento SG.

Es posible que algún estudiante extienda la idea en $\mathbb{R}^2$ de relacionar vectores linealmente independientes con vectores no colineales a $\mathbb{R}^3$, relacionando planos no coincidentes con la de un conjunto de vectores linealmente independientes, pudiendo concluir que el conjunto de vectores es linealmente independiente. Este razonamiento proviene de la interpretación geométrica que se le puede dar a la dependencia e independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$, por lo que un argumento así evidenciaría que el estudiante está situado en un modo de pensamiento SG.

Es posible que algún estudiante se base en vectores normales de cada uno de los planos que conforma el sistema. Así, puede concluir que las normales de cada uno de los planos no son colineales y por tanto el conjunto de vectores es linealmente independiente, lo que respondería nuevamente a una extensión errónea de la representación geométrica de dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ a tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. En este caso, el argumento se basa en la representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^3$, por lo que el modo de pensamiento en el que estaría situado un estudiante bajo esta respuesta es el SG.

Índice de validez

Los productos de la validez incluyen el índice de validez y las observaciones más importantes realizadas por los jueces. Ambos deben incluirse en el apartado Validez y Confiabilidad e indicar que "el índice de validez se calcula contando los acuerdos y dividiendo este valor entre el total de ítem. El índice obtenido debe ser mayor a 0.70, en el caso de instrumentos que miden eventos de las ciencias sociales" Hurtado (2012).

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

Mostraremos los métodos estadísticos que describen los datos registrados en esta investigación.

Se tomaron como referencia a los estudiantes de matemática básica del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020

Tabla 2

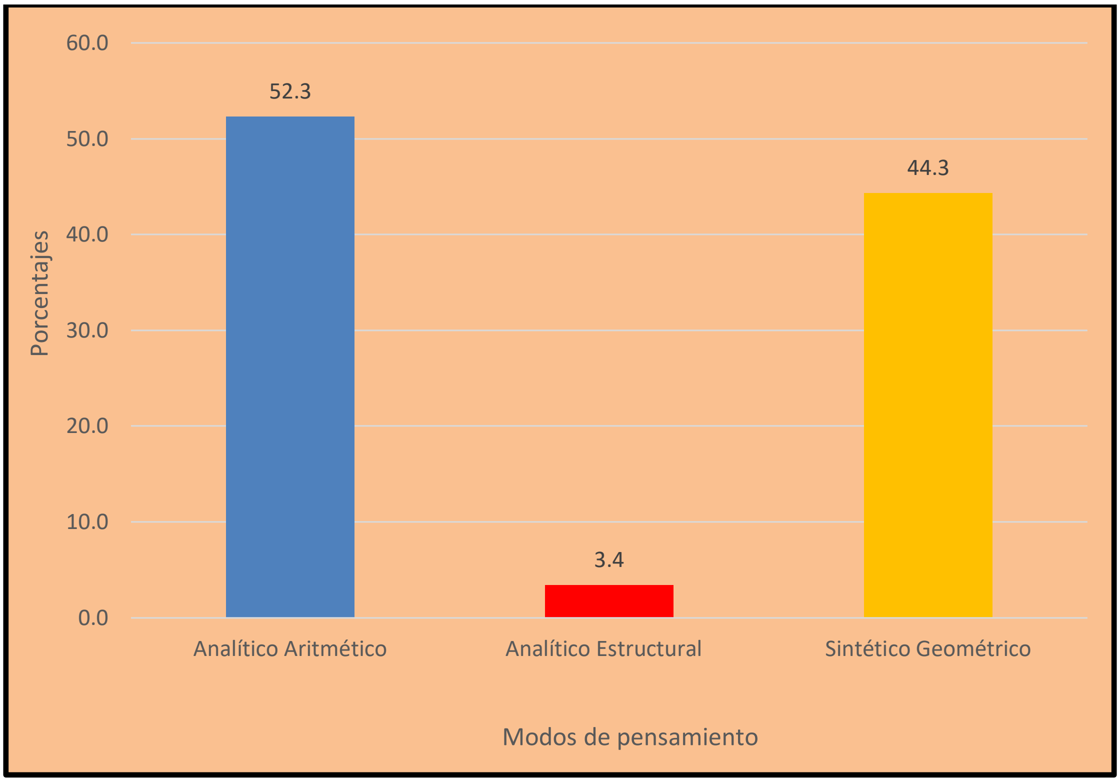
Modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales.

Modos de pensamiento	n_o	%
Analítico Aritmético	46	52.3
Analítico Estructural	3	3.4
Sintético Geométrico	39	44.3
Total	**88**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 7

Modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

El 52.3% de estudiantes su modo de pensamiento es analítico aritmético, el 3.4% de estudiantes su modo de pensamiento es analítico estructural, y el 44.3% de estudiantes su modo de pensamiento es sintético geométrico

Tabla 3

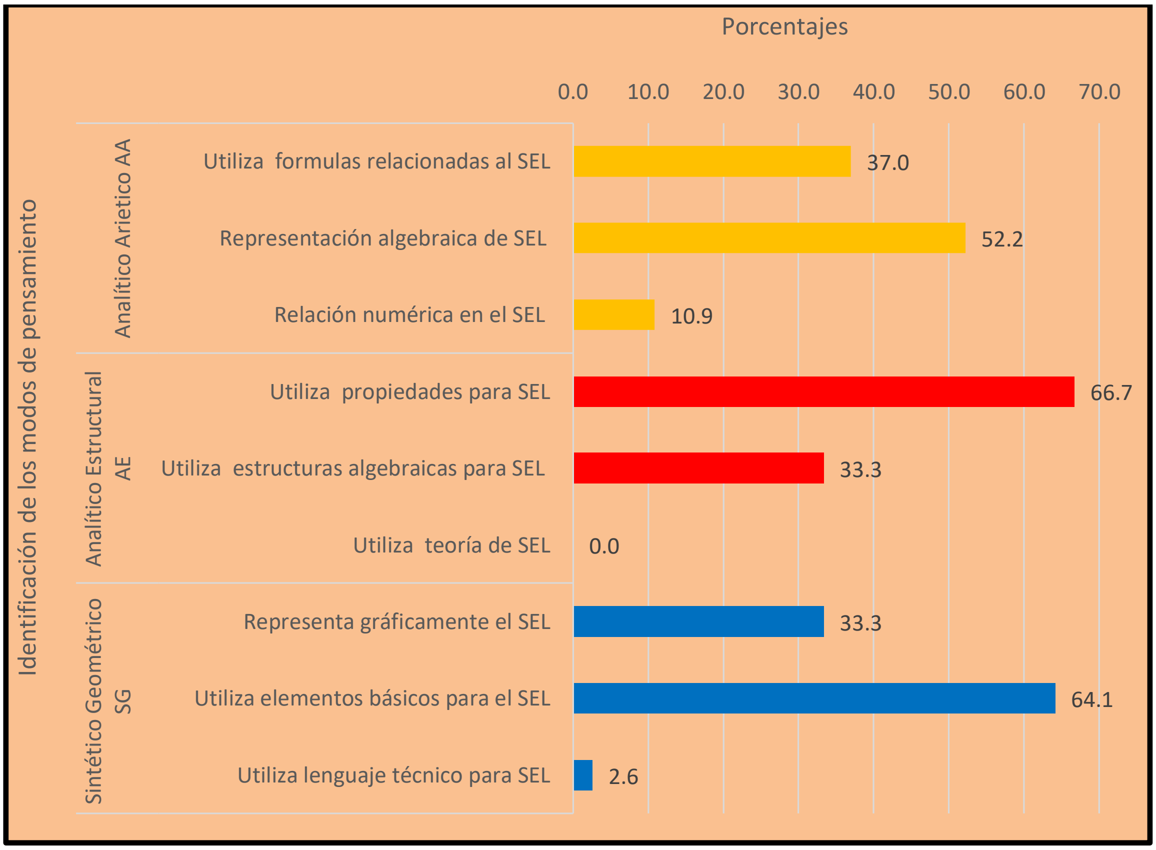
Identificación de los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales.

Identificación de los modos de pensamiento		**n_o**	**%**
Analítico Arietico AA	Utiliza formulas relacionadas al SEL	17	37.0
	Representación algebraica de SEL	24	52.2
	Relación numérica en el SEL	5	10.9
	Total	**46**	**100.0**
Analítico Estructural AE	Utiliza propiedades para SEL	2	66.7
	Utiliza estructuras algebraicas para SEL	1	33.3
	Utiliza teoría de SEL	0	0.0
	Total	**3**	**100.0**
Sintético Geométrico SG	Representa gráficamente el SEL	13	33.3
	Utiliza elementos básicos para el SEL	25	64.1
	Utiliza lenguaje técnico para SEL	1	2.6
	Total	**39**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 8

Identificación de los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales.



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

En el modo de pensamiento analítico aritmético, el 37.0% de estudiantes utilizan formulas relacionadas al SEL, el 52.2% de estudiantes representan algebraicamente el SEL, y el 10.9% de estudiantes relacionan numéricamente el SEL. En el analítico estructural el 66.7% de estudiantes utilizan propiedades para el SEL, el 33.3% de estudiantes utiliza estructuras algebraicas para el SEL, y ningún estudiante utiliza teorías del SEL, Y en el sintético geométrico el 33.3% de estudiantes representan gráficamente el SEL, el 64.1% de estudiantes utilizan elementos básicos para el SEL, y el 2.6% de estudiantes utilizan lenguaje técnico para el SEL.

Tabla 4

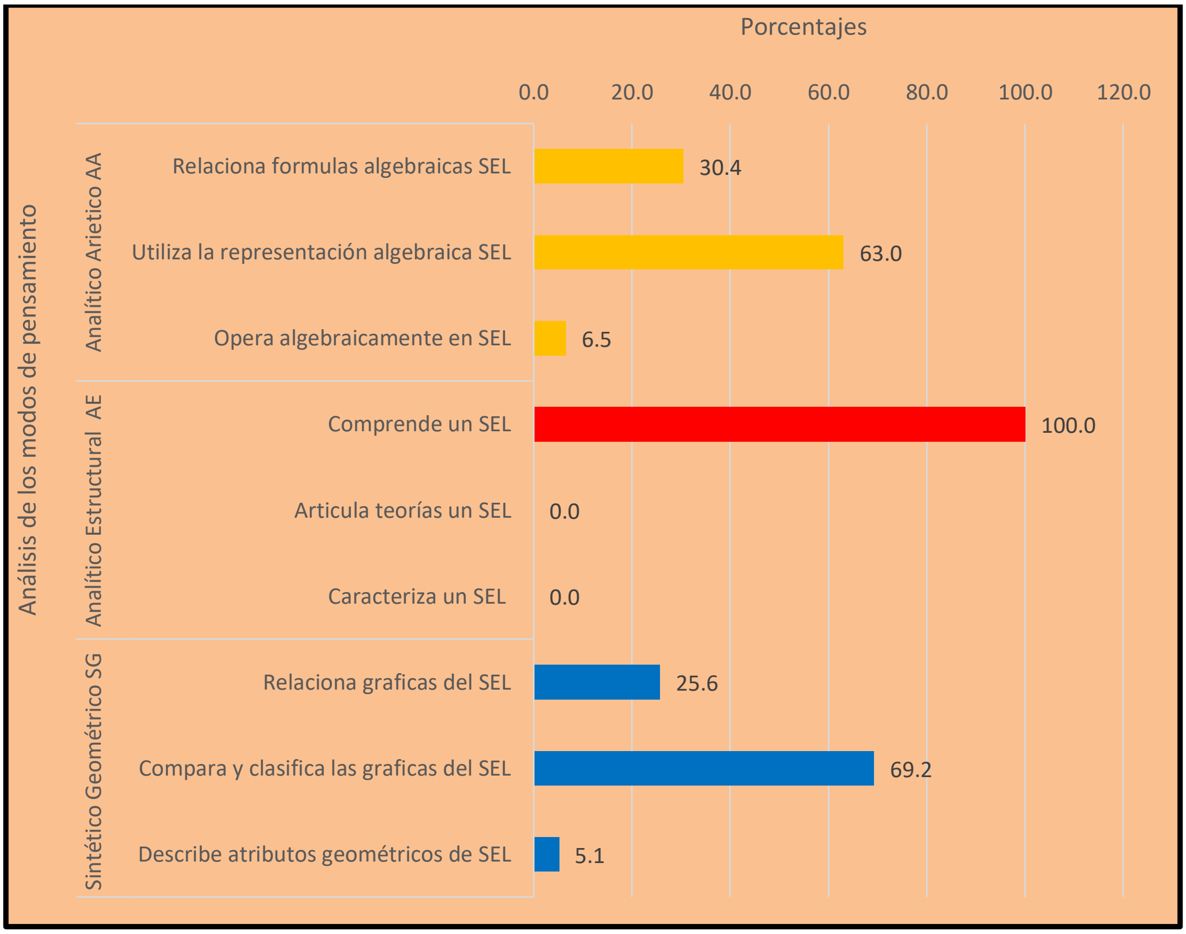
Análisis de los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales

Análisis de los modos de pensamiento		n_o	%
Analítico Arietico AA	Relaciona formulas algebraicas SEL	14	30.4
	Utiliza la representación algebraica SEL	29	63.0
	Opera algebraicamente en SEL	3	6.5
	Total	**46**	**100.0**
Analítico Estructural AE	Comprende un SEL	3	100.0
	Articula teorías un SEL	0	0.0
	Caracteriza un SEL	0	0.0
	Total	**3**	**100.0**
Sintético Geométrico SG	Relaciona graficas del SEL	10	25.6
	Compara y clasifica las graficas del SEL	27	69.2
	Describe atributos geométricos de SEL	2	5.1
	Total	**39**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 9

Análisis de los modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

En el modo de pensamiento analítico aritmético, el 30.4% de estudiantes relacionan formulas algebraicas del SEL, el 63.0% de estudiantes utilizan la representación algebraica del SEL, y el 6.5% de estudiantes operan algebraicamente el SEL. En el analítico estructural el 100.0% de estudiantes comprende un SEL, y ningún estudiante articula teorías y caracteriza el SEL, Y en el sintético geométrico el 25.6% de estudiantes relaciona gráficamente el SEL, el

69.2% de estudiantes compara y clasifica las gráficas del SEL, y el 5.1% de estudiantes describe atributos geométricos del SEL

Tabla 5

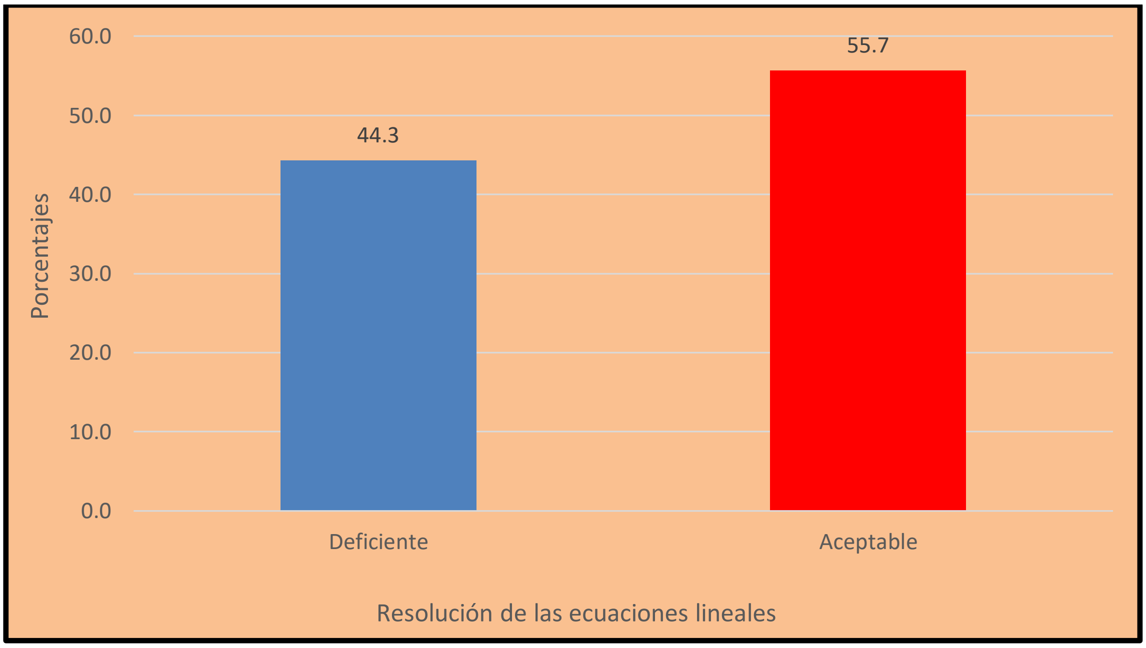
Resolución de las ecuaciones lineales en los estudiantes en la interpretación analítico aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales.

Resolución de las ecuaciones lineales	**n_o**	**%**
Deficiente	39	44.3
Aceptable	49	55.7
Total	**88**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 10

Resolución de las ecuaciones lineales en los estudiantes en la interpretación analítico aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales.



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

El 44.3% de estudiantes su resolución de las ecuaciones lineales es deficiente, y el 44.3% de estudiantes su resolución de las ecuaciones lineales es aceptable

Tabla 6

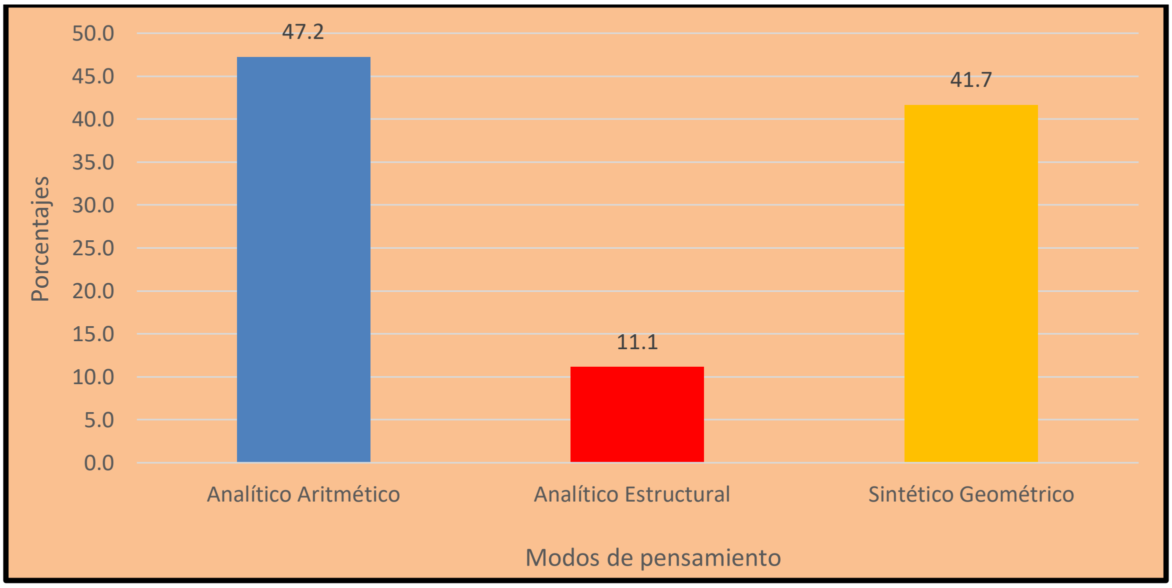
Modos de pensamiento en la interpretación analítico aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales.

Modos de pensamiento	n_o	%
Analítico Aritmético	17	47.2
Analítico Estructural	4	11.1
Sintético Geométrico	15	41.7
Total	**36**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 11

Modos de pensamiento en la interpretación analítico aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales.



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

El 47.2% de estudiantes su modo de pensamiento es analítico aritmético, el 11.1% de estudiantes su modo de pensamiento es analítico estructural, y el 41.7% de estudiantes su modo de pensamiento es sintético geométrico.

Tabla 7

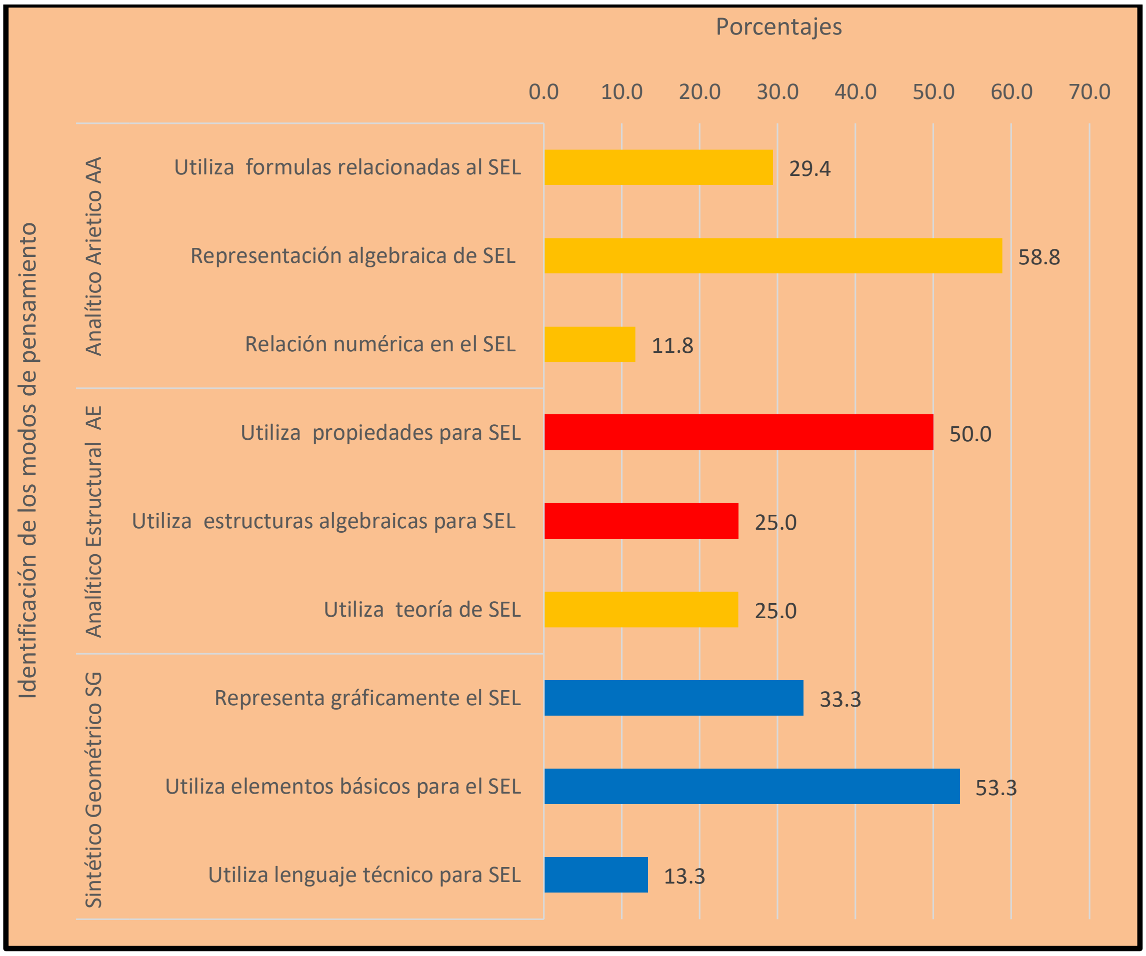
Identificación de los modos de pensamiento en la interpretación analítico estructural de los sistemas de ecuaciones lineales.

