UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INFORME FINAL DEL TEXTO

"Texto: Ecuaciones en Diferencias y sus Aplicaciones"

Autor: Lic. Moisés Simón Lázaro Carrión

Período de ejecución: Del 01 de Marzo del 2014 al 31 de Mayo del 2015

(Resolución de Aprobación Nº 385-2014-R)

Callao - 2015

I. ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

II. PRÓLOGO

La matemática a través de sus diversas disciplinas, ha logrado resolver algunos de los grandes problemas que padece la humanidad. Uno de esos problemas es el estudio de las funciones de variable discreta y sus aplicaciones.

Relativo a las funciones de variable discreta es lo referente a las ecuaciones en diferencias y el sistema de ecuaciones lineales en tiempo discreto.

Las ecuaciones en diferencias en tiempo discreto han sido muy útiles para construir modelos económicos que relacionan el ingreso con el consumo, el ahorro con la inversión y otros modelos, aun más complicados.

El modelo de la Telaraña, que expresa las relaciones de la oferta y la demanda para productos perecederos es un ejemplo muy ilustrativo de la aplicación de las ecuaciones en diferencias de orden uno.

El modelo de inventarios es otro ejemplo de aplicación de las ecuaciones en diferencias. Cada modelo es una buena aproximación del mundo real de la economía moderna.

III. INTRODUCCIÓN

En el primer capítulo, presentamos los conceptos básicos, tales como funciones con variable discreta, el operador nabla y la diferencia finita.

En el segundo capítulo, se hace la definición de una ecuación en diferencias, la forma de resolver una ecuación en diferencia de primer orden y sobre todo el análisis cualitativo de la solución.

El modelo de la telaraña, es una interesante aplicación a la economía. También, se expone el análisis cualitativo de la trayectoria solución mediante el diagrama de fase.

En el tercer capítulo se expone las ecuaciones en diferencias de segundo orden, sus diversas soluciones, además analizamos la convergencia de la trayectoria de tiempo. Algunos modelos económicos son interesantes por su interelación con las variables económicas.

En el cuarto capítulo se trata con claridad, las ecuaciones en diferencias lineales de orden superior y agregamos el teorema de Schur para analizar la convergencia de la trayectoria de tiempo.

En el quinto capítulo, se exponen interesantes modelos económicos que tienen que ver el mercado de inventarios, el modelo de interacción de multiplicador con acelerador de Samuelson, la interacción de la inflación y el desempleo.

IV. CUERPO DEL TEXTO

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. CONJUNTO DE PARTIDA Y CONJUNTO DE LEGADA DE UNA FUNCIÓN

Decimos que f es una función ó aplicación de A en B y se denota por $f: A \to B$, cuando para cada elemento $x \in A$ corresponde un único elemento $f(x) \in B$.

El conjunto A (dominio de f), es el conjunto de partida.

El conjunto B, es el conjunto de llegada.

También decimos que f es una función definida en A con valores en B.

Ejemplo 01.

Dados los conjuntos: $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

definimos la función $f: A \to B$, del siguiente modo $f(x) = 2x$.

Con esto querremos decir que:

$$f(1) = 2(1) = 2$$
$$f(2) = 2(2) = 4$$
$$f(3) = 2(3) = 6$$
$$f(4) = 2(4) = 8$$

El conjunto de partida viene a ser el dominio de la función f es: $\mathrm{Dom}(f) = A$

El conjunto de las imágenes de cada elemento de A, viene a ser el rango de la función f, esto es:

$$\mathrm{Rang}(f) = \{2,4,6,8\}$$

La gráfica de f son el conjunto de parejas ordenadas:

$$Gr(f) = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$$

El gráfico de las parejas ordenadas de la $Gr(f)$ en el plano son cuatro puntos que están alineados sobre una recta.

1.2. FUNCIONES DE VARIABLE CONTINUA.

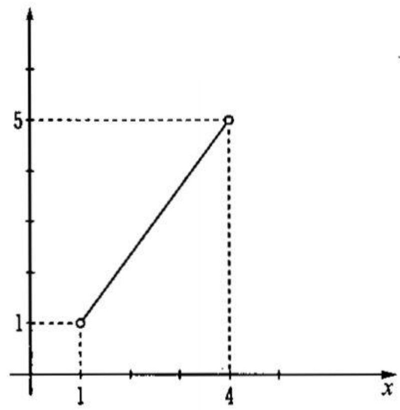
Si f es una función que está definida en un intervalo I (cerrado, abierto, semiabierto, etc.); diremos que f es una función de variable continua.

Ejemplo 02.

Dado el intervalo $I =]1,4[$ y sea $f : I \to I\!R$; definido por: $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

En este caso, se tiene que f es una función de variable continua, definida en el intervalo I con valores.

Su gráfica es:



1.2.1. IDEA DE CONTINUIDAD

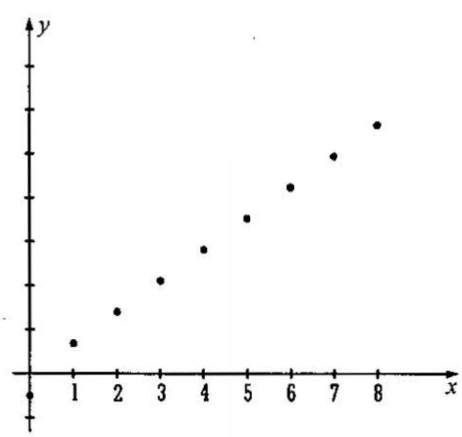
Intuitivamente, una función f es continua en un intervalo I, cuando el TRAZO de la curva ó línea que representa a f se hace sin levantar el lápiz. Es el caso del ejemplo 2.

1.3. FUNCIONES DE VARIABLE DISCRETA

Ejemplo 03.

Si la función $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ se define en el conjunto $I\!N = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$, diremos que f es una función de variable discreta.

Su gráfica es:



Si compramos el ejemplo 2 con el ejemplo 3, notaremos que la función del ejemplo 2 es de traza continua (variable continua); mientras que la función del ejemplo 3 son sólo puntos que correspondan a los imágenes de cada número natural (variable discreta).

1.4. EL OPERADOR Δ (OPERADOR DIFERENCIA FINITA PROGRESIVA)

Sea $f(x)$ una función de variable discreta definida en un conjunto A.

Definimos: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad , \quad x \in A$

Se lee "el incremento de f en x, es igual a la diferencia de f en $(x+h)$ menos f en x".

Donde: $h = x_i - x_{i-1} \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots$

$$\downarrow$$

$$x_i = x_{i-1} + h$$

1.4.1. TABLAS DE DIFERENCIAS FINITAS

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0				
		Δf_0			
$x_1 = x_0 + h$	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
$x_2 = x_0 + 2h$	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
$x_3 = x_0 + 3h$	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
$x_4 = x_0 + 4h$	f_4				
Valores de x	valores de la función en cada x	son las primeras diferencias	son las segundas diferencias	terceras diferencias	cuartas diferencias

Donde:

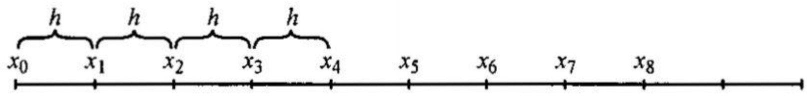
$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$	$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x))$
$\Delta f_0 = f_1 - f_0$	$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$	$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta f_0$
$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$	$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$
$\Delta f_2 = f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_2 = \Delta f_3 - \Delta f_2$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	
$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$	$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$	$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x)$

$$h = x_1 - x_0 \longrightarrow x_1 = x_0 + h$$

$$2h = x_2 - x_0 \longrightarrow x_2 = x_0 + 2h$$

$$3h = x_3 - x_0 \longrightarrow x_3 = x_0 + 3h$$

$$4h = x_4 - x_0 \longrightarrow x_4 = x_0 + 4h$$



$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_i - x_{i-1}$$

En el gráfico es fácil notar que:

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$
$$x_3 = x_0 + 3h$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_0 + nh$$

Ejemplo 4.

Sea la función $f : A \to B$, $A = \{0,1,2,3,4\}$ definida del siguiente modo:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	4	9	16

Hallar las diferencias finitas, usando la TABLA de diferencias finitas.

***Solución*:**

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0			
		1		
1	1		2	
		3		0
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		
4	16			

En este ejemplo $h = 1 = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3$

NOTACIÓN:

1. Si $h = 1$, tendremos $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$$
$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x)$$
$$\vdots$$

2. Si $h = 1$ y $f(x)$ es denotado por y_x, tendremos:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$
$$\Delta^2 y = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$
$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_{x+1} - \Delta^2 y_x$$
$$\vdots$$

CAPÍTULO 2

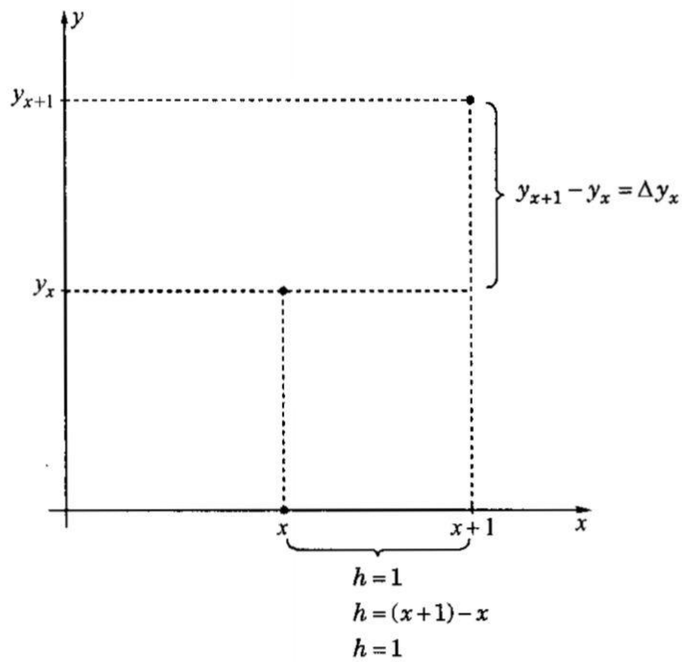
ECUACIONES EN DIFERENCIAS

2. DEFINICIÓN DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

2.1. Si $y = f(x)$ es una función definida en $I\!N = 1,2,3,\ldots$, definimos la PRIMERA DIFERENCIA de y_x, a la siguiente diferencia:

$\boxed{\Delta y_x = y_{y+1} - y_x}$ Δy_x: Se lee "*delta ye sub equis*"

Donde Δ (delta) es el OPERADOR DIFERENCIA FINITA PROGRESIVA y actúa restando sobre función y_x (y_x es lo mismo que $f(x)$)



En la forma recursiva, definimos:

La primera diferencia de y_x, es: $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$

La segunda diferencia de y_x es:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x)\\ &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x\\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)\\ &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x\end{aligned}$$

La tercera diferencia de y_x es:
$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x)\\ &= \Delta(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x)\\ &= \Delta y_{x+2} - 2\Delta y_{x+1} + \Delta y_x\\ &= (y_{x+3} - y_{x+2}) - 2(y_{x+2} - y_{x+1}) + (y_{x+1} - y_x)\\ &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x\end{aligned}$$

La n-ésima diferencia de y_x es:
$$\boxed{\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k y_{x+n-k}} \quad (2*)$$

2.1.1. ANALOGÍA IMPORTANTE

Si $y = f(x)$ denota una función en el que "y" es la variable dependiente (depende de los valores de x) y "x" es la variable independiente, se define:

1) La derivada de f en x, como en el límite: $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

Si denotamos: h por $\Delta x = x - x_0$

y $\Delta y = f(x+h) - f(x)$

Tendremos: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Esta definición tiene sentido cuando $f(x)$ es una función variable continua.

2) Si $f(x)$ es una función de variable discreta definida en $I\!N = 0,1,2,3,\ldots$, entonces se tendrá.

a) $h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots\ldots = x_i - x_{i-1} = 1$

b) $\Delta y = f(x+1) - f(x)$

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x) = \Delta y$

3) Por las definiciones dadas en (1) y (2) podemos decir que:

La primera diferencia Δy_x funciona parecido a la primera derivada $y' = \frac{dy}{dx}$.

La segunda diferencia $\Delta^2 y_x$ funciona parecido a la segunda derivada $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

La tercera diferencia $\Delta^3 y_x$ funciona parecido a la segunda derivada $y^{(3)} = \frac{d^3y}{dx^3}$

etc.

La diferencia entre y' y Δy es una constante.

Ay

4) La NOTACIÓN: y_x nos indica que "y" es función de "x" y lo usamos cuando "y" es una función de variable discreta, para diferenciar de la notación $y=f(x)$ que se usa generalmente cuando f es una función de variable continua, aunque esto no es una regla rígida.

Ejemplo 01.

Sea $y=x^2+3x$. Hallar: a) y_x b) $\Delta^2 y_x$

Solución:

a) De: $y=x^2+3x$

$$\Delta y_x = y_{x+1}-y_x$$
$$=[(x+1)^2+3(x+1)]-[x^2+3x]$$
$$\Delta y_x = \cancel{x^2}+2x+1+\cancel{3x}+3-\cancel{x^2}-\cancel{3x}$$
$$\Delta y_x = 2x+4$$

b) De: $\Delta y_x = 2x+4$

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x)$$
$$=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$$
$$=[2(x+1)+4]-2x-4$$
$$=\cancel{2x}+2+\cancel{4}-\cancel{2x}-\cancel{4}$$
$$=2$$

Comparemos:

De: $y=x^2+3x$

$$y'=2x+3$$
$$y''=2$$

Ejemplo 02.

Dado $y=3x^2-2$, hallar $\Delta^2 y$.

Solución:

$$\Delta^2 y = \Delta y_{x+1}-\Delta y_x$$
$$=\{y_{x+2}-y_{x+1}\}-\{y_{x+1}-y_x\}$$
$$=\{[3(x+2)^2-2]-[3(x+1)^2-2]\}-\{[3(x+1)^2-2]-[3x^2-2]\}$$
$$=\underbrace{[3(x+2)^2-2]}_{y_{x+2}}-2\underbrace{[3(x+1)^2-2]}_{y_{x+1}}+\underbrace{[3x^2-2]}_{y_x}$$
$$=6$$

2.2. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIA

Introducción:

En toda ecuación que aparezca los términos: y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, $\ldots$, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^3 y_x \ldots$ nos sugiere una ecuación lineal en diferencia.

177

Son ecuaciones lineales en diferencia:

1) $y_{x+3} - 2y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 2x$

2) $5y_{y+5} - 2y_{y+2} = 0$

3) $\Delta y_x = 0$

4) $\Delta^2 y_x - 2\Delta y_x + 3y_x = x$

5) $\Delta^2 y_x + \Delta^2 y_x - 2\Delta y_x - y_x = 0$

6) $2^x y_{x+3} - 5^x y_{x+2} + 3^x y_{x+1} + 2y_x = 2x$

7) $bP_t - dP_{t-1} = c - a$

La denominación LINEAL, es porque la variable dependiente y aparece sólo en expresiones de primer grado.

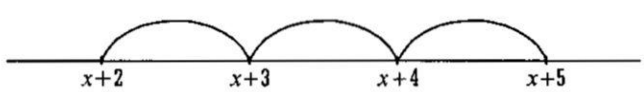
Los coeficientes de los términos y_{x+n}, $n = 0,1,2,3,\ldots,k$ pueden ser constantes o funciones de x.

El segundo miembro puede ser cero ó diferente de cero. Si es diferente de cero, puede ser una constante ó una función de x.

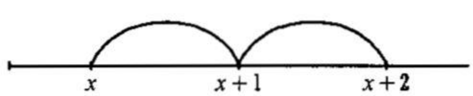
El ORDEN de una ecuación lineal, se identifica por el número de períodos ó saltos que ha dado la variable independiente.

Por ejemplo:

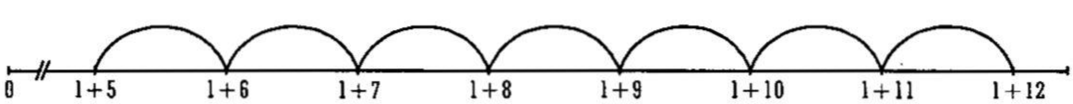
a) De y_{x+2} a y_{x+5}, la variable x ha dado $(x+5)-(x+2)=3$ saltos



b) De y_x a y_{x+2}, la variable x ha dado "2" saltos.



c) Si "t" es la variable independiente tiempo, entonces si tenemos la variación de y_t de y_{t+5} a y_{t+12}, diremos que el tiempo ha variado $12-5=7$ períodos.



Estos 7 períodos pueden ser 7 semanas, 7 meses ó 7 años. Esto dependerá con que datos estamos trabajando.

A continuación formalicemos estos ejemplos e ideas que nos hemos dado acerca de las ecuaciones lineales en diferencias.

2.3. DEFINICIÓN

Una ecuación en diferencia, se dice que es LINEAL, cuando es de la forma:

I. $a_0(x)y_{x+n}+a_1(x)y_{x+n-1}+a_2(x)y_{x+n-2}+\ldots+a_{n-1}(x)y_{x+1}+a_ny_x=b(x)$

Donde: $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ y b son funciones de x definidas para $x=0,1,2,3,\ldots$

Casos:

CASO 1 Si el miembro $b(x)\neq 0$, diremos que (I) es una ecuación lineal en diferencia no homogénea.

CASO 2 Si $b(x)=0$, diremos que (I) es una ecuación lineal en diferencias homogéneas.

CASO 3 Si $b(x)\neq 0 \ \wedge \ a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ son constantes, diremos que (I), es una ecuación lineal en diferencias no homogénea con coeficientes constantes.

CASO 4 Si $b(x)=0 \wedge$ los coeficientes $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ son constantes diremos que (I) es una ecuación lineal en diferencias homogénea con coeficientes constantes.

2.3.1. ORDEN DE UNA ECUACIÓN LINEAL EN DIFERENCIAS

Si en la ecuación (I) $a_0\neq 0 \wedge a_n\neq 0$, diremos que "$n$" es el orden de la ecuación ó que la ecuación (I) es la orden "n".

Si $a_n=0$, entonces el orden de la ecuación se halla restando los subíndices:

$$(x+n)-(x+k)=n-k$$

Ejemplos:

Cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias es lineal y del orden indicado:

$y_{t+3}+2y_{t+2}-y_{y+1}-2y_t=2x$	orden 3
$5y_{t+3}-2y_{t+1}=0$	orden 2, pues $(t+3)-(t+1)=2$
$bP_t-dP_{t-1}=c-a$	orden 1, pues $t-(t-1)=1$
$2^x y_{x+2}-3_x y_x=5x$	orden 2.

Observación:

Como la ecuación lineal en diferencias de orden "n" es de la forma:

I) $a_0(x)y_{x+n}+a_1(x)y_{x+n-1}+\ldots+a_{n-1}(x)y_{x+1}+a_ny_x=b(x)$
depende de $y_{x+n}, y_{x+n-1},\ldots,y_{x+1},y_x$, se puede expresar implícitamente de la siguiente forma:

II) $f[y_{x+n},y_{x+n-1},\ldots,y_x]=0$, lo cual indica que hay $n+1$ valores de y.
La ecuación (II), también puede expresarse en términos de sus "n" diferencias:

III) $f[\Delta y_x^n,\Delta y_x^{n-1},\ldots,\Delta y_x,y_x]=0$

2.4. SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

a) ***Solución de una ecuación en diferencia.***

Diremos que la función ϕ_x es solución $f[y_{x+n}, y_{x+n-1}, \cdots, y_{x+1}, y_x] = 0$
Si $f[\phi_{x+n}, \cdots, \phi_{x+1}, \phi_x] = 0$. Es decir, ϕ_x es solución de (I), si ϕ_x es una función definida en todo $I\!N$ y satisface a la ecuación (I).

b) ***Solución general.***

ϕ_x es solución general de una ecuación lineal en diferencias de orden "n", si ϕ_x satisface a la ecuación (I) y tiene "n" constantes. La solución ϕ_x es única.

c) ***Condiciones iníciales.***

Supongamos que ϕ_x es la solución general de la ecuación (I) y las "n" constantes que tiene la solución general son: $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Si ϕ_x se define en $x = 0,1,2,\ldots,n-1$ y para cada x existe sus respectivos imágenes $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ tal que: $\phi_0 = k_0$, $\phi_1 = k_1$, $\phi_2 = k_2, \ldots, \phi_{n-1} = k_{n-1}$; las parejas $(0,\phi_0)$, $(1,\phi_1), \ldots, (n-1,\phi_{n-1})$ pertenecientes al grafo de ϕ_x, se llaman CONDICIONES DE FRONTERA (ó condiciones iníciales).

d) ***Solución particular.***

Para cada conjunto $\{(0,\phi_0), (1,\phi_1), \ldots, (n-1,\phi_{n-1})\}$ de condiciones de frontera se hallan valores particulares para las constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$. En este caso diremos que ϕ_x es una solución particular de la ecuación (I)

Ejemplo 01.

a) Demostrar que la función $y_x = C_1 + C_2 2^x + C_3 3^x$ es solución de

$$y_{x+3} - 6y_{x+2} + 11y_{x+1} - 6y_x = 0$$

b) Obtenga una solución particular, dado las condiciones de frontera:

$$y_0 = 1 \quad , \quad y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = -1$$

Solución:

a) De $y_x = C_1 + C_2 2^x + C_3 3^x$ hallaremos y_{x+1} , y_{x+2} , y_{x+3} y sustituir en:

$$\underbrace{y_{x+3} - 6y_{x+2} + 11y_{x+1} - 6y_x}_{f[y_{x+3}, y_{x+1}, y_x]}$$

Si $f[y_{x+3}, y_{x+1}, y_x]$ se convierte en cero, afirmamos que $y_x = \phi_x$ es solución de la ecuación $f[y_{x+3}, y_{x+1}, y_x] = 0$.

