# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

## FACULTAD DE INGENIERIA PESQUERA Y DE ALIMENTOS

### UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERIA PESQUERA Y DE ALIMENTOS



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

# "LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DEL TEOREMA DE LAGRANGE EN TEXTOS UNIVERSITARIOS Y SU APRENDIZAJE POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DE INGENIERIA DE ALIMENTOS"

AUTORA: Dra. Katia Vigo Ingar

PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de abril del 2016 al 31 de marzo del 2018

(Resolución de aprobación N° 402-2016-R)

Callao, 2018

# I. ÍNDICE

# INDICE DE TABLAS

# ÍNDICE DE CUADROS

# ÍNDICE DE FIGURAS

# II. RESUMEN Y ABSTRACT

Mi investigación tiene por objetivo analizar la organización matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III para la carrera de Ingeniería de Alimentos y su impacto en la comprensión del estudiante de Matemática III. Así esta investigación responde a la siguiente pregunta: ¿La Organización Matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III es adecuada para el aprendizaje de esa noción matemática para la carrera de Ingeniería de Alimentos?

Para responder a nuestra pregunta, desarrollamos una metodología mixta. Según Ñaupas et al (2013) este es un tipo de investigación que integra sistemáticamente los métodos de la investigación cuantitativa y cualitativa con la finalidad de obtener una mirada más completa del objeto de estudio. Para los autores, el fundamento filosófico de la investigación mixta es el pragmatismo, porque este tipo de estudio está interesado en buscar soluciones prácticas y trabajables para realizar la investigación en un proceso de complementación.

Finalmente, verificamos que la didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y que la comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados. Luego, mostramos algunos resultados y consideraciones finales.

**Palabras clave:** Teorema del Multiplicador de Lagrange, funciones de varias variables, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

## ABSTRACT

My research aims to analyze the mathematical organization that is presented in the didactic organization of the Lagrange Theorem in Mathematics III texts for the Food Engineering career and its impact on the student's understanding of Mathematics III. So, this research answers the following question: Does the Mathematical Organization that is presented in the didactic organization of the Lagrange Theorem in Mathematics III texts is suitable for learning that mathematical notion for the Food Engineering career?

To answer our question, we developed a mixed methodology. According to Ñaupas et al (2013) this is a type of research that systematically integrates the methods of quantitative and qualitative research in order to obtain a more complete view of the object of study. For the authors, the philosophical foundation of mixed research is pragmatism because this type of study is interested in finding practical and workable solutions to carry out research in a process of complementation.

Finally, we verify that the didactic content of the Lagrange Theorem in the mathematics books III depends on its Mathematical Organization from the standpoint of the Anthropological Theory of the Didactic and that the student's understanding of the Lagrange Theorem depends on the mathematical organization of the Mathematics III texts used. Then, we show some results and final considerations.

**Keywords**: Lagrange Multiplier Theorem, functions of several variables, Anthropological Theory of the Didactic.

# III. INTRODUCCIÓN

El trabajo que presento a continuación describe y analiza la organización matemática (OM) movilizada en torno al Teorema de Lagrange de funciones de dos variables reales en dos textos universitarios desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y su impacto en la comprensión del estudiante de Matemática III.

## 3.1 La exposición del problema de la investigación

El escenario mundial destaca la enseñanza de la Ingeniería direccionada al uso intensivo de la ciencia y la tecnología y en la formación de profesionales altamente calificados. Además, esta enseñanza está relacionada a la capacidad de coordinar informaciones, interactuar con las personas, interpretar de manera dinámica la realidad, no limitándose a resolver problemas de naturaleza exclusivamente técnica.

En relación al perfil del futuro ingeniero, las Directrices Curriculares para los cursos de Ingeniería, particularmente Ingeniería Pesquera y de Alimentos, establecen que dicho perfil comprende una sólida formación técnica, científica y profesional que los vuelvan capaces de captar y desenvolver nuevas tecnologías, estimulando su actuación crítica y creativa en la identificación y resolución de problemas.

Por tanto, se hace necesario una formación académica y profesional fundamentada en torno de disciplinas matemáticas, científicas y tecnológicas asociadas a los aspectos sociales, políticos, económicos y ambientales considerados en la formación de este profesional.

Así, según Cury (2001), se destacan como competencias y habilidades deseadas, "aplicar conocimientos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentales a la ingeniería; proyectar y conducir experimentos e interpretar resultados; identificar, formular y resolver problemas de Ingeniería; comunicarse eficientemente en las formas escrita, oral y gráfica; actuar en equipos multidisciplinarios; evaluar el impacto de las actividades de Ingeniería en el contexto social y ambiental" (p.2)

En relación a la estructura de la especialidad de ingeniería, Iamac (2011) afirma que cada facultad debe elaborar un proyecto que contemple el perfil deseado del egresado y el desarrollo de competencias y habilidades esperadas, enfatizando la interdisciplinaridad inherente a la ingeniería. En lo que respecta a los Contenidos Curriculares presentes en las Directrices, la autora asevera que las áreas del conocimiento son agrupadas entorno de un núcleo de contenidos básicos, un núcleo de contenidos profesionales y un núcleo de contenidos específicos que caracterizan a cada una de las ingenierías. En la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos, por ejemplo, en la Escuela de Ingeniería de Alimentos, las áreas del conocimiento están agrupadas por áreas: Matemática, Ciencias Básicas, Ciencias de Ingeniería, Ciencias de Alimentos, Ingeniería de Alimentos, Tecnología de Alimentos y Estudios Complementarios.

Además, Cury (2001) afirma que si el futuro ingeniero debe aplicar conocimientos matemáticos científicos y tecnológicos, trabajar en equipos multidisciplinarios y evaluar el impacto de sus actividades en el contexto social y ambiental, todos los cursos de la currícula deberían enfocarse en esas exigencias. Así, "no se puede pensar más, en trabajar el Cálculo, el Álgebra Lineal, la Geometría Analítica, las Ecuaciones Diferenciales, etc., de forma fraccionada como si los contenidos pudiesen quedar guardados en la mente del alumno esperando la hora en que algún otro curso los necesite" (Cury, 2001, p.5).

En ese sentido, la contextualización se hace necesaria para las posibles soluciones científicas y tecnológicas, principalmente en los países en desarrollo, conforme apuntan las reformas curriculares, Iamac (2011). Por eso, de acuerdo con la autora, cabe a la Universidad buscar la integración entre diversas áreas que componen los ciclos básicos, profesional y específico de una graduación con el perfil del ingeniero, garantizando, de esta manera, la calidad en la enseñanza universitaria.

Conforme hemos indicado, lo importante en el área de Ingeniería son las ciencias. De esta forma, para Grisales y Gonzáles (2009) lo que es realmente trascendental en la docencia universitaria es el contenido de las ciencias. Por eso, las autoras afirman que "el contenido se enseña de una forma sabia y erudita, ya que se concibe al profesor como un vivo repertorio del conocimiento, es decir, como un sabio que produce el contenido de las ciencias que enseña" (Grisales y Gonzáles, 2009, p. 4). De ahí que, en la selección de los profesores universitarios tenga mayor peso la formación como investigadores que como docentes, hecho que las autoras lo interpretan como que para enseñar es suficiente con saber y con producir las ciencias.

Según las autoras, esta concepción lleva a pensar que la práctica docente a nivel superior está fundamentada en los procesos de enseñanza de los contenidos, los cuales integran los conocimientos producidos por otros, desconociendo de esta manera los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Por ello, "muchas veces la práctica del profesor universitario es inconsciente, es decir, sin reconocer la importancia de su rol en el aprendizaje del estudiante, sin un fundamento didáctico que respalde su práctica docente y la imitación de lo que hicieron sus profesores cuando él fue estudiante universitario. .... Pensar que el contenido de las ciencias prima sobre el método con el cual se ha construido, porque los profesores no han creado metódicamente estos conocimientos, es desempeñar la docencia para reproducción del saber, en lugar de la construcción del mismo, lo cual lo único que hace es privilegiar los procesos instructivos, no permitir el desarrollo de competencias investigativas en los estudiantes, ni aprovechar el carácter formativo de los contenidos que se imparten, entre otros aspectos" (Grisales y Gonzáles, 2009, p. 4).

Las autoras afirman, además, que la práctica profesional docente, envuelve no sólo un conocimiento científico sobre un saber específico, sino también un conocimiento en didáctica. El hecho de que el profesor universitario posea conocimientos en didáctica, y los ponga en práctica durante su ejercicio docente, constituye una forma de hacer consciente su práctica, lo cual conduce a que la selección de los contenidos dentro de su campo de saber siempre esté encaminada por el criterio de la formación de los estudiantes. Es aquí donde, según Grisales y Gonzáles (2009), está la esencia de la didáctica, en reconocer lo que es necesario aprender, para definir lo que se necesita enseñar.

En este sentido, Chevallard (1991) afirma que el saber que se va a enseñar es el "saber-inicialmente-designado como el que debe ser enseñado" (p.17), el cual al momento de enseñarse sufre un conjunto de cambios didácticos para hacerlo apto para ser enseñado. Para el autor, el saber tal como es enseñado corresponde al saber enseñado y es, distinto del saber sabio y del saber que se ha de enseñar. Es por esto que el saber que se va a enseñar y el saber enseñado exigen del docente universitario conocimientos en didáctica, para seleccionar los contenidos a enseñar y las formas de enseñarlos. "(...), es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés que las organizaciones "transmisoras", es decir didácticas, se configuran de manera estrechamente vinculada a la estructura dada a lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas, las OD como diré en adelante, dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar, las OM, si se trata de organizaciones matemáticas" (Chevallard, 2001, p. 2).

Por otro lado, en base a estudios realizados en educación matemática con respecto a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial de funciones de varias variables reales, se ha mostrado que los estudiantes presentan algunos problemas en su aprendizaje como, por ejemplo, la relación entre las variables, la identificación del dominio de una función de dos variables, la representación gráfica y la conversión entre las representaciones propias al estudio de las funciones de dos variables, las derivadas parciales, etc.

Visto que, es un problema del profesor universitario reconocer lo que es necesario aprender para definir lo que se necesita enseñar en el momento de preparar su curso y los problemas para el aprendizaje, en particular, del Teorema de Lagrange, pensamos que esos problemas podrían estar vinculados a la forma como se abordan en la enseñanza, más aún, si en los textos de Cálculo en varias variables, específicamente en dos textos usados en el curso de Matemática III, se omiten algunas concepciones de ese objeto matemático y, también, si la organización matemática no guarda relación con éstas.

