

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE  
CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

**“CAOS EN EL OSCILADOR DE DUFFING MEDIANTE LOS MAPAS  
DE POINCARÉ”**

AUTOR: CARLOS ALBERTO LEVANO HUAMACCTO

(PERIODO DE EJECUCIÓN: DEL 01.05.2020 AL 30.04.2021)

(RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 274-2020-R)

Callao, 2021

Perú





## DEDICATORIA

A mi familia, la principal promotora de mis objetivos, proyectos que emprendo en mi carrera, y por hacerme sentir orgulloso por todos sus logros alcanzados.



## AGRADECIMIENTO

A la UNAC que a través del VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando en la universidad la investigación en las facultades y con ello contribuyendo fortalecer el crecimiento de uno de los pilares fundamentales.



# ÍNDICE

	Página
INDICE	1
TABLAS DE CONTENIDO	3
RESUMEN	7
ABSTRACT	8
INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	10
1.1. Descripción de la realidad problemática	10
1.2. Formulación del problema	13
1.3. Objetivos	13
1.4. Limitantes de la investigación	14
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	15
2.1. Antecedentes	15
2.2. Marco	18
2.2.1. Teórico	18
2.2.2. Conceptual	30
2.3. Definición de términos básicos	26
CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES	28
3.1. Hipótesis	28
3.2. Definición conceptual de variables	29
3.3. Operacionalización de variables	29

CAPÍTULO IV: DISEÑO METODOLÓGICO	30
4.1. Tipo y diseño de Investigación	30
4.2. Método de investigación	30
4.3. Población y muestra	38
4.4. Lugar de estudio y período desarrollado	38
4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	38
4.6. Análisis y procesamiento de datos	43
CAPÍTULO V: RESULTADOS	49
5.1. Resultados descriptivos	49
CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS	72
6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	72
6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares	73
6.3. Responsabilidad ética	74
CONCLUSIONES	75
RECOMENDACIONES	76
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
ANEXOS	79
- Matriz de consistencia	79



## TABLAS DE CONTENIDO

### INDICE DE FIGURAS

### Página

- Figura 1. Figura que muestra las trayectorias interceptan el plano y el intercepto forma el Mapa de Poincaré. Extraído de *Differential Equations and Dynamical Systems*.1991. p.193, springer- Verlag.
- Figura 2. Figura que muestra las trayectorias interceptan el plano en forma dispersa se forma el mapa de Poincaré. Extraído de *Classical Dynamics: A contemporary Approach*.1998. Cambridge university Press.
- Figura 3. Figura que muestra las trayectorias interceptan el plano en forma dispersa se forma mapas de Poincaré diferentes en función de un parámetro del sistema. Extraído de *Determining thresholds of complete synchronization, and application*. 2009, p.186, World Science Series on Nonlinear.
- Figura 4. Figura que muestra el sistema experimental que representa el Oscilador de Duffing figura adaptado de manual de laboratorio PASCO de Chaos.
- Figura5. Figura que muestra el sistema de estudio, péndulo oscilador, que representa el oscilador de Duffing en el experimento.
- Figura6. Figura que muestra el sensor de movimiento rotacional. Adaptado de *Instruction Sheet for the PASCO Model CI6689-A*.1996.



Figura 7. Figura que muestra el sensor de movimiento rotacional.  
Adaptado struction Sheet for the PASCO CI6689-A.1996.

Figura 8. Gráfico de posición versus tiempo del oscilador de Duffing experimental sometido a una fuerza externa de con frecuencia de 0,784Hz.

Figura 9. Gráfico de velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing experimental sometido a una fuerza externa con frecuencia de 0,784Hz.

Figura10. Gráfico del mapa de Poincaré del oscilador de Duffing experimental sometido a una fuerza externa con frecuencia de 0,784Hz.

Figura11. Gráfico del espacio de fase del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa de con frecuencia de 0,784Hz.

Figura12. Gráfico de posición versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa con frecuencia de 1Hz.

Figura13. Gráfico de velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa con frecuencia de 1Hz.

Figura14. Gráfico del mapa de Poincaré del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 1,0Hz de la fuerza externa.

Figura15. Gráfico del espacio de fase del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 1,0Hz de la fuerza externa.





Figura16. Gráfico de posición versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 0,804Hz de la fuerza externa.

Figura17. Gráfico de velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,804Hz de la fuerza externa.

Figura18. Gráfico del mapa de Poincaré del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,804Hz de la fuerza externa.

Figura 19. Gráfico del espacio de fase del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,804Hz de la fuerza externa.

Figura 20. Gráfico de posición versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 0,828Hz de la fuerza externa.

Figura 21. Gráfico de velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,828Hz de la fuerza externa.

Figura22. Gráfico del mapa de Poincaré del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa de 0,828Hz.

Figura 23. Gráfico que muestra el espacio de fase del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa de frecuencia de 0,828Hz.

Figura 24. Gráfico de posición versus tiempo del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,835Hz de la fuerza externa.

Figura 25. Gráfico de velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing para una frecuencia de 0,835Hz de la fuerza externa.

Figura 26. Gráfico que muestra mapa de Poincaré para el oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 0,835Hz de la fuerza externa.

Figura 27. Gráfico que muestra espacio de fase para el oscilador de



Duffing experimental para una frecuencia de 0,835Hz de la fuerza externa.

Figura 28. Gráfico que muestra la posición versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 0,847Hz de la fuerza externa.

Figura 29. Gráfico que muestra la velocidad versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una frecuencia de 0,847Hz de la fuerza externa.

Figura 30. Gráfico que muestra el mapa de Poincaré para el oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa a frecuencia de 0,847Hz.

Figura 31. Gráfico que muestra el espacio de fase para el oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa a frecuencia de 0,847Hz.

Figura 32. Gráfico que muestra el desplazamiento angular versus tiempo para una frecuencia de 0,814Hz y valor inicial de -13,3deg.

Figura 33. Gráfico que muestra el mapa de Poincaré para una fuerza externa de frecuencia de 0,814Hz y valor inicial de 13,3deg.

Figura 34. Gráfico que muestra el desplazamiento angular versus tiempo para una frecuencia de fuerza externa de 0,814Hz y valor inicial de -4deg.

Figura 35. Gráfico que muestra el mapa de Poincaré del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa de frecuencia de 0,814Hz y ángulo inicial de -4deg.

Figura 36. Gráfico que muestra el desplazamiento versus tiempo del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa de frecuencia de 0,814Hz y ángulo inicial de 1deg.

Figura 37. Gráfico que muestra el mapa de Poincaré del oscilador de Duffing experimental para una fuerza externa a una frecuencia de 0,814Hz y ángulo inicial de 1deg.



## RESUMEN

En este trabajo experimental se aplicó el método no lineal mapas de Poincaré para analizar la dinámica desordenada o caos de un oscilador no lineal amortiguado y forzado senoidal de frecuencia variable que representa al oscilador de Duffing de doble pozo potencial.

Para determinar experimentalmente los mapas de Poincaré se midió las posiciones y velocidades a una frecuencia de muestreo de 50Hz con un sensor de movimiento rotacional Pasco y una foto compuerta conectado a la interface Science Workshop 750, de la misma marca; el oscilador estaba compuesto de una rueda de aluminio con una masa puntual ubicada excéntricamente sobre él sometido a fuerza externa través de muelles conectado a un oscilador mecánico de frecuencia variable entre 0,3 a 3Hz.

En el experimento se aplicó una fuerza de forma senoidal de intensidad constante con variaciones de frecuencias entre 0,678Hz y 1Hz y, en los resultados se encontró entre las frecuencias 0,835Hz y 0,847Hz el oscilador presentó caos. Los mapas de Poincaré en esa condición mostro dos regiones con mayor densidad de puntos asociado a dos pozos potenciales y dos atractores caóticos.

Palabras claves: Mapa de Poincaré, caos, Oscilador de Duffing.



## ABSTRACT

In this experimental work the nonlinear method of Poincaré's maps was applied to analyze the disordered dynamics or chaos of a sinusoidally damped and forced nonlinear oscillator of variable frequency representing the double potential well Duffing's oscillator. Experimentally determine the Poincaré's maps and positions and velocities were measured at a sampling frequency of 50Hz with rotational motion sensor PASCO and a photogate connected to the Science Workshop 750 interface of the same brand; the oscillator was composed of aluminum wheel with a point mass eccentrically located on it subjected to external force through springs connected to a mechanical oscillator of variable frequency between 0,3 to 3Hz.

In the experiment a sinusoidal force of constant intensity was applied where frequencies were varied between 0,678Hz and 1Hz, and in the results obtained it was found that in the frequencies 0,835Hz and 0,847Hz the oscillator presented chaos. The Poincaré maps in this condition showed two connected regions, with higher density of points, indicating that the system has two potential wells, two attractors around which the dynamics of the system revolves.

Key words: Map of Poincaré, chaos, Duffing's oscillator.



## INTRODUCCIÓN

Los mapas de Poincaré es un método para analizar la dinámica de sistemas diferente al procedimiento de la integración temporal que se utiliza habitualmente para obtener respuestas precisas del sistema dinámico; sin embargo, las integraciones que comienzan con varias condiciones iniciales (C.I.) suelen estudiarse caso por caso, por lo que sólo es posible centrarse en unos pocos estados del sistema y no en un panorama más amplio (Wang *et. al.*,2020).

El método consiste en la intersección de las órbitas periódicas, de un sistema dinámico, en un plano donde se forman grupos de puntos o mapas que muestra la característica dinámica del sistema no lineal. La dinámica en el mapa de Poincaré conserva muchos de los sistemas periódicos y cuasi periódicos del sistema original, y debido a su dimensionalidad reducida, es a menudo más simple de analizar que el sistema original. Esto era especialmente cierto para la mecánica de los planetas que era ideal para el análisis a través de mapas de Poincaré (José Saletan,1998).

En este trabajo se determinó el mapa de Poincaré del sistema dinámico, oscilador que se aproximaba al modelo de Duffing; consistía de una rueda con masa asimétricamente distribuido y sometidas a fuerzas oscilatoria periódica conectada por dos resortes. Los mapas de Poincaré que se obtuvieron experimentalmente del sistema, fueron básicamente de tres tipos, de puntos discretos distribuidos aleatoriamente para la oscilación desordenada, mapa con puntos densamente poblados cuando la dinámica fue de caos y, mapas donde compartía puntos entre discretos y puntos densamente distribuidos. Asimismo, se encontró experimentalmente que hay relación entre el mapa de Poincaré y las condiciones iniciales.

Otros elementos que también se observaron fue con el movimiento cuasi periódico, son los ciclos límites bien definidos y característicos de los sistemas no lineales como se referencia en la teoría (Taylor, 2013).



# CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1. Descripción de la realidad problemática

Muchos sistemas no lineales como el oscilador de Van Der Pool , sistema de Predictor-Presa, oscilador de Duffing entre otros son estudiados por la Dinámica no Lineal, área de la ciencia que trata sistemas dinámicos no lineales, aquellos que no cumplen el principio de superposición (Taylor,2013), estos sistemas no solo lo encontramos en la física sino en varias en otras áreas como la biología, las ingenierías, la economía, la astronomía entre otras(Strogatz,1994), por otro lado los sistemas que encontramos en la naturaleza son no lineales, algunos de tipo hamiltonianos como el péndulo físico, otros disipativos como el oscilador no lineal amortiguado forzado(Taylor,2013).

La Dinámica no lineal usa métodos no lineales llamados indicadores del caos, que permite determinar las condiciones en las que un sistema no lineal presenta ese fenómeno y se le asocia con la dinámica desordenada de las variables porque toma valores diversos sin coherencia con una alta sensibilidad a la variación de las condiciones iniciales(Taylor,2013).Entre los indicadores más importantes de la Dinámica no lineal son los Exponentes característicos de Lyapunov, Espectro de Energía, Entropía de Kolmogorov-Sinai y Mapas de Poincaré(Hilborn,2000).

Los sistemas oscilatorios lineales han sido ampliamente estudiados teórica y experimentalmente en la física, donde fenómenos como la resonancia, correlaciones de propiedades permitieron explicar fenómenos de intercambio de energía y por ende el estado del sistema(José y Saletan,1998); sin embargo, los métodos para los sistemas lineales no son aplicables para los sistemas no lineales (Chen *et al.*,2018), y de los indicadores mencionados el mapa de Poincaré por ejemplo permite



analizar el comportamiento dinámico de forma amplia.

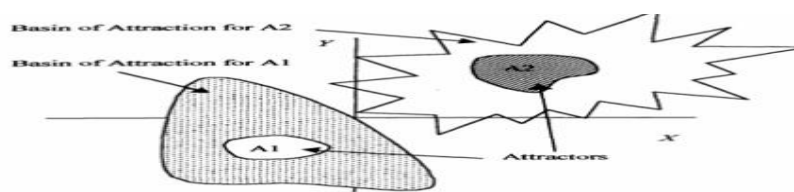
Los mapas de Poincaré vienen hacer finalmente un método para analizar la dinámica de sistemas diferente al procedimiento de la integración temporal que se utiliza habitualmente para obtener respuestas precisas del sistema; sin embargo, las integraciones se hacen para varias condiciones iniciales estudiándose por separado caso por caso, centrándose en unos pocos estados dinámicos del sistema y, no se puede tener un panorama amplio como si permite los Mapas de Poincaré (Wang *et. al.*,2020).

El método de los mapas consiste en la intersección de las órbitas periódicas del sistema en una sección de espacio de fase, se forman mapas que describen la característica dinámica. El Mapa de Poincaré debido a su dimensionalidad reducida es a menudo más simple de analizar que las integrales de movimiento (José y Saletan,1998).

Por otro lado, los atractores vienen hacer regiones en el espacio de fase hacia donde tiende la dinámica del sistema, el más simple es un punto, pero generalmente son regiones en dos o tres dimensiones hacia donde tiende la dinámica. De los diferentes tipos los más interesantes son los caóticos que se forman cuando el sistema está en caos, y los otros son los no caóticos que también se da en sistemas no lineales cuando no presentan caos. Rodríguez *et al.* (2019), aplicó los atractores en un sistema dinámico no lineal como el corazón para diferenciar de uno sano de otro con arritmia a partir de datos experimentalmente de los pulsos eléctricos, en el trabajo de investigación encontraron que los atractores pueden usarse en la detección arritmias en neonatos.

### Figura1

La figura muestra atractores en el espacio de fase.



*Nota.* Extraído de Chaos and Nonlinear Dynamics: An introducción for scientists, and Engineering, por Hilborn.2000



Los mapas de Poincaré es probablemente la más básica herramienta para estudiar la división de las trayectorias dinámicas y, fue definido por Henri Poincaré en 1881. La idea del Mapa de Poincaré es bastante simple: si  $\Gamma$  es una órbita periódica del sistema cercano al punto fijo  $x_0$  de la ecuación  $du/dt = f(u)$ . El plano  $\Sigma$  es un hiperplano perpendicular a las orbitas  $\Gamma$  en  $x_0$ . Luego para cualquier  $x \in \Sigma$  suficientemente cercano a  $x_0$ , la solución de ecuación a través de  $u$  en  $t=0$ ,  $f(u)$  cruzará  $\Sigma$  en el punto  $P(u)$  cercano a  $x_0$ . El mapeo de  $u \rightarrow P(u)$  es llamado mapa de Poincaré (Strogatz, 1994). El oscilador de Duffing se aplica para estudiar muchos sistemas en la ciencia e ingeniería; la dinámica transitoria de este oscilador fuertemente no lineal ha sido un interés particular de investigación y, la reconstrucción suficientemente precisa de los comportamientos disipativos de este oscilador sigue siendo un objetivo no alcanzado (Zhang *et. al.*, 2015).

En esa línea este trabajo tiene el objetivo de establecer la relación entre los mapas de Poincaré y los espacios de fase en el oscilador de Duffing en forma experimental, por ello proponemos el siguiente problema.



## 1.2. Formulación del problema

### Problema General

¿De qué manera los mapas de Poincaré determinan el caos en el oscilador de Duffing?



## **Problemas Específicos**

¿De qué manera los atractores permiten determinar el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré?

¿Cuáles son las ventajas de los mapas de Poincaré en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing?

¿Cuál es la relación entre las condiciones iniciales y el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré?

### **1.3 Objetivos**

#### **Objetivo General**

Determinar el estado de caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.

#### **Objetivos Específicos**

- Determinar la relación entre los atractores y el caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.
- Determinar las ventajas de los mapas de Poincaré en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing.
- Determinar la relación entre las condiciones iniciales y el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré.



#### 1.4 Limitantes de la Investigación

La limitación que se presentó en esta investigación, es que no hay un formalismo matemático para resolver en forma exacta las ecuaciones de segundo orden no lineales que presenta el oscilador de Duffing como se da en para los sistemas lineales, la teoría que se aplica es de las perturbaciones que permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones no lineales. con ello no se puede reconstruir los mapas de Poincaré en forma exacta a través de programas computacionales y comparar con los resultados obtenidos en forma experimental.

La limitante social, este trabajo esta orientado a los especialistas de la medicina e ingeniería que trabajo con sistemas no lineales y requieren de métodos no lineales como es el caso del mapa de Poincaré que es muy sensible a detectar pequeñas señales, que puede servir por ejemplo para detectar arritmias del corazón que con el electrocardiograma no se puede hacer muchas veces por no detectar pequeñas señales.



## CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

### 1.1. Antecedentes

#### 1.1.1 Antecedentes: Internacional

WANG X., ZWU Z., YANG C. **Integration of Freeplay-Induced Limit Cycles Based On a State Space Iterating Scheme.**[2021]

La integración temporal se utiliza habitualmente para obtener respuestas precisas del sistema en el tiempo; sin embargo, las integraciones se tienen que hacer para cada condición inicial, suelen estudiarse caso por caso que no resulta práctico porque se centra en unos pocos estados del sistema. Este trabajo propone un esquema de iteración del espacio de estados para encontrar soluciones mediante la integración temporal utilizando otro método diferente al mapa de Poincaré en el que las soluciones se encuentran como puntos fijos.

JOTHIMURUGAN R., THAMILMARAN K., RAJASEKAR S., SANJUAN M. **Multiple resonance and anti-resonance in coupled Duffing oscillators.** [2015].

En este trabajo se investiga el comportamiento de resonancia en un sistema compuesto por  $n$ -osciladores Duffing acoplados donde sólo el primer oscilador es impulsado por una fuerza periódica. Se

derivan las ecuaciones de frecuencia-respuesta para un sistema compuesto por dos osciladores acoplados mediante un enfoque teórico, la curva de frecuencia-respuesta muestra dos picos de resonancia y uno de antirresonancia. A la predicción teórica de las amplitudes de respuesta le acompaña las mediciones a través de un modelo electrónico de sistemas de osciladores acoplado con las mismas características que el oscilador de Duffing. Este trabajo muestra la importancia de los osciladores de Duffing.

**ZHANG C., HARNE R., LI B., WANG K. Reconstructing the transient, dissipative dynamics of a bistable Duffing oscillator with an enhanced averaging method and Jacobian elliptic functions. [2015].**

En este estudio, se presenta un método que utiliza funciones elípticas jacobianas para predecir con mejor precisión la dinámica transitoria y disipativa de un oscilador biestable de Duffing y, en el enfoque analítico se aplica de forma única para reconstruir los regímenes dinámicos. Pequeña variación de los parámetros transitorios y promediados en la formulación de la solución, las predicciones analíticas resultantes están en excelente acuerdo con las trayectorias exactas de desplazamiento y velocidad de la ecuación gobernante. Se utiliza una amplia gama de parámetros del sistema y condiciones iniciales para evaluar la exactitud y la eficiencia computacional del método analítico. En nuestro trabajo tomamos como referencia la forma como aborda el análisis del oscilador de Duffing.

**CABANAS, A. M. y LAROZE, D. Dinámica de una partícula magnética bajo la influencia de campos oscilatorios. [2015].**

Este trabajo muestra el análisis teórico donde aplica las ecuaciones llamadas Landau-Lifshitz-Gilbert a una partícula cargada de donde se obtienen un sistema dinámico no lineal que describe como responde una

partícula en un campo magnético oscilante, se analiza la dinámica haciendo variar parámetros que afectan sobre manera el sistema especialmente con las condiciones iniciales y se estudia el caos en su espacio de fase y los mapas de Poincaré para una mejor descripción del sistema no lineal semi clásico. En este trabajo los mapas de Poincaré ayudan a observar cuando se observa la bifurcación de estados y cual va en relación al camino hacia el estado de caos en un oscilador como esperamos que se observe en nuestros resultados experimentales.



**TUCKER W. Computing Accurate Poincaré Maps.[2002].**

En este trabajo se presenta un método numérico especialmente adecuado para calcular los mapas de Poincaré para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método es una generalización de un procedimiento descrito por Hénon (1982). Este trabajo presenta un tratamiento no experimental, básicamente desarrolla algoritmos para determinar aproximadamente mapas de Poincaré para ecuaciones dinámicas, sus resultados se usan para comparar los resultados sobre el oscilador de Duffing obtenido experimentalmente.

**CHEN,C.,LEE,S.,GE, Z.M.Regular and chaotic dynamics of a simplified fly-ball governor. Institution of Mechanical Engineers.[2006].**

En este trabajo se hace un estudio de un sistema dinámico mecánico al cual llama fly-ball governor que presenta el estado del caso por presentar fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Las ecuaciones que presenta son no lineales y tienen la estructura de la ecuación del oscilador de Duffing, también aplica el método de los mapas de Poincaré con algoritmos aproximados. En este trabajo lo usaremos como referencia en la metodología seguida en este trabajo experimental.

FEUDEL,U.,KUZNETSOV,S.,PIKOVSKY,A. **Strange non Chaotic attractor. Singapore. World Scientific. [2006].**

Muestra que estudio del comportamiento de los sistemas cuasi periódicos forzados a través de los atractores, que son regiones en el espacio de fase o configuración hacia donde tiende la dinámica, es una forma de estudio de los sistemas cuasi periódicos. La revisión bibliográfica realizada muestra que en los trabajos no desarrollan los Mapas de Poincaré como un indicador de Caos de un sistema de un Oscilador no lineal. El antecedente descrito ha motivado a desarrollar la presente investigación como una contribución dirigida a dotar de los instrumentos necesarios de consulta.



KAPITANIAK,T.;WONJEWODA,J. **Attractors of Quasiperiodically Forced Systems Singapore. Editorial World Scientific. [1994]**

Este trabajo estudia el comportamiento de los sistemas cuasi periódicos forzados a través de los atractores que son regiones hacia donde tiene la dinámica y que se manifiesta en los Mapas de Poincaré. Nuestro estudio se realizará teniendo como base la teoría de la Dinámica no Lineal y los Exponentes de Lyapunov como indicadores cuantitativos del estado el Caos del sistema complementando el análisis el espacio de fase. El antecedente descrito ha motivado a desarrollar la presente investigación como una contribución dirigida a establecer la relación con las condiciones iniciales.

Murali, A., y Philominathan,P. **Strange nonchaotic attractors in oscillators sharing nonlinearity. [2017]**

Identifican la existencia de atractores extraños no caóticos en un modelo de dos osciladores disipadores de circuitos resistencia, capacitancia y inductancia impulsados por fuentes de forma senoidales que comparten una interacción no linealidad. El extraño atractor no caótico detectado ha sido simulado en este trabajo a través de métodos numéricos que abarcan, el análisis del espacio de fase y los métodos no lineales como son, el método mapas de Poincaré y exponentes de Lyapunov principalmente. La extraña naturaleza no

caótica de los atractores fue examinada por la medida de cuantificación de la recurrencia. Este trabajo nos sirvió para comprender la aplicación del método de los mapas de Poincaré en la descripción de sistema no lineales a partir de datos simulados.

### 1.1.2 Antecedentes: Nacional

No se encontraron referencias bibliográficas relacionadas al proyecto en el ámbito nacional al formular el proyecto y durante el desarrollo del proyecto de investigación en los doce meses.



### 2.2.1. Marco Teórico

Poincaré proponía que, si supiéramos exactamente la situación del universo en el momento inicial, se podría predecir exactamente la situación de ese mismo universo en un momento sucesivo, pero incluso si fuera el caso de que las leyes naturales ya no tuvieran ningún secreto para nosotros, esto no es así en la realidad, por la teoría del caos. Las mediciones efectuadas sobre el estado de un sistema en un momento dado pueden no permitirnos predecir la situación futura, a pesar de que se tiene ecuaciones que gobiernan la dinámica (Hilborn, 2000).

No ocurrió hasta los años 70, después de casi un siglo de investigaciones, que se extendió el conocimiento del caos y, no hay formas sencillas generales de predecir cuándo un sistema exhibirá caos, por eso, se han tratado de desarrollar métodos no lineales (Hilborn, 2000).

También hemos aprendido que el caos determinista está siempre asociado con sistemas no lineales, la no linealidad es una condición necesaria para el caos, pero suficiente (Saletan, 1998); con el desarrollo de las computadoras permitió estudiar el caos a más



profundidad ya que ahora es posible realizar cálculos numéricos de la evolución temporal, serie de tiempo, de las propiedades de los sistemas sensibles a las condiciones iniciales.

La teoría del caos, es una teoría que trata la dinámica desordenada de los sistemas no lineales que muestran una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales y, la no linealidad hace que no cumplan con el principio de superposición (Hilborn, 2000).

### **El Mapa de Poincaré**

Probablemente la más básica herramienta para estudiar la estabilidad y bifurcación de orbitas periódicas es el Mapa de Poincaré definido por Henri Poincaré en 1881. La idea del mapa de Poincaré es bastante simple: si  $\Gamma$  es una órbita periódica del sistema a través del punto  $x_0$ .

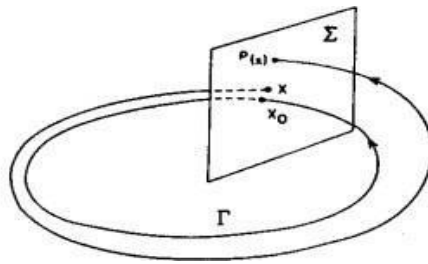
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

El plano  $\Sigma$  es un hiperplano perpendicular a  $F$  en  $x_0$ . Entonces para cualquier  $x \in \Sigma$  suficientemente cercano a  $x_0$ , la solución de (1) a través de  $x$  en  $t=0, \phi_t(x)$  cruzará  $\Sigma$  en el punto  $P(x)$  cercano a  $x_0$ . El mapeo de  $x \rightarrow P(x)$  es llamado mapa de Poincaré (Lawrence, 1991).

#### **Figura 2**

*Las trayectorias interceptan el plano y el intercepto forma el Mapa de Poincaré*





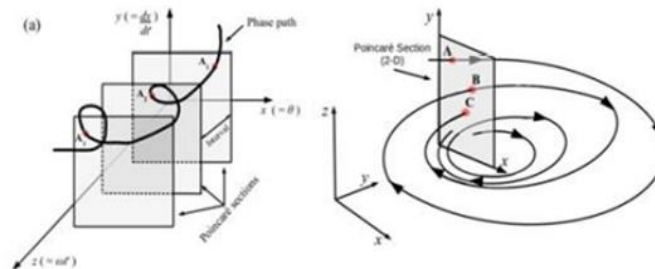
Nota.Extraído de Differential Equations and Dynamical Systems.1991,p.193,spinger- Verlag

Cuando las trayectorias son muy diferentes en cada periodo van a interceptar en forma discreta y diferentemente los puntos el plano, de forma dispersa, como se muestra en la figura2.



### Figura 3

Las trayectorias interceptan el plano en forma dispersa se forma el mapa de Poincaré

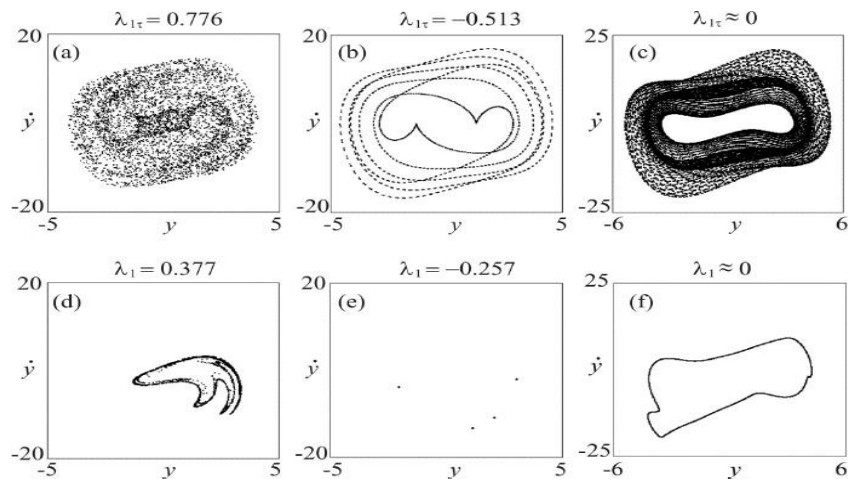


Nota.Extraído de Classical Dynamics:A contemporary Approach.1998.Cambridge university Press.

### Figura 4

Las trayectorias interceptan el plano en forma dispersa se forma mapas de Poincaré diferentes en función de un parámetro del sistema.





Nota. Extraído de Determining thresholds of complete synchronization, and application. 2009, P.186, World Science Series on Nonlinear

### El oscilador de Duffing amortiguado y forzado armónicamente

El oscilador amortiguado y forzado de Duffing es descrita por la ecuación 1, es una ecuación no lineal que no tiene solución analítica exacta, por ello, para resolverla en forma aproximada se supone una débil no linealidad a través de un valor pequeño de  $\Lambda$  y en ello se puede aplicar el método de perturbación; en este sistema es importante el análisis de las respuestas de amplitud y fase del oscilador como lo es para el caso lineal.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \Omega^2 x + \Lambda x^3 = F_0 \cos pt \quad (1)$$

Donde:

$K$  constante de fricción, la frecuencia natural de oscilación del oscilador está dado por  $\Omega$ ,  $\Lambda$  es el parámetro de no linealidad,  $F_0$  es la amplitud máxima de la fuerza externa y  $p$  la frecuencia de la fuerza externa que se aplica al



sistema.

Haciendo un cambio de variable  $x = \frac{F_0}{p^2} X$  y  $s=pt$  la ecuación 1 queda expresada de la siguiente manera (Gregory, 2006),

$$X'' + \left(\frac{k}{p}\right)X' + \left(\frac{\Omega}{p}\right)^2 X + \varepsilon X^3 = \text{Cos } s \quad (2)$$

Donde  $0 < \varepsilon = \frac{F_0 \Lambda}{\Omega^2} < 1$

Para el caso, cuando  $k= 0$  cuando se desprecia la fricción la ecuación 2 se reduce queda expresada de la siguiente manera,

$$X'' + \left(\frac{\Omega}{p}\right)^2 X + \varepsilon X^3 = \text{Cos } s \quad (3)$$

La solución aproximada de la ecuación 3 se puede determinar a través del método de perturbación la solución tiene una estructura como la siguiente expresión,

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \dots \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) y considerando que  $X_0(t)$  la tiene la forma senoidal,

$$X_0(t) = A \text{ Sen } (s) \quad (5)$$

Se obtiene la siguiente expresión solución de la ecuación 3 donde  $p \neq \Omega$ .

$$X_0 = \left( \frac{p^2}{\Omega^2 - p^2} \right) \cos s + A \cos \left( \frac{\Omega s}{p} \right) + B \operatorname{Sen} \left( \frac{\Omega s}{p} \right) \quad (6)$$



Cuando se reemplazan los valores de A y B la solución de ecuación 3 queda de la siguiente manera como se muestra a continuación para x en primera en forma aproximada.

$$x = \left( \frac{F_0}{\Omega^2 - p^2} \right) \left[ \cos pt - \left( \frac{3p^6 \cos pt}{(\Omega^2 - p^2)^3} + \frac{p^6 \cos 3pt}{(\Omega^2 - p^2)^2 (\Omega^2 - 9p^2)} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right] \quad (7)$$

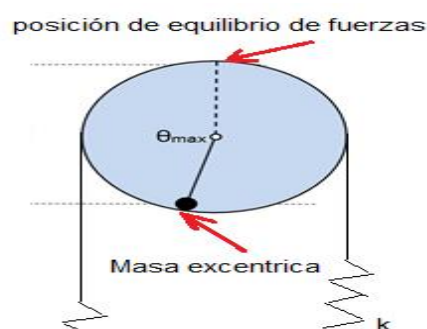
La ecuación 7 como es la solución aproximada de la ecuación débilmente no lineal y forzada con una perturbación armónica, pero nos da una idea como es la solución de la ecuación 3; también en la ecuación se muestra dependencia de la frecuencia, posibles resonancias para  $p = \Omega$ .

### Sistema no lineal

Este sistema que mostramos, es el que hemos considerado en este trabajo y está compuesto de un disco con masa excéntrica, el sistema presenta dos puntos de equilibrio uno en cada lado del disco donde el par causado por el peso de la masa puntual excéntrica se equilibra con el par generado por los resortes. Para representar la energía potencial U versus el ángulo  $\theta$ . Primero obtendremos las energías, cinética y potencial, y luego la lagrangiana y ecuación de Lagrange.

**Figura 5**

*Sistema experimental que representa el Oscilador de Duffing*



La energía cinética del sistema está conformada por la energía rotacional del disco y masa puntual ubicado en forma excéntrica. La energía cinética es,

$$K = \frac{1}{2} (mR^2) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} (2m + M) R^2 (\dot{\theta})^2 \quad (8)$$

La energía potencial está compuesta de la energía potencial debido a la gravedad y la energía potencial elástica por los resortes con constante elástica K, cada uno.

$$U_g = -\frac{1}{2} mgR[1 + \text{Cos}(\pi - \theta)] \quad (9)$$

Consideramos que cada resorte se elonga de igual forma como se muestra en la figura 5 a consecuencia de la oscilación del disco,  $\Delta x = R\theta$ . Los muelles o resortes se elongan en forma serial por eso consideramos la constante elástica total igual a  $k/2$ , luego la energía potencial elástica se expresa de la siguiente manera,

$$U_s = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}\right) (R\theta)^2 = \frac{kR^2}{4} \theta^2. \quad (10)$$


La ecuación dinámica del sistema considera una fuerza de fricción y una fuerza externa armónica.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -b \frac{d\theta}{dt} + A \cos wt \quad (11)$$

Reemplazando el lagrangiana se obtiene la siguiente ecuación dinámica con respecto a un solo variable dinámica el ángulo  $\theta$ ,

$$\frac{1}{2} (2m + M) R^2 \ddot{\theta} + \frac{kR^2}{2} \theta - \frac{1}{2} mgR (0 \pm \text{Sen}(\pi - \theta)(-1)) = -b\dot{\theta} + A \cos wt \quad (12)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2b}{(2m + M)R^2} \dot{\theta} + \frac{k}{(2m + M)} \theta - \frac{mg}{(2m + M)R} \text{Sen} \theta = \frac{A}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2} \cos wt \quad (13)$$

Considerando la siguiente aproximación de la función seno, la ecuación 13 se puede aproximar.

$$\text{Sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + ..$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{2b}{(2m + M)R^2} \dot{\theta} + \frac{k}{(2m + M)} \theta - \frac{mg}{(2m + M)R} \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \\ = \frac{A}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2} \cos wt \end{aligned} \quad (14)$$

Usando los parámetros  $\beta$ ,  $\omega_0$ ,  $\Lambda$  y  $F$

$$\begin{aligned} 2\beta &= \frac{2b}{(2m+M)R^2}, & \omega_0^2 &= \left( \frac{k}{(2m+M)} - \frac{mg}{(2m+M)R} \right), \\ \Lambda &= \frac{mg}{6(2m+M)R}, & F &= \frac{A}{\left(m+\frac{M}{2}\right)R^2}. \end{aligned} \quad (15)$$



Finalmente, la ecuación trece (13) se puede expresar de una forma simplificada, la ecuación obtenida tiene la forma de la ecuación del oscilador de Duffing amortiguado y forzado. La ecuación catorce(14) queda de la siguiente forma.

$$\ddot{\theta} + 2\beta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta + \Lambda \theta^3 = F \cos \omega t \quad (16)$$

Luego haciendo el siguiente cambio de notación,  $\theta = \sqrt{\epsilon}y$  ,  $x = \omega t$  ,

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  ,  $F_0 = \frac{F}{\sqrt{\epsilon}}$  y  $\delta = \frac{\beta}{\omega}$  se puede llegar a la ecuación 18 , la cual tiene la forma de la ecuación uno(1).

$$\frac{d^2(\sqrt{\epsilon}y)}{d\left(\frac{x}{\omega}\right)^2} + 2\beta \frac{d(\sqrt{\epsilon}y)}{d\left(\frac{x}{\omega}\right)} + \omega_0^2(\sqrt{\epsilon}y) + \Lambda(\sqrt{\epsilon}y)^3 = F \cos \left[ \omega \left(\frac{x}{\omega}\right) \right]$$

$$(\omega)^2 \frac{d^2(\sqrt{\epsilon}y)}{d(x)^2} + 2\omega\beta \frac{d(\sqrt{\epsilon}y)}{d(x)} + \omega_0^2(\sqrt{\epsilon}y) + \Lambda(\sqrt{\epsilon}y)^3 = F \cos \left[ \omega \left(\frac{x}{\omega}\right) \right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\beta}{\omega} \frac{dy}{dx} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y + \Lambda \epsilon y^3 = \frac{F}{\sqrt{\epsilon}} \cos \left( \frac{\omega}{\omega} x \right) \quad (17)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\delta \frac{dy}{dx} + \Omega^2 y + \epsilon y^3 = F_0 \cos (\Omega_1 x) \quad (18)$$

Finalmente, la ecuación dieciocho tiene la forma de la ecuación de Duffing amortiguado y forzado armónicamente.



## 1.2. Definición de términos básicos

**Caos**, fenómeno que presentan los sistemas no lineales de presentar fuerte

sensibilidad a las condiciones iniciales y, se manifiesta con una dinámica desordenada.

**Mapas de Poincaré**, son regiones formadas por el intercepto de las trayectorias en cada periodo de oscilación donde se puede analizar las ecuaciones no lineales en un grado de menos o hacer aproximaciones para solucionarlos, hoy en día es considerado un método no lineal.

**Oscilador de Duffing**, es un sistema no lineal que presenta oscilación de mono periodos y multi periodos, hoy se usa como modelo para describir muchos sistemas periódicos no lineales, mecánicos, eléctricos, magnéticos entre otros.

## **CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES**

### **3.1. Hipótesis**

#### **3.1.1 Hipótesis General**

Los mapas de Poincaré determinan el estado dinámico de caos del oscilador de Duffing a través de atractores.

#### **3.1.2 Hipótesis Específicas**



- Los atractores contribuyen a determinar el caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.
- Los mapas de Poincaré presentan ventajas en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing.
- La relación entre las condiciones iniciales y el caos es directa en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.

### 3.2. Definición conceptual de variables

Las variables identificadas en la hipótesis general se pueden definir conceptualmente de la forma que se indica a continuación:

**Variable Dependiente:** estado de caos del oscilador de Duffing.



El estado dinámico, que presenta, de caos el oscilador de Duffing se puede observar en el espacio de fase para cada mapa de Poincaré. En este mismo espacio se puede observar los atractores cuando hay caos o cuando se tiende hacia el estado de caos.

**Variable Independiente:** mapa de Poincaré

Es el mapa que resulta de interceptar las curvas de las trayectorias dinámicas oscilador de Duffing en cada ciclo de oscilación. Las curvas pueden mostrar puntos discretos cuando el sistema no está en Caos y,

muestra mapas o puntos dispersos cuando el sistema está en caos.

### 3.3. Operacionalización de

### 3.4. variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
<b>Dependiente</b> Estado de caos del oscilador de Duffing.	Atractor en espacio de fase	Atractor caótico Atractor no caótico Si atractor	Espacio de fase	Observación directa del espacio de fase
<b>Independiente</b> Mapas de Poincaré.	Formas de los mapas.	Forma con alta densidad de puntos discretos. Forma con baja densidad de puntos. Sin forma.	Método de los mapas de Poincaré.	Evaluación periódica de las series de tiempo.



## CAPÍTULO IV: DISEÑO METODOLÓGICO

### 4.1. Tipo y diseño de investigación

De acuerdo al objetivo de la investigación, el presente proyecto es una investigación aplicada de tipo cuantitativa y transversal. El trabajo de investigación según el código UNESCO le corresponde el número 2212 y el código del Plan Nacional CTI el número 040502.

Por el diseño de la investigación que se considero fue experimental y

consistió en medir los desplazamientos y velocidades angulares a través de sensor de rotación de tres ejes de la marca PASCO, en un sistema oscilatorio amortiguado y forzado, la fuerza externa aplicada fue periódica; el sistema representa experimentalmente el oscilador de Duffing.

## 4.2. Método de investigación

El método de investigación que se siguió fue experimental donde se estudió el comportamiento caótico del péndulo no lineal, oscilador de Duffing, impulsado por una fuerza variable periódica, se explora graficando su movimiento en el espacio de fase y haciendo un gráfico del mapa de Poincaré. Estos gráficos se comparan con el movimiento del péndulo cuando no es caótico.

### 4.2.1. Sistema de estudio

El oscilador consiste en un disco de aluminio de 9,5cm de diámetro y 120g conectado a dos muelles con una masa excéntrica de 15g en el borde del disco como se muestra en la figura 5. El disco rota alrededor de un eje fijo unido a un sensor de rotación angular que registra las rotaciones de oscilación.

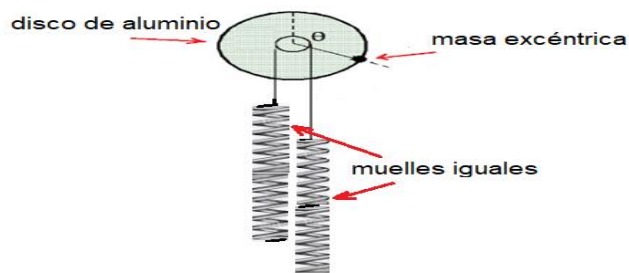
La fuerza oscilatoria generado por un oscilador eléctrico de frecuencia y amplitud variable se aplica a la rueda a través de dos muelles. El sistema oscila periódicamente o aperiódicamente(caótico), vemos que depende del cambio de la intensidad de la fuerza externa y frecuencia. Se pueden variar parámetros para que el movimiento periódico se convierta en caótico, como son la frecuencia de la fuerza externa, la amplitud de fuerza externa, la amplitud de amortiguamiento y las condiciones iniciales.

Hay tres formas diferentes de mostrar las oscilaciones como son, desplazamiento angular versus tiempo, espacio de fase, mapa de Poincaré constituido por la velocidad angular frente a desplazamiento angular trazado sólo una vez por período de la fuerza externa.



**Figura 6**

*Sistema de estudio, péndulo oscilador*



*Nota.* Representa el oscilador de Duffing en el experimento.

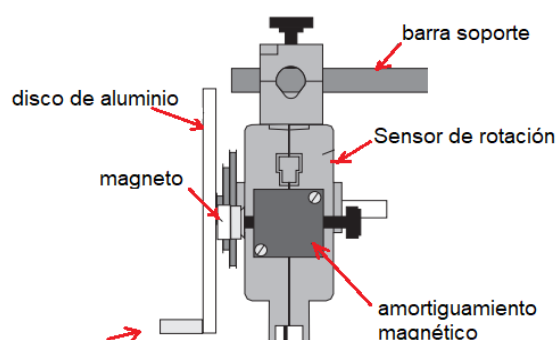
En este trabajo consideramos que el espacio de fase y el mapa de Poincaré son particularmente útiles para reconocer las oscilaciones caóticas, ya que cuando el movimiento es caótico, los gráficos que representan las trayectorias no se deben repetir periódicamente.

#### 4.2.2. Espacio de fase

Para determinar los espacios de fase se midieron las posiciones angulares y velocidades angulares con un sensor de movimiento rotacional de la marca Pasco con las siguientes especificaciones, polea de tres pasos 10mm, 29mm, 48mm; con diámetros dimensiones del sensor de 10cm x 5 cm x 3,75 cm; diámetro del eje igual 6,35mm; resolución del movimiento rotatorio de  $0,09^\circ$  ( $0,00157$  rad) ; resolución de movimiento lineal de 0,0078mm , y rotación máxima de 30 rev/s (Manual Pasco Scientific Physics & Engineering)



**Figura 7**  
*Sensor de movimiento rotacional*



*Nota.* Adaptado de Instruction Sheet for the PASCO Model CI6689-A.1996.

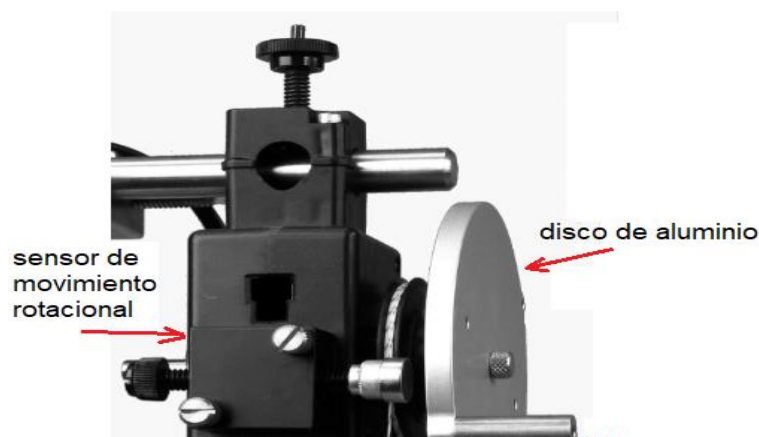
Para medir el espacio de fase se procedió primero las posiciones y velocidades angulares siguiendo los siguientes pasos que describimos a continuación:

- a) Se procedió a instalar el sensor de movimiento rotacional como se muestra en la figura 6, conjuntamente con el disco de aluminio ajustado en el eje central y la masa excéntrica enroscada en un
- b) extremo, asimismo, se colocó el nylon alrededor del paso mayor del sensor de rotación.
- c) El sistema estudiado es de tipo no autónoma con fricción por eso en la parte experimental se agrega un magneto que aplica una fuerza magnética que atrae la rueda de metal reduciendo su oscilación, haciendo las veces de fricción en el sistema.



### **Figura 8**

*Sensor de movimiento rotacional instalado en el soporte universal.*



*Nota.* Adaptado de manual PASCO Chaos Experiment.

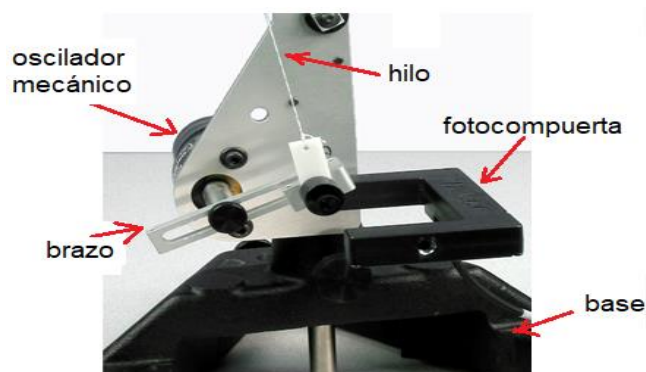
d) Luego se procedió a instalar el oscilador mecánico PASCO ME-8750 en la parte inferior del soporte universal y sujetarlo a la misma base como se muestra en la figura 8, el oscilador mecánico está diseñado para accionar aparatos que requieren una baja frecuencia entre 0,3Hz a 3Hz, alto par de torsión y una oscilación sinusoidal; consta de un motor de corriente continua con un brazo de accionamiento.

La cuerda de nailon va conectada al extremo del brazo del oscilador mecánico a un muelle y luego de este al sensor de movimiento rotacional. El oscilador mecánico proporcionará una tracción sinusoidal por medio de la cuerda como se muestra en la figura 4.



### Figura 9

*Oscilador mecánico y foto compuerta instado en el soporte universal.*

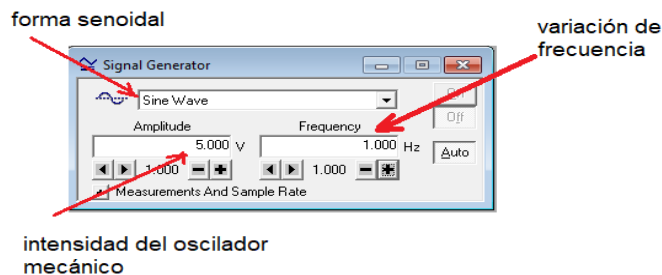


Nota. adaptado del manual PASCO Chaos Experiment .

d) También se instaló una foto compuerta como se muestra en la figura 8, este dispositivo detecta el tiempo de interrupción del brazo mecánico del oscilador cuando realiza un ciclo de oscilación, y se controla con la interface y la computadora a través del programa Data Studio versión 1.9.8, el cual tiene licencia la Universidad Nacional del Callao. El oscilador mecánico se configuro con forma senoidal con una amplitud máxima en voltaje de 5V, el cual se controla con el amplificador de potencia controlado por el programa Data Studio.

**Figura 10**

Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)



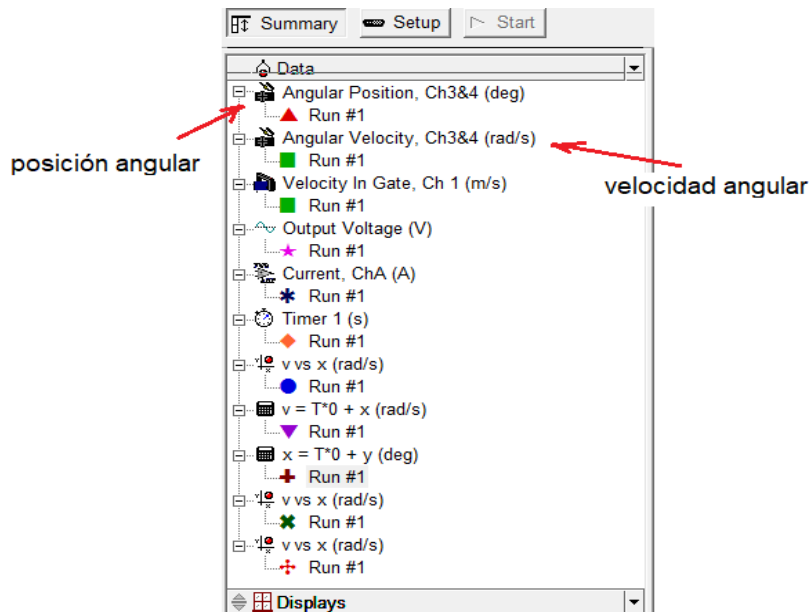
e) La posición angular y la velocidad de sistema se registran en función del tiempo utilizando un sensor de movimiento rotacional. Se realiza un   
 Nota. Para controlar el oscilador mecánico en intensidad y frecuencia, figura adaptada del programa.



diagrama de fase graficando la velocidad angular frente al ángulo de desplazamiento angular como se muestra en la figura 10.

**Figura 11**

Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)

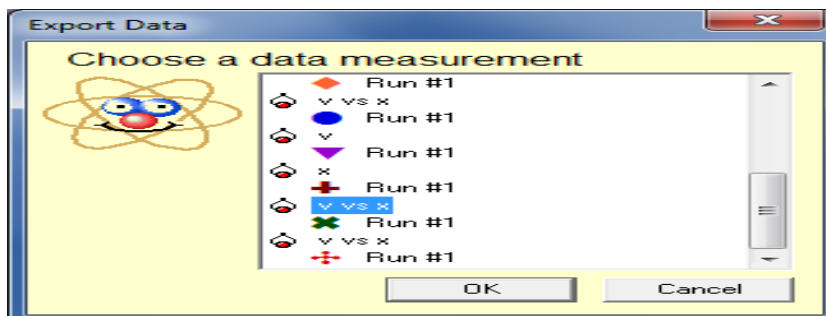


*Nota.* Muestra el registro de la medición de la velocidad angular y posición angular, figura adaptada del programa.

f) Luego se exporta los datos medidos de posición y velocidad angular medidos para cada corrida a través del software Data Studio versión 1.9.8 como se muestra en la figura 11, el archivo que genera en una con extensión txt que se puede graficar con el Excel.

**Figura 12**

*Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)*



*Nota.* Muestra la exportación de datos medidos de posición y velocidad angular, figura adaptada del programa.



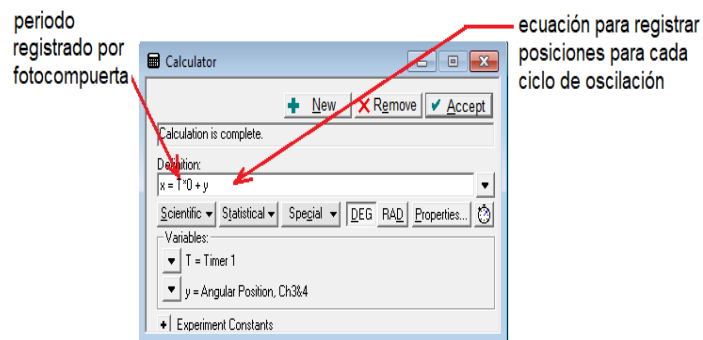
### 4.2.3. Mapa de Poincaré

Para determinar la variable Mapa de Poincaré se procede configurando el programa Data Studio, que consiste en registrar valores medidos por el sensor de movimiento rotacional para cada ciclo de oscilación solamente del oscilador mecánico.

a) En el software se trabaja con la ventana llamada “calculadora” en donde se configura para que se registre solo datos al final de cada oscilación del oscilador que registra la foto compuerta.

**Figura 13**

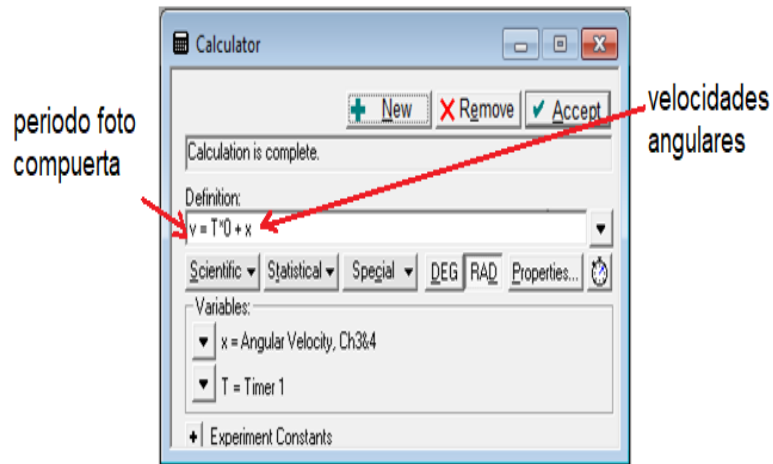
*Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)*



*Nota.* Muestra la calculadora configurando para registrar posición angular, figura adaptada del programa.

**Figura 14**

Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)



*Nota.* Configurando para registrar velocidad angular, figura adaptada del programa.

b) Con la herramienta “calculadora” se registra solo un valor de posición y velocidad angular al final de un ciclo de oscilación del oscilador mecánico y no toda la integral de valores que presenta el oscilador, y con ello se construye el mapa de Poincaré de manera experimental.

c) Los valores del oscilador de posición y velocidad angular son los mismos cuando es periódico, el mapa sale un punto, cuando es cuasi periódico sale muchos puntos, y cuando es caótico sale regiones con densidad de puntos.

**Figura 15**

Ventana del Software Data Studio (versión 1.9.8)



*Nota.* Los datos registrados por calculadora, figura adaptada del programa.



### **4.3. Población y muestra**

Dada la naturaleza de la investigación no es posible determinar una población y muestra y no se realizó ningún tipo de tratamiento estadístico de datos durante el desarrollo de la investigación.

### **4.4. Lugar de estudio y período desarrollado**

El proyecto se desarrolló en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callo y fue ejecutado en un período de 12 (doce) meses, comprendidos del 01.05.2020 al 30.04.2021.



### **4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información**

#### **4.5.1 Técnica usada para la recolección de la Información**

La técnica usada en este trabajo de investigación está basada en los métodos no lineales llamado diagrama de fase y mapa de Poincaré donde se mide una serie de valores de posición y velocidad angular que toma el sistema dinámico oscilador de Duffing, que consiste de una rueda de aluminio con una masa excéntrica, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

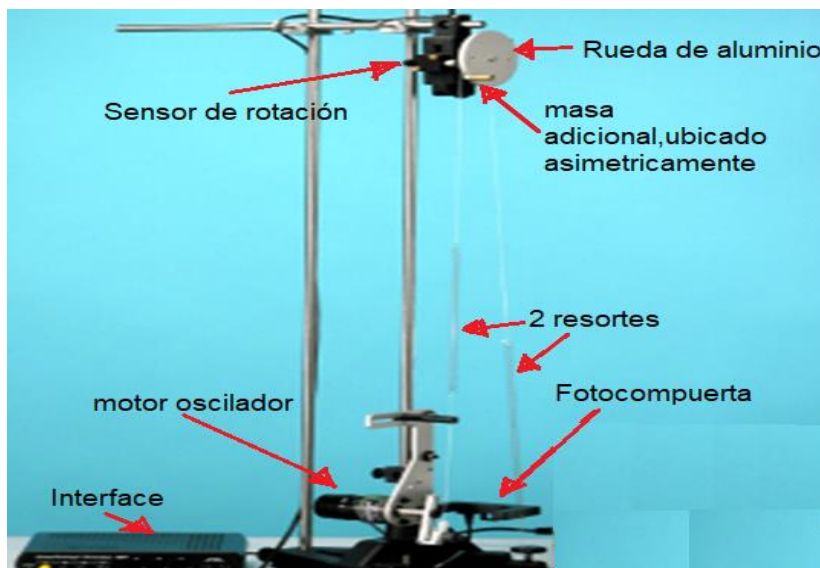
El sistema se hace oscilar desde condiciones iniciales, ángulo de referencia que se relaciona directamente con una energía potencial inicial a partir del cual el sistema toma diferentes posiciones que son registrados por un sensor de rotación angular para diferentes instantes de tiempo, esto nos permite registrar series de tiempo para la coordenada y velocidad angular, y que cuando los constituimos en un diagrama de velocidad vs posición se muestra el comportamiento dinámico.

Los mapas de Poincaré se forman cuando se seleccionan valores de posición y velocidad en un determinado periodo de tiempo, los valores van a mostrarse distintos cuando la dinámica es irregular o siempre los mismos puntos cuando es regular.

#### 4.5.2 Instrumentos usados para la recolección de la Información

El instrumento usado para la recolección de la información fue un sistema constituido por varios equipos como se muestra en la figura 15 de la marca PASCO

Figura 16  
 Montaje del experimento con los componentes conectados  
 donde se puede observar que este compuesto de un sensor de movimiento circular de aluminio conectado a una computadora I-5.



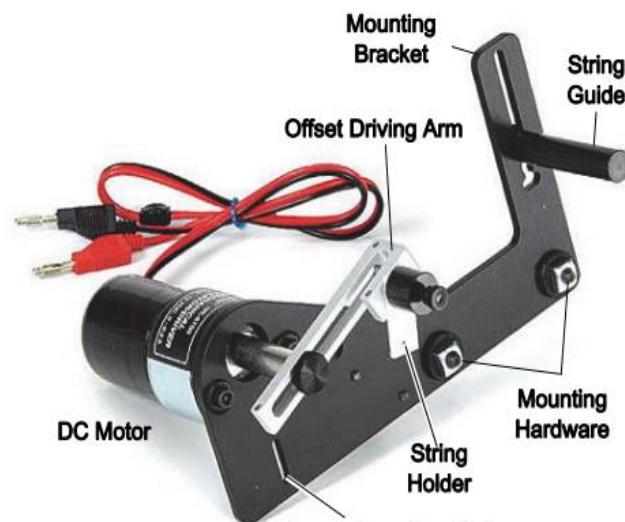
Nota. Sistema para estudiar oscilaciones no lineales de la marca PASCO. Adaptado del Manual PASCO SCIENTIFIC 2006.

En la figura 16 se muestra el oscilador/ conductor mecánico modelo PASCO ME-

8750, este equipo está diseñado para accionar aparatos que requieren una baja frecuencia de 0,3 a 3 Hz, tiene un brazo de accionamiento para un alto par de torsión y trabaja con señales de forma senoidal. Consta de un motor de corriente que trabaja con una fuente de alimentación máxima de 12 V y corriente de 0 a 0,3 A, variable.



**Figura 17**  
*Oscilador mecánico PASCO ME8750*



*Nota.*Extraído del manual de instrucción N° 012-05931B.2009.



La compuerta infrarroja PASCO ME-9498A es un dispositivo con múltiples aplicaciones, contiene un LED infrarrojo que emite un haz hacia un fotosensor. Se le considera también un sensor (digital), registra “uno” cuando recibe señal desde el LED y “cero” cuando el receptor, fotosensor, está bloqueado. Para conectar la compuerta a la interfase y timer para medir tiempo de interrupción se utiliza un cable plug-RJ12 .

**Figura18**

Compuerta infrarroja PASCO ME-9498A.



*Nota.* Extraído de catálogo Pasco Scientific.2009.



El sensor de movimiento rotacional PASCO CI6538 es un equipo que trabaja con las interfaces de la misma marca y tiene las siguientes especificaciones, resolución angular 0,25 de grado, resolución lineal de 0,055mm y posee tres escalones de diámetro 10mm, 29mm, 48mm con resolución del movimiento rotatorio de  $0,09^\circ$  (0,00157 rad), resolución de movimiento lineal de 0,0078mm ,y rotación máxima de 30 rev/s

**Figura19**

*Sensor de movimiento rotacional PASCO CI6538*



*Nota.*Extraído de catálogo Pasco Scientific.2009.

La Interface Science Workshop 750 tiene una tasa de muestreo hasta 250.000 Hz por canal analógico, cuenta con conexión rápida con tarjeta SCSI de 8-bit el

cual permite alta tasa de muestreo de hasta 250 lect./seg; asimismo, tiene un generador de Señales Eléctricas de 1,5 W y corriente de 300 Ma con frecuencia de hasta 50 KHz, al utilizar adicionalmente un amplificador de Potencia Posee 4 Canales Digitales y 3 analógicos.

**Figura 20**  
*Interface Science Workshop 750 PASCO CI6450*

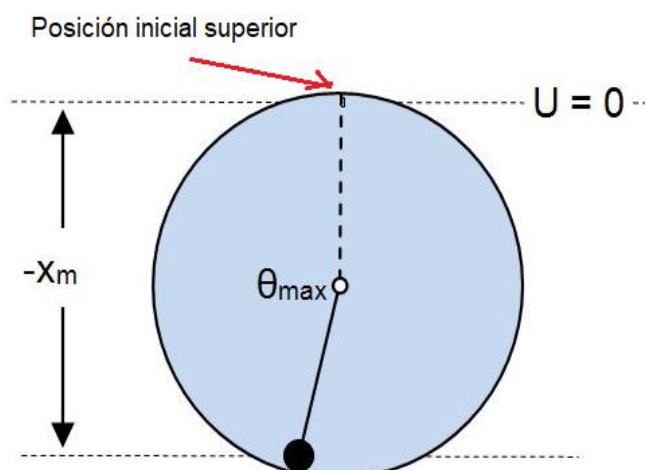


*Nota.* Extraído de catálogo Pasco Scientific.2009.

#### 4.6. Análisis y procesamiento de datos

Con el programa Data Studio 1.9.8 instalado en el ordenador I-5 se procedió a realizar el análisis y procesamiento de datos que consistió en medir y analizar los diferentes valores de posición y velocidad angular inicial para ello se desviaba el disco de la parte de equilibrio, como se muestra en la figura 21. Luego se empezaba con el registro de las diferentes posiciones con el sensor de movimiento rotacional.

**Figura 21**  
*Posición de equilibrio del disco y la masa excéntrica en la parte superior donde la energía potencia es  $U=0$ .*



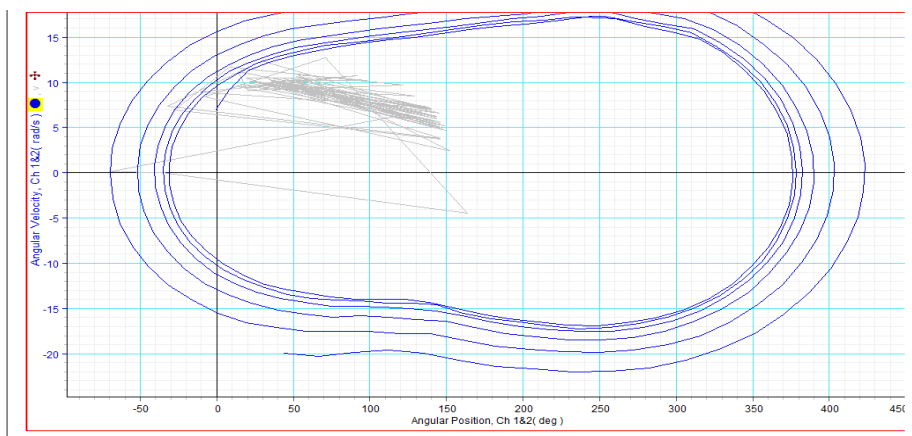


Nota. Adaptado del manual de laboratorio Chaos PASCO.

Del Data Studio se obtenía las diferentes gráficas de espacio de fase para determinada condición inicial esto se hacía varias veces, varias corridas de mediciones y se seleccionaba las mejores.

**Figura 22**

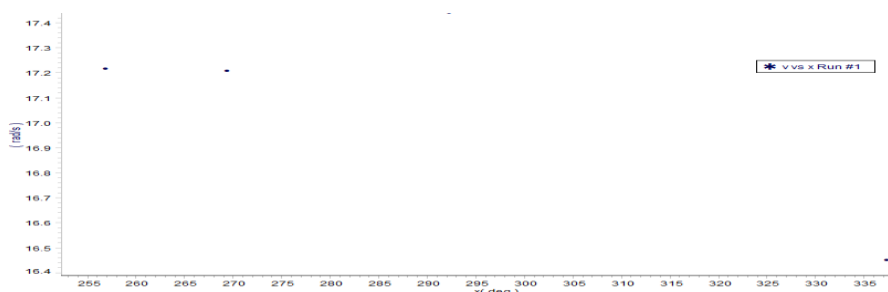
Grafica de espacio de fase obtenido con los datos experimentales



Nota. Usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz y condición inicial de -0,3deg. Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.

**Figura 23**

Grafica de espacio de fase obtenido con los datos experimentales

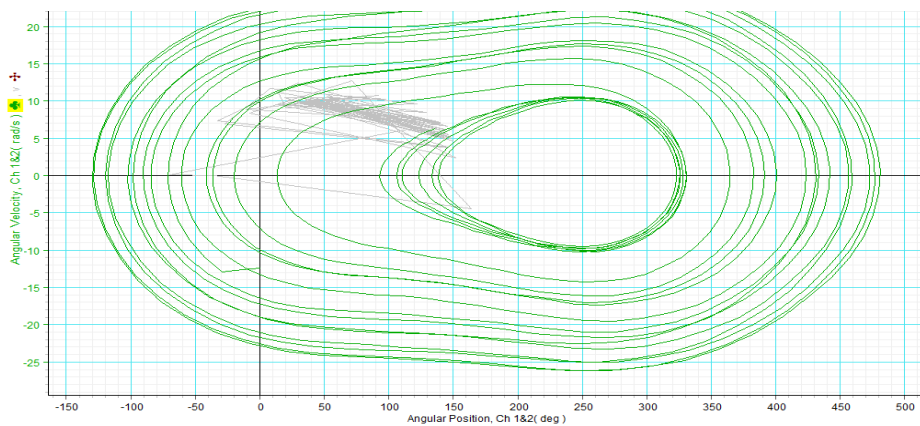




Nota. Data Studio para frecuencia 0,814Hz y condición inicial de -0, 3deg. Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora

**Figura 24**

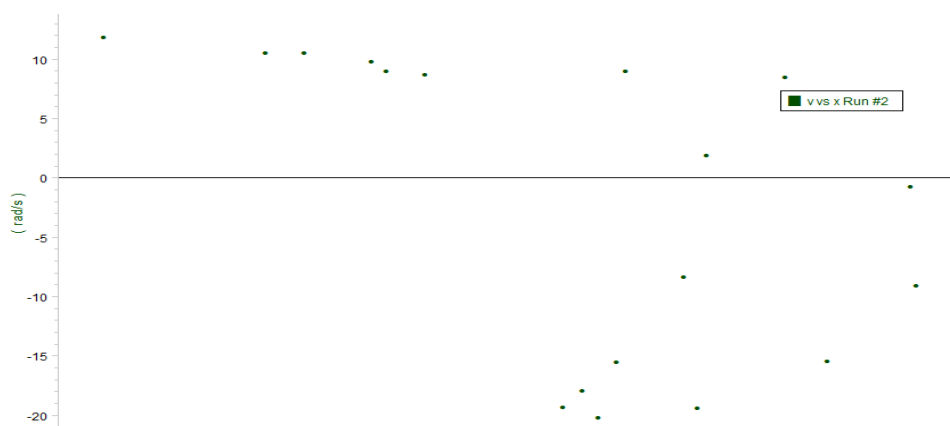
Grafica de espacio de fase obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz



Nota. Condición inicial de -13,3deg. Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.

**Figura 25**

Grafica de mapa de Poincaré obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz de la fuerza externa

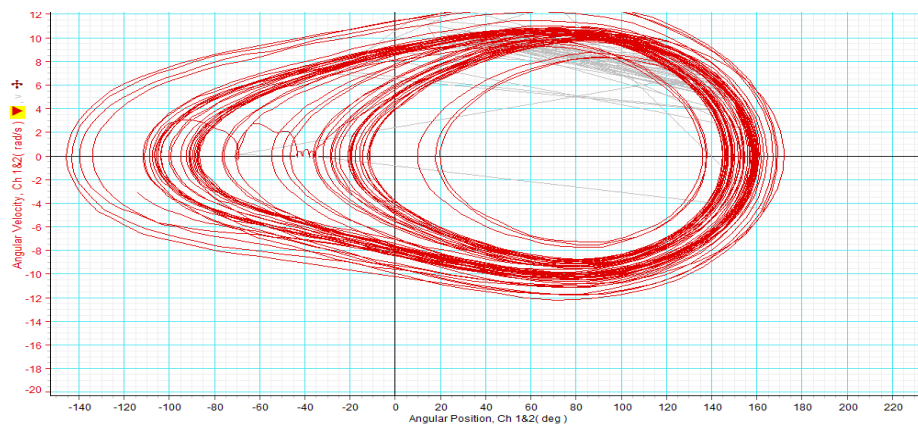


*Nota.* Condición inicial de  $-13,3\text{deg}$ . Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.

En la figura 24 se observa los puntos dispersos y toma valores de velocidad negativa y positiva, asimismo las trayectorias se empiezan cruzarse en el espacio de fase, la condición inicial si influyo al cambio a pesar de que la fuerza de forzamiento de  $0,814\text{Hz}$  claramente se muestra un atractor no caótico la figura 24. En el mapa de Poincaré si se muestra el cambio del sistema oscilador de Duffing en su dinámica.

### Figura 26

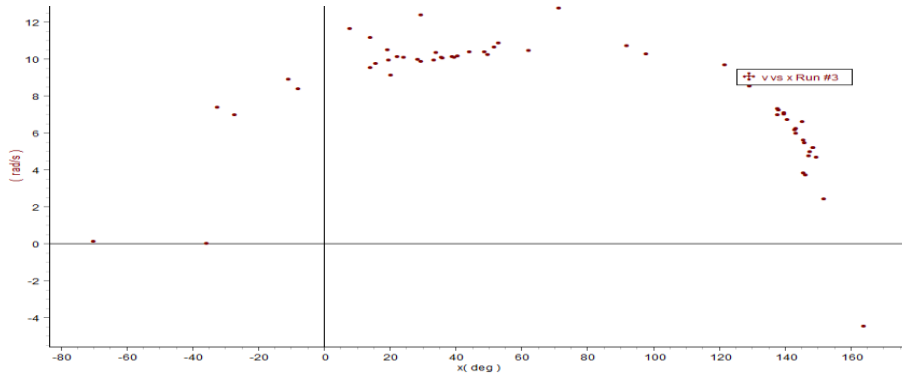
Grafica del espacio de fase obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia  $0,814\text{Hz}$  de la fuerza externa.



*Nota.* Condición inicial de  $-14,0\text{deg}$  y captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.

**Figura 27**

Grafica de mapa de Poincaré obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz

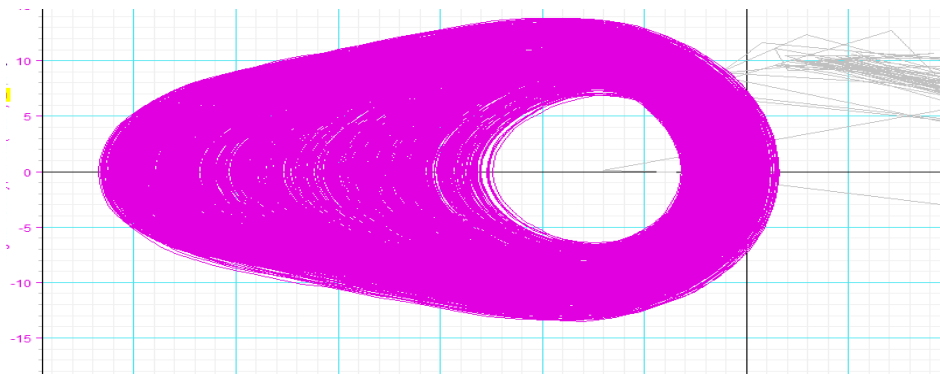


Nota. Condición inicial de -14,0deg. Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.



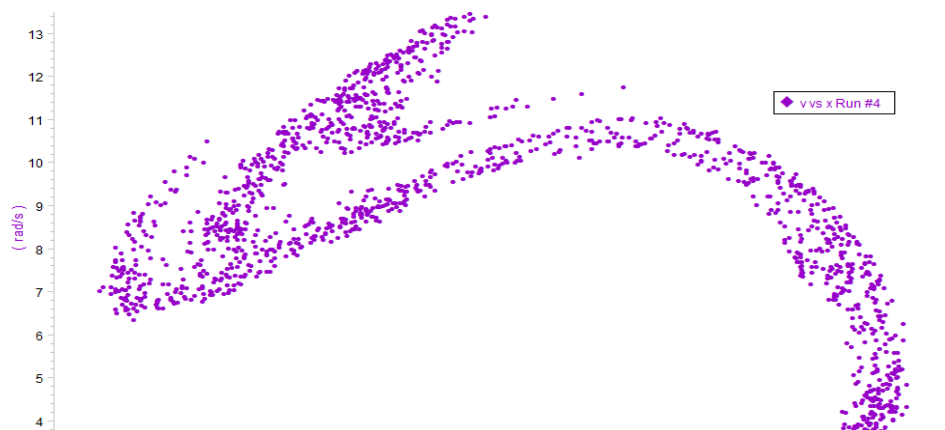
**Figura 28**

Grafica de espacio de fase obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz



**Figura 29**

Grafica del mapa de Poincaré obtenido con los datos experimentalmente usando Data Studio para frecuencia 0,814Hz y condición inicial de 1,0deg. Captura de imagen desde la pantalla del monitor de la computadora.



En la figura 28 se observa el mapa de Poincaré cuando el sistema está sometido a una fuerza con una frecuencia de 0,814Hz y ángulo inicial de 1,0deg si comparamos con los mapas de Poincaré anteriores del sistema, observamos diferencias sustanciales en el espacio de fase para cada condición inicial. Asimismo, el mapa de Poincaré en este caso presenta puntos más densamente agrupados, eso significa que el sistema está en estado de caos y la dinámica es totalmente irregular. De esta manera se procedió a analizar la dinámica a través del espacio de fase y mapa de Poincaré variando la condición inicial.





## CAPÍTULO V: RESULTADOS

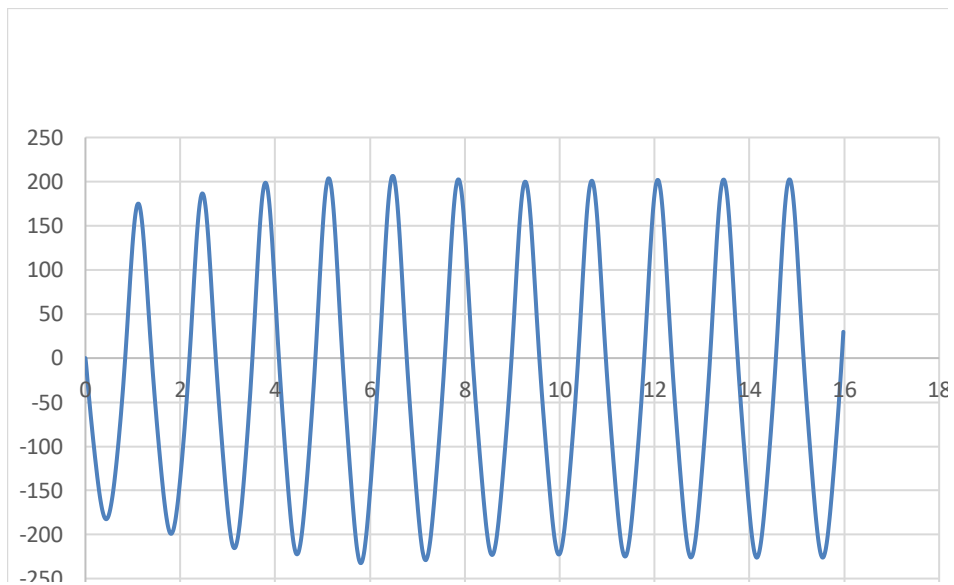
### 5.1. Resultados descriptivos

En los siguientes resultados se muestra la posición angular versus el tiempo, la velocidad angular versus el tiempo, el espacio de fase y los mapas de Poincaré del oscilador de Duffing sometida a fuerza de forzamiento periódico.

1. En la figura 30 se muestra la medición de deposición angular en grados sexagesimales(deg.) versus el tiempo en segundos y, en el gráfico 31 se muestra la velocidad angular en radianes versus el tiempo ( en segundos) con condiciones iniciales ángulo inicial igual a cero y la velocidad inicial de  $-10$  rad/s. La osciladora está sometida a una fuerza periódica con frecuencia de  $0,678\text{Hz}$ , es un oscilador forzado además de amortiguado las oscilaciones resultan periódicas.

#### **Figura 30**

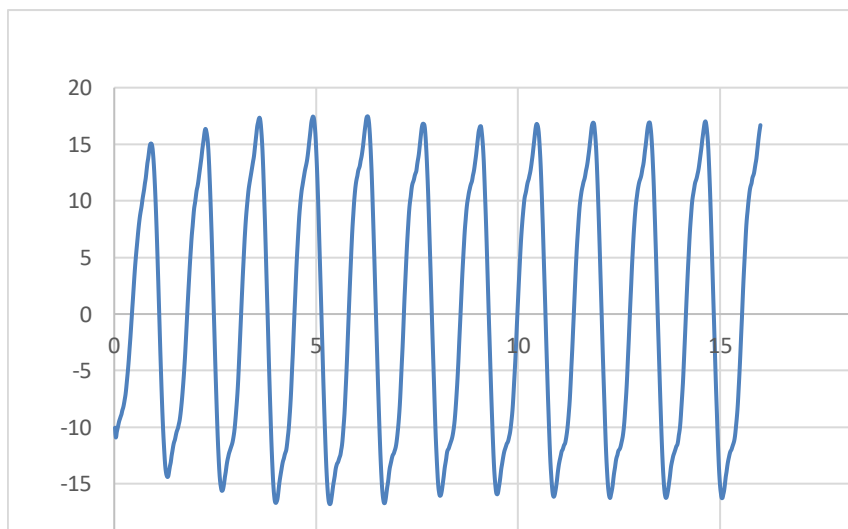
*Posición vs tiempo frecuencia  $0,678\text{Hz}$  de la fuerza externa*



*Nota.* Autoría propia

**Figura 31**

*Velocidad vs tiempo frecuencia 0,678hz de la fuerza externa*



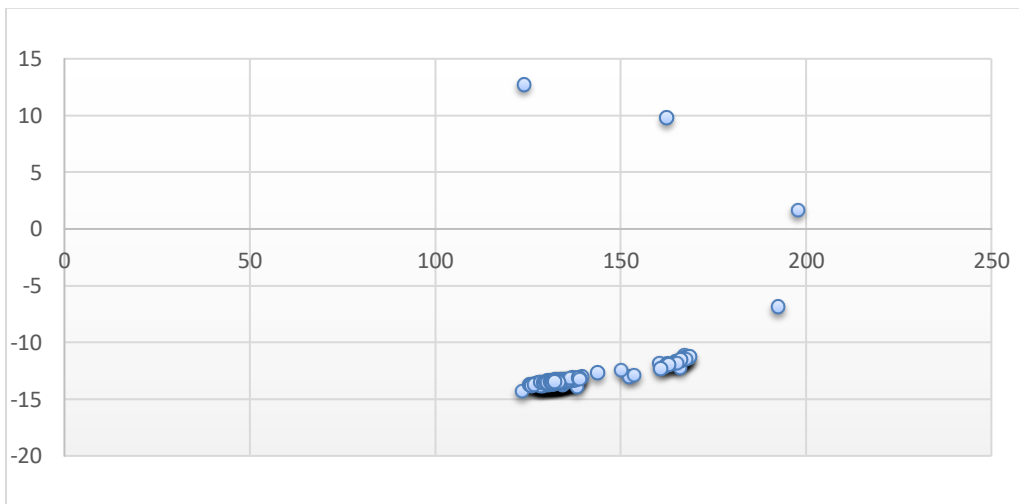
*Nota.* Autoría propia

En la figura 32 se muestra el mapa de Poincaré para el sistema sometido a una fuerza de 0,678Hz, los puntos se distribuyen casi simétricamente

respecto a la horizontal, los puntos superiores corresponden a medio periodo de oscilación y los puntos inferiores son al otro medio periodo de regreso de una oscilación. Hay más densidad de puntos en la zona inferior lo que significa que hay más dinámica a un lado del origen donde está la fuerza periódica externa.

**Figura 32**

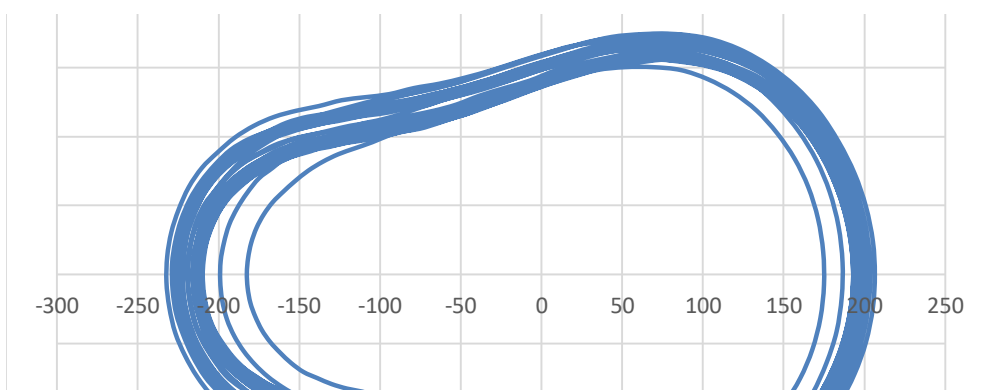
*Mapa de Poincaré para una frecuencia 0,678Hz de la fuerza externa*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 33**

*Espacio de fase del oscilador para la frecuencia de la fuerza externa de 0,678 Hz*



Nota. Autoría propia



En la figura 33 se observa el correspondiente espacio de fase del oscilador sometido a la fuerza de frecuencia 0,678Hz. Se observa que la mitad derecha toma mayores valores de velocidad para ángulos positivos y, la velocidad inicial fue de -10rad/s. Esta grafica corresponde a un atractor no caótico en espacio de fase (Strogaz,2013).

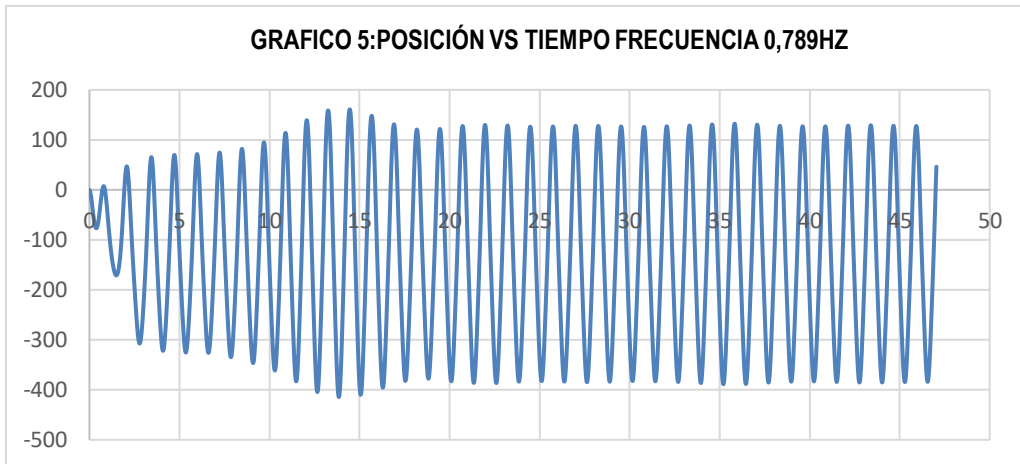
2.El resultado encontrado para el oscilador sometido a una fuerza externa de (oscilador mecánico) en una frecuencia de 0,789Hz de la fuerza, es lo que se presenta como se puede observar en la figura 34 de la posición angular vs tiempo. Se observa que presenta periodicidad.

#### **Figura 34**

*Posición vs tiempo para la fuerza externa con una frecuencia de 0,798Hz*



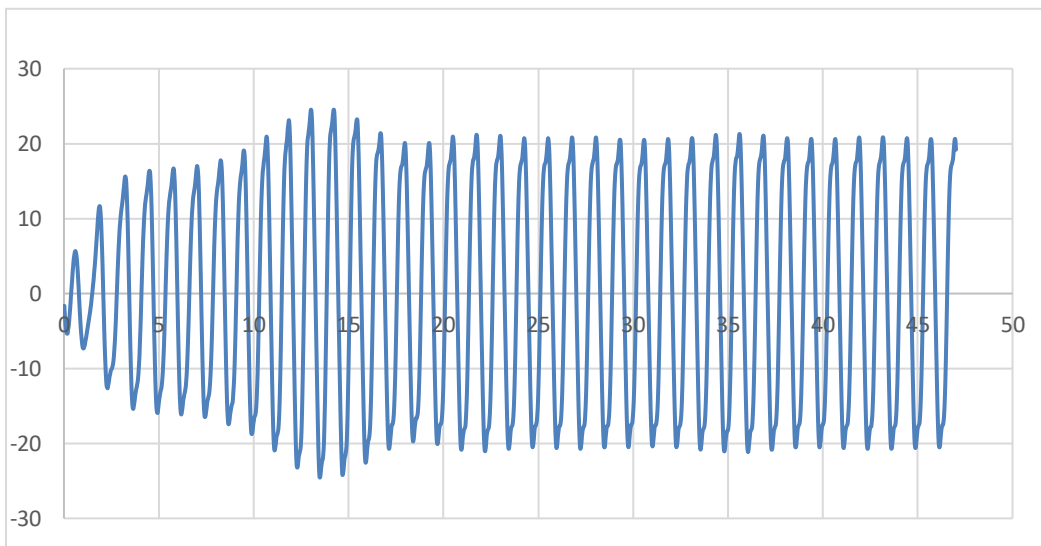




*Nota.* Autoría propia

**Figura 35**

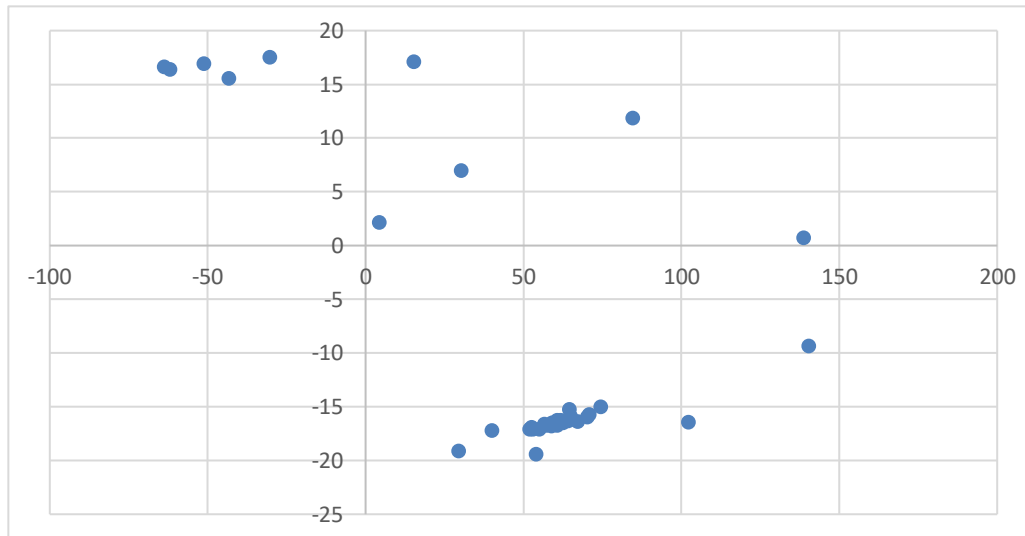
Velocidad vs tiempo frecuencia 0,789HZ de la fuerza externa



*Nota.* Autoría propia

**Figura 36**

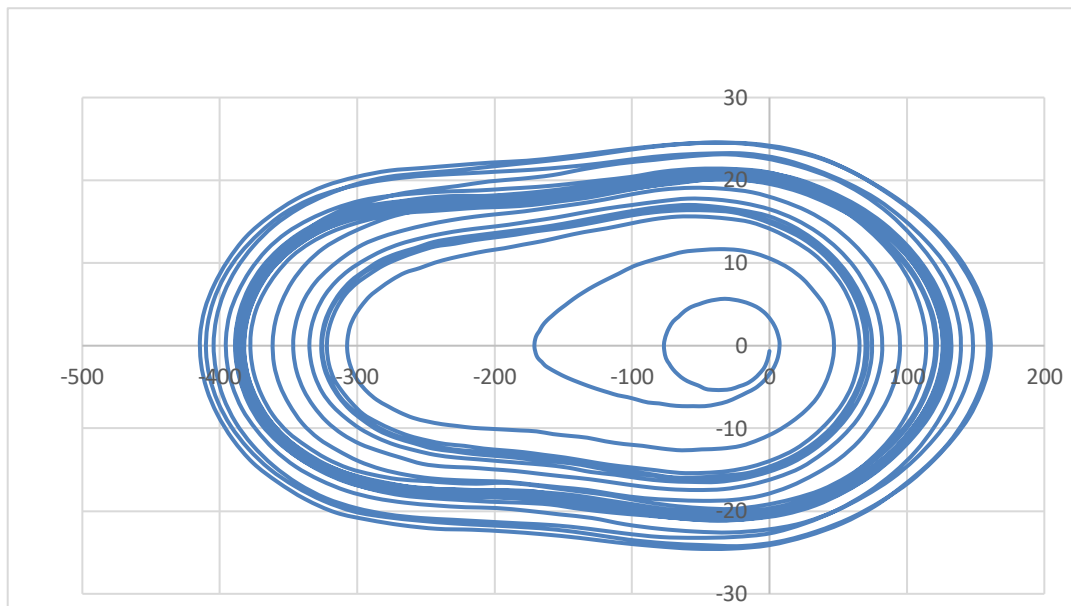
*Mapa de Poincaré del sistema para una frecuencia de 0,789HZ de la fuerza externa*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 37**

*Espacio de fase del Sistema a la frecuencia 0,789HZ de la fuerza externa.*



*Nota.* Autoría propia

De la figura 37 se puede observar que el mapa de Poincaré del oscilador de Duffing amortiguado y forzado con una fuerza de 0,789Hz el sistema está en una etapa de transición entre orden y desorden. En la región superior en el mapa, los puntos están más dispersos en comparación a los puntos de la región inferior donde están más densamente agrupados, el cual se interpreta que hay más orden en su dinámica y en la región superior más desorden. Otra forma de interpretar es sistema se acerca a una bifurcación dinámica (Hillborn, 2000). La figura 38, muestra un atractor

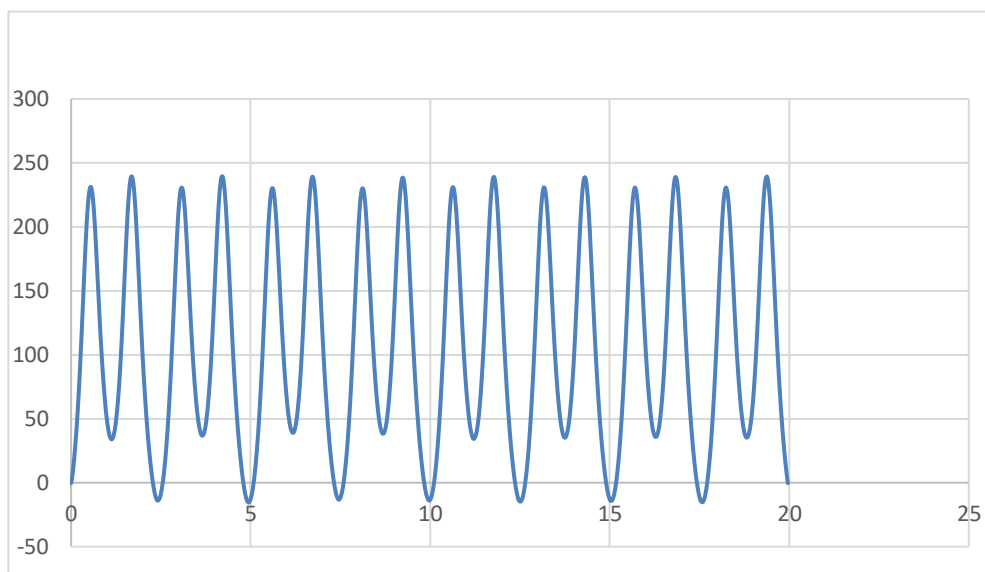


no caótico bien definido y el desvío a la izquierda se debe a la ubicación de la fuerza periódica externa.

-Un resultado que también va en la misma dirección del resultado que mostramos en la figura 38, se observa que presenta periodicidad, se observa hasta dos periodos en el gráfico de posición vs tiempo.

### Figura 38

*Posición vs tiempo para la frecuencia de 0,784HZ de la fuerza externa*

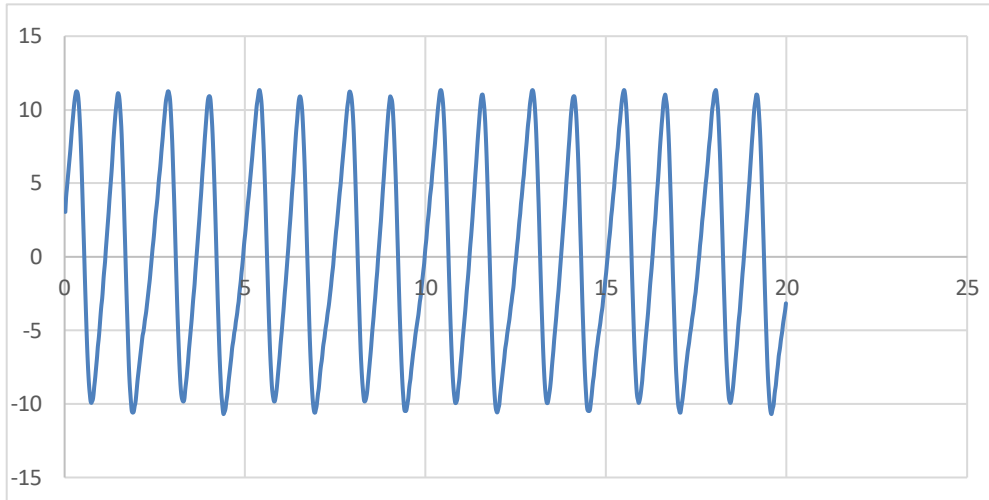


*Nota. Autoría propia*



### Figura 39

*Velocidad vs tiempo a la frecuencia de 0,784HZ de la fuerza externa.*



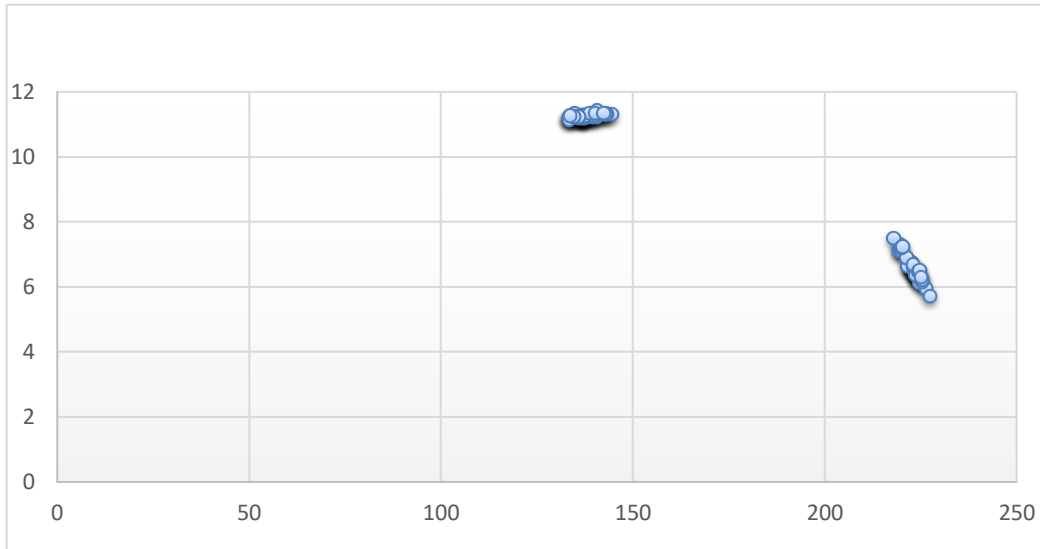
*Nota.* Autoría propia

El espacio de fase muestra que empieza con una velocidad inicial diferente de cero y se observa que presenta periodicidad las oscilaciones son uniformes, o tienden hacia ella, característico de sistemas no lineales sometido a fuerza periódica externa, la velocidad también muestra periodicidad.



#### **Figura 40**

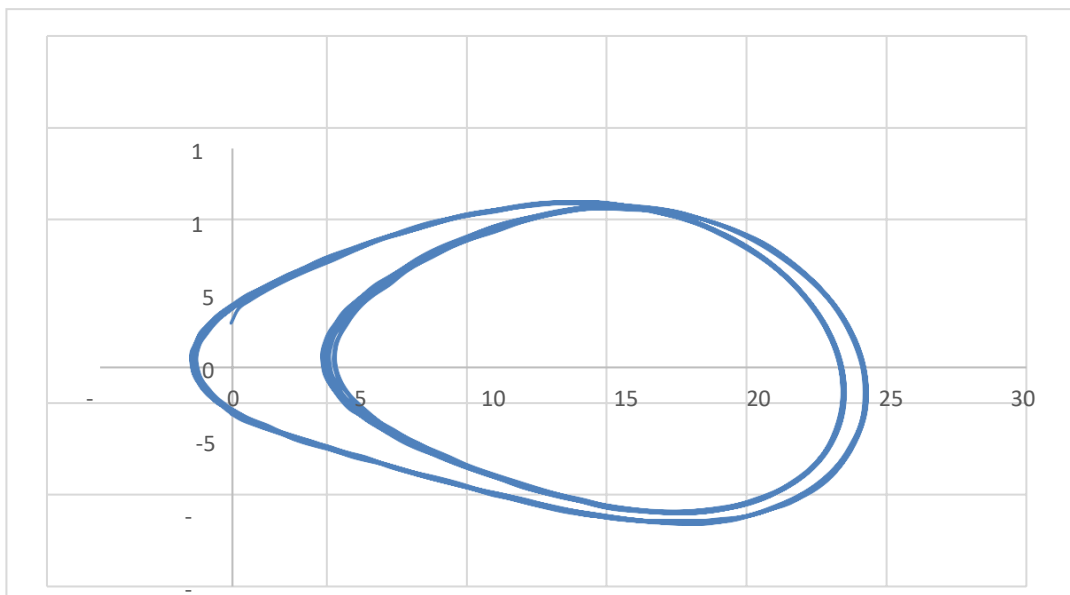
*Mapa de Poincaré del sistema a la frecuencia 0,784HZ para la fuerza externa.*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 41**

*Espacio de fase del sistema a la frecuencia de 0,784HZ de la fuerza externa.*



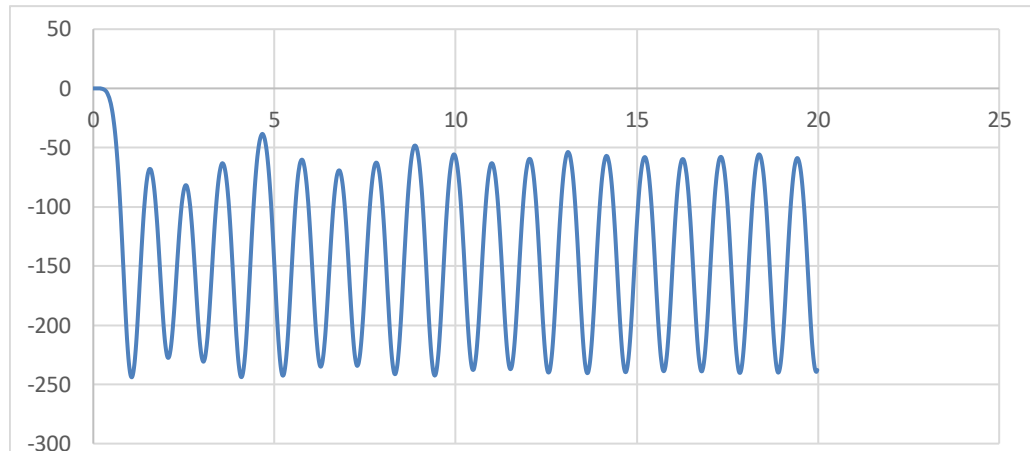
*Nota. Autoría propia*

De la figura 40 se observa dos regiones de puntos eso significa que no hay mucha perturbación de la trayectoria, es sistema presenta periodicidad y el espacio de fase se forman dos elipses que representa una oscilación armónica en esta condición el sistema no es sensible a

detectar señales débiles que representa la fuerza variable externa. En el espacio de fase de la figura 41 posiblemente se conservación la energía.

**Figura 42**

*Posición vs tiempo para una fuerza externa que tiene una frecuencia de 1HZ.*

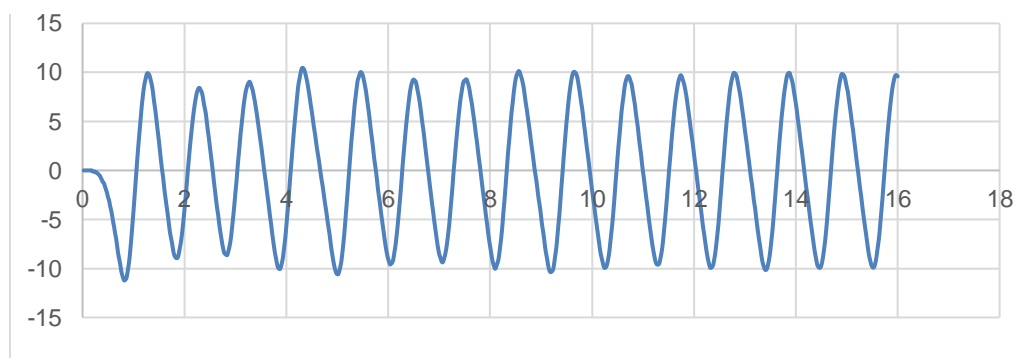


*Nota. Autoría propia*

Oscilaciones variables en intensidad, pero periódico las oscilaciones, como se observa en la gráfica 43, el oscilador de Duffing presenta un atractor no caótico.

**Figura 43**

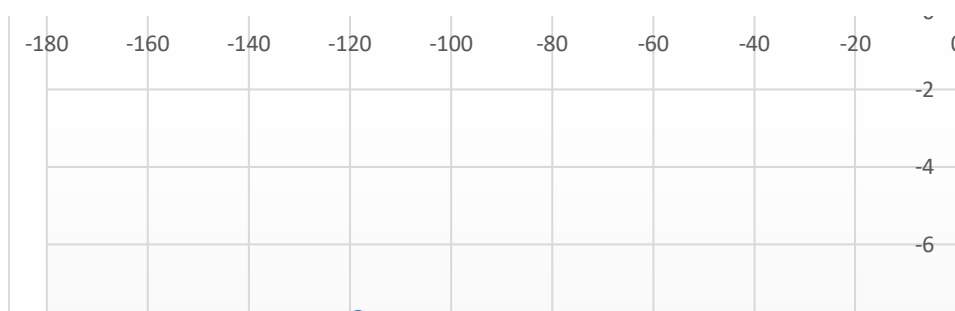
*Velocidad vs tiempo del sistema para una frecuencia de la fuerza externa de 1HZ*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 44**

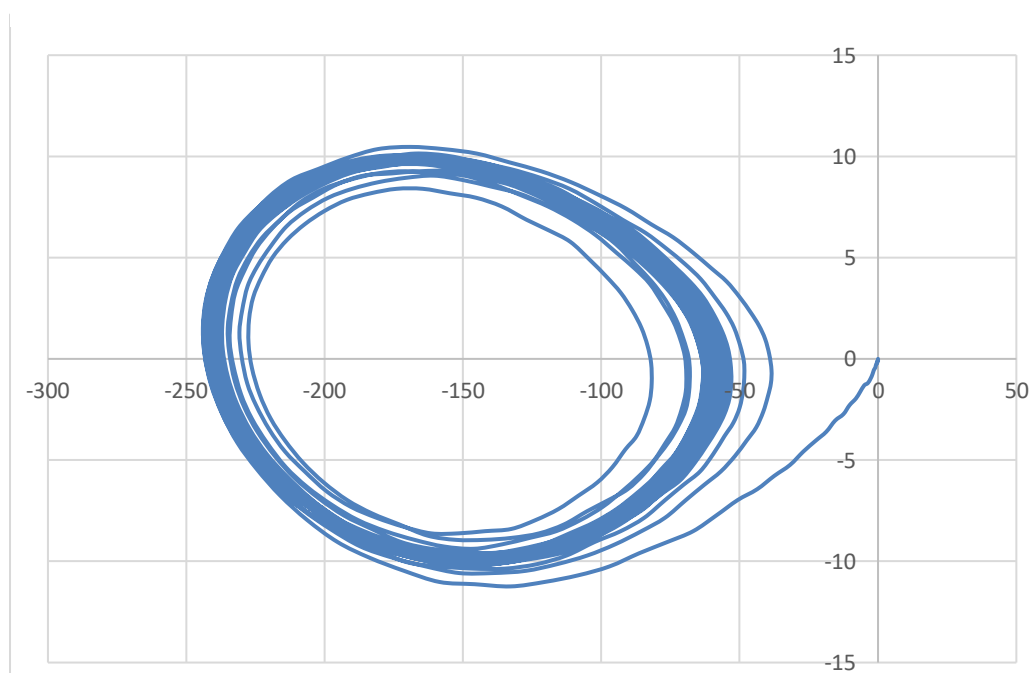
*Mapa de Poincaré para una frecuencia de 1Hz de la fuerza externa*



Nota. Autoría propia

**Figura 55**

Espacio de fase del sistema para una frecuencia de 1 HZ de la fuerza externa



Nota. Autoría propia

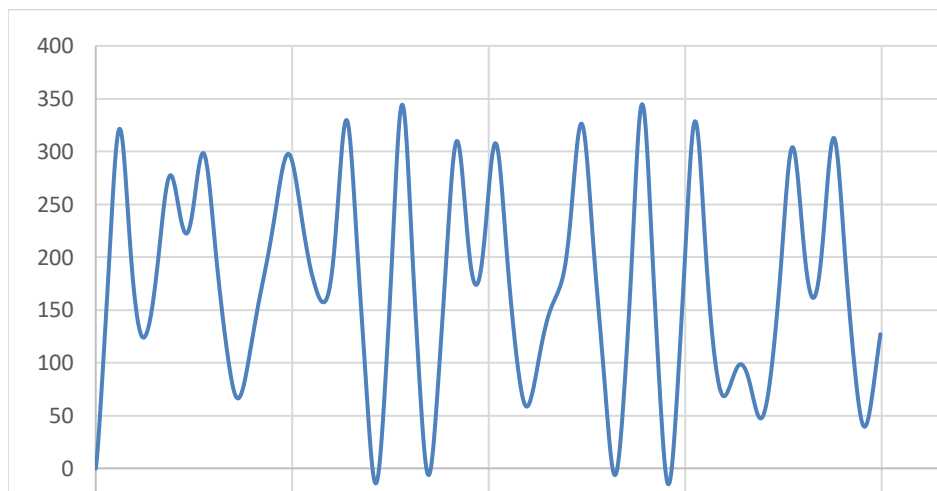


La forma elipse es porque presenta movimiento periódico para la frecuencia 1Hz del oscilador mecánico (fuerza externa). La oscilación que realiza el sistema con la masa excéntrica, se realiza para el lado izquierdo del eje vertical en uno de sus estados de equilibrio y las variaciones en ese estado de equilibrio se observa en el mapa de Poincaré muy sensible como se aprecia en la figura 44.

3.Un tercer resultado es lo que se muestra en las figuras 56,57 es la dinámica desordenada cuando se le aplica una fuerza externa con una frecuencia de oscilación de 0,804Hz es un estadio o ruta hacia el caos del sistema(Taylor, 2013) .

**Figura 56**

Posición vs tiempo del sistema para una fuerza externa de 0,804HZ.

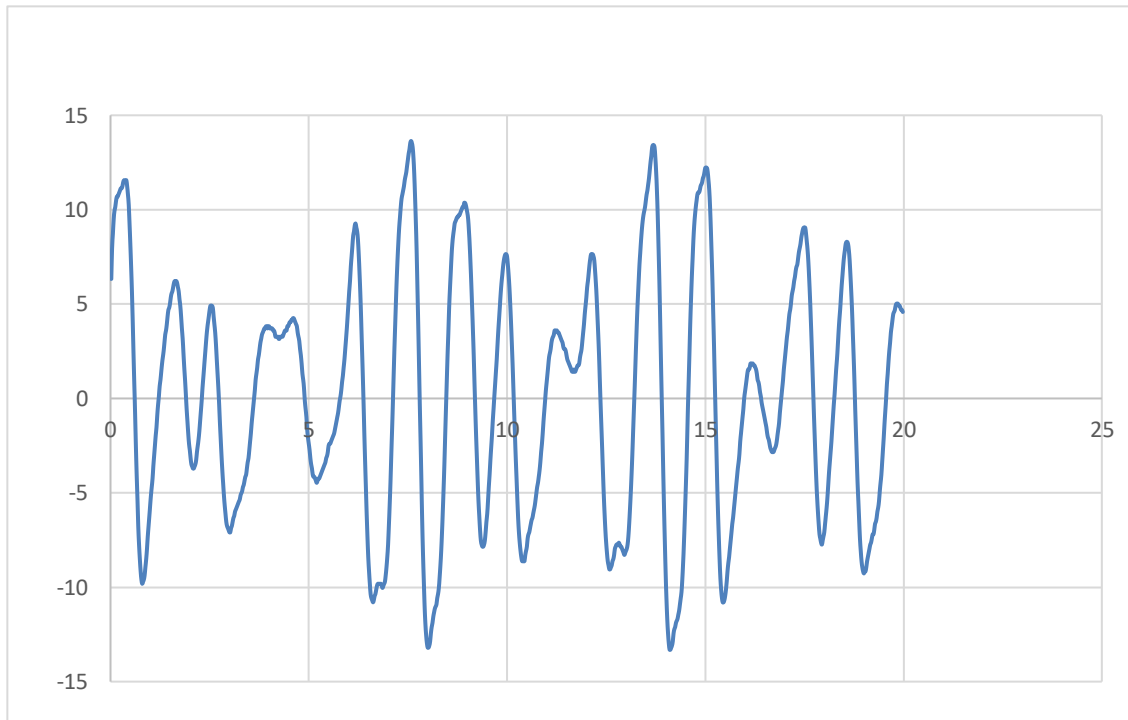


*Nota.* Autoría propia

**Figura 57**

Velocidad vs tiempo del sistema para una fuerza externa de 0,804HZ.

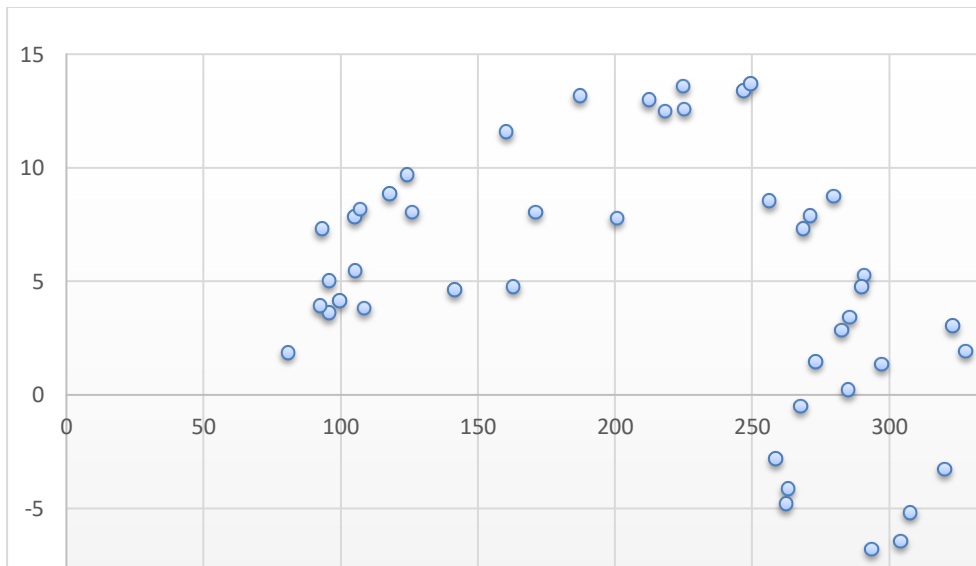




*Nota.* Autoría propia

**Figura 58**

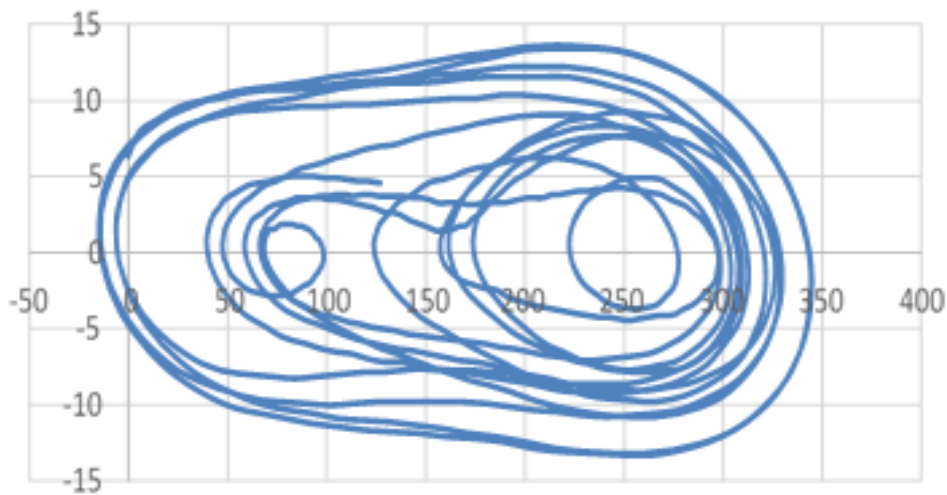
*Mapa de Poincaré para una frecuencia 0,804HZ de la fuerza externa.*



*Nota.* Autoría propia

**Figura 59**

*Espacio de fase para una frecuencia 0,804HZ de la fuerza externa.*



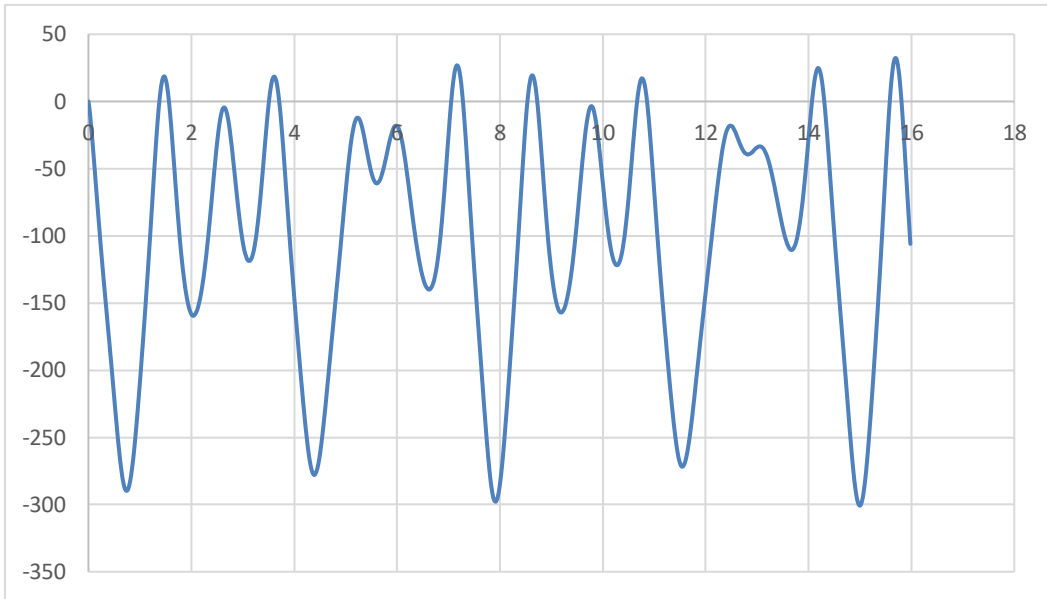
*Nota. Autoría propia*

4. La condición inicial de la posición es de  $-13,0\text{rad}$  y la oscilación no es alrededor del origen sino a la derecha del eje vertical. La velocidad inicial es de  $6,33\text{ rad/s}$ . La figura 58 muestra el mapa de Poincaré con regiones de puntos eso significa que el mapa es sensible a las señales débiles inestables como se observa en figura 56, los datos al final de un periodo los puntos no salen los mismos valores que presenta el oscilador de Duffing. De este tercer grupo de resultados, los siguientes son más interesantes por la forma como sale el mapa de Poincaré.



**Figura 60**

*Posición vs tiempo para una frecuencia  $0,828\text{HZ}$  de la fuerza externa.*

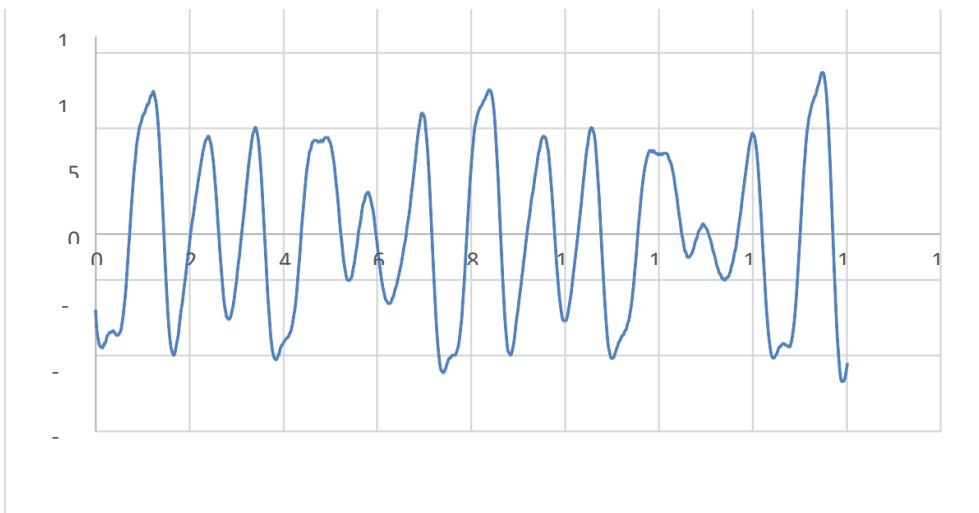


*Nota.* Autoría propia

La figura 60 muestra irregularidad en la dinámica del sistema para la frecuencia de oscilación de la fuerza externa de 0,828HZ que hace las veces el oscilador mecánico con su brazo de palanca.

**Figura 61**

*Velocidad vs tiempo para una frecuencia 0,828HZ de la fuerza externa.*

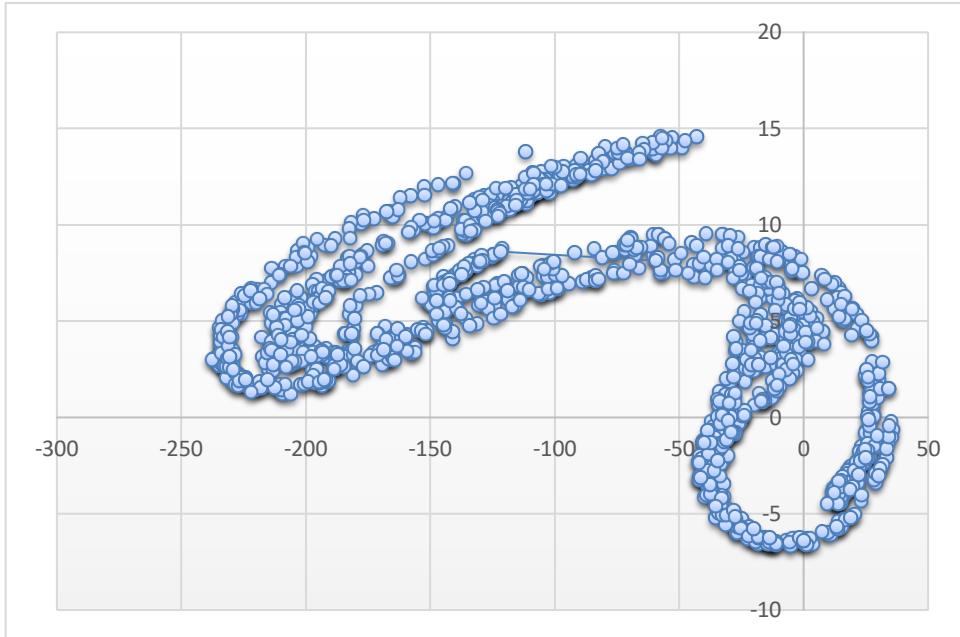


*Nota.* Autoría propia

**Figura 62**

*Mapa de Poincaré para una frecuencia 0,828HZ de la fuerza externa.*



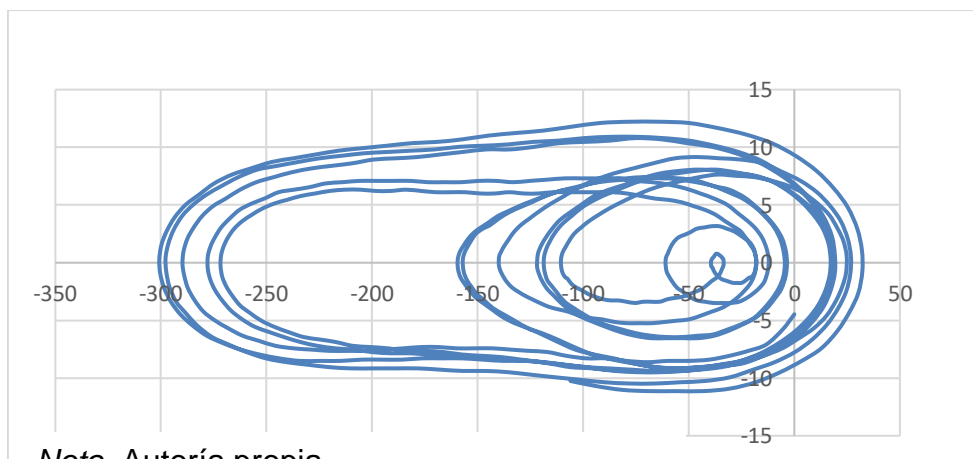


*Nota. Autoría propia*



**Figura 63**

*Espacio de fase para una frecuencia 0,828HZ de la fuerza externa.*



*Nota. Autoría propia*

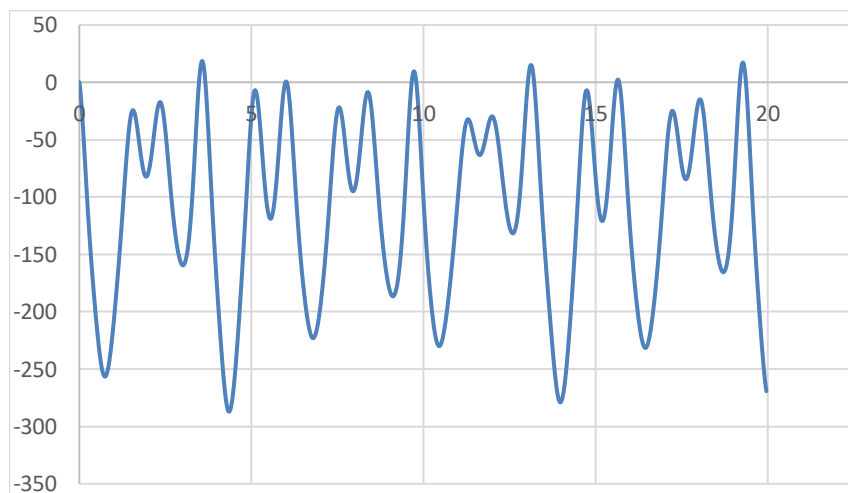
En la figura 63 se observa una estructura fractal en el mapa de Poincaré

y en el espacio de fase un atractor caótico. Hay una relación entre los mapas de Poincaré y los atractores del espacio de fase.

-En este tercer grupo de resultados encontramos al oscilador Duffing sometido a una fuerza externa con frecuencia de oscilación de 0,835Hz es el que se muestra en la figura 64 donde se observa que presenta una cuasi periodicidad. El resultado es también bastante interesante porque en la posición se observa cuasi periodicidad según el gráfico de posición angular y tiempo, esta condición se conoce como el borde el caos (Hilborn,2000) y es donde se centran los métodos no lineales cuando se trata de desarrollar un método analítico.

**Figura 64**

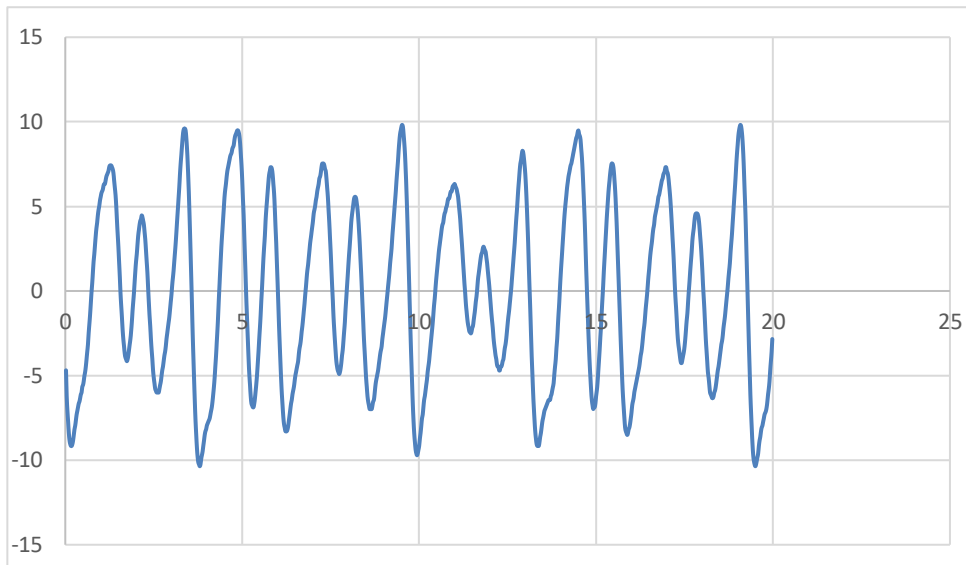
*Posición vs tiempo para una fuerza externa de 0,835HZ .*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 65**

*Velocidad vs tiempo para una fuerza externa de 0,835HZ .*

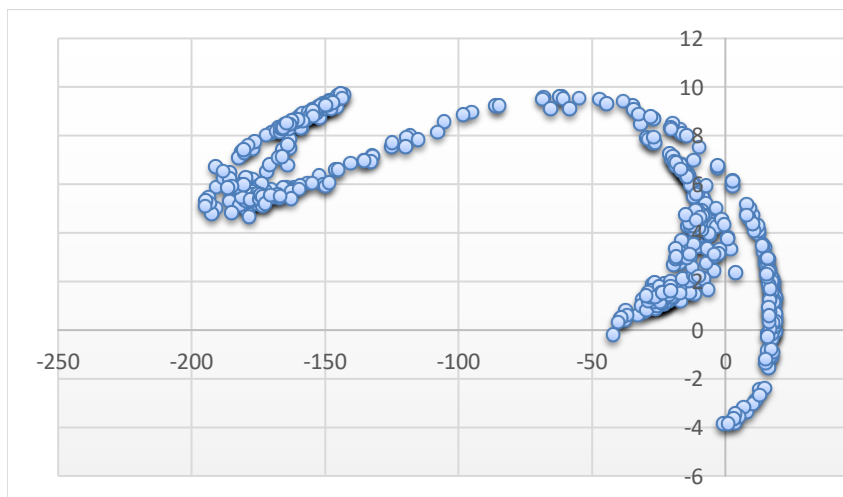


*Nota.* Autoría propia



**Figura 66**

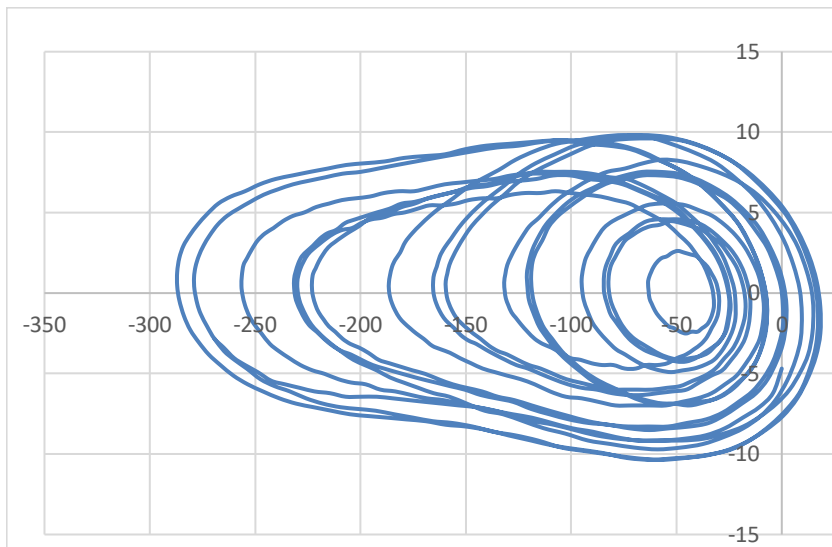
*Velocidad vs tiempo para una fuerza externa de 0,835HZ .*



*Nota.* Autoría propia

**Figura 67**

*Espacio de fase del sistema para una fuerza externa de 0,835HZ.*



*Nota. Autoría propia*

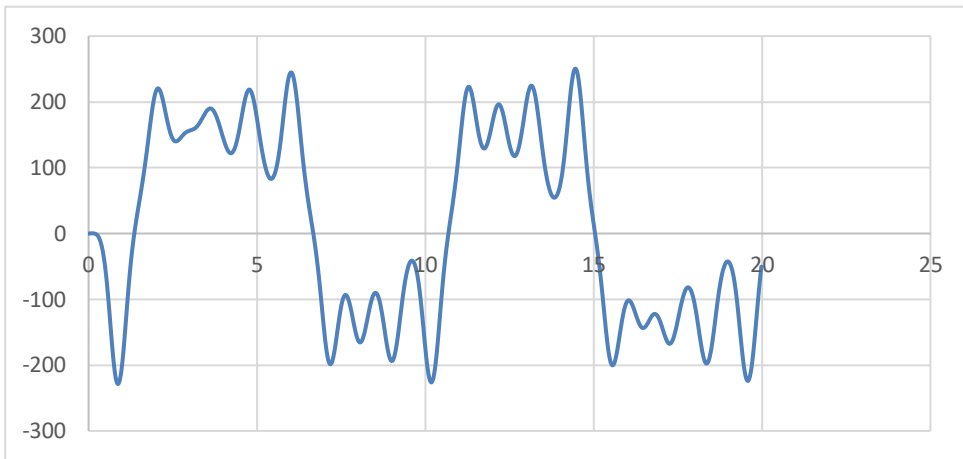
Las figuras 60 y 64 se muestran los resultados de posición en función del tiempo, se observa irregularidad en la dinámica del sistema. La frecuencia de la fuerza externa para las frecuencias es de 0,828HZ y 0,835HZ que representa señales débiles por la forma irregular y es la que no es fácil detectar como se ve el oscilador de Duffing viene hacer un medio no lineal que detecta este tipo de “señales”.



### **Figura 68**

*Posición vs tiempo del sistema para una fuerza externa de 0,847HZ.*



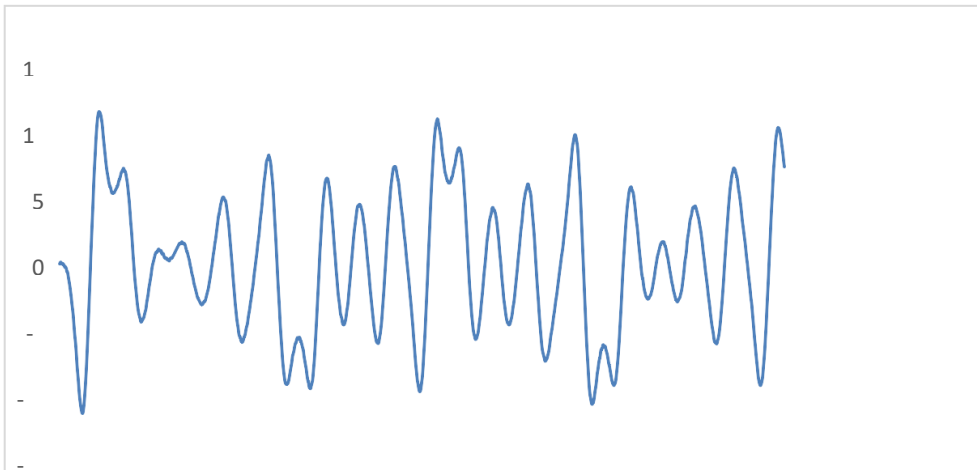


*Nota.* Autoría propia

La condición inicial de la posición es de  $-0,3$  rad y velocidad es  $-7,05$  rad/s. El mapa de Poincaré con puntos formando mapas como en la gráfica 22.

**Figura 69**

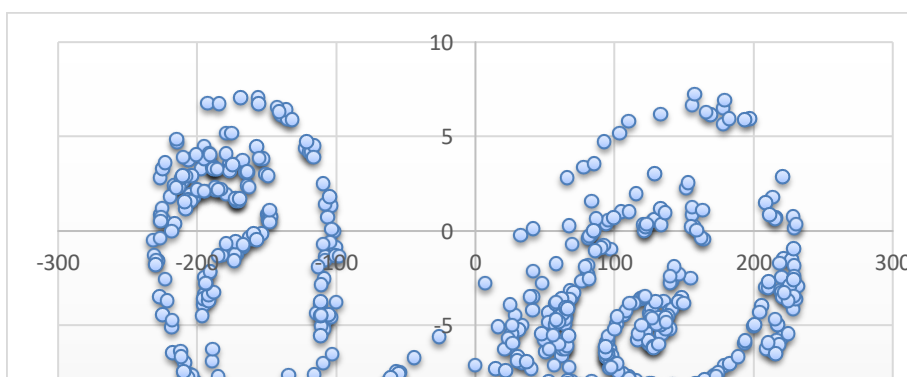
*Velocidad vs tiempo del sistema para una fuerza externa de 0,847HZ.*



*Nota.* Autoría propia

**Figura 70**

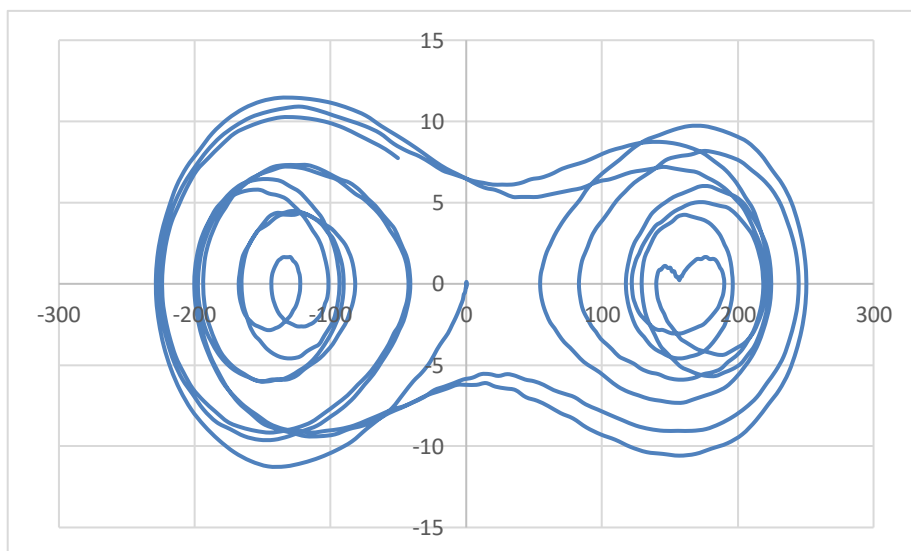
*Mapa de Poincaré del sistema para una fuerza externa de 0,847HZ.*



*Nota. Autoría propia*

**Figura 71**

*Espacio de fase del sistema para una fuerza externa de 0,847HZ.*



*Nota. Autoría propia*

La figura 68 muestra caos y es por ello la forma del mapa de Poincaré figura70 se observa un fractal, el efecto de la distribución asimétrica de



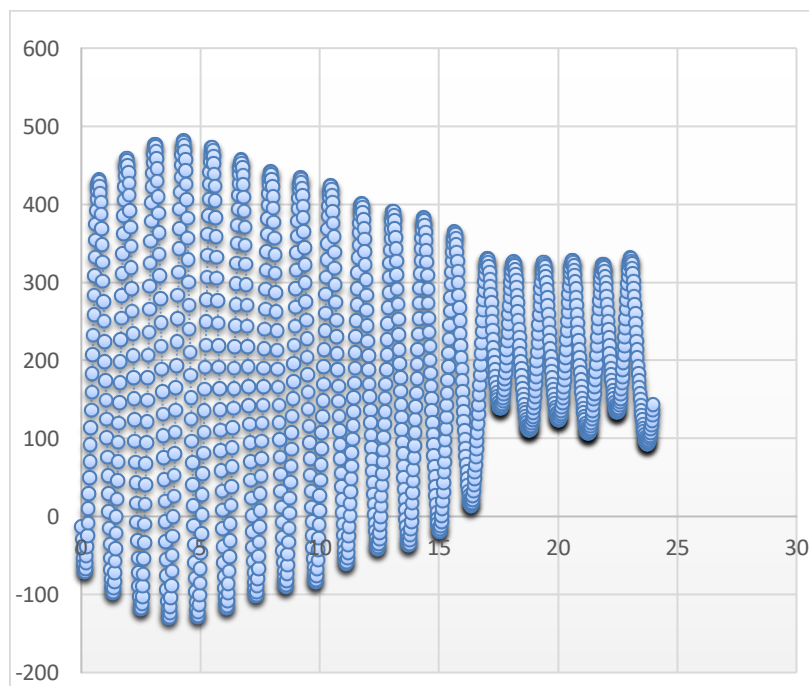
masa, asimismo se observa en el espacio de fase, figura 71, dos atractores. La masa excéntrica genera un torque restaurador a la desviación inicial que se da, al estar conectados el disco con los muelles le genera una energía potencial inicial y el torque de la masa excéntrica compite con los torques generados por los muelles y se equilibran en esas regiones que muestra el mapa de Poincaré que no es la posición superior inicial del disco.

#### 4. Condicion inicial y mapa de Poincaré

A continuación, se mide el desplazamiento del oscilador de Duffing cambiando solo las condiciones iniciales y se observa el efecto en el mapa.

**Figura 72**

*Desplazamiento angular vs tiempo, ángulo inicial -13,3deg,  $f=0,814\text{Hz}$*

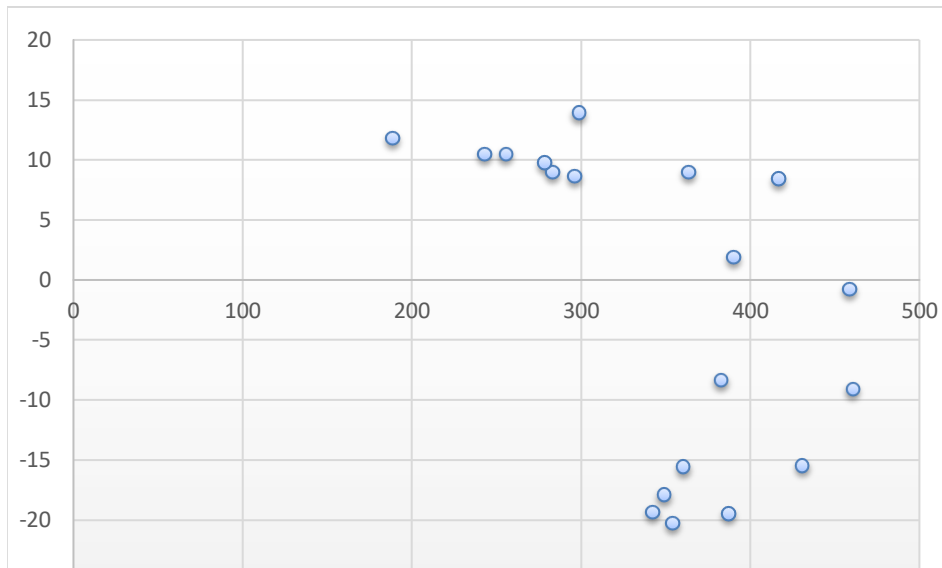


Fuente: autoría propia

**Figura 73**

*Mapa de Poincaré para ángulo inicial -13,3deg,  $f=0,814\text{Hz}$*



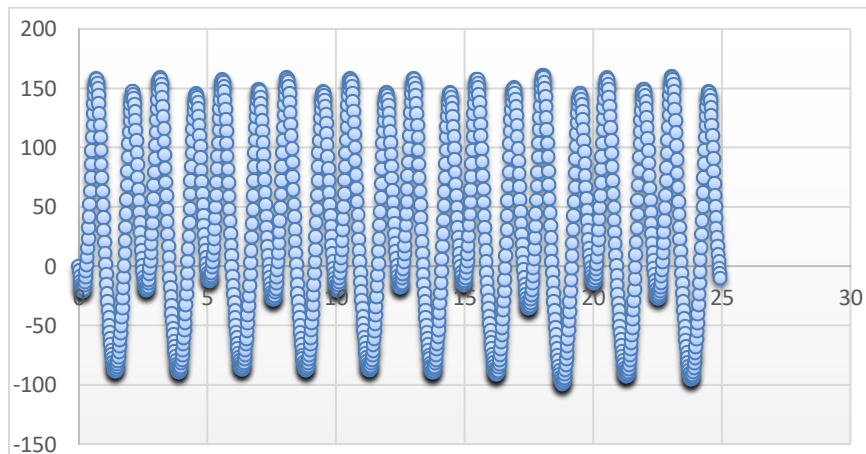


Fuente: autoría propia

En la figura 72 observa que la oscilación tiende hacia un atractor cuando la condición inicial es 13,3 deg. y el mapa de Poincaré nos muestra un conjunto la mitad parte del periodo de oscilación y la otra mitad la segunda mitad de la oscilación.

**Figura 74**

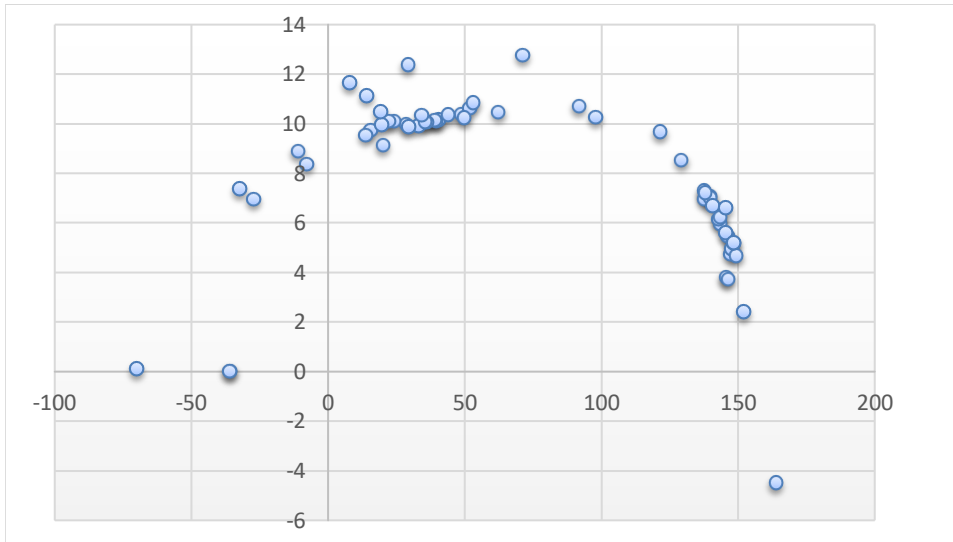
*Desplazamiento angular vs tiempo ángulo inicial = -14 deg,  $f = 0,814\text{Hz}$*



**Figura 75** autoría propia

*Mapa de Poincaré ángulo para  $f=0,814\text{HZ}$  y 14 deg.  $f= 0,814\text{Hz}$*



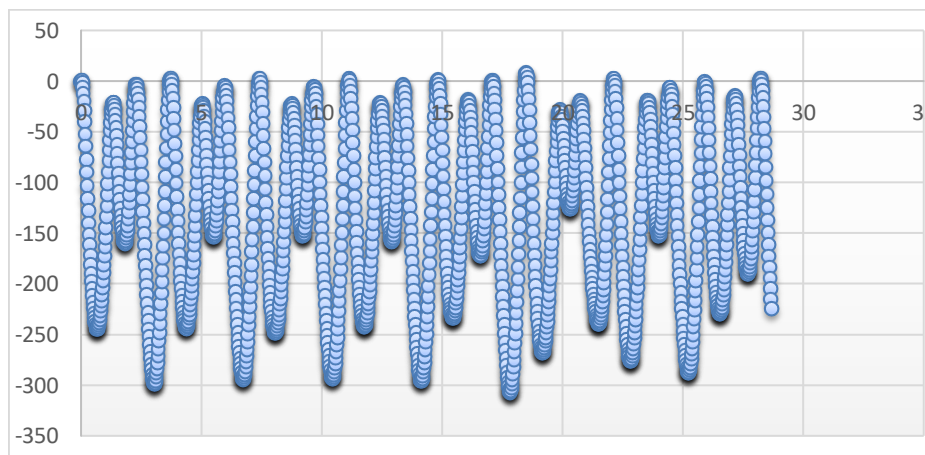


Fuente: autoría propia

En la figura 75 se observa que la oscilación tiene doble periodo eso significa que el sistema va camino hacia el caos. La condición inicial es  $-14$  deg. y el mapa de Poincaré nos muestra mitad de puntos en la parte superior significa el doble periodo del oscilador de Duffing.

**Figura 76**

*Desplazamiento para  $f=0,814$ Hz y  $10$  deg.  $f= 0,814$ Hz.*

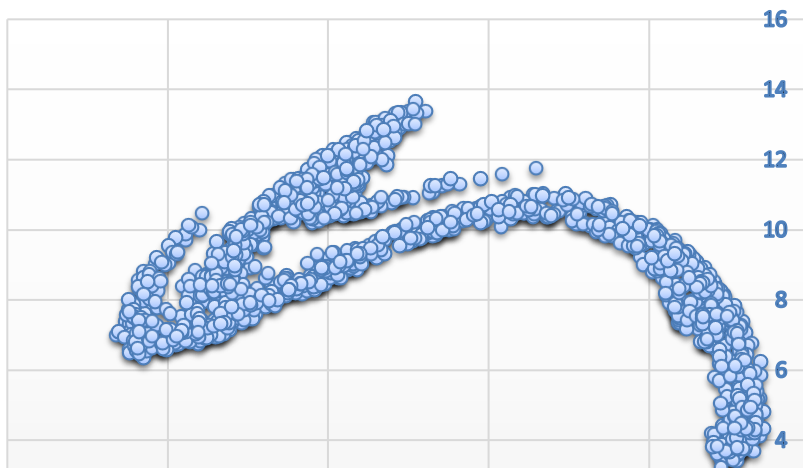


Fuente: autoría propia

**Figura 77**

*Mapa de Poincaré para  $10$  deg.  $f= 0,814$ Hz.*





Fuente: autoría propia

En la figura 76, con la condición inicial es 10 deg. , el mapa de Poincaré nos muestra mitad de puntos en la parte superior significa el doble periodo del oscilador de Duffing.

La figura 77 y 75 muestran los mapas de Poincaré para diferentes condiciones iniciales para el mismo sistema oscilador de Duffing , lo que indica que el mapa muestra un sensibilidad al cambio de las condiciones iniciales.

## CAPÍTULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS



## 6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

- La hipótesis general queda demostrada en relación a que los mapas de Poincaré determinan el estado dinámico del caos del oscilador de Duffing; los resultados muestran estructuras densidad de puntos formando regiones parecidos a las estructuras fractales. Este resultado fue encontrado por Martynyuk *et. al.* (2014) usando métodos computacionales diferente al presente trabajo que fue experimental.
- La hipótesis específica que los mapas de Poincaré contribuyen a determinar el caos en el oscilador de Duffing, queda plenamente demostrada al comparar las gráficas obtenidas de los datos (Figuras 60 y 62, 66 y 64, 70 y 68), de la posición angular desordenados en el tiempo se obtiene mapas de Poincaré con estructuras fractales, que son estructuras que se forman únicamente cuando está presente el caos.
- Los mapas de Poincaré obtenidos de las series permiten ver un panorama más amplio de la dinámica del sistema de Duffing, los mapas se forman de muchos datos que depende unos de otros porque son registrados al final del periodo de oscilación. Muy diferente a la forma de la integración de una ecuación para determinas condiciones iniciales. Se reduce toda la dinámica a un mapa.
- Queda demostrado la hipótesis específica, hay relación entre las condiciones iniciales y el caos en el oscilador Duffing, los cambios en las condiciones iniciales se ve reflejado en el cambio de los mapas de Poincaré, por eso aproximada, entonces respondemos la tercera hipótesis específica que se puede establecer relación entre las condiciones iniciales y el caos en los mapas de Poincaré

, resultado similar lo encuentra Sadeghi *et. al.* (2017). Los resultados de las figuras 72 y 73, 74 y 75 y 76 y 77.

## **6.2. Contratación de los resultados con otros estudios similares**

Los resultados obtenidos en el presente trabajo se contrastan con los resultados de Martynyuk *et. al.*(2014) quienes aplicaron un método computacional usando un modelo expresado en una ecuación de Duffing de segundo orden amortiguado y forzado, a, consideraron la fuerza externa como la señal externa que se desea analizar. Los mapas de Poincaré y los espacios de fase determinados en este trabajo son similares a lo encontrado en el presente trabajo a pesar que fue obtenido computacionalmente.

Estos resultados se contrastan con el resultado obtenido por

Por otro lado también de los resultados en el trabajo de Wang *et. el.* (2020), que también estudiaron el oscilador de Duffing por métodos computacionales también encuentran resultados aproximados a lo encontrados en este trabajo porque consideraron la ecuación de Duffing sin fricción , pero también encontraron la sensibilidad de los mapas de Poincaré a detectar oscilaciones débiles cuando está presente el caos.



## Responsabilidad ética

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación, el reglamento de propiedad intelectual y el reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobados por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.



## CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados experimentales de los mapas de Poincaré y los espacios de fase obtenidos en este trabajo, podemos concluir lo siguiente:

1. El mapa de Poincaré es un método que permite determinar el caos en el oscilador de Duffing porque permite observar la variación de las trayectorias en ciclos de oscilación en el plano con esto se demuestra la hipótesis general del trabajo.
2. A través de mapa de Poincaré se observa experimentalmente que hay relación entre fuerte. sensibilidad de las condiciones iniciales y el estado de caos en la dinámica del sistema oscilador de Duffing, el mapa cambia significativamente con cada valor inicial de posición que empiece a oscilar el sistema.
3. Los atractores son regiones, a donde tiende la dinámica, que también se observó experimentalmente en el mapa de Poincaré del oscilador de Duffing cuando resultaban regiones con mayor densidad de puntos, y con esto se contrasta la hipótesis específica dos propuesto en este trabajo de investigación. Los pozos potenciales presentes en el sistema se pueden identificar con la identificación de los atractores, en el caso del oscilador Duffing resulto dos atractores para dos pozos potenciales.
4. Si se estable relación entre la dinámica del oscilador de Duffing y el caos en los mapas de Poincaré, para una dinámica desordena se observa mapas o regiones bien definidos, mientras que para dinámicas ordenadas solo se aprecia puntos discretos con baja densidad.



## RECOMENDACIONES

1. En relación a las condiciones iniciales que debe tener el oscilador, los ángulos deben ser alrededor de veinte grados o más para tener oscilaciones considerables que permitan observar el fenómeno del caos.
2. Los datos medidos, que se obtiene, son muchos por la frecuencia de muestre de cincuenta (50) muestras por segundo del sensor de movimiento rotacional, por ello se debe trabajar con un graficador especializado de gran cantidad de datos, ya que el excel tiene sus limitaciones para trabajar con gran cantidad de datos.
3. La foto compuerta debe configurarse en software Data Studio con bloqueo de manera que registre la interrupción del haz por parte del oscilador mecánico ME8750, y se pueda medir posición y velocidad en periodos de tiempo iguales de tiempo, y con ello construir el mapa de Poincaré del oscilador con precisión.
4. La masa excéntrica debe colocarse en una posición extrema del disco, no cercano al centro de tal manera que el torque generado sea máximo con respecto al centro de rotación y el movimiento producido sea desordenado para observarse el caos.



## VII.REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabana, A.,Laroze,D.(2015).Dinámica de una particular bajo la influencia de Campos Oscilatorios.Revista Chilena de Ingeniería, 23,164-174.

Chen,C.,Lee,S.,Ge, Z.M.(2006).Regular and chaotic dynamics of a simplified fly-ball governor. Institution of Mechanical Engineers, 461-475.

Feudel,U.,Kuznetsov,S.,Pikovsky,A.(2006).Strange non Chaotic attractor. Singapore. World Scientific.

Kapitaniak, T., Wonjewoda, J.(1994). Attractors of Quasiperiodically Forced Systems. Singapore.World Scientific.

Eykholt,R., Roberts,S.,Thaut,M.(2000).Análisis de Correlaciones and Search for evidence of deterministic chaos in rhythmic motor control by the human brain. Phys Rev.E(62).

Hilborn,R.C.(2000).Chaos and Nonlinear Dynamics:An Introduction for scientists and Engineers.Oxford University Press.

Henriques,T.,Ribeiro,M.,Teixeira,A.,Castro,L.,Antunes,L and Costa-Santos,C.(2020).Nonlinear Methodos Most Applied to Heart-Rate Time Series:A Review. Consultado el 30 de enero del 2021 de: [mdpi.com/1099-4300/22/3/309](https://doi.org/10.3390/1099-4300/22/3/309).

Mouronte, M.( 2004). Caracterización y análisis de Sistemas Dinámicos no lineales mediante el Estudio del Mapa de Frecuencias y Espacios de Fase.( Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid)

Seoane,J., Zambrano, S..(2008).Teaching Nonlinear Dynamics and Chaos for Beginners.Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol(2),205-211.

Saletan,E.J., José,J.V.(1998).Classical Dynamics:A contemporary Approach.

USA: Cambridge University Press. Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview.

Taylor, J. R. (2013). *Mecánica Clásica*. Barcelona: Reverté.



Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. (1985). Determining Lyapunov exponent from a time series. *Physica D*, 285.

Zhang, C., Hame, R., Wang, K. (2016). Reconstructing the transient, dissipative dynamics of a bistable Duffing Oscillator with an enhanced averaging method and Jacobian elliptic functions. *International Journal of NonLinear Mechanics*(79), 26-37.



## Anexo 1. Matriz de Consistencia

Título del Proyecto de Investigación: “CAOS EN EL OSCILADOR DE DUFFING MEDIANTE LOS MAPAS DE POINCARÉ”

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p><b>Problema General</b></p> <p>¿De qué manera los mapas de Poincaré determinan el caos en el oscilador de Duffing?</p> <p><b>Problemas Específicos</b></p> <p>¿De qué manera los atractores permiten determinar el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré?</p> <p>¿Cuáles son las ventajas de los mapas de Poincaré en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing?</p> <p>¿Cuál es la relación entre las condiciones iniciales y el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré?</p>	<p><b>Objetivo General</b></p> <p>Determinar el estado de caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <p>Determinar la relación entre los atractores y el caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.</p> <p>Determinar las ventajas de los mapas de Poincaré en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing.</p> <p>Determinar la relación entre las condiciones iniciales y el caos en el oscilador de Duffing a través de los mapas de Poincaré.</p>	<p><b>Hipótesis General</b></p> <p>Los Mapas de Poincaré determinan el estado dinámico de caos del oscilador de Duffing a través de atractores.</p> <p><b>Hipótesis Específicas</b></p> <p>Los atractores contribuyen a determinar el caos en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.</p> <p>Los mapas de Poincaré presentan ventajas en la descripción de la dinámica caótica del oscilador de Duffing.</p> <p>La relación entre las condiciones iniciales y el caos es directa en el oscilador de Duffing mediante los mapas de Poincaré.</p>	<p><b>Variable Dependiente</b></p> <p>Estado de caos del oscilador de Duffing</p> <p><b>Variable Independiente</b></p> <p>Mapas de Poincaré</p>	<p><b>Nivel de Investigación</b></p> <p>Investigación explicativa.</p> <p><b>Tipo de Investigación</b></p> <p>Investigación aplicada.</p> <p><b>Diseño de la Investigación</b></p> <p>El método de investigación que se siguió fue experimental donde se estudió el comportamiento caótico del péndulo no lineal, oscilador de Duffing, impulsado por una fuerza variable periódica, se explora graficando su movimiento en el espacio de fase y haciendo un gráfico del mapa de Poincaré. Estos gráficos se comparan con el movimiento del péndulo cuando no es caótico.</p>