Veamos de: $\quad y_x = C_1 + C_2 2^x + C_3 3^x$ obtenemos:

$$y_{x+1}=C_1+C_2 2^{x+1}+C_3 3^{x+1}$$
$$y_{x+2}=C_1+C_2 2^{x+2}+C_3 3^{x+2}$$
$$y_{x+3}=C_1+C_2 2^{x+3}+C_3 3^{x+3}$$

Sustituir en: $f[y_{x+3},y_{x+1},y_x]$

$$[C_1+\underline{C_2 2}^{x+3}+C_3 3^{x+3}]-6[C_1+\underline{C_2 2}^{x+2}+C_3 3^{x+2}]+11[C_1+\underline{C_2 2}^{x+1}+C_3 3^{x+1}]$$
$$-6[C_1+\underline{C_2 2}^{x}+C_3 3^{x}]=\underbrace{(C_1-6C_1+11C_1-6C_1)}_{0}+C_2(2^{x+3}-6.2^{x+2}+11.2^{x+1}-6.2^{2})$$
$$+C_3(3^{x+3}-6.3^{x+2}+11.3^{x+1}-6.3^{x})$$
$$=0+C_2(2^{x+3}-3.2^{x+3}+11.2^{x+1}-3.2^{x+1})+C_3(3^{x+3}-2.3^{x+3}+11.3^{x+1}-2.3^{x+1})$$
$$=C_2(-2.2^{x+3}+8.2^{x+1}) \quad + \quad C_3(-3^{x+1}+9.3^{x+1})$$
$$=C_2\underbrace{(-2^{x+4}+2^{x+4})}_{0} \quad + \quad C_3\underbrace{(-3^{x+3}+3^{x+3})}_{0}$$
$$=0$$

b) En $\quad y_x=C_1+C_2 2^x+C_3 3^x \quad$ tenemos:

$$y_0=C_1+C_2\cdot 2^0+C_3\cdot 3^0=1$$
$$y_1=C_1+C_2\cdot 2+C_3\cdot 3=1$$
$$y_2=C_1+C_2\cdot 2^2+C_3\cdot 3^2=-1$$

Obteniéndose el sistema:

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1) \\ C_1+2C_2+3C_3=1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2) \\ C_1+4C_2+9C_3=-1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3) \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{matrix}(2)-(1): \\ (3)-(1):\end{matrix}\begin{cases} C_2+2C_3=0 \ -\text{por}-\ 3: \\ 3C_2+8C_3 0-2 \dots\dots\dots(4) \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{-3C_2}-6C_3=0 \\ \cancel{3C_2}+8C_3=-2 \end{cases}$$
$$2C_3=-2$$
$$\boxed{C_3=-1}$$

Sustituir en (3): $C_2+2(-1)=0$

$$\boxed{C_2=2}$$

Sustituir en (1): $\quad C_1+2-1=1$

$$\boxed{C_1=0}$$

Por tanto, la solución particular será:

$$\phi_x = 0 + 2 \cdot 2^x - 3x$$

$$\phi_x = 2^{x+1} - 3^x$$

Ejemplo 02.

Demostrar que $y_x = \frac{C}{1+cx}$ es solución de $y_{x+1} = \frac{y_x}{1+y_x}$ y obtener una solución particular dada la condición inicial $y_0 = -4$.

***Solución*:**

a) De: $y_x = \frac{C}{1+cx}$ obtenemos:

$$y_x + 1 = \frac{C}{1+(c+1)}$$

Sustituir y_x y y_{x+1} en la ecuación en diferencia:

$$y_{x+1} = \frac{y_x}{1+y_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{1+c(x+1)} = \frac{\frac{c}{1+cx}}{1+\frac{c}{1+cx}}$$

$$= \frac{c}{1+cx+c}$$

$$= \frac{c}{1+c(x+1)}$$, lo cual es una identidad, esto prueba que:

$y_x = \frac{c}{1+cx}$ es solución de (α).

b) Si en $y_x = \frac{c}{1+cx}$ hacemos $y_0 = -4$, obtenemos:

$$y_0 = \frac{c}{1+(0)} = -4$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{c = -4}$$

Luego, la solución particular será: $y_x = \frac{-4}{1-4x} = \frac{4}{4x-1}$

2.5. ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN

Una ecuación lineal en diferencias de primer orden, es de forma:

$$a_0(x)y_{x+1} + a_1(x)y_x = b(x) \ , \ x = 0,1,2,3, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (*)$$

$$\boxed{y_{x+1} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} + \frac{b(x)}{a_0(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (**)$$

donde los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$ son funciones de x diferentes de cero y el segundo miembro $b(x)$ también es función de x.

Casos:

CASO 1: Si $b(x) \neq 0$, diremos que (*) es no homogénea.

CASO 2: Si $b(x) = 0$, diremos que (*) es homogénea.

CASO 3: Si los coeficientes $a_0(x)$ y $a_1(x)$ son constantes, diremos que (*) es una ecuación de coeficientes constantes.

CASO 4: Si $a_0(x)$ al, $a_1(x)$ y $b(x)$ son constantes, entonces la ecuación (**) se convierte en: $y_{x+1} = Ay_x + 8$, con $A \neq 0$.

2.5.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN: $y_{x+1} = Ay_x + B$, $A \neq 0$.

La solución de $\boxed{y_{x+1} = Ay_x + B \quad x = 0,1,2,\ldots}$ se halla por INDUCCIÓN (forma recursiva)

Veamos:

Si $x = 0 \Rightarrow y_1 = Ay_0 + B$

Si $x = 1 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} y_2 &= Ay_1 + B \\ &= A(Ay_0 + B) + B \\ &= A^2 y_0 + Ab + B \end{aligned}$$

Si $x = 2 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} y_3 &= Ay_2 + B \\ &= A(A^2 y_0 + AB + B) + B \\ &= A^3 y_0 + A^2 B + AB + B \end{aligned}$$

Si $x = 3 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} y_4 &= Ay_3 + B \\ &= A(A^3 + y_0 + A^2 B + AB + B) + B \\ &= A^4 y_0 + A^3 B + A^2 B + AB + B \\ &= A^4 y_0 + B(A^3 + A^2 + A + 1) \\ &= A^4 y_0 + B(1 + A + A^2 + A^3) \end{aligned}$$

$$y_x = A^x y_0 + B\underbrace{(1 + A + A^2 + \ldots + A^{x-1})}_{\frac{1-A^x}{1-x}} \qquad \ldots\ldots \quad (4*)$$

$y_x = A^x y_0 + B\dfrac{1-A^x}{1-A}$	$x = 0,1,2,3,\ldots$
Regla de correspondencia de la solución	Dominio

Si en (4*) se tiene $A = 1$, entonces:

$$y_x = 1^x \cdot y_0 + B\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{x \text{ veces uno}}$$

$$y_x = y_0 + Bx$$

Conclusión: La solución de la ecuación $y_{x+1} = Ay_x + B$, es:

$$y_x = \begin{cases} y_0 + Bx \\ A^x + y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A} \end{cases}$$

Si $A = 1$, $x = 0,1,2,3,\ldots$

Si $A \neq 1$, $x = 0,1,2,3,\ldots$

(4*)

Ejemplos:

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $3y_{x+1} = 2y_x + 3$

2) $y_{x+1} + 3y_x = 0$

3) $y_{x+1} - y_x - 10 = 0$, $y_0 = 2$

4) $8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}$

5) $3y_{x+1} - 2y_x - 3 = 0$, $y_0 = 5$

6) $y_{x+1} = 3y_x - 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$

7) $2y_{x+1} - y_x = 2$, $y_0 = 4$

8) $7y_{x+1} + 2y_x - 7 = 0$, $y_0 = 1$

Solución:

1) $3y_{x+1} = 2y_x + 3$

$\Rightarrow$ $y_{x+1} = \frac{2}{3}y_x + 1$, tenemos $\begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = 1 \end{cases}$

Como $A \neq 1$, la solución es: $$y_x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 y_0 + 1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\frac{2}{3}}\right]$$

$$y_x = \left(\frac{2}{3}\right)^x y_x + 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]$$

$y_x = \left(\frac{2}{3}\right)^x (y_0 - 3) + 3$	$x = 0,1,2,\ldots$

2) $y_{x+1} + 3y_x = 0$

$\Rightarrow$ $y_{x+1} = -3y_x$, tenemos $\begin{cases} A = -3 \\ B = 0 \end{cases}$

Como $A \neq 1$, la solución es: $$y_x = (-3)^x + 0\left[\frac{1-(-3)^x}{1-(-3)}\right]$$

$y_x = (-3)^x y_0$	$x = 0,1,2,3,\ldots$

3) $y_{x+1} - 10 = 0 - y_x \; , \; y_0 = 2$

$$\Rightarrow \quad y_{x+1} = y_x + 10 \text{, donde } \begin{cases} A = 1 \\ B = 10 \end{cases}$$

Como $A = 1$, entonces la solución es: $y_x = y_0 + 10x$, $x = 0,1,2,3,\ldots$

Como $y_0 = 2$, entonces: $\boxed{y_x = 2 + 10x \;\Big|\; x = 0,1,2,3,\ldots}$

4) $8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0 \; , \; y_0 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 8y_{x+1} = -4y_x + 3$$

$$\Rightarrow \quad y_{x+1} = -\tfrac{1}{2} y_x + \tfrac{3}{8} \text{, donde } \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Como $A \neq 1$, entonces la solución es:

$$y_x = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x y_0 + \tfrac{3}{8}\left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x y_0 + \tfrac{1}{4}\left[1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x\right]$$. Como $y_0 = \frac{1}{2}$, entonces:

$$y_x = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\left[1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x\right]$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

$$\boxed{y_x = \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x \tfrac{1}{4} \;\Big|\; x = 0,1,2,3,\ldots}$$

5) $3y_{x+1} - 2y_x - 3 = 0$, $y_0 = 5$

$$\Rightarrow \quad 3y_{x+1} = 2y_x + 3$$

$$y_{x+1} = \tfrac{2}{3} y_x + 1 \text{, donde } \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = 1 \end{cases}$$

Como $A \neq 1$, la solución es:

$$y_x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x y_0 + 1\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \frac{2}{3}}\right]$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}\right)^x y_0 + 3\left[1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right]$$. Como $y_0 = 5$, tendremos:

$$y_x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x (5) + 3 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^x$$

$\boxed{y_x = 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 3 \;\Big|\; x = 0,1,2,3,\ldots}$ (El gráfico: ver anexo)

6) $y_{x+1} = 3y_x - 1 \quad , \quad y_0 = \frac{1}{2}$, se tiene $\begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$

Como $A \neq 1$, entonces la solución es:

$$y_x = (3)^x y_0 - \left[\frac{1-3^x}{1-3}\right]. \text{ Como } y_0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y_x = 3^x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1-3^x]$$

$$y_x = \frac{1}{2}(3^x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3^x)$$

$$\boxed{y_x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Es constante}} \quad \Big| \quad x = 0,1,2,\ldots}$$

2.5.2. CASOS ESPECIALES DE LA ECUACIÓN: $y_{x+1} = Ay_x + B$

Dado la función $y : I\!N \longrightarrow I\!R$, hemos definido la PRIMERA.

$$x \longrightarrow y_x$$

diferencia de la función y_x, como: $\boxed{\Delta y_x = y_{x+1} - y_x}$

Teniendo en cuenta esta definición, se presentan tres casos especiales de ecuaciones en diferencia de primer orden, estos casos son:

1) $\underbrace{\text{La diferencia de primer orden}}_{y_{x+1} - y_x} \text{ es } = \underbrace{\text{una constante}}_{B}$

La solución de: $\quad y_{x+1} - y_x = B$

$$y_x + 1 = y_x + B, \text{ donde } A = 1 \text{ es: } \boxed{y_x = y_0 + B \quad \Big| \quad x = 0,1,2,\ldots}$$

2) $\underbrace{\text{La diferencia de primer orden}}_{y_{x+1} - y_x} \quad \underbrace{\text{es proporcional a la variable } y_{x+1}}_{= \alpha y_{x+1}}$ al período anterior

La solución de $\quad y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} \quad , \; \alpha \neq 0$

$$y_{x+1} - \alpha y_{x+1} = y_x$$

$$(1-\alpha) y_{x+1} = y_x$$

$$y_{x+1} = \frac{1}{1-\alpha} y_x \quad , \text{ donde } \begin{cases} A = \frac{1}{1-\alpha} \\ B = 0 \end{cases}$$

es: $\boxed{y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x y_0 \quad \Big| \quad x = 0,1,2,\ldots}$

3) $\underbrace{\text{La diferencia de primer orden}}$ es $\overbrace{\underbrace{\text{función lineal de la variable}}}^{\text{del período anterior}}$ y_{x+1}

$$y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} + \beta$$

La solución de: $\quad y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} + \beta$

$$y_{x+1} - \alpha y_{x+1} = y_x + \beta$$

$$(a - \alpha) y_{x+1} = y_x +$$

$$y_{x+1} = \left(\tfrac{1}{1-\alpha}\right) y_x + \left(\tfrac{\beta}{1-\alpha}\right) \text{ , donde } \begin{cases} A = \frac{1}{1-\alpha} \\ B = \frac{\beta}{1-\alpha} \end{cases}$$

es: $$y_x = \left(\tfrac{1}{1-\alpha}\right)^x y_x + \left(\tfrac{\beta}{1-\alpha}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x}{1 - \frac{1}{1-\alpha}} \right]$$

$y_x = \left(\tfrac{1}{1-\alpha}\right)^x y + \frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\tfrac{1}{1-\alpha}\right)^x - 1\right]$	$x = 0,1,2,\dots$

2.5.3. COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN $y_{x+1} = Ay_{x+B}$

En 4.1.1, obtuvimos que la solución de la ecuación $y_{x+1} = Ay_x + B$, es una de los siguientes formas:

a) Si $A = 1$, la solución es

$y_x = y_0 + B_x$	$x = 0,1,2,\dots$

b) Si $A \neq 1$, la solución es

$y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$	$x = 0,1,2,\dots$

Las soluciones obtenidas en a) y en b) son sucesiones de números reales, es decir son funciones de $I\!N$ en $I\!R$.

En la solución a)

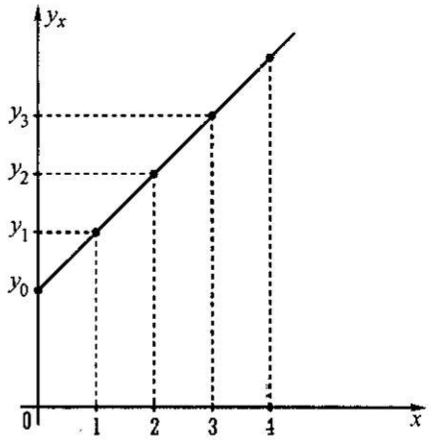
$y_x = y_0 + Bx$	$x = 0,1,2,\dots$

La correspondencia es:

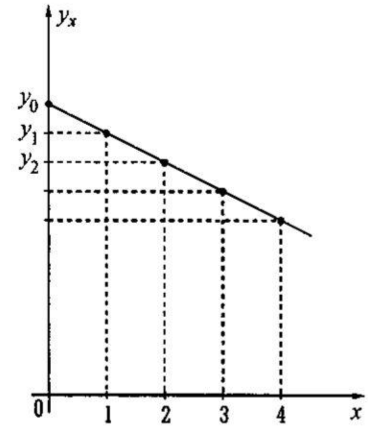
$$\begin{array}{lll}
\text{Si } x = 0 & \Rightarrow & y_0 = y_0 \\
\text{Si } x = 1 & \Rightarrow & y_1 = y_0 + B \\
\text{Si } x = 2 & \Rightarrow & y_2 = y_0 + 2B \\
\text{Si } x = 3 & \Rightarrow & y_3 = y_0 + 3B \\
\quad \vdots & & \\
\quad x = n & \Rightarrow & y_n = y_0 + nB
\end{array}$$

Los puntos: $(0, y_0)$, $(1, y_0+B)$, $(2, y_0+2B)$, ... pertenecen al conjunto $\{(x,y_x) / y_x = y_0 + B_x\}$ que es el GRAFO de la función $y_x = y_0 + Bx$.

Visto en el plano cartesiano los puntos de la gráfico de la función $y_x = y_0 + Bx$ están en una línea recta pendiente B y con intercepto " y_0 " en el eje de las ordenadas.



Es el caso: $B > 0$ (pendiente positiva)
La función $y_x = y_0 + Bx$ es creciente.



Es el caso: $B < 0$ (pendiente negativa)
La función $y_x = y_0 + Bx$ es decreciente.

En la función b) $\boxed{y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A} \quad x = 0,1,2,3,\ldots}$

La correspondiente es:

Si $x = 0 \Rightarrow y_0 = A^0 + B\frac{1-A^0}{1-A}$

$= y_0 + \frac{B}{1-A} \longleftarrow$ Es el intercepto con el eje de los ordenadas.

Si $x = 1 \Rightarrow y_1 = A y_0 + B\frac{1-A}{1-A}$

$= Ay_0 + B$

Si $x = 2 \Rightarrow y_2 = A^2 + B\frac{1-A^2}{1-A}$

$= A^2 y_0 + B(1+A)$

$\vdots$

Si $x = n \Rightarrow y_n = A^n y_0 + B\frac{1-A^n}{1-A}$

Como $y_n = A^n y_0 + B\frac{1-A^n}{1-A}$, es una sucesión de números reales, nos interesa saber en qué casos es: convergente, divergente u oscilante. Es decir, nos interesa estudiar el comportamiento de la sucesión (y_n) que es solución de la ecuación $y_{x+1} = A y_x + B$ cuando $A \neq 1$.

La convergencia de la sucesión: $y_n = A^n y_0 + B\frac{1-A^n}{1-A}$ dependerá del término A^n.

Casos:

1) Si $0 < A < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} A^n = 0$

En este caso decimos que la sucesión (A^n) es monótona convergente.

2) Si $-1 < A < 0$, entonces $\lim_{n \to \infty} A^n = 0$

En este caso decimos que la sucesión (*A*) es oscilante - convergente.

3) Si $|A| > 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} A^n = +\infty$

En este caso decimos que la sucesión (A^n) es divergente.

4) Si $A = -1$, entonces la sucesión $(A^n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ es finitamente oscilante - divergente.

5) Si $A < -1$, entonces la sucesión (A^n) es infinitamente oscilante - divergente.

De todos estos casos, las más importantes son las convergentes.

2.5.3.1.. COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$

Que es la solución de la ecuación $y_{x+1} = A y_x + B$ cuando $A \neq 1$.

Casos:

CASO 1: Si $0 < A < 1 \Rightarrow$ $\lim_{x \to \infty}\left[A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}\right] = 0 \cdot y_0 + B\frac{1-0}{1-A}$

$$= \frac{B}{1-A}$$

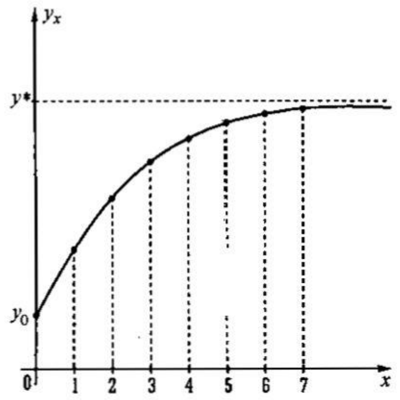
Lo cual indica que la función $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$, $A \neq 1$ converge al número real $y^* = \frac{B}{1-A}$, si $0 < A < 1$.

Teniendo en cuenta la convergencia de la función y_x y su monotonía (creciente o decreciente) podemos representar en un gráfico el comportamiento de y_x que es la solución de $y_{x+1} = A y_x + B$.

Así tendremos:

a) Si $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$, $A \neq 1$

Converge al número real $y^* = \frac{B}{1-A}$ y es creciente, entonces el gráfico de y_x, es:



Si y_x es creciente se cumple:

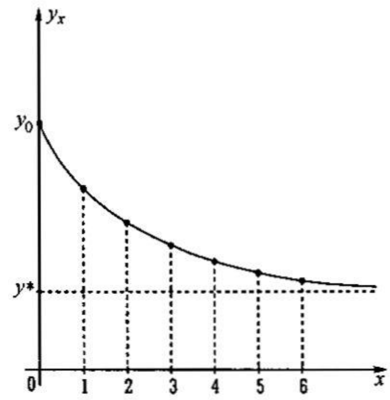
$$y_x < y^* \quad , \quad \forall\, x \in I\!N$$

Es decir: $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y^*$

En la gráfica apreciamos que los puntos y_n cuando $n \to +\infty$, se acercan a la recta horizontal $y = y^*$.

b) Si $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$, $A \neq 1$

Converge al número real $y^* = \frac{B}{1-A}$ y es decreciente, entonces el gráfico de y_x es:



Si y_x es decreciente se cumple:

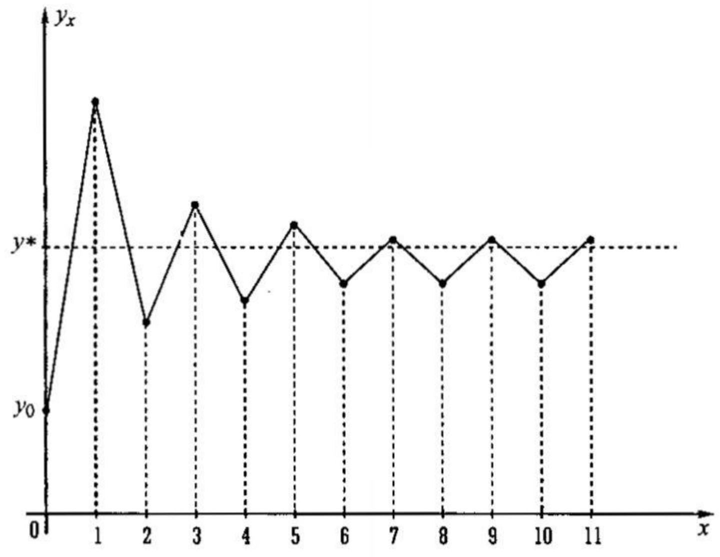
$$y^* < y_x \;\; ; \;\; \forall\, x \in I\!N$$

Es decir: $y^* < \ldots y_n < y_{n-1} < \ldots y_1 < y_0$

En la gráfica apreciamos que los puntos y_n cuando $n - +\infty$, se acercan a la recta horizontal $y = y^*$.

CASO 2: Si: $-1 < A < 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}\left[A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}\right] = 0 \cdot y_0 + B\frac{1-0}{1-A} = \frac{B}{1-A}$

Lo cual indica, que la función $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$, converge **OSCILANDO** hacia el número real $y^* = \frac{B}{1-A}$ si $-1 < A < 0$.



En la gráfica podemos apreciar que los puntos y_n **OSCILAN** (suben y bajan) alrededor de la recta horizontal $y = y^*$.

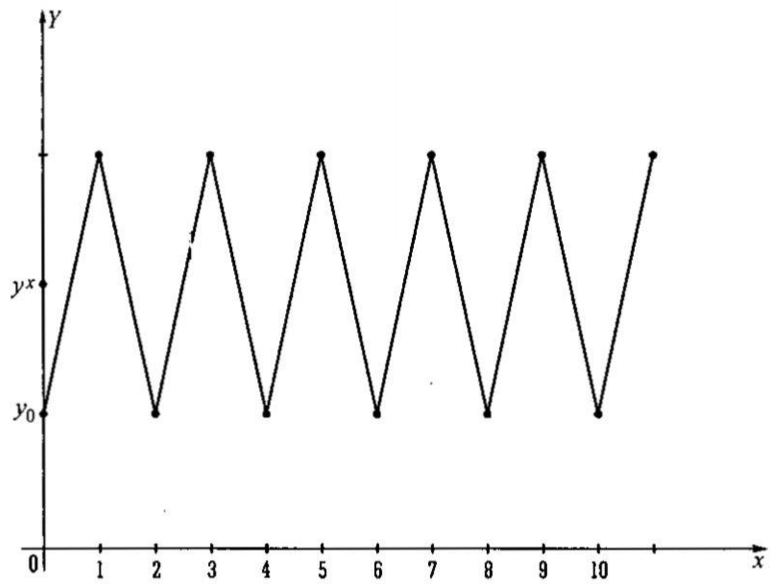
Cuando $n \to +\infty$, los puntos y_n convergen al número y^*.

CASO 3: Si $A = -1 \Rightarrow$ la función solución $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$ se convierte en:

$$y_x = (-1)^x y_0 + B\frac{1-(-1)^x}{1-A}$$

$$y_x = \begin{cases} y_0\text{, si } x \text{ es par} \\ -y_0 + \frac{2B}{1-A}\text{, si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

En este caso la función y_x diverge y oscila finitamente.



En la gráfica podemos apreciar que los puntos de la sucesión y_x están a la misma altura tanto para la "x" pares e impares.

Se dice que diverge porque los puntos y_x no se acercan a ningún número real cuando $x \to +\infty$.

Se dice que la función y_x oscila finitamente porque la distancia entre los y_x, $\forall x \in I\!N$ es una <u>constante</u>.

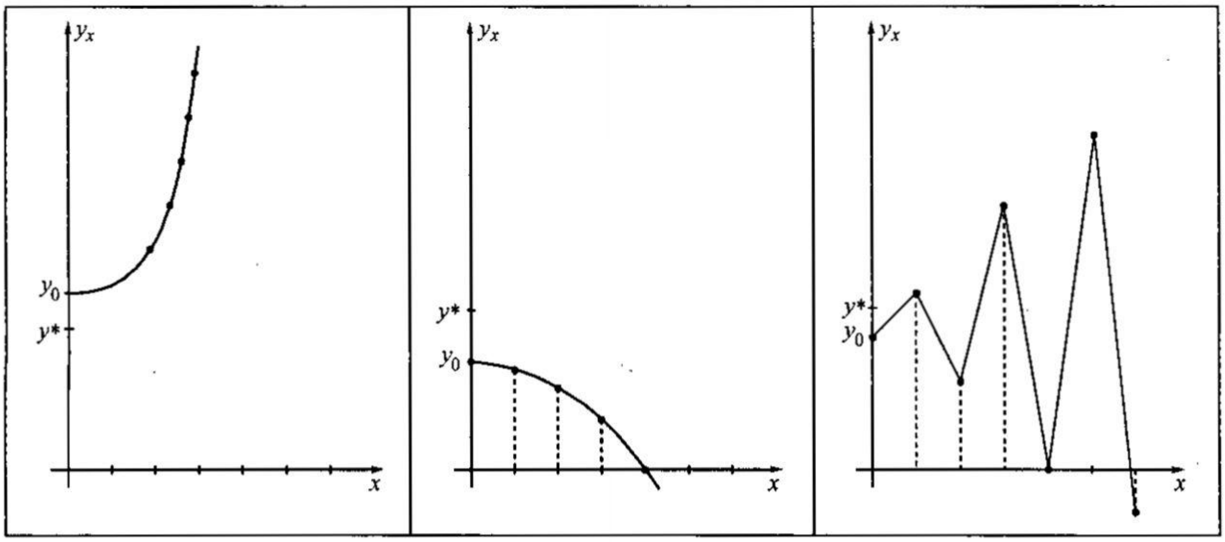
CASO 4: Si $|A| > 1 \iff A < -1 \vee A > 1$, entonces $y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}$ es divergente.

Subcasos:

a) Si $A > 1 \wedge y_x$ es monótona creciente, entonces y_x diverge en $+\infty$. Ver fig. 1

b) Si $A > 1 \wedge y_x$ es monótona decreciente, entonces y_x diverge en $-\infty$. Ver fig. 2.

c) Si $A < -1 \wedge y_0 \neq y^*$, entonces y_x DIVERGE OSCILANDO INFINITAMENTE. Ver fig. 3.



2.5.3.2. TEOREMA

La ecuación en diferencias lineal y de primer orden de la forma:

$y_{x+1} = Ay_x + B$, $x = 0,1,2,\ldots$ tienen como solución:

a) $\boxed{y_x = y_0 + Bx \mid x = 0,1,2,\ldots}$, si $A = 1$

b) $\boxed{y_x = A^x(y_0 - y^*) + y^* \mid x = 0,1,2,\ldots}$, si $A \neq 1$

Donde: $y^* = \frac{B}{1-A}$, si $|A| < 1$

2.5.4. EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

a) **VALOR DE EQUILIBRIO Ó VALOR ESTACIONARIO** de y_x.
Si una ecuación lineal en diferencia de primer orden tiene como solución una función constante $y_x = y^*$, y^* es constante; diremos que el valor y^* se llama **VALOR DE EQUILIBRIO ó VALOR ESTACIONARIO** de y_x.

b) Si la solución de una ecuación en diferencia de primer orden converge al número y^* cuando $x \to +\infty$, diremos que el valor de equilibrio y^* es estable ó que existe **ESTABILIDAD PERFECTA DE PRIMERA CLASE.**
Salvo que existan condiciones iníciales que hagan desplazar al valor de equilibrio y^*, podríamos decir que NO existe estabilidad perfecta.

2.5.4.1. TEOREMA

Para la ecuación en diferencias lineal de primer orden: $y_{x+1} = Ay_x + B$, un ***valor de equilibrio*** de la función solución y_x está dado por $y^* = \frac{B}{1-A}$, si $A \neq 1$ y el valor y^* es **ESTABLE** sólo cuando $|A| < 1$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias, determinar el comportamiento de la solución y calcule los primeros valores de la sucesión solución.

1) $8y_{x+1}+4y_x-3=0$, $y_0=\frac{1}{2}$

2) $3y_{x+1}-2y_x-3=0$, $y_0=4$

3) $2y_{x+1}-y_x=2$, $y_0=4$

4) $3y_{x+1}-2y_x-6=0$, $y_0=4$

***Solución de 1*:**

La solución de $8y_{x+1}+4y_x-3=0$

$$y_{x+1}=-\tfrac{1}{2}y_x+\tfrac{3}{8} \text{ , donde } \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{3}{8} \end{cases}$$

Es:
$$y_x=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x y_0+\tfrac{3}{8}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^x}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$y_x=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x y_0+\tfrac{1}{4}\left[1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x\right].$$ Si $y_0=\frac{1}{2}$ se tiene:

$$y_x=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x\left(\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

$$\boxed{y_x=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^x+\tfrac{1}{4} \quad \Big| \quad x=0,1,2,\ldots}$$ (ver gráfico en apéndice)

es una función oscilante

Si $x\to+\infty$, entonces y_x converge al número real $y^*=\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{4}$

$$\boxed{y^*=\tfrac{1}{4}}$$

Porque la solución y_x es oscilante y convergente decimos que es **OSCILARIA AMORTIGUADA.**

$y_x=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{4}$, entonces:

$$y_0=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^0+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{2}$$

$$y_1=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^1+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{8}$$

$$y_2=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{16}$$

$$y_3=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3+\tfrac{1}{4}=\tfrac{7}{32}$$

$$y_4=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^4+\tfrac{1}{4}=\tfrac{17}{64}$$

$\vdots$

***Solución de 2*:**

La solución de $3y_{x+1} - 2y_x - 3 = 0 \;\; , \; y_0 = 5$

$$y_{x+1} = \tfrac{2}{3} y_x + 1 \;\; , \text{ donde } \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = 1 \end{cases}$$

Es: $$y_x = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x y_0 + \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\frac{2}{3}} \;\; , \text{ donde } y_0 = 5 .$$

$$y_x = 5\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + \left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right]$$

$$y_x = 5\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 3 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^x$$

$$\boxed{y_x = 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 3 \;\; , \; x = 0,1,2,3,\ldots}$$

Es una función decreciente, porque $y^* < y_x \;\; , \; \forall\, x \in I\!N$.

Cuando x tiende a $+\infty$, entonces y_x tiende a: $2(0)+3$.

Es decir: $\lim\limits_{x\to\infty} \left[2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 3\right] = 2(0)+3 = 3$

Este resultado nos indica que la función y_x converge al punto $y^* = 3$.

***Solución de 3*:**

La solución de: $2y_{x+1} - y_x = 2 \;\; , \; y_0 = 4$

$$y_{x+1} = \tfrac{1}{2} y_x + 1 \;\; , \text{ donde } \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$$

Es: $$y_x = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x y_0 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1-\frac{1}{2}} \;\; , \text{ donde } y_0 = 4 .$$

$$y_x = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + 2\left[2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^x\right]$$

$$y_x = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + 2 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

$$\boxed{y_x = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + 2 \;\; , \; x = 0,1,2,3,\ldots}$$

Es una función monótona decreciente, porque $y^* < y_x \;\; , \; \forall\, x \in I\!N$

Hallemos el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} y_x = 2(0)+2$

$= 2$

Este caso nos indica que la función y_x converge al número $y^* = 2$.

***Solución de 4*:**

La solución de $3y_{x+1} - 2y_x - 6 = 0 \quad , \quad y_0 = 4$

$$y_{x+1} = \tfrac{2}{3} y_x + 2 \quad , \text{ donde } \begin{cases} A = \tfrac{2}{3} \\ B = 2 \end{cases}$$

Es: $$y_x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x y_0 + 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\frac{2}{3}} \quad , \text{ donde } y_0 = 4$$

$$y_x = 4\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 6\left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right]$$

$$y_x = 4\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 6 - 6\left(\tfrac{2}{3}\right)^x$$

$$\boxed{y_x = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 6 \ , \ x = 0,1,2,\ldots}$$ *Es una función monótona creciente.*

Hallemos el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} y_x = -2(0)+6$

$= 6$

Este resultado nos indica que la función solución y_x converge al número $y^* = 6$.

Algunos valores de la función:

$$y_x = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^x + 6 \quad , \quad x = 0,1,2,3,\ldots$$

Si: $x = 0 \longrightarrow y_0 = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^0 + 6$

$y_0 = 4$

Si: $x = 1 \longrightarrow y_1 = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^1 + 6$

$y_1 = \tfrac{14}{3}$

Si: $x = 2 \longrightarrow y_2 = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 6$

$y_2 = \tfrac{46}{9}$

Si: $x = 3 \longrightarrow y_3 = -2\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 6$

$y_3 = \tfrac{146}{27}$

$\vdots$

$x \to +\infty \Rightarrow y_x \to 6$

Por tanto, el GRAFO de y_x es: $Gr(y_x) = \left\{(0,4), \left(1,\tfrac{14}{3}\right), \left(2,\tfrac{46}{9}\right), \left(3,\tfrac{146}{27}\right), \ldots\right\}$

- Ver en tablas de contenido, el comportamiento de las soluciones (pág. 82)

2.6 EL MODELO DE LA TELARAÑA

Si consideramos la cantidad ofertada Q_{st} del período t como función que depende del precio del período anterior $Q_{st} = -c + dP_{t-1}$ y la cantidad demandada Q_{dt} como función del precio en el mismo período $Q_{dt} = a - bP_t$, entonces el modelo de la telaraña está dado por:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} Q_{dt} = Q_{st} & \\ Q_{dt} = a - bP_t & (a, b > 0) \\ Q_{st} = -c + dP_{t-1} & (c, d > 0) \end{cases}$$

Este modelo se adecua para productos perecederos, tales como el tomate o la papa, puesto que estos productos no se pueden almacenar, porque se malogran.

Es por eso que los agricultores están atentos del precio del producto del período anterior: si el precio es bueno, entonces para el siguiente período deben aumentar la producción o al revés si el precio en este período es bajo, entonces no conviene aumentar la producción.

En este contexto, a medida que aumenta el período se puede aproximar al precio de equilibrio o puede alejarse del precio de equilibrio.

2.6.1. SOLUCIÓN DEL MODELO DE LA TELARAÑA

Por la condición de equilibrio $Q_{dt} = Q_{st}$ (cantidad demandada en el período t es igual a la cantidad ofertada en el períodos t), se obtiene la ecuación en diferencias:

$$a - bP_t = -c + dP_{t-1}$$

ordenando:

$$bP_t + dP_{t-1} = a + c$$

Vamos a analizar esta ecuación y desplazar el período "t" a "$t+1$".

Así: $bP_{t+1} + dP_t = a + c \quad , \quad b \neq 0$

Por $\frac{1}{b}$: $P_{t+1} + \frac{d}{b}P_t = \frac{a+c}{b}$ .... (1)

La solución de (II) es:

$$P_t = A\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{\frac{a+c}{b}}{1 + \frac{d}{b}}$$

$$P_t = A\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d} \quad \text{...} \quad (2)$$

Para hallar A, consideremos la condición inicial $P_t = P_0$

Al sustituir en (2):

$$P_0 = A + \frac{a+c}{b+d}$$

$$A = P_0 - \frac{a+c}{b+d} \quad \text{...} \quad (3)$$

Sustituir (3) en (2):

$P_t = \left[P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right]\left(-\frac{b}{d}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$ $t = 0,1,2,3,\ldots$	$b \neq 0$ $b+d \neq 0$

- La ecuación particular es $P_t = \frac{a+c}{b+d}$, $b+d \neq 0$.

- Si hacemos $\frac{a+c}{b+d} = \bar{P}$, entonces la solución es:

$P_t = [P_0 - \bar{P}]\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \bar{P}$	$t = 0,1,2,\ldots$

.... (4)

Merece analizar tres aspectos:

En primer lugar, considerar a $\bar{P}$ como el precio de equilibrio intertemporal del modelo.

En segundo lugar, el coeficiente $(P_0 - \bar{P})$ puede ser positivo o negativo.

Si $P_0 - \bar{P}$ es positivo, $\bar{P}$ está debajo de P_0.

Si $P_0 - \bar{P}$ es negativo, $\bar{P}$ está encima de P_0.

En tercer lugar el comportamiento de la trayectoria depende de valor del término $-\frac{d}{b}$:

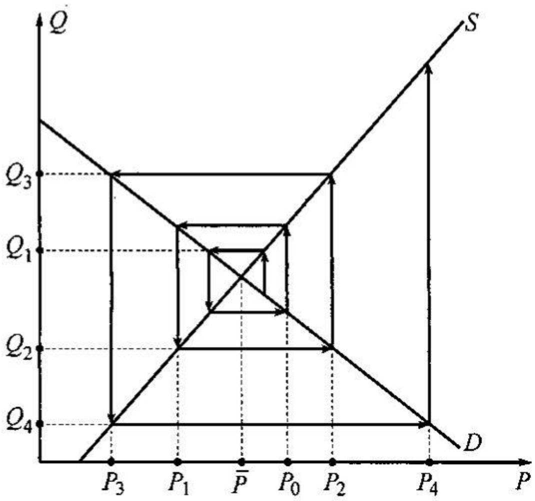
Si $\frac{d}{b} > 1$, la oscilación de la trayectoria es explosiva.

Si $\frac{d}{b} = 1$, la oscilación en uniforme.

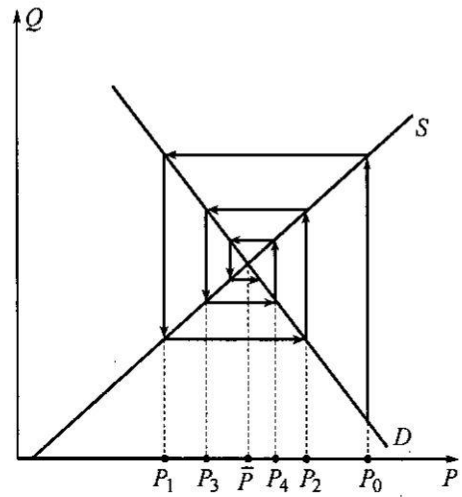
Si $\frac{d}{b} < 1$, la oscilación es amortiguada.

2.6.2. GRAFICO DE LA TELARAÑA

El gráfico de la telaraña para $d > b$ y para $d < b$ son, respectivamente:



$d > b$
(*S* es más empinada que *D*)



$d < b$
(*S* es menos empinada que *D*)

- En el gráfico a) los precios P_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ se alejan del precio de equilibrio $\overline{P}$.

  En este caso: $\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = +\infty$

- En el gráfico b) los precios P_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ se acercan al precio de equilibrio $\overline{P}$.

  En este caso: $\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = \overline{P}$

2.7. UN MODELO DE MERCADO CON INVENTARIO

En el modelo de la telaraña, los productos perecederos no se pueden almacenar, o en su defecto si se almacenan no se llevan ningún inventario porque el precio se establece tal que el inventario se vacía en cada período.

Ahora, vamos a construir un modelo en el cual los vendedores llevan un inventario del artículo.

Planteamiento del modelo:

Hagamos tres supuestos:

1. La cantidad demandada Q_{dt} en el período "t" y la cantidad producida Q_{st} en el período "t" son, ambas, funciones del precio P_t en el mismo período "t". Esto es:

$$Q_{dt} = a - bP_t \qquad (a, b > 0)$$

$$Q_{st} = -c + dP_t \qquad (c, d > 0)$$

El inventario es la diferencia $(Q_{st} - Q_{dt})$.

Si $Q_{st} - Q_{dt} > 0$ hay stock, pero si $Q_{st} - Q_{dt} < 0$, hay escasez.

2. El ajuste de precios depende del mercado para cada período y su variación dependerá del inventario.

Al inicio de cada período, los vendedores establecen un precio para ese período después de considerar la situación del inventario.

Si el inventario es positivo, el precio del período presente se establece a un nivel más bajo que antes, con objeto de que las mercancías se vendan; pero si el inventario es negativo, el precio presente se fija más alto que antes.

3. El ajuste de precios (entre P_{t+1} y P_t) que se hace de período en período es inversamente proporcional al cambio observado en el inventario (existencias), esto es:

$$P_{t+1} - P_t = -\lambda(Q_{st} - Q_{dt}) \quad , \quad \lambda > 0$$

Si $Q_{st} - Q_{dt} > 0$ (hay stock), entonces $P_{t+1} - P_t < 0$, esto es $P_{t+1} < P_t$ el precio posterior "P_{t+1}" debe ser menor que el precio anterior "P_t". Esto ocurre para que el producto almacenado se pueda vender.

Si $Q_{st} - Q_{dt} < 0$ (escasez), entonces $P_{t+1} > P_t$, (el precio para el período posterior debe subir).

Como los tres supuestos, el modo es:

$$\boxed{\begin{array}{lll} Q_{dt} = a - bP_t & & (a,b > 0) \\ Q_{st} = -c + dP_t & & (c,d > 0) \\ P_{t+1} = P_t - \lambda(Q_{st} - Q_{dt}) & , & \lambda > 0 \end{array}}$$

donde λ denota el coeficiente de precios inducido pos las existencias (stock).

2.7.1. SOLUCIÓN DEL MODELO

Si las dos primeras ecuaciones se sustituyen en la tercera ecuación, se obtiene:

$$P_{t+1} = P_t - \lambda[-c + dP_t - a + bP_t]$$

que reduce a: $\boxed{P_{t+1} - [1 - \lambda(b+d)]P_t = \lambda(a+c)}$ .... (1)

La solución de (1) es:

$$P_t = A(1 - \lambda(b+d))^t + \frac{\lambda(a+c)}{1 + [-1 + \lambda(b+d)]}$$

$$P_t = A(1 - \lambda(b+d))^t + \frac{a+c}{b+d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La constante A se obtiene la condición inicial $P_t = P_0$

En (2): $P_0 = A + \frac{a+c}{b+d}$

$$A = P_0 - \frac{a+c}{b+d}$$

haciendo $\frac{a+c}{b+d} = \overline{P}$, tendremos: $A = P_0 - \overline{P}$

Entonces, la solución se puede expresar como:

$P_t = (P_0 - \overline{P})[1-\lambda(b+d)]^t + \overline{P}$	$t = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

La estabilidad dinámica del modelo dependerá de la expresión $[1-\lambda(b+d)]$

CASOS:

CASO 1. Si $0 < 1-\lambda(b+d) < 1$, P_t es estable y $\lim_{t\to+\infty} P_t = \overline{P}$

CASO 2. Si $-1 < 1-\lambda(b+d) < 0$, P_t es oscilante-estable y $\lim_{t\to+\infty} P_t = 0$

CASO 3. Si $1-\lambda(b+d) > 1$, P_t es explosiva.

CASO 4. Si $1-\lambda(b+d) < -1$, P_t es oscilante explosiva.

CASO 5. Si $1-\lambda(b+d) = 1$, P_t es uniforme.

CASO 6. Si $1-\lambda(b+d) = -1$, P_t es oscilante uniforme.

Ejemplo 01.

Dadas la oferta y la demanda para el modelo de la telaraña que sigue, encuentre el precio de equilibrio intertemporal, y si el equilibrio es estable:

$$Q_{dt} = 22 - 3P_t$$
$$Q_{st} = -2 + P_{t-1}$$

Solución:
Para la condición de equilibrio:

$$Q_{dt} = Q_{st}$$
$$22 - 3P_t = -2 + P_{t-1}$$
$$3P_t + P_{t-1} = 29$$
$$P_t + \tfrac{1}{3}P_{t-1} = 8$$

La solución es: $P_t = A\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{8}{1+\frac{1}{3}}$

$$\boxed{P_t = A\left(-\tfrac{1}{3}\right)^t + 6 \quad , \quad t = 0, 1, 2, 3, ...}$$

Analizando la solución:

a) Porque $-1 < -\frac{1}{3} < 0$, P_t es oscilante-estable..

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = 6$

c) Para $P_0 = 8$, $P_t = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^t + 6$, $t = 0,1,2,...$ (ver gráfico en apéndice)

d) Graficar la telaraña (ver apéndice)

Ejemplo 02.

Resolver: $Q_{dt} = 19 - 6P_t \quad ; \quad Q_{st} = 6P_{t-1} - 5$

Solución:

Por la condición de equilibrio: $Q_{dt} = Q_{st}$

$$19 - 6P_t = 6P_{t-1} - 5$$

$$6P_t + 6P_{t-1} = 24$$

$$P_t + P_{t-1} = 4$$

La solución es: $P_t = A(-1)^t + \frac{4}{1+1}$

$$\boxed{P_t = A(-1)^t + 2 \quad , \quad t = 0, 1, 2, 3, ...}$$

Análisis de la solución:

a) Porque $b = -1$, P_t es oscilante uniforme.

b) $\overline{P} = 2$. (Precio de equilibrio).

c) Para $P_0 = 4$, $P_t = 2(-1)^t + 2$, $t = 0,1,2,3,...$

2.8. ECUACIONES DE DIFERENCIAS NO LINEALES
Método Gráfico Cualitativo.

Las ecuaciones en diferencias de orden uno que no son lineales, tales como:

a) $Y_{t+1} - \sqrt{Y_t} = 2$

b) $Y_{t+1} - \sqrt{Y_t - 3} = 3$

merecen ser analizadas cualitativamente. Para ello, recurrimos al método gráfico para poder confirmar si la solución es estable o no.

2.8.1. DIAGRAMA DE FASE

Las ecuaciones dadas, líneas arriba, pueden representarse mediante la ecuación

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

Así tendremos: a) $y_{t+1} = \sqrt{y_t} + 2$

b) $y_{t+1} = \sqrt{y_t - 3} + 3$

donde f puede ser una función cualquiera que depende de y_t.

El diagrama de fase es la representación gráfica de: dos líneas, el punto de equilibrio E y un conjunto de flechas verticales y horizontales que se acercan al punto E o se alejan de ella.

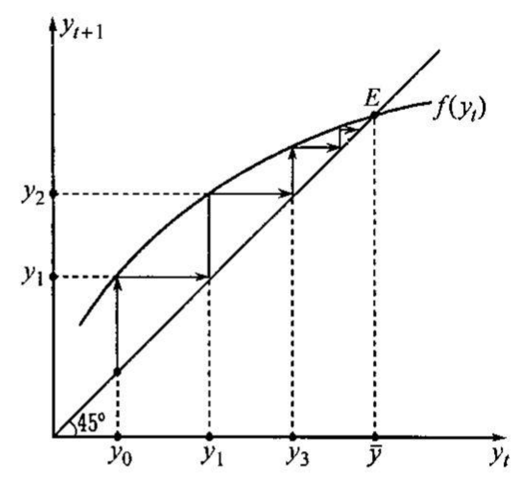
La primera línea es la gráfica de $y_{t+1} = f(y_t)$, la segunda línea es la función identidad $y_t = x_t$.

El punto de equilibrio E, es la intersección de la gráfica de la función identidad con la gráfica de la función $y_{t+1} = f(y_t)$.

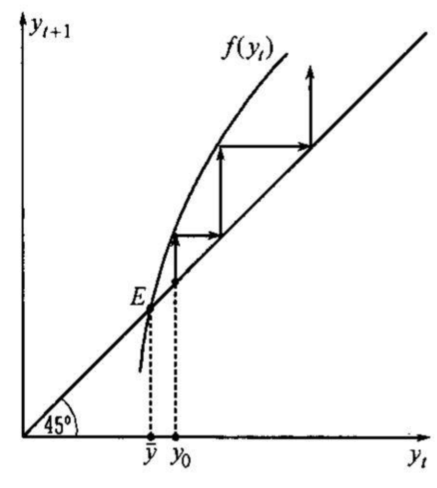
La función $f(y_t)$ puede tener pendiente positiva o pendiente negativa.

Cuando $f(y_t)$ tiene pendiente negativa se produce la telaraña.

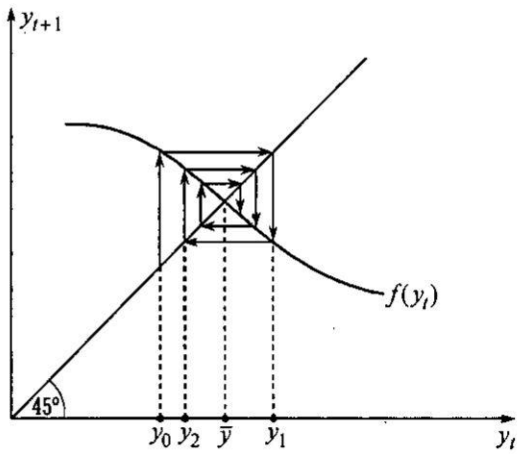
Presentaremos cuatro gráficas y en cada una de ellas se observarán si las flechas se acercan o se alejan del punto de equilibrio.



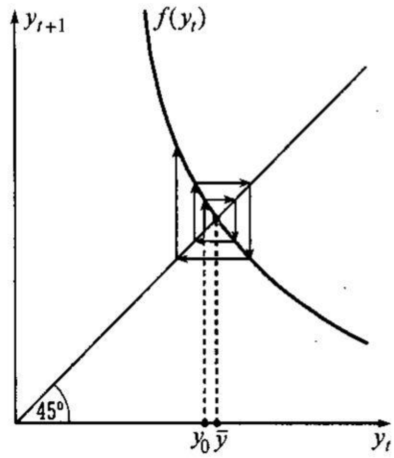
a) Las flechas se acercan al punto E. La solución converge al valor $\bar{y}$. La solución es estable.



b) Las flechas se alejan del punto E. La solución es divergente. La solución no es estable.



c) El modelo es estable.



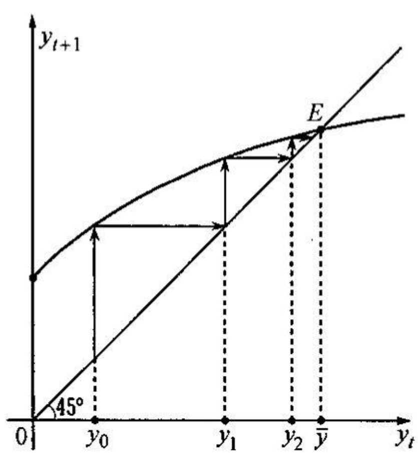
d) No es estable.

Ejemplo 01.

Hacer el diagrama de fase correspondiente a la ecuación en diferencia $y_{t+1} = \sqrt{y_t} + 2$.

Solución:

PASO 1. Graficar $f(y_t) = \sqrt{y_t + 2}$ en el plano cartesiano, considerando y_t como el eje horizontal y_{t+1} como el eje vertical.



PASO 2. Graficar la función identidad.

PASO 3. Graficar las flechas.
La primera flecha es vertical, que se traza de y_0 hasta un punto de $f(y_t)$, luego una flecha horizontal desde $f(y_t)$ a la función identidad, luego subir otra flecha hacia arriba hasta $f(y_{t+1})$ y así sucesivamente..., se notará que las flechas se van acercando al punto de equilibrio E, lo cual implica que la función solución y_t es estable.

CAPÍTULO 3

ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES Y TÉRMINO CONSTANTE

3.1. DEFINICIÓN

Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes y término constante tiene la forma:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c \quad \text{.......} \quad (1)$$

a_1, a_2 son los coeficientes y c es el término constante.

3.2. Solución de la ecuación (1)

La ecuación (1) tiene dos soluciones: la solución complementaria (y_c) y la solución particular y_p.

La solución general es: $y_t = y_c + y_p$

a) LA SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.

La solución complementaria, es la solución de la ecuación reducida:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0 \quad \text{.......} \quad (2)$$

Suponer que la función exponencial $y_t = Ar^t$ es solución de (2), entonces $y_{t+1} = Ar^{t+1}$ y $y_{t+2} = Ar^{t+2}$.

El objetivo es hallar "r".

Al sustituir y_t, y_{t+1} y y_{t+2} en (2) se obtiene:

$$Ar^{t+2} + a_1 Ar^{t+1} + a_2 Ar^t = 0$$

$$Ar^t [r^2 + a_1 r + a_2] = 0 \quad , \quad Ar^t \neq 0$$

Esta igualdad implica que: $\boxed{r^2 + a_1 r + a_2 = 0}$ .... (3)

La ecuación (3) es una ecuación cuadrática en "b" y se llama "LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA" de (2) o de (1).

Las dos raíces de la ecuación (3) son:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

siendo el discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$.

Habrán tres casos en la solución de (2):

CASO 1: Raíces reales diferentes.

Si $\Delta > 0$, habrán dos raíces reales diferentes, digamos r_1, r_2.

En este caso las soluciones básicas son $\{r_1 t, r_2 t\}$ y la solución complementaria tiene la forma:

$$y_c = A_1 r^t + A_2 r_2 t$$

CASO 2: Raíces reales repetidas.

Si $\Delta = 0$, las raíces reales son iguales, digamos $r = r_1 = r_2$.

En este caso las soluciones básicas son $\{r^t, tr^t\}$ y la solución complementaria es: $y_c = A_1 r^t + A_2 t r^t$.

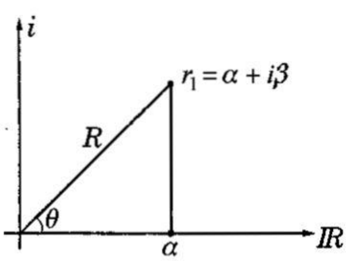
CASO 3: Raíces complejas

Si $\Delta < 0$, las raíces son complejas conjugadas, de la forma:

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad ; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

donde α es la componente real y
β es la componente imaginaria.

La forma polar del número complejo $\alpha + i\beta$ tiene dos componentes: el módulo y el argumento.



El módulo es $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

El argumento $\theta = \text{Arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ tal que $0 \le \theta < 2\pi$

Entonces la forma polar de $\alpha + i\beta$ es:

$$\boxed{\alpha + i\beta = R(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

Por el teorema de Moivre: $(\alpha \pm i\beta)^t = R^t(\cos(t\theta) \pm i\,\text{sen}(t\theta))$

Entonces las soluciones básicas son:

$$\{R^t(\cos(t\theta) + i\,\text{sen}(t\theta), R^t(\cos(t\theta) - i\,\text{sen}(t\theta)\}$$

La solución complementaria es:

$$y_c = A_1[R^t(\cos(t\theta)+i\,\text{sen}(t\theta))]+A_2[R^t(\cos(t\theta)-i\,\text{sen}(t\theta))]$$
$$= R^t[(A_1+A_2)\cos(t\theta)+(A_1-A_2)i\,\text{sen}(t\theta)]$$
$$y_c = R^t[k_1\cos(t\theta)+k_2\,\text{sen}(\theta t)]$$

donde $A_1+A_2=k_1$, $(A_1-A_2)i=k_2$

b) **LA SOLUCIÓN PARTICULAR**

Porque en (1) el segundo miembro de la ecuación es la constante c, suponer que la solución particular es la función constante $y_t=k$, que a su vez $y_{t+1}=k$, $y_{t+2}=k$.

Al sustituir en (1) se obtiene:

$$k+a_1k+a_2k=c$$
$$k(1+a_1+a_2)=c$$

entonces $k=\frac{c}{1+a_1+a_2}$, $1+a_1+a_2\neq 0$.

Por tanto, la solución particular es:

$$y_p=\frac{c}{1+a_1+a_2}\ , \quad \text{para } 1+a_1+a_2\neq 0.$$

Ejemplo 01.

Dada ecuación diferencial de segundo orden: $6y_{t+2}-7y_{t+1}+2y_t=12$, hallar:

a) La solución complementaria.
b) La solución particular.
c) La solución general.
d) $\lim\limits_{t\to+\infty} y_t$.

Solución:

a) Multiplicar por $\frac{1}{6}$ la ecuación dada, para obtener la forma reducida:

$$\boxed{y_{t+2}-\tfrac{7}{6}y_{t+1}+\tfrac{2}{6}y_t=2}$$

- La solución complementaria se obtiene al resolver la ecuación reducida:

$$y_{t+2}-\tfrac{7}{6}y_{t+1}+\tfrac{2}{6}y_t=0$$

La ecuación característica es:

$$r^2-\tfrac{7}{6}r+\tfrac{2}{6}=0$$
$$6r^2-7r+2=0$$
$$(2r-1)(3r-2)=0$$

Las raíces son: $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{2}{3}$

Las soluciones básicas son $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t, \left(\frac{2}{3}\right)^t\right\}$ y la solución complementaria es:

$$y_c = A_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t + A_2\left(\tfrac{2}{3}\right)^t$$

b) Hallar la solución particular:

Por el segundo miembro de la forma reducida es la constante $c = 2$, y los coeficientes $a_1 = -\frac{7}{6}$, $a_2 = \frac{2}{6}$, entonces la solución particular es:

$$y_p = \frac{c}{1 + a_1 + a_2}$$
$$y_p = \frac{2}{1 - \frac{7}{6} + \frac{2}{6}} = 12$$

c) La solución general es:

$$y_t = A_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t + A_2\left(\tfrac{2}{3}\right)^t + 12 \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} = 12$

e) Hallar las constantes A_1, A_2 dado las condiciones iníciales $y_0 = 0$, $y_1 = 0$.

Veamos:

$$\begin{cases} y_0 = A_1 + A_2 + 12 \\ y_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{2}{3}A_2 + 12 \end{cases}$$

Igualando a cero:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 12 = 0 \\ \frac{1}{2}A_1 + \frac{2}{3}A_2 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -12 \\ 3A_1 + 4A_2 = -72 \end{cases}$$

Por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -12 & 1 \\ -72 & 4 \end{vmatrix} = 24 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -12 \\ 3 & -72 \end{vmatrix} = -36$$

Entonces $A_1 = \frac{24}{1} = 24$; $A_2 = \frac{-36}{1} = -36$

Ahora la solución es: $y_t = 24\left(\frac{1}{2}\right)^t - 36\left(\frac{2}{3}\right)^t + 12$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

Ejemplo 02.

Resolver $y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=7$

Solución:

a) Hallar la solución complementaria.

la ecuación característica es:

$$r^2-4r+4=0$$

Al resolver: $(r-2)^2=0$, se obtiene: $r_1=r_2=r=2$

Porque existe una única solución real $r=2$, las soluciones básicas son: $\{2^t, t2^t\}$.

La solución complementaria es: $y_c=A_1 2^t+A_2 t2^t$ -

b) Hallar la solución particular:

Se tienen: $c=7$, $a_1=-4$, $a_2=4$; entonces la solución particular es:

$$y_p=\frac{7}{1-4+4}=7$$

c) La solución general es:

$$y_t=A_1 2^t+A_2 t2^t+7 \quad , \quad t=0,1,2,\ldots$$

Ejemplo 03.

Resolver:

$$y_{t+2}-2y_{t+1}+2y_t=1 \qquad (y_0=3\ ;\ y_1=4)$$

Solución:

a) Hallar la solución complementaria

La ecuación característica es:

$$r^2-2r+2=0$$

$$r=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$r=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

basta elegir el número complejo: $r=1+i$, donde la componente real es $\alpha=1$ y la componente imaginaria es $\beta=1$.

- El módulo es $R=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
- El argumento es $\theta=\text{Arctg}\left(\frac{1}{1}\right)$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

La solución complementaria es:

$$y_c = (\sqrt{2})^t \left[k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \right]$$

b) Hallar la solución particular:

En la ecuación dada se tienen: $c = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 2$; entonces la solución particular es:

$$y_p = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} = \frac{1}{1 - 2 + 2} = 1$$

c) La solución general es:

$$y_t = (\sqrt{2})^t \left[k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \right] + 1 \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Imponer las condiciones iníciales:

$$\begin{cases} y_0 = k_1 \\ y_1 = \sqrt{2}\left[k_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \right] + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = k_1 \\ y_1 = \sqrt{2}\left[k_1 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + k_2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right] + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ k_1 + k_2 + 1 = 4 \end{cases}$$

$$k_1 = 3$$
$$k_2 = 0$$

Ahora, la solución es: $y_t = 3(\sqrt{2})^t \cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) + 1$

$t = 0, 1, 2, \ldots$

3.3. LA CONVERGENCIA DE LA TRAYECTORIA DE TIEMPO

La convergencia o divergencia de la trayectoria de la solución dependerán exclusivamente de las raíces de la ecuación características.

CASO 1.- Si las raíces de la ecuación características son dos números reales: r_1 y r_2 pueden ocurrir:

a) Si $|r_1| < 1$ y $|r_2| < 1$, la trayectoria es convergente, porque $\lim_{t \to +\infty} r_1^t = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} r_2^t = 0$.

b) Si $|r_1| < 1$ y $|r_2| > 1$, la trayectoria es divergente.

c) Si $|r_1| > 1$ y $|r_2| > 1$, la trayectoria es divergente.

CASO 2.- Si las raíces son reales e iguales: $r = r_1 = r_2$, puede ocurrir:

a) Si $|r| < 1$, la trayectoria es convergente.

b) Si $|r| > 1$, la trayectoria es divergente.

CASO 3.- Si las raíces son dos números complejos conjugados: $r = \alpha \pm i\beta$ puede ocurrir:

a) Si $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$, entonces la trayectoria es convergente.

b) Si $R > 1$, entonces la trayectoria es divergente.

3.4. MODELO DE INTERACCIÓN DE MULTIPLICADOR CON ACELERADOR DE SAMUELSON

Haciendo tres supuestos macroeconómicos se construye el modelo:

Supongamos que el ingreso nacional en el período t. (y_t) sea función de $(C_t,\ I_t,\ G_0)$, expresado por la ecuación: $y_t = C_t + I_t + G_0$.

Donde C_t es el consumo en el período t, I_t es la inversión en el período t y la componente G_t, se considera como exógena y vamos a suponer constante y la denotamos por G_0.

El consumo en el período t (C_t) es proporcional del ingreso respecto al período anterior.

$$C_t = \gamma y_{t-1} \ldots\ldots (0 < \gamma < 1) \quad ; \quad \gamma: \text{es la propensión marginal al consumo.}$$

La inversión en el período t es proporcional a la diferencia $C_t - C_{t-1}$, esto es:

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) \ldots\ldots (\alpha > 0) \quad ; \quad \alpha: \text{representa el coeficiente de aceleración.}$$

El modelo es:

$$\begin{aligned} y_t &= C_t + I_t + G_0 \\ C_t &= \gamma y_{t-1} \quad , \quad 0<\gamma<1 \\ I_t &= \alpha(C_t - C_{t-1}) \quad , \quad \alpha>0 \end{aligned}$$

Resolver el modelo:

Hallar y_t

Sustituir C_t y I_t en la primera ecuación:

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \alpha(C_t - C_{t-1}) + G_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De $C_t = \gamma y_{t-1}$ .... (2)

Se obtiene $C_{t-1} = \gamma t_{t-2}$ .... (3)

Sustituir (2) y (3) en (1):

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \alpha[\gamma y_{t-1} - \gamma y_{t-2}] + G_0$$

Ordenar: $y_t - \gamma(1+\alpha)y_{t-1} + \alpha\gamma y_{t-2} = G_0$

Al desplazar los subíndices dos períodos hacia adelante

$$\boxed{y_{t+2} - \gamma(1+\alpha)y_{t-1} + \alpha\gamma y_t = G_0} \quad \text{(I)}$$

La solución particular de (I) es:

$$y_p = \frac{G_0}{1-\gamma(1+\alpha)+\alpha\gamma} = \frac{G_0}{1-\gamma}$$

Si y_t es la solución y $\lim\limits_{t\to+\infty} y_t = \frac{G_0}{1-\gamma}$ afirmaremos que la trayectoria es estable.

3.5. LA INFLACIÓN Y EL DESEMPLEO EN TIEMPO DISCRETO

Formulación del modelo:

Hacer tres supuestos:

Primer supuesto:

$$P_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t \quad \ldots\ldots \quad (\alpha\,,\beta>0\,;0\le g\le 1)$$

donde:

P_t : es la tasa de crecimiento del nivel de precios P en el período t.

U_t : tasa de desempleo en el período t.

π_t : tasa esperada de inflación en el período t.

T : incremento de la productividad laboral.

Segundo supuesto:

$\pi_{t+1} - \pi_t = j(P_t - \pi_t)$, donde $\Delta\pi_t = \pi_{t+1} - \pi_t$

donde:
π_t : es la tasa esperada de inflación en el período t.

Tercer supuesto:

$U_{t+1} - U_t = -k(m - P_{t+1})$ ...... , $(k > 0)$, $\Delta U_t = U_{t+1} - U_t$

donde:

m : tasa de crecimiento del balance nominal del dinero.

Modelo de inflación-desempleo
Resolver el modelo: $P_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t$ .... (1) $\pi_{t+1} - \pi_t = j(P_t - \pi_t)$ .... (2) $U_{t+1} - U_t = -k(m - P_{t+1})$ .... (3)

Hallar P_t

En (1) avanzar un período:

$$P_{t+1} = \alpha - T - \beta U_{t+1} + g\pi_{t+1} \quad \text{.......} \quad (4)$$

Restar (4) – (1):

$$P_{t+1} - P_t = -\beta(U_{t+1} - U_t) + g(\pi_{t+1} - \pi_t) \quad \text{.......} \quad (5)$$

Sustituir (2) y (3) en (5):

$$P_{t+1} - P_t = -\beta[-k(m - P_{t+1})] + g[j(P_t - \pi_t)]$$
$$P_{t+1} - P_t = \beta k(m - P_{t+1}) + g\,j(P_t - \pi_t) \quad \text{.......} \quad (6)$$

De (1): $\quad g\pi_t = P_t - (\alpha - T) + \beta U_t$ .... (7)

En la ecuación (6) multiplicar g por π_t:

$$P_{t+1} - P_t = \beta k(m - P_{t+1}) + j(g P_t - g\pi_t) \quad \text{.................................} \quad (8)$$

Sustituir (7) en (8):

$$P_{t+1} - P_t = \beta k(m - P_{t+1}) + j[g P_t - P_t + (\alpha - T) - \beta U_t]$$

Ordenar:

$$(1+\beta k)P_{t+1} - [1 - j(1-g)]P_t + j\beta U_t = \beta k m + j(\alpha - T) \quad \text{......................} \quad (9)$$

Avanzar un período:

$$(1+\beta k)P_{t+2} - [1 - j(1-g)]P_{t+1} + j\beta U_{t+1} = \beta k m + j(\alpha - T) \quad \text{.................} \quad (10)$$

Restar (10) – (9) :

$$\begin{aligned} (1+\beta k)P_{t+2} + \{j(1-g) - 1 - 1 - \beta k\}P_{t+1} + [1 - j(1-g)]P_t + j\beta(U_{t+1} - U_t) &= 0 \\ &+ j\beta(-km + kP_{t+1}) \\ &+ j\beta km + j\beta k P_{t+1} \end{aligned}$$

$$(1+\beta k)P_{t+2} + [j - jg - 1 - 1 - \beta k + j\beta k]P_{t+1} + [1 - j(1-g)]P_t = j\beta km$$

$$(1+\beta k)P_{t+2} - [jg + 1 + (1-j)(1+\beta k)]P_{t+1} + [1 - j(1-g)]P_t = j\beta km$$

La forma reducida es:

$$P_{t+2} - \frac{jg + 1 + (1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k}P_{t+1} + \frac{1 - j(1-g)}{1+\beta k}P_t = \frac{j\beta km}{1+\beta k}$$

Donde:

$$a_1 = \frac{jg + 1 + (1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k} \quad , \quad a_2 = \frac{1 - j(1-g)}{1+\beta k} \quad , \quad c = \frac{1\beta km}{1+\beta k}$$

Así tendremos:

$$P_{t+2} + a_1 P_{t+1} + a_2 P_t = c \, .$$

3.6. ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON TÉRMINOS VARIABLES

En esta sección estudiaremos el procedimiento de obtener la solución particular cuando el segundo miembro es una función con términos variables.

CASOS:

CASO 1: Si se tiene $\boxed{} = a^t$, la solución particular tendrá la forma Ba^t.

CASO 2: Si se tiene $\boxed{} = 2t$, la solución particular tendrá la forma $At + B$.

CASO 3: Si se tiene $\boxed{} = 3t^2$, la solución particular tendrá la forma $At^2 + Bt + C$

El problema consiste en hallar los coeficiente: B; A y B; A, B y C; respectivamente.

Ejemplo 01.

Dado la ecuación en diferencias $y_{t+1} + 2y_t = 7^t$, hallar la solución particular.

Solución:
Suponer que la solución particular tenga la forma: $y_t = A7^t$, donde $y_{t+1} = A7^{t+1}$.

Al sustituir en la ecuación dada, se obtiene:

$$\begin{aligned} &A\,7^{t+1} + 2A7^t = 7^t \\ &7^t(7A + 2A) = 7^t \\ &7A + 2A = 1 \\ &A = \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

La solución particular es: $y_p = \frac{1}{9}7^t$

Ejemplo 02.

Dado la ecuación en diferencias: $y_{t+2} + 5y_{t-1} + 2y_t = 18 + 6t + 8t^3$

Solución:
En este caso la solución tiene la forma: $y_t = At^2 + Bt + C$, donde

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= A(t+1)^2 + B(t+1) + C \\ y_{t+2} &= A(t+2)^2 + B(t+2) + C \end{aligned}$$

Sustituir en la ecuación dada:

$$A(t+2)^2 B(t+2) + C + 5\left[A(t+1)^2 + B(t+1) + C\right] + 2(At^2 + Bt + C) = 18 + 6t + 8t^3$$

Ordenando e igualando los coeficientes de los polinomios se obtienen: $A = 1$; $B = -1$; $C = 2$.

Entonces la solución particular es: $y_p = t^2 - t + 2$

CAPITULO 4

ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

4.1. DEFINICIÓN

Una ecuación en diferencias lineal de orden n (con coeficientes constantes y términos constantes) puede escribirse como:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + a_2 y_{t+n-2} + ... + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = C$$

Ejemplos:

$y_{t+4} - 5y_{t+2} + 4y_t = 0$

$y_{y+5} - y_{t+4} - 15y_{t+3} - 25y_{t+2} + 14y_{t+1} + 24y_t = 10$

4.2. MÉTODO PARA RESOLVER

En esta sección sólo nos acabaremos a resolver ecuaciones en diferencias cuyo polinomio característico tenga raíces racionales que fácilmente pueden obtenerse mediante la factorización por el método de Ruffini.

La solución general tendrá dos componentes: una solución complementaria y otra solución particular, para el caso de ecuaciones en diferencias no homogénea.

Esto es:

$$y_t = y_c + y_p$$

y_c : Solución complementaria
y_p : Solución particular

Ejemplo 01.

Resolver: $y_{t+4} - 5y_{t+2} + 4y_t = 0$

Solución:

Por tratarse de una ecuación en diferencias de orden 4 homogénea, la solución depende de la raíces del poli del polinomio característico.

El polinomio característico es: $p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$

La ecuación característica es: $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$

Las raíces de esta ecuación la obtenemos mediante el método de Ruffini

Los divisores de 4 son: $\pm 1 \pm 2 \pm 4$

Ahora hacer la división sintética:

1	1	0	-5	0	4
		1	1	-4	-4
-1	1	1	-4	-4	0
		-1	0	4	
2	1	0	-4	0	
		2	4		
-2	1	2	0		
		-2			
	1	0			

Las raíces son: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$

La solución es: $y_t = A_1(1)^t + A_2(-1)^t + A_3(2)^t + A_4(-2)^t$
$t = 1,2,3,\ldots$

Ejemplo 02.

Resolver: $y_{t+3} - \frac{1}{3}y_{t+2} - \frac{1}{4}y_{t+1} + \frac{1}{12}y_t = \frac{1}{12}$

***Solución*:**

Solución Complementaria

Resolver: $\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{12} = 0$

$12\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

Hallar las raíces por el método de Ruffini:

Probables raíces: $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\pm\frac{1}{12}$

$\frac{1}{2}$	12	-4	-3	1
		6	1	-1
½	12	2	-2	0
		-6	2	
1/3	12	-4	0	
		4		
	12	0		

Las raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

La solución complementaria es:

$$y_c = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(\frac{1}{3}\right)^t$$

Solución Particular

Porque el segundo miembro de la ecuación en diferencias es la constante 1/12, vamos a suponer que la solución particular es otra constante, digamos:

$$\begin{aligned} y_t &= k \quad , \text{ donde} \\ y_{t+1} &= k \\ y_{t+2} &= k \\ y_{t+3} &= k \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación dada, se obtiene:

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{3}k - \frac{1}{4}k + \frac{1}{12}k &= \frac{1}{12} \\ 12k - 4k - 3k + k &= 1 \\ 6k &= 1 \\ k &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Entonces la solución particular es: $y_p = \dfrac{1}{6}$

La solución general es: $y_t = y_c + y_p$

$$y_t = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{1}{6}$$

$$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Si hallar el límite de y_t cuando $t \to +\infty$, se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \frac{1}{6}$$

Este resultado nos indica que la solución obtenida representa una trayectoria de tiempo que converge al equilibrio estacionario.

Ejemplo 03.

Encuentre la solución general de la ecuación en diferencias:

$$32y_{t+3} - 28y_{t+2} + 4y_{t+1} + y_t = 288$$

Solución:

La forma canónica de la ecuación en diferencias se obtiene multiplicando toda la ecuación por $\frac{1}{32}$;

$$y_{t+3} - \frac{7}{8}y_{t+2} + \frac{1}{8}y_{t+1} + \frac{1}{32}y_t = 9$$

a) Hallar la Solución Complementaria y_c

El polinomio característico es: $P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{8}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{32}$

Ahora, resolver la ecuación característica: $\lambda^3 - \frac{7}{8}\lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{32} = 0$

$$32\lambda^3 - 28\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

Los divisores de 1 : ± 1

Los divisores de 32: $\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32$

Probables raíces racionales: $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{16}$

Hallar las raíces por el método de Ruffini:

$\frac{1}{2}$	32	-28	4	1
		16	-6	-1
$\frac{1}{2}$	32	-12	-2	0
		16	2	
$-\frac{1}{8}$	32	4	0	
		-4		
	32	0		

Las raíces son: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{8}$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ es raíz repetida

Las soluciones básicas son: $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t, \ t\left(\frac{1}{2}\right)^t, \left(-\frac{1}{8}\right)^t\right\}$

La solución complementaria es la combinación lineal de las soluciones básicas, esto es:

$$y_c = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(-\frac{1}{8}\right)^t$$

b) Solución Particular Yp.

Porque el segundo miembro es la constante "9" suponemos que la solución particular es una constante k, esto es: $y_t = k$,

Donde $y_{t+1} = k$, $y_{t+2} = k$, $y_{t+3} = k$

Sustituir en la ecuación en diferencias dada

$$32k - 28k + 4k + k = 288$$
$$9k = 288$$
$$k = 32$$

Entonces la solución particular es $y_p = 32$.

c) La Solución General es: $y_t = y_c + y_p$

$$y_t = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(-\frac{1}{8}\right)^t + 32$$

d) Hallar el $\lim_{t\to\infty} y_t$: $\lim_{t\to\infty} y_t = 0 + 0 + 0 + 32$

$$\lim_{t\to\infty} y_t = 32$$

Este resultado indica que la trayectoria de tiempo converge al equilibrio estacionario en nivel 32.

OBSERVACIÓN:

El $\lim_{t\to\infty}\left[t\left(\frac{1}{2}\right)^t\right] = \infty.0$ es indeterminado

La indeterminación se evita mediante el método de L'Hopital, que consiste en derivar el numerador y el denominador de la siguiente función:

$$t\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{t}{2^t}$$

Al derivar: $\dfrac{1}{2^t \ln(2)}$

Entonces: $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{2^t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{2^t \ln(2)} = 0$

Ejemplo 04.

Dado la ecuación en diferencias: $8y_{t+3} - 4y_{t+2} + 2y_{t+1} - y_t = 10$

Se pide:

1.- Hallar la solución general

2.- Pruebe la convergencia de las soluciones

Solución de 1.

Hallar la Solución Complementaria y_c

El polinomio característico es: $P(\lambda) = 8\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - 1$

Resolver la ecuación característica: $8\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

Por Ruffini:

$\frac{1}{2}$	8	-4	2	-1
		4	0	1
	8	0	2	0

Queda por resolver: $8\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}i \quad \text{(raíces complejas)}$$

Elegir: $\lambda = 0 + \dfrac{1}{2}i$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Necesitamos el módulo de λ y su respectivo argumento

El módulo de λ es $R = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$

El argumento de λ es $\theta = \text{Arctg}\left(\dfrac{1/2}{0}\right)$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

En consecuencia, la solución compleja es: $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$

La solución complementaria es: $y_c = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$

Solución Particular y_P

Por ser el segundo miembro la constante 10, suponer que la solución sea la constante k, esto es $y_t = k$, donde:

$$y_{t+1} =$$
$$y_{t+2} = k$$
$$y_{t+3} = k$$

Constituir en la ecuación en diferencias que se planteó:

$$8k - 4k + 2k - k = 10$$
$$5k = 10$$
$$k = 2$$

La solución particular es $y_P = 2$

La Solución General es: $y_t = y_c + y_p$

$$y_t = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_3 sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 2$$

La convergencia de la solución se halla cuando $t \to +\infty$: $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = 0 + 0 + 2$

$$\lim_{t\to\infty} y_t = 2$$

La solución obtenida representa una trayectoria de tiempo que converge al equilibrio estacionario en nivel 2.

<u>OBSERVACIONES</u>

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$$

El $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t \left[A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_3 sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] = 0$

Porque las funciones $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| \le 1$, $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| \le 1$ y $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$

4.3. LA CONVERGENCIA Y EL TEOREMA DE SCHUR

Cuando no es posible resolver fácilmente una ecuación en diferencias y a su vez queremos determinar la convergencia de la trayectoria de tiempo relevante en forma cualitativa sin necesidad de calcular las raíces del polinomio característico, se aplica el teorema de Schur.

TEOREMA DE SCHUR

Las raíces de la ecuación polinomial de grado n :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_0 = 0$$

Serán todos menor que la unidad en valor absoluto si y sólo si los siguientes n determinantes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Son todos positivos

Caso particular para $n = 2$

$$a_0\, y_{t+2} + a_1\, y_{t+1} + a_2\, y_t = k \quad , \quad k : \text{constante}$$

En este caso

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces la trayectoria de tiempo es convergente.

Ejemplo.

Prueba la convergencia de la trayectoria de $y_{t+2}-\frac{1}{6}y_{t+1}-\frac{1}{6}y_t=6$ mediante el teorema de Schur.

Solución:

Los coeficientes son:

$$a_0=1 \quad , \quad a_1=\frac{1}{6} \quad , \quad a_2=-\frac{1}{6}$$

Los determinantes son:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix}=1+\frac{1}{36}>0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{46634}{46656}>0$$

Los resultados obtenidos satisface con la condición necesaria y suficiente (si y sólo sí) para la convergencia.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

5.1. UN MODELO DE MERCADO CON INVENTARIO

Supuestos en el modelo:

La cantidad demandada Q_{dt} en el periodo t y la cantidad producida Q_{st} en el periodo t, son funciones lineales sin retraso del precio P_t .

El ajuste de precio no depende del mercado en cada periodo, sino depende de la fijación de precios por los vendedores.

Al inicio de cada período, los vendedores establecen un precio para ese período después de considerar la situación del inventario.

El inventario está dado por la diferencia $Q_{st} - Q_{dt}$

Si el inventario se acumuló, por efecto del precio anterior, entonces el precio del período presente será más bajo que el del período anterior con el objeto de "mover" la mercancía y puede disminuir el inventario.

Si por el contrario, el inventario disminuyó, el precio presente será
más alto que el periodo anterior.

El ajuste de precios que se hace de período en período es inversamente proporcional al cambio observado en el inventario (existencias)

Con estos tres supuestos, formulamos el siguiente modelo de inventario
(3 ecuaciones):

$$\begin{aligned}
Q_{dt} &= \alpha - \beta P_t & &(\alpha, \beta > 0) \\
Q_{st} &= -\gamma + \delta P_t & &(\gamma, \delta > 0) \\
P_{t+1} &= P_t - \sigma(Q_{st} - Q_{dt}) & &(\sigma > 0)
\end{aligned}$$

Donde σ denota al coeficiente de ajuste de precios inducidos por las existencias.

SOLUCIÓN DEL MODELO:

Hallar P_t

Sustituir Q_{dt} y Q_{st} en la tercera ecuación: $P_{t+1} = P_t - \sigma[-\gamma + \delta P_t - \alpha + \beta P_t]$

Asociando términos comunes y ordenando obtenemos:

$$P_{t+1} - \left[1 - \sigma(\beta + \delta)\right] P_t = \sigma(\alpha + \gamma)$$

Por tratarse de una ecuación en diferencias de orden uno con coeficientes constantes, la solución es:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \sigma} \right) [1 - \sigma(\beta + \delta)]^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \sigma}$$

Si hacemos $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \sigma} = \overline{P}$, la solución es:

$$P_t = \left(P_0 - \overline{P}\right)\left[1 - \delta(\beta + \delta)\right]^t + \overline{P}$$

Analicemos la trayectoria:

La estabilidad dinámica del modelo dependerá de la expresión

$b = 1 - \sigma(\beta + \gamma)$

Si $|b| < 1$, la trayectoria converge al valor $\overline{P}$.

Los tipos de trayectoria de tiempo, lo podemos observar en el siguiente cuadro:

Región	**Valor de** $b \equiv 1 - \sigma(\beta + \delta)$	**Valor de** σ	**Naturaleza de la trayectoria de tiempo** P_t
III	$0 < b < 1$	$0 < \sigma < \frac{1}{\beta + \delta}$	No oscilatorio y convergente
IV	$b = 0$	$\sigma = \frac{1}{\beta + \delta}$	Permanece en equilibrio
V	$-1 < b < 0$	$\frac{1}{\beta + \delta} < \sigma < \frac{2}{\beta + \delta}$	Con oscilación amortiguada
VI	$b = -1$	$\sigma = \frac{2}{\beta + \delta}$	Con oscilación uniforme
VII	$b < -1$	$\sigma > \frac{2}{\beta + \delta}$	Con oscilación explosiva

Se puede observar que la naturaleza de la trayectoria de tiempo depende de la función exponencial b^t.

Si $0<b<1$, se tiene $\lim\limits_{t\to+\infty}(b^t)=0$

Si $-1<b<0$, se tiene $\lim\limits_{t\to+\infty}(b^t)=0$

Porque b es negativo, entonces b^t será unas veces positivo y otras veces negativo, lo cual implica que la trayectoria será oscilante, pero convergente.

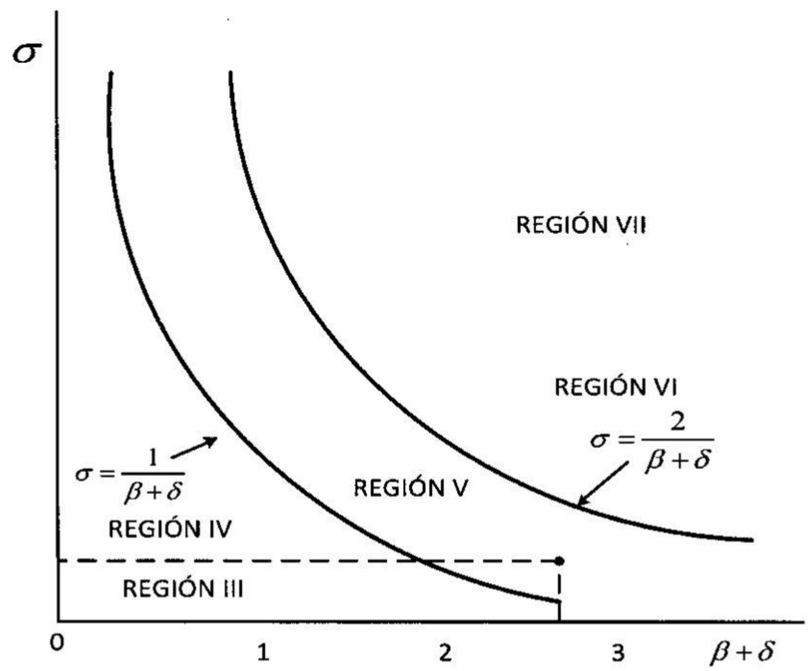
Si $b=0$, la trayectoria es $P_t=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

Por ser una constante, existe permanente equilibrio

Si $b=-1$, la trayectoria oscila de manera uniforme.

Si $b<-1$, la trayectoria oscila explosivamente.

El gráfico de los resultados de la tabla, es el siguiente:



5.1.1. EJEMPLOS

Ejemplo 1.

Si el modelo de mercado con inventarios:

$$Q_{dt} = 21 - 2P_t$$
$$Q_{5t} = -3 + 6P_t$$
$$P_{t+1} = P_t - 0.3\left(Q_{st} - Q_{dt}\right)$$

Encuentre la trayectoria de tiempo P_t y determine si es convergente

***Solución*:**

<u>**PASO 01**</u>. Sustituir Q_{dt} y Q_{st} de las dos primeras ecuaciones en la tercera ecuación

$$P_{t+1} = P_t - 0.3\left(-3 + 6P_t - 21 + 2P_t\right)$$
$$P_{t+1} = P_t + 0.9 - 1.8P_t + 6.3 - 0.6$$
$$P_{t+1} + 0.8P_t = 6.6$$

<u>**PASO 02**</u>. La solución es:

$$P_t = A\left(-0.8\right)^t + \frac{6.6}{1 + 0.8}$$
$$P_t = A\left(-0.8\right)^t + \frac{11}{3}$$

<u>**PASO 03**</u>. Si la condición inicial, para t = 0, es P_0

Se obtiene:

$$P_0 = A + \frac{11}{3}$$
$$A = P_0 - \frac{11}{3}$$

<u>**PASO 04**</u>: Ahora, la solución la presentamos del siguiente modo:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{11}{3}\right)\left(-0.8\right)^t + \frac{11}{3}$$

La convergencia se tiene calculando el $\lim\limits_{t \to +\infty} P_t$

Como b = -0.8, esto es -1 < b < 0, se cumple que $\lim\limits_{t \to +\infty} (-0.8)^t = 0$

Por lo tanto: $\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = \dfrac{11}{3}$

Este resultado indica que la trayectoria es convergente

Ejemplo 2.

Discutir el modelo cuando $Q_{st} = K$

Solución:

El modelo es:

$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t$$
$$Q_{dt} = K$$
$$P_{t+1} = P_t - \sigma\left(Q_{st} - Q_{dt}\right)$$

Al resolver el modelo, se tiene:

$$P_{t+1} = P_t - \sigma\left(K - \alpha + \beta P_t\right)$$
$$P_{t+1} = P_t - \sigma K + \sigma K - \sigma\beta P_t$$
$$P_{t+1} = \left(1 - \sigma\beta\right)P_t + \sigma\left(\alpha - K\right)$$
$$P_{t+1} = \left(1 - \sigma\beta\right)P_t = \sigma\left(\alpha - K\right)$$

La solución es:

$$P_t = A\left(\sigma\beta - 1\right)^t + \frac{\sigma\left(\alpha - K\right)}{1 + \left(\sigma\beta - 1\right)}$$

$$P_t = A\left(\sigma\beta - 1\right)^t + \frac{\alpha - K}{\beta}$$

Analizar la convergencia de la trayectoria

Si $\sigma\beta - 1 < 1 \leftrightarrow \sigma\beta < 2$, la trayectoria no oscila y converge al valor
$\dfrac{\alpha - K}{\beta}$

Si $\sigma\beta - 1 = 0 \leftrightarrow \sigma\beta = 1$, el equilibrio es $\dfrac{\alpha - K}{\beta}$

Si $-1 < \sigma\beta - 1 < 0 \leftrightarrow 0 < \sigma\beta < 1$, el precio en cada período oscila y es convergente (amortiguado)

Si $\sigma\beta - 1 = -1 \leftrightarrow \sigma\beta = 0 \leftrightarrow \sigma = 0 \vee \beta = 0$ necesariamente $\beta \neq 0$, para que la oscilación de P_t sea uniforme.

Si $\sigma\beta - 1 < -1 \leftrightarrow \sigma\beta < 0 \leftrightarrow \left(\sigma < 0 \wedge \beta > 0\right) \vee \left(\sigma > 0 \wedge \beta < 0\right)$
este caso no ocurre, porque en el supuesto del modelo se exige que $\sigma > 0 \wedge \beta > 0$

5.2. MODELO DE INTERACCIÓN DE MULTIPLICADOR CON ACELERADOR DE SAMUELSON

Es un modelo macroeconómico representado por tres ecuaciones:

La primera ecuación expresa la relación del ingreso nacional Y_t, en el periodo t, con el consumo (C_t), la inversión (I_t) y el gasto del gobierno (G_t). Vamos a considerar G_0 como variable exógena. Así la primera ecuación es:

$$Y_t = C_t + I_t + G_0$$

La segunda ecuación expresa el costo C_t (en el período t) es proporcional al ingreso nacional Y_{t-1} en el período retrasado en un período, esto es,

$$C_t = \gamma Y_{t-1} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

Donde "α" representa la propensión marginal al consumo

La tercera ecuación expresa la relación entre inversión I_t (en el período t) y el incremento del consumo $\Delta C_{t-1} = C_t - C_{t-1}$ esto es, $I_t = \alpha(C_t - C_{t-1})$, $\alpha > 0$, donde α representa el acelerador (coeficiente de aceleración).

El modelo con las tres ecuaciones es:

$$\begin{aligned} &Y_t = C_t + I_t + G_0 \\ &C_t = \gamma Y_{t-1} && (0 < \gamma < 1) \\ &I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) && (\alpha > 0) \end{aligned}$$

Resolver el modelo:

Paso 1:

La tercera ecuación se puede expresar en términos del ingreso nacional

$$\begin{aligned} I_t &= \alpha[\gamma Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2}] \\ I_t &= \alpha\gamma[Y_{t-1} - Y_{t-2}] \end{aligned}$$

Paso 2:

Sustituir en la primera ecuación

$$\begin{aligned} &Y_t = \gamma Y_{t-1} + \alpha\gamma[Y_{t-1} - Y_{t-2}] + G_0 \\ &Y_t - \gamma(1+\alpha)Y_{t-1} + \alpha\gamma Y_{T-2} = G_0 \end{aligned}$$

Si desplazamos los subíndices hacía adelante por dos períodos, obtenemos su equivalente.

$$Y_{t+2} - \gamma(1+\alpha)Y_{t+1} + \alpha\gamma Y_t = G_0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

La ecuación en (1), es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficiente constante y término constante.

Paso 3:

Resolver (1)

Solución Complementario

La ecuación característica es: $r^2 - \gamma(1+\alpha)r + \alpha\gamma = 0$

$$r = \frac{\gamma(1+\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma}}{2}$$

La solución complementaria dependerá de la discusión del discriminante

$$r^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma$$

Caso 1:

Cuando $r^2 - \gamma(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma > 0$, donde $\gamma > 0$, implica $\gamma(1+\alpha)^2 > 4\alpha$ o sea $\gamma > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

Caso 2:

Cuando $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

Caso 3:

Cuando $\gamma < \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

b) Solución Particular
Porque el segundo miembro es la constante G_0 se supone que la solución particular es también una constante, digamos

$Y_t = K$, donde:

$$Y_{t+1} = K$$

$$Y_{t+2} = K$$

Al sustituir en la ecuación en diferencias obtenemos:

$$K - \gamma(1+\alpha)K + \alpha\gamma K = G_0$$

$$K[1 - \gamma - \gamma\alpha + \alpha\gamma] = G_0$$

$$K[1-\alpha] = G_0$$

$$K = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

Entonces la ecuación particular es:

$$Y_p = \frac{G_0}{1-\alpha} \quad , \quad \text{con } \alpha > 0$$

<u>CONVERGENCIA DE LA TRAYECTORIA</u>

Análisis:

Vamos a relacionar las raíces del polinomio:

$$r^2 - \gamma(1+\alpha)r + \alpha\gamma = 0$$

Con los coeficientes del polinomio

Si r_1 y r_2 son las raíces, la relación es:

$r_1 + r_2 = \gamma + (1+\alpha)$ .... (1)

$r_1 r_2 = \alpha\gamma$ .... (2)

Desarrollar el siguiente producto:

$$\begin{aligned}(1-r_1)(1-r_2) &= 1 - r_2 - r_1 + r_1 r_2 \\ &= 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 \\ &= 1 - \gamma(1+\alpha) + \alpha\gamma \\ &= 1 - \gamma - \gamma\alpha + \alpha\gamma \\ &= 1 - \gamma\end{aligned}$$

Pero $0 < \gamma < 1 \leftrightarrow 0 > -\gamma > -1$

Sumar 1: $0 < 1 - \gamma < 1$

Esto es: $0 < (1-r_1)(1-r_2) < 1$ .... (3)

Donde: $0 < \gamma < 1$

Analicemos las raíces:

<u>Caso 1:</u>

Cuando las raíces son números reales diferentes. Porque $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, entonces en (1) se cumple $r_1 r_2 > 0$, lo cual implica que ambas raíces tienen el mismo signo algebraico. Además, ya que $\gamma(1+\alpha) > 0$, indica que (2) que r_1 y r_2 deben ser positivos.

En este caso, la trayectoria Y_t no puede tener oscilaciones

De la desigualdad (3) se obtienen cinco combinaciones:

$$0 < r_2 < r_1 < 1 \Rightarrow 0 < \gamma < 1 \;\; ; \;\; \alpha\gamma < 1$$

$$0 < r_2 < r_1 = 1 \Rightarrow \gamma = 1$$

$$0 < r_2 < 1 < b_1 \Rightarrow \gamma > 1$$

$$1 = r_2 < r_1 \Rightarrow \gamma = 1$$

$$1 < r_2 < r_1 \Rightarrow 0 < \gamma < 1 \;\; ; \;\; \alpha\gamma > 1$$

Si $|r_1| < 1$ y $|r_2| < 1$, la trayectoria $Y_t = A_1(r_1)^t + A_2(r_2)^t + \dfrac{G_0}{1-\alpha}$

Converge al valor $\dfrac{G_0}{1-\alpha}$

Caso 2:

Cuando las raíces son números reales repetidas

Las raíces son: $r = \dfrac{\gamma(1+\alpha)}{2}$, $r > 0$, $\alpha > 0$

Hay tres posibilidades:

$$0 < b < 1 \Rightarrow \gamma < 1 \;\; ; \;\; \alpha\gamma < 1$$
$$b = 1 \Rightarrow \gamma = 1$$
$$b > 1 \Rightarrow \gamma < 1 \;\; ; \;\; \alpha\lambda > 1$$

En la posibilidad (vi), la trayectoria es convergente

En la posibilidad (vi), la trayectoria es convergente

La posibilidad (vi) viola la condición (3), por lo tanto, debe descartarse

La posibilidad (viii), en caso que sea $1 < b < 2$, entonces la trayectoria diverge.

Caso 3:

Cuando las raíces son complejas se analiza el signo de $R = \sqrt{\alpha\gamma}$

Si $R < 1 \Rightarrow \alpha\gamma < 1$

Si $R = 1 \Rightarrow \alpha\gamma = 1$

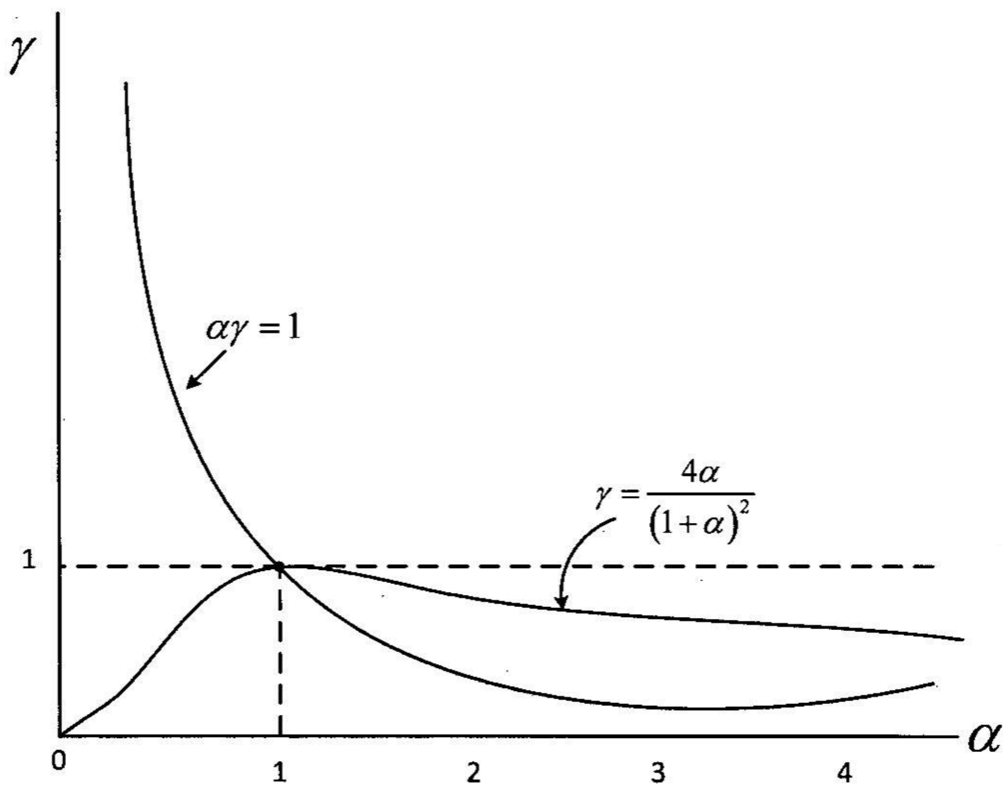
Si $R > 1 \Rightarrow \alpha\gamma > 1$

Solo en el caso (ix), la trayectoria es convergente.

Casos y sub casos 1 del modelo de Samuelson:

Caso	Sub caso	Valores de α y γ	Trayectoria Y_t
1.- Raices reales diferentes $\gamma > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	1C: $0 < r_2 < r_1 < 1$ 1D: $1 < r_2 < r_1$	$\alpha\gamma < 1$ $\alpha\gamma > 1$	No oscilatoria y no fluctuante
2.- Raíces reales repetidas $\gamma = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	2C: $0 < r < 1$ 2D: $r > 1$	$\alpha\gamma < 1$ $\alpha\gamma > 1$	No oscilatoria y no fluctuante
3.- Raíces complejas $\gamma < \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	3C: $R < 1$ 3D: $R \geq 1$	$\alpha\gamma < 1$ $\alpha\gamma \geq 1$	Con fluctuación escalonada

Resumen gráfico respecto a la pareja α (acelerador) y γ (propensión marginal al consumo).



5.2.1. EJEMPLOS

Encuentre los sub casos a los que pertenecen los siguientes conjuntos de valores de α y γ, y describa en forma cualitativa la trayectoria de tiempo de iteración.

$$\alpha = 3.5 \ ; \ \gamma = 0.8$$

Comparar el valor de γ con el valor de $\dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

$$\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{4(3.5)}{(1+3.5)^2} = \frac{14}{20.25} = 0.69$$

Se cumple:

0.8 > 0.69, lo cual implica que las raíces son reales diferentes comparar el producto $\alpha\gamma$ con 1:

$$\alpha\gamma = (3.5)(0.8) = 2.8 > 1$$

Conclusión:

La trayectoria de tiempo Y_t es no oscilatoria y no fluctuante

$$\alpha = 2 \ ; \ \gamma = 0.7$$

$$\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{4(2)}{(1+0.7)^2} = \frac{14}{2.89} = 2.768$$

Se cumple:

$\gamma < 2.768$, lo cual implica que las raíces son complejas.

Comparar $\alpha\gamma$ con 1:

$$\alpha\gamma = (2)(0.7) = 1.4 > 1$$

Conclusión:

La trayectoria de tiempo Y_t es con fluctuación escalonada

$$\alpha = 0.2 \ ; \ \gamma = 0.9$$

$$\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{4(0.2)}{(1+0.2)^2} = \frac{0.8}{1.44} = 0.55$$

Se cumple: $\gamma > 0.55$

Además: $\alpha\gamma = (0.2)(0.9) = 0.8 < 1$

En este caso, las raíces son reales y diferentes. La trayectoria de tiempo Y_t es no oscilatoria y no fluctuante.

$$\alpha = 1.5 \quad ; \quad \gamma = 0.6$$

$$\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{4(1.5)}{(1+0.6)^2} = \frac{6}{2.56} = 2.34$$

Además:

$$\alpha\gamma = (1.5)(0.6) = 0.9$$

Se cumple:

$$\gamma < 2.34 \quad y \quad \alpha\gamma < 1$$

Estamos en el caso 3:

La trayectoria de tiempo Y_t es con fluctuación escalonada.

5.3. LA INTERACCIÓN DE LA INFLACIÓN Y EL DESEMPLEO

Introducción:

En esta sección vamos a plantear un modelo macroeconómico en tiempo continuo, que relaciona las tres siguientes variables.

p : tasa de crecimiento del nivel de presión

π : tasa esperada de inflación

U : tasa de desempleo

Enunciado:

La relación entre las variables macroeconómicas p, π, U está dada por tres ecuaciones diferenciales

$$p = \alpha - T - \beta U + g\pi \qquad \text{(Relación de Phillips con Expectativas)}$$

$$\frac{d\pi}{dt} = i(p - \pi) \qquad \text{(Expectativa Adaptativas)}$$

$$\frac{dU}{dt} = -k(m - p) \qquad \text{(Política Monetaria)}$$

A continuación vamos a deducir el modelo.

En el mercado de trabajo se presentan dos variables:

W : salario monetario
U : tasa de desempleo

Si $w = \dfrac{\dot{W}}{W}$ es la tasa relativa de crecimiento del salario monetario, queda definido la función.

$W = f(U)$ para indicar que "la tasa relativa de crecimiento del salario monetario es función de la tasa de desempleo.

5.3.1. LA INFLACIÓN Y EL DESEMPLEO EN TIEMPO CONTINUO

La Interacción de Phillips

El modelo que relaciona la inflación y el desempleo se plantea a partir de la relación de Phillips.

Sea:

$W(t)$: El salario monetario como función del tiempo y

$w = \dfrac{\dot{W}}{W}$: Tasa relativa de crecimiento del salario monetario W

U : Tasa de desempleo

W es función de U, esto es:

$W = f(U)$, donde $f'(U) < 0$ .... (1)

La tasa de crecimiento del salario en dinero depende (es función) de la tasa de desempleo

Si denotamos por:

p : Precios

$\dfrac{\dot{P}}{P} = p$: Tasa relativa de crecimiento del nivel de precios

Donde: $\dot{P} = \dfrac{dP}{dt}$

T : Incremento de la productividad

La relación entre p, w y T está dado por la ecuación:

$p = w - T$ .... (2)

La tasa de crecimiento del nivel del precio es igual a la tasa de crecimiento del salario monetario menos el incremento de la productividad.

Si $f(U) = \alpha - \beta U \quad ; \quad (\alpha > 0 , \beta > 0)$ .... (3)

La ecuación en (2) se convierte en

$$p = \alpha - \beta U - T \qquad \text{.................................. (4)}$$

La relación de PHILLIP aumentada con expectativas. Si consideramos que π es la tasa esperada de inflación, entonces

Al sumar $g\pi(0 < g \leq 1)$ al segundo miembro de la ecuación dada en (1) obtendremos:

$$w = f(U) + g\pi \quad ; \quad (0 < g \leq 1) \qquad \text{.............................. (5)}$$

Esta ecuación expresa la tasa de crecimiento del salario monetario aumentada con expectativa. De esta manera podemos enlazar la tasa de inflación con la tasa de desempleo, porque el costo creciente del salario $(f'(U) > 0)$, necesariamente conlleva implicaciones inflacionarias.

Si reemplazamos (5) en (2) obtenemos:

$$p = f(U) + g\pi - T \qquad \text{............................... (6)}$$

Como $f(U) = \alpha - \beta U$, entonces

$$p = \alpha - \beta U + g\pi - T$$

$$\boxed{p = \alpha - \beta U - T + g\pi} \quad (\alpha, \beta > 0) \qquad \text{............................... (7)}$$

$$(0 < g \leq 1)$$

La hipótesis de las expectativas adaptivas:

sea p : La tasa real de inflación, y
π : La tasa esperada

Entonces el ajuste entre P y π está dado por:

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi) \quad ; \quad (0 < j \leq 1) \qquad \text{............................... (8)}$$

La retroalimentación de la inflación hacía el desempleo: si M denota el balance del dinero y $m = \frac{\dot{M}}{M}$ es su tasa de crecimiento, la diferencia $(m - P)$ representa la tasa de crecimiento del dinero real.

Entonces la variación de la tasa de desempleo está dada por:

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -k(m-p) \quad , \quad k>0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Las ecuaciones (7), (8) y (9) completan el modelo económico, que nos permite hallar la trayectoria de tiempo de π.

Resolver el modelo:

$$\begin{cases} p = \alpha - T - \beta U + g\pi & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ \dfrac{d\pi}{dt} = j(p-\pi) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ \dfrac{dU}{dt} = -k(m-p) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

Sustituir (1) en (2): $\dfrac{d\pi}{dt} j\left[(\alpha - T - \beta U + g\pi) - \pi\right]$

$$\frac{d\pi}{dt} j(\alpha - T - \beta U) - j(1-g)\pi$$

Derivar respecto a t:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta \frac{du}{dt} - j(1-g)\frac{d\pi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sustituir (2) en (4):

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta\left[-k(m-p)\right] - j(1-g)\frac{d\pi}{dt}$$

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta km - j\beta kp - j(1-g)\frac{d\pi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De (2) despejar p: $p = \pi + \dfrac{1}{j}\dfrac{d\pi}{dt}$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$

(6) en (5): $\dfrac{d^2\pi}{dt^2} = -j\beta km - j\beta k\left[\pi + \dfrac{1}{g}\dfrac{d\pi}{dt}\right]$

Ordenar la ecuación diferencial: $\dfrac{d^2\pi}{dt^2} + [\underbrace{\beta k + j(1-g)}_{a_1}]\dfrac{d\pi}{dt} + \underbrace{j\beta k}_{a_2}\,\pi = \underbrace{1\beta k}_{b}\,m$

Así obtenemos la ecuación diferencial de orden 2: $\frac{d^2\pi}{dt^2}+a_1\frac{d\pi}{dt}+a_2\pi=b$

Porque el segundo miembro es una constante, la solución será otra constante, digamos $\pi(t)=A$. Como $\frac{d\pi}{dt}=0$ y $\frac{d^2\pi}{dt^2}=0$ entonces la ecuación diferencial se reduce en: $0+0+j\beta kA=j\beta km$.

$\Rightarrow \quad A=m$

Por tanto, la solución particular es $\pi(t)=m$

Ejemplo.

Suponer que el modelo tiene la siguiente forma:

$$p=\frac{1}{6}-3U+\pi$$

$$\frac{d\pi}{dt}=\frac{3}{4}(p-\pi)$$

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{1}{2}(m-p)$$

Hallar la trayectoria de π

***Solución*:**

Los valores de los parámetros son:

$$\alpha=\frac{1}{6} \quad , \quad \beta=3 \quad , \quad g=1 \quad , \quad j=\frac{3}{4} \quad , \quad k=\frac{1}{2}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación diferencial del modelo, se obtiene:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2}+\left[(3)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}(1-1)\right]\frac{d\pi}{dt}+\left(\frac{3}{4}\right)(3)\left(\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{3}{4}(3)\left(\frac{1}{2}\right)(m)$$

$$\boxed{\frac{d^2\pi}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{d\pi}{dt}+\frac{9}{8}\pi=\frac{9}{8}m}$$

El polinomio característico es: $r^2+\frac{3}{2}r+\frac{9}{8}=0$

$$r^2+\frac{3}{2}r+\frac{9}{16}=-\frac{9}{8}+\frac{9}{16}$$

$$\left(r+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{16}$$

$$r=-\frac{3}{4}\pm\frac{3}{4}i$$

fy

Elegir: $r=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$

La solución complementaria es:

$$\pi(t)=e^{-\frac{3}{4}t}\left[C_1\cos\left(\frac{3}{4}t\right)+iC_2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}t\right)\right]$$

Hallar la solución particular:

Suponer que la solución particular sea $\pi(t)=A$

Del cual se obtiene: $\pi'(t)=0,\ \pi''(0)$.

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene:

$$0+0+\frac{9}{8}\pi(t)=\frac{9}{8}m$$
$$\Rightarrow\quad \pi(t)=m$$

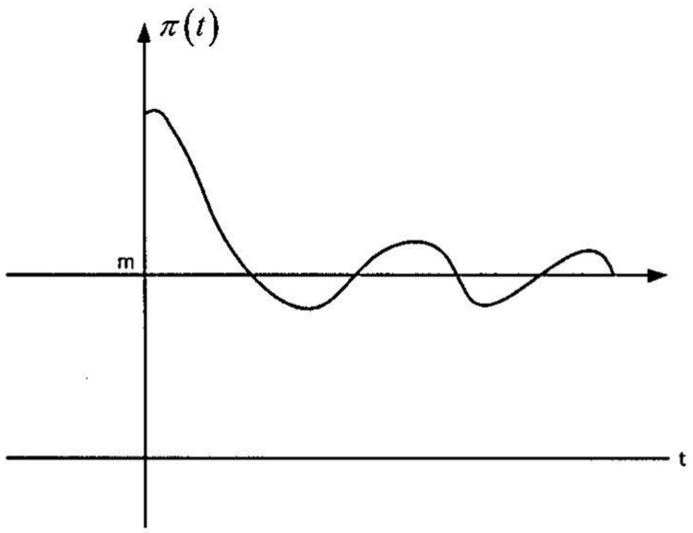
Por lo tanto, la solución general para la tasa esperada de inflación es:

$$\boxed{\pi(t)=e^{-\frac{3}{4}t}\left(C_1\cos\left(\frac{3}{4}t\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}t\right)\right)+m}\qquad t\geq 0$$

Se observa que:

$\lim\limits_{t\to+\infty}\pi(t)=m$, que es el valor de equilibrio

$\pi(t)$ describe una trayectoria de tiempo con fluctuaciones alrededor de m.



Hallar _P_:

De la ecuación: $\frac{d\pi}{dt}=\frac{3}{4}(p-\pi)$ se obtiene

$$\boxed{p=\frac{3}{4}\frac{d\pi}{dt}+\pi}$$

Sólo derivamos π para obtener:

$$p=\frac{4}{3}\left[-\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\left(C_1\cos\frac{3}{4}t+C_2\operatorname{sen}\frac{3}{4}t\right)+e^{-\frac{3}{4}t}\left(-\frac{3}{4}C_1\operatorname{sen}\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}C_2\cos\frac{3}{4}t\right)\right]$$
$$+e^{-\frac{3}{4}t}\left(C_1\cos\frac{3}{4}t+C_2\operatorname{sen}\frac{3}{4}t\right)+m$$

$$p=-C_1e^{-\frac{3}{4}t}\cos\frac{3}{4}t-C_2e^{-\frac{3}{4}t}\operatorname{sen}\frac{3}{4}t-C_1e^{-\frac{3}{4}t}\operatorname{sen}\frac{3}{4}t+C_2e^{-\frac{3}{4}t}\cos\frac{3}{4}t$$
$$+C_1e^{-\frac{3}{4}t}\cos\frac{3}{4}t+C_2e^{-\frac{3}{4}t}\operatorname{sen}\frac{3}{4}t+m$$

$$p=e^{-\frac{3}{4}t}\left(C_2\cos\frac{3}{4}t-C_1\operatorname{sen}\frac{3}{4}t\right)+m$$

Si cumple: $\lim_{t\to+\infty}p=m$

La trayectoria de p es fluctuante y converge hacia el valor de equilibrio m.

Hallar _U_:

De la primera ecuación del problema:

$$p=\frac{1}{6}-3U+\pi$$

Despejamos U y se obtiene: $U=\frac{1}{3}(\pi-p)+\frac{1}{18}$

Donde: $\pi-p=e^{-\frac{3}{4}t}\left((C_1-C_2)\cos\frac{3}{4}t+(C_2-C_1)\operatorname{sen}\frac{3}{4}t\right)$

Por lo tanto:

$$U(t)=\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}t}\left((C_1-C_2)\cos\frac{3}{4}t+(C_2-C_1)\operatorname{sen}\frac{3}{4}t\right)+\frac{1}{18}$$

La trayectoria de esta curva es fluctuante amortiguada y converge al valor de equilibrio $\frac{1}{18}$, lo cual es dinámicamente estable.

Al valor $\frac{1}{18}$ se le llama la tasa natural de desempleo.

5.3.2. LA INFLACIÓN Y EL DESEMPLEO EN TIEMPO DISCRETO

Vamos a plantear el modelo anterior en tiempo discreto.

El modelo:

$$P_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t \quad (\alpha, \beta > 0; \quad 0 < g \leq 1) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(P_t - \pi_t) \quad (0 < j \leq 1) \quad \ldots\ldots (2)$$

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - P_{t+1}) \quad (k > 0) \quad \ldots\ldots (3)$$

Resolver el modelo:

En primer lugar, definimos el incremento de P:

$$\Delta P_t \equiv P_{t+1} - P_t \quad \ldots\ldots (4)$$

En segundo lugar, desplazamos un periodo la ecuación (1)

$$P_{t+1} = \alpha - T - BU_{t+1} + g\pi_{t+1} \quad \ldots\ldots (5)$$

En tercer lugar, restar (5) con (1)

$$P_{t+1} - P_t = -\beta(U_{t+1} - U_t) + g(\pi_{t+1} - \pi_t) \quad \ldots\ldots (6)$$

Sustituir (3) y (2) en (6)

$$P_{t+1} - P_t = \beta k(m - P_{t+1}) + gj(P_t - \pi_t) \quad \ldots\ldots (7)$$

De (1) despejar $g\pi_t$:

$$g\pi_t = P_t - (\alpha - T) + \beta U_t \quad \ldots\ldots (8)$$

Sustituir (8) en (7)

$$P_{t+1} - P_t = \beta k(m - P_{t+1}) + giP_t - j\left[P_t - (\alpha - T) + \beta U_t - \pi_t\right]$$
$$P_{t+1} - P_t = \beta km - \beta kP_{t+1} + gjP_t - jP_t + j(\alpha - T) - j\beta U_t + j\pi_t$$
$$(1+\beta k)P_{t+1} - P_t - gjP_t + jP_t + j\beta U_t = \beta km + j(\alpha - T)$$
$$(1+\beta k)P_{t+1} - \left[1 - j(1-g)\right]P_t + 1\beta U_t = \beta km + j(\alpha - T) \quad \text{.............................} \quad (9)$$

El término Ut se elimina desplazando un periodo toda la ecuación (9)

$$(1+\beta k)P_{t+2} - \left[1 - j(1-g)\right]P_{t+1} + 1\beta U_{t+1} = \beta km + j(\alpha - T) \quad \text{........................} \quad (10)$$

Ahora, restar (10) menos (9):

$$(1+\beta k)P_{t+2} - \left[1 - j(1-g) + 1 + gk\right]P_{t+1} + \left[1 - j(1-g)\right]P_t + j\beta(U_{t+1} - U_t) = 0 \quad \text{......} \quad (11)$$

Sustituir (3) en (11):

$$(1+\beta k)P_{t+2} - \left[1 - j(1-g) + 1 + \beta k\right]P_{t+1} + \left[1 - j(1-g)\right]P_t + j\beta\left[-k(m - P_{t+1})\right] = 0$$

$$\boxed{(1+\beta k)P_{t+2} - \left[1 + jg + (1-j)(1+\beta k)\right]P_{t+1} + \left[1 - j(1-g)\right]P_t = j\beta km}$$

Es la ecuación en diferencias de orden dos, que en su forma estándar es:

$$P_{t+2} + a_1 P_{t+1} + a_2 P_t = C$$

Donde
$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{1 + gj + (1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k} \\[2ex] a_2 = \dfrac{1 - j(1-g)}{1+\beta k} \\[2ex] c = \dfrac{j\beta km}{1+\beta k} \end{cases}$$

Si la trayectoria P_t es convergente cuando $t \to \infty$, el valor de equilibrio temporal de P es:

$$\overline{P} = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} = \frac{1\beta km}{1\beta k} = m$$

Este resultado indica que la tasa de inflación de equilibrio es exactamente igual a la tasa de expansión monetaria.

El análisis de U (tasa de desempleo)
Vamos a deducir la ecuación en diferencias de orden dos para la función U_t

Partimos de la ecuación en (3):

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - P_{t+1}) \quad \text{...} \quad (3)$$

Sustituyendo (5) en (3):

$$U_{t+1}-U_t=-km+k\left[\alpha-T-\beta U_{t+1}+g\pi_{t+1}\right] \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$(1+k\beta)U_{t+1}-U_t=k(\alpha-T-m)+kg\,\pi_{t+1} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

En (10) desplazar un periodo:

$$(1+k\beta)U_{t+2}-U_{t+1}=k(\alpha-T-m)+kg\,\pi_{t+2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Restar (11) menos (10):

$$(1+k\beta)U_{t+2}-(2+k\beta)U_{t+1}+U_t=kg(\pi_{t+2}-\pi_{t+1}) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Si desplazamos un periodo en (2) se obtiene:

$$\pi_{t+2}-\pi_{t+1}=j(P_{t+1}-\pi_{t+1}) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Sustituye (13) en (12):

$$(1+k\beta)U_{t+2}-(2+k\beta)U_{t+1}+U_t=kgj(P_{t+1}-\pi_t) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

De (3) despejar P_{t+1}:

$$kP_{t+1}=U_{t+1}-U_t+km \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Multiplicar por gj :

$$kgjP_{t+1}=gjU_{t+1}-gjU_t+kmgj \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

En (8) se tiene:

$$g\pi_t=P_t-(\alpha-T)+\beta U_t$$

Multiplicar por $-kj$:

$$-kjg\pi_{t+1}=-kjP_{t+1}+kj(\alpha-T)-kj\beta U_{t+1} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Sustituir (15) en (17):

$$-kjg\pi_{t+1}=-j\left[U_{t+1}-U_t+km\right]+kj(\alpha-T)-kj\beta U_{t+1} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Sumar (14) con (18):

$$kgj(P_{t+1}-\pi_{t+1})=\left[gi-j-kj\beta\right]U_{t+1}+\left[-gj+j\right]U_t+kmgj-jkm+kj(\alpha+T) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Sustituir (19) en (14)

$$(1+k\beta)U_{t+2}+\left[-(2+k\beta)-gj+j+kj\beta\right]U_{t+1}+\left[1+gj-j\right]U_t=kmgj-jmk+kj(\alpha-T)$$

Factorizando los parámetros y expresando la ecuación en diferencias de orden dos en su forma estándar, obtenemos:

$$U_{t+2}-\frac{1+gj+(1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k}U_{t+1}+\frac{1-j(1-g)}{1+\beta k}U_t=\frac{kj\left[\alpha-T-(1-g)m\right]}{1+\beta k}$$

TABLAS DE CONTENIDO: Figuras y Gráficos

1. Comportamiento de la solución de una ecuación en diferencias de orden uno.

Si x : es la variable tiempo, la solución de la ecuación $y_{x+1} = Ay_x + B$, $x = 0,1,2,3,\ldots$ es la sucesión:

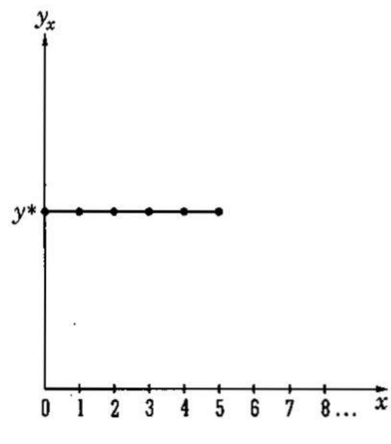
$$y_x = A^x y_0 + B\left(\frac{1-A^x}{1-A}\right) \quad , \quad A \neq 1 \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$y_x = y_0 + Bx \quad , \quad A = 1 \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

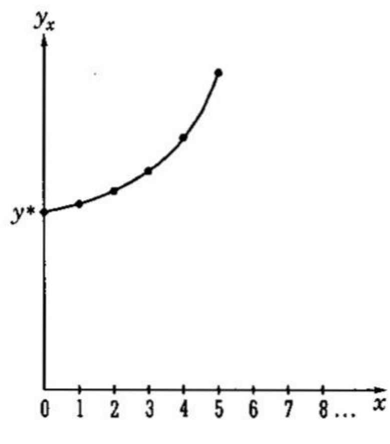
Los términos de la sucesión son: y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , ... ; cada término se halla a partir de la ecuación en diferencias.

El comportamiento de la sucesión, que es una solución particular de una ecuación en diferencias, depende de su convergencia o divergencia.

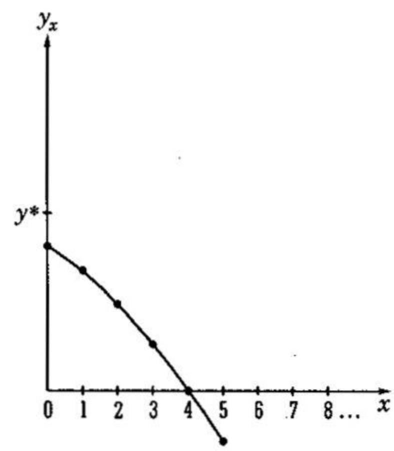
Un esquema de cada tipo de comportamiento se da en las siguientes figuras.



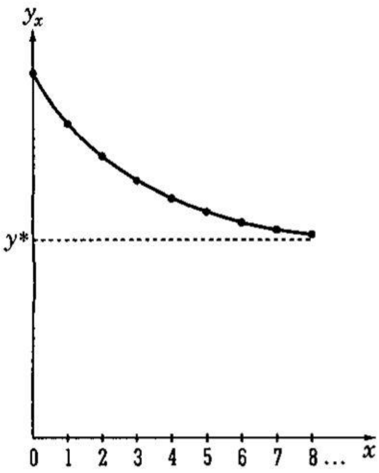
(a)



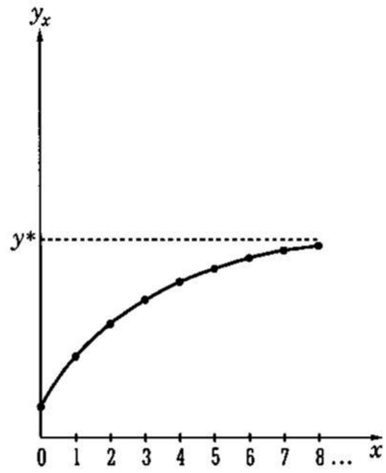
(b)



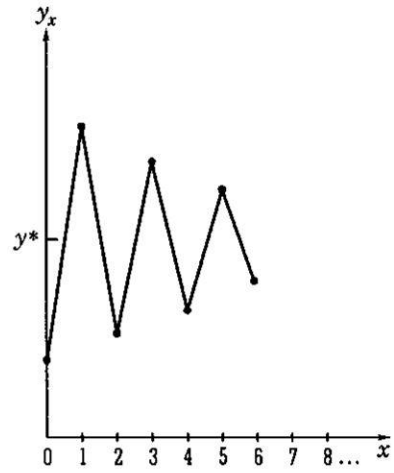
(c)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

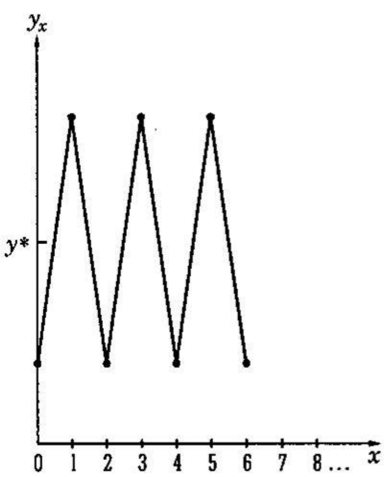
(d)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

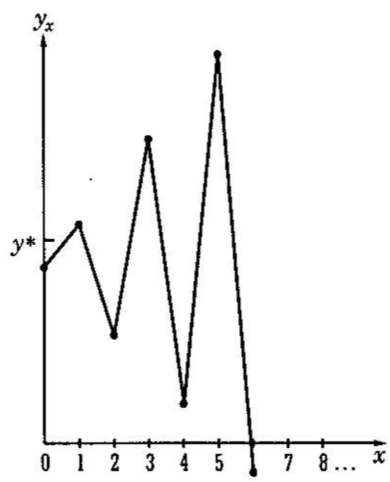
(e)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

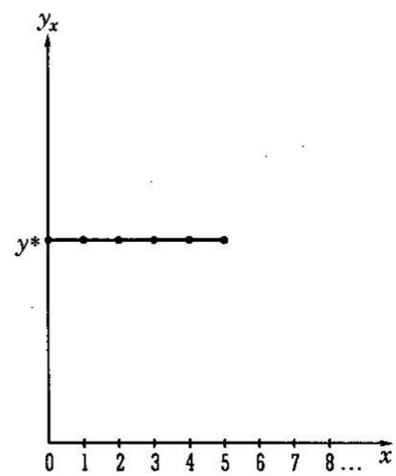
(f)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

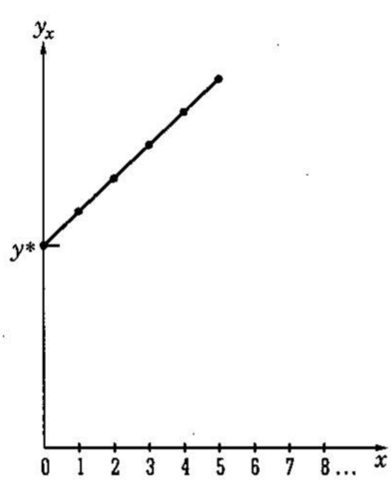
(g)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 7 8…
x

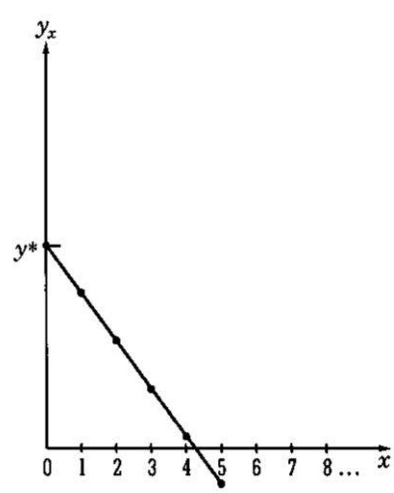
(h)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

(i)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

(j)


y_x
y^*
0 1 2 3 4 5 6 7 8…
x

(k)

2. Tabla de comportamiento de la secuencia solución de $y_{x+1} = A y_x + B$

Caso	A	B	y_0	y_x , $x = 1,2,\ldots$	Comportamiento de la secuencia solución
(a)	$A \neq 1$		$y_0 = y^*$	$y_x = y^*$	Constante: $y_x = y^*$
(b)	$A > 1$		$y_0 > y^*$	$y_x > y^*$	Diverge en $+\infty$ (monótona creciente)
(c)	$A > 1$		$y_0 < y^*$	$y_x < y^*$	Diverge en $-\infty$ (monótona decreciente)
(d)	$0 < A < 1$		$y_0 > y^*$	$y_x > y^*$	Converge en y^* (monótona decreciente)
(e)	$0 < A < 1$		$y_0 < y^*$	$y_x < y^*$	Converge en y^{*-} (monótona creciente)
(f)	$-1 < A < 0$		$y_0 \neq y^*$		Converge en y^* (oscilatoria amortiguada)
(g)	$A = -1$		$y_0 \neq y^*$		Diverge (oscila finitamente)
(h)	$A < -1$		$y_0 \neq y^*$		Diverge (oscila infinitamente)
(i)	$A = 1$	$B = 0$		$y_x = y_0$	Constante $y_x = y_0$
(j)	$A = 1$	$B > 0$		$y_x > y_0$	Diverge en $+\infty$
(k)	$A = 1$	$B < 0$		$y_x < y_0$	Diverge en $-\infty$ (monótona decreciente)

V. REFERENCIALES

CHIANG C., ALFA & WANWRIGHT K. Métodos fundamentales de economía matemática. Mexico: Mc Graw Hill, Cuarta Edición. 2006

LOMELI H. & RUMBOS B. Métodos Dinámicos. México. Thomson. Primera Edición. 2002

CERDÁ, EMILIO. Optimización Dinámica. Madrid. Prentice Hall. Primera Edición. 2001.

JIMENEZ, FELIX. Macroeconomía, enfoque y modelos. Lima. Fondo editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Segunda Edición. 2002.

WEBER, JEAN E. Matemática para administración y economía. México. Prentice Hall. Cuarta Edición. 2001.

BREVE REPASO SOBRE SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

INTRODUCCIÓN

Antes de definir una sucesión de números reales debemos recordar las siguientes definiciones:

1. El conjunto de los números naturales es:

$$I\!N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

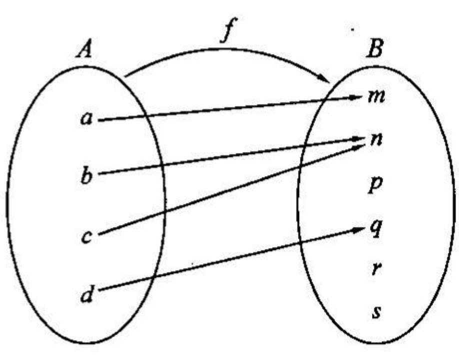
2. El conjunto de los números naturales positivos es:

$$I\!N^{+} = \{ 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

3. Dados dos conjuntos A y B diremos que f es una aplicación de A en B (Denotamos por $f : A \longrightarrow B$), si para cada elemento $x \in A$ corresponde un sólo elemento $y \in B$ tal que $y = f(x)$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, n, p, q, r, s\}$.

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es:



$$f(a) = m$$
$$f(b) = n$$
$$f(c) = n$$
$$f(d) = q$$

4. Dada la aplicación $f : A \longrightarrow B$

Diremos:

i) f es inyectiva, Sii $f(a) = f(b)$ implica $a = b$; $\forall\, a, b \in A$

ii) f es inyectiva, Sii $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$; $a \in A, b \in A$

iii) f es suryectiva, Sii $\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in A$ tal que $y = f(x)$

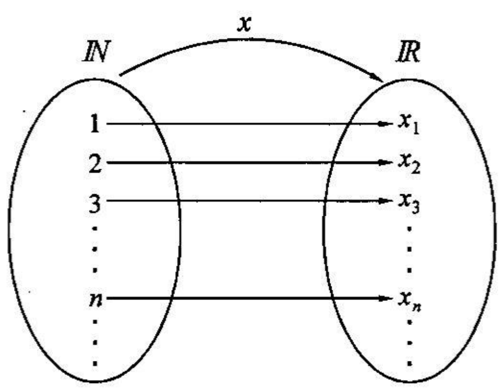
iv) f es suryectiva, Sii $f(A) = B$

v) f es biyectiva, Sii f es inyectiva y suryectiva.

SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

Definición. Una sucesión de números reales es una aplicación x de $I\!N^+$ en $I\!R$.

denotado por
$$\begin{aligned} x : I\!N^+ &\longrightarrow I\!R \\ n &\longrightarrow x_n \end{aligned}$$
, tal que, a cada número $n \in I\!N^+$ corresponde un sólo número real x_n.



También podemos decir que una sucesión de números reales es una aplicación $x : I\!N^+ \longrightarrow I\!R$, definida en el conjunto $I\!N^+ = \{\ 1, 2, 3, \ \dots \}$ y toma valores en el conjunto de los números reales $I\!R$.

En la aplicación
$$\begin{aligned} x : I\!N^+ &\longrightarrow I\!R \\ n &\longrightarrow x(n) \end{aligned}$$

el valor $x(n)$ será representado por x_n , $\forall\, n \in I\!N^+$ y la llamaremos el "n-ésimo término de la sucesión".

NOTACIÓN: $(x_n)_{n\geq 1}$ denota la sucesión $x : I\!N^+ \longrightarrow I\!R$ que al expresar por "extensión" es:

$$(x_n)_{n\geq 1} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo término}}}{x_n}, \ldots)$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots,$ son los términos de la sucesión

Ejemplos:

Son sucesiones de números reales:

1. $(2n)_{n\geq 1}$ que al expresarse por extensión es:

$$(2n) = (2, 4, 6, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo término}}}{2n}, \ldots)$$

2. $(2n-1)_{n\geq 1}$ que al expresarse por extensión es:

$$(2n-1) = (1, 3, 5, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo término}}}{2n-1}, \ldots)$$

3. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ésimo término}}}{\frac{1}{n}}, \ldots\right)$

4. $(3)_{n\geq 1} = (3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots)$ es la sucesión constante.

5. $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

   que al expresar por extensión es $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots (-1)^n \frac{1}{n}, \ldots\right)$ es una sucesión alternante.

SUCESIÓN ACOTADA

Sea la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$. Diremos que $(x_n)_{n\geq 1}$, es acotada, si existen dos números reales a y b tales que $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

Como $a \leq x_n \leq b$ entonces $|x_n| \leq c$, $c = \max\{ |a| , |b| \}$ $\forall\ n \in I\!N^+$

> Podemos hacer la siguiente definición:
>
> $(x_n)_{n\geq 1}$ es ACOTADA, sii $\exists\ c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$; $\forall\ n \in I\!N^+$

Ejemplo.

La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es acotado, porque $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall\ n \in I\!N^+$.

SUCESIÓN ACOTADA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE

a) $(x_n)_{n\geq 1}$ es ACOTADA SUPERIORMENTE, sí $\exists\ b \in I\!R$ tal que $x_n \leq b$, $\forall\ n \in I\!N^+$.

En este caso los términos de la sucesión: $x_n \in \langle -\infty , b]$.

b) $(x_n)_{n\geq 1}$ es ACOTADA INFERIORMENTE, sí $\exists\ a \in I\!R$, tal que $a \leq x_n$, $\forall\ n \in I\!N^+$.

En este caso los términos de la sucesión: $x_n \in [a , +\infty\rangle$.

c) Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es acotada sí y solamente sí es acotada superior e inferiormente.

Ejemplos:

1. La sucesión $(2n)_{n\geq 1} = (2, 4, 6, \ldots)$ es acotada inferiormente. Pues existe $2 \in I\!R$ tal que $2 \leq 2n$, $\forall\ n \in I\!N^+$.

2. La sucesión $(1-2n)_{n\geq 1}$ es acotada superiormente. Pues existe $-1 \in I\!R$, tal que $1-2n \leq -1$, $\forall\ n \in I\!N^+$.

SUCESIÓN CRECIENTE, NO DECRECIENTE, DECRECIENTE, NO CRECIENTE Y MONÓTONA.

1. Una sucesión (x_n) llamase CRECIENTE cuando $x_n < x_{n+1}$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

2. Una sucesión (x_n) es NO DECRECIENTE, si $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

3. Una sucesión (x_n) es DECRECIENTE, si $x_n > x_{n+1}$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

4. Una sucesión (x_n) es NO CRECIENTE, si $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in I\!N^+$.

5. Las sucesiones crecientes, no decrecientes, decrecientes y no crecientes se llaman sucesiones MONÓTONAS.

Ejemplos:

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es decreciente, porque: $n < n+1$ implica: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; $\forall\, n \geq 1$

2. La sucesión $(2n)_{n\geq 1}$ es creciente, porque: $n < n+1$ implica: $2n < 2(n+1)$; $\forall\, n \geq 1$

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Partamos de un ejemplo particular, para luego hacer la definición.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $x_n = \frac{2n+1}{n}$

Nuestro interés es estudiar si los términos x_n se aproximan a un número real "a" cuando n es cada vez más grande.

Veamos: $x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } n = 1 & , & x_1 = 2 + 1 \\
\text{Si } n = 2 & , & x_2 = 2 + \frac{1}{2} \\
\quad\vdots & & \quad\vdots \\
\text{Si } n = 1000 & , & x_{1000} = 2 + \frac{1}{1000} \\
\quad\vdots & & \quad\vdots \\
\text{Si } n \longrightarrow \infty & , & x_n \longrightarrow 2
\end{array}$$

, porque $\frac{1}{n}$ se acerca a cero $\left(\frac{1}{n} \to 0\right)$ cuando n es muy grande $(n \longrightarrow \infty)$.

Lo que ha ocurrido es la siguiente implicación:

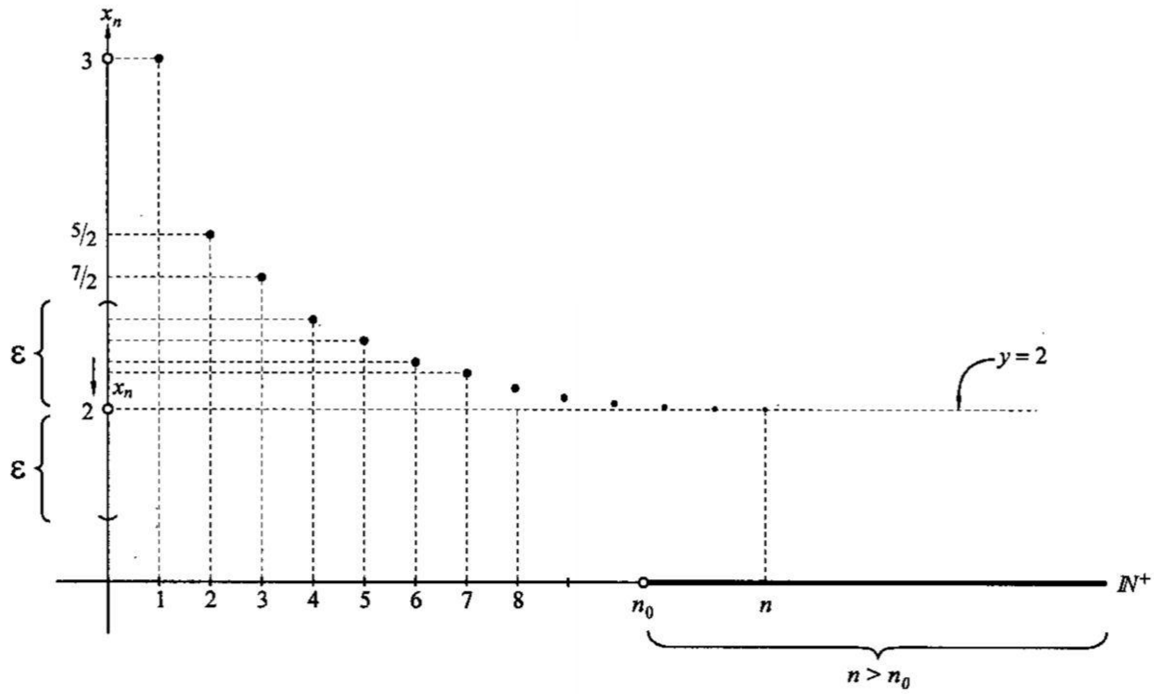
$$\text{cuando } \underbrace{n \longrightarrow \infty}_{\text{“}n\text{ tiende a }\infty\text{”}} \quad \text{entonces} \quad \underbrace{x_n \longrightarrow 2}_{\text{“}x_n\text{ converge a 2”}}$$

Queremos que la diferencia $(x_n - 2)$ sea muy pequeña, tan pequeña que casi es cero, es decir $|x_n - 2| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, esto es posible si existe un número natural n_0 que depende de ε tal que $\forall\, n > n_0$ los términos x_n se acercan a 2.

Ilustración gráfica: Cuando n es suficientemente grande, los números reales $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ se acerca a la recta $y = 2$.

Esto se escribirá : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Porque $n > n_0 \Rightarrow \underbrace{\text{la diferencia entre } x_n \text{ y } 2 \text{ es casi cero.}}_{|x_n - 2| < \varepsilon}$



Como vemos: Para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente es posible obtener un número natural $n_o(\varepsilon)$ tal que $|x_n - 2| < \varepsilon$ siempre que $n > n_0$.

Según esta definición nuestro problema es hallar n_0 en términos de ε, siendo ε cualquier número real positivo (muy pequeño).

Veamos: $|x_n - 2| = \left|\overbrace{2 + \frac{1}{n}}^{x_n} - \overset{\overset{a}{\downarrow}}{2}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

Pero $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$ es verdadero (Propiedad Arquimediana.)

$\Rightarrow \quad n > \underbrace{\tfrac{1}{\varepsilon}}_{n_0}$

hacer: $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Como deseamos que n_0 sea un número natural, hacemos $n_0 = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$

Definición:

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ s.s.s. $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, n_0 \in I\!N^+$; $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Dondé: $\forall$ significa "para todo" o "cualquiera que sea"

$\exists$ significa "existe"

; significa "tal que"

$\Rightarrow$ significa "implica"

Ejemplo 1.

Probar que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Demostración:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{s.s.s.} \quad (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, n_0 \in I\!N)\ ;\ n > n_0 \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$$

Búsqueda de n_0 en términos de ε

Se parte de: $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right|$ y luego se simplifica aplicando propiedades de valor absoluto.

Así: $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pero: $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$$2^{-n} < \varepsilon$$

$$\mathrm{Ln}(2^{-n}) < \mathrm{Ln}\,\varepsilon$$

$$-n\,\mathrm{Ln}\,2 < \mathrm{Ln}\,\varepsilon$$

$$n\,\mathrm{Ln}\,2 > -\mathrm{Ln}\,\varepsilon$$

$$n > \underbrace{\frac{-\mathrm{Ln}\,\varepsilon}{\mathrm{Ln}\,2}}_{n_0} \quad , \quad \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Ln}\,\varepsilon < 0$$

Hacer: $n_0 = \left[\!\left[\frac{-\mathrm{Ln}\,\varepsilon}{\mathrm{Ln}\,2} \right]\!\right] + 1$

Ejemplo 2.

Sea la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n(z) = \frac{z+n}{z-n}$.

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = -1$, $\forall\, z$ tal que $|z| < 1$; $z \in C$.

Prueba:

Por definición:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, n_0 \in I\!N)\ :\ n > n_0 \ \Rightarrow\ |f_n(z) - (-1)| < \varepsilon$$

Búsqueda de n_0 en términos de ε

De: $\left|f_n(z) - (-1)\right| = \left|\frac{z+n}{z-n} + 1\right| = \left|\frac{z+n+z-n}{z-n}\right| = \left|\frac{2z}{z-n}\right| = \frac{2|z|}{|n-z|}$

A continuación, acotemos:

a) $\quad |z| < 1 \Rightarrow 2|z| < 2$

b)
$$\begin{aligned} |n| - |z| &\le |n - z| \\ n - |z| &\le |n - z| \\ n - 1 < n - |z| &\le |n - z| \quad , \quad \text{Pues} \quad |z| < 1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -|z| > -1 \\ n - 1 &< |n - z| \qquad\qquad\quad n - |z| > n - 1 \\ \frac{1}{n-1} &> \frac{1}{|n-z|} \quad , \quad \forall\ n \ge 2 \end{aligned}$$

c) $\quad \frac{1}{|n-z|} < \frac{1}{n-1}$

Multiplicar las desigualdades (a) $\wedge$ (c): $\frac{2|z|}{|n-z|} < \frac{2}{n-1}$

Por la propiedad Arquimediana: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n \in I\!N^{+}$ tal que:

$$\frac{2}{n-1} < \varepsilon$$

$$n - 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n > \underbrace{1 + \frac{2}{\varepsilon}}_{n_0}$$

Hacer: $n_0 = 1 + [\![\frac{2}{\varepsilon}]\!]$

> **Nota:** En este problema afirmamos que la sucesión $(f_n)_{n\ge1}$ converge a -1 en el conjunto $A = \{ z \in C \,/\, |z| < 1 \}$

Ejemplo 3.

Probar que la sucesión $(f_n(x))_{n\ge1}$, donde:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} n(x+1)}{n} \quad \text{converge a "0"} \quad \forall\ x \in I\!R .$$

Demostración:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ s.s.s. $(\forall\ \varepsilon > 0)$ $(\exists\ n_0\ (\varepsilon))$ tal que:

si $n > n_0 \wedge x \in I\!R$ entonces $\left|\frac{\text{sen}\ n\ (x+1)}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\boxed{\text{Búsqueda de } n_0 \text{ en términos de } \varepsilon}$

Se cumple : $\left|\frac{\text{sen}\ n(x+1)}{n}\right| = \frac{|\text{sen}\, n(x+1)|}{|n|}$

Pero : $|\text{sen}(n(x+1))| \leq 1$, $\forall\ x \in I\!R$ y $\forall\ n \in I\!N^+$

Por $\frac{1}{n}$: $\frac{|\text{sen}\ (n(x+1))|}{n} \leq \frac{1}{n}$

Pero : $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$ (principio Arquimediano)

$\Rightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$

hacer $n_0 = [\![\frac{1}{3}]\!] + 1$ Hemos probado que existe n_0 en términos de ε.

Teorema 1 *(Unicidad del límite)*

Si el límite de una sucesión (x_n) existe, es única.

Demostración:

El teorema de unicidad se puede enunciar, también del siguiente modo.

Sí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ \wedge\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, entonces $a = b$

La demostración es por el absurdo.

1. Supongamos que $a \neq b$ ..... $(\sim q)$

2. Si $a \neq b$, entonces $|a - b| > 0$.

3. Pero: $|a-b| = |a-x_n+x_n-b| = |-(x_n-a)+(x_n-b)|$

$$\leq |-(x_n-a)| + |x_n-b|$$

$$= |x_n-a| + |x_n-b|$$

4. Por hipótesis se tiene:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces:

(para $\varepsilon > 0$) ($\exists\, n'_0 \in I\!N$) t.q. $n > n'_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, entonces:

(para $\varepsilon > 0$) ($\exists\, n''_0 \in I\!N$) t.q. $n > n''_0 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

5. Por 4 y 3 obtenemos:

$$|a-b| \leq |x_n-a| + |x_n-b|$$

$$< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad , \quad \text{si } n > n_0 = \max\{n'_0\,, n''_0\}$$

6. Como las desigualdades, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ se cumplen $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular debe cumplirse para $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, siempre que $n > n_0 = \max\{n'_0\,, n''_0\}$

Así tendremos: $|a-b| < \varepsilon$

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$$

$2 < 1$ es una contradicción

7. La contradicción se presento por haber supuesto que $a \neq b$.

Debe ser entonces que $a = b$.

Nota:

Hemos aplicado la tautología

$$[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \Rightarrow q] \equiv [(P_1 \wedge P_2 \wedge \sim q) \rightarrow \sim P_3]$$

Donde:

$P_1 : \lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = a$, $P_2 : \lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = b$, $P_3 : 1 < 2$, $\sim q : a \neq b$

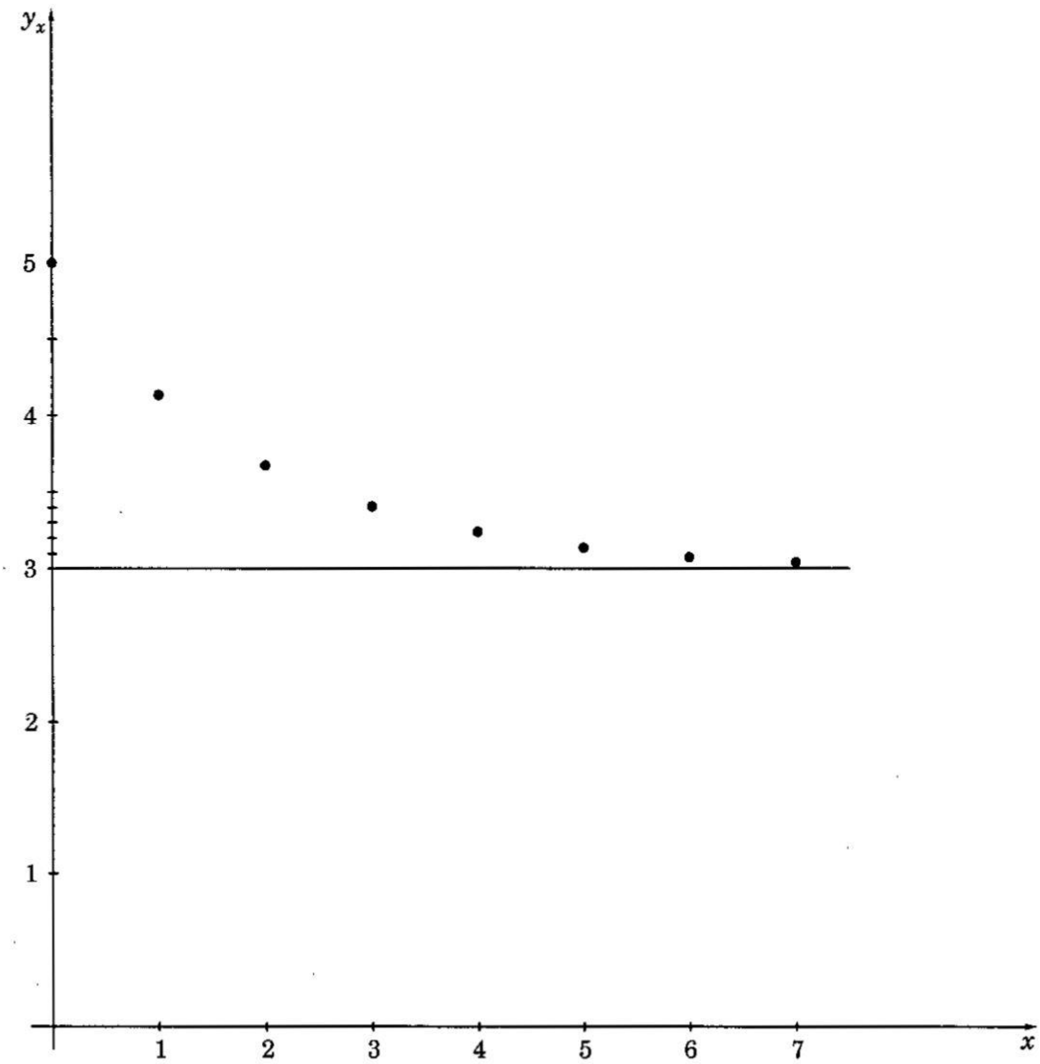
VII. ANEXOS

En 2.5.1. Grafico de $y_x = 2\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$, $x = 0,1,2,\ldots$

Hacer la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7		$x \to +\infty$
y_x	5	4.3	3.8	3.5	3.3	3.2	3.17	3.11		3

Graficar las parejas ordenadas (puntos del plano).



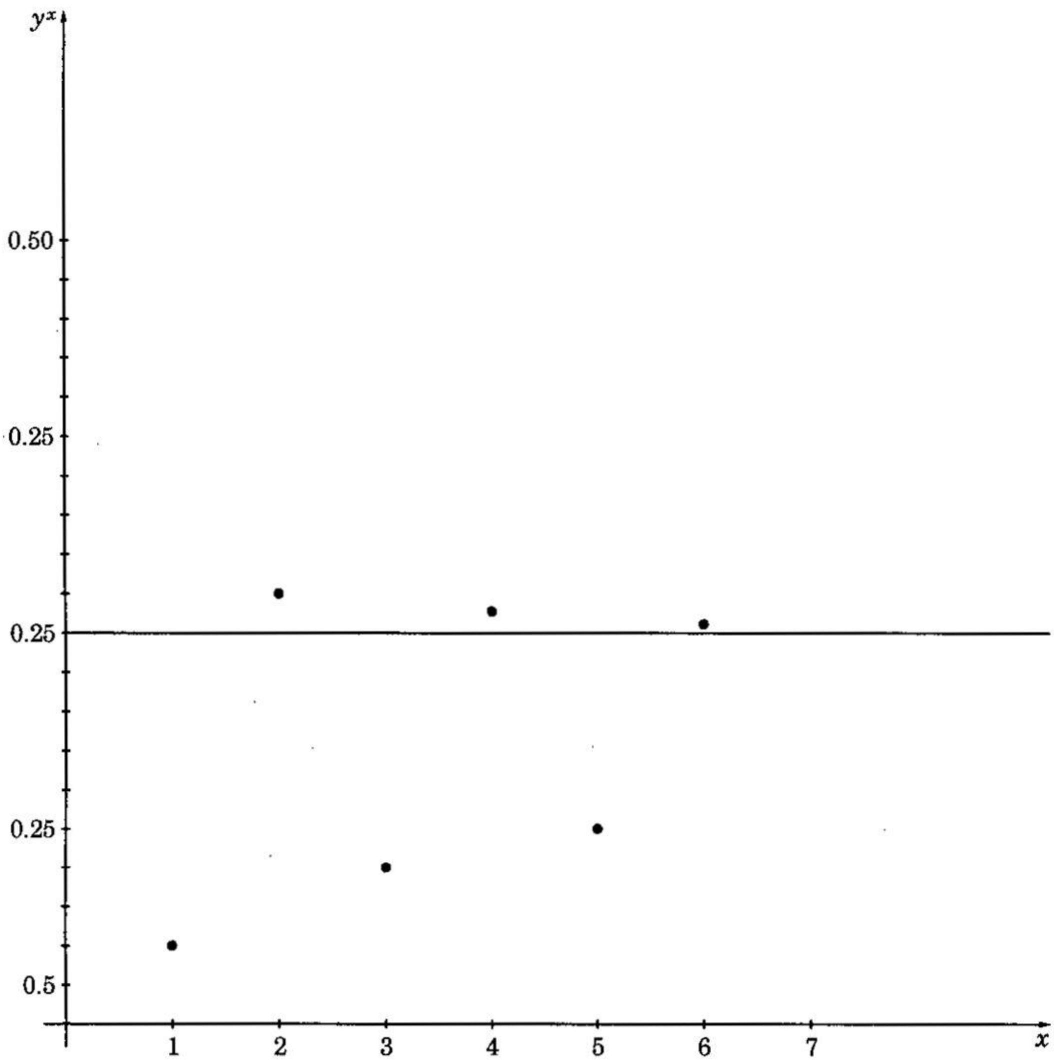
Se observa que $\lim_{x \to +\infty} y_x = 3$

Este resultado indica que la función solución es asintóticamente estable.

En pag. 25. El gráfico de $y_x = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4}$, $x = 0,1,2,\ldots$

Hacer la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	•	•	$x \to +\infty$
y^x	1/2	1/8	5/16	7/32	17/64	31/128	65/256	•	•	1/4



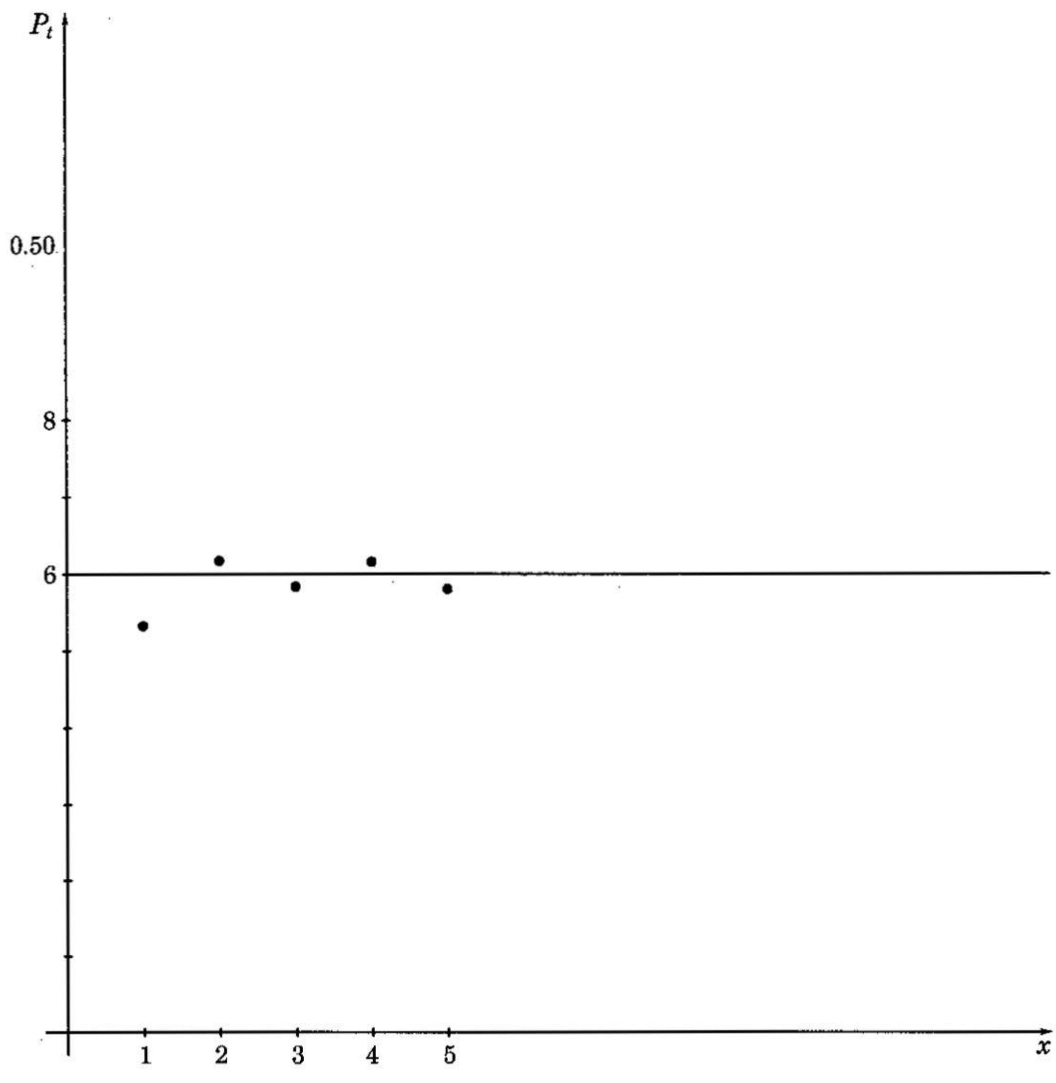
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4}$$

Este resultado indica que la solución es asintóticamente estable.

En pag. 33. El gráfico de $P_t = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^t + 6$, $t = 0,1,2,\dots$

Hacer la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4	5		.....	$t \to +\infty$
P_t	8	16/3	56/9	160/27	488/81	1456/243		.....	6



En este caso se tiene $\lim_{t \to +\infty} P_t = 6$

El comportamiento de la solución es alternante y asintóticamente estable.

Pag. 22 El gráfico de la telaraña conformada por las ecuaciones:

$$Q_{dt} = 22 - 3P_t \qquad ; \qquad Q_{st} = -2 + P_{t-1}$$

Hacer dos ecuaciones equivalentes a las dos anteriores:

Demanda : $Q = 22 - 3P$
Oferta : $Q = -2 + P$

Tabular con dos puntos cada una de las ecuaciones:

Demanda

P	Q
0	22
22/3	0

Oferta

P	Q
0	–2
2	0

El punto de equilibrio es: $(\bar{P}, \bar{Q}) = (6,4)$