UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

UN ESPACIO TOPOLÓGICO NO PRODUCTIVAMENTE BAIRE ASUMIENDO LA HIPÓTESIS DEL CONTÍNUO

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL

DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

GABRIEL ANDRE ASMAT MEDINA

Callao, 2021

PERÚ

Gabriel Andre Asmat Medina

Gabriel Andre Asmat Medina

Bachiller

Código: 1219220114

DNI: 75009312

Alfredo Sotelo Pejerrey

Asesor

Código: 1745

DNI: 45569296

Hoja de referencia del Jurado y aprobación

"Un espacio topológico no productivamente Baire asumiendo la hipótesis del contínuo"

Gabriel Andre Asmat Medina

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N°016-2021-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por:

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe
Presidente

Lic. Juan Benito Bernui Barros
Vocal

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña
Suplente

Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor

DEDICATORIA

A toda mi familia
por su incansable e
incondicional apoyo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Jehová por permitirme llegar hasta aquí y por todo, también agradezco a toda mi familia por su gran apoyo en estos años fuera de casa.

Me gustaría agradecer de manera especial al profesor Mg. Wilfredo Mendoza Quispe por todo su apoyo durante la graduación. También me gustaria agradecer al profesor Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey por su apoyo y aceptar dirigir la presente tesis. Además, me gustaría agradecer de manera especial a mi asesor de la maestría Leandro Aurichi por todo su apoyo, paciencia y por todo lo aprendido con él durante este tiempo. También agradezco al grupo **Topologia do interior** por su ayuda y sugerencias que hicieron este trabajo muy productivo.

Mi agradecimiento muy especial también a los profesores de la Escuela Profesional de Matemáticas de la FCNM-UNAC y del ICMC-USP por todo lo aprendido durante la graduación y la maestría, de hecho, son considerados un buen modelo a seguir para mí.

Un agradecimiento póstumo y especial al profesor Mg. Ezequiel Fajardo Campos por sus enseñanzas, su humildad y por motivarme a seguir los estudios de posgrado.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS DE CONTENIDO

RESUMEN

UN ESPACIO TOPOLÓGICO NO PRODUCTIVAMENTE BAIRE ASUMIENDO LA HIPÓTESIS DEL CONTÍNUO

GABRIEL ANDRE ASMAT MEDINA

Marzo del 2021

Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo se estudia el ejemplo de H. E. White Jr. en el cual se demuestra, asumiendo la Hipótesis del Contínuo, que existe un espacio de Baire cuyo cuadrado no es un espacio de Baire. Para este procedimiento, comenzamos estudiando los espacios de Baire, desde los dos puntos de vista, usando los conjuntos magros y los conjuntos abiertos, densos. Además presentamos los números cardinales para luego establecer la Hipótesis del Contínuo. Luego introducimos la topología de la densidad en $\mathbb{R}$ y establecemos algunos resultados que envuelven la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y esta nueva topología. Finalmente, con todas estas herramientas, presentamos como resultados el contraejemplo de H. E. White Jr.

Palabras Claves: Espacio de Baire, espacios productivamente Baire, Hipótesis del Contínuo, topología de la densidad.

ABSTRACT

A NON-PRODUCTIVELY BAIRE TOPOLOGICAL SPACE ASSUMING THE CONTINUUM HYPOTHESIS

GABRIEL ANDRE ASMAT MEDINA

March of the 2021

Advisor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained: Licenciated in Mathematics

In this work the example of H. E. White Jr. is studied, in which it is demonstrated, assuming the Continuum Hypothesis, that there is a Baire space whose square is not a Baire space. For this procedure, we begin by studying the Baire spaces, from both points of view, using the meager sets and open, dense sets. We also present the cardinal numbers to later establish the Continuum Hypothesis. Then we introduce the density topology in $\mathbb{R}$ and set some results that wrap the Lebesgue measure in $\mathbb{R}$ and this new topology. Finally, with all these tools, we present as results the counterexample of H. E. White Jr.

Key words: Baire space, Productively Baire spaces, Continuum Hypothesis, density topology.

INTRODUCCIÓN

Una parte de la topología estudia las propiedades topologicas preservadas por productos, esto es, si X, Y son espacios topológicos con la propiedad P entonces $X \times Y$ tiene la propiedad P, existen casos que esto es posible por ejemplo las propiedades T_0, T_1, Hausdorff, Tychonoff, compacidad, conexidad son preservadas por productos.

Un espacio topológico es llamado de Baire siempre que las colecciones numerables de subconjuntos abiertos densos tengan una intersección densa. Los espacios de Baire constituyen una clase importante en varias ramas de las matemáticas, este es el caso de teoremas del análisis funcional tan conocidos como el teorema de gráfico cerrado, el teorema de la aplicacion abierta y el teorema de acotación uniforme.

El problema de preservar la propiedad de espacio de Baire bajo el producto es antiguo y también es bien sabido que la respuesta al problema es negativa, incluso con hipótesis bastante fuertes. En efecto:

- En 1961, asumiendo la Hipótesis del Contínuo (CH), Oxtoby construyó el primer ejemplo de un espacio de Baire cuyo cuadrado no es Baire.
- En 1974, Krom, demostró que si existe un espacio de Baire cuyo cuadrado no es Baire, entonces existe un espacio métrico de Baire cuyo cuadrado no es Baire.
- Posteriormente, en 1976, utilizando herramientas más abstractas de teoria de conjuntos (específicamente forcing), Paul Cohen demostró que solo se necesitan los axiomas habituales de la Teoría de Conjuntos para probar la existencia de espacios de Baire cuyo producto no es Baire. Es decir, no es necesario agregar ninguna hipótesis teórica de conjuntos para poder construir dos espacios de Baire cuyo producto no sea Baire.

- Además, en 1986, Jan van Mill y Roman Pol demostraron que hay dos espacios Baire normados cuyo producto no es Baire.

En este trabajo de investigación estudiaremos los espacios de Baire y analizaremos el problema de producto de los espacios de Baire. Luego presentamos el ejemplo de [28], en el cual se muestra que asumiendo CH existe un espacio de Baire cuyo cuadrado no es un espacio de Baire.

I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El problema de preservar la propiedad de espacio de Baire bajo el producto es antiguo y también es bien sabido que la respuesta al problema es negativa, es decir, existen espacios de Baire cuyo producto no es un espacio es de Baire, incluso con hipótesis bastante fuertes.

De hecho, Oxtoby (1961) construyó, bajo CH, el primer ejemplo de un espacio de Baire completamente regular cuyo cuadrado no es un espacio de Baire; siguieron varios ejemplos absolutos (es decir, ejemplos sin asumir hipótesis adicionales). Por ejemplo William Fleissner y Kenneth Kunen (1978) construyeron, siguiendo el ejemplo de Paul Cohen, dos espacios métricos de Baire cuyo producto no es Baire, para la prueba usan argumentos combinatorios.

Como resultado, se necesitan algunas restricciones en los espacios coordenados para obtener la propiedad de espacio de Baire en el espacio producto. Existen dos enfoques exitosos para resolver el problema del producto: dados los espacios de Baire X, Y, cualquiera de los dos agrega alguna condición a Y (como ser segundo numerable, tener π-base numerable en sí mismo, o más recientemente, ser espacio métrico hereditariamente Baire).

En esta investigación presentamos el ejemplo de Henry E. White (1975) el cual muestra que asumiendo la Hipótesis del Contínuo es posible construir un espacio de Baire cuyo cuadrado no es un espacio de Baire.

Cabe resaltar que el espacio construido por Oxtoby y el espacio construído por White son distintos ya que el primer espacio es extremadamente disconexo, sin embargo el segundo espacio no lo es.

1.2. Formulación del problema

Problema general

¿Existen espacios topológicos de Baire que no son productivamente Baire?

Problemas específicos

1. ¿Si un espacio topológico es de Baire y satisface la condición de cadena numerable entonces este espacio es productivamente Baire?

2. Asumiendo hipótesis más fuertes (como por ejemplo, la Hipótesis del Contínuo, el axioma de Martin, las cuales son independientes en ZFC), aún es posible exhibir un espacio de Baire cuyo producto con el mismo no es un espacio de Baire?

1.3. Objetivos

Objetivos generales

Demostrar la existencia de espacios topológicos de Baire no productivamente Baire.

Objetivos específicos

- Determinar el efecto de asumir afirmaciones independientes de ZFC, para la construcción de espacios topológicos productivamente Baire que satisafacen la condición de cadena numerable.

- Determinar el efecto de asumir la Hipótesis del Contínuo, para la construcción de espacios de Baire no productivamente Baire.

1.4. Limitantes de la investigación

Limitante teórico

Los limitantes teóricos donde se circunscribe nuestra investigación son el espacio topológico de los números reales y la medida de Lebesgue en la recta.

Limitante temporal

Debido a que nuestra investigación es netamente teórica no se presentan limitaciones temporales.

Limitante espacial

Debido a que nuestra investigación es netamente teórica no se presentan limitaciones espaciales.

II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta algunas definiciones y resultados sobre topología general y teoría de la medida en $\mathbb{R}$, los cuales nos brindaran una buena base teórica para el desarrollo del presente trabajo.

2.1. Antecedentes

En esta sección presentamos investigaciones con respecto al problema del producto de espacios de Baire.

Nacionales

A nivel nacional no existen trabajos de investigación afines sobre el estudio del problema del producto de espacios de Baire. Sin embargo, el estudio de los espacios de Baire forman parte del área del análisis funcional. Por lo tanto en este caso encontramos el siguiente antecedente:

1. En la tesis de licenciatura de Rivas Mamani, Miguel Angel (2017) titulada "***Los resultados fundamentales del análsis funcional como consecuencia del teorema de la categoría de Baire***" ([21]) en Puno. El autor presenta un estudio de los espacios de Baire y con ello demuestra como consecuencia del teorema de categoría de Baire, el teorema de la acotación uniforme, teorema de la aplicación abierta y el teorema del gráfico cerrado, todo esto en el contexto de los espacios de Banach.

Internacionales

1. En la tesis de maestría de Asmat Medina, Gabriel Andre (2020) titulada "***The Banach-Mazur game and products of Baire spaces***" ([2]) en Brasil. El autor presenta un estudio de los espacios de Baire usando el juego topológico de Banach-Mazur, además presenta el contraejemplo de Paul Cohen, usando forcing en ZFC, de dos espacios de Baire cuyo producto no es Baire. Finalmente presenta un estudio de los productos infinitos de espacios de Baire.

2. En la tesis de maestría de Nygard, Stuart (2016) titulada "***The density topology on the reals with analogues on other spaces***" ([18]) en Estados Unidos. El autor presenta un estudio de la topología de la densidad en $\mathbb{R}$ usando resultados de teoria de medida en $\mathbb{R}$.

3. En la tesis de maestría de Fiorini Aurichi, Leandro (2005) titulada "***Sobre a hipótese do contínuo, algumas aplicações e equivalências***" ([3]) en Brasil. El autor presenta un estudio de la hipótesis del contínuo y presenta algunas equivalencias en topológia, análisis complejo y probabilidad.

4. En el artículo de John C. Oxtoby (1961) titulado "***Cartesian products of Baire spaces***" ([20]) en Estados Unidos. El autor construye, asumiendo la hipótesis del continuo, un espacio de Baire completamente regular cuyo cuadrado no es un espacio de Baire.

2.2. Bases teóricas

Topología

La topología es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de objetos geométricos que permanecen inalterados bajo la "deformación". La idea de deformación implica fuertemente la noción de continuidad. Las nociones de continuidad de funciones y convergencia de secuencias son las dos conceptos más fundamentales en el análisis. Ambos conceptos se basan en la abstracción de nuestro sentido intuitivo de cercanía de puntos de un conjunto.

La cercanía de los elementos de un conjunto se puede medir de la manera más conveniente como distancia entre los elementos. En cualquier conjunto dotado de una adecuada noción de distancia, se puede definir la convergencia de secuencias y hablar sobre la continuidad de funciones entre dos de estos conjuntos.

Probablemente motivado, con esta observación, Maurice Fréchet (1906) introdujo los “espacios métricos". En los espacios métricos, la mayoría de las nociones importantes, por ejemplo, se pueden describir los límites, la continuidad, la conectividad, la compacidad, etc. y muchos teoremas importantes de análisis pueden demostrarse únicamente en términos de conjuntos abiertos. Por lo tanto, es útil abstraer las propiedades básicas de los conjuntos abiertos, e introduzca una noción que sea adecuada para hablar sobre estos conceptos y también es independiente de la idea de métricas.

Esto llevó a Felix Hausdorff (1914) para dar la definición de espacios topológicos por abstraer las propiedades básicas de los conjuntos abiertos. Los espacios topológicos proporcionan el escenario más general para estudiar las nociones de convergencia y continuidad. El estudio de las propiedades de los espacios topológicos que se conservan mediante "homeomorfismos"(mapas continuos invertibles con inversos continuos) es el tema de la topología.

En esta sección presentaremos a continuación definiciones y resultados de topología general. Para más información, el lector interesado puede consultar [29] y [25].

Para esta parte fijemos X un espacio topológico.

Definición II.1. Un subconjunto A de X es un conjunto G_δ si es una intersección numerable de conjuntos abiertos y decimos que A es un conjunto F_σ si es una unión numerable de conjuntos cerrados.

Note que el complemento de un conjunto G_δ es un F_σ, y viceversa. Por ejemplo, un conjunto cerrado en un espacio métrico es un G_δ (por tanto, un conjunto abierto es un F_σ).

Sea A es un subconjunto de X. Denotamos por int(A) el conjunto de los puntos interiores de A, y por $\overline{A}$ la clausura topológica de A.

Definición II.2. Un conjunto $D \subseteq X$ es **denso** en X si $\overline{D} = X$.

Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual, tenemos que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjuntos de los números irracionales $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Proposición II.1. *Sea D un subconjunto de un espacio topológico X.*

(i) *D es denso en X sí y sólo si $A \cap D \neq \emptyset$ para todo subconjunto abierto no vacío A de X.*

(ii) *D es denso en X sí y sólo si int$(X \backslash D) = \emptyset$.*

(iii) *Si D es denso en X, entonces $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ para todo subconjunto abierto G de X.*

Demostración. Ver: Tej Bahadur Singh. *Elements of topology*, Pag. 18-19, [25].

■

Definición II.3. Un espacio topológico X es **separable** si existe un subconjunto numerable denso en X.

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable, pues el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Definición II.4. Un espacio topológico X es un espacio Hausdorff si y solo si cuando x y y son puntos distintos en X, existen abiertos disjuntos U, V en X con $x \in U$ e $y \in V$.

Teorema II.1.

a) *Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

b) *Un producto no vacío es Hausdorff si y solo si cada factor lo es.*

Demostración. Ver: Stephen Willard. *General topology*, Pag. 87, [29]. ■

Definición II.5. Un espacio topológico X es **regular** sí y solo si para cada punto $x \in X$ con $x \notin F$ con F cerrado implica que $\exists U, V$ abiertos con $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Proposición II.2. *Un subespacio de un espacio regular es regular.*

Demostración. Ver: Stephen Willard. *General topology*, Pag. 93, [29]. ■

Definición II.6. Un espacio topológico X es **completamente regular** sí y solo si para cada punto $x \in X$ con $x \notin A$ con A cerrado, existe una función contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[A] = 1$.

Note que todo espacio completamente regular es regular.

Proposición II.3. *Todo subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.*

Demostración. Ver: Stephen Willard. *General topology*, Pag. 95, [29]. ■

Definición II.7. Un espacio topológico X es **normal** sí y solo si para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos F_1, F_2 de X existen G_1, G_2 subconjuntos abiertos de X con $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Por ejemplo, todo espacio métrico es normal.

Definición II.8. Un espacio topológico X satisface la **condición de cadena numerable** (ccc) si y solo si toda familia de abiertos disjuntos no vacíos de X es numerable.

Por ejemplo, todo espacio topológico separable satisface la condición de cadena numerable.

Proposición II.4. *Si X es un espacio que satisface la condición de cadena numerable e Y es un subconjunto denso de X, entonces Y también satisface la condición de cadena numerable.*

Demostración. Sea $\{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de abiertos dos a dos disjunta en Y, donde A_λ es abierto en X. Note que $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de abiertos dos a dos disjuntos en X, pues si existen $\lambda \neq \lambda'$ con $A_\lambda \cap A_{\lambda'} \neq \varnothing$, luego $A_\lambda \cap A_{\lambda'} \cap Y \neq \varnothing$, contradicción. Entonces Λ es numerable. ∎

Definición II.9. Un espacio topológico X es **extremadamente disconexo** si la clausura de todo subconjunto abierto de X es abierto.

Por ejemplo cualquier conjunto con la topología discreta es un espacio topológico extremadamente disconexo.

Definición II.10. Decimos que X es un **espacio de Baire** si toda colección numerable de abiertos y densos de X tiene intersección densa.

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio de Baire. Mas adelante veremos un estudio más profundo de los espacios de Baire pues serán de gran importancia para la construcción de nuestro ejemplo.

Teoría de la medida en $\mathbb{R}$

En matemáticas, una medida de un conjunto es una forma sistemática y rigurosa de asignar un número a cada subconjunto apropiado de dicho conjunto.

Intuitivamente, dicho número puede ser interpretado como una cierta medida del tamaño de dicho subconjunto. En este sentido, la medida es una generalización de los conceptos de "longitud","área", y "volumen". Dicha generalización se extiende tanto a mayores dimensiones (en el sentido de "hipervolúmenes") como a conceptos más abstractos, puesto que el conjunto sobre el que se aplica una medida no tiene por qué ser un subconjunto de un espacio geométrico. Un ejemplo sería la medida de Lebesgue: cuando se aplica en un espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$, la medida de Lebesgue asigna los valores convencionales de longitud, área y volumen a subconjuntos apropiados del espacio Euclídeo n-dimensional. Por ejemplo, la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$ es la longitud de dicho intervalo en el sentido convencional de la misma - específicamente.

Técnicamente, una medida es una función que asigna un número real no-negativo $[0, +\infty]$ a ciertos subconjuntos de un conjunto X. La medida cumple una serie de propiedades: debe ser, por ejemplo, contable aditiva, en el sentido de que la medida de un subconjunto 'grande' puede siempre ser descompuesta en un número finito (o contablemente infinito) de subconjuntos disjuntos más pequeños, de tal modo que la medida sea la suma de las medidas de dichos subconjuntos más pequeños.

En general, si uno pretende asociar un tamaño consistente a cada subconjunto de un conjunto dado y al mismo tiempo satisfacer el resto de axiomas de una medida, las únicas medidas que uno suele poder definir son ejemplos triviales como la medida de conteo. Este problema fue resuelto definiendo la medida como aplicable a unas familias reducidas de subconjuntos, usualmente llamados los conjuntos medibles. Las condiciones de consistencia que deben cumplir los miembros de estas familias quedan encapsuladas en el concepto auxiliar de σ-álgebra. Esto significa que los subconjuntos no medibles, esto es, los subconjuntos para los que uno no puede definir una medida (sea de Lebesgue u otra) son muchos. Generalmente, esta limitación puede interpretarse como una consecuencia no-trivial del axioma de elección.

Presentaremos a continuación definiciones y teoremas relacionados a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Para más información, el lector interesado puede consultar [22], [10] y [30].

Medida exterior e interior de Lebesgue

Sea I un intervalo no vacío de números reales. Definimos su **longitud**, $\ell(I)$, como ∞ si I no es acotado y caso contrario definimos su longitud como la diferencia de sus extremos.

Definición II.11. Para un conjunto A de números reales, considere la colección numerable $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos no vacíos, acotados que cubren A, esto es, colecciones para las cuales $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Definimos la **medida exterior** de A, denotada por $m^*(A)$, como el ínfimo de todas las sumas de este tipo, esto es

$$m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

Sigue inmediatamente de la definicion de medida exterior que $m^*(\varnothing) = 0$. Mas aún, ya que cada cubrimiento de un conjunto B es también un cubrimiento de cualquier subconjunto de B, la medida exterior es **monótona** en el sentido de que si $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

Proposición II.5. *La medida exterior tiene las siguiente propiedades:*

(a) Un conjunto numerable tiene medida exterior cero.

(b) La medida exterior de un intervalo es su longitud.

(c) La medida exterior es invariante bajo traslaciones, esto es, para cualquier conjunto A, cualquier número y tenemos que $m^*(A + y) = m^*(A)$.

(d) La medida exterior es contablemente subaditiva, esto es, si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es cualquier colección numerable de conjuntos, disjuntos o no, entonces $m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 31-34, [22]. ■

Lema II.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si existe $0 < c < 1$ tal que $m^*(A \cap I) \leqslant c \cdot \ell(I)$ para todo intervalo abierto I entonces $m^*(A) = 0$.*

Demostración. Ver: James J. Yeh. *Real Analysis. Theory of measure and integration*, Pag. 68, [30]. ■

La medida exterior tiene la propiedad de ser regular como lo demuestra el siguiente

Lema II.2. *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida exterior finita. Entonces existe F un conjunto F_σ y existe G un conjunto G_δ tales que*

$$F \subseteq E \subseteq G \text{ y } m^*(F) = m^*(E) = m^*(G)$$

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 43, [22]. ■

Definición II.12. La **medida interior** de Lebesgue def $E \subseteq \mathbb{R}$, denotada por $m_*(E)$, es definida como

$$m_*(E) = \sup\{m(C) : C \subseteq E, C \text{ cerrado}\}$$

Proposición II.6. *Para cualquier $E \subseteq \mathbb{R}$,*

$$m_*(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E, K \textit{ compacto}\}$$

Demostración. Ver: James J. Yeh. *Real Analysis. Theory of measure and integration*, Pag. 58, [30]. ■

Teorema II.2. *La medida interior de Lebesgue m_* en $\mathbb{R}$ tiene las siguientes propiedades :*

1. *Para todo $E \subseteq \mathbb{R}$, $m_*(E) \in [0, \infty]$*

2. $m_*(\varnothing) = 0$,

3. *monotonicidad:* $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$, $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m_*(E_1) \leqslant m_*(E_2)$

Demostración. Ver: James J. Yeh. *Real Analysis. Theory of measure and integration*, Pag. 59, [30]. ■

Observación II.1. Para todo $E \subseteq \mathbb{R}$, tenemos $m_*(E) \leqslant m^*(E)$.

El σ-álgebra de conjuntos Lebesgue medibles

Definición II.13. Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es llamado **medible** si para cualquier conjunto A,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\complement}).$$

Observe que la definición de medibilidad es simétrica en E y $\mathbb{R} \backslash E$, y por lo tanto un conjunto es medible si y solo si su complemento es medible. Claramente el conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales son medibles.

Proposición II.7. *Los conjuntos medibles tienen las siguientes propiedades:*

(a) Todo conjunto de medida exterior igual a cero es medible. En particular, todo conjunto numerable es medible.

(b) La unión de una colección finita de conjuntos medibles es medible.

(c) La unión de una colección numerable de conjuntos medibles es medible.

(d) Todo intervalo es medible.

(e) La traslación de un conjunto medible es medible.

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 35-38, [22]. ■

Teorema II.3. *La colección $\mathcal{L}$ de conjuntos medibles es un σ-algebra que contiene el σ-algebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel. Todo intervalo, todo conjunto abierto, todo conjunto cerrado, todo conjunto G_δ y todo conjunto F_σ son medibles.*

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 39, [22]. ■

Teorema II.4. *Sea $E \in \mathcal{B}$.*

(a) Entonces $m_*(E) = m^*(E)$.

(b) Si $m_*(E) = m^*(E)$, entonces $E \in \mathcal{L}$, siempre que $m^*(E) < \infty$.

Demostración. Ver: James J. Yeh. *Real Analysis. Theory of measure and integration*, Pag. 60, [30]. ■

Observación II.2. Denotamos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ el σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Recuerde que $|\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, por lo tanto si $\mathcal{F}$ denota la familia de los conjuntos de Borel de medida cero, tenemos que $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{\aleph_0}$, de otro lado, $\mathbb{Q}$ es un conjunto de Borel de medida cero, entonces $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{F}$, luego $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$.

Ahora presentamos dos caracterizaciones de la medibilidad de un conjunto, una basada en la aproximación interna por conjuntos cerrados y la otra en la aproximación externa por conjuntos abiertos, que proporcionan ángulos de visión alternativos sobre la medibilidad.

Teorema II.5. *Sea E un conjunto de números reales. Entonces cualquiera de los siguientes cuatro enunciados es equivalente a la medibilidad de E.*

Aproximación exterior por conjuntos abiertos y G_δ

(i) Para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto O que contiene a E para el cual $m^*(O \backslash E) < \epsilon$.

(ii) Existe G un conjunto G_δ que contiene E para el cual $m^*(G \backslash E) = 0$.

Aproximación interior por conjuntos cerrados y F_σ

(iii) Para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F contenido en E para el cual $m^*(E \backslash F) < \epsilon$.

(iv) Existe F un conjunto F_σ contenido en E para el cual $m^*(E \backslash F) = 0$.

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 40, [22]. ■

Definición II.14. La restricción de la función medida exterior a la clase de conjuntos medibles $\mathcal{L}$ es llamado **medida de Lebesgue**. Es denotada por m, entonces si E es un conjunto medible, su medida de Lebesgue, denotada por $m(E)$, es definida por

$$m(E) = m^*(E).$$

Proposición II.8. *La medida de Lebesgue es contablemente aditiva, esto es, si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección disjunta numerable de conjuntos medibles, entonces su unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es también medible y*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 43, [22]. ■

Teorema II.6. *La función conjunto medida de Lebesgue, definida en el σ-álgebra de conjuntos Lebesgue medibles, asigna su longitud a todo intervalo, es invariante bajo traslaciones y es contablemente aditiva.*

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 44, [22]. ■

Sea A un conjunto, denotamos por $|A|$ la cardinalidad del conjunto A. Denotamos por $\aleph_0$ la cardinalidad de $\mathbb{N}$. Si B es un conjunto tal que $|B| \leqslant \aleph_0$, en este caso decimos que B es un conjunto numerable.

Definición II.15. Sea E un conjunto y sea μ una medida definida en un σ-algebra de subconjutos de E. Decimos que μ satisface la **condición de cadena numerable** si para toda familia disjunta de conjuntos $\{X_i : i \in I\} \subseteq dom(\mu)$, la relación $(\forall i \in I)(\mu(X_i) > 0)$ implica la desigualdad $|I| \leqslant \aleph_0$.

Teorema II.7. *La medida de Lebesgue satisface la condición de cadena numerable.*

Demostración. Suponga lo contrario, existe un conjunto I no numerable y una familia $\{X_i : i \in I\}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tal que para cada $i \in I$ se tiene que $m(X_i) > 0$.

Afirmación II.7.1. *Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\chi = \{i \in I : m(X_i \cap [k, k+1]) > 0\}$ es no numerable.*

Demostración. Sea $i \in I$, como $X_i = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (X_i \cap [k, k+1])$, existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $m(X_i \cap [k_i, k_i + 1]) > 0$. Podemos definir la siguiente función

$$\begin{array}{rcccl} f & : & I & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & i & \longrightarrow & f(i) = k_i \end{array}$$

Como $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}(k)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{-1}(k)$ es no numerable, por lo tanto $\{i \in I : m(X_i \cap [k, k+1]) > 0\}$ es no numerable.

■

Para cada $i \in \chi$, definimos $B_i = X_i \cap [k, k+1]$. Note que $0 < m(B_i) < \infty$ para todo $i \in \chi$.

Afirmación II.7.2. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi = \{i \in \chi : m(B_i) > \frac{1}{n}\}$ es infinito.*

Demostración. Para cada $i \in \chi$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_i} < m(B_i)$ y definimos la función

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \chi & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & i & \longrightarrow & g(i) = n_i \end{array}$$

Como antes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-1}(n)$ es no numerable. Entonces $\{i \in \chi : m(B_i) > \frac{1}{n}\}$ es infinito. ■

Finalmente, sea $n \geqslant 1$, como ψ es infinito, podemos elegir $i_0, \cdots, i_n \in \psi$. Luego $1 + \frac{1}{n} < \sum_{j=0}^{n} m(B_{i_j}) = m\left(\bigcup_{j=0}^{n} X_{i_j} \cap [k, k+1]\right) \leqslant m([k, k+1]) = 1$, contradicción. Por tanto la medida de Lebesgue satisface la condición de cadena numerable.

■

Teorema II.8 (Vitali)**.** *Todo conjunto E de números reales con medida exterior positiva contiene un subconjunto no medible.*

Demostración. Ver: Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pag. 48, [22]. ■

Como es usual, la notación $A_n \uparrow A$ significa $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada n y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, y $A_n \downarrow A$ significa $A_{n+1} \subseteq A_n$ para cada n y $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definición II.16. Un **Dynkin sistema** o **λ-sistema** es una familia no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X con las siguientes propiedades :

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \backslash A \in \mathcal{A}$.
3. Si la sucesión $\{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq \mathcal{A}$ satisface $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{A}$.

Definición II.17. Un π-sistema es una familia no vacía de subconjuntos de un conjunto que es cerrado bajo intersecciones finitas.

Recuerde que si $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X. El σ-álgebra generado por $\mathcal{F}$ es denotado por $\sigma(\mathcal{F})$.

Lema II.3 (Lema de Dynkin)**.** *Si $\mathcal{A}$ es un Dynkin sistema y una familia no vacía $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ es cerrada bajo interciones finitas, entonces $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Esto es, si $\mathcal{F}$ es un π-sistema, entonces $\sigma(\mathcal{F})$ es el menor Dynkin sistema que contiene a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Ver: Charalambos D. Aliprantis, Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*, Pag. 136, [1]. ■

Relación de conjuntos Lebesgue medibles con subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ y algunos subconjuntos topológicos especiales de $\mathbb{R}$

Introducimos algunas nuevas propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ con ciertos subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$. Para esta parte seguimos el libro [6].

Teorema II.9 (Lema de Steinhaus). *Si $A \subseteq \mathbb{R}$, es un subconjunto de medida de Lebesgue positiva, entonces el conjunto $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contiene un intervalo abierto alrededor 0.*

Demostración. Ver: N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular variation*, Pag. 2, [6]. ■

Teorema II.10 (M. E. Kuczma y M. Kuczma). *Sean A y B medibles con medida positiva. Entonces el conjunto diferencia $D := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ contiene un intervalo abierto.*

Demostración. Ver: N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular variation*, Pag. 3, [6]. ■

Corolario II.1. *Si $S \subseteq \mathbb{R}$ contiene un conjunto de medida positiva entonces el conjunto $S + S = \{s + s' : s, s' \in S\}$ contiene un intervalo abierto.*

Demostración. Ver: N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular variation*, Pag. 3, [6]. ■

Corolario II.2. *Si S es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, y S contiene un conjunto de medida positiva, entonces $S = \mathbb{R}$. Si T es un subgrupo multiplicativo de $]0, \infty[$ conteniendo un conjunto de medida positiva entonces $T =]0, \infty[$*

Demostración. Ver: N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular variation*, Pag. 3, [6]. ■

Definición II.18. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es llamado **discreto** si cada punto de A es un punto aislado de A, esto es, si $A \cap A' = \emptyset$.

Algunos ejemplos de subconjuntos discretos de $\mathbb{R}$ son $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$. Además todo conjunto discreto en $\mathbb{R}$ es numerable.

Teorema II.11. *Todo subgrupo aditivo de* $\mathbb{R}$ *es cíclico (i.e., igual a* $c \cdot \mathbb{Z} = \{c \cdot m : m \in \mathbb{Z}\}$ *para algún número real* c*) o denso.*

Demostración. Sea G un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, entonces G es cíclico.

Ahora suponga que G es no trivial, note que $G \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \varnothing$, pues existe $g \in G \backslash \{0\}$, entonces $-g \in G$. Luego, considere el conjunto $G \cap \mathbb{R}_{>0}$ no vacío y limitado inferiormente por 0. Sea $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$. Tenemos los siguientes casos:

- $\alpha = 0$.

  Vamos a demostrar que G es denso en $\mathbb{R}$. En efecto sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Por definición de ínfimo, existe $g \in G \cap \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 \leqslant g < 0 + \epsilon$. Luego $y = [\![\frac{x}{g}]\!] \cdot g \in G$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
|x - y| &= |x - g \cdot [\![\frac{x}{g}]\!]| \\
&= |g \cdot \frac{x}{g} - g \cdot [\![\frac{x}{g}]\!]| \\
&\overset{[\![\frac{x}{g}]\!] \leqslant \frac{x}{g} < [\![\frac{x}{g}]\!]+1}{=} g \cdot \left(\frac{x}{g} - [\![\frac{x}{g}]\!] \right) \\
&< g \cdot 1 \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

  Luego $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap G \neq \varnothing$. Por lo tanto G es denso en $\mathbb{R}$.

- $\alpha > 0$.

  Primero vamos a demostrar que $\alpha \in G$. En efecto, suponga lo contrario, $\alpha \notin G$. Por definición de ínfimo (para $\epsilon = \alpha$), existe $g_2 \in G \cap \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < \alpha \leqslant g_2 < \alpha + \alpha = 2\alpha$. Nuevamente, para $\epsilon = g_2 - \alpha > 0$ (note que $g_2 \neq \alpha$, pues $\alpha \notin G$) , tenemos que existe $g_1 \in G \cap \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\alpha \leqslant g_1 < \alpha + (g_2 - \alpha) = g_2$. Entonces existen $g_1, g_2 \in G \cap \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\alpha \leqslant g_1 < g_2 < 2\alpha$. Luego $g_2 - g_1 \in G \cap \mathbb{R}_{>0}$, así $\alpha < g_2 - g_1 < 2\alpha - \alpha = \alpha$, contradicción. Por lo tanto $\alpha \in G$.

Afirmamos que $G = \alpha\mathbb{Z}$. En efecto, como $\alpha \in G$, tenemos que $\alpha\mathbb{Z} \subseteq G$. Veamos que $G \subseteq \alpha\mathbb{Z}$. Sea $g \in G$, luego $g - [\![\frac{g}{\alpha}]\!] \cdot \alpha \in G$, Note que $0 \leqslant g - \alpha \cdot [\![\frac{g}{\alpha}]\!] = \alpha \cdot \left(\frac{g}{\alpha} - [\![\frac{g}{\alpha}]\!]\right) < \alpha$. Si $0 < g - \alpha \cdot [\![\frac{g}{\alpha}]\!]$, tendríamos que α no sería el infimo de $G \cap \mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, $0 = g - \alpha \cdot [\![\frac{g}{\alpha}]\!]$, así $g \in \alpha\mathbb{Z}$. Entonces G es cíclico.

■

Corolario II.3. *Sea G un subgrupo aditivo de la recta real tal que $m^*(G) > 0$, entonces G es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.*

Demostración. Suponga que G no es denso entonces, por el Teorema II.11, G es cíclico, luego G es numerable, y por lo tanto $m^*(G) = 0$, contradicción. Por lo tanto G es denso en $\mathbb{R}$. ■

Definición II.19. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un **conjunto Arquimediano** si el conjunto de números reales r tal que $A + r = A$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema II.12. *Sea A un conjunto Arquimediano con medida exterior positiva. Entonces para cada intervalo I,*

$$m^*(A \cap I) = m^*(I)$$

Demostración. Ver: N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular variation*, Pag. 6, [6]. ■

Corolario II.4. *Sea G un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ tal que $m^*(G) > 0$, entonces para cada intervalo I, $m^*(G \cap I) = m^*(I)$.*

Demostración. Note que G es denso, por lo tanto G es un conjunto Arquimediano, ahora el resultado sigue del Teorema II.12. ■

Denotamos por $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales. Antes de demostrar el siguiente lema recordemos el siguiente hecho de análisis real.

Lema II.4. *Para cada número real $\alpha > 0$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$$

Demostración. Ver: Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*, Pag. 100, [5]. ■

Proposición II.9. *Existe un conjunto denso G_δ, $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 \notin Z$ and $m(Z) = 0$.*

Demostración. Fijemos una enumeración $\{q_n : n \in \omega\}$ de $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Sea I_n^0 un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ tal que $q_n \in I_n^0$, $0 \notin I_n^0$ y $\ell(I_n^0) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Considere $Z_0 = \bigcup_{n\in\omega} I_n^0$, note que Z_0 es un abierto denso y $m(Z_0) \leqslant 1$. Ahora, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+n)(3+n)} = \frac{1}{2}$, para cada $n \in \omega$, sea I_n^1 un intervalo abierto tal que $q_n \in I_n^1$, $0 \notin I_n^1$ y $\ell(I_n^1) = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ y considere $Z_1 = \bigcup_{n\in\omega} I_n^1$, note que Z_1 es abierto, denso y $m(Z_1) \leqslant \frac{1}{2}$, y así sucesivamente. Entonces tenemos una familia de abiertos densos $\{Z_n : n \in \omega\}$ tal que $0 \notin Z_n$ y $m(Z_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \omega$, como $\mathbb{R}$ es Baire, $Z = \bigcap_{n\in\omega} Z_n$ es un conjunto denso G_δ. Note que $0 \notin Z$ y para todo $n \in \omega$ tenemos que $m(Z) \leqslant \frac{1}{2^n}$, entonces $m(Z) = 0$. ■

Espacios de Baire

En esta sección haremos una revisión mas profunda de los espacios de Baire, que será fundamental para nuestro estudio. Hay dos enfoques para estudiar los espacios de Baire: uno de ellos es utilizar conjuntos de primera y segunda categoría y el otro es utilizar conjuntos abiertos y densos. En esta primera parte comentaremos algunos resultados del primer acercamiento de los espacios de Baire. Para esta parte seguimos los libros de [22], [19], [29], [9] y [27].

Recuerde que si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X. Denotamos por int(A) el conjunto de los puntos interiores de A, y por $\overline{A}$ la clausura topológica de A.

Definición II.20. Un conjunto $D \subseteq X$ es **denso** en X si $\overline{D} = X$.

Definición II.21. Un conjunto $A \subseteq X$ es **nunca denso** en X si int$(\overline{A}) = \varnothing$

Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual, tenemos que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es nunca denso en $\mathbb{R}$.

Proposición II.10. *Sea N un subconjunto de X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *N es nunca denso en X.*

(ii) *$X \backslash \overline{N}$ es denso en X.*

(iii) *Para cada abierto no vacío U en X existe un abierto no vacío V tal que $V \subseteq U$ y $V \cap N = \varnothing$.*

Demostración. $(i \Rightarrow ii)$ Sea W un subconjunto abierto no vacío de X. Ya que int$(\overline{N}) = \varnothing$, entonces $W \cap (X \backslash \overline{N}) \neq \varnothing$.

$(ii \Rightarrow iii)$ Considere $V = U \cap (X \backslash \overline{N})$.

$(iii \Rightarrow i)$ Si int$(\overline{N}) \neq \varnothing$, sea $x \in$ int$(\overline{N})$, luego existe un conjunto abierto no vacío A tal que $x \in A \subseteq \overline{N}$, en particular $x \in \overline{N}$. Por hipótesis, existe un abierto no vacío V tal que $V \subseteq A$ y $V \cap N = \varnothing$. Sea $y \in V \subseteq A \subseteq \overline{N}$, entonces $V \cap N \neq \varnothing$.

■

Proposición II.11. *Sea Y un subespacio de X, y sea N un subconjunto de Y. Si N es nunca denso en Y, entonces N es nunca denso en X. Por otro lado, si Y es abierto (o denso) en X y N es nunca denso en X, entonces N es nunca denso en Y.*

Demostración. Suponga que N es nunca denso en Y. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X.

Si $U \cap Y = \emptyset$ terminamos, pues en este caso tendremos que $U \cap N = \emptyset$.

Entonces suponga que U intersecta Y. Así existe un abierto no vacío V, abierto en Y, tal que $V \subseteq U \cap Y$ y $V \cap N = \emptyset$. Ahora existe un conjunto W, abierto en X, tal que $V = W \cap Y$. Considere el subconjunto abierto no vacío $W \cap U$ de X. Note que $(W \cap U) \cap N = \emptyset$ y $W \cap U \subseteq U$, por lo tanto N es nunca denso en X.

Ahora suponga que Y es abierto en X y que N es nunca denso en X. Sea V un abierto no vacío en Y. Entonces V es abierto en X. Por lo tanto, existe un abierto no vacío U, abierto en X, tal que $U \subseteq V$ y $U \cap N = \emptyset$. Así, N es nunca denso en Y ya que U es abierto en Y.

Finalmente suponga que Y es denso en X y que N es nunca denso en X. Sea V un abierto no vacío en Y. Entonces existe V' abierto no vacío en X tal que $V = V' \cap Y$. Luego existe un abierto no vacío W de X tal que $W \subseteq V'$ y $W \cap N = \emptyset$. Considere el abierto no vacío $W' = W \cap Y$ en Y (pues Y es denso). Note que $W' \subseteq V$ y $W' \cap N = \emptyset$.

$\blacksquare$

Definición II.22. Un conjunto $A \subseteq X$ es **magro** (o de **primera categoría**) en X si $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n es nunca denso en X.

Un espacio topológico X es llamado **magro en sí mismo** (o de **primera categoría en sí mismo**) si él se puede escribir como una union numerable de conjuntos cerrados con interior vacío.

Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual, tenemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto magro en $\mathbb{R}$.

Observación II.3. La Proposición II.11 señala que si Y es un subconjunto abierto o denso de X, y si $A \subseteq Y$, entonces la categoría de A relativa a Y es la misma categoría de A relativa a X.

La siguiente proposición recopila algunas propiedades básicas de subconjuntos magros:

Proposición II.12. *Sea X un espacio topológico.*

(i) Un subconjunto de un conjunto nunca denso es también nunca denso.

(ii) La unión finita de subconjuntos nunca densos es también nunca denso.

(iii) Un subconjunto de un conjunto magro es magro.

(iv) La unión numerable de subconjuntos magros es magro.

Demostración. Ver: Stefan Waldmann. *Topology. An introduction*, Pag. 112-113, [27]. ■

Proposición II.13. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(i) Toda unión numerable de subconjuntos cerrados de X sin puntos interiores no tiene puntos interiores.

(ii) Toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos de X es densa.

(iii) Todo subconjunto abierto no vacío de X no es magro.

(iv) El complemento de todo subconjunto magro de X es denso.

Demostración. Ver: Stefan Waldmann. *Topology. An introduction*, Pag. 113-114, [27]. ■

Definición II.23. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **espacio de Baire** si se cumple uno (y por tanto todos) de los enunciados de la Proposición II.13.

Por ejemplo, todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Observación II.4. Note que si un espacio topológico es magro en sí mismo entonces ese espacio no es de Baire.

Todo espacio topológico que tiene un subespacio denso de Baire es evidentemente un espacio de Baire. Lo contrario no es cierto: por ejemplo, la recta real es un espacio de Baire pero el subespacio de los racionales no lo es.

Una condición útil, necesaria y suficiente para que un subconjunto denso A de un espacio de Baire X, sea de Baire se da en el siguiente teorema de J. M. Aarts y D. J. Lutzer:

Teorema II.13. *Sea X un espacio de Baire y sea $A \subseteq X$ denso. Entonces A es un espacio de Baire si y sólo si todo conjunto G_δ en X contenido en $X \backslash A$ es nunca denso.*

Demostración. Ver: S. García-Ferreira, A. García-Máynez and M. Hrusak. *Spaces in which every dense subset is Baire*, Pag. 248-249, [11]. ■

Definición II.24. En un espacio de Baire, el complemento de cualquier conjunto magro es llamado **conjunto residual**.

Teorema II.14. *En un espacio de Baire X, un conjunto E es residual si y sólo si E contiene un subconjunto denso G_δ de X.*

Demostración. Suponga que $B = \bigcap_{n\in\omega} G_n$, G_n abierto, es un subconjunto G_δ de E que es denso en X. Como cada G_n es denso, así $X \backslash G_n$ es nunca denso. Luego, $X \backslash E \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(X \backslash G_n)$ es magro en X. Así E es residual.

Ahora suponga que $X \backslash E = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde A_n es nunca denso, así $X \backslash \overline{A_n}$ es denso en X. Note que $B = \bigcap_{n\in\omega}(X \backslash \overline{A_n})$ es un conjunto G_δ en X. Como X es Baire, B es un denso G_δ en X. Note que B es un subconjunto de E.

■

La Hipótesis del Contínuo

La teoría de conjuntos, es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática.

Esta teoría es lo suficientemente rica como para construir el resto de objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas, etc; gracias a las herramientas de la lógica, permite estudiar los fundamentos. En la actualidad se acepta que el conjunto de axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel es suficiente para desarrollar toda la matemática.

Además, la propia teoría de conjuntos es objeto de estudio, no solo como herramienta auxiliar, en particular las propiedades y relaciones de los conjuntos infinitos. En esta disciplina es habitual que se presenten casos de propiedades indemostrables o contradictorias, como la hipótesis del continuo o la existencia de un cardinal inaccesible. Por esta razón, sus razonamientos y técnicas se apoyan en gran medida en la lógica.

El desarrollo histórico de la teoría de conjuntos se atribuye a Georg Cantor, que comenzó a investigar cuestiones conjuntistas (puras) del infinito en la segunda mitad del siglo XIX, precedido por algunas ideas de Bernhard Bolzano e influido por Richard Dedekind. El descubrimiento de las paradojas de la teoría cantoriana de conjuntos, formalizada por Gottlob Frege, propició los trabajos de Bertrand Russell, Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel.

En esta sección presentamos la hipótesis del contínuo denotada por CH (Continuum Hypothesis, en inglés) y presentamos algunas consecuencias de la misma . Para mayor detalle se remite al lector consultar [7], [8], [23] y [14].

Denotamos por ZFC la tripla extraña: dos personas y un axioma. Zermelo, Fraenkel y el axioma de elección (choice, en inglés), es una lista de axiomas con los cuales se fundamenta la matemática, tambien se le conoce como los axiomas de la teoría de conjuntos. Entre estos axiomas se encuentran el axioma de unión, axioma de existencia del conjunto vacío, etc. La lista completa de estos axiomas se puede encontrar en [14]. Denotamos por $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales.

Números Ordinales y Cardinales

Definición II.25 (Buen orden)**.** Dada $\leq$ una orden sobre X, decimos que $\leq$ es un **buen orden** si, dado cualquier $A \subset X$ no vacío, existe $a \in A$ tal que $a = \min A$, esto es, $a \leq b$, $\forall b \in A$.

Por ejemplo el orden usual del conjunto de los números naturales ω es un buen orden.

Teorema II.15 (Princípio del Buen Orden de Zermelo)**.** *Todo conjunto no vacío X admite un buen orden.*

Demostración. Ver: Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, Pag. 51-52, [7]. ∎

El principio del buen orden es equivalente al axioma de elección. En el presente trabajo, vamos a suponer que vale el Princípio del Buen Orden de Zermelo.

Teorema II.16 (Princípio de inducción transfinita)**.** *Si un conjunto A es bien ordenado, $B \subset A$, y para todo $a \in A$ el conjunto B satisface la condición:*

$$\{x \in A : x < a\} \subset B \implies a \in B$$

entonces $B = A$.

Demostración. Ver: Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, Pag. 40, [7]. ∎

Por lo tanto, el poderoso princípio de inducción se puede aplicar a cualquier conjunto.

Definición II.26. Decimos que un conjunto X es **transitivo** si, para todo $y \in X$, tenemos que $y \subseteq X$.

Por ejemplo ω es un conjunto transitivo, pues $n = \{0, 1, \cdots, n-1\} \in \omega$, entonces $n = \{0, 1, \cdots, n-1\} \subset \omega$.

Definición II.27. Un conjunto es un **número ordinal** (un ordinal) si él es transitivo y bien ordenado por $\in$.

La idea de definir números ordinales es

$$\alpha < \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \in \beta, \quad \text{y} \quad \alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}.$$

Denotaremos ordinales con letras griegas minósculas α, β, γ, etc. La clase de todos los ordinales es denotado por Ord.

Por ejemplo, $\{0, 1, 2\} = 3 < 4 = \{0, 1, 2, 3\}$, así si $n \in \omega$, entonces n es un ordinal. Además, ω es un ordinal.

Definimos

$$\alpha < \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \in \beta$$

y

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{si y sólo si} \quad (\alpha < \beta \text{ o } \alpha = \beta)$$

Lema II.5.

(i) $0 = \emptyset$ *es un ordinal.*

(ii) Si α *es un ordinal y* $\beta \in \alpha$*, entonces* β *es un ordinal.*

(iii) Si $\alpha \neq \beta$ *son ordinales y* $\alpha \subset \beta$*, entonces* $\alpha \in \beta$*.*

(iv) Si α, β *son ordinales, entonces* $\alpha \subset \beta$ *o* $\beta \subset \alpha$*.*

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 19-20, [14]. ■

Proposición II.14. *Sea* α, β *y* γ *números ordinales.*

(a) Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$.

(b) Se cumple exactamente una de las siguientes propiedades: $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$ o $\beta < \alpha$.

(c) Todo conjunto no vacío de ordinales tiene un $<$-menor elemento. Consequentemente, todo conjunto de números ordinales es bien ordenado por $<$.

(d) Para todo conjunto de números ordinales X, existe un número ordinal $\alpha \notin X$. (En otras palabras, "el conjunto de todos los números ordinales" no existe).

Demostración. Ver: Thomas Jech and Karel Hrbácek. *Introduction to Set Theory*, Pag. 108-109, [13].

■

Usando el Lema II.5 y la Proposición II.14 uno obtiene los siguientes hechos sobre los números ordinales :

1. $<$ es un orden total en la clase Ord.
2. Para cada α, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
3. Si C es una clase no vacía de ordinales, entonces $\bigcap C$ es un ordinal, $\bigcap C \in C$ y $\bigcap C = \inf C$.
4. Si X es un conjunto no vacío de ordinales, entonces $\bigcup X$ es un ordinal, y $\bigcup X = \sup X$.
5. Para todo α, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta : \beta > \alpha\}$.

Definición II.28. Dados $(X, \leqslant)$ e $(Y, \preceq)$ dos conjuntos parcialmente ordenados, decimos que $f : X \to Y$ es un **isomorfismo de orden** si

- f es biyectiva y,

- dados $a, b \in X$, tenemos que

$$a \leqslant b \text{ si, y solamente si, } f(a) \preceq f(b).$$

En este caso decimos que X y Y son orden-isomorfos.

Teorema II.17. *Todo conjunto bien ordenado es orden-isomorfo a un único número ordinal.*

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 20, [14]. ■

Definición II.29. Sea α un ordinal. Si $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$ para algún ordinal β, decimos que α es un **ordinal sucesor**. Si α no es un ordinal sucesor, entonces $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$, α es llamado **ordinal límite**.

Note que todo $n \in \omega$ no vacío es un ordinal sucesor. Note también que ω es un ordinal límite. Además si α es un ordinal límite y $\beta \in \alpha$, entonces $\beta + 1 \in \alpha$.

Teorema II.18 (Inducción transfinita para ordinales)**.** *Sea φ una fórmula tal que, si para todo α ordinal, tenemos que vale $\varphi(\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$, entonces $\varphi(\alpha)$. Entonces, para todo ordinal α, tenemos que vale $\varphi(\alpha)$.*

Demostración. Ver: Thomas Jech and Karel Hrbácek. *Introduction to Set Theory*, Pag. 114-115, [13]. ■

Ahora vamos enunciar una versión de la recursión transfinita para um ordinal fijado. Recuerde que recursión es un método de definir funciones.

Teorema II.19 (Recursión transfinita)**.** *Sea Ω un número ordinal, A es un conjunto, y $S = \bigcup_{\alpha<\Omega} A^\alpha$ el conjunto de todas las sucesiones de A de longitud menor que Ω.*

Sea $g : S \to A$ una función. Entonces existe una función $f : \Omega \to A$ tal que

$$g(\alpha) = g(f \restriction_\alpha) \text{ para todo } \alpha < \Omega,$$

donde $f \restriction_\alpha$ es la restricción de f a α.

Demostración. Ver: Thomas Jech and Karel Hrbácek. *Introduction to Set Theory*, Pag. 115, [13]. ∎

Si ξ es un ordinal y f es una sucesión transfinita de longitud ξ en un conjunto A, es decir $f : \xi \to A$ es una función, usamos la notación

$$f = \langle a_\alpha : \alpha < \xi \rangle.$$

El Teorema II.19 establece que si g es una función en el conjunto de todas la sucesiones transfinitas de elementos de A de longitud menor que Ω con valores en A, entonces existe una sucesión transfinita $\langle a_\alpha : \alpha < \Omega \rangle$ tal que para todo $\alpha < \Omega$, $a_\alpha = g(\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle)$.

ω_1, el primer ordinal no numerable

Definición II.30. Un conjunto X es **finito** si existe $f : n = \{0, \cdots, n-1\} \to X$ para algón número natural n. X es **infinito** si no es finito.

Definición II.31. Decimos que un conjunto A es **numerable** si es finito o existe biyección $f : A \to \omega$.

Teorema II.20. *Existe un conjunto bien ordenado no numerable X tal que $\{y \in X : y < x\}$ es numerable para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea X un conjunto no numerable y sea $\leqslant$ un buen orden sobre X (esto es posible por el Teorema II.15). Para cada $x \in X$, definimos $I_x = \{y \in X : y < x\}$, tenemos los siguientes casos:

- **Si para todo $x \in X$, I_x es numerable**, entonces X es un ω_1.
- **Caso contrario**, esto es, existe $x \in X$ tal que I_x no es numerable. Tome x_0 como el mínimo con aquella propiedad (esto es posible pues X es bien ordenado). Afirmamos que I_{x_0} satisface las hipótesis del teorema. En efecto, como X es bien ordenado, entonces I_{x_0} es bien ordenado. Ahora, sea $y \in I_{x_0}$. Note que $\{z \in I_{x_0} : z < y\}$ es numerable.

■

Teorema II.21. *Sea ω_1 definido por*

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal numerable}\}.$$

Entonces ω_1 es el menor ordinal no numerable.

Demostración. Ver: Derek Goldrei. *Classic set theory for guided independent study*, Pag. 215, [12]. ■

Sea X como el Teorema II.20. Denotamos por ω_1 al único ordinal orden-isomorfo a X (esto es posible por el Teorema II.17). Así ω_1 es un conjunto bien ordenado y no numerable tal que para cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha\}$ es numerable. Por lo tanto ω_1 **es el primer ordinal no numerable**. Note que $\omega_1 = \bigcup \omega_1$, entonces ω_1 es un ordinal límite.

Proposición II.15. *Sea A un subconjunto numerable de ω_1. Entonces A es limitado.*

Demostración. Sea $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq \omega_1$ una enumeración de A. Luego $b = \bigcup_{n \in \omega} a_n = \sup A$ es un ordinal, y como cada a_n es numerable, entonces b es numerable, luego $b \in \omega_1$. Note que para cada $n \in \omega$, se tiene que $a_n \leqslant b$.

■

Resumiendo todo lo mencionado anteriormente, tenemos que :

- ω_1 es el primer ordinal no numerable.
- Para cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha\}$ es numerable.
- Como ω_1 es bien ordenado podemos aplicar el método de recursión transfinita sobre él, este método será utilizado más adelante para nuestro ejemplo.

- Si $A = \{a_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto numerable de ω_1, tenemos que existe
$$\sup A = \bigcup A$$
y además
$$\sup A \in \omega_1.$$

Definición II.32. Dos conjuntos A, B tienen la misma **cardinalidad** (número cardinal, cardinal), y escribimos $A \approx B$ si existe una biyección $f : A \to B$.

Recordemos que por el Teorema de Zermelo (Teorema II.17) y por el Teorema II.15, para todo conjunto A existe un ordinal α tal que $A \approx \alpha$.

Definición II.33. El número ordinal más pequeño con esta propiedad se llama cardinalidad de A y se denota por $|A|$. Esto es,

$$|A| = \text{mín}\{\alpha : \alpha \text{ es ordinal y } A \approx \alpha\}.$$

Observación II.5.

- Para todo conjunto A, $|A| \approx A$;
- si A, B son conjuntos, entonces $A \approx B$ si y solo si $|A| = |B|$;

El siguiente teorema será de gran ayuda más adelante.

Proposición II.16. *Sean A, B conjuntos arbitrarios. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

(i) $|A| \leqslant |B|$;

(ii) existe una función inyectiva $g : A \to B$.

Más aún, si $A \neq \varnothing$ entonces esas condiciones son equivalentes a la condición

(iii) existe una función sobreyectiva $f : B \to A$.

Demostración. Ver: Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, Pag. 63-64, [7].

■

Definición II.34. κ es un **cardinal** si y solo sí κ es un ordinal y, para todo $\eta < \kappa$,

$$\eta \not\approx \kappa.$$

Todo número natural es un cardinal. también, ω y ω_1 son cardinales. Sin embargo, $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ no es un cardinal (pues, defina $f : \omega + 1 \to \omega$ con $f(n) = n + 1, f(\omega) = 0$).

Observación II.6.

- Para todo conjunto A, $|A|$ es un cardinal;
- para todo ordinal α, se cumple que $|\alpha| \leqslant \alpha$ y
- si α, β son ordinales, tenemos que $|\alpha| \leqslant |\beta|$ si y solo si $\alpha \leqslant \beta$.

Proposición II.17. *Para un ordinal α las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) α *es un número cardinal;*

(ii) $|\alpha| = \alpha$*;*

(iii) $\beta < |\alpha|$ *para todo* $\beta < \alpha$*;*

(iv) $|\beta| < |\alpha|$ *para todo* $\beta < \alpha$*;*

(v) $|\beta| \neq |\alpha|$ *para todo* $\beta < \alpha$*.*

Demostración. Ver: Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, Pag. 62, [7]. ■

La propiedad (v) de la Proposición II.17 explica por qué se dice que los números cardinales son los ordinales iniciales, es decir, los ordinales que son los más pequeños de una cardinalidad dada.

Si A es un conjunto denotamos por $\mathcal{P}(A)$ la colección de todos los subconjuntos de A.

El concepto de cardinalidad es fundamental para el estudio de los conjuntos infinitos. El siguiente teorema nos dice que este concepto no es trivial:

Teorema II.22 (Cantor)**.** *Para todo conjunto X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 27-28, [14]. ■

En vista del siguiente teorema, $<$ es un orden parcial de números cardinales.

Teorema II.23 (Cantor-Bernstein)**.** *Si $|A| \leqslant |B|$ y $|B| \leqslant |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 28, [14]. ■

Las operaciones aritméticas sobre cardinales se definen de la siguiente manera:

- $\kappa + \lambda = |A \cup B|$ donde $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, y A, B son disjuntos,
- $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$ donde $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$,
- $\kappa^\lambda = |A^B|$ donde $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ y A^B es el conjunto de funciones de B a A.

Lema II.6. *Si $|A| = \kappa$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.*

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 28, [14]. ■

Por tanto, el Teorema de Cantor se puede formular de la siguiente manera:

$$\kappa < 2^\kappa \text{ para todo cardinal } \kappa.$$

Definición II.35. Sea κ un cardinal. Denotamos por κ^+ el menor cardinal que es mayor que κ.

Note que no debemos confundir κ^+ con $\kappa + 1$ (ordinal sucesor).

Con esto podemos hacer la siguiente definición:

Definición II.36. Denotamos por $\aleph_0 = \omega$. Si $\aleph_\beta =$ estó definido para todo $\beta < \alpha$ (α un ordinal), denotamos por $\aleph_\alpha = \kappa$ donde κ es el menor cardinal tal que $\aleph_\beta < \kappa$ para todo $\beta < \alpha$.

Así $\aleph_\xi = \omega_\xi$ son definidos por recursión sobre ξ por:

- $\aleph_0 = \omega$.
- $\aleph_{\xi+1} = \omega_{\xi+1} = (\aleph_\xi)^+$.
- $\aleph_\eta = \omega_\eta = \sup\{\aleph_\xi : \xi < \eta\}$ cuando η es un ordinal límite.

Frecuentemente, "$\aleph_\xi$" es usado cuando hablamos sobre cardinalidades y "ω_ξ" es usado cuando estamos hablando sobre buena orden.

Proposición II.18. *Si $\xi < \zeta$ entonces $\aleph_\xi < \aleph_\zeta$. Además κ es un cardinal infinito si y solamente si $\kappa = \aleph_\xi$ para algún ξ.*

Demostración. Ver: Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*, Pag. 55, [15]. ∎

Algunos propiedades sobre la aritmética cardinal:

1. $+$ y $\cdot$ son asociativas, conmutativas y distributivas.
2. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
3. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
4. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
5. Si $\kappa \leqslant \lambda$, entonces $\kappa^\mu \leqslant \lambda^\mu$

6. Si $0 < \lambda \leqslant \mu$, entonces $\kappa^\lambda \leqslant \kappa^\mu$

7. Recuerde que $0 = \varnothing$ y $1 = \{\varnothing\}$, entonces $\kappa^0 = 1; 1^\kappa = 1; 0^\kappa = 0$ si $\kappa > 0$

8. Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

9. Si λ y κ son cardinales infinitos, entonces $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$

Recuerde si $\mathcal{F}$ es un conjunto, definimos la unión

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists F \in \mathcal{F}\ (x \in F)\}.$$

Por ejemplo, si $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Entonces $\bigcup \mathcal{F} = \{1, 2, 3, 4\}$.

La siguiente proