UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“DUALIDAD EN OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO”

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

PABLO CHRISTOPER SIFUENTES ALMEYDA

Callao, 2018

PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TESIS
II CICLO DE TESIS

JURADO EVALUADOR PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL EN EL SEGUNDO CICLO DE TESIS

RESOLUCIÓN DECANAL N°147-2018-D-FCNM

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, sito Av. Juan Pablo II Nº 306, Bellavista – Callao, siendo las 16:10 hrs. del día viernes 18 de enero de 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador del II Ciclo de Tesis para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

- Dr. Walter Flores Vega : Presidente
- Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana : Vocal
- Lic. Elmer Alberto León Zárate : Secretario

Designados por Resolución Nº 147-2018-D-FCNM de fecha 28 de diciembre de 2018 a fin de proceder al acto de evaluación de la Tesis titulada: ***"DUALIDAD EN OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO"***, presentada por el señor Bachiller ***SIFUENTES ALMEYDA PABLO CHRISTOPER***.

Contando con la presencia del Supervisor General, Decano de la Facultad de Ciencias Económicas Dr. Pablo Mario Coronado Arrilucea, Supervisor de la FCNM, Mg. Roel Mario Vidal Guzmán, el representante de la Comisión de Grados y Títulos Dr. Richard Saúl Toribio Saavedra y el Coordinador del II Ciclo de Tesis Lic. Absalón Castillo Valdivieso.

A continuación, se dio inicio a la sustentación de la Tesis de acuerdo a lo normado en los numerales del 10.1 al 10.4 del capítulo X de la Directiva para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis en la Universidad Nacional del Callao, aprobada por Resolución Rectoral Nº 754-2013-R del 21 de agosto de 2013, modificada por la Resolución Rectoral Nº 777-2013-R de fecha 29 de agosto de 2013 y la Resolución Rectoral Nº 281-2014-R del 14 de abril de 2014 con la que se modifica el Art. 4.5 del capítulo IV de la organización del Ciclo de Tesis, así como lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado, aprobado por Resolución de Consejo Universitario Nº 135-2017-CU de fecha 22 de junio de 2017 y también lo establecido en el Reglamento de Grados y Títulos de la UNAC aprobado por Resolución Nº 309-2017-CU de fecha 24 de octubre de 2017.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador procedieron a formular las preguntas al indicado bachiller, las mismas que fueron absueltas satisfactoriamente.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado respecto a la evaluación de la Tesis, se acordó calificar la Tesis sustentada por el señor bachiller ***SIFUENTES ALMEYDA PABLO CHRISTOPER***, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

CALIFICACIÓN CUANTITATIVA	CALIFICACIÓN CUALITATIVA
16 (DIECISEIS)	MUY BUENO

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de la sustentación realizada.

Siendo las 16:40 hrs. del día viernes dieciocho de enero del dos mil diecinueve, el señor Presidente del Jurado Evaluador dio por concluido el acto de sustentación de Tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta.

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Secretario

DEDICATORIA

A mi madre por todo su apoyo en mi educación.

A mi Esposa Andrea, mis hijos Valeria y Salvador por ser mi motivo de superación.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme las oportunidades y fortaleza para seguir superándome en lo personal y profesional.

A mi asesor Dr. Pedro Canales García por su enseñanza, paciencia, dedicación y apoyo brindado para la realización de este trabajo.

A los profesores Mg. Roel Vidal y Lic. Absalón Castillo por su gestión en el presente ciclo de tesis.

A mis hermanas, familiares y amigos por su apoyo constante en los momentos determinantes para mi carrera y profesión.

A mis jurados de tesis por permitir lograr un objetivo más en mi vida profesional.

ÍNDICE

TABLAS DE FIGURAS

RESUMEN

A diferencia del caso de la optimización escalar, el tema de la optimización multiobjetivo se caracteriza por muchas más teorías que métodos y/o algoritmos de solución. Esto se debe a que el cálculo de un conjunto de soluciones es claramente más difícil que el cálculo de un punto solución. En particular, la teoría de la dualidad en la optimización multiobjetivo ha resultado de utilidad a muchos investigadores. A pesar de una noción más compleja de optimalidad, resulta que la mayor parte de los resultados de dualidad en optimización escalar puede extenderse y generalizarse en el caso de la optimización multiobjetivo, aunque de manera no trivial.

En el presente trabajo se ha demostrado una dualidad débil y fuerte, así como la igualdad en la frontera eficiente para este problema multiobjetivo dual. También mostramos que las soluciones eficientes del problema clásico de optimización lineal multiobjetivo coinciden con sus soluciones adecuadamente eficientes cuando el espacio de la imagen está parcialmente ordenado por un cono convexo cerrado no trivial. Terminamos definiendo la función Gap para los problemas Primal y Dual lineal multiobjetivo.

Palabras claves: optimización multiobjetivo, dualidad, cono, optimización multicriterio, función gap.

ABSTRACT

Unlike the case of scalar optimization, the subject of multiobjective optimization is characterized by many more theories than methods and / or solution algorithms. This is because the calculation of a set of solutions is clearly more difficult than the calculation of a solution point. In particular, the theory of duality in multiobjective optimization has proved useful to many researchers. Despite a more complex notion of optimality, it turns out that most of the duality results in scalar optimization can be extended and generalized in the case of multiobjective optimization, although not trivially.

In the present work a weak and strong duality has been demonstrated, as well as the equality in the efficient frontier for this dual multiobjective problem. We also show that the efficient solutions of the classical multiobjective linear optimization problem coincide with their suitably efficient solutions when the image space is partially ordered by a non-trivial closed convex cone. We ended up defining the Gap function for the Dual linear and multivalued Primal and Dual problems.

Keywords: multiobjective optimization, duality, cone, multicriteria optimization, gap function.

INTRODUCCIÓN

Hay muchos intereses teóricos, así como motivaciones por consideraciones prácticas, para considerar el caso de un problema de optimización donde la función de costo es una función de valor vectorial, tales como, toma de decisiones multicriterio, optimización de conjuntos, teoría de juegos con valores vectoriales y áreas fronterizas a matemáticas financieras, biosistemas, programación semidefinida y la teoría de control multiobjetivo, de esta manera la optimización vectorial, optimización multicriterio, o problema de optimización multiobjetivo, se refiere a la optimización de una función con valores vectoriales, posiblemente sujeto a una o más restricciones.

La noción de optimización se refiere esencialmente a la comparación de la magnitud de objetos similares. La mayoría de nosotros debe sentirse bastante cómodo cuando hay solo un objetivo para comparar. En la vida real, sin embargo, uno se enfrenta a menudo con el problema de comparar objetos que se miden de diferentes maneras o escalas, con lo cual nos sentiríamos bastante incómodos al respecto. Como resultado, la noción de optimalidad se puede generalizar a las funciones con valores vectoriales en un sentido significativo y riguroso, siempre que adoptemos una forma sistemática de comparar u ordenar vectores. El tema de la optimización multiobjetivo no es nuevo y puede remontarse a 1896 cuando Pareto introdujo la noción de un óptimo de Pareto.

A diferencia de la optimización escalar, donde la solución óptima suele ser un punto, la solución a un problema de optimización multiobjetivo es un conjunto infinito, y por lo tanto generalmente es mucho más difícil resolver un problema de optimización multiobjetivo que un escalar.

Recordemos que para cada problema de programación lineal hay otro problema lineal llamado dual. El problema lineal dual posee muchas propiedades importantes relativas al problema lineal original el cual será utilizado para nuestro estudio.
Se enuncian condiciones que nos permitió establecer relaciones entre las soluciones factibles del problema de optimización multiobjetivo y su respectivo Dual, teniendo en cuenta que el concepto de optimización es primordial en casi todas las áreas de las ciencias e Ingeniería.

En las diversas investigaciones, se puede identificar la importancia del estudio de la optimización multiobjetivo, en la tesis de maestría Pliego (2012), manifiesta; que se muestran dificultades al tratar de resolver problemas de programación lineal multiobjetivo, llegando a la conclusión que la decisión final con respecto a seleccionar la frontera o conjunto de soluciones eficiente dependerá de la perspectiva de aquellas personas que tomen las decisiones; es decir, dependerá del nivel de compromiso que los decisores otorguen a cada objetivo dentro de su particular análisis, de acuerdo a sus necesidades y objetivos. Rios (2010) expresa que, una solución es eficiente si no existe otra solución factible que mejore el valor de un objetivo sin causar una disminución en el valor de alguno de los restantes, esta observación conduce al conjunto eficiente de manera que antes de buscar una solución óptima, se debe buscar un conjunto de soluciones eficientes. De esta manera proponemos ampliar el campo de estudio de los problemas de optimización multiobjetivo, mediante el estudio de la dualidad, el lagrangiano y las funciones gap. Siendo estas bases para la generación de algoritmos que nos puedan dar la solución factible más adecuada para el problema de optimización. En los capítulos siguientes explicaremos resultados de dualidad y su generalización.

Desde un punto de vista teórico, resulta que muchas de las propiedades teóricas de la optimización escalar se pueden generalizar al caso de optimización multiobjetivo, aunque de una manera no trivial. En este sentido, la dualidad es probablemente el mejor ejemplo de estas propiedades generalizables.

Por último, esperamos aportar al estudio de la optimización multiobjetivo y la dualidad siendo este un campo atractivo y amplio de investigación.

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

La optimización es la tarea de encontrar una o más soluciones que minimizan (o maximizan) uno o más objetivos específicos y que satisfacen todas las restricciones (si las hubiera). Un problema de optimización escalar implica una función objetivo única y generalmente da como resultado una única solución, llamada solución óptima. Por otro lado, la optimización lineal multiobjetivo considera varias funciones en conflictos simultáneamente. En tal caso, generalmente no hay una única solución óptima, sino un conjunto de alternativas con diferentes compensaciones, llamadas soluciones óptimas de Pareto, o soluciones no dominadas. A pesar de la existencia de múltiples soluciones óptimas de Pareto, en la práctica, solo unas de estas soluciones deben ser elegidas. Por lo tanto, en comparación con la optimización escalar, en la optimización lineal multiobjetivo, existen al menos dos tareas igualmente importantes: una tarea de optimización para encontrar soluciones óptimas de Pareto (que implique un procedimiento basado en computadora) y una tarea de toma de decisiones para elegir una solución única preferida. El último generalmente requiere información de preferencia de un tomador de decisiones.

El continuo y creciente interés por la optimización lineal multiobjetivo perceptible en muchas aplicaciones, donde abundan los aportes que abordan la teoría de la dualidad, constituye la principal motivación para describir algunos aspectos teóricos. Dado un problema de optimización lineal multiobjetivo (minimizar), por dualidad debemos tener el problema de optimización lineal multiobjetivo (maximizar) para poder investigar la existencia de una dualidad débil, fuerte y, a veces, inversa.

Cuando los valores alcanzados por la función objetivo del problema dual sobre su conjunto factible no superan a los de la función objetivo primal, decimos que tenemos dualidad débil a partir de una solución al problema primal, cuando se descubre una solución al problema dual, tal que las funciones objetivo coinciden, estamos en la situación llamada dualidad fuerte. Inversamente dualidad significa que la existencia de una solución al problema dual permite demostrar que el problema primal tiene una solución tal que los valores de las funciones objetivos coinciden.

Se puede considerar una variedad de tipos de soluciones para un problema de optimización lineal multiobjetivo, cada uno de los cuales da lugar a diferentes vectores duales a los primales. Cuando el problema se especializa en el caso escalar, el vector dual resulta ser un correspondiente escalar dual conocido. De esta manera nuestro estudio será caracterizar las soluciones duales que permitan resolver el problema de optimización primal, partiendo de un modelo de problema general de optimización lineal multiobjetivo, el cual se puede formular de la siguiente manera:

$$\min f(x)$$
$$\text{s.a} \quad x \in X$$

En el presente trabajo utilizaremos un problema de optimización lineal multiobjetivo que es representado matemáticamente de la siguiente manera:

(Problema Primal Multiobjetivo)

$$min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}} Cx$$

sujeto a: $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}x \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; b$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y $b \in \mathbb{R}^m$

(Problema Dual Multiobjetivo)

$$max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}} \; \Lambda b$$

sujeto a: $\mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; 0^\intercal$ y $A^\intercal \Lambda^\intercal \mu = C^\intercal \mu$

para algún $\mu \geq_{int \mathbb{R}^p_+} \; 0$

Sea: $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq_{\mathbb{R}^m_+} b\}$

Y

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times m} | \; \exists \; \mu \geq_{int \; \mathbb{R}^m_+} 0 \; tal \; que \; \mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; 0^\intercal \quad y \quad A^\intercal \Lambda^\intercal \mu = C^\intercal \mu\}$$

Diferentes versiones de los problemas de optimización multiobjetivos lineales primal y dual difieren del presentado aquí, lo cual no representa una dificultad, siendo estos problemas expresados en el formato anterior mediante alguna transformación. En este sentido la investigación presenta un estudio de las condiciones que deben cumplir los problemas de optimización lineal multiobjetivo para encontrar el conjunto de soluciones eficientes y en el mejor de los casos la solución óptima que minimice (maximice) la función objetivo. Es preciso resaltar que esta investigación ayudará a esclarecer aspectos teóricos y precisar conceptos en optimización multiobjetivo y luego trasladarla al campo no lineal y así poder ser implementada en algún método algorítmico y ser aplicados en diversas áreas, permitiendo futuras investigaciones en este campo.

1.2. Formulación del problema

1.2.1 Problema general

¿Se puede verificar las condiciones que nos lleven a la caracterización de las soluciones factibles del Problema de optimización lineal Multiobjetivo Primal y Dual?

1.2.2 Problemas específicos

¿Qué tipos de Dualidad se pueden encontrar para resolver el problema de optimización lineal multiobjetivo?

¿Cuáles son las condiciones que deben verificar las soluciones factibles del problema de optimización Dual –Primal?

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Verificar las condiciones que nos lleven a caracterizar las soluciones factibles del problema Dual y su implicancia para solucionar el problema de optimización lineal multiobjetivo:

$$min_{\mathbb{R}^p_+ \backslash \{0\}} Cx$$

sujeto a: $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}x \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; b$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $b \in \mathbb{R}^m$

1.3.2 Objetivos específicos

- Representar los tipos de Dualidad que permiten resolver el problema de optimización lineal multiobjetivo

$$max_{\mathbb{R}^p_+ \backslash \{0\}} \; \Lambda b$$

sujeto a: $\mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; 0^\intercal$ y $A^\intercal \Lambda^\intercal \mu = C^\intercal \mu$

para algún $\mu \geq_{int \mathbb{R}^p_+} \; 0$

Sea: $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq_{\mathbb{R}^m_+} b\}$

y

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times m} | \; \exists \; \mu \geq_{int \; \mathbb{R}^m_+} 0 \; tal \; que \; \mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \; 0^\intercal \quad y \quad A^\intercal \Lambda^\intercal \mu = C^\intercal \mu\}$$

- Verificar las condiciones que debe cumplir las soluciones factibles del problema de optimización dual – Primal.

1.4. Limitantes de la investigación

La investigación se realizó bajo el estudio de problemas de optimización lineal multiobjetivo, el estudio del caso lineal permitirá al lector, situar aspectos teóricos importantes, para luego poder abordar el caso no lineal y otros más que se presenten, así mismo se establecen relaciones sobre un cono convexo parcialmente ordenado, esto permitirá extender el estudio a espacios más generales e incluso infinito dimensional (Radu, 2011). En este sentido, se encontró poca información teórica en español sobre optimización multiobjetivo, así como escasos ejemplos aplicados al caso lineal, a pesar de que el estudio en optimización multiobjetivo se desarrolla rápidamente, esta información es de acceso restringido.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Presentaremos algunas investigaciones realizadas en el área de optimización relacionadas a dualidad y optimización multiobjetivo, para el caso lineal y su extensión a el caso no lineal, así como su aplicación a los algoritmos de optimización.

Cuartas (2009), en su tesis Metodología para la optimización de múltiples objetivos basada en AG y uso de referencias. Planteo problemas donde se consideran más de un objetivo, a quienes denominó Problemas Multiobjetivo, y su propósito fue optimizarlos de forma simultánea, los cuales, la mayoría de las veces, se encuentran en conflictos. Llegando a la conclusión; cuando se habla de optimalidad, como encontrar la mejor solución posible o una buena aproximación de ésta, dado un conjunto de limitaciones o restricciones. Esta investigación propone de manera detallada y ordenada la búsqueda de soluciones eficientes considerando dos alternativas, la primera una frontera de Pareto y la segunda considerando las preferencias del decisor dentro de un algoritmo genético.

Ribeiro (2013), en su disertación de tesis Algunas contribuciones para la optimización multiobjetivo vía teoría de conos. Se planteó presentar condiciones de óptimo en conos, llegando a la conclusión; un problema que afecta a varias áreas de investigación es garantizar que la solución obtenida es "buena" o no en el sentido de una solución eficiente (débil eficiente). Por eso es importante desarrollar investigaciones en el campo de la teoría de optimización multiobjetivo pues en la práctica se garantizan solo soluciones factibles y muchas veces no óptimas, siendo estas restringidas a algún parámetro de decisión. De esta manera muchos aspectos teóricos pueden ser evidenciados y comprobados mediante la puesta en práctica del análisis de situaciones reales.

Investigaciones como las de Radu,Sorin y Gert (2012), realizaron una revisión del clásico problema de optimización multiobjetivo y realizan su extensión a las soluciones eficientes sobre un cono convexo, así garantizando que el problema de optimización se puede corresponder si cambiamos las condiciones del espacio de decisión. Estos resultados permitieron generalizar algunos resultados como los de Cardoso (2010), en su disertación Método de decisión para problemas de optimización multiobjetivo. Se propuso estudiar el método de descenso para problemas de optimización multiobjetivo, para lo cual introdujo una relación de orden inducida por un cono cerrado y convexo. Además, de cómo calcular una dirección de descenso y probar que todo punto de acumulación de la sucesión generada por el método de descenso es débilmente eficiente. Así el proceso de toma de decisiones aparece implícito en varios problemas que afrontemos razón por la cual es necesario definir quién es el mejor decisor a tomar en la función objetivo.

Radu y Sorin (2011), *On linear vector optimization duality in infinite-dimensional spaces* [dualidad lineal en optimización vectorial en espacios de dimensión infinita] en su artículo ampliaron el estudio a un espacio infinito dimensional, manteniendo el orden de estudio de la dualidad para dimensión finita; por lo cual podemos afirmar que el estudio de la dualidad débil y fuerte y de dualidad inversa será siempre base para poder realizar futuras investigaciones en espacios más complejos.

Por otro lado, Pliego (2012) en su tesis Programación lineal multiobjetivo: análisis, técnicas y casos de aplicación, se planteó el siguiente objetivo … "analizar, estudiar y mostrar los conceptos de programación lineal multiobjetivo, algunos métodos de solución para resolver problemas con más de un objetivo; así como algunos ejemplos de este tipo, donde existen diversos puntos de vista que deben ser tomados en cuenta". Llegando a concluir lo siguiente; "la programación lineal multiobjetivo, es una técnica reciente en investigación de operaciones la cual puede verse como una solución multicriterio a un problema donde los diversos objetivos están en conflicto o no es posible reducirlos a uno solo; ya que permite resolver problemas multiobjetivo, buscando una solución compromiso para satisfacer todos los objetivos del problema". Debido a que cada día el campo de aplicación de la optimización multiobjetivo es más amplia surgen nuevas necesidades de dar a conocer sus campos de acción, en este sentido,

Graña (2015) Métodos de Descenso en Optimización multiobjetivo; realiza una descripción del problema de optimización, realizando un análisis de sensibilidad de los diferentes métodos de descenso aplicados a la optimización multiobjetivo, con lo cual podemos referirnos para evidenciar la aplicación directa de preferencias de soluciones eficientes y optimas del problema de optimización multiobjetivo. En este sentido Goberna y Kanzi (2017) en su investigación *Optimality conditions in convex multiobjective* [condiciones de óptimo en multiobjetivo convexo] introducen una nueva descripción de las condiciones para obtener unas soluciones óptimas que se expresan en los términos de los multiplicadores de Karusk-Kuhn-Tucker y una nueva función gap asociada con el problema dado con la cual se puede tener una optimización escalar que permita encontrar la solución óptima del problema planteado.

En base a los antecedentes presentados, consideramos el marco teórico para nuestra investigación el cual permitirá abordar la investigación de manera más sencilla y didáctica.

2.2. Marco Teórico

2.2.1. Teórico

Definición 2.1: Cono

Un subconjunto C de un espacio vectorial se dice que es un cono si satisface las siguientes propiedades

1) $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{C}$
2) $\alpha\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{C} \quad \forall\, \alpha \geq 0$
3) $\boldsymbol{C} \cap (-\boldsymbol{C}) = \{0\}$

Un cono que cumple la definición anterior también es conocido como un cono convexo punteado o como un cono convexo punteado con vértice en cero, también como cono con vértice cero.

Un cono con vértice x es cualquier conjunto de la forma $x + \boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es un cono.

Ejemplo 1 : Sea el cono $\boldsymbol{C} = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_k \geq 0, k = 1,2\} = \mathbb{R}^2_{\geqq}$, El dibujo de la derecha muestra un cono más pequeño $\boldsymbol{C} \subset \mathbb{R}^2_{\geqq}$ (ver Fig. 2.1)

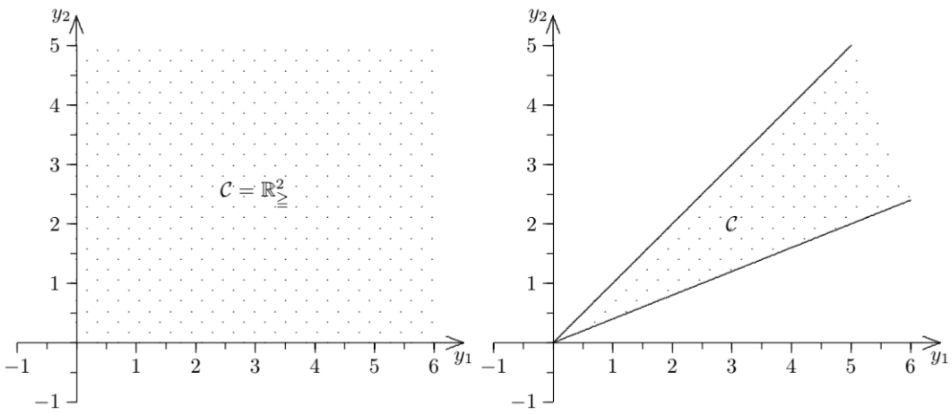

***Figura 2.1**: (Ehrgott, 2005) Illustration of two cones.*

Recuperado de: http://www.math.hcmus.edu.vn/~nvthuy/om/multicriteria%20optimization.pdf

Definición 2.2: Orden de Vectores

Sea C un cono cerrado y convexo en $\mathbb{R}^p$. Dados $\xi\ y\ \eta \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, se definen las relaciones de orden vectorial $\leq_C$, $\leq_{C\backslash\{\mathbf{0}\}}$, $\nleq_{C\backslash\{\mathbf{0}\}}$

$$\xi \leq_C \eta \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta - \xi \in C$$

$$\xi \leq_{C\backslash\{0\}} \eta \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta - \xi \in C\backslash\{\mathbf{0}\}$$

$$\xi \nleq_{C\backslash\{0\}} \eta \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta - \xi \notin C\backslash\{\mathbf{0}\}$$

Si $int C \neq \emptyset$, los siguientes ordenamientos $\leq_{\boldsymbol{int}\,C}$, $\nleq_{\boldsymbol{int}\,C}$, también están definidos

$$\xi \leq_{int\,C} \eta \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta - \xi \in intC$$

$$\xi \nleq_{int\,C} \eta \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta - \xi \notin intC$$

Las relaciones de ordenamiento vectorial, $\geq_C$, $\geq_{C\backslash\{\mathbf{0}\}}$, $\ngeq_{C\backslash\{\mathbf{0}\}}$, $\geq_{\boldsymbol{int}\,C}$, $\ngeq_{\boldsymbol{int}\,C}$ se definen de manera similar.

Definición 2.3: Orden de conjuntos

Sea C un cono cerrado y convexo en $\mathbb{R}^p$ con $int\mathrm{C} \neq \emptyset$. Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^p$, las relaciones de ordenamiento establecidas, $\leqq$, $\leq, <$, $\nleq$, $\nless$, son definido como:

$$\mathcal{A} \leq_{\mathrm{C}} \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \leq_{\mathrm{C}} \eta \ , \ \forall\, \xi \in \mathcal{A},\ \eta \in \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \leq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \leq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \eta \ , \ \forall\, \xi \in \mathcal{A},\ \eta \in \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \leq_{int\,\mathrm{C}} \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \leq_{int\,\mathrm{C}} \eta \ , \ \forall\, \xi \in \mathcal{A},\ \eta \in \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \nleq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \nleq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \eta \ , \ \forall\, \xi \in \mathcal{A},\ \eta \in \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \nleq_{int\,\mathrm{C}} \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \nleq_{int\,\mathrm{C}} \eta \ , \ \forall\, \xi \in \mathcal{A},\ \eta \in \mathcal{B}$$

Las relaciones de ordenamiento vectorial, $\geq_{\mathrm{C}}$, $\geq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}}$, $\ngeq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}}$, $\geq_{\boldsymbol{int}\,\mathrm{C}}$, $\ngeq_{\boldsymbol{int}\,\mathrm{C}}$ se definen de manera similar.

Cuando tenemos dos vectores $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^p$ con $\boldsymbol{z} \leq_{int\,\mathrm{C}} \boldsymbol{y}$, decimos que $\boldsymbol{y}$ es fuertemente dominado debajo por $\boldsymbol{z}$; y si $\boldsymbol{z} \leq_{\mathrm{C}\setminus\{0\}} \boldsymbol{y}$, decimos que $\boldsymbol{y}$ está dominado debajo por $\boldsymbol{z}$.

Definición 2.4: Punto eficiente o mínimo

Sea C un cono cerrado y convexo en $\mathbb{R}^p$ que induce a todas las relaciones de orden como se define anteriormente. Dado un conjunto $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$.

i. Se dice que un punto $\boldsymbol{y}^*$ en $\mathcal{Y}$ es un punto mínimo o punto eficiente si no existe $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\boldsymbol{y} \leq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{y}^*$. El conjunto de todos los puntos mínimos se llama frontera eficiente del conjunto $\mathcal{Y}$:

$$min_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}}\mathcal{Y} = \left\{ y^* | \nexists \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\ tal\ que\ \ \boldsymbol{y} \leq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{y}^* \right\}$$

De manera similar, se dice que un punto $\boldsymbol{y}^*$ en $\mathcal{Y}$ es un punto máximo si no existe $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\boldsymbol{y} \geq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{y}^*$. El conjunto de todos los puntos máximos se denota por

$$max_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}}\mathcal{Y} = \left\{y^* | \nexists \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\ tal\ que\ \ \boldsymbol{y} \geq_{\mathrm{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{y}^* \right\}$$

ii. Supongamos además que $int\mathrm{C} \neq \emptyset$. Un punto $\boldsymbol{y}^*$ en $\mathcal{Y}$ se dice que es punto débilmente mínimo o punto débilmente eficiente si no existe $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\boldsymbol{y} \leq_{int\,\mathrm{C}} \boldsymbol{y}^*$**.** El conjunto de todos los puntos débilmente mínimos se llama el débilmente mínimo o débilmente eficiente frontera del conjunto $\mathcal{Y}$:

$$min_{int\,\mathrm{C}}\mathcal{Y} = \{y^* | \nexists \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\ tal\ que\ \ \boldsymbol{y} \leq_{int\,\mathrm{C}} \boldsymbol{y}^* \}$$

De manera similar, se dice que un punto $\boldsymbol{y}^*$ en $\mathcal{Y}$ es un punto débilmente máximo si no existe $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ tal que $\boldsymbol{y} \geq_{int\,\mathrm{C}} \boldsymbol{y}^*$. El conjunto de todos los puntos máximos se denota por

$$min_{int\,\mathrm{C}}\mathcal{Y} = \{y^* | \nexists \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\ tal\ que\ \ \boldsymbol{y} \geq_{int\,\mathrm{C}} \boldsymbol{y}^* \}$$

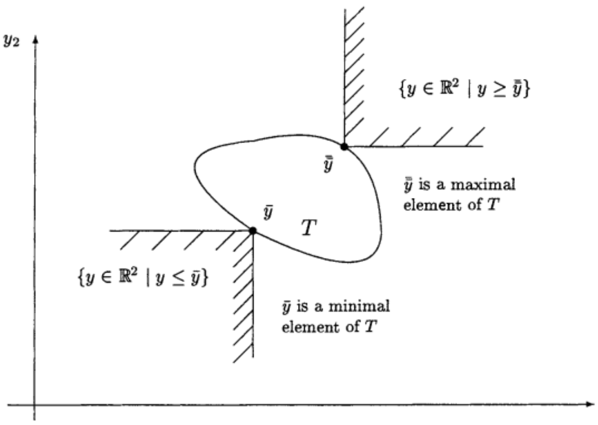

***Figura 2.2**: (Roy, Bernard; Gal, Tomas; Stewart, Theodor J.; Hanne, Thomas;, 1999) Elemento máximo y mínimo de un conjunto T, respecto de* $\mathrm{C} = \mathbb{R}^2_+$

Recuperado de: *https://www.springer.com/la/book/9780792385349*

Definición 2.5: Punto Mínimo

Dado un conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Un punto $\boldsymbol{y}^* \in \mathcal{Y}$ se dice que es un punto mínimo propio o un punto propio eficiente de $\mathcal{Y}$ si es mínimo y existe un escalar finito $M > 0$ tal que para cada i,

$$\frac{y_i^* - y_i}{y_j - y_j^*} \leq M,$$

Para algún j tal que $y_j > y_j^*$ cada vez que $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ y $y_i < y_i^*$

Definición 2.6: Convexidad de funciones con valores vectoriales

Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y C un cono cerrado y convexo en $\mathbb{R}^p$. Una función de valor vectorial $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ se dice que es convexo en C (a menudo simplemente lo llamamos convexo, sin el prefijo C) en $\mathcal{X}$ si para $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} \in \mathcal{X}$, $t \in (0,1)$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \leq_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}})$$

$\boldsymbol{f}$ se dice que es estrictamente convexo en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ si para $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} \in \mathcal{X}$, $t \in (0,1)$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \leq_{\boldsymbol{int\,C}} \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}})$$

Cuando $\boldsymbol{C} = \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{p}}$, se dice que una función con valores vectoriales $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$es $\mathbb{R}_+^p -$ convexo (o simplemente convexo) si cada componente f_i es convexo, y estrictamente $\mathbb{R}_+^p -$ convexo si cada una de las componentes f_i es estrictamente convexo.

Definición 2.7: Derivada direccional

Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$, es una función de valor vectorial.

I. La *derivada direccional* de la función f en $x \in \mathcal{X}$ en la dirección $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Es definida, si existe, por:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d}) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{td}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{t}}$$

II. Se dice que $\boldsymbol{f}$ es *Gateaux diferenciable* en $\mathcal{X}$ si existe $\nabla f\ (x)$ una matriz $p \times n$ de modo que para cualquier $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})$ existe y $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d}) = \nabla f\ (x)d$

III. Si $\boldsymbol{f}$ es *Gateaux diferenciable* en cada $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{X}$, entonces $\boldsymbol{f}$ se dice que *Gateaux diferenciable* en $\mathcal{X}$.

Esta definición nos lleva al siguiente resultado:

Lema 2.7.1: Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ una función de valor vectorial. Supongamos que f es *Gateaux diferenciable* en $\mathcal{X}$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es convexo en $\mathcal{X}$ si y solo si para cada $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$,

$$f(x^2) \geq_{\mathrm{C}} f(x^1) + \nabla f(x^1)(x^2 - x^1)$$

Prueba: Referirse a (Goh and X & Yang, 2002)

■

Definición 2.8: Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una función de valor vectorial *Gateaux diferenciable.* $\boldsymbol{f}$ es $\boldsymbol{C}$ -invex en $\mathcal{X}$ si para cada $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}},\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} \in \mathcal{X}$, existe una función $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}},\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) \in \mathcal{X}$ tal que

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{t\eta}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}},\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) \in \mathcal{X}, \qquad \forall \boldsymbol{t} \in (\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}) \quad \text{y}$$

$$f(x^2) \geq_{\mathrm{C}} f(x^1) + \nabla f(x^1)\boldsymbol{\eta}(x^2,x^1)$$

Definición 2.9: Convexidad y concavidad

Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{C}$ es un cono cerrado convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Sea $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \mathcal{X}$ y $\boldsymbol{t} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ .El conjunto de valores de la función $f: \mathcal{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ se dice que es:

i. I - $\boldsymbol{C}$ convexo si y solo si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \subseteq \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) - \boldsymbol{C}$$

ii. II - $\boldsymbol{C}$ convexo si y solo si

$$\boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) + \boldsymbol{C}$$

iii. I - $\boldsymbol{C}$ concavo si y solo si

$$\boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) - \boldsymbol{C}$$

iv. II - $\boldsymbol{C}$ concavo si y solo si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) \subseteq \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) + \boldsymbol{C}$$

Definición 2.10: Epígrafo

Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{C}$ es un cono cerrado convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. El epígrafo del conjunto de valores de la función $f: \mathcal{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$está definida como:

$$epi(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}} |\, x \in \mathcal{X}, y \in f(x) + \boldsymbol{C}\}$$

Teorema 2.10.1: Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\boldsymbol{C}$ es un cono cerrado convexo en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. $f: \mathcal{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ el conjunto de valores de la función en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$. Entonces f es el tipo II - $\boldsymbol{C}$ convexo si y solo si $epi(f)$ es convexo.

Prueba: Referirse a (Goh and X & Yang, 2002)

■

Definición 2.11: Monotonicidad de las funciones con valores vectoriales

Una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que es monótona si

$$(f(x^1) - f(x^2))^\top (x^1 - x^2) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \mathbb{R}^n$$

Definición 2.12: Función Afín Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Una función de valor matricial $F: \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ se dice que es afín si

$F(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha F(x^1) + \beta F(x^2)$, $\forall \boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \mathcal{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha + \beta = 1$

A. Dualidad Conjugada vectorial

EL concepto de dualidad conjugada puede ser generalizada a funciones de valor vectorial, y esta puede ser llamada dualidad conjugada vectorial, esta dualidad juega un rol importante en la dualidad de optimización multiobjetivo. Presentaremos dos versiones de dualidad conjugada; para el caso matricial y para el caso vectorial. Sea $\boldsymbol{C}$ un cono cerrado y convexo de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$.

Definición 2.13: Conjugada Tipo I o Transformación Fenchel de una función de valor vectorial (versión matricial)

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\,p}$ una función de valor vectorial

I. La conjugada Tipo I o Transformación Fenchel Tipo I de f es definida por un conjunto de valores de la función $f: \mathbb{R}^{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$:

$$f^*(U) = max_{\boldsymbol{C} \setminus \{0\}} \{Ux - f(x) | x \in \mathbb{R}^n\}, \; U \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}}$$

II. La conjugada débil Tipo I o Transformación Fenchel débil Tipo I de f es definida por un conjunto de valores de la función $f_\omega^*: \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$:

$$f_\omega^*(U) = max_{\boldsymbol{int\ C}}\{Ux - f(x)|x \in \mathbb{R}^n\},\ \ U \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}}$$

III. La Transformación Fenchel Tipo I f^{**} de f^* es llamada bi transformación Fenchel del Tipo I o biconjugada Tipo I de f:

$$f^{**}(x) = max_{\boldsymbol{C}\setminus\{0\}} \cup_{U\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}}} \{Ux - f^*(U)\},\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

IV. La Transformación Fenchel débil Tipo I f^{**} de f_ω^* es llamada bi transformación Fenchel débil del Tipo I o biconjugada débil Tipo I de f:

$$f_\omega^{**}(x) = max_{\boldsymbol{int\ C}} \cup_{U\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}}} \{Ux - f_\omega^*(U)\},\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Definición 2.14: Sub gradiente Tipo I de la función de valor vectorial (versión matricial)

Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Una función convexa $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$. Si $U \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}}$ es una matriz

I. Se dice que U es el subgradiente débil de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0} \in \mathcal{X}$ si:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^0}) \nleq_{\boldsymbol{int\ C}}\ \ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{,}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

II. Se dice que U es el subgradiente de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0} \in \mathcal{X}$ si:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^0}) \nleq_{\boldsymbol{C}\setminus\{0\}}\ \ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{,}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

III. Se dice que U es el subgradiente fuerte de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0} \in \mathcal{X}$ si:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^0}) \geq_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{,}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

IV. El conjunto de todos los subgradientes débil de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0}$ es denotado por $\partial_\omega f(x^0)$, el conjunto de todos los subgradientes de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0}$ es denotado por $\partial f(x^0)$ y el conjunto de todos los subgradientes fuerte de Tipo I de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x^0}$ es denotado por $\partial_s f(x^0)$.

Definición 2.15: Transformación Fenchel Tipo II de una función de valor vectorial (versión vectorial)

Sea $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\boldsymbol{p}}$ una función de valor vectorial. Denotemos al vector $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^p$

i. La Transformada Fenchel del Tipo II de $\boldsymbol{f}$ es definida para un conjunto de valores de la función $f_1^*: \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ como sigue:

$$\boldsymbol{f_1^*(y) = max_{C\setminus\{0\}}\{[y^{\mathrm{T}}x]1 - f(x) | x \in \mathbb{R}^n\},\ \ y \in \mathbb{R}^n}$$

ii. La Transformada Fenchel débil del Tipo II de $\boldsymbol{f}$ es definida para un conjunto de valores de la función $f_{\omega 1}^*: \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ como sigue:

$$\boldsymbol{f_{\omega 1}^*(y) = max_{int\,C}\{[y^{\mathrm{T}}x]1 - f(x) | x \in \mathbb{R}^n\}},\ \ y \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

iii. La transformación Fenchel de Tipo II $\boldsymbol{f_1^{**}}$ de $\boldsymbol{f_1^*}$ es llamada la bi transformada Fenchel o la biconjugada de tipo II de $\boldsymbol{f}$ y la transformada Fenchel débil de Tipo II $f_{\omega 1}^{**}$ de $\boldsymbol{f_{\omega 1}^*}$ es llamada la bi transformada Fenchel débil o biconjugada del Tipo II de $\boldsymbol{f}$**.**

Definición 2.16: Subgradiente del tipo II de funciones de valor vectorial (versión vectorial)

Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Una función convexa $\boldsymbol{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$. Si $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ es un vector.

i. Se dice que $\boldsymbol{y}$ es el subgradiente débil de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \mathcal{X}$ si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) - [\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})\mathbf{1}] \nleq_{\boldsymbol{int}\,\boldsymbol{C}} \mathbf{0}\,, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

ii. Se dice que $\boldsymbol{y}$ es el subgradiente de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \mathcal{X}$ si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) - [\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})\mathbf{1}] \nleq_{\boldsymbol{C}\setminus\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}\,, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

iii. Se dice que $\boldsymbol{y}$ es el subgradiente fuerte de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \mathcal{X}$ si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) - [\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})\mathbf{1}] \geq_{\boldsymbol{C}} \mathbf{0}\,, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

iv. El conjunto de todos los subgradientes débil de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ es denotado por $\partial_{\omega 1} f(x^0)$, el conjunto de todos los subgradientes de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ es denotado por $\partial_1 f(x^0)$ y el conjunto de todos los subgradientes fuerte de Tipo II de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ es denotado por $\partial_{s1} f(x^0)$.

B. Escalarización del problema de optimización multiobjetivo

Consideremos dos conjuntos: un conjunto factible $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y su imagen bajo el mapeo vectorial $\boldsymbol{f}, \mathcal{Y} = \boldsymbol{f}(\mathcal{X}) \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$. Consideraremos $\boldsymbol{C} = \mathbb{R}_{+}^{p}$.

Definición 2.17: Problema de optimización multiobjetivo

Sea $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_p})^{\mathrm{T}} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ es un función de valor vectorial, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ es un conjunto factible

$$min_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{f}(x) | x \in \mathcal{X}\} = min_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}}\boldsymbol{f}(\mathcal{X}) \qquad \text{(problema VO)}$$

Idealmente, deberíamos de encontrar una solución $\mathbf{x}^*$ para el problema VO al que $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*) \leq_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ para todas las $\mathbf{x}$ en una vecindad local de $\mathbf{x}^*$, o para toda $x \in \mathcal{X}$, esto es $\boldsymbol{f_i}(\mathbf{x}^*) \leq \ \boldsymbol{f_i}(\mathbf{x})\ \ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{p}.$ Tal punto es llamado punto utópico. Desafortunadamente, los puntos utópicos rara vez existen, como la mayoría de los problemas de optimización multiobjetivo tienen sus funciones objetivo en conflicto. Tenemos que conformarnos con una noción mucho más débil de óptimo.

Definición 2.18: Solución Mínima de Pareto

Consideremos la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ y el conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ para el problema VO.

i. Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ se dice que es una solución mínima (o solución eficiente, solución mínima de Pareto, o solución no dominada) de VO si no existe $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\boldsymbol{f}(x) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$. El conjunto de soluciones mínimas se denota por $arg\mathbf{min}_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}}(\boldsymbol{f}, \mathcal{X})$. $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$ es llamado un punto mínimo o punto eficiente si $\mathbf{x}^*$es una solución mínima. El conjunto $\mathbf{min}_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}}\boldsymbol{f}(\mathcal{X}) = \left\{\boldsymbol{f}(x^*) | \mathbf{x}^* \in \boldsymbol{argmin}_{\mathbb{R}_{+}^{p}\backslash\{0\}}(\boldsymbol{f}, \mathcal{X})\right\}$ es llamado la frontera mínima o frontera eficiente.

ii. Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ se dice que es una solución débilmente mínima (o solución débilmente eficiente, o solución débilmente mínima de Pareto, o solución no fuertemente dominada) de VO si no existe $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\boldsymbol{f}(x) \leq_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$. El conjunto de soluciones débilmente mínima es denotado por $arg\mathbf{min}_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+}(\boldsymbol{f}, \mathcal{X})$. $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$ es llamado un punto débilmente mínimo si $\mathbf{x}^*$ es una solución débilmente mínima. El conjunto $\mathbf{min}_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+}\boldsymbol{f}(\mathcal{X}) = \left\{\boldsymbol{f}(x^*)|\mathbf{x}^* \in \boldsymbol{argmin}_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+}(\boldsymbol{f}, \mathcal{X})\right\}$ es llamada la frontera débilmente mínima.

iii. Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ se dice que es una solución mínimamente adecuada (en el sentido de Geoffrion) de VO si es mínimo y existe un escalar $M > 0$ tal que para cada i,

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M$$

Para algún j tal que $f_j(x) > f_j(x^*)$ cuando $f_i(x^*) - f_i(x)$.

$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$ es llamado un punto mínimamente adecuado si $\mathbf{x}^*$ es una solución mínimamente adecuada. El conjunto de todos los puntos mínimamente adecuados es llamado frontera mínimamente adecuada.

Definición 2.19: Problema de optimización multiobjetivo débil

De acuerdo a la definición 2.18 (ii) podemos definir el siguiente problema:

$$min_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+}\{\boldsymbol{f}(x)|x \in \mathcal{X}\} = min_{\operatorname{int}\mathbb{R}^p_+}\boldsymbol{f}(\mathcal{X}) \qquad \text{(Problema WVO)}$$

Diremos que:

- Resolvemos el problema VO si encontramos el conjunto de todas las soluciones mínimas de $arg\mathbf{min}_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}(\boldsymbol{f},\mathcal{X})$ y la frontera mínima de $\mathbf{min}_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\boldsymbol{f}(\mathcal{X})$;
- Resolvemos el problema WVO si encontramos el conjunto de todas las soluciones débilmente mínimas $arg\mathbf{min}_{\mathrm{int}\,\mathbb{R}^p_+}(\boldsymbol{f},\mathcal{X})$ y la frontera débilmente mínima $min_{\mathrm{int}\,\mathbb{R}^p_+}\boldsymbol{f}(\mathcal{X})$

La solución de problemas de optimización multiobjetivo es un conjunto. Esto es en general un problema mucho más difícil que el caso escalar. Solo unos pocos casos especiales de problema VO se han resuelto por completo. Dos de estos casos se encuentran en el caso lineal (Yu, 1985) y el caso cuadrático (Goh & Yang, 1996). Aparte de estos, hay pocos resultados satisfactorios en encontrar el conjunto completo de soluciones mínimas y fronteras mínimas numéricamente para problemas generales no lineales. Para el resto de esta sección, presentaremos algunos resultados teóricos importantes para resolver el problema de optimización multiobjetivo.

En la práctica, los problemas de optimización multiobjetivo a menudo se reducen a problemas de optimización escalar mediante la composición de la función vectorial objetivo con una llamada utilidad o función de valor. Hay dos requisitos fundamentales de todas las funciones objetivo utilizado para escalarizar problemas de optimización multiobjetivos:

1. Deben cubrir todas las soluciones mínimas para cualquier problema de optimización multiobjetivo, es decir, todas las soluciones mínimas se pueden calcular resolviendo algún problema de optimización escalarizada.

2. Las soluciones al problema de optimización escalarizado también deberían ser soluciones mínimas al problema de optimización multiobjetivo.

C. Condiciones de óptimo para la optimización multiobjetivo

Enunciaremos algunas condiciones básicas de óptimo para la optimización multiobjetivo donde el conjunto factible se define mediante un conjunto explícito de restricciones. Considere el siguiente problema de optimización multiobjetivo.

Definición 2.20: Problema de optimización multiobjetivo restringido por desigualdades

Sea $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ funciones diferenciables

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \qquad \text{(problema VO)}$$

Sujeto a: $\mathbf{x} \in \mathcal{X} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mid \boldsymbol{g}(\mathbf{x}) \leq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}\right\}$

Ejemplo 2: Sea el problema lineal multiobjetivo

$$min(3x_1 + x_2;\ -x_1 - 2x_2)$$

$$\text{s.a.} \qquad x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x \geqq 0$$

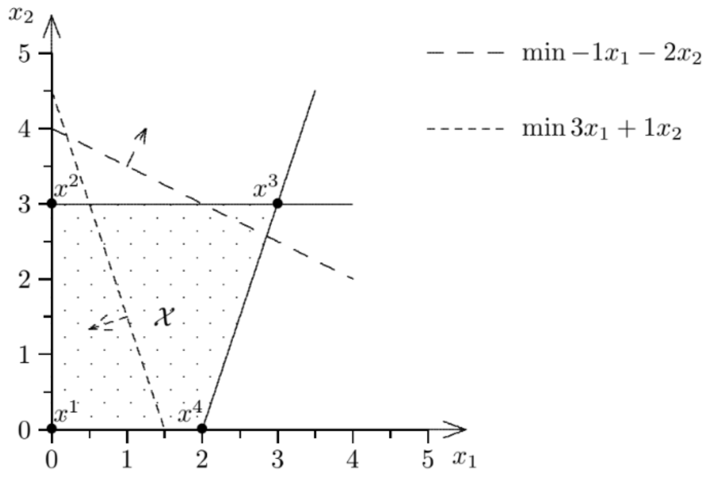

Figura 2. 3*: (Ehrgott, 2005) Región factible del problema lineal multiobjetivo*

Recuperado de:
http://www.math.hcmus.edu.vn/~nvthuy/om/Multicriteria%20Optimization.pdf

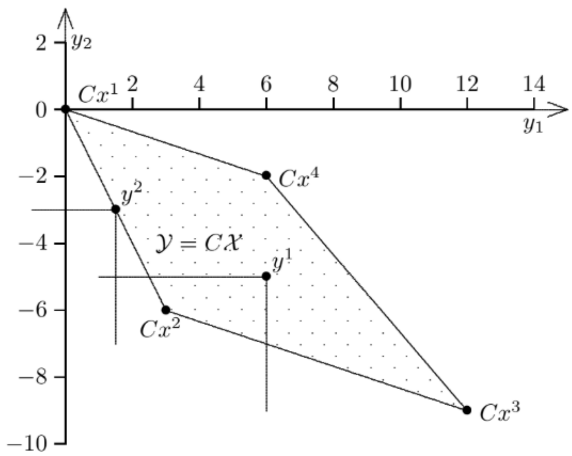

Figura 2.4*: (Ehrgott, 2005) Conjunto factible del espacio objetivo.*

Recuperado de:
http://www.math.hcmus.edu.vn/~nvthuy/om/Multicriteria%20Optimization.pdf

Definición 2.21: Condiciones de restricción de Kuhn-Tucker

Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ se dice que satisface las condiciones de restricción de Kuhn-Tucker si, para algún $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tal que $\nabla g_j(x^*)\boldsymbol{y} \leq 0$ para todo $j \in \mathcal{J} = \{i \mid \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$ (el conjunto activo), existe un escalar $\bar{t} > 0$, una función $\psi: [0, \bar{t}] \longrightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ diferenciable en $t = 0$, y un escalar $\alpha > 0$ tal que

$$\psi(0) = \boldsymbol{x}^*,$$
$$\boldsymbol{g}(\psi(t)) \leq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}\ , \forall\, \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \bar{\boldsymbol{t}}],$$
$$\dot{\psi}(0) = \alpha \boldsymbol{y}$$

Teorema 2.21.1: Kuhn-Tucker condición necesaria para soluciones débilmente mínimas

Sea $\boldsymbol{x}^*$ tal que las condiciones de restricción de Kuhn-Tucker se satisfacen. Si $\boldsymbol{x}^*$ es una solución mínimamente débil al problema VO, entonces es necesario que exista $\mu \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ tal que

i. $\mu^\intercal \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \lambda^\intercal \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}^\intercal$
ii. $\lambda^\intercal \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0$
iii. $\mu \geq_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}} \mathbf{0},\ \lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}$

Prueba: (Goh and X & Yang, 2002)

■

Teorema 2.21.2: Kuhn-Tucker condición suficiente para VO débil

Si las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son convexas, y si las condiciones de Kuhn-Tucker (i), (ii) y (iii) del teorema anterior se cumplen, entonces $\boldsymbol{x}^*$ es una solución débilmente mínima para el problema VO.

Prueba: (Goh and X & Yang, 2002)

■

Definición 2.22: Kuhn-Tucker eficiencia adecuada

Una solución $\boldsymbol{x}^*$ del problema VO se dice que es adecuadamente eficiente o mínimamente adecuada en el sentido de Kuhn Tucker si es mínima y no existe $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tal que

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} \leq_{\mathbb{R}^p_+ \backslash \{0\}} \mathbf{0}^\intercal$$

$$\nabla g_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} \leq \mathbf{0}\ ,\ \forall\ j \in \mathcal{J} = \{i \mid \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$$

En el caso de que $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ sean convexos, se puede demostrar que eficiencia adecuada (Kuhn-Tucker) implica la eficacia adecuada (Geoffrion)

2.2.2. Conceptual

Definición 2.23: Dualidad en Optimización lineal multiobjetivo

Consideremos el problema primal de optimización lineal multiobjetivo

$$min_{\mathbb{R}^p_+ \backslash \{0\}} \boldsymbol{C}x$$

sujeto a: $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}x \geq_{\mathbb{R}^m_+} b$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y $b \in \mathbb{R}^m$

y su problema Dual

$$max_{\mathbb{R}^p_+ \backslash \{0\}}\ \Lambda b$$

sujeto a: $\mu^{\intercal}\Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} 0^{\intercal}$ y $A^{\intercal}\Lambda^{\intercal}\mu = C^{\intercal}\mu$

para algún $\mu \geq_{int\mathbb{R}^p_+} 0$

Sea: $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq_{\mathbb{R}^m_+} b\}$

Y

$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times m} | \exists\ \mu \geq_{int\ \mathbb{R}^m_+} 0\ tal\ que\ \mu^{\intercal}\Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} 0^{\intercal}\quad y\quad A^{\intercal}\Lambda^{\intercal}\mu = C^{\intercal}\mu\}$

Muchos problemas de programación lineal multiobjetivo, pueden ser escritos en el formato anterior utilizando una transformación adecuada. Presentamos un resultado que caracteriza el resultado de dualidad para los problemas mencionados.

Teorema 2.23.1: Dualidad en programación lineal multiobjetivo

I. (Dualidad débil) $\forall\ (x, \Lambda) \in \mathcal{X} \times \mathcal{L}$, $\Lambda b \ngeq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}} \boldsymbol{C}x$

II. (Dualidad fuerte) Si $\Lambda^* \in \mathcal{L}$ y $x^* \in \mathcal{X}$ satisface $\Lambda^* b = \boldsymbol{C}x^*$, entonces $x^* \in argmin_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\}$ y $\Lambda^* \in argmax_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$

III. (Igualdad de frontera eficiente)

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\} = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Prueba:

I. Supongamos lo contrario, existe algún $x \in \mathcal{X}$ y $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que

$$\Lambda b \geq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}} \boldsymbol{C}x \tag{2.23.1}$$

desde que $\Lambda \in \mathcal{L}$, existe $\mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}$ tal que

$$\mu^{\intercal}\Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^{\intercal}\ \text{y} \tag{2.23.2}$$

$$\mu^{\intercal}\Lambda A = \mu^{\intercal}\boldsymbol{C} \tag{2.23.3}$$

Entonces las ecuaciones (2.23.2), (2.23.3) y la factibilidad de x implican que

$$\mu^{\intercal}\boldsymbol{C}x = \mu^{\intercal}\Lambda Ax \geq \mu^{\intercal}\Lambda b \tag{2.23.4}$$

Pero de (2.23.1) y del hecho que $\mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}$, tenemos

$$\mu^{\intercal}\Lambda b > \mu^{\intercal}\boldsymbol{C}x, \tag{2.23.5}$$

Lo cual es una contradicción a (2.23.4). Así (I) se cumple.

II. Supongamos lo contrario, es decir

$$x^* \notin argmin_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\}$$

Entonces, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que

$$\boldsymbol{C}x \leq_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}} \boldsymbol{C}x^* = \Lambda^* b$$

Lo cual contradice la dualidad débil (I)

Similarmente, si suponemos que

$$\Lambda^* \notin argmax_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Entonces existe $\Lambda \in \mathcal{L}$ tal que,

$$\Lambda b \geq_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}} \Lambda^* b = \boldsymbol{C}x^*$$

Lo cual contradice la dualidad débil (I)

III. En primer lugar, probaremos la inclusión

$$min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Si x^* es una solución mínima del primal, esto es

$$\boldsymbol{C}x^* \in min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\}$$

Por el teorema 7.3.2 (I) (Goh and X & Yang, 2002) afirma que existe $\mu \geq_{int\, \mathbb{R}_+^p} \mathbf{0}$ tal que

$$\mu^\intercal \boldsymbol{C} x^* = min\{\mu^\intercal \boldsymbol{C} x \mid x \in \mathcal{X}\} \qquad (2.23.6)$$

Considere el problema lineal escalar definido por el lado derecho de (2.23.6) y su dual. Utilizando el resultado de dualidad de programación lineal, expresemos el problema en la siguiente forma estándar equivalente:

$$\min \tilde{c}^\intercal \tilde{x} \text{ sujeto a } \tilde{A}\tilde{x} = b,\ \tilde{x}^\intercal \geq_{\mathbb{R}^{2n+m}} \mathbf{0}\ ,$$

Donde $\tilde{x}^\intercal = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{bmatrix}$, $\tilde{c}^\intercal = \mu^\intercal[\boldsymbol{C}, -\boldsymbol{C}, \mathbf{0}]$, $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I}]$

Sea $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ la base de $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ correspondiente al solución óptima (básica factible) y $\tilde{c}_{\tilde{B}}^\intercal$ es la correspondiente vector costo (sub vector costo) de $\tilde{c}^\intercal$. Por las condiciones de óptimo de la programación lineal se tiene

$$\tilde{c}^\intercal - \tilde{c}_{\tilde{B}}^\intercal \tilde{B}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{A}} \geq_{\mathbb{R}^{2n+m} \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}^\intercal\ ,$$

O expresando $\tilde{c}_{\tilde{B}}^\intercal$ como $\tilde{c}_{\tilde{B}}^\intercal = \mu^\intercal \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}$ (donde $\boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}$ es una sub matriz de $\boldsymbol{C}$) tenemos:

$$\mu^\intercal \boldsymbol{C} - \mu^\intercal \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}} \tilde{B}^{-1} \boldsymbol{A} \geq_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{0}^\intercal \qquad (2.23.7)$$

$$-\mu^\intercal \boldsymbol{C} + \mu^\intercal \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}} \tilde{B}^{-1} \boldsymbol{A} \geq_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{0}^\intercal \qquad (2.23.8)$$

$$\mu^\intercal \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}} \tilde{B}^{-1} \geq_{\mathbb{R}_+^m} \mathbf{0}^\intercal \qquad (2.23.9)$$

(2.23.7) y (2.23.8) juntos implican que

$$\mu^\intercal \left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}} \tilde{B}^{-1} \right) = \mathbf{0}^\intercal \qquad (2.23.10)$$

Sea

$$\Lambda^* = \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}\widetilde{B}^{-1}$$

Entonces (2.23.10) se reduce a:

$$\mu^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{C} - \Lambda^*\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} \tag{2.23.11}$$

y (2.23.9) se reduce a

$$\mu^{\mathsf{T}}\Lambda^* \geq_{\mathbb{R}_+^m} \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} \tag{2.23.12}$$

Por lo tanto $\Lambda^* \in \mathcal{L}$. Además

$$\Lambda^* b = \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}\widetilde{B}^{-1}b = \boldsymbol{C}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}\boldsymbol{x}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* \text{ ,}$$

Donde $\boldsymbol{x}^*$ es la solución óptima del problema escalar lineal (2.23.6), y $\boldsymbol{x}_{\widetilde{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{0}}$ es su componente básica. Así Λ^* es una solución máxima del VLP dual por (II), y por lo tanto

$$min_{\mathbb{R}_+^p\setminus\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq max_{\mathbb{R}_+^p\setminus\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Inversamente, hacer que Λ^* es una solución máxima del problema VLP dual, entonces,

$$\forall\, \mu \geq_{int\, \mathbb{R}_+^p} \boldsymbol{0} \;\; \nexists\, \Lambda \in \mathcal{L} \text{ tal que } \mu^{\mathsf{T}}\Lambda b > \mu^{\mathsf{T}}\Lambda^* b$$

Sea $\lambda = \Lambda^{\mathsf{T}}\mu$. Luego se sigue que

$$\nexists\, \lambda \geq_{\mathbb{R}_+^m} \boldsymbol{0} \;\; \nexists\, \mu \geq_{int\, \mathbb{R}_+^p} \boldsymbol{0} \;\text{ tal que } \lambda^{\mathsf{T}}b > \mu^{\mathsf{T}}\Lambda^* b \text{ y } \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\lambda = \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\mu \tag{2.23.13}$$

En otras palabras, el sistema

$$\left\{(\lambda\, , \mu) \geq_{\mathbb{R}_+^{p+m}} \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} \mid \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\lambda = \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\mu \text{ y } \lambda^{\mathsf{T}}b > \mu^{\mathsf{T}}\Lambda^* b\right\}$$

es inviable. Por el teorema de transposición de Gale (teorema 3.4.9 (Goh and X & Yang, 2002)), esto es verdadero si y solo si el sistema

$$\left\{(\boldsymbol{x}^*, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geq_{\mathbb{R}_+^m} \eta b, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* \leq_{\mathbb{R}_+^p} \eta\Lambda^* b\, , \eta > 0\right\}$$

es no vacío. Sin pérdida de generalidad, sea $\eta = 1$, entonces $\boldsymbol{x}^*$ satisface $\boldsymbol{Ax} \geq_{\mathbb{R}_+^m} b$ y por lo tanto es factible para el VLP primal. Además,

$$\boldsymbol{Cx}^* \leq_{\mathbb{R}_+^p} \Lambda^* b \tag{2.23.14}$$

(2.23.14) junto con (I) implica que

$$\boldsymbol{Cx}^* = \Lambda^* b \tag{2.23.15}$$

Así por la dualidad fuerte (II),

$$\Lambda^* b \in argmin_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}} \{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\},$$

y por lo tanto

$$max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}} \{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\} \subseteq min_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}} \{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\}$$

■

Por comparación, presentamos otra variante de la VLP primal y dual. El siguiente resultado de dualidad se debe a Sawaragi (Sawaragi, Nakayama, & Tanino , 1985), donde las relaciones de orden para el primal son inducidas por algún cono poliedrico convexo punteado cerrado C, $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$ en$\mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}$, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ respectivamente, mientras que las relaciones de orden para el dual son inducidos por los conos polares positivos de C, $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$ respectivamente. El cono polar positivo de un cono $\mathcal{M}$ se define por:

$$\mathcal{M}^0 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mid x^{\intercal} y \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{M}\}$$

Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}_+^n$ entonces $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}$. En el siguiente resultado, se particulariza el resultado a un caso donde el cono ordenado es el ortogonal positivo, y como tal el cono ordenado para el dual es también el ortogonal positivo.

Definición 2.24: (versión Sawaragi problema vectorial lineal primal y dual)

(Problema Primal VLP)

$$min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}}\boldsymbol{C_s}x$$

sujeto a: $x \geq_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{0}$, $\mathrm{A}_s x \geq_{\mathbb{R}^m_+} b_s$

donde, $C_s \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A_s \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $b_s \in \mathbb{R}^m$

(Problema dual VLP)

$$max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}} \Lambda_s b_s$$

sujeto a: $\mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} 0^\intercal$ y

$$A_s^\intercal \Lambda_s^\intercal \mu \leq_{\mathbb{R}^p_+} C_s^\intercal \mu$$

para algún $\mu \geq_{int\mathbb{R}^p_+} 0$

Sea: $\mathcal{X}_s = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{0},\ A_s x \geq_{\mathbb{R}^m_+} b_s\}$

y

$$\mathcal{L}_s = \{\Lambda_s \in \mathbb{R}^{p\times m} |\ \exists\ \mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}\ tal\ que\ \mu^\intercal \Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\intercal\ \ y\ \ A_s^\intercal \Lambda_s^\intercal \mu \leq_{\mathbb{R}^p_+} C_s^\intercal \mu\}$$

Teorema 2.24.1: Dualidad en programación lineal multiobjetivo versión Sawaragi

I. (Dualidad débil) $\forall\ (x, \Lambda) \in \mathcal{X}_s \times \mathcal{L}_s$, $\Lambda_s b_s \ngeq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}} \boldsymbol{C_s} x$

II. (Dualidad fuerte) Si $\Lambda_s^* \in \mathcal{L}_s$ y $x^* \in \mathcal{X}_s$ satisface $\Lambda_s^* b_s = \boldsymbol{C_s} x^*$, entonces $x^* \in argmin_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{C_s} x \mid x \in \mathcal{X}_s\}$ y $\Lambda_s^* \in argmax_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda b_s \mid \Lambda_s \in \mathcal{L}_s\}$

III. (Igualdad de frontera eficiente)

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{C_s} x \mid x \in \mathcal{X}_s\} = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda_s b_s \mid \Lambda_s \in \mathcal{L}_s\}$$

Prueba:

Probaremos esto como un corolario del Teorema 2.23.1 al examinar un caso especial del programa lineal multiobjetivo primal y dual en la Definición 2.23.1. Sea

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_s \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathcal{X}$ es reducido a $\mathcal{X}_s$. Sea

$$\mathcal{L} = \{[\Lambda_s, \Lambda'] \in \mathbb{R}^{p\times(m+n)} \mid \exists\ \mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}\ tal\ que\ \mu^\intercal[\Lambda_s, \Lambda'] \geq_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \mathbf{0}^\intercal \quad y \quad [A_s^\intercal, \mathbf{I}\,] \begin{bmatrix} \Lambda_s \\ \Lambda' \end{bmatrix} \mu = C_s^\intercal \mu\}$$

$$= \{[\Lambda_s, \Lambda'] \in \mathbb{R}^{p\times(m+n)} \mid \exists\ \mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}\ tal\ que\ \mu^\intercal \Lambda_s \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\intercal,\ \mu^\intercal \Lambda' \geq_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{0}^\intercal\ y\ A_s^\intercal\, \Lambda_s^\intercal \mu + (\Lambda')^\intercal \mu = C_s^\intercal \mu\}$$

$$= \{[\Lambda_s, \Lambda'] \in \mathbb{R}^{p\times(m+n)} \mid \exists\ \mu \geq_{int\ \mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}\ tal\ que\ \mu^\intercal \Lambda_s \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0},\ \ y\ A_s^\intercal\, \Lambda_s^\intercal \mu \leq_{\mathbb{R}^p_+} C_s^\intercal \mu\}$$

El problema dual de la definición 6.1 .1 [6] se convierte en

$$max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\left\{[\Lambda_s, \Lambda'] \begin{bmatrix} b_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mid [\Lambda_s, \Lambda'] \in \mathcal{L}\right\} = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda_s b_s \mid \Lambda_s \in \mathcal{L}_s\}$$

que es el problema dual del VLP como en la Definición 2.23 La conclusión se desprende del teorema 2.23.1.

■

D. Dualidad conjugada en optimización multiobjetivo convexa

Definición 2.25: Sea $\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(x)$.

I. La conjugada dual (o transformada Fenchel) de $\mathbf{h}$, es el conjunto de valores de la función denotada por $\mathbf{h}^*\colon \mathbb{R}^{p\times n} \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ y es definida como:
$$\mathbf{h}^*(U) = max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \cup_{x\in\mathbb{R}^n} [Ux - \mathbf{h}(x)], \qquad U \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

II. La biconjugada de $\mathbf{h}$**,** o la conjugada de $\mathbf{h}^*$, es el conjunto de valores de la función denotada por $\mathbf{h}^{**}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ y es definida como:
$$\mathbf{h}^{**}(x) = max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \cup_{U\in\mathbb{R}^{p\times n}} [Ux - \mathbf{h}^*(U)], \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

III. U se dice que es un subgradiente del conjunto de valores de la función $\mathbf{h}$ en $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ si
$$\mathbf{y} - Ux \in min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \cup_{x'\in\mathbb{R}^n} [\mathbf{h}(x') - Ux']$$

IV. El conjunto de todos los subgradientes de $\mathbf{h}$ en $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ es denotado por $\partial\mathbf{h}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$, el subdiferencial de $\mathbf{h}$ en $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$

V. $\mathbf{h}$ se dice que es subdiferenciable en $\boldsymbol{x}$ si $\partial\mathbf{h}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \neq \mathbf{0}\ \ \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(\boldsymbol{x})$

Sea $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^p$ una función vectorial de valor real extendida. El problema de optimización multiobjetivo sin restricciones (irrestricto) es:

(Problema de optimización multiobjetivo sin restricciones UP)

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} f(x), \text{ sujeto a } x \in \mathbb{R}^n.$$

Para construir una teoría de dualidad conjugada para el problema anterior, pondremos f en una familia de funciones perturbación. Sea

$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^p$ es otra función de valor vectorial tal que

$$f(x) = \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.25.1}$$

La función perturbación es el conjunto de valores de la función

$p: \mathbb{R}^m \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ definida como:

(Función perturbación) $\quad p(\boldsymbol{y}) = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ (2.25.2)

Claramente $p(\mathbf{0}) = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} f(\mathbb{R}^n)$ es la frontera mínima para el problema UP.

El problema UP puede ahora ser establecido como el primal de un par de problemas de optimización dual.

(Problema Primal P) $\quad min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

El dual conjugado de ψ, denotado por $\psi^*: \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m} \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función definida como:

$$\psi^*(U, V) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_{x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^n} [U\boldsymbol{x} + V\boldsymbol{y} - \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \tag{2.25.3}$$

El problema de optimización dual conjugado es definido como:

(Problema Dual) $\quad max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} - \psi^*(\mathbf{0}, V)$, sujeto a $V \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Desde que $-\psi^*$ es el conjunto de valores de la función, el problema D no es un problema de optimización multiobjetivo ordinario.

Para evitar cualquier posible confusión, una formulación más precisa del problema dual se da como sigue:

(Formal Problema dual D) Encontrar: $V^* \in \mathbb{R}^{p\times m}$ tal que

$$-\psi^*(\mathbf{0}, V^*) \cap max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V - \psi^*(\mathbf{0}, V) \neq \emptyset \tag{2.25.4}$$

El primer resultado es una generalización del Lema 4.1.4 (Goh and X & Yang, 2002)

Teorema 2.25.1: (Dualidad Débil)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall V \in \mathbb{R}^{p\times m} \qquad \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \notin -\psi^*(\mathbf{0}, V) - \mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\} \tag{2.25.5}$$

Prueba:

Sea $\xi = \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ y $\xi' \in \psi^*(\mathbf{0}, V)$. Por definición de $\psi^*(\mathbf{0}, V)$,

$$\xi' \nleq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} V\boldsymbol{y} - \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \forall x, y$$

En particular cuando $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$,

$$\xi' \nleq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} - \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = -\xi,$$

- $\xi + \xi' \nleq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}$

∎

Corolario 2.25.2:

$\forall\, \xi \in min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\, \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ y $\forall\, \xi' \in max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V - \psi^*(\mathbf{0}, V)$,

$$\xi \nleq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \xi'$$

Definición 2.26:

I. Conjunto de valores de la función perturbación

$$p(\boldsymbol{y}) = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\psi(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y})$$

Se dice que es externamente estable si

$\{\psi(x,y) \in \mathbb{R}^p \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq p(y) + \mathbb{R}^p_+ = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,\psi(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}) + \mathbb{R}^p_+$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$

II. Sea $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función. Decimos que el conjunto de valores de la función $min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,\mathbf{h}(x)$ es externamente estable si

$$\mathbf{h}(x) \subseteq min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,\mathbf{h}(x) + \mathbb{R}^p_+ \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

III. Similarmente, el conjunto de valores de la función $max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,\mathbf{h}(x)$ se dice que es externamente estable si

$$\mathbf{h}(x) \subseteq max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,\mathbf{h}(x) - \mathbb{R}^p_+ \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

IV. Dado el conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^p$, $min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,(\mathcal{B})$ se dice que es externamente estable si $\mathcal{B} \subseteq min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,(\mathcal{B}) + \mathbb{R}^p_+$. Similarmente, $max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}(\mathcal{B})$ se dice externamente estable si $\mathcal{B} \subseteq max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\,(\mathcal{B}) - \mathbb{R}^p_+$.

Lema 2.25.3: Si ψ es convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y la función perturbación $p(\boldsymbol{y})$ es externamente estable, entonces la función perturbación es del tipo II convexa.

Prueba: referirse al lema 6.1.2 (Sawaragi, Nakayama, & Tanino , 1985)

■

Lema 2.25.4: Sea $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función, y asumamos que $max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} - \mathbf{h}(\boldsymbol{x})$ es estrictamente estable. Entonces

$$\mathbf{h}^*(\boldsymbol{U}) = max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_{\boldsymbol{x}} \left[U\boldsymbol{x} - min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) \right]$$

Prueba:

Desde que $max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} - \mathbf{h}(\boldsymbol{x})$ es estrictamente estable, tenemos

$$-\mathbf{h}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{R}^p_+ = max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} - \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{R}^p_+ \qquad \forall\, \boldsymbol{x},$$

o

$$Ux - \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{R}^p_+ = Ux - min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) - \mathbb{R}^p_+ \qquad \forall\, \boldsymbol{x},$$

o

$$\cup_x \left[Ux - \mathbf{h}(\boldsymbol{x})\right] - \mathbb{R}^p_+ = \cup_x \left[Ux - min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) \right] - \mathbb{R}^p_+$$

Tomando max en ambos lados, tenemos

$$\mathbf{h}^*(U) = max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_x \left[Ux - min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{h}(\boldsymbol{x}) \right]$$

El siguiente teorema es una generalización del Lema 4.1.6 (Goh and X & Yang, 2002)

■

Teorema 2.25.5: Asuma que la función perturbación p externamente estable, entonces

$$p^*(V) = \psi^*\,(\mathbf{0}, V) \qquad \forall\, V \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Prueba:

$$p^*(V) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_y [V\boldsymbol{y} - p(\boldsymbol{y})]$$

$$= max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_y [\mathbf{0}\boldsymbol{x} + V\boldsymbol{y} - min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\psi(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y})]$$

$$= \psi^* (\mathbf{0}, V) \qquad \text{por el lema 2.25.4}$$

■

Observación:

I. Si $p = 1$, $p(y) = \min \psi(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y})$ es siempre externamente estable.

II. Note que, sin la suposición de estabilidad externa, el resultado anterior sería considerado débil, y solo sería posible establecer que (ver lema 6.1.3 (Sawaragi, Nakayama, & Tanino , 1985))

$$p^*(V) \subseteq \psi^* (\mathbf{0}, V) \qquad \forall\, V \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

A partir de ahora asumiremos que p es externamente estable.

Corolario 2.25.6:

$$max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V - \psi^* (\mathbf{0}, V) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V - p^*(V) = p^{**}(\mathbf{0})$$

Prueba:

$$p^{**}(\mathbf{0}) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V [V\mathbf{0} - p^*(V)]$$

$$= max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \cup_V -\psi^* (\mathbf{0}, V) \quad \text{por el teorema 2.25.5}$$

■

Observación: Como resultado de la definición de p y el corolario 2.25.6, la frontera mínima del primal se da con $p(\mathbf{0})$ mientras que la frontera máxima del dual es $p^{**}(\mathbf{0})$.

Lema 2.25.7: (Desigualdad de Young generalizada)

Sea $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función. Si $\boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(\mathbf{x})$ y $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{U})$ **,** entonces

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \nleq_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{Ux}$$

Prueba:

Asuma que $\boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(\mathbf{x})$ y $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{U})$**.** Entonces

$$\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{max}_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \cup_{\boldsymbol{x}'} [\boldsymbol{Ux}' - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}')]$$

En particular, sea $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(\mathbf{x})$ **,** entonces

$$\boldsymbol{y}' \nleq_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{U}x - y$$

■

Lema 2.25.8:

Sea $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ es el conjunto de valores de la función y $\boldsymbol{y} \in \mathbf{h}(x)$**.** Entonces

$$\partial\boldsymbol{h}(x; y) \neq \emptyset \text{ si y solo si } \boldsymbol{y} \in \mathbf{h}^{**}(x).$$

En otras palabras, $\mathbf{h}$ es subdiferenciable en x si y solo si $\mathbf{h}(x) \subseteq \mathbf{h}^{**}(\boldsymbol{x})$**.**

Prueba:

Por definición de $\mathbf{h}^*$, $\partial\boldsymbol{h}(x; y) \neq \emptyset$ si y solo si

$$\exists U \in \mathbb{R}^{p\times n} \text{ tal que } \mathbf{U}x - y \in \mathbf{h}^*(U) \qquad (2.25.4)$$

Por lo tanto, si

$$y \in \mathbf{h}^{**}(x) = max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_U [Ux - \mathbf{h}^*(U)],$$

Entonces

$$y \in \mathbf{h}^{**}(x) = Ux - \mathbf{h}^*(U) \text{ para algún } U \in \mathbb{R}^{p\times n},$$

o

$$Ux - y \in \mathbf{h}^*(U) \text{ para algún } U \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

Así por (2.25.4) tenemos que $\partial \boldsymbol{h}(x; y) \neq \emptyset$

Inversamente, si $\partial \boldsymbol{h}(x; y) \neq \emptyset$, entonces $y \in Ux - \mathbf{h}^*(U)$ para algún U. Elijamos cualquier $y' \in Ux - \mathbf{h}^*(U)$ o $Ux - y' \in \mathbf{h}^*(U)$. Por definición 2.25 (I) y el hecho que $y \in \mathbf{h}(x)$, tenemos

$$y + Ux - y' \nleq_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} Ux,$$

o $y \nleq_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} y'$. Desde $y' \in Ux - \mathbf{h}^*(U)$ con algún U. Por lo tanto

$$y \in max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_U [Ux - \mathbf{h}^*(U)] = h^{**}(x)$$

■

Definición 2.27: El problema Primal P se dice que es estable si la perturbación p es subdiferenciable en $y = \mathbf{0}$.

Teorema 2.27.1: (Dualidad Fuerte)

I. El problema Primal P es estable si y solo si para cada solución x^* del problema Primal P, existe una solución V^* para el problema dual D tal que

$$\psi(x^*, \mathbf{0}) \in -\psi^*(\mathbf{0}, V^*) \qquad (2.27.1)$$

II. Inversamente, si x^* y V^* satisface (2.27.1), entonces x^* es una solución de P y V^* es una solución de D.

Prueba:

I. El problema Primal P es estable si y solo si

$$\partial \boldsymbol{p}(\mathbf{0}; \boldsymbol{z}) \neq \emptyset \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in p(\mathbf{0}) = min_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \psi(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}),$$

Si y solo si por el lema 2.25.8 y el teorema 2.25.5,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &\subseteq \boldsymbol{p}^{**}(\mathbf{0}) \\ &= max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_{\mathbf{V}} [V\mathbf{0} - p^*(V)] \\ &= max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_{\mathbf{V}} - \psi^*(\mathbf{0}, V), \end{aligned}$$

si y solo si,

$$min_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \psi(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \subseteq max_{\mathbb{R}_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}} \cup_{\mathbf{V}} - \psi^*(\mathbf{0}, V)$$

Así para cada solución x^* del problema primal P y para cada solución del problema dual D, tenemos

$$\psi^*(x^*, \mathbf{0}) \in -\psi^*(\mathbf{0}, V^*)$$

II. Se sigue de las definiciones.

■

E. Dualidad Lagrangiana en optimización convexa multiobjetivo

En esta sección, consideramos una teoría de dualidad de tipo lagrangiana para una generalización vectorial de la teoría de la dualidad escalar. En el caso más general, se puede establecer una teoría de dualidad completa para problemas de optimización multiobjetivo basados en un cono ordenado arbitrario. Para nuestro propósito, sin embargo, sacrificaremos cierta generalidad y discutiremos la dualidad bajo el supuesto que todas las relaciones de ordenamiento vectorial son inducidas por el ortogonal positivo.

Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío convexo y compacto en $\mathbb{R}^n$, y sea f y g $\mathbb{R}^p_+$ – convexo y $\mathbb{R}^m_+$ –mapeo convexo respectivamente.

Definición 2.26: Considerar el problema primal multiobjetivo convexo

(Problema Primal CVO) $min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} f(x)$, sujeto a $x \in \mathcal{X}_0$

Donde $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) \leq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}\}$. Sea $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{p\times m}$ denota la familia de todas las matrices positivas: $\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times m} \mid \Lambda\mathbb{R}^m_+ \subseteq \mathbb{R}^p_+\}$, y $L: \mathbb{R}^n \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ lagrangiano valor vectorial:

$$L(x,\Lambda) = f(x) + \Lambda g(x)$$

Definición 2.27: Función dual Lagrangiana

Definimos el conjunto de valores de la función dual Lagrangiana $\Phi: \mathcal{L} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ (o simplemente función dual) por:

$$\Phi(\Lambda) = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{L(x,\Lambda) \mid x \in \mathcal{X}\} \qquad (2.27.1)$$

En el caso $p = 1$, $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ es reducida a la ordinaria función lagrangiana y $\phi(\lambda)$ es reducida a la ordinaria función dual lagrangiana para programación convexa

$$\phi(\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \{f(x) + \lambda^{\mathsf{T}} g(x)\}, \tag{2.27.2}$$

Definición 2.28: Problema de optimización multiobjetivo dual convexo

Se define el problema dual para CVO como:

(Problema Dual CVO) $\quad max_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \Phi(\Lambda)$, sujeto a $\Lambda \in \mathcal{L}$

En el siguiente resultado tenemos la generalización

Teorema 2.28.1: concavidad Tipo II de la función dual

La función dual Φ es de tipo II $\mathbb{R}_+^p$- cóncava.

Prueba:

Desde que $\mathcal{X}$ es compacto,

$$min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{t\{f(x) + \Lambda^1 g(x)\} + (1-t)\{f(x) + \Lambda^2 g(x)\} \mid x \in \mathcal{X}\}$$

es externamente estable. Para $t \in (0,1)$, Λ^1, $\Lambda^2 \in \mathcal{L}$, tenemos

$\Phi(\mathrm{t}\Lambda^1 + (1-t)\Lambda^2)$

$$= min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{f(x) + (t\Lambda^1 + (1-t)\Lambda^2) g(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

$$= min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{t(f(x) + \Lambda^1 g(x)) + (1-t)(f(x) + \Lambda^2 g(x)) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

$$\subseteq \{t(f(x) + \Lambda^1 g(x)) + (1-t)(f(x) + \Lambda^2 g(x)) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

$$\subseteq t\{f(x) + \Lambda^1 g(x) \mid x \in \mathcal{X}\} + (1-t)\{f(x) + \Lambda^2 g(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

$$\subseteq min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{t\{f(x) + \Lambda^1 g(x)\} + (1-t)\{f(x) + \Lambda^2 g(x)\} \mid x \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}_+^p$$

$$\subseteq min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{t\{f(x) + \Lambda^1 g(x)\} \mid x \in \mathcal{X}\} + min_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \{(1-t)\{f(x) + \Lambda^2 g(x)\} \mid x \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}_+^p$$

Por el lema 7.1.4 (Goh and X & Yang, 2002)

$$= t\ min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{f(x) + \Lambda^1 g(x)\ |x \in \mathcal{X}\ \} +$$

$$(1-t)\ min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{f(x) + \Lambda^2 g(x)\ |\ x \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}^p_+$$

$$= t\Phi(\Lambda^1) + (1-t)\Phi(\Lambda^2) + \mathbb{R}^p_+$$

■

Teorema 2.28.2: Dualidad débil

Si $x \in \mathcal{X}_0$ es factible para el problema primal CVO, y $\Lambda \in \mathcal{L}$ es factible para el dual CVO, entonces

$$\zeta \ngeq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{f}(x) \qquad \forall\ \zeta \in \Phi(\Lambda)$$

Prueba:

Para algún factible $x \in \mathcal{X}_0$ y $\Lambda \in \mathcal{L}$ factible,

$$\Lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0} \qquad (2.27.3)$$

Para algún $\zeta \in \Phi(\Lambda)$,

$$\zeta \ngeq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{f}(x) + \mathbf{\Lambda g(x)}, \qquad \forall\ x \in \mathcal{X}_0 \qquad (2.27.4)$$

La conclusión se sigue de (2.27.3) y (2.27.4) y el lema 7.1.2 (Goh and X & Yang, 2002)

■

Teorema 2.28.3: Dualidad Fuerte

Si $x^* \in \mathcal{X}_0, \Lambda^* \in \mathcal{L}$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \in \Phi(\Lambda^*)$. Entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ es simultáneamente un punto mínimo del problema CVO primal y un punto máximo del problema CVO dual.

Prueba:

Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$ no es mínimo para el problema CVO primal, es decir

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*}) \notin \ min_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}}\{f(x) \mid x \in \mathcal{X}_0\},$$

entonces aquí existe $x \in \mathcal{X}_0$ tal que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*}) \geq_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.27.5}$$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{*}) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{m}} \mathbf{0}$ y $\Lambda^{*} \in \mathcal{L}$ juntos implica que

$$\Lambda^{*}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{*}) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{p}} \mathbf{0} \tag{2.27.6}$$

(2.27.5) y (2.27.6) juntos implica que

$$L(x,\Lambda^{*}) = f(x) + \Lambda^{*}g(x) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{p}} f(x) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}} f(x^{*})$$

Esto contradice la premisa que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*}) \in \Phi(\Lambda^{*}) = \ min_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}}\{L(x,\Lambda^{*}) \mid x \in \mathcal{X}_0\}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$ es mínimo para el problema CVO primal.

Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$ no es máximo para el problema CVO dual, esto es,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*}) \notin \ max_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\Phi(\Lambda) \mid \Lambda \in \mathcal{L}\},$$

Entonces aquí existe $\zeta \in \cup_{\Lambda\in\mathcal{L}} \Phi(\Lambda)$ tal que $\zeta \geq_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$**.** Sea $\Lambda^{0} \in \mathcal{L}$ es tal que $\zeta \in \Phi(\Lambda^{0})$. Desde $\Lambda^{0}g(\boldsymbol{x}^{*}) \leq_{\mathbb{R}_{+}^{p}} \mathbf{0}$**,** esto implica que

$$\zeta \geq_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}} L(\boldsymbol{x}^{*},\Lambda^{0}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*}) + \Lambda^{0}g(x^{*}) = L(\boldsymbol{x}^{*},\Lambda^{0})$$

Esto contradice que

$$\zeta \in \Phi(\Lambda^{0}) = \ min_{\mathbb{R}_{+}^{p}\setminus\{\mathbf{0}\}}\{L(x,\Lambda) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$ es máximo para el problema CVO dual.

■

Corolario 2.28.4:

Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ es un punto propiamente mínimo del problema CVO primal y la calificación de restricción de Slater es satisfecha, entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ es un punto máximo del problema CVO dual.

Prueba:

Por el teorema 7.4.5 (Goh and X & Yang, 2002) existe $\Lambda^* \in \mathcal{L}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \in \Phi(\Lambda^*)$**.** La conclusión se sigue del teorema 2.26.3.

■

F. Función Gap para optimización multiobjetivos convexos

Definición 2.29:

Considerar el siguiente problema de optimización multiobjetivo

Problema P_ℓ $\qquad min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\, f(x)$, sujeto a $x \in \mathcal{X}$,

Donde $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es $\mathbb{R}^p_+ - convexa$, $\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}\right\}$ es el conjunto poliedro factible convexo, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Definición 2.30: Propiedades de una función gap

Un conjunto de valores de la función $\gamma\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ se dice que es una función gap para el problema P_ℓ si

I. $\gamma(x) \leq_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}$**,**

II. $\mathbf{0} \in \gamma(x^*)$ si y solo si x^* resuelve P_ℓ, esto es, $x^* \in argmin_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}(f, \mathcal{X})$

Definición 2.31: Para el problema P_ℓ , definamos el conjunto de valores de la función $\gamma: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ por

$$\gamma(x) = max_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}}\{\nabla f(x)(x-y) \mid y \in \mathcal{X}\}$$

Teorema 2.31.1: Si f es $\mathbb{R}_+^p - concava$, entonces γ (como en la definición 2.31) es una función gap.

Prueba:

I. Sea $y = x$, entonces $\nabla f(x)(x-y) = \mathbf{0}$ implica que

$$max_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}}\{\nabla f(x)(x-y) \mid y \in \mathcal{X}\} \nleq_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}$$

II. Suponga que x^* resuelve P_ℓ, y $\nabla f(x^*)(y - x^*) \leq_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}$ para algún $y \in \mathcal{X}$. Desde que $\mathcal{X}$ es convexo y f es $\mathbb{R}_+^p - concava$, tenemos

$$f(y) \leq_{\mathbb{R}_+^p} f(x^*) + \nabla f(x^*)(y - x^*)$$

Tenemos

$$f(y) \leq_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} f(x^*),$$

Contradiciendo que x^* resuelve P_ℓ. Así x^* resuelve P_ℓ. Implica que

$$\nabla f(x^*)(y - x^*) \nleq_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \mathbf{0} \quad \forall\, y \in \mathcal{X}.$$

En particular, $\nabla f(x^*)(y - x^*) \nleq_{\mathbb{R}_+^p \backslash \{\mathbf{0}\}} \nabla f(x^*)(x^* - x^*) = \mathbf{0}$

$$\forall\, y \in \mathcal{X}.$$

Entonces

$$\mathbf{0} \in \gamma(x^*) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\nabla f(x^*)(y - x^*) \mid y \in \mathcal{X}\}$$

Inversamente, si x^* no resuelve P_ℓ. Entonces existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $f(y) \leq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} f(x^*)$, esto es, $f(y) - f(x^*) \leq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0}.$ Desde que f es convexa, $f(y) - f(x^*) \geq_{\mathbb{R}^p_+} \nabla f(x^*)(y - x^*)$.

Así $\nabla f(x^*)(y - x^*) \leq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}} \mathbf{0} = \nabla f(x^*)(x^* - x^*)$, implicando que $\mathbf{0} \notin \gamma(x^*)$.

■

Interpretaremos la función gap en términos del Wolfe dual del P_ℓ. Definamos el vector valor Lagrangiano del problema P_ℓ como:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

Donde $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ es la matriz valor de multiplicadores de lagrange. Definamos el conjunto de valores de la función $d: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ como:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Donde

$$\mathcal{L} = \left\{\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{p\times m} \mid \exists \mu \geq_{int\,\mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}, tal\ que\ \mu^\top \mathbf{\Lambda} \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\top, \text{y } \mu^\top \nabla_x \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\top\right\}$$

$$= \left\{\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{p\times m} \mid \exists \mu \geq_{int\,\mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}, tal\ que\ \mu^\top \mathbf{\Lambda} \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\top, \text{y } \mu^\top (\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{\Lambda}\mathbf{A}) \geq_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{0}^\top\right\}$$

Teorema 2.31.2: Interpretación de función gap

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$$

Prueba:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\mathbf{\Lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Por la parte (III) del teorema 2.23.1 de dualidad multiobjetivo, tenemos:

$$max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\, \mathbf{\Lambda}(\mathbf{b}-\mathbf{Ax}) \mid \Lambda \in \mathcal{L}\,\}$$

$$= min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\left\{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{Ay} \geq_{\mathbb{R}^m_+} \boldsymbol{b}\right\}$$

$$= min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\left\{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{Ay} \geq_{\mathbb{R}^m_+} \boldsymbol{b}\right\} \text{ (sea } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \text{)}$$

$$= -max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} = -\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})$$

Por lo tanto $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})$**,** la prueba se completa.

De la definición 2.31, podemos reescribir la función gap como:

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) = \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} = \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{W}(\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \quad (2.31.1)$$

Donde $\boldsymbol{W}\colon \mathbb{R}^{p\times n} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ es el conjunto de valores de la función definido por

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}) = min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\boldsymbol{Zy} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\},$$

y $\mathcal{X} = \left\{x \mid Ax \geq_{\mathbb{R}^m_+} \boldsymbol{b}\right\}$.

■

Teorema 2.31.3: El conjunto de valores de la función $\boldsymbol{W}\colon \mathbb{R}^{p\times n} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ es cóncava de tipo II.

Prueba:

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ y $\boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{Z}^2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Entonces

$$(t\boldsymbol{Z}^1 + (1-t)\,\boldsymbol{Z}^2)\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{x}$$

Desde

$$\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{x} \in min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}^p_+,$$

y $\quad \boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{x} \in min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \{\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}^p_+$

tenemos,

$t\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{x}$

$\in \boldsymbol{t}\, min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \{\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} + (1-t)min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \{\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} + \mathbb{R}^p_+ \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.$

Por lo tanto

$$(t\boldsymbol{Z}^1\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{Z}^2)\mathcal{X} \subseteq t\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}^1) + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}^2) + \mathbb{R}^p_+$$

Pero

$$min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}}\{(t\boldsymbol{Z}^1 + (1-t)\boldsymbol{Z}^2)\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} \subseteq (t\boldsymbol{Z}^1 + (1-t)\boldsymbol{Z}^2)\mathcal{X},$$

Concluimos que

$$\boldsymbol{W}(t\boldsymbol{Z}^1 + (1-t)\boldsymbol{Z}^2) \subseteq t\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}^1) + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Z}^2) + \mathbb{R}^p_+ \ ,$$

esto es, $\boldsymbol{W}$ es cóncava de tipo II.

■

Teorema: Si

I. La función valor vectorial $\nabla f(.)(.): \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es convexa y
II. El conjunto de valores de la función $\nabla f(.)\mathcal{X}: \mathcal{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$es cóncava de tipo II, entonces la función gap $\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$es de tipo I convexa.

Prueba:

Por definición, la función gap es equivalente a

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(x)x - min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}}\{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \ \mid \ \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}\} \qquad (2.31.2)$$

El primer término es convexo por suposición (I).

Necesitamos mostrar que el segundo termino $min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{X}\}$ es cóncava de tipo II, y por lo tanto su negativo es convexa de tipo I. Ahora

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{X}\} = min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathcal{X} \subseteq \nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathcal{X}.$$

Luego, dado $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$,

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\nabla\boldsymbol{f}(tx^1+(1-t)x^2)\boldsymbol{y}|\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{X}\}$$

$$\subseteq \nabla\boldsymbol{f}(tx^1+(1-t)x^2)\mathcal{X}$$

$\subseteq t\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^1})\mathcal{X} + (1-t)\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^2})\mathcal{X} + \mathbb{R}^p_+$ por suposición (II)

$$\subseteq t\,min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^1})\mathcal{X} + (1-t)min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^2})\mathcal{X} + \mathbb{R}^p_+,$$

Esto es, $min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{\mathbf{0}\}}\{\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\ \boldsymbol{y}\in\mathcal{X}\}$ es cóncava de tipo II, y por lo tanto la función $\boldsymbol{\gamma}$ gap es convexa de tipo I.

■

Definición 2.32: La función de valor matricial $\nabla\boldsymbol{f}\colon\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}^{p\times n}$ se dice que es monótona si para algún $x^1, x^2\in\mathcal{X}$,

$$(\nabla\boldsymbol{f}(x^1)-\nabla\boldsymbol{f}(x^2))(x^1-x^2) \geq_{\mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}$$

Lema 2.32.1: Si $\nabla\boldsymbol{f}\colon\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}^{p\times n}$ es afín y monótona, esto es,

$$\nabla\boldsymbol{f}(\alpha x^1+\beta x^2) = \alpha\nabla\boldsymbol{f}(x^1)+\beta\nabla\boldsymbol{f}(x^2),\ \forall\, x^1,x^2\in\mathcal{X},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha+\beta=1,$$

entonces la función $\nabla\boldsymbol{f}(.)(.)\colon\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}^p$ es $\mathbb{R}^p_+$ – convexa.

Prueba:

Dado $t \in (0,1)$, $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$

$$\nabla \boldsymbol{f}(tx^1 + (1-t)x^2)(tx^1 + (1-t)x^2) - \boldsymbol{t}\nabla \boldsymbol{f}(x^1)(x^1) - (1-t)\nabla \boldsymbol{f}(x^2)(x^2)$$

$$= t^2 \nabla \boldsymbol{f}(x^1)x^1 + (1-t)^{\mathbf{2}} \nabla \boldsymbol{f}(x^2)x^2 + t(1-t)(\nabla \boldsymbol{f}(x^1)x^2 + \nabla \boldsymbol{f}(x^2)x^1)$$
$$- t\nabla \boldsymbol{f}(x^1)x^1 - (1-t)\nabla \boldsymbol{f}(x^2)x^2$$

$$= -t(1-t)(\nabla \boldsymbol{f}(x^1) - \nabla \boldsymbol{f}(x^2))(x^1 - \ x^2) \leq_{\mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}$$

■

Lema 2.32.2: Si $\boldsymbol{W}: \mathbb{R}^{p\times n} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ es cóncava de tipo II, y $\nabla \boldsymbol{f}: \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times n}$ es afín, entonces la composición $\boldsymbol{W} \circ \nabla \boldsymbol{f}: \mathcal{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ es cóncava de tipo II.

Prueba:

Dado $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ y $t \in (0,1)$

$$\boldsymbol{W} \circ \nabla \boldsymbol{f}(tx^1 + (1-t)x^2) = \boldsymbol{W}(\nabla \boldsymbol{f}(tx^1 + (1-t)x^2)$$

$$= \boldsymbol{W}(\ t\nabla \boldsymbol{f}(x^1) + (1-t)\nabla \boldsymbol{f}(x^2))$$

$$\subseteq t\boldsymbol{W}\big(\nabla \boldsymbol{f}(x^1)\big) + (1-t)\boldsymbol{W}\big(\nabla \boldsymbol{f}(x^2)\big) + \mathbb{R}^p_+$$

$$= t(\boldsymbol{W} \circ \nabla \boldsymbol{f})(x^1) + (1-t)(\boldsymbol{W} \circ \nabla \boldsymbol{f})(x^2) + \mathbb{R}^p_+$$

■

Teorema 2.32.3: Si $\nabla \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times n}$ es afín y monótona, entonces la función gap $\boldsymbol{\gamma}$ es convexa de tipo I.

Prueba:

En (2.28.1), el primer término es convexo si $\nabla \boldsymbol{f}$ es afín y monótono por el lema 2.28.5. El segundo término es la composición de una función cóncava de tipo II (por el teorema 2.28.3) con una función afín, y es cóncava de tipo II por el lema 2.28.6.

■

2.3. Definición de términos básicos

Combinación Convexa

El punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ se dice, que es una combinación convexa de dos puntos $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x^1} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x^2}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$

El punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ se dice, que es una combinación convexa de m puntos $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}, \ldots, \boldsymbol{x^m} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, si $\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\alpha_i x^i}$ para $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

Combinación afín

El punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ se dice, que es una combinación afín de dos puntos $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x^1} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x^2}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

El punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ se dice, que es una combinación afín de m puntos $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}, \ldots, \boldsymbol{x^m} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, si $\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\alpha_i x^i}$, para $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

Conjunto Convexo

Un conjunto $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, se dice que es convexo si para cada $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ y cada real $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$ el punto $\boldsymbol{\alpha x^1} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x^2} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}.$ En otras palabras, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es convexo si la combinación convexa de cada par de puntos en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ se encuentra en $\boldsymbol{\mathcal{X}}.$

Capsula Convexa

Sea $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. La capsula convexa de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, denotada por $\boldsymbol{co}(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ (esto es superconjuntos convexo de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$)

Conjunto Afín

Un conjunto $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ es llamado un conjunto afín (o variedad lineal) si dado $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, todas las combinaciones de $\boldsymbol{x^1}$ y $\boldsymbol{x^2}$ también pertenecen a $\boldsymbol{\mathcal{X}},$ esto es $\boldsymbol{\alpha x^1} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x^2} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}.$

Capsula Afín

Sea $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. La capsula afín de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, denotada por $\boldsymbol{aff}(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, es la intersección de todos los conjuntos afín que contienen a $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ (esto es todos los superconjuntos afín de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$)

Hiperplano

Un hiperplano en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Es un conjunto afín $n-1$ dimensional (o co – dimensión 1)

Semiespacios

Sea $a \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, y $b \in \mathbb{R}$. El hiperplano $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: a^{\intercal}x = b\}$ divide $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ en semiespacio cerrado positivo $\mathcal{H}^{+}$ y en el semiespacio cerrado negativo $\mathcal{H}^{-}$, donde

$$\mathcal{H}^{+} = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: a^{\intercal}x \geq b\}$$

$$\mathcal{H}^{-} = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: a^{\intercal}x \leq b\}$$

Los semiespacios cerrados son conjuntos convexos

Conjunto Poliédrico

Un conjunto poliédrico o poliedro es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Un politopo es un poliedro acotado no vacío.

Punto Extremo

Un punto x en un conjunto convexo $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es llamado un punto extremo de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ si no dos puntos distintos x^1 y x^2 en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ tal que $x$puede ser expresado como una combinación convexa de x^1 y x^2, es decir $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ para algún $\lambda \in (0,1)$. Alternativamente, x es un punto extremo de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ si este no es un punto interior de algún segmento en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$**.**

Hiperplano Separador

Un hiperplano $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: a^{\top}x = b\}$ se dice que separa dos subconjuntos no vacíos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, a^{\top}x \leq b \leq a^{\top}y$$

La separación es estricta si:

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, a^{\top}x < b < a^{\top}y$$

Hiperplano Soporte

Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $x^0 \in \mathcal{X}$. El hiperplano $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mid a^{\top}x = b\}$ se dice que soporta $\mathcal{X}$ en x^0 si $a^{\top}x \leq b\ \ \forall\, x \in \mathcal{X}$ y $a^{\top}x^0 = b$. $\mathcal{H}$ se llama hiperplano de soporte del conjunto $\mathcal{X}$.

Epígrafo

El Epígrafo de una función $f: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es el conjunto

$$epi(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n+1}} \,\big|\, x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, y \in \mathbb{R}, f(x) \leq y\}.$$

Cerradura de una función

La cerradura $\bar{f}$ de una función $f: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es definida por

$$\bar{f}(x) = \sup_{F \in A(f)} F(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},$$

Donde $A(f)$ es la familia de todas las funciones afín F definidas en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tal que $F(x) \leq f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. $A(f)$ es llamado el Minorante afin de f.

Mínimos y Máximos

Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y $f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de valor real.

- Un punto $x^* \in \mathcal{X}$ se dice que es un mínimo local si existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in \mathcal{X}$, y $\|x - x^*\| < \epsilon \Longrightarrow f(x) \geq f(x^*)$.
- Un punto $x^* \in \mathcal{X}$ se dice que es un máximo local si existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in \mathcal{X}$, y $\|x - x^*\| < \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(x^*)$.
- Un punto $x^* \in \mathcal{X}$ se dice que es un mínimo global si $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall\, x \in \mathcal{X}$.
- Un punto $x^* \in \mathcal{X}$ se dice que es un máximo global si $f(x^*) \geq f(x)$ $\forall\, x \in \mathcal{X}$.

CAPITULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General:

Verificando las condiciones que caracterizan las soluciones factibles Primal – Dual se puede obtener soluciones del problema de optimización lineal multiobjetivo

Hipótesis Específica:

- Las representaciones de dualidad encontradas permiten resolver el problema de optimización multiobjetivo.
- Al verificar las condiciones que cumple las soluciones factibles de los problemas de optimización Dual – Primal permite solucionar el problema de optimización lineal multiobjetivo.

3.1.1. Capítulos fuera de variables

Se entiende por soluciones factibles aquellas que logran mejorar el valor de la función objetivo, en nuestra investigación enunciamos las condiciones que deben de cumplir dichas soluciones factibles en el problema dual multiobjetivo y de esta manera solucionar el problema Lineal multiobjetivo Primal el cual era nuestro propósito de investigación. Mediante la caracterización de las soluciones se puede llegar a establecer una solución óptima del problema en estudio. Por tal motivo esta variable será cualitativa nominal.

3.2. Operacionalización de variables

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES
Conjunto de soluciones factibles del problema dual de optimización multiobjetivo	Tipos de Dualidad Condiciones de optimalidad dual y primal	• Dualidad débil • Dualidad fuerte • Soluciones factibles dual y primal

CAPITULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la investigación

4.1.1 Tipo de investigación

La investigación es del tipo científica – teórica en la cual la investigación se preocupa por recoger información de la realidad para enriquecer el conocimiento teórico científico, orientada al descubrimiento de principios y leyes, según su finalidad es una investigación básica, pura o fundamental según Ávila (2001) pues su propósito es de aplicación inmediata, revisa conocimientos ya explicados desarrollados en la línea del Análisis Numéricos y matemática Computacional.

4.1.2 Diseño de la investigación

De acuerdo a la naturaleza de nuestra investigación, es un estudio no experimental ya que realizan sin la manipulación deliberada de variables y en los que solo se observan los fenómenos en su ambiente natural para luego analizarlos (Lara y Valenzuela, 2017). También, decimos que en nuestro trabajo se sigue el método deductivo. Finalmente, manifestamos que las demostraciones presentes en nuestro trabajo son de clase directa, de acuerdo a Gortari (1972), ya que se prueba la validez de una tesis estableciendo que esta necesariamente se da a partir de ciertas proposiciones que han sido probadas como verdaderas.

El diseño de la tesis se estructuró partiendo del estudio del problema primal multiobjetivo $min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}} Cx,$ sujeto a: $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}x \geq_{\mathbb{R}^m_+} b$, estableciendo relaciones de orden, para luego representar el problema dual $max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{0\}} \Lambda b$, sujeto a: $\mu^{\intercal}\Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} 0^{\intercal}$ y $A^{\intercal}\Lambda^{\intercal}\mu = C^{\intercal}\mu$, seguidamente se establecerá la dualidad en optimización lineal multiobjetivo, dualidad conjugada en optimización convexa, dualidad Lagrangiana en optimización convexa, finalmente se analizaran las funciones Gap para optimización convexa.

De esta manera establecer resultados que garanticen la existencia de un conjunto de soluciones factibles del problema Dual, los cuales también resolverán el Problema Primal multiobjetivo.

4.2. Población y muestra

En esta investigación podemos considerar que nuestra población está constituida por el conjunto de soluciones eficientes para el problema dual y primal.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para realizar este trabajo se revisaron fuentes primarias y la técnica documental a través de la revisión de bibliografía especializada, se realizó la lectura analítica, reflexiva y minuciosa con el propósito de analizar, comprender y seleccionar los aportes más relevantes para la investigación realizada; Algunas de las fuentes consultadas fueron: Universidad Nacional Autónoma de México, Universidade Federal Do Amazonas, Universidade Sao Paulo, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Universidad de Alicante y American Mathematical Society; y bases de datos bibliográficas (libros digitales, artículos), Dialnet, Google académico, Redalyc y Scielo.

CAPITULO V: RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados que corresponden al tipo descriptivo esto de acuerdo a la metodología cualitativa de nuestro trabajo.

A. Problema multiobjetivo

Dado el problema lineal multiobjetivo

$$min_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\boldsymbol{C}x$$

$$\text{sujeto a: } x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{A}x \geq_{\mathbb{R}^m_+} b$$

y su problema Dual

$$max_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\ \Lambda b$$

$$\text{sujeto a: } \mu^\top\Lambda \geq_{\mathbb{R}^m_+} \mathbf{0}^\top \text{ y } A^\top\Lambda^\top\mu = C^\top\mu$$

$$\text{para algún } \mu \geq_{int\mathbb{R}^p_+} \mathbf{0}$$

se obtuvieron los siguientes resultados:

- Dualidad débil $\forall\ (x,\Lambda) \in \mathcal{X} \times \mathcal{L}$, $\Lambda b \ngeq_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}} \boldsymbol{C}x$
- Dualidad fuerte Si $\Lambda^* \in \mathcal{L}$ y $x^* \in \mathcal{X}$ satisface $\Lambda^* b = \boldsymbol{C}x^*$, entonces $x^* \in argmin_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\}$ y $\Lambda^* \in argmax_{\mathbb{R}^p_+\backslash\{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$

B. Dualidad Conjugada

$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^p$ es otra función de valor vectorial tal que

$$f(x) = \psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

La función perturbación es el conjunto de valores de la función

$p: \mathbb{R}^m \longrightarrow 2^{\overline{\mathbb{R}}^p}$ definida como:

Función perturbación $\quad p(\boldsymbol{y}) = min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

Origina los problemas

Problema Primal $\quad min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{\psi(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

Problema Dual $\quad max_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}} - \psi^*(\mathbf{0}, V)$, sujeto a $V \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Para los cuales se puede establecer una dualidad débil y fuerte.

C. Dualidad Lagrangiana

Definimos el conjunto de valores de la función dual Lagrangiana $\Phi: \mathcal{L} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ (o simplemente función dual) por:

$$\Phi(\Lambda) = min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\{L(x, \Lambda) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

Verificando dualidad débil y fuerte para el problema lineal multiobjetivo.

D. Función Gap

Considerar el siguiente problema de optimización multiobjetivo

Problema $P_\ell \quad min_{\mathbb{R}^p_+\setminus\{\mathbf{0}\}}\, f(x)$, sujeto a $x \in \mathcal{X}$, Donde $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es $\mathbb{R}^p_+ - convexa$, $\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax} \leq_{\mathbb{R}^m_+} \boldsymbol{0}\right\}$ es el conjunto poliedro factible convexo, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Esta función gap, permite determinar una dualidad débil y fuerte para el problema de optimización lineal multiobjetivo.

CAPITULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de la hipótesis

- El concepto de eficiencia es la principal noción de óptimo utilizado en optimización multiobjetivo. Debido a que el concepto de óptimo es considerado ideal alcanzarlo.

- Caracterización de soluciones

$$\begin{array}{c} \text{strong efficiency} \\ \Downarrow \\ \text{essential efficiency} \\ \Downarrow \\ \text{proper efficiency} \overset{C=\mathbb{R}^m_+}{\Longrightarrow} \text{efficiency} \overset{\mathrm{int}(C)\neq\emptyset}{\Longrightarrow} \text{weak efficiency} \end{array}$$

Figura 6.1: *(Roy, Bernard; Gal, Tomas; Stewart, Theodor J.; Hanne, Thomas;, 1999). Relación entre los diferentes conceptos de solución*

Recuperado de: https://www.springer.com/la/book/9780792385349

– Dados el problema primal y dual lineal multiobjetivos se comprobó que:

$\forall\ (x, \Lambda) \in \mathcal{X} \times \mathcal{L}, \Lambda b \ngeq_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}} \boldsymbol{C}x$ (Dualidad débil)

Si $\Lambda^* \in \mathcal{L}$ y $x^* \in \mathcal{X}$ satisface $\Lambda^* b = \boldsymbol{C}x^*$ (Dualidad fuerte)

$min_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}}\{\boldsymbol{C}x \mid x \in \mathcal{X}\} = max_{\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}}\{\Lambda b \mid \Lambda \in \mathcal{L}\}$ (Igualdad de frontera eficiente)

Estos resultados se encontraron utilizando dualidad conjugada y dualidad lagrangiana siendo estos tipos de dualidad los más comunes en el desarrollo y busqueda de soluciones del problema lineal multiobjetivo.

– Enunciar una función gap para el caso multiobjetivo permitió realizar el análisis en la misma dirección del caso lineal y poder establecer resultados que caracterizan la solución eficiente y/o óptima del problema lineal multiobjetivo.

6.2. Contrastación de Los resultados con estudios similares

- A diferencia con otros autores, el trabajo de investigación se centró en un desarrollo teórico de la dualidad débil y fuerte, partiendo de los problemas primal y dual, sin considerar la escalarización de la función objetivo.

- La consideración de un cono, donde se induce un orden parcial es de común utilización en los diferentes trabajos de investigación revisados con la finalidad de encontrar los resultados de dualidad débil y fuerte.

- Algunos autores buscan establecer entre los problemas primal y dual entre sí, algunas relaciones de inclusión entre los conjuntos de imágenes de las funciones objetivo del problema primal en sus conjuntos admisibles correspondientes. Algunos ejemplos contrarios muestran que estos conjuntos no siempre son iguales. El mismo análisis se realiza para los elementos máximos.

- La primera definición de solución eficiente fue dada por el matemático economista Pareto (ver (Cardoso Silva De Jesus, 2010)). El cual se toma como referencia para definir óptimo (solución no dominada) en el sentido de Pareto

CONCLUSIONES

- El papel de la convexidad y la dualidad en la mayoría de las situaciones que implican optimización, son muy importantes debido a la gran cantidad de estructura matemática con la que se puede trabajar; es el caso de la dualidad en su máxima expresión, dependiendo de una manera esencial de la convexidad, conduce a un enriquecimiento de todos los aspectos del análisis de los problemas de optimización.

- Como los objetivos de los problemas lineales multiobjetivos muchas veces están en conflicto, puede que no exista una solución única que sea óptima con respecto a todos los objetivos. En su lugar, generalmente hay un conjunto de soluciones óptimas de Pareto que no se dominan entre sí. En el contexto de los problemas lineales multiobjetivos, nuestro propósito fue caracterizar un conjunto de soluciones no dominadas que impliquen una buena convergencia al conjunto de soluciones eficientes.

- La razón por la cual se introduce el estudio del problema dual tiene (bajo condiciones adicionales) el mismo valor óptimo que el problema de optimización primal dado, pero la solución del problema dual podría hacerse con otros métodos de análisis.

- Hay muchos artículos que tratan los conceptos de dualidad (conjugada y dualidad lagrangeana) permitiendo derivar algoritmos, así como importantes aseveraciones de dualidad para clases especiales de problemas de optimización de vectores. Especialmente, es esencial encontrar problemas duales útiles, las correspondientes aseveraciones de dualidad y su aplicación para la construcción de algoritmos primales - duales en el caso de problemas de optimización multiobjetivo no necesariamente convexos.

RECOMENDACIONES

- El estudio de dualidad en problemas de optimización lineal multiobjetivo es un área de mucha importancia e interés para el desarrollo del curso de optimización, razón por la cual es necesaria su investigación y difusión dentro de los estudiantes de la facultad.

- Continuar realizando investigaciones en esta área, incluyendo métodos algorítmicos que permiten realizar la búsqueda de las soluciones eficientes de los problemas lineales multiobjetivos. Debido a que los problemas de la vida real son de naturaleza multiobjetivo.

- Considerar elaborar investigaciones a partir de los conceptos de continuidad y convexidad de un mapeo punto a conjunto, siendo estos conceptos fundamentales para enunciar las condiciones necesarias y suficientes de soluciones eficientes

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Sitarz, S. (2008). Postoptimal analysis in multicriteria linear programming. *European Journal of Operational Research, 191*, 7–18.

Ávila, R. (2001). *Metodología de la Investigación.* Lima: Estudios y Ediciones S. A.

Cardoso Silva De Jesus, L. G. (2010). Método de Descida para Problemas deoptimização Multiobjetivo. *(Disertação Mestrado em Matemática).* Universidad Federal de Goiás, Goiana.

Cuartas Torres, B. A. (2009). Metodología Para La Optimización De Múltiples Objetivos Basada En Ag y Uso De Preferencias. *(Tesis de grado para optar el titulo de Magister en Ingeniería - Ingeniería de Sistemas).* Universidad Nacional De Colombia, Medellín.

De Gortari, E. (1972). *Fondo de Cultura Económica*. (Universidad Nacional Autónoma de México) Obtenido de https://ymibosquemadura.files.wordpress.com/2015/09/eli-de-gortari-introduccion-a-la-logica-dialectica.pdf

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization.* Berlin: Springer.

Fernández Lechón, R., Soto Torres, D., & Garcillán García, J. (1990). Optimización Multicriterio en el Contexto de la Optimización Matemática. *Universidad de Valladolid, 5*, 147-160.

Goberna, M., & Kanzi, N. (10 de Agosto de 2016). *Cornell University Library.* Recuperado el 10 de julio de 2018, de https://arxiv.org/abs/1608.03115v1

Goh and X , C., & Yang, Q. (2002). *Duality in Optimization and Variational Inequalities.* London: Taylor & Francis Inc.

Goh, C., & Yang, X. (1996). Analytic efficient solution set for multicriteria. *European Journal of Operational Research, 92*, 166-181.

Graña Drummond , L., & Svaiter , B. (2015). *Métodos de Descida em Otimização Multiobjetivo.* Rio de Janeiro: IMPA.

Hamel, A. H. (2004). Closing the Duality Gap in Linear Vector Optimization. *Journal of Convex Analysis, Volume 11*(No. 1), 163–178.

Lara, L., & Valenzuela, C. (2017). *Guía para la redacción de un proyecto de investigación .* Buenos Aires: Espacio Editorial. Obtenido de http://biblioteca.usat.edu.pe/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=31401

Nguyen Ngoc , L. (19 de Mayo de 2017). *Cornell University Library.* Recuperado el 12 de julio de 2018, de https://arxiv.org/abs/1705.06875v1

Pliego Martínez, O. A. (2012). Programación Lineal Multiobjetivo: Análisis, Técnicas y casos de Aplicación. *(Tesis para obtener el Título de Maestro en Ingeniería).* Universidad Nacional Autonoma de México, México.

Radu , I., & Sorin-Mihai , G. (7 de Mayo de 2010). *Cornell University Library.* Recuperado el 05 de mayo de 2018, de https://arxiv.org/abs/1005.1151

Radu, I. B. (2003). Duality and optimality in multiobjective optimization. *(Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doctor rerum naturalium).* Universit¨at Chemnitz genehmigte, Chemnitz.

Ribeiro Costa, R. (2013). Algumas Contribuições Para a Otimização Multiobjetivo Via Teoria Dos Cones. *(Dissertação Programa de Pós-Graduação em Matemática).* Universidade Federal Do Amazonas - UFAM, Manaus.

Ríos Insua, S., Ríos Insua, D., Mateos, A., & Jacinto , M. (1998). *Programación lineal y aplicaciones - Ejercicios resueltos.* Col. Del Valle: Alfa Omega.

Rodrigues Sampaio, P. (2011). Teoria, métodos e aplicãcoes de optimização multiobjetivo. *(Dissertacão do Titulo de Mestre em Ciencias).* Universidad de São Paulo, São Paulo.

Roy, Bernard; Gal, Tomas; Stewart, Theodor J.; Hanne, Thomas;. (1999). *MULTICRITERIA DECISION MAKING: Advances in MCDM Models, Algorithms,.* New York: Springer " Science+ Business Media, LLC .

Sawaragi, Y., Nakayama, H., & Tanino , T. (1985). *Theory of Multi-Objective Optimization.* New York: Academic Press.

Yu, P. (1985). En *Multiple-Criteria Decision Making.* New York: Plenum Press.