Identificación de los modos de pensamiento		**n_o**	**%**
Analítico Arietico AA	Utiliza formulas relacionadas al SEL	5	29.4
	Representación algebraica de SEL	10	58.8
	Relación numérica en el SEL	2	11.8
	Total	**17**	**100.0**
Analítico Estructural AE	Utiliza propiedades para SEL	2	50.0
	Utiliza estructuras algebraicas para SEL	1	25.0
	Utiliza teoría de SEL	1	25.0
	Total	**4**	**100.0**
Sintético Geométrico SG	Representa gráficamente el SEL	5	33.3
	Utiliza elementos básicos para el SEL	8	53.3
	Utiliza lenguaje técnico para SEL	2	13.3
	Total	**15**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 12

Identificación de los modos de pensamiento en la interpretación analítico estructural de los sistemas de ecuaciones lineales.



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

En el modo de pensamiento analítico aritmético, el 29.4% de estudiantes utilizan formulas relacionadas al SEL, el 58.8% de estudiantes representan algebraicamente el SEL, y el 11.8% de estudiantes relacionan numéricamente el SEL. En el analítico estructural el 50.0% de estudiantes utilizan propiedades para el SEL, el 25.0% de estudiantes utiliza estructuras algebraicas para el SEL, y el 25.0% de estudiantes utiliza teorías del SEL, Y en el sintético geométrico el

33.3% de estudiantes representan gráficamente el SEL, el 53.3% de estudiantes utilizan elementos básicos para el SEL, y el 13.3% de estudiantes utilizan lenguaje técnico para el SEL.

Tabla 8

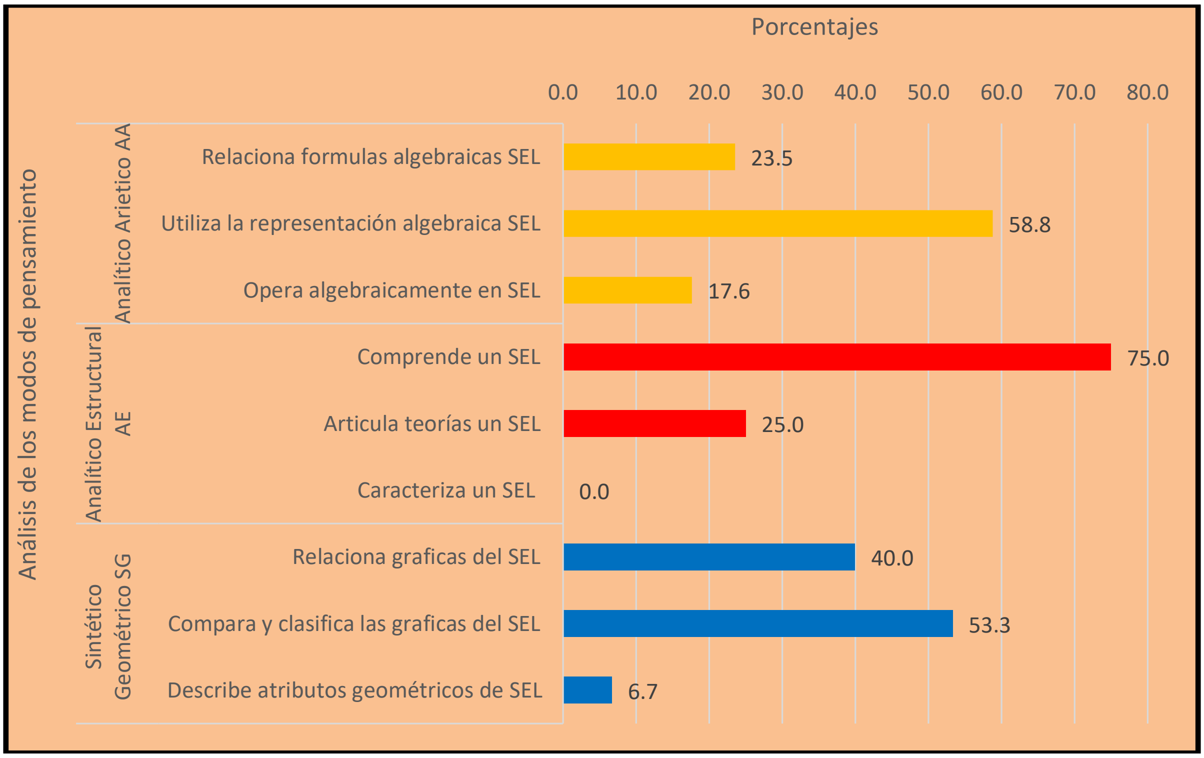
Análisis de los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la sobre los sistemas de ecuaciones lineales

Análisis de los modos de pensamiento		**n_o**	**%**
Analítico Arietico AA	Relaciona formulas algebraicas SEL	4	23.5
	Utiliza la representación algebraica SEL	10	58.8
	Opera algebraicamente en SEL	3	17.6
	Total	**17**	**100.0**
Analítico Estructural AE	Comprende un SEL	3	75.0
	Articula teorías un SEL	1	25.0
	Caracteriza un SEL	0	0.0
	Total	**4**	**100.0**
Sintético Geométrico SG	Relaciona graficas del SEL	6	40.0
	Compara y clasifica las gráficas del SEL	8	53.3
	Describe atributos geométricos de SEL	1	6.7
	Total	**15**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 13

Análisis de los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la sobre los sistemas de ecuaciones lineales



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

En el modo de pensamiento analítico aritmético, el 23.5% de estudiantes relacionan formulas algebraicas del SEL, el 58.8% de estudiantes utilizan la representación algebraica del SEL, y el 17.6% de estudiantes operan algebraicamente el SEL. En el analítico estructural el 75.0% de estudiantes comprende un SEL, el 25.0% de estudiantes articula teorías del SEL, y ningún estudiante caracteriza el SEL, Y en el sintético geométrico el 40.0% de estudiantes relaciona gráficamente el SEL, el 53.3% de estudiantes compara y clasifica las gráficas del SEL, y el 6.7% de estudiantes describe atributos geométricos del SEL.

Tabla 9

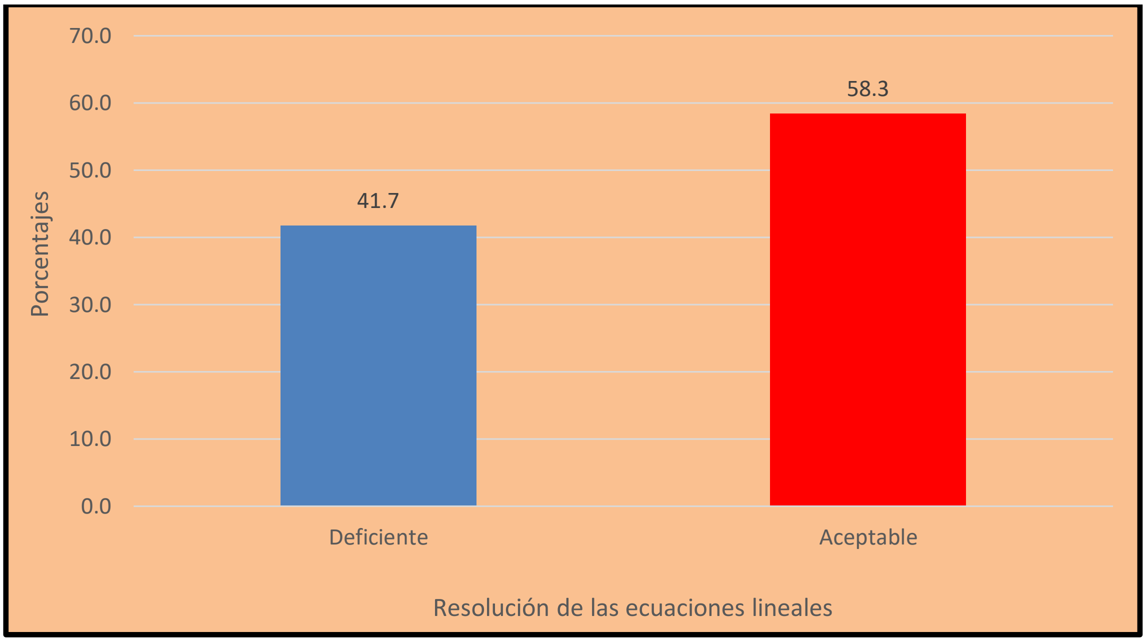
Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con los modos de pensamiento

Resolución de las ecuaciones lineales	n_o	%
Deficiente	15	41.7
Aceptable	21	58.3
Total	**36**	**100.0**

Fuente: Información obtenida de los exámenes

Figura 14

Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con los modos de pensamiento



Fuente: Información obtenida de los exámenes

Interpretación:

El 41.7% de estudiantes su resolución de las ecuaciones lineales es deficiente, y el 58.3% de estudiantes su resolución de las ecuaciones lineales es aceptable

5.2 Resultados inferenciales

Con estos resultados se deducen y sacan conclusiones acerca de situaciones presentados por los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I y II Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

Tabla 10

Comparación de muestras independientes sobre el puntaje de resolución de las ecuaciones lineales según los modos de pensamiento

Estadísticas	Ciclo	
	A	B
Muestra	88	36
Puntaje Mínimo	1	2
Puntaje Máximo	15	16
Promedio	9	10
Desviación estándar	3.4	3.8
U de Mann-Whitney	1506.0	
W de Wilcoxon	5422.0	
Z	-0.435	
Probabilidad p	0.664	
Significancia	No significativo. Acepta la Ho	

Nota. Información obtenida de los exámenes

Si p > 0.05 (5%) no significativa. Acepta Ho: No hay diferencias significativas (son iguales)
Si p <= 0.05 (5%) significativa. Rechaza Ho ===> Acepta Ha: Hay diferencias significativas
Si p <= 0.01 (1%) altamente significativa. Rechaza Ho ===> Acepta Ha: Hay diferencias altamente significativas

Interpretación:

Del I A ciclo se observa que el puntaje promedio resolución de las ecuaciones lineales en los estudiantes es de 9 puntos con desviación estándar de 3.4 puntos, y para el I-B ciclo se observa que el puntaje promedio resolución de las ecuaciones lineales en los estudiantes es de 10 puntos con desviación estándar de 3.8 puntos. Además, observa los que según la prueba de U de Mann Whitney con valor Z de -0.435 y probabilidad 0.664 siendo mayor que 0.05 (5%), entonces se acepta la hipótesis nula donde no hay diferencias significativas en el puntaje de resolución de ecuaciones lineales en estudiantes del I ciclo

Los estudiantes del I ciclo se basan en la gráfica para señalar que cada una de las rectas tiene un vector generador diferente, a partir de ello, concluyen que el conjunto formado por estos es linealmente independiente, ya que ninguno es combinación lineal del otro. Esto refleja lo que señalamos en el análisis a priori respecto a la interpretación de vectores no colineales como vectores linealmente independientes. El argumento utilizado por estos dos estudiantes se basa en la interpretación de la gráfica presentada en la pregunta, lo que de acuerdo con lo señalado en el análisis a priori sitúa sus pensamientos en el modo SG.