El uso del Teorema de Lagrange en problemas de optimización es frecuente además, esa noción permite resolver problemas no sólo de matemática, sino de otras áreas como la física, la química, biología, la ingeniería y otras. Por lo expuesto anteriormente me pregunto: ¿La Organización Matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III es adecuada para el aprendizaje de esa noción matemática para la carrera de Ingeniería de Alimentos?

Para responder a esta pregunta me planteo el siguiente objetivo: Analizar la organización matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III para la carrera de Ingeniería de Alimentos y su impacto en la comprensión del estudiante de Matemática III.

**3.2 La importancia y la justificación de la investigación.**

El contexto actual de nuestra sociedad demanda una educación de calidad. Lo cual envuelve, principalmente, a aquellos que se desempeñan en el ámbito educativo, particularmente a nivel universitario. Sin embargo, la realidad me muestra que existen problemas en el dominio de conceptos matemáticos básicos y fundamentales. Tales problemas podrían empeorar si los textos de consulta empleados en las aulas presentan limitaciones especialmente de tipo conceptual.

El texto se ha vuelto un objeto de estudio y de debate en las comunidades científicas, en busca de su legitimación en la universidad. En la misma línea, Gonzales (2014) afirma que “en los textos no solamente se plasman conceptos, sino también obstáculos, procesos y limitaciones que repercuten directamente en la prácticas de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos” (p. 14).

Todo lo anterior justifica mi interés en describir la organización matemática del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III para la carrera de Ingeniería de Alimentos de la Universidad Nacional del Callao y evaluar la comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange dependiendo de la organización matemática de los textos utilizados.

Por otro lado, la importancia de la noción del Teorema de Lagrange es resaltada por Tromba y Marsden (1991) quienes afirman que a los largo de la historia se han buscado leyes que describan los fenómenos del mundo físico. Por ejemplo, "el principio metafísico de Maupertuis es la suposición de que la naturaleza siempre opera con la mayor economía posible. Dicho brevemente, las leyes físicas son consecuencia de un principio de "economía de medios"; la naturaleza siempre actúa de tal manera que minimiza alguna cantidad, lo que Maupertuis llama "acción". Estas ideas, a menudo llamada principios variacionales, son la piedra angular filosófica de buena parte de la física matemática y particularmente de la mecánica, tema central de la física, la ingeniería y las matemáticas" (p. 248).

Para los autores entre las características geométricas básicas de la representación gráfica del multiplicador de Lagrange, en la cual la función alcanza su valor óptimo.

Además, como ya explique anteriormente, esta noción matemática se estudia en el curso de Matemática III que pertenece al área de Matemática y establecen relaciones con los cursos distribuidos entre el curso de Estadística Aplicada (área Ciencias e Ingeniería) y Metodología de la Investigación Científica (Área de Estudios Complementarios). Sin embargo, el curso Matemática III no es distribuido ni integrado a las áreas de Ciencias de Alimentos e Ingeniería de Alimentos.

Creo que, con el aporte de este trabajo el problema planteado se abre camino a la solución, en tanto se piensa en la traducción de conocimientos como una manera de integrar los contenidos del saber y los métodos de enseñanza en las prácticas docentes del profesor universitario y del estudiante.

# IV. MARCO TEÓRICO

A continuación presento el referencial teórico que fundamentará el análisis de mi trabajo.

Estos resultados de las investigaciones sirven como antecedentes en mi tema de investigación. A continuación presento el referencial teórico que fundamentará mi análisis. La Teoría Antropológica de lo Didáctico, desarrollada por Chevallard (1999), específicamente las nociones fundamentales y como puede ser un instrumento poderoso para el análisis, por ejemplo, de las prácticas docentes. Explico las nociones de organizaciones praxeológicas (organizaciones matemática y didáctica).

Para Almouloud (2007) esta teoría es una contribución importante para la didáctica de la matemática, porque, además de ser una evolución del concepto de transposición didáctica, ingresando la didáctica en el campo de la antropología, focaliza el estudio de las organizaciones praxeológicas didácticas pensadas para la enseñanza y el aprendizaje de organizaciones matemáticas. Según el autor, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) estudia las condiciones de posibilidad y funcionamiento de sistemas didácticos, entendidos como relaciones sujeto-institución-saber.

"Considerando el modelo propuesto por la TAD, se puede interpretar la transposición didáctica como una noción que desarrolla según Chevallard (1999), a triple ruptura epistemológica provocada por la teoría de las situaciones, porque la noción de transposición didáctica muestra que el saber matemático (saber científico, enseñado o a enseñar) está en el centro de toda problematización didáctica. Por consiguiente, ese saber jamás puede ser considerado como algo incuestionable" (Almouloud, 2007, p. 112).

Según el autor, en la TAD, las nociones de (tipo de) tarea, (tipo de) técnica, tecnología y teoría permiten modelar las prácticas sociales en general y, en particular, la actividad matemática, basándose en dos postulados: "1. Toda práctica institucional puede ser analizada, bajo diferentes puntos de vista y de diferentes maneras, en un sistema de tareas relativamente bien delineadas. 2. El cumplimiento de toda tarea ocurre del desenvolvimiento de una técnica" (Almouloud, 2007, p.114). Para el autor, la palabra técnica es utilizada como una "manera de hacer" una tarea, pero no precisamente como un procedimiento estructurado y metódico o algorítmico.

Para el autor, la relación institucional que se establece entre una institución I (alumno, profesor) y un objeto (O) depende de las posiciones que ocupan en esa institución y del conjunto de *tareas* que esas personas deben cumplir usando determinadas técnicas. El problema de delimitar *tareas*, según el autor, en una práctica institucional varía de acuerdo con el punto de vista de la institución en la cual se desarrolla la práctica o de una institución externa que observa la actividad para describirla con un objetivo preciso.

**Definiciones**

En este sentido, en una organización praxeológica consideramos las siguientes definiciones

- el ***Tipo de tarea*** denotado por **T** es identificado si contiene por lo menos una tarea **t**. Tipos de tarea provocan acciones con objetivos bien definidos y son siempre expresados por un verbo. Es por esto que, se hace necesario distinguir tarea, tipo de tarea y género de tarea.

  Según Chevallard (1999), un género de tarea existe bajo la forma de diferentes tipos de tarea, cuyo contenido está bien claro y definido. Por ejemplo, encontrar es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo.

  Tarea, tipos de tareas y géneros de tareas, para el autor, no son datos de la naturaleza, pero si artefactos, obras, constructos institucionales, cuya reconstrucción en tal institución es un problema enteramente objeto de la didáctica.

- ***La técnica*** denotada por **ô**, es una determinada manera de hacer o realizar un tipo de tarea, **T**. Una praxeología relativa al tipo de tareas **T** contiene pues, en principio, una técnica **ô** relativa a **T**. De esta manera se tiene un "bloque" designado por [T/ô], que se denomina bloque *práctico-técnico* y que, para el autor, se identificará como *un saber-hacer*: un determinado tipo de tareas, T y una determinada manera, ô, de realizar las tareas de este tipo.

- ***La tecnología***, denotada por **Θ**, es un discurso racional que tiene por finalidad justificar la técnica **ô** y para garantizar que ésta permita realizar las tareas del tipo **T**. La tecnología permite asegurar que la técnica es correcta, exponer el porqué es de aquella manera, además de posibilitar la producción de nuevas maneras de hacer, es decir, nuevas técnicas.
- La cuarta y última noción del modelo praxeológico es ***la Teoría***, denotada por **Θ**. Según Chevallard (1999), como el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, se hace necesario un nivel superior de justificación-explicación-producción. Es, en este sentido que la teoría asume, en relación con la tecnología, la función que ésta última tiene en relación de la técnica, es decir, la teoría tiene el objetivo de justificar y de esclarecer la tecnología.

Por lo expuesto, el autor afirma que la tecnología y la teoría están próximas, y no sería difícil confundirlas. El autor designó de bloque *tecnológico-teórico* al bloco formado por [Θ/Θ]. Así, Chevallard (1999), citado por Almeida (2014) afirma: "la organización praxeológica más simple propuesta por la TAD, llamada de puntual e indicada por [T/t/Θ/Θ], es comprendida como la realización de tareas (pertenece a cierto *tipo de tarea*), por medio de por lo menos una *técnica*, que es justificada por una *tecnología*, que a su vez, es fundamentada por una *teoría*. Tal organización praxeológica es constituida por dos bloques: bloque práctico-técnico [T/t] y el bloque tecnológico-teórico [Θ/Θ], que caracterizan, respectivamente, el saber-hacer y el saber" (p. 73).

Esta teoría brinda las herramientas para cumplir mi objetivo, es decir identificar los tipos de tareas, la técnica y el discurso tecnológico-teórico, que justifican las técnicas que los autores de los textos a analizar, proponen en su acción para resolver las tareas presentadas, con estos elementos podría: observar el grado de complejidad de la praxeología encontrada, describir la organización matemática que está propuesta en dichos textos.

# V. MATERIALES Y MÉTODOS

A continuación presento el procedimiento metodológico para la realización de nuestro objetivo.

## 5.1 Instrumentos utilizados en la investigación

En primer lugar se buscaron y se recopilaron investigaciones relacionadas con el Teorema de Lagrange de funciones de varias variables de funciones reales, para ello me centro en el tratamiento de la información: en los tipos de tareas y en las estrategias de resolución de problemas de máximos y mínimos; luego se clasificó las investigaciones de acuerdo al objeto matemático (tratamiento forma, enseñanza y aprendizaje), a la teoría y a la metodología; luego defino criterios para realizar el análisis de la OM, finalmente se describió y analizó los textos tomando en cuenta los criterios definidos. Además, se elaboró una prueba para medir el rendimiento académico de los estudiantes y de esta manera analizar el impacto en la comprensión del estudiante de Matemática III.

## 5.2 Población y muestra

La población en esta investigación es definida por todos los textos del sílabo del curso Matemática III para la carrera de Ingeniería Pesquera y de Alimentos. Dichos textos tienen como característica que se dividen según el enfoque: formal y didáctico. Además, La muestra la determino considerando un libro representativo del enfoque formal y otro del enfoque didáctico, habiendo salido los textos de: Pita Ruiz (1995) y Finney & Thomas (1999).

## 5.3 Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos para la recolección de nuestros datos son los siguientes:

a. Recopilar información,
b. clasificar la información.
c. crear criterios de análisis
d. describir y analizar los textos seleccionados e utilizados por los docentes.

e. Matriz de evaluación de la practica evaluado a los estudiantes de Ingenieria de Alimentos.
f. Practica evaluada a los estudiantes de Ingenieria de Alimentos.