Los estudiantes también concluyen que el conjunto de vectores es linealmente independiente. Para ello obtienen las coordenadas de cada uno de los vectores generadores de las rectas y responden que ninguno pertenece a la misma recta

En este argumento podemos apreciar una conexión entre los modos AA y SG, ya que primero determinan las coordenadas de los vectores generadores y luego los asocian a una de las tres rectas, es decir, desde lo aritmético (coordenadas) se sitúan en la gráfica que presenta el problema (un vector para cada recta), concluyendo finalmente que son linealmente independientes por no colinealidad de las rectas. Así, el argumento dado por esto estudiantes los sitúa en un tránsito desde el modo SG al AA, ya que a partir de la gráfica obtienen las coordenadas de cada vector generador, para luego volver a realizar un tránsito desde el modo AA al SG, identificando cada vector como el generador de una recta diferente a la generada por otro. De esta forma, los seis estudiantes que hemos analizado en esta parte de la pregunta 4 evidencian una concepción de independencia lineal de vectores en R^2 restringida a la no colinealidad de los vectores.

5.3 Otro tipo de Resultados Estadísticos.

En el presente trabajo de investigación no aplica otro tipo de resultados estadísticos.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Se ha podido constatar a través de las preguntas del cuestionario propuesto, que en general, el modo de pensamiento que prevalece en los estudiantes del semestre 2020-A y del semestre 2020-B de acuerdo a lo supuesto en el trabajo de investigación es el AA.

Así mismo de acuerdo con la hipótesis se ve en el estudio que el modo SG aparece sólo en las preguntas que presentan gráfica –a excepción de un estudiante del semestre 2020-B que logra transitar entre los modos AA y SG.

También vemos que en las preguntas que presentan gráfica los estudiantes de ambos casos estuvieron distribuidos equitativamente en la forma de abordar el problema, ya que a algunos les bastó la gráfica para responder, pero otros prefirieron obtener las coordenadas de los vectores generadores para determinar dependencia e independencia lineal o determinar las ecuaciones de las rectas para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Esto muestra que los estudiantes tienen una fuerte tendencia al modo AA para enfrentar los problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales y los problemas relacionados con dependencia e independencia lineal de vectores.

En general los estudiantes logran transitar desde el modo SG al modo AA. Consideramos que esto se debe a la necesidad de establecer su pensamiento en el modo AA por parte de los estudiantes, ya que en general el tránsito se da frente a la no posibilidad de interpretar la solución gráfica de un sistema de ecuaciones.

La mayoría de los estudiantes presenta grandes dificultades para pensar los sistemas de ecuaciones lineales en el modo SG; algunos estudiantes que habían pensado los sistemas de ecuaciones en R^2 en el modo SG cambiaron al modo AA en los sistemas de R^3.

La mayoría de los estudiantes de ambos casos no logra situar su pensamiento en el modo AE. Cuando la estructura del espacio vectorial es modificada los estudiantes en su mayoría se sitúan en el modo AA, lo que los lleva a no cuestionarse sobre el concepto del cero vector de un espacio vectorial, asociándolo al par (0,0) o trío (0,0,0) –2-upla nula o 3-upla nula, respectivamente–, independiente de la estructura del espacio. Sólo aquellos estudiantes que acceden al modo AE logran identificar el cero vector de acuerdo a la estructura del espacio.

Cada vez que los estudiantes lograron transitar entre distintos modos de pensamiento el argumento que se puede observar tenía que ver con la definición formal del concepto, tanto de dependencia e independencia lineal de vectores como de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esto trae como consecuencia que el tránsito entre los distintos modos de pensar los conceptos solución de un sistema de ecuaciones lineales y dependencia e independencia lineal de vectores en R^2 y R^3 por parte de los estudiantes, tendría su origen en las definiciones formales de estos conceptos.

6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Respecto a los antecedentes de la investigación tanto internacionales como nacionales se muestra que con respecto al estudio d ellos modos de pensamiento en la solución de un sistemas de ecuaciones, podemos dar evidencias que no todos los estudiantes tienen un concepto geométrico de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, porque la mayoría de las veces se sitúan desde el álgebra para abordar y resolver los problemas, lo que limita no sólo su desenvolvimiento en la disciplina del álgebra lineal, sino que también, su concepción de los objetos matemáticos presentados. Consideramos que esto es consecuencia de la forma en la que se abordan usualmente los sistemas de ecuaciones lineales (con énfasis en lo algebraico en desmedro de lo geométrico) y la importancia que se le dan a los métodos de resolución algebraica. Cabe destacar además que el resolver un sistema por alguno de los métodos algebraicos convencionales no necesariamente constituye un aprendizaje logrado puesto que el estudiante puede estar respondiendo solamente a un algoritmo. Es por esto que consideramos fundamental ser enfático en la solución gráfica e interpretación geométrica de éstos al momento de enseñar los sistemas de ecuaciones, que por lo general es la menos considerada y profundizada de los métodos de resolución. A su vez, los otros conceptos del álgebra lineal que aparecieron en los cuestionarios, tanto en las preguntas propuestas a los estudiantes como en las respuestas de los mismos, son principalmente trabajados desde el álgebra por parte de los estudiantes, en cualquier curso inicial de álgebra lineal. Consideramos que esto también es consecuencia de la enseñanza que han recibido los estudiantes, ya que en general recurren a los mismos argumentos –algebraicos en su mayoría–. En general recurren a la interpretación geométrica del concepto, como un último recurso de argumento, y cuando no son capaces de dar una interpretación algebraica de lo que están haciendo. Por tanto, consideramos fundamental el presentar en la enseñanza del álgebra lineal constantemente la interpretación algebraica en armonía con la geométrica de los conceptos, de manera que el estudiante logre transitar entre los modos AA y SG sin mayor problema.

Uno de los factores importantes y que se identificaron como clave para que el estudiante logre transitar entre los diferentes modos de pensamiento es la forma en que se aproxima a la definición formal de los conceptos.

Consideramos que ésta es la que permite al estudiante discernir si lo que piensa es adecuado o no. En este sentido, diferentes aproximaciones a la definición formal del concepto matemático es uno de los principales puentes que permite al estudiante transitar correctamente entre los tres modos de pensamiento. No obstante, para poder lograr esta conexión debe aprender previamente a situarse desde distintas posturas que están presentes en el álgebra lineal: lo geométrico, lo analítico y lo estructural, lo que se logra situando al estudiante frente al concepto en diferentes contextos. Por tanto, consideramos que la definición formal de los conceptos es fundamental y necesaria para poder transitar entre los tres modos de pensamiento, pero en absoluto suficiente.

Una de las representaciones más usuales de vectores linealmente dependientes en el plano son los vectores colineales, lo que se acomoda muy bien al uso común de la palabra dependiente, ya que al ser los vectores colineales dependiente del mismo vector generador. Sin embargo, esta representación, geométrica en el caso de vectores colineales y algebraica en el caso de un vector escrito como un ponderado del otro, lleva muchas veces al estudiante a construir un incorrecto concepto de dependencia e independencia lineal al establecer una equivalencia con el ser colineales o no colineales, en dimensiones más grandes que dos. Por esta razón parece fundamental presentar a los estudiantes distintos modelos de representación geométrica de vectores linealmente dependientes en R^2, que consideren más de dos vectores. En particular, presentar a los estudiantes más de dos vectores en R^2, todos no colineales, puede contribuir a una restructuración de su concepto de dependencia e independencia lineal de vectores.

Un concepto que debe ser trabajado con más detalles es el del cero vector de un espacio vectorial. Puede ser que el llamarle cero vector incida en que el estudiante lo asocie necesariamente con el (0,0), pero parece que la principal razón es que por lo general los ejercicios a los que se someten los estudiantes trabajan con las operaciones usuales en R^2 y R^3, lo que dificulta que el estudiante recurra en alguna ocasión a las propiedades que debe cumplir el cero vector en su estructura algebraica de grupo abeliano. Por tanto, consideramos que el incluir entre los ejemplos y la ejercitación espacios vectoriales con operaciones no usuales contribuye a una mejor y más adecuada construcción del concepto cero vector.

Un factor importante que consideramos tiene que ver con la poca conexión que los estudiantes realizan entre los conceptos solución de un sistema de ecuaciones lineales y dependencia e independencia lineal tiene que ver con la forma en la que son enseñados ambos conceptos a la vez.

Por una parte, por lo general se presenta el decidir la dependencia e independencia lineal de vectores como el resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. En este sentido, los sistemas de ecuaciones pasan a ser una herramienta para resolver el problema de la dependencia lineal. En cambio, para resolver los sistemas de ecuaciones lineales una de las estrategias más usadas por los estudiantes en el cuestionario aplicado, fue el llevarlo a su forma matricial y escalonar la matriz, lo que da cuenta de la relación del tipo de solución de un sistema con la dependencia o independencia lineal de los vectores involucrados. No obstante, consideramos que en general esta estrategia fue utilizada sólo como un algoritmo de resolución y que los estudiantes no logran establecer conexiones. Para contribuir a la conexión entre ambos conceptos consideramos fundamental el situar al estudiante no sólo en el modo AA para resolver los problemas de dependencia lineal y sistemas de ecuaciones, ya que esto puede limitarlo a aplicar un algoritmo y no mirar con profundidad el tema.

6.3 Responsabilidad ética

El autor de la investigación se responsabiliza por la información emitida en presente informe final de investigación, de acuerdo al Reglamento del **Código de Ética de la Investigación de la UNAC,** Resolución de Consejo Universitario Nº 260-2019-CU., donde se señala los principios éticos como norma de comportamiento conductual, así como también el autor está de acuerdo con el reglamento en donde reconoce que la investigación es una función esencial y obligatoria en la UNAC, por ello el investigador es responsable de los procesos y procedimientos de diseño, desarrollo y evaluación de su investigación para lo cual se actualiza permanentemente sus conocimientos y dedica el tiempo suficiente para desarrollar sus proyectos de investigación.

CONCLUSIONES

1.- Con este trabajo de investigación podemos dar evidencias a través de identificar los modos de pensamiento, que no todos los estudiantes tienen un concepto geométrico de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, porque la mayoría de las veces se sitúan desde el álgebra para abordar y resolver los problemas, lo que limita no sólo su desenvolvimiento en la disciplina del álgebra lineal, sino que también, su concepción de los objetos matemáticos presentados, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

2.-Al analizar los diversos modos de pensamiento consideramos fundamental ser enfático en la solución gráfica e interpretación geométrica de éstos al momento de enseñar los sistemas de ecuaciones, que por lo general es la menos considerada y profundizada de los métodos de resolución, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.

3.-Para contribuir a la conexión entre los modos de pensamiento consideramos que uno de los factores importantes y que se identificaron como clave para que el estudiante logre transitar entre los diferentes modos de pensamiento es la forma en que se aproxima a la definición formal de los conceptos. Así, diferentes aproximaciones a la definición formal del concepto matemático es uno de los principales puentes que permite al estudiante transitar correctamente entre los tres modos de pensamiento.

RECOMENDACIONES

1.- Reforzar en nuestros alumnos a situarse desde distintas posturas que están presentes en el álgebra lineal: lo geométrico, lo analítico y lo estructural, lo que se logra situando al estudiante frente al concepto en diferentes contextos.

2.- En la enseñanza del álgebra lineal se debe trabajar constantemente en la interpretación algebraica en armonía con la geométrica de los conceptos, de manera que el estudiante logre transitar entre los modos AA y SG sin mayor problema.

3.- Trabajar en nuestros alumnos los conceptos del algebra lineal usando los modos de pensamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abott, A. (2014). The university experiment: Campus as Laboratory. Germany: The innovative university. Nature. 514(7522), 288-289. doi:10.1038/514288a

Aburto, L., Johnson, R. y Jimenéz, D. (1996). Algebra Lineal. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Astorga, M. (2015). Comprensión de las cónicas desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. y Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. Journal of Mathematical Behavior 16 (3), 241-309. Arnal, J., Del Rincón, D., & Latorre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Labor.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in collegiate mathematics education (2), 1-32.

Aguilera, E. (2012). Los estilos de enseñanza, una necesidad para la atención de los estilos de aprendizaje en la educación universitaria. Revista Estilos de Aprendizaje. 10(10), 79-87. Recuperado de http://www2.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/numero_10/lsr_10_octubre_2012.pdf.

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Ayllón, M. F. (2005). Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación. Trabajo de investigación tutelada, Universidad de Granada, España.

Ayllón, M. F. (2012). Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria en formación (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Ayllón, M. F., & Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. Escuela Abierta: Revista de Investigación Educativa 17, 29-40.

Ayllón, M., Gómez, I., & Ballesta-Claver, J. (2016). Mathematical thinking and creativity through mathematical problem posing and solving. Propósitos y Representaciones, 4(1), 169-218. doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016.v4n1.89

Barbarán, J. J., & Huguet, A. (2013). El desarrollo de la creatividad a través de la invención de problemas matemáticos. Un estudio con alumnos de Secundaria. Revista Internacional de Educación y Aprendizaje, 1(2), 1-9.

Barraza, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. Valparaíso: Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Barrera, J. (2008). Modos de pensamiento en la solución y planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas. (Tesis de Maestría, no publicada). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

BeriCat, E. (1998) La integración de los métodos cuantitativos y cualitativos. Barcelona, Ariel.

Bickel, R. (2007). Multilevel analysis for applied research: It’s just regression! New York: Guilford Press.

Bisquerra, R. (2000). Educación y bienestar emocional. Barcelona. Praxis.

Bogomolny, M. (2006). The role of example-generation tasks in students’ understanding of linear algebra. Ph.D. diss., Simon Fraser University.

Bonilla Barraza (2014) Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. Valparaíso: Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 617- 624). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bozt, J. (2011). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R2 y R3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Britton, S.,& Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students’ conceptual difficulties. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 40(7), 963–974.

Cabrilog SAS. (2009). Creador de herramientas Matemáticas. Recuperado el 06 de abril de 2012 de http://gallery.cabri.com/figures/space/dandEll.cg3.

Callejo, M. L. (2003). Creatividad matemática y resolución de problemas. Sigma 22, 25-34.

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?. The College Mathematics Journal, 24(1), 29–40.

Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones (Tesis doctoral inédita). Universidad de Sevilla, España.

Castilla Navarra V. (2004). Análisis de los modos de pensamiento en la interpretación geométrica del concepto dependencia/independencia lineal en R^2. reportes de investigaciones terminadas.

Creswell, J.W. (2014). Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approaches. (4th ed.). California, CA: Sage.

Denzin y Lincoln (2012), Paradigmas y perspectivas en disputa. Manual de investigación Cualitativa Vol II. Barcelona: Gedisa p.53

Derya Çelik,.(2012), Investigating Students' Modes of Thinking in Linear Algebra: The Case of Linear Independence Correspondence: Karadeniz Technical University, Fatih Faculty of Education Department of Elementary Education, 61335 Trabzon, Turkey

Dorier, J. L. (1998). État de l´art de la recherche en didactique á propos de l´enseignement de l´algébre linéaire. Recherches en didactique des mathématiques. 18(2), 191-229.

Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 29, 175–197.

Dorier, J.-L.(2000). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 85–124). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dubinsky, E. (1991). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In: L.P. Steffe (Ed.), Epistemological Foundations of Mathematical Experiences (pp 160-202). Springer-Verlag, New York.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123).

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C.R. Johnson, D. Lay, A.D. Porter, A.E. Watkins, and W. Watkins (Eds.), Resources for teaching linear algebra (pp. 85-105). Washington: Mathematical Association of America.

Ellertoh, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. Educational Studies in Mathematics, 17(3), 261-27l.

Ertekin, Erhan, Solak, Semih , Yazıcı, Ersen (2010/12/15)- The effects of formalism on teacher trainees' algebraic and geometric interpretation of the notions of linear dependency/independency:VL-41,DO- 10.1080/0020739X.2010.500689 JO - International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.ER

Flick (2011) .Introducción a la investigación cualitativa. Ediciones Morata, SL Freie Universität Berlin

García, J. J. (1998). La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. Revista de Educación y Pedagogía, 10(21), 145-173.

Gallego & Fornés (2009). El aprendizaje Basado en Proyectos como modelos docentes. Universidad de Alicante-España.

Godino, J., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Reprodigital.

Green Allison (2019) Boston Tutoring Services – In-Home Tutoring in Massachusetts and Southern NH. Estados Unidos de Norte América.

Grupo Azarquiel. (1993). Ideas Y Actividades Para Enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España.

Grossman, S. (2008) Álgebra lineal. México: McGrawBHill.

Gurdián-Fernández, A. (2007). El Paradigma Cualitativo en la investigación Socio-educativa. San José: Print Center.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. For the Learning of Mathematics, 7(3), 29-32.

Harel, G. (1989). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts

Haussler, P. (2003). Matemática para la administración y la economía. (Decima ed.). México: Pearson.

Hernández, R., Fernández-Collado, C. & Baptista, P. 2008. Metodología de la Investigación. (4ª ed.). Mexico, DF: Mc Graw Hill.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.and processes. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(2), 139–148.

Hristovitch, S.P. (2001). Students' conception of introductory linear algebra notions: The role of metaphors, analogies and symbolization. Ph.D. diss., Purdie University.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. Linear Algebra and its Applications, 432, 2100–2111.

Kolman, B., & Hill, D.R. (2008). Elementary linear algebra and its applications (Ninth Edition). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Kolman, B., & Hill, D.R. (2008). Elementary linear algebra and its applications (Ninth Edition). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Konyalıoğlu, A.C., İpek, A. S., & Işık, A. (2003). On the teaching linear algebra at the university level: The role of visualization in the teaching vector spaces.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 7(1), 59–67.

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York: Dover.

Krutetskii, V. A. (1969). An investigation of mathematical abilities in schoolchildren. En J. Kilpatrick e I. Wirszup (Eds.), Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics (Vol. 2, pp. 5-57). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Küchemann, D. E. (1998). Algebra. In K. Hart, M. L. Brown, D. M. Kerslake, D. E. Küchemann & G. Ruddock, (Eds.), Children's understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119). London: Athenaeum Press.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7(1), 51-61. https://doi.org/10.1007/bf03036784

Latorre, Del Rincón, y Arnal (2005) Bases Metodológicas de la Investigación Educativa, Barcelona. España.

LeCompte (1995) Tradición y enfoques en la investigación cualitativa. España.

Lee, K., Hwang, D., & Seo, J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. Journal of the Korea Society of Mathematical Education, 7(3), 163-189.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. ZDM Mathematics Education 40, 265- 276.

Miranda, E. (2004). Generación d ellos modelos de enseñanza aprendizaje en el Algebra lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales. Recuperado: 26 de!

septiembre de 2014, de www.iberomat.uji.es/carpeta/.../ 30_eduardo_miranda_montoya.doc.

Morata Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York: Dover.

Murillo, F. (2008). Los modelos multinivel como herramienta para la investigación educativa. Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 17(1), 45-62.

Nardi, E. (1997). The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: A concept image of spanning sets in vectorial analysis. Educación Matemática, 91(1), 47-60.

Noda, A. (2000). Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación (Tesis doctoral inédita). Universidad de la Laguna, España.

Oaxaca J., De la Cruz, J. y Sánchez, J. (2008). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Ponencia. Foro de Matemáticas UNAM, México Recuperado 26 de septiembre de 2014, de http://dcb.fi/c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/.../41.pdf

Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática. Valparaíso: Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 7(1), 49-72.

Pérez Serrano, G. (2011). El conocimiento científico y sus carcomas. Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria, 23(2), 19-43.

Pino-Fan y Godino (2015).Bolema: Boletim de Educação Matemática. Universidad de Los Lagos, Chile

Ramírez, M .(2008).Concepciones de los estudiantes de educación superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Centro de Investigación de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sarrazy, B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9-10 years. European Journal of Psychology of Education, 17(4), 321-341. .

Sarrazy, B. & Novotná, J. (2005). Didactical contract: Theoretical frame for the analysis of phenomena of teaching mathematics. En J. Novotná (Ed.), Proceedings SEMT 05 (pp. 33-44). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Sarrazy, B. & Novotná, J. (2013). Didactical contract and responsiveness to didactical contract: A theoretical framework for enquiry into students’ creativity in mathematics. ZDM Mathematics Education, 45(2), 281-293. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0496-4

Suchman, (1967) Evaluation research.Universite Cornell. USA.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra (Research Report). Montreal, Canadá: Concordia University.

Sierpinska, A. (2000) On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: J. L. Dorier (ed) On the Teaching of Linear Algebra (p. 209-246). Dordrecht: Springer. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. Recherches en Didactique des Mathématiques 19 (1), 7-40.

Sierpinska, A., Hillel, J. & Dreyfus, T. (1998). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of vectors (Technical Report). Montreal, Canada: Concordia University.

Sierra, R. (2007). Técnicas de investigación social. Teorías y ejercicios (14ª ed.). Madrid, España: Thompson.

Singh, B. (1987). The development of tests to measure mathematical creativity. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 18(2), 181-186. https://doi.org/10.1080/0020739870180203

Stewart, S., & Thomas, M.O.J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(7), 927–937.

Stewart, S., & Thomas, M.O.J. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(7), 951–961.

Stewart, S., & Thomas, M.O.J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2), 173–188.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related? ZDM Mathematics Education, 45(2), 227-238. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0471-5

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151-169.

Taylor, S. J., Bogdan, R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de investigación - La búsqueda de significados. Buenos Aires: Paidos.pag.20

Torralbo, M. (2001). «Análisis cientimétrico, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en educación matemática (1976-1998)». Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Torralbo, M., Maz, A., Rico, L. Y Fernández Cano, A. (2001). Programas de doctorado e investigación en didáctica de la matemática. Actas del Congreso Nacional de Didácticas Específicas. Las Didácticas de las Áreas Curriculares en el siglo XXI, vol. 1, pp. 905- 914. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Vandalen y Meyer (1991).Manual de la investigación Educacional. Barcelona: Paidós

Walker, R. (1983) La realización de estudios de casos en educación. Ética, teoría y procedimientos, Madrid, Narcea

Wawro, M., Sweeney, G.F., & Rabin, J.M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. Educational Studies in Mathematics, 78(1), 1–19.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

MODOS DE PENSAMIENTO EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LOS ESTUDIANTES DEL I CICLO DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, 2020

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES	MÉTODO
General	**General**	**General**	**Dependiente**		
¿Se puede identificar y analizar las dificultades de los diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en los conceptos de álgebra lineal, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020?	Determinar los modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.	Se puede determinar de los modos de pensamiento de los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.	Y =Determinar modos de pensamiento	Coeficiente de Fiabilidad	Encuesta Cuestionario Lista de cotejos
Específico	**Específico**	**Específico**	**Independiente**		
a)¿Se puede identificar diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020? b) ¿Se puede analizar los diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020?	a) Identificar diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020. b) Analizar diversos modos de pensamiento que tienen los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020.	a) Identifica los diversos modos de pensamiento los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020. b) Analiza los diversos modos de pensamiento los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes del I Ciclo de Ingeniería Química Universidad Nacional del Callao, 2020. . .	X = Modos de pensamiento	Coeficiente de Fiabilidad	Encuesta Cuestionario Lista de cotejos

Fuente: Elaboración propia

RESULTADOS PRUEBA DE KOLMOGOROV SMIRNOV

Tabla 11

Normalidad de los datos - Prueba de kolmogorov smirnov del puntaje de resolución de las ecuaciones lineales en los estudiantes en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones lineales.

Grupos	Prueba de kolmogorov smirnov	Probabilidad p	Significancia
I ciclo	0.241	0.000	Altamente significativo - Los datos no son normales
II ciclo	0.219	0.000	Altamente significativo - Los datos no son normales

Nota. Información obtenida de los exámenes

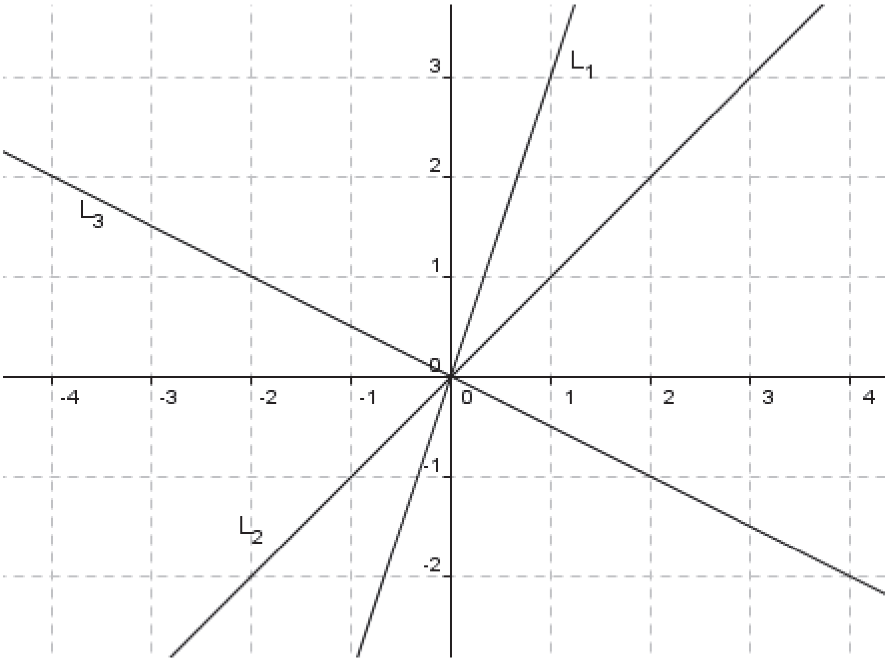
Si p > 0.05 (5%) no significativa. Acepta Ho: Los datos son normales
Si p <= 0.05 (5%) significativa. Rechaza Ho ===> Acepta Ha: Los datos no son normales
Si p <= 0.01 (1%) altamente significativa. Rechaza Ho ===> Acepta Ha: Los datos no son normales

Interpretación:

Como los valores de las probabilidades 0.000 para el I ciclo y II ciclo en el puntaje de resolución de ecuaciones lineales son menores o iguales a 0.01 (1%) se acepta la Hipótesis Alternativa, donde ls datos no son normales, por lo tanto, para hacer la comparación entre el I ciclo y el II ciclo se hará uso de la prueba de U de Mann-Whitney

CUESTIONARIO COMPLETO

Pregunta 1. A continuación se presenta la solución gráfica de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:



a. En $\mathbb{R}^2$, con las operaciones suma y ponderación usuales, ¿los vectores generadores de cada una de las rectas del sistema (vistas como subespacios deR2) forman un conjunto linealmente independiente? Justifique su respuesta.
b. ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas? Justifique su respuesta.

Pregunta 2

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ 5x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

a. ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas?

b. Considere las rectas del sistema como subespacios de $\mathbb{R}^2$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales. ¿El conjunto formado por los vectores generadores de cada uno de estos subespacios son linealmente independientes? Justifique su respuesta.

Pregunta 3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X + 3y = 0$$
$$4x - 5y = 0$$
$$-3x + 7y = 0$$

a. Considere las rectas del sistema como subespacios de $\mathbb{R}^2$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales. ¿El conjunto formado por los vectores generadores de cada uno de estos subespacios son linealmente independientes? Justifique su respuesta.
b. ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas?

Pregunta 4.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

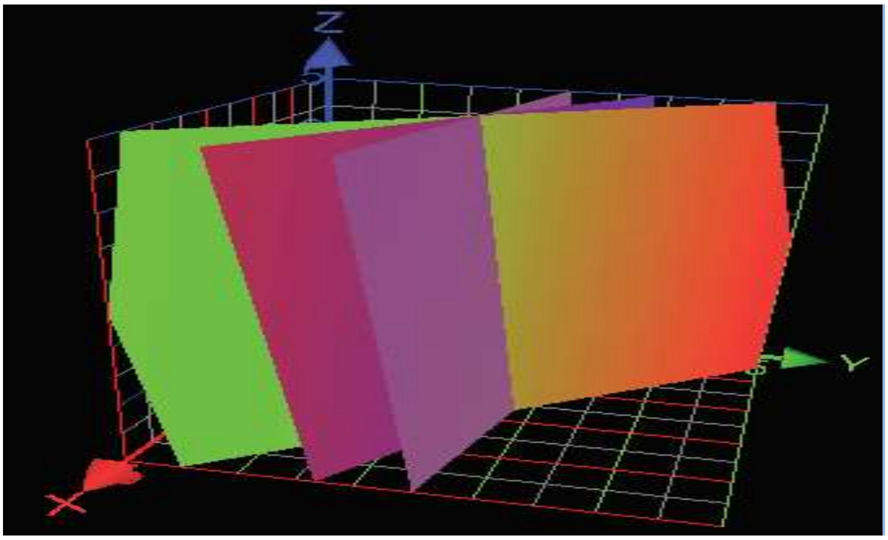
$$X + 3y + 5z = 0$$
$$4x - 5y - 2z = 0$$
$$-3x + 7y - z = 0$$

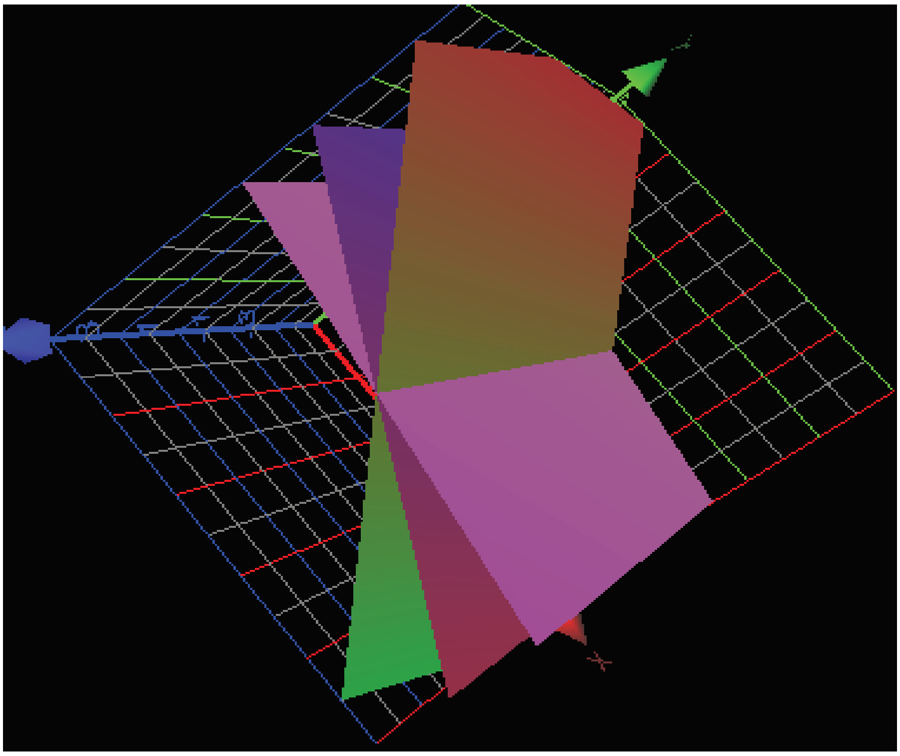
a. Considere las rectas del sistema como subespacios de $\mathbb{R}^3$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales. ¿El conjunto formado por los vectores generadores de cada uno de estos subespacios son linealmente independientes? Justifique su respuesta.
b. ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas?

Pregunta 5: Sean $\overrightarrow{v_1} = (12, -6,2),\ \overrightarrow{v_2} = (4, -2,2), \overrightarrow{v_3} = (-4,2, -8)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$, con las operaciones suma y ponderaciones usuales. Para cualquier combinación lineal de la forma:

$$x\,.\,(6, -3,1) +\ y\ (\,2, -1,1) +\ z\ (-\,2,1, -4) = (0,0,0)$$
$$(\,x, y, z\ \in \mathbb{R}\,)$$

e igualar coordenada a coordenada se obtiene un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya solución gráfica, vista desde distintas posiciones, es: la siguiente:





a. ¿Cuál es el conjunto solución del sistema? Justifique su respuesta.

b. ¿El conjunto $\overrightarrow{v_1} = (12, -6,2)$, $\overrightarrow{v_2} = (4, -2,2), \overrightarrow{v_3} = (-4,2, -8)$ es linealmente independiente? Justifique su respuesta.

EXAMENES REALIZADOS ESTUDIANTES DEL II CICLO DE INGENIERÍA QUIMICA DE LA UNIVERSIDAD NADIONAL DEL CALLAO, 2020

SISTEMA DE ECUACIONES

Señor alumno tiene una relación de ejercicios, por favor desarrollar de acuerdo a su concimiento

Pregunta N°1

Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{r} x+2y+(m+3)z = 3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z = 8 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

Pregunta N°2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+mz = 1 \\ x+my+z = 1 \\ x+2y+4z=m \end{array}\right. .$$

a) Discute el sistema en función del parámetro m.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

Pregunta N° 3

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX=mX$ según los valores del parámetro m.

b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

c) Para $m=3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x+y+z=3$.

Pregunta N° 4

Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{r} x-z = m \\ my+3z = 1 \\ 4x+y-mz=5 \end{array}\right.$$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Para $m=1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x=z$

Pregunta N° 5

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\left\{\begin{array}{r} x+y+mz = m^2 \\ y-z=m \\ x+my+z=m \end{array}\right. .$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

a)

$F2 - mF_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4+2m & -2-m & 0 \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$2F3 - F_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4+2m & -2-m & 0 \\ 0 & 0 & m-4 & 2 \end{array}\right]$$

$* \; m - 4 = 0$
$m = 4$

- Si $m = 4 \Rightarrow Ran(A) = 2$
  $Ran(A|B) = 3$

entonces seria un sistema incompatible

- Si $m \neq 4 \Rightarrow Ran(A) = 3$
  $Ran(A|B = 3$
  $n = 3$

entonces seria un sistema compatible determinado

b) $m = -2$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -6 & 2 \end{array}\right]$$

$Ran(A) = Ran(A|B) = 2$
$n = 3$

$\Rightarrow$ El sistema seria compatible indeterminado

- $-6Z = 2$
  $Z = -1/3$

- $X - 2y - 1/3 = 2$
  $X - 2y = 7/3$

$Z = -1/3$ ∴ Z no tomaria valor de 0 porque no puede ser un parametro

$$\begin{cases} A + B + C = 180 \\ 2A - C = 0 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array}\left|\begin{array}{l} A + B + C = 180 \\ -2B - 3C = -360 \\ -3B = -180 \end{array}\right.$$

- $B = \dfrac{-180}{-3} = 60^\circ$

- $-2B - 3C = -360$
  $-120 - 3C = -360$
  $C = 80^\circ$

- $A + B + C = 180$
  $A + 60 + 80 = 180$
  $A = 40^\circ$

$\Rightarrow$ El triangulo tiene angulos de 40°, 60° y 80°.

Pregunta N°1

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 & \dots (1) \\ x + y + z = 3m & \dots (2) \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 & \dots (3) \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro: m

sumo (1) y (2)

$$\begin{array}{l} x + 2y + (m+3)z = 3 \quad \dots (1) \\ x + y + z = 3m \quad \dots (2) \\ \hline 2x + 3y + (m+4)z = 3 + 3m \quad \dots (4) \end{array}$$

Resto (3) con (4):

$$\begin{array}{l} 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \\ 2x + 3y + (m+4)z = 3 + 3m \\ \hline \end{array} \quad \downarrow -$$

$$y + (2m - 1)z = 5 - 3m$$

$$y + 2mz - 1z = 5 - 3m$$

$$y + 2mz - z = 5 - 3m$$

$$2mz + 3m = 5 + z - y$$

$$m(2z + 3) = 5 + z - y$$

$$m = \frac{5 + z - y}{2z + 3}$$

Pregunta N°1

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 & \dots (1) \\ x + y + z = 3m & \dots (2) \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 & \dots (3) \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro: m

sumo (1) y (2)

$$\begin{array}{l} x + 2y + (m+3)z = 3 \quad \dots (1) \\ x + y + z = 3m \quad \dots (2) \\ \hline 2x + 3y + (m+4)z = 3 + 3m \quad \dots (4) \end{array}$$

Resto (3) con (4):

$$\begin{array}{l} 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \\ 2x + 3y + (m+4)z = 3 + 3m \\ \hline \end{array} \downarrow -$$

$$y + (2m - 1)z = 5 - 3m$$

$$y + 2mz - 1z = 5 - 3m$$

$$y + 2mz - z = 5 - 3m$$

$$2mz + 3m = 5 + z - y$$

$$m(2z + 3) = 5 + z - y$$

$$m = \frac{5 + z - y}{2z + 3}$$

2) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$$

a) Considerar el sistema en función del parámetro m

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ -f_1+f_2 \longrightarrow \\ -f_1+f_3 \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & m-1 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$

b) Si es posible, resuelva el sistema para $m = 1$

$x + y + z = 1 \longrightarrow x + y = 1 - z$

$x + y + z = 1$

$x + 2y + 4z = 1$

$\underbrace{x + y} + y + 4z = 1$

$1 - z + y + 4z = 1$

$\cancel{1} + y + 3z = \cancel{1}$

$y = -3z$

$x = 1 + 2z$

1)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{array}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 \\ 3m \\ 8 \end{vmatrix}}_{3\times 1}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right| \begin{array}{l} -1F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{array} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 0 & -1 & (-m-2) & -3+3m \\ 0 & 0 & (m-3) & 2 \end{array}\right|$$

cuando $m=3$ el sistema no tiene solución $\qquad m-3=0 \quad m=3$

$m\neq 3$ tiene única solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right] \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ -y=-9 \\ -5z=2 \end{array}\right\}$$

2)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ x+2y+4z=m \end{array}\right\} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{array}\right] \begin{array}{l} -1F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & m-1 \end{array}\right| \; F_2/m-1 + F_3 \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1-m}{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \end{array}\right|$$

$m=1$ no tiene solución

Para $m\neq 1$ tiene única solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1F_1+F_2 \\ -1F_1+F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

no es posible resolver ya que en la fila 2 todos son ceros.

4

$$\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -m & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-4F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4-m & -4m+5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4-m & -4m+5 \end{array}\right] \xrightarrow{-mF_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & -m & \cdots & -m(-4m+5) \end{array}\right] F_2+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-4m+m^2 & 1+(4m^2-5m) \end{array}\right]$$

$3 - 4m + m^2$

$m^2 - 4m + 3$

$m \quad -3$

$m \quad -1$

$(m-3)(m-1)$

$m=3 \quad m=1$

no tiene solución para $m=3$

$R(A) = 3 \quad m \neq 3 \quad m \neq 1$

$4m^2 - 5m + 1$

$(4m-1)(m-1)$

tiene infinitas soluciones $m = 1/4$

$m = 1/4 \quad m=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-4F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{array}\right] \xrightarrow{-F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{m-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & -1 & \frac{m-1}{m-1} & -\frac{m-m^2}{m-1} \end{array}\right] F_2+F_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & m + \frac{m^2-m}{m-1} \end{array}\right]$$

$m + \frac{m^2-m}{m-1} = 0$

$m^2 - m = -m(m-1)$

$m^2 - m = -m^2 + m$

$2m^2 - 2m = 0$

$m = 1$

$R(A) = 2 \quad m = 1$

$R(A) = 1 \quad m \neq 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$$

$$x + \lambda y = 2 \quad \text{--- } 1$$
$$2x + 4y = 1 \leftarrow \div 1/2 \quad \text{--- } ②$$
$$\lambda x + y = 2\lambda \leftarrow \times -4 \quad \text{--- } ③$$

$$x + 2y = 1/2$$
$$x + \lambda y = 2$$
$$y = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\lambda - 2}\right)$$

$$2x - 4y = 1$$
$$-4\lambda x - 4y = -8\lambda$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow ② \quad \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda}\right) + \cancel{4}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1}{\lambda-2}\right) = 1$$

$$\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda} + \frac{6}{\lambda - 2} - 1 = 0 \leftarrow \times(1-2\lambda)(\lambda-2)$$

$$(1-8\lambda)(\lambda-2) + 6(1-2\lambda) - (1-2\lambda)(\lambda-2) = 0$$
$$\lambda - 8\lambda^2 - 2 + 16\lambda + 6 - 12\lambda - (\lambda - 2\lambda^2 - 2 + 4\lambda) = 0$$
$$\cancel{\lambda} - 8\lambda^2 - 2 + 16\lambda + 6 - 12\lambda - \cancel{\lambda} + 2\lambda^2 + 2 - \cancel{4\lambda} = 0$$

$$-6\lambda^2 + 6 = 0$$
$$-6\lambda^2 = -6$$
$$6\lambda^2 = 6$$
$$\lambda = 1$$
$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

Para $\lambda = 1$

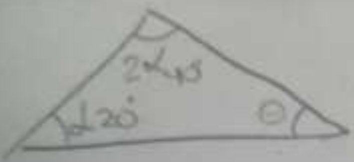
$$x + y = 2 \leftarrow \times 2$$
$$2x + 4y = 2$$
$$x + y = 2$$

$$2x + 2y = 4$$
$$2x + 2y + 2y = 2$$
$$4 + 2y = 2$$
$$\boxed{y = -1}$$
$$x - 1 = 2$$
$$\boxed{x = 3}$$

Para $\lambda = -1$

$$x - y = 2$$
$$2x - 4y = 1$$
$$-x + y = -2 \leftarrow (\times 2)$$

$$\cancel{2x} - 4y = 1$$
$$-\cancel{2x} + 2y = -4$$
$$-2y = -3$$
$$\boxed{y = \frac{3}{2}}$$
$$x - \frac{3}{2} = 2$$
$$2x - 3 = 4$$
$$\boxed{x = 7/2}$$



$(2\alpha+\alpha)=2\theta$

$\rightarrow \alpha+2\alpha+\frac{2\alpha+\alpha}{2}=180^\circ$

$2\alpha+4\alpha+2\alpha+\alpha=360^\circ$

$9\alpha=360^\circ$

$\alpha=40^\circ$ ✓

$2\alpha+\alpha=2\theta$

$2(40^\circ)+(40^\circ)=2\theta$

$80^\circ+40^\circ=2\theta$

$\boxed{\theta=60^\circ}$

$\rightarrow \alpha_{mayor}=80^\circ$

$\alpha_{menor}=40^\circ$

Pregunta N°1

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

Problema 1

$$\left.\begin{aligned} X+2Y+(m+3)Z &= 3 \\ X+Y+Z &= 3m \\ 2X+4Y+3(m+1)Z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 0 & 1 & -(2+m) & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{aligned} X+2Y+Z(m+3) &= 3 \\ Y-Z(2+m) &= 3m-3 \\ Z(m-3) &= 2 \end{aligned}\right. \longrightarrow Z=\frac{2}{m-3}$$

Método de GAUS

a)

$$Y-\frac{2}{m-3}(2+m)=3(m-1)$$

$$\boxed{Y=\frac{3(m^2-4m+3)}{m-3}} \qquad \boxed{Z=\frac{2}{m-3}}$$

$$\boxed{X=\frac{-6m^2+25m-33}{m-3}}$$

---

b) Para $m=-2$

$$X=\frac{107}{5}$$

$$Y=-9$$

$$Z=-\frac{2}{5}$$

Pregunta N°2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ x+2y+4z=m \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro m.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

Pregunta ②

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & (m-1) & (1-m) & 0 \\ 0 & 1 & (4-m) & m-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow F_2 - F_1 \\ \rightarrow F_3 - F_1 \end{array}$$

$$x + y + mz = 1$$
$$(m-1)y + (1-m)z = 0 \rightarrow (m-1)y = -(1-m)z$$
$$y + (4-m)z = m-1$$

$$\cancel{(m-1)}y = \cancel{(m-1)}z$$
$$\boxed{y = z}$$

$$z + 4z - zm = m-1$$
$$5z - zm = m-1$$
$$z(5-m) = m-1$$

$$\boxed{z = \frac{m-1}{5-m}} \qquad \boxed{y = \frac{m-1}{5-m}}$$

a)

$$x + z + mz = 1$$
$$x + z(m+1) = 1$$
$$x + \frac{(m-1)}{5-m}(m+1) = 1$$

$$x(5-m) + m^2 - 1 = 5-m$$

$$\boxed{x = \frac{6 - m - m^2}{5-m}}$$

b) $m = 1$

$$x = 1 \qquad y = \frac{1-1}{5-1} = 0 \qquad z = 0$$

Pregunta N° 3

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX=mX$ según los valores del parámetro m.

b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

c) Para $m=3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x+y+z=3$.

(NO PUDE RESOLVERLO, NO DOMINO EL TEMA)

Pregunta N° 4

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-z=m \\ my+3z=1 \\ 4x+y-mz=5 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Para $m=1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x=z$

$$x-z=m$$
$$my+3z=1$$
$$4x+y-mz=5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&m\\0&m&3&1\\4&1&-m&5\end{array}\right)\quad (A)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&m&3\\4&1&-m\\1&0&-1\\0&m&3\end{vmatrix}=(m^2+0-2)-(-4m+3+0)$$

$$=m^2-2+4m-3$$
$$=m^2+4m-5$$

$m \quad +5$

$m \quad -1$

$(m+5)(m-1)$

Pregunta N° 5

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ y-z=m \\ x+my+z=m \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

(NO PUDE RESOLVERLO, NO DOMINO EL TEMA)

Pregunta N°1

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro *m*.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

(b) Para $m = -2$

(1) $x + 2y + z = 3$

(2) $x + y + z = -6$

(3) $2x + 4y - 3z = 8$

2^* (1) $2\cancel{x} + 4\cancel{y} + 2z = 6$

(3) $\cancel{2x} + \cancel{4y} - 3z = 8$ (−)

(4) $5z = -2$

$z = -2/5$

(1) $\cancel{x} + 2y + \cancel{z} = 3$

(2) $\cancel{x} + y + \cancel{z} = -6$ (−)

(5) $y = 9$

(1) $x + 2(9) + (-2/5) = 3$

$x = -15,4$

Para $m = -2$

$(x = -15,4 \,;\, y = 9 \,;\, z = -2/5)$

Pregunta N°2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz &= 1 \\ x+my+z &= 1 \\ x+2y+4z &= m \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro *m*.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

b) $m=1$

① $x + y + z = 1$

② $x + y + z = 1$

③ $x + 2y + 4z = 1$

③ $\cancel{x} + 2y + 4z = \cancel{1}$

① $\cancel{x} + y + z = \cancel{1}$ ⊖

④ $y + 3z = 0$

2* ① $2x + 2y + 2z = 2$

③ $x + \cancel{2y} + 4z = 1$ ⊖

$x - 2z = 1$

4* ① $4x + 4y + \cancel{4z} = 4$

③ $x + 2y + \cancel{4z} = 1$ ⊖

$3x + 2y = 3$

Para $m=1$

$x=1;\ y=0;\ z=0$

Pregunta N° 3

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.

b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

c) Para $m = 3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$.

- No domino este tema.

Pregunta N° 4

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Para $m = 1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x = z$

b) $m = 1$

$$\begin{aligned} &(1)\quad x - z = 1 \\ &(2)\quad y + 3z = 1 \\ &(3)\quad 4x + y - z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3)\quad 4x + y - z = 5 \\ &(1)\quad x - z = 1 \quad (-) \\ \hline &(4)\quad 3x + y = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3)\quad 4x + y - z = 5 \\ &(4)\quad 3x + y \quad 0 = 4 \quad (-) \\ \hline &\quad x - z = 1 \end{aligned}$$

Para $m = 1$

$X = 1$; $Y = 1$; $Z = 0$

Es todo lo que llegue a hacer

Alumno: REATEGUI MALQUE GABRILA ALEXANDRA

Problema nº1

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.
b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

$$\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{cases}$$

- Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-1F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ -y-(m+2)z=3m-3 \\ (m-3)z=2 \end{cases}$$

$\rightarrow z = \dfrac{2}{m-3} \quad \ldots(1)$

$-y-(m+2)z=3m-3 \quad \ldots(2)$

$\rightarrow$ 2 en 1

$$y = \frac{-3m^2+10m-13}{m-3}$$

$\Rightarrow x + 2y + (m+3)z = 7 \quad (3)$

(3) en (2) y en (1)

$$y = \frac{6m^2 - 19m + 11}{m-3}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{6m^2 - 19m + 11}{m-3} \\[2ex] \dfrac{-3m^2 + 10m - 13}{m-3} \\[2ex] \dfrac{2}{m-3} \end{pmatrix}$$

b) $\Rightarrow$ Resuelve el sistema para $m = -2$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{6(-2)^2 - 19(-2) + 11}{(-2) - 3} \\[2ex] \dfrac{-3(-2)^2 + 10(-2) - 13}{(-2) - 3} \\[2ex] 2/(-2) - 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{73}{-5} \\[2ex] 9 \\[2ex] -\dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Señor alumno tiene una relación de ejercicios, por favor desarrollar de acuerdo a su c...

Pregunta N°1

Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{r} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

1) a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array}\right)$$

↳ $m-3=0 \rightarrow m=3$

• $m\neq 3 \rightarrow$ S.C.D.

(1) $x+2y+(m+3)z=3$

(2) $-y-(m+2)z=3m-3$

(3) $(m-3)z=2$

↳ $\boxed{z=\frac{2}{m-3}}$

(2) → $-y+\frac{(-m-2)(2)}{(m-3)}=3m-3$

$\frac{-2m-4}{m-3}-(3m-3)=y$

$y=\frac{-2m-4-3(m^2-4m+3)}{m-3} \rightarrow \boxed{\frac{-3m^2+10m-13}{m-3}=y}$

(1) ↳ $x+2\left(\frac{-3m^2+10m-13}{m-3}\right)+\frac{(m+3)(2)}{m-3}=3$

↳ $x-\frac{6m^2+20m-26+2m+6}{m-3}=3 \rightarrow \boxed{x=\frac{6m^2-19m+11}{m-3}}$

• $m=3 \rightarrow$ S.I.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

b) Si $m=-2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$x+2y+z=3$

$-y=-9 \rightarrow y=9$

$-5z=2 \rightarrow z=\frac{-2}{5}$

↳ $x+2(9)-\frac{2}{5}=3$

$x=-73/5$

Pregunta N°2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ x+2y+4z=m \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro m.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

Pregunta N°3

2

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{(m-1)F_3-F_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & \underline{(-m^2+6m-5)} & (m-1)^2 \end{array}\right) \to -m^2+6m-5=0$

$m^2-6m+5=0$

$(m-5)(m-1)=0$

$m=5 \vee m=1$

• $m\neq 5 \vee m\neq 1 \to \underline{SCD}$ $\xrightarrow{2}$ $(m-1)y=(m-1)z$

1 $x+y+mz=1$ $\qquad y=z \to \boxed{y=\frac{(m-1)}{(5-m)}}$

2 $(m-1)y=(m-1)z$

3 $-(m-5)(m-1)z=(m-1)^2$ $\xrightarrow{1}$ $x+\frac{(m-1)}{(5-m)}+\frac{m^2-m}{(5-m)}=1$

$\to \boxed{z=\frac{(m-1)}{(5-m)}}$ $\qquad x=\frac{-(m+3)(m-2)}{(5-m)} \Rightarrow \boxed{x=\frac{(m+3)(m-2)}{(m-5)}}$

b)

• $m=5 \to \underline{S.I.}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$

• $m=1 \to$ $\underline{\text{S. C. Indefinido}}$ //

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Big\}\ x+y+z=1$

Pregunta N° 4

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Para $m = 1$ **resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea** $x = z$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -m & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 1 & (-m+4) & (5-4m) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & (-m^2+4m-3) & (-4m^2+5m-1) \end{array}\right)$$

$\rightarrow -m^2+4m-3=0$

$m^2-4m+3=0$

$(m-3)(m-1)=0$

$m=3,\ m=1$

• $m \neq 3$ y $m \neq 1 \rightarrow$ SCD

① $x - z = m$

② $my - 3z = 1$

③ $(m-3)(m-1)z = -(4m-1)(m-1)$

$\rightarrow \boxed{z = \frac{(1-4m)}{(3-m)}}$

② $my - 3\frac{(1-4m)}{(3-m)} = 1 \rightarrow \boxed{y = \frac{6-13m}{3m-m^2}}$

① $\rightarrow x - \frac{(1-4m)}{(3-m)} = m$

$x = m + \frac{(1-4m)}{(3-m)}$

$\boxed{x = \frac{m^2+4m-1}{m-3}}$

• $m=3 \rightarrow$ SI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right)$$

• $m=1 \rightarrow$ SCI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow x = 1+z$

$y = 1+3z$

$x=1+3 \Rightarrow x=4$

$y=(1+3(1)) \Rightarrow y=13$ [illegible]

$x - z = 1 \quad \cdot(-3)$

$y - 3z = 1$

$-3x + 3z = -3$

$y - 3z = 1$

$\rightarrow y - 3x = 4$

$(1+3z) - 3 - [illegible] = 4$

$2z - 2 = 4$

$z = 3$

$x = \frac{m^2+4m-1}{m-3} \quad y = \frac{6-13m}{3m-m^2} \quad z = \frac{(1-4m)}{(3-m)} \quad \boxed{x=z}$

$\rightarrow \frac{m^2+4m-1}{\cancel{m-3}} = \frac{4m-1}{\cancel{m-3}} \rightarrow m^2-3m=0$

$m^2 = 3m \rightarrow m=3$

Si Incompatible

Pregunta N° 5

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ y-z=m \\ x+my+z=m \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-(m-1)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right) \quad \underline{m=0} \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \to x=-y \\ y-z=0 \to y=z \\ \qquad x=-z \end{array} \right.$$

→ Sistema Compatible Indefinido

$m \neq 1$ → Sistema Incompatible

Pregunta N° 01:

Sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{array}\right\}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+5 \end{pmatrix}$ $\quad A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{pmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} =$ [illegible] $= -m+3$

$\det(A) = 0 \rightarrow -m+3 = 0 \quad \therefore m = 3$

Si $m = 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ y $A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

En A: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, rango $(A) = 2$

En A^{*}: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1)(2) = -2 \neq 0$, rango $(A^{*}) = 3$

$\therefore$ El sistema es incompatible y no tiene solución. Rpta

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -6 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases} \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \begin{cases} x + y + z = -6 \\ y = 9 \\ 2y - 5z = 20 \end{cases}$

$y = 9$
$z = -2/5$
$x = -73/5$

$\therefore m = 2$ es: $(x, y, z) = (-73/5, 9, -2/5)$

Rpta

Pregunta N° 02 :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 4m + 1 + 2m - m^2 - 4 - 2 = \\ -m^2 + 6m - 5 = 0 \\ m = 1 \; ; \; m = 5 \end{array}$$

Para $m = 1 \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 1 \Rightarrow M \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m = 5 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

Para $m = 5 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4F_3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

$m = 1$	$R(A) = 2$	$R(M) = 2$	compatible indeterminado
$m = 5$	$R(A) = 2$	$R(M) = 3$	incompatible
$m \neq 1, 5$	$R(A) = 3$	$R(M) = 3$	compatible determinado

b) Para $m = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 + 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{array}$$

Pregunta N° 03:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) $AX = mX \Rightarrow AX - mX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-m)x = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + (3-m)z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)^2(3-m) = 0$$

$$m = 2 \; ; \; m = 3$$

Para $m = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 1$

Para $m = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 2$

b) Para $m \neq 2$ y 3 el sistema es compatible determinado y tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

c) $\left.\begin{array}{l} -x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{array}\right.$

$x + y + z = 3 \qquad 2z = 3$

$z + z = 3 \qquad z = 3/2$

Solución es $x = 0$; $y = \frac{3}{2}$; $z = \frac{3}{2}$

Pregunta N° 05:

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - m + m = 0 \Rightarrow R(A) < 3$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + m^2 - m^3 - m^2 = m - 2m^2 = 0$

$m = 0 \; ; \; m = 2$

Si $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Si $m = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases}$$

Si $z = 2 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = 3$

1-

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -2-m & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & 1 & m+2 & 3-3m \\ 0 & 0 & m-5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -m-1 & 6m-3 \\ 0 & 1 & m+2 & 3-3m \\ 0 & 0 & m-5 & 2 \end{array}\right)$$

*

$x = 6m-3 + (m+1)z$

$y = 3-3m-(m+2)z$

$(m-5)z = 2$

Si $m=-2$

$x = -103/7$

$y = 9$

$z = -2/7$

2-

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_3]{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & -1 & m-4 & 1-m \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-m & m-1 \end{array}\right)$$

* $x + y + m(z) = 1$

$(1-m)y + (m-1)z = 0$

$y + (4-m)z = m-1$

Si $m=1$

$x + y + z = 1$

$y + 3z = 0$