## 5.4 Técnicas de análisis

Para el análisis de nuestros datos tomamos en cuenta los resultados de las investigaciones encontradas en nuestros antecedentes. En la tabla 1 defino dos criterios de análisis, un primer criterio sobre el tratamiento de los objetos valor máximo y mínimo, es decir, tomando como referencia a Garcia (2005) este criterio de análisis nos ayudará a distinguir en qué nivel de modelización se encuentra la organización matemática que presenta los textos para la enseñanza del Teorema de Lagrange de funciones de dos variables reales; el segundo criterio nos sirve para observar si se presentan en los ejercicios resueltos respecto al Teorema de Lagrange. (véase la tabla N°9.1, en la página 45)

**Análisis del material didáctico**

En primer lugar considero el estudio del objeto matemático, Multiplicadores de Lagrange, mostrado en el libro didáctico "Cálculo" (Pita Ruiz, 1995). El capítulo de Extremos Condicionados se encuentra en el capítulo 4, sección 4.5. Este libro es utilizado por los estudiantes de Ingeniería de Alimentos pues, es parte de la bibliografía básica del sílabo del curso Matemática III y por los profesores del curso.

El autor presenta los Extremos Condicionados apoyándose de un registro gráfico para ilustrar lo explicado por medio del discurso escrito, de esta manera:

Supongamos que queremos encontrar los extremos de la función $z = f(x, y)$, cuando las variables x, y varían en un conjunto determinado de puntos en el plano como podría ser una curva. Es decir, nos interesa obtener cuál es el valor más grande y más pequeño (localmente) de la función $z = f(x, y)$, y en qué puntos se tienen estos valores cuando (x, y) se mueve sobre una curva presentada previamente, digamos que por una ecuación del tipo g (x, y) = 0. La novedad ahora es que procuramos los puntos $(\bar{x}, \bar{y})$ para los que el valor $f(\bar{x}, \bar{y})$ es el mayor o menor de los valores de

$f(x, y)$, con $(x, y)$ variando en una curva dada $g(x, y) = 0$, conforme se muestra en la figura N° 9.1, en la página 47.

El autor considera el siguiente **tipo de tarea** para entender el planteamiento y la propuesta de solución para esta tarea.

**Tipo de tarea**: Damos la curva en el plano $(x-3)^2 + \frac{1}{4}(y-4)^2 = 1$, o bien $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 8y + 48 = 0$. Esta es una elipse con centro en el punto (3,4), semiejes 1 y 2, y eje mayor paralelo al eje y. Queremos encontrar qué punto de esta elipse se encuentra **más cercano** al origen y qué punto se encuentra más alejado de él.

**Técnica**: Para un punto (x, y) en el plano, la distancia entre él, y el origen es $\sqrt{x^2+y^2}$. Podemos pensar entonces en la "función distancia del punto (x, y) al (0, 0)", dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Esta es una función de las variables x, y, de la cual nos interesa obtener el máximo y el mínimo, cuando x, y se mueven sobre la elipse g(x, y) = 0, conforme se muestra en la figura N° 9.2, en la página 45.

Diremos entonces que queremos encontrar el máximo y el mínimo de la función $z = f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 8y + 48 = 0$.

Estos valores extremos de la función $z = f(x, y)$ se llaman, en general, extremos condicionados.

**Tipo de tarea.** La función $\mu = f(x, y, z) = xy + xz$, representa la temperatura en el punto $(x, y, z)$. Consideremos la curva C intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $g_2(x, y, z) = y - z = 0$. Nos interesa saber cuál de los puntos de C está más caliente y cuál más frío.

**Técnica:** Se trata entonces de obtener los extremos condicionados de la función $f(x, y, z) = xy + xz$, sujeta a las dos restricciones $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $g_2(x, y, z) = y - z = 0$. Observe que la curva C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano z = y conforme se muestra en la figura N° 9.3, en la página 47.

La expresión $grad\, f = \lambda_1\ grad\, g_1 + \lambda_2\, grad\, g_2$ se convierte en las tres ecuaciones

$$y + z = 2\lambda_1 x$$

$x = 2\lambda_1 y + \lambda_2$

$x = - \lambda_2$

de donde, eliminando $\lambda_1$ y $\lambda_2$ se obtiene $y^2 + zy - 2x^2 = 0$. Resolviendo esta expresión simultáneamente con $x^2 + y^2 = 1$ y $y = z$, obtenemos los cuatro puntos

$$p_{1,2} = \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ p_{3,4} = \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Se tiene: $f(p_{1,2}) = \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$

$$, f(p_{3,4}) = \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\left( \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\left( \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1.$$

Concluimos entonces que los puntos $p_{1,2}$ son los más calientes de C, en tanto que los puntos $p_{3,4}$ son los más fríos.

**La Tecnología y Teoria** utilizada es el teorema que establece condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados, en el caso general.

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ m funciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $U$ $(m < n)$. Sea

$$S = \{x \in U \mid g_1(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Sea $x_0 \in S$ un punto de extremo condicionado de f, es decir tal que existe una bola $B \subset U$ con centro en $x_0$ con la propiedad de que $f(x_0) \leq f(x)$ ó $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en $B \cap S$. Suponga que el determinante $det\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0) \right) \neq 0$ para un conjunto de m variables $x_j$, tomadas del conjunto de n variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $g_1$. Entonces existen m números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que se cumple.

$$grad\, f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, grad\, g_k(x_0) = 0$$

A los números $\lambda_k$, k = 1, 2, …., m cuya existencia establece el teorema anterior se les llama **Multiplicadores de Lagrange**, y al método que el teorema proporciona para localizar los (posibles) extremos de la función *f* sujeta a las m restricciones $g_1(x) = 0, \ldots\ldots, g_m(x) = 0$, se les llama ***Método de los Multiplicadores de Lagrange***.

**Tipo de Tarea:** Se quieren determinar los extremos de la función. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sujeta a la restricción

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$$

**Técnica 1:** Formando la función del Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 1\right)$$

Entonces el sistema a resolver es

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \frac{2}{9}\lambda z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 1 = 0$$

De donde se obtiene seis puntos que lo satisfacen, a saber (±1, 0, 0), (0, ±2, 0), (0, 0, ±3). Obsérvese que en este caso la superficie S que impone las restricciones es el elipsoide $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$, (una superficie acotada). Entonces entre los puntos encontrados deberá haber un máximo y un mínimo. Como f (±1, 0, 0) = 1, f(0, ±2,0) = 4, f (0, 0, ±3) = 9, se tiene que el mínimo (igual a 1) se logra en los puntos (± 1, 0, 0) y el máximo (que vale 9) en los puntos (0, 0, ±3). Es interesante darse cuenta que la geometría que hay detrás de este problema. La función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ mide (el cuadrado de) la distancia del punto (x, y, z) al origen. La superficie S de la restricción es un elipsoide con centro en el origen. Lo que hicimos entonces fue obtener los puntos del elipsoide que estaban más cerca (los puntos (±1, 0, 0)) y más lejos (los puntos (0, 0, ±3)) del origen.

**Tipo de tarea:** Se quiere hallar los extremos de la función $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ y $g_2(x, y, z) = x + y + z = 0$

**Técnica:** Formamos la función de Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$$

y consideramos entonces el sistema

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x + y + z = 0 \qquad (5)$$

De (2) y (3) se obtiene $(z - y)(x - 2\lambda_1) = 0$. Surgen dos opciones: a) $z = y$; b) $x = 2\lambda_1$. Si $z = y$, de (4) y (5) se obtiene el sistema $x^2 + 2y^2 = 1$, $x + 2y = 0$, que posee dos soluciones $x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Así, en este caso ($z = y$) hay dos soluciones a nuestro sistema original, a saber $p_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $p_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Regresando a la opción b), si $x = 2\lambda_1$, de (1) y (2) se obtiene que $(y - x)(z - x) = 0$.

De donde ó $y=x$ ó $z = x$. En el primer caso nuevamente las ecuaciones (4) y (5) nos dan otras dos soluciones $p_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $p_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ y del segundo obtenemos $p_5 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $p_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. De nuevo observamos que el conjunto S que impone las restricciones al dominio f es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$. Entonces es un círculo, el cual es acotado. Debe entonces haber un máximo y un mínimo entre los puntos localizados. Observando que $f(p_1) = f(p_3) = f(p_5) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}, f(p_2) = f(p_4) = f(p_6) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$, concluimos que la función tiene máximos en $p_2$, $p_4$, $p_6$ (iguales a $\frac{1}{3\sqrt{6}}$) y mínimos en $p_1$, $p_3$, $p_5$ (iguales a - $\frac{1}{3\sqrt{6}}$).

El libro didáctico no presenta ilustraciones para que tanto el estudiante como el profesor tengan una aprehensión perceptiva de la técnica utilizada. Además, el autor presenta un discurso matemático formal priorizando solo los procedimientos algebraicos, los tipos de tareas son los mismos.

Podemos afirmar que el libro didáctico no presenta diferentes técnicas, el bloque tecnológico-teórico y el tipo de tareas son las mismas provocando la aplicación directa de la teoría, las técnicas son del mismo tipo. Esto sugiere que el libro presenta, al igual que el primer libro analizado, una **organización matemática puntual**.

En segundo lugar estudio los Multiplicadores de Lagrange presentado en el libro didáctico "Cálculo. Varias variables" (Thomas, 2010). El objeto matemático Multiplicadores de Lagrange se encuentra en el capítulo 14, sección 14.8. Este libro es utilizado por los estudiantes de Ingeniería de Alimentos pues, es parte de la bibliografía básica del sílabo del curso Matemática III y por los profesores del curso.

Antes de presentar el método multiplicadores de Lagrange el autor presenta dos tipos de tarea en que encuentra los valores extremos de funciones restringidas: la técnica del primer tipo de tarea considera un problema donde un mínimo con restricciones se puede obtener eliminando una variable.

**Tipo de tarea:** Encuentre el punto P(x, y, z) del plano 2x + y – z – 5 = 0 que esté más cercano al origen.

**Técnica:**

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} \quad = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Sujeta a la restricción: $2x + y - z - 5 = 5$

Puesto que $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ tiene un valor mínimo siempre que la función, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ tenga un valor mínimo, podemos resolver el problema si encontramos el valor mínimo de f(x, y, z) sujeto a la restricción $2x + y - z - 5 = 0$. Si consideramos a $x$ y $y$ como las variables independientes en esta ecuación y escribimos z como $z = 2x + y - 5$, nuestro problema se reduce a la obtención de los puntos (x, y) en los cuales la función $h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$ tiene sus valores mínimos. El criterio de la primera derivada nos dice que cualquier mínimo que $h$ pudiera tener debe estar en puntos donde

$$h_x = 2x + 2\,(2x + y - 5)\,(2) = 0, \qquad h_y = 2y + 2\,(2x + y - 5) = 0.$$

Esto nos lleva a

$$10x + 4y = 20, \qquad 4x + 4y = 10,$$

Y la solución es

$$x = \frac{5}{3}, \qquad y = \frac{5}{6}.$$

Podemos aplicar un argumento geométrico junto con el criterio de la segunda derivada para demostrar que estos valores minimizan $h$. La coordenada $z$ del punto correspondiente en el plano $z = 2x + y - 5$ es

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

Por lo tanto, el punto más cercano es representado por: $P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$. Luego,

La distancia de P al origen es $5/\sqrt{6} \approx 2.04$.

La **Tecnología** utilizada es el criterio de la primera y segunda derivada y la **teoría** es la del cálculo diferencial.

**Tipo de Tarea:** Encuentre los puntos del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ más cercanos al origen.

**Técnica 1:** Buscamos los puntos sobre el cilindro que se encuentren más cercanos al origen. Éstos son los puntos cuyas coordenadas minimizan el valor de la función, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Si consideramos $x$ y $y$ como variables independientes en la ecuación de la restricción, entonces $z^2 = x^2 - 1$ y los valores de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el cilindro están dados por la función.

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

Para determinar los puntos sobre el cilindro cuyas coordenadas minimizan a $f$, buscamos los puntos en el plano $xy$ cuyas coordenadas minimizan a $h$. El único valor extremo de $h$ se presenta cuando.

$$h_x = 4x = 0 \quad \text{y} \quad h_y = 2y = 0$$

es decir, el punto (0,0). Pero no existen puntos sobre el cilindro donde tanto x como y se anulen. Sin embargo, según el criterio de la primera derivada obtuvo el punto en el dominio de $h$ donde $h$ tiene un valor mínimo. Por otro lado, nosotros queremos los puntos del cilindro donde h tiene un valor mínimo. Si bien el dominio de $h$ es todo el plano $xy$, el dominio del cual podemos seleccionar las primeras dos coordenadas de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro se restringe a la "sombra" del cilindro en el plano $xy$, la cual no incluye la banda entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, ver figura N° 10.4 en la página 54.

Podemos evitar este problema si consideramos a y y z como variables independientes (en vez de x y y), expresando x en términos de y y z como $x^2 = z^2 + 1$. Con esta sustitución $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ se convierte en:

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

Y buscamos los puntos donde $k$ asume su valor mínimo. El dominio de $k$ en el plano $yz$ concuerda ahora con el dominio en el cual seleccionamos las coordenadas $y$ y $z$ de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro. Por lo tanto, los puntos que minimizan $k$ en el plano tendrán puntos correspondientes sobre el cilindro. Los valores menores de $k$ se presentan cuando

$$k_y = 2y = 0 \quad \text{y} \quad k_z = 4z = 0.$$

O bien, $y = z = 0$. Esto nos lleva a

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \qquad x = \pm 1.$$

Los puntos correspondientes sobre el cilindro son (± 1, 0, 0). Podemos ver en la desigualdad.

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

que los puntos (±1, 0, 0) dan un valor mínimo de $k$. También podemos ver que la distancia mínima del origen a un punto en el cilindro es una unidad.

Afirmamos que como parte de esta técnica el autor muestra una ilustración de tal manera que propicie en el lector la conversión del registro algebraico al registro gráfico con apoyo del discurso realizado por el autor. Dejemos claro que esta conversión no es la que permitirá movilizar conocimientos ni construir nuevos conocimientos, es decir, no tiene un costo cognitivo por parte del estudiante.

**Técnica 2 (Multiplicadores de Lagrange):** Otra manera de encontrar los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen es imaginar una pequeña esfera, con centro en el origen, que crece como una burbuja de jabón hasta tocar al cilindro. En cada punto de contacto, el cilindro y la esfera tienen el mismo plano tangente y la misma recta normal. Por lo tanto, si la esfera y el cilindro se representan como la superficies de nivel que se obtienen igualando $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ y $g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$ a cero, entonces los gradientes $\nabla f$ y $\nabla g$ serán paralelos cuando las superficies se toquen. Por lo tanto, en cualquier punto de contacto debemos encontrar un escalar λ ("lambda"), tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$,

o bien,

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} - 2z\mathbf{k}).$$

Así, las coordenadas $x$, $y$ y $z$ de cualquier punto de tangencia tendrán que satisfacer las tres ecuaciones escalares

$$2x = 2\lambda x, \qquad 2y = 0, \qquad 2z = -2\lambda z.$$

¿Para qué valores de λ ocurrirá que un punto (x, y, z), cuyas coordenadas satisfacen estas ecuaciones escalares, se encuentre también sobre la superficie $x^2 - z^2 - 1 = 0$?

Para contestar esta pregunta aplicamos nuestro conocimiento de qué ningún punto sobre la superficie tiene una coordenada x nula para concluir que $x \neq 0$. Por lo tanto, $2x = 2\lambda x$ sólo si $2 = 2\lambda$, o $\lambda = 1$.

Para $\lambda = 1$, la ecuación $2x = -2\lambda z$ se convierte en $2z = -2z$. Si esta ecuación se satisface también, z debe anularse. Puesto que $y = 0$ también (de la ecuación $2y = 0$), concluimos que todos los puntos que buscamos tienen coordenadas de la forma (x, 0, 0).

¿Cuáles puntos sobre la superficie $x^2 - z^2 = 1$ tienen coordenadas de esta forma? Los puntos (x, 0, 0) para los cuales.

$$x^2 - (0)^2 = 1, \qquad x^2 = 1, \qquad \text{o} \qquad x = \pm 1.$$

Los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen son los puntos (± 1, 0, 0).

La **Tecnología** utilizada es el criterio de la primera y segunda derivada y la **teoría** es la del cálculo diferencial.

**Bloque Tecnológico - Teórico**

**Teorema del gradiente ortogonal** Suponga que f(x, y, z) es derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave $C : r(t) = g(t)\, i + h(t)\, j + k(t)\, k$. Si $P_0$ es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C, entonces $\nabla f$ es ortogonal a C en $P_0$.

**Corolario.** En los puntos de una curva suave $r(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$, donde una función derivable $f(x, y)$ asume sus máximos y mínimos locales en relación con sus valores en la curva, $\nabla f \cdot v = 0$, *donde* $v = dr/dt$.

La **tecnología** presentada por medio del teorema es la justificación de la técnica, método de los multiplicadores de Lagrange.

**El método de multiplicadores de Lagrange**

Suponga que f(x, y, z) y g(x, y, z) son derivables y que $\nabla g \neq 0$ cuando g (x, y, z) = 0. Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción g(x, y, z) = 0 (si ésta existe), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisface en forma simultánea las ecuaciones.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad y \ g(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Para funciones de dos variables independientes, la condición es similar, pero sin la variable z.

Después de presentar el libro didáctico la justificación de la **técnica**, continúa mostrando **tipos de tarea** para resolverlas con la técnica Multiplicadores de Lagrange.

**Tipo de tarea**: Obtenga los valores mayores y menores que toma la función. *f(x, y) = xy* sobre la elipse

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

**Técnica:** Queremos encontrar los valores extremos de f(x, y) = xy sujetos a la restricción.

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

Para hacerlo, primero hallamos los valores de x, y y λ para los cuales

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad y \qquad g(x, y) = 0.$$

La ecuación del gradiente en las ecuaciones (1) nos da $yi + xj = \frac{\lambda}{4}xi + \lambda yj$, de donde obtenemos,

$$y=\frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y \ \ y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y)=\frac{\lambda^2}{4}y,$$

De manera que y = 0 o λ = ± 2. Ahora consideraremos estos dos casos.

Caso 1: Si y = 0, entonces x = y = 0. Pero (0, 0) no está en la elipse. Por lo tanto, y $\neq 0$.

Caso 2:Si $y \neq 0$, entonces $\lambda = \pm 2$ y $x = \pm 2y$. Al sustituir esto en la ecuación g(x, y) = 0, tenemos:

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8 \quad y \quad y = \pm 1$$

Por lo tanto, la función *f(x, y) = xy* toma sus valores extremos sobre la elipse en los cuatro puntos (±2, 1), (±2, -1). Los valores extremos son *xy = 2y xy = -2,* como se muestra en la figura N° 10.1, en la página 53.

El libro didáctico presenta una ilustración para que tanto el estudiante como el profesor tengan una aprehensión perceptiva de las curvas de nivel de la función objetivo representada por $f(x, y) = xy$, de las restricciones representadas por $g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$, de los puntos y del comportamiento de las funciones gradientes respectivas. Además, el autor presenta un discurso matemático para que el lector relacione la ilustración e identifique algunos elementos presentados, por ejemplo, las curvas de nivel, en la ilustración con la técnica utilizada.

Afirmamos que como parte de esta técnica el autor muestra una ilustración de tal manera que propicie en el lector la conversión del registro algebraico al registro gráfico con apoyo del discurso realizado por el autor. Dejemos claro que esta conversión no es la que permitirá movilizar conocimientos ni construir nuevos conocimientos, es decir, no tiene un costo cognitivo por parte del estudiante

**Discursivo matemático del autor del libro didáctico:** Las curvas de nivel de la función f(x, y) = xy son las hipérbolas xy = c. Cuanto más lejos estén las hipérbolas del origen, mayor será el valor absoluto de f. Queremos obtener los valores extremos de f(x, y), dado que el punto (x, y) también está en la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. ¿Cuáles hipérbolas cortan a la elipse que se encuentra más lejos del origen? Las hipérbolas que apenas rozan a la elipse, aquellas que son tangentes a ella, son las más lejanas. En estos puntos, cualquier vector normal a la hipérbola es normal a la elipse, así que $\nabla f = yi + xj$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 2$) de g = (x/4) i + yj. En el punto (2, 1), por ejemplo.

$$\nabla f = i + 2j, \qquad \nabla g = \frac{1}{2}i + j, \quad y \quad \nabla f = 2\nabla g.$$

En el punto (-2, 1),

$$\nabla f = i - 2j, \qquad \nabla g = -\frac{1}{2}i + j, \quad y \quad \nabla f = -2\nabla g.$$

**Tipo de tarea:** Determine los valores máximos y mínimos de la función f(x, y) = 3x + 4y sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

**Técnica:** Método de multiplicadores de Lagrange con *f(x, y) = 3x + 4y, g(x, y) =* $x^2 + y^2 - 1$. Y buscamos los valores de x, y y y λ que satisfacen las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g : 3i + 4j = 2x\lambda i + 2y\lambda j$$
$$g(x, y) = 0 : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

La ecuación gradientes en las ecuaciones (1) implica que $\lambda \neq 0$ y resulta.

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

Estas ecuaciones nos dicen, entre otras cosas, que *x* y *y* tienen el mismo signo. Con estos valores para *x* y *y*, la ecuación *g(x, y) = 0* da

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0,$$

De manera que

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad 9 + 16 = 4\lambda^2, \quad 4\lambda^2 = 25 \quad \text{y} \quad \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm\frac{3}{5}, \quad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5},$$

Y *f(x, y) = 3x + 4y* tiene valores extremos en (x, y) = ± (3/5, 4/5).

Al calcular el valor de *3x + 4y* en los puntos ± (3/5, 4/5), vemos que sus valores máximos y mínimos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ son

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5 \qquad \text{y} \qquad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5$$

**Discursivo del autor del libro didáctico:** Las curvas de nivel de $f(x, y) = 3x + 4y$ son las rectas $3x + 4y = c$. Cuanto más lejos se encuentran las rectas del origen, mayor será el valor absoluto de f. Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y)$, dado que el punto (x, y) también está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ¿Cuáles de las rectas que cortan la circunferencia se encuentran más lejos del origen? Las rectas tangentes a la circunferencia son las más lejanas. En los puntos de tangencia, cualquier vector normal a la recta es normal a la circunferencia, de manera que el gradiente $\nabla f = 3i + 4j$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 5/2$) del gradiente $\nabla g = 2xi + 2yj$. En el punto (3/5, 4/5), por ejemplo.

$$\nabla f = 3i + 4j, \quad \nabla g = \frac{6}{5}i + \frac{8}{5}j \quad y \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g.$$

El libro didáctico presenta otra técnica justificada por la misma tecnología y la misma teoría. La **técnica 3** es **Multiplicadores de Lagrange con dos restricciones.**

Muchos problemas nos exigen encontrar los valores extremos de una función derivable f(x, y, z) cuyas variables están sujetas a dos restricciones. Si las restricciones son

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad y \qquad g_2(x, y, z) = 0$$

y $g_1$ y $g_2$ son derivables, y $\nabla g_1$ no es paralela a $\nabla g_2$, obtenemos los mínimos y máximos locales con una restricción de f introduciendo dos multiplicadores de Lagrange $\lambda$ y $\mu$. Es decir, localizamos los punto P(x, y, z) donde f asume sus valores extremos con una restricción, obteniendo los valores de x, y, z, $\lambda$ y $\mu$ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x,y,z) = 0, \quad g_2(x,y,z) = 0 \qquad (2)$$

**Tipo de Tarea:** El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en una elipse. Encuentre los puntos sobre la elipse que se encuentran más cercanos y más lejanos del origen.

**Técnica 3:** Obtenemos los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

El cuadro de la distancia de (x, y, z) al origen sujeta a las restricciones.

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

$$g_2\,(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \qquad (4)$$

La ecuación de gradientes de las ecuaciones (2) nos da entonces

$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi + 2yj) + \mu(i + j + k)$

$2xi + 2yj + 2zk = (2\lambda x + \mu)i + (2\lambda y + \mu)j + \mu k$

O bien

$2x - 2\lambda x + \mu, \;\; 2y = 2\lambda y + \mu, \; 2z = \mu \qquad (5)$

Las ecuaciones escalares de la ecuación (5) generan

$2x = 2\lambda x + 2z \rightarrow (1 - \lambda)\, x = z, \qquad (6)$

$2y = 2\lambda y + 2z \rightarrow (1 - \lambda)\, y = z.$

Las ecuaciones (6) se satisfacen simultáneamente si $\lambda = 1$ $y$ $z = 0$, $0$ $\lambda \neq 1$ $y$ $x = y = z / (1 - \lambda)$.

Si z = 0, al resolver las ecuaciones (3) y (4) en forma simultánea para obtener los puntos correspondientes sobre la elipse, obtenemos los dos puntos (1, 0, 0) y (0, 1, 0).

Si x = y, entonces las ecuaciones (3) y (4) nos dan

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \qquad\qquad x + x + z - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1 \qquad\qquad z = 1 - 2x$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad z = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los puntos correspondientes sobre la elipse son:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \qquad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

Sin embargo, debemos tenemos cuidado. Si bien $P_1$ y $P_2$ dan máximos locales de f sobre la elipse, $P_2$ está más alejado del origen que $P_1$.

Los puntos sobre la elipse más cercanos al origen son (1, 0, 0) y (0, 1, 0). El punto sobre la elipse más lejano del origen es $P_2$.

Después de un análisis didáctico de los dos libros de texto utilizados tanto por los profesores como por los estudiantes de Ingeniería de Alimentos de la Facultad de

Ingeniería Pesquera y de Alimentos afirmo que el libro de Cálculo, varias variables, del autor George Thomas, Jr. la décimo segunda edición del 2010 presenta una organización matemática local. El autor utiliza diferentes tipos de tarea pero una misma técnica y una misma tecnología y teoría, resaltamos que este libro presenta dos diferentes registros de representación semiótica, el registro gráfico a manera de ilustración, pero da prioridad al registro algebraico.

El discurso matemático utilizado por el autor es simple en el sentido de tener formalidad matemática. Por el contrario, el autor Pita Ruiz, segundo libro analizado titulado Cálculo Vectorial, primera edición, 1995 acude menos a los registros gráficos y más al registro algebraico que el primer autor. Además, el discurso matemático utilizado es formal y presenta algunas demostraciones matemáticas.

**Análisis estadístico**

Presentaremos en esta sección el análisis de la información proporcionada por los datos recolectados de la práctica califica evaluada a dos grupos de estudiantes de Ingeniería de Alimentos, llamados de ahora en adelante, grupo01 y grupo 02. Fueron evaluados 39 y 37 estudiantes respectivamente.

La práctica calificada tuvo dos partes: una **actividad** y una **situación problema,** cada una tuvo su matriz de evaluación (véase el cuadro 9.1, en la página 49) cuyos ítems fueron construidos en escala Likert y tomando en cuenta las dimensiones de nuestra variable independiente.

En la tabla N° 9.2,en la página 45, mostramos los resultados obtenidos en la práctica calificada correspondiente al grupo01, este grupo de estudiantes estudió el tema matemático Multiplicadores de Lagrange con el libro de enfoque formal cuyo autor es Pita Ruiz (1995). Podemos afirmar que aun teniendo un porcentaje mayor al 50% de aprobados, el promedio es menor de 11 (nota desaprobatoria) además, los datos se alejan de la media $\pm 3,41$ unidades, es decir, las calificaciones están concentradas entre [7, 14], los datos son homogéneos.

En la tabla N° 9.3, en la página 45 mostramos los resultados obtenidos en la práctica calificada correspondiente al grupo02, este grupo de estudiantes estudió el tema matemático Multiplicadores de Lagrange con el libro de enfoque didáctico cuyo autor es Finney & Thomas (1999). Afirmamos que aun teniendo un porcentaje del 100% de aprobados, el promedio es menor a 14 además, los datos se alejan de la media $\pm 1,73$ unidades, es decir, las calificaciones están concentradas entre [12, 15], los datos son homogéneos también.

Asimismo, comparando los dos grupos respecto a la primera parte de la práctica calificada, o sea a la actividad, conforme mostramos en la tabla N° 9.4, en la página 46, afirmamos que la mediana del grupo 01 es menor a la del grupo 02. En efecto, observamos en la figura N° 9.1, en la página 47 las notas de la actividad respecto al grupo01 es más disperso que las del grupo 02. El 50 % de las calificaciones del grupo 01 se encuentra entre 03 y 05 pero, el 50% de las calificaciones del grupo 02 se encuentran entre 06 y 07.

Además, el 75% de las calificaciones son menores a 05 en el grupo01 y en el grupo 02 el 75% de las calificaciones son menores a 07. La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes, respecto de la actividad, del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que el grupo 02 estudió con el libro de enfoque didáctico, el cual presenta una organización matemática local y diferentes tipos de tarea.

Esto nos permite verificar nuestras hipótesis específicas, es decir, (1) La didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y (2) La comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados.

Del mismo modo, comparando los dos grupos respecto a la segunda parte de la práctica calificada, o sea la situación problema, conforme mostramos en la tabla N° 9.5, en la página 46 afirmamos que la mediana del grupo 01 es menor a la del grupo 02.

En efecto, observamos en la figura N° 9.2, en la página 47 las notas de la situación problema respecto al grupo 01 es más disperso que las del grupo 02. El 50 % de las calificaciones del grupo 01 se encuentra entre 03 y 08 pero, el 50% de las calificaciones del grupo 02 se encuentran entre 06 y 08. La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes, respecto de la situación problema, del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que el grupo 02 estudió con el libro de enfoque didáctico, el cual presenta una organización matemática local y diferentes tipos de tarea.

Esto nos permite verificar, nuevamente, nuestras hipótesis específicas, es decir, (1) La didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y (2) La comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados.

Finalmente, respecto a la nota de la práctica calificada de ambos grupos, afirmamos que el grupo 02 está aprobado y presenta mejor resultados que el grupo 01, conforme se muestra en la tabla Nº 9.6 en la página 46.

Observamos en la figura 3 las notas de la práctica calificada respecto al grupo 01 es más disperso que las del grupo 02. El 50 % de las calificaciones del grupo 01 se encuentra entre 08 y 12,5, pero el 50% de las calificaciones del grupo 02 se encuentran entre 12 y 15. El 75% de los estudiantes del grupo 02 tiene nota mínima de 11 y máxima de 15, es decir están aprobados. Sin embargo, el 50% de los estudiantes del grupo 01 están con notas menores de 11 y mayores de 05, o sea, están desaprobados. La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes en la práctica calificada del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que este último grupo estudió con el libro de enfoque formal.

Para terminar, nuestro análisis nos permite cumplir con el segundo objetivo específico de nuestra investigación, evaluar la comprensión del estudiante de Matemática III del Teorema de Lagrange dependiendo de la organización matemática de los textos utilizados.

## 5.5 Metodologia

Pretendo analizar cómo los autores organizan el estudio del Teorema de Lagrange, en base al análisis de dos textos utilizados por los docentes en el curso de Matemática III, para ello, adoptamos una **metodología mixta**. Según Ñaupas et al (2013) este es un tipo de investigación que integra sistemáticamente los métodos de la investigación cuantitativa y cualitativa con la finalidad de obtener una mirada más completa del objeto de estudio. Lo que implica,

La recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias con base en toda la información recabada y lograr así una comprensión más completa y total del objeto de estudio, por lo tanto más fructífera por los aportes que su aplicación ha generado en el desarrollo de varias disciplinas científicas (Ñaupas et al, 2013, p. 402).

Para los autores, el fundamento filosófico de la investigación mixta es el pragmatismo, porque este tipo de estudio está interesado en buscar soluciones prácticas y trabajables para realizar la investigación en un proceso de complementación.

# VI. RESULTADOS

Podemos afirmar que mismo el libro didáctico presentando diferentes técnicas, el bloque tecnológico-teórico es el mismo. Esto sugiere que el libro presenta una organización matemática puntual. Además, observamos que en relación a la ecología de las tareas, es decir las condiciones y restricciones que permiten su producción y utilización en las instituciones, concretamente la Facultad de Ingenierìa Pesquera y de Aliemntos, el autor muestra ejemplos contextualizados dentro de la propia matemática mas no en la ingeniería lo que es necesario pues, el libro es utilizado por los ingenieros. Promueve sólo el tratamiento algebraico y no es frecuente el uso de al menos dos diferentes registros de representación semiótica, lo que permitirá el aprendizaje del objeto matemático en estudio. Lo que permite que el estudiante se mecanice y no razone.

Sería recomendable, presentar modelos matemáticos y problemas contextualizados en el área de ingeniería (situaciones didácticas, por ejemplo) como forma de trabajo, asimismo por medio de los tipos de tareas, provocar en los estudiantes conflicto cognitivo.

Por otro lado, la práctica calificada tuvo dos partes: una actividad y una situación problema, cada una tuvo su matriz de evaluación cuyos ítems fueron construidos en escala Likert y tomando en cuenta las dimensiones de nuestra variable independiente.

Podemos afirmar que aun teniendo un porcentaje mayor al 50% de aprobados, el promedio es menor de 11 (nota desaprobatoria) además, los datos se alejan de la media $\pm 3,41$ unidades, es decir, las calificaciones están concentradas entre [7, 14], los datos son homogéneos. Esta información es respecto al grupo de estudiantes que utilizó el libro de enfoque formal cuyo autor es Pita Ruiz (1995).

Además, teniendo aún un porcentaje del 100% de aprobados, el promedio es menor a 14 además, los datos se alejan de la media $\pm 1,73$ unidades, es decir, las calificaciones están concentradas entre [12, 15], los datos son homogéneos también.

Este grupo de estudiantes estudió el tema matemático Multiplicadores de Lagrange con el libro de enfoque didáctico cuyo autor es Finney & Thomas (1999).

Asimismo, comparando los dos grupos respecto a la primera parte de la práctica calificada, o sea a la actividad, el 50 % de las calificaciones del grupo 01 se encuentra entre 03 y 05 pero, el 50% de las calificaciones del grupo 02 se encuentran entre 06 y 07.

Además, el 75% de las calificaciones son menores a 05 en el grupo01 y en el grupo 02 el 75% de las calificaciones son menores a 07. La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes, respecto de la actividad, del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que el grupo 02 estudió con el libro de enfoque didáctico, el cual presenta una organización matemática local y diferentes tipos de tarea.

Esto nos permite verificar nuestras hipótesis específicas, es decir, (1) La didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y (2) La comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados.

Del mismo modo, comparando los dos grupos respecto a la segunda parte de la práctica calificada, o sea la situación problema, afirmamos que el 50 % de las calificaciones del grupo 01 se encuentra entre 03 y 08 pero, el 50% de las calificaciones del grupo 02 se encuentran entre 06 y 08.

La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes, respecto de la situación problema, del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que el grupo 02 estudió con el libro de enfoque didáctico, el cual presenta una organización matemática local y diferentes tipos de tarea.

Esto nos permite verificar, nuevamente, nuestras hipótesis específicas, es decir, (1) La didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría

Antropológica de lo Didáctico y (2) La comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados.

Finalmente, respecto a la nota de la práctica calificada de ambos grupos, afirmamos que el grupo 02 está aprobado y presenta mejor resultados que el grupo 01. La Mediana del grupo 02 se ha incrementado respecto al grupo 01. Lo que nos permite afirmar que el desempeño de los estudiantes en la práctica calificada del grupo 02 es mejor que los del grupo 01, cabe resaltar que este último grupo estudió con el libro de enfoque formal.

Para terminar, podemos afirmar que cumplimos con el segundo objetivo específico de nuestra investigación, evaluar la comprensión del estudiante de Matemática III del Teorema de Lagrange dependiendo de la organización matemática de los textos utilizados.

# VII. DISCUSIÓN

La descripción de la organización matemática de acuerdo con Chevallard (1991) presente en torno al tratamiento de los conceptos involucrados en el Teorema de Lagrange de funciones de dos variables del proceso de estudio de los dos textos permitió conocer las prácticas matemáticas asociadas a estos conceptos en estudiantes de la carrera de Ingeniería Pesquera y de Alimentos.

En el tratamiento del Teorema de Lagrange de funciones de dos variables en los textos, siguiendo a Xhonneux (2011) se identificaron un tipo de tarea principales relacionadas a las cuestiones de estudio surgidas en la organización matemática en el proceso de estudio de los textos analizados también se presentaron las técnicas para resolver estas tareas.

Basados en Gonzales (2014) y luego del análisis de los libros presentados por los autores Finney, R. y Thomas, G (1999) y Pita Ruiz (1995) afirmamos que de acuerdo al primer criterio de análisis: Sobre el tratamiento del objeto de estudio Teorema de Lagrange de funciones de dos variables reales, encontramos que se ha identificado el uso de una concepción: modelización matricial.

De acuerdo al segundo criterio de análisis: Sobre los tipos de tareas presentes en Teorema de Lagrange de funciones de dos variables. Encontramos que de acuerdo a las tareas encontradas encontramos 2 Tipos de tarea, seis técnicas y una sólo teoría y tecnología.

En resumen, gracias al punto de vista que nos proporciona nuestros criterios de análisis, observamos que la organización matemática que presentan los textos separa el estudio clásico de las relaciones funcionales.

Con el análisis de los libros, es decir con la organización matemática que está inmersa en el contenido del Teorema de Lagrange de funciones de dos variables, pudimos encontrar o definir un conjunto de pasos que forman La técnica, la cual nos da pistas de cómo mejorar la organización didáctica del libro, porque nos ayuda a identificar que tareas y técnicas no están presentes en los textos.

Por lo tanto, afirmamos que respondemos nuestra pregunta de investigación puesto que la Organización Matemática que se presentó en la organización didáctica del Teorema de Lagrange de funciones de dos variables en los textos no es adecuada para el aprendizaje de esa noción matemática para la carrera de Ingeniería Pesquera y de Alimentos.

Sin embargo, resaltamos que la comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados por los docentes y estudiantes.

# VIII. REFERENCIALES


1. ALMEIDA, T. **A base de conhecimento para o ensino de sólidos arquimedianos**. Tesis de doctoral. São Paulo, Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil. 2014.
2. ALMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR. 2007
3. CURY, H. **Diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia e disciplinas matemáticas: opções metodológicas**. *Revista de Ensino de Engenharia*, *v.20*, n.2, p. 1-7. 2001
4. CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *v.19*, n.2, p.221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad Sevilla. España. 1991
5. CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique**. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions*, *v. 19*, n.2, p. 221-265. 1999
6. CHEVALLARD Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de lasMatemáticas*, Huesca. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr. 2001
7. FINNEY, R. Y THOMAS, G. **Cálculo varias variables. (9 Ed.)**. México. Addison Wesley Longman de México, S.A. 1999.
8. GONZALES, C. **Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.** Tesis de maestría. São Paulo, Brasil. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. 2014
9. GRESSLER, L. **Pesquisa Educacional: Importância, Modelos, Validade, Variáveis, Hipóteses, Amostragem, Instrumentos**. Coleção: Realidade Educacional, 2. São Paulo. 1989.

10. GRISALES, L. Y GONZÁLES, E. **El saber sabio y el saber enseñado: un problema para la didáctica universitaria.** _Pedagogia Universitaria,_ *v.12,* n.2, p.77-86. 2009

11. IAMAC, J. **Sobre os documentos governamentais e institucionais do curso de Engenharia Elétrica**: uma análise da relação institucional esperada. II Congreso Nacional de Educación Matemática. 2011

12. KABAEL, T. **The effects of the function machine on students'understanding levels and their image and definition for the concept of function.** In Swars, S. L., Stinson, D.W., y Lemons-Smith, S. (Eds.). _Proceedings of the 31sr anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics education,_ *v.5,* p. 58-64. USA. 2009

13. MARTÍNEZ-PLANELL, R. & TRIGUEROS GAISMAN, M. **Students' ideas on functions of two variables: Domain, range, and representations.** In Swars, S. L., Stinson, D. W., y Lemons-Smith, S. (Eds.). _Proceedings of the 31st annual meeting of the NorthAmerican Chapter of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation_ vol. 5, p. 73-80. USA. 2009

14. MONTIEL, M., WILHELMI, M., VIDAKOVIC, D. Y ELSTAK, I. **Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context.** _Educational Studies in Mathematics,_ *72*(2), p. 139-160. 2009

15. PITA, C. **Cálculo Vectorial**. México. Prentice Hall Hispanoamericana S.A. Primera edición.1995

16. TRIGUEROS, M., & MARTÍNEZ-PLANELL, R. **Geometrical representations in the learning of two variable functions.** _Educational Studies in Mathematics,_ *73*(1), p. 3-19. 2010

17. TRIGUEROS, M., & MARTÍNEZ-PLANELL, R. **How are graphs of two variable functions taught?** In L.R. Wiest y T. Lamberg (Eds.), _Proceedings of the 33rd Annual Metting of the North America Chapter ofthe International Group for the Psychology of Mathematics Education_. USA. 2011

18. TROMBA, J. Y TROMBA, A. **Cálculo Vectorial**. USA: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Tercera edición 1991

19. ZIMMERMANN, W. **Visual Thinking in Calculus**. En Zimmermann, W. y Cunningham, S., *Visualization in teaching and learning mathematics* (223), (19) USA. Mathematical Association of America. 1991

20. YERUSHALMY, M. **Designing Representations: Reasoning About Functions of Two Variables**. *Journal for Research in Mathematics Education, v.28*, n.4, p. 431-466. 1997

# IX. APENDICE

**TABLA N° 9.1**

**CRITERIOS DE LOS LIBROS DIDÁCTICOS**

| | Criterios del libro didáctico |
|---|---|
| Sobre el tratamiento del Teorema de Lagrange de funciones de dos variables reales | Se presentan actividades resueltas en las que se emplean los tratamientos sobre modelización matricial, modelización funcional. |
| Sobre los tipos de tareas respecto al Teorema de Lagrange de funciones de dos variables | Se presentan actividades que requieren emplear tareas de optimizar funciones de dos variables bajo restricciones |

**TABLA N° 9.2**

**RESULTADOS DE LA PRÁCTICA CALIFICADA RELATIVA AL GRUPO01**

| | | |
|---|---|---|
| **APROBADOS** | **20** | **51.28%** |
| **DESAPROBADOS** | **19** | **48.72%** |
| **NOTA PROMEDIO** | **10.44** | |
| **DESV. ESTANDAR** | **3.41** | |

**TABLA N° 9.3**

**RESULTADOS DE LA PRÁCTICA CALIFICADA RELATIVA AL GRUPO02**

| | | |
|---|---|---|
| **APROBADOS** | **37** | **100.00%** |
| **DESAPROBADOS** | **0** | **0.00%** |
| **NOTA PROMEDIO** | **13.57** | |
| **DESV. ESTANDAR** | **1.73** | |

TABLA N° 9.4

NOTAS CORRESPONDIENTE A LA ACTIVIDAD

| Mínimo | Q1 | Mediana | Q3 | Máximo |
|---|---|---|---|---|
| 3.00 | 3.00 | 4.00 | 5.00 | 9.00 |
| 4.00 | 6.00 | 6.00 | 7.00 | 11.00 |

TABLA N° 9.5

NOTAS CORRESPONDIENTE A LA SITUACIÓN PROBLEMA

| Mínimo | Q1 | Mediana | Q3 | Máximo |
|---|---|---|---|---|
| 2.00 | 3.00 | 7.00 | 8.00 | 8.00 |
| 3.00 | 6.00 | 8.00 | 8.00 | 8.00 |

TABLA N° 9.6

NOTAS CORRESPONDIENTE A LA PRÁCTICA CALIFICADA

| Mínimo | Q1 | Mediana | Q3 | Máximo |
|---|---|---|---|---|
| 5.00 | 8.00 | 11.00 | 12.50 | 17.00 |
| 11.00 | 12.00 | 13.00 | 15.00 | 19.00 |

**FIGURA N° 9.1**

**CALIFICACIONES DE LA ACTIVIDAD EVALUADA SOBRE 12.**

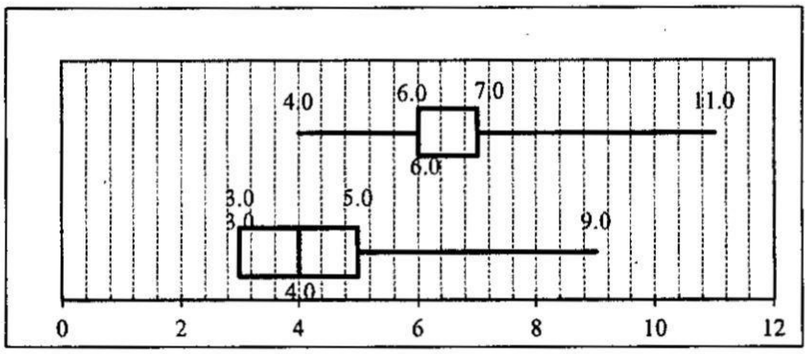



**FIGURA N° 9.2**

**CALIFICACIONES DE LA SITUACIÓN PROBLEMA EVALUADA SOBRE 08.**

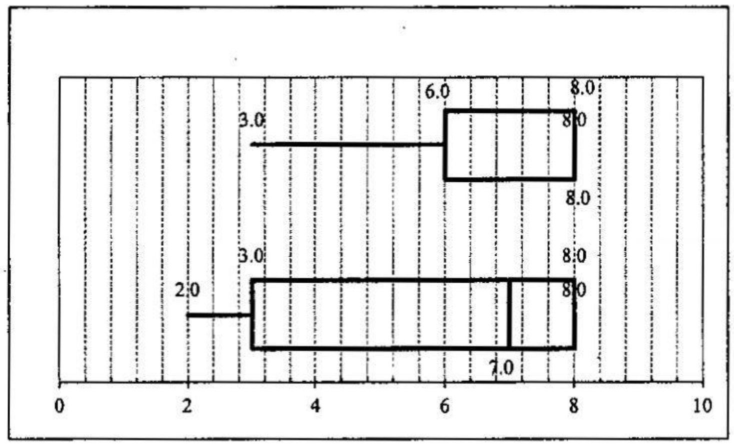
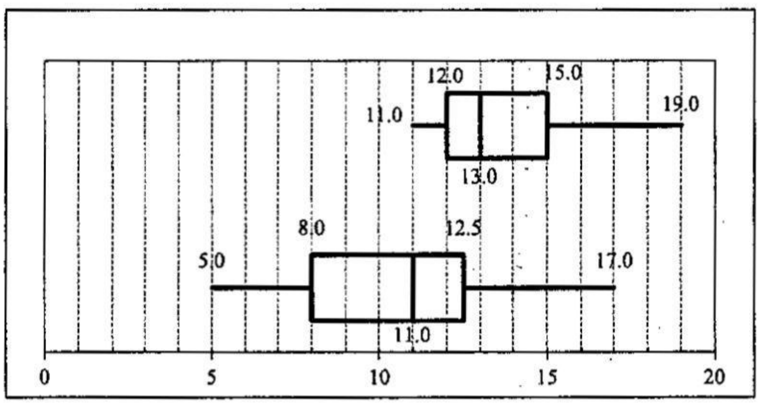



**FIGURA N° 9.3**

**CALIFICACIONES DE LA PRÁCTICA CALIFICADA EVALUADA SOBRE 20.**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**
**FACULTAD DE INGENIERÍA PESQUERA Y DE ALIMENTOS**
**ESCUELA DE INGENIERIA DE ALIMENTOS**

## CURSO: MATEMATICA III

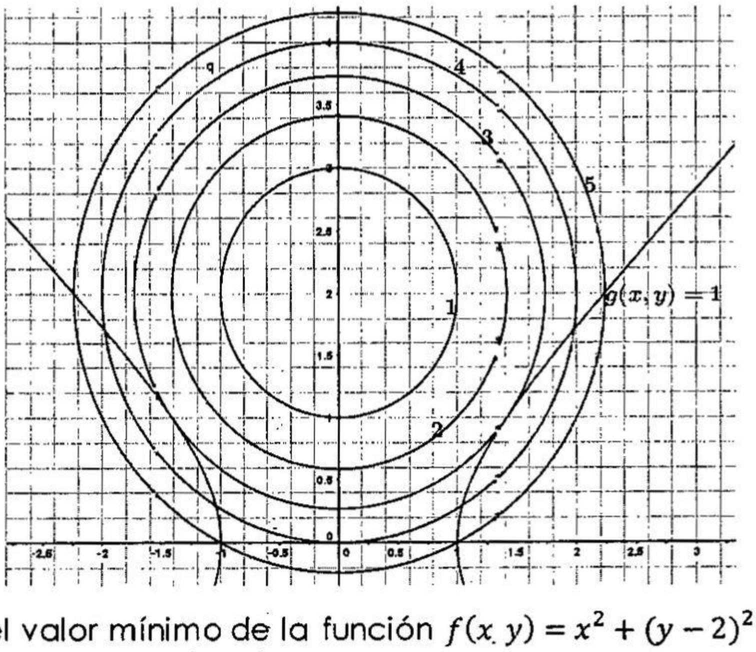
Apellidos y Nombre:________________________________________

Código: ________________________

Semestre 2017-A

### ACTIVIDAD 1

a) Se muestran un mapa de contorno de la función f y una curva cuya representación es dada por $g(x,y) = 1$. Estime el valor mínimo de f sujeta a la restricción representada por $g(x,y) = 1$. Justifique sus conjeturas.




b) Calcule el valor mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$ si $(x,y)$ son puntos de la función $x^2 - y^2 = 1$.

c) Compare sus respuestas con las del inciso a). ¿Qué puede afirmar?

## CUADRO N° 9.1
## RÚBRICA DE LA EVALUACIÓN PARA LA ACTIVIDAD 1

| Criterios | Nivel | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. Excelente | 3. Satisfactorio | 2. Puede mejorar | 1. Inadecuado |
| **Entiende el significado del Método de LaGrange** | Asocia con precisión todos los elementos del gráfico con los elementos algebraicos del Método de LaGrange | Asocia con precisión la mayoría de los elementos del gráfico con los elementos algebraicos del Método de LaGrange | Asocia con precisión algunos elementos del gráfico con los elementos algebraicos del Método de LaGrange | No contesta la pregunta a) planteada |
| **Utiliza la técnica presentada en el Método de LaGrange para resolver la tarea.** | Justifica todos sus procedimientos en el momento de usar la técnica para resolver la tarea | Justifica la mayoría de sus procedimientos en el momento de usar la técnica para resolver la tarea | Justifica algunos de sus procedimientos en el momento de usar la técnica para resolver la tarea | No Justifica la técnica para resolver la tarea |
| **Reconoce que la pregunta a) y b) resuelven el mismo problema.** | Explica, por escrito, detalladamente las similaridades de las preguntas a) y b) | Explica, por escrito, a grandes rasgos las similaridades de las preguntas a) y b) | Explica, por escrito, parcialmente las similaridades de las preguntas a) y b) | No contesta la pregunta c) planteada |

### PROBLEMA 1

Una empresa produce un solo producto en dos plantas diferentes. Sean $q_1$ (respectivamente $q_2$) el número de productos fabricados en la primera (respectivamente la segunda) planta de la fábrica. El costo de producción de cada planta se da por la función $C_1(q_1) = 200 + 6q_1 + 0{,}03q_1^2$ para la primera fábrica y por $C_2(q_2) = 150 + 10q_2 + 0{,}02q_2^2$ para la segunda fábrica. La compañía quiere entregar 100 unidades de su producto. El costo de transferencia por producto fabricado es de 4 soles desde la primera fábrica y 2 soles desde la segunda fábrica hacia un supermercado.

a) ¿Qué cantidades $q_1$ y $q_2$ minimizan el costo total?
b) ¿Cuál es (aproximadamente) el valor mínimo del costo total, si la empresa quiere entregar 101 unidades en lugar de 100?

**CUADRO N° 9.2**
**RÚBRICA DE LA EVALUACIÓN PARA EL PROBLEMA 1**

| Criterios | NIVEL | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4. Excelente | 3. Satisfactorio | 2. Puede mejorar | 1. Inadecuado |
| **Identifica los elementos del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange en el problema planteado** | Representa correctamente todas las funciones: función objetivo, función objetivo y función a optimizar | Representa correctamente la función objetivo y la función restricción. | Representa incorrectamente la función restricción | Representa incorrectamente la función restricción y función a optimizar |
| **Utiliza la técnicas determinadas por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange** | Aplica correctamente la técnica dada por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange | Aplica la mayoría de sus procedimientos en el momento de usar la técnica para resolver la tarea | Aplica algunos de sus procedimientos en el momento de usar la técnica para resolver la tarea | No utiliza correctamente la técnica para resolver la tarea |

# X. ANEXO

**CUADRO N° 10.1**

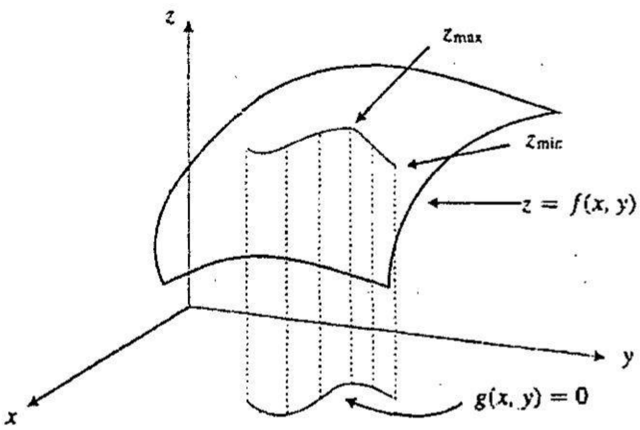
**MATRIZ DE CONSISTENCIA**

| PROBLEMA | OBJETIVOS | HIPÓTESIS | VARIABLES | INDICADORES | METODOLOGÍA |
|---|---|---|---|---|---|
| ¿La Organización Matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III es adecuada para el aprendizaje de esa noción matemática para la carrera de Ingeniería de Alimentos? | **Objetivo general**<br>Analizar la organización matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en textos de Matemática III para la carrera de Ingeniería de Alimentos y su impacto en la comprensión del estudiante de Matemática III.<br>**Objetivos Específicos**<br>• Determinar en qué medida los textos de Matemática III para la carrera de | **Hipótesis general**<br>La Organización Matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en los textos de matemáticas III para la carrera de Ingeniería de Alimentos no es adecuada para la comprensión y aprendizaje de esa noción matemática por parte de los estudiantes de la carrera de Ingeniería de Alimentos.<br>**Hipótesis específicas:**<br>• La didáctica del contenido del Teorema de Lagrange en los libros de matemática | **Variable dependiente.-** La comprensión y aprendizaje del Teorema de Lagrange por parte de los estudiantes de Ingeniería de Alimentos dependerá de la Organización Matemática de los libros de Matemática III.<br>**Variable independiente.-**<br>La organización matemática que se presenta en la organización didáctica del Teorema de Lagrange en los textos | **Indicador:**<br>Resultado de la Practica calificada<br>**Indicadores:**<br>• Tareas en forma clara y bien identificadas,<br>• Técnicas esbozadas y elaboradas. | Metodología Mixta. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ingeniería de Alimentos cumplen con la Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en relación al estudio del Teorema de Lagrange.<br><br>• Evaluar la comprensión del estudiante de Matemática III del Teorema de Lagrange dependiendo de la organización matemática de los textos utilizados. | III depende de su Organización Matemática desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.<br><br>• La comprensión del estudiante del Teorema de Lagrange depende de la organización matemática de los textos de Matemática III utilizados. | de matemáticas III para la carrera de Ingeniería de Alimentos. | Tecnología simple y formal. | |

**FIGURA Nº 10.1**

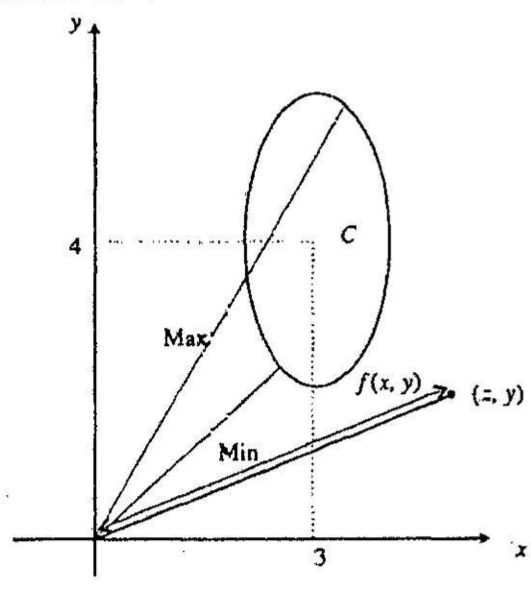
**VALOR MÁXIMO Y MÍNIMO**




**Fuente: Pita, Cálculo, 2015**

**FIGURA Nº 10.2**

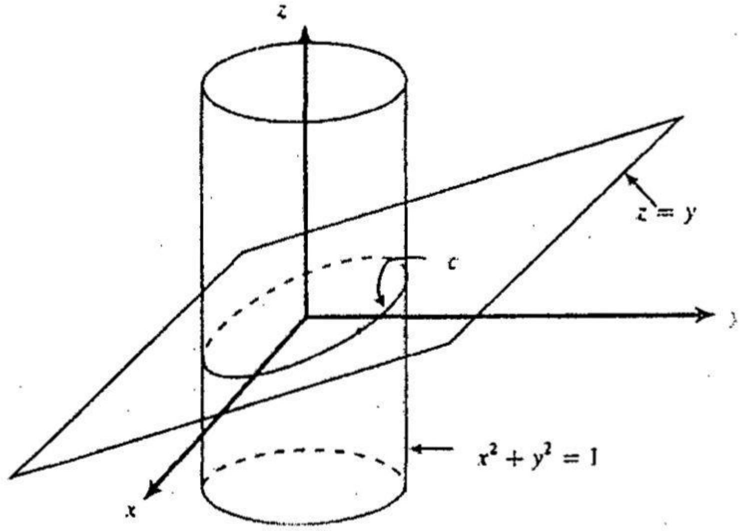
**REPRESENTACIÓN DE LA ELIPSE Y DE LA FUNCIÓN DISTANCIA**




**Fuente: Pita, Cálculo, 2015**

**FIGURA N° 10.3**

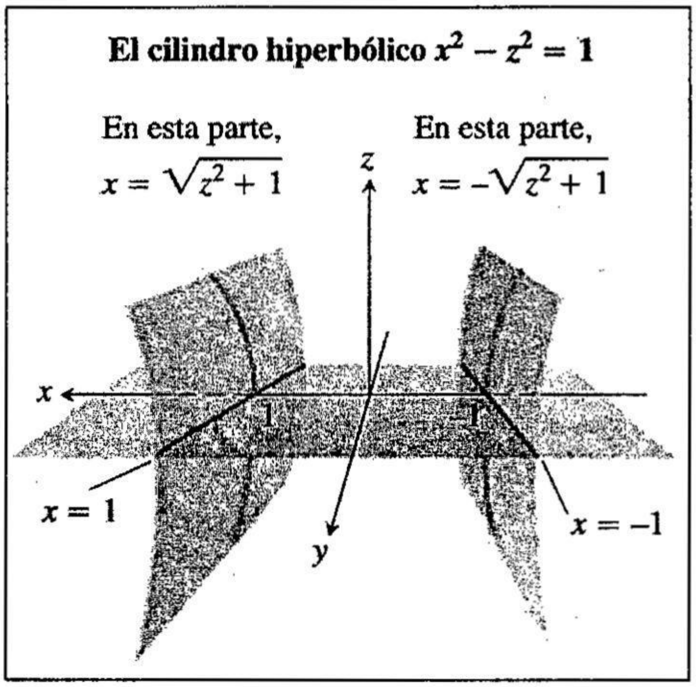
**REPRESENTACIÓN DE LA CURVA C**




**Fuente: Pita, Cálculo, 2015**

**FIGURA N° 10.4**

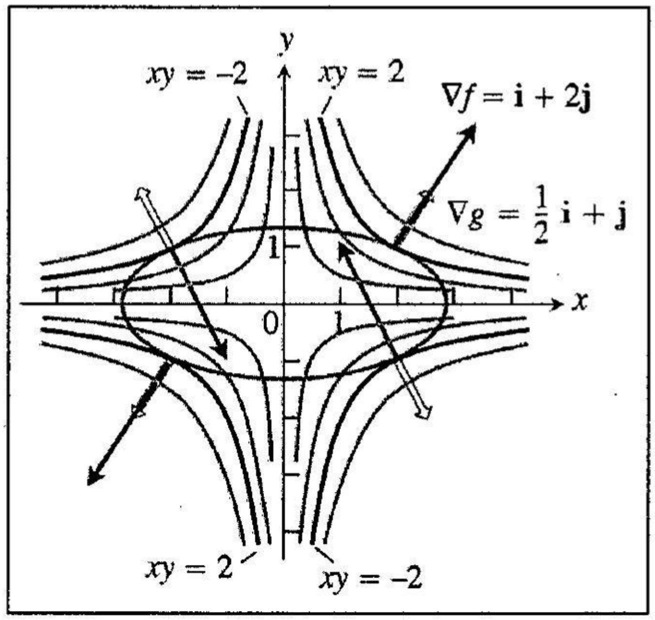
**APREHENSIÓN PERCEPTIVA DEL CILINDRO HIPERBÓLICO**




**Fuente: Thomas, Cálculo de una variable, 2010**

**FIGURA N° 10.5**

**APREHENSIÓN PERCEPTIVA DE CURVAS DE NIVEL DE LA FUNCIÓN Y DE LA FUNCIÓN RESTRICCIÓN**




**Fuente: Thomas, Cálculo de una variable, 2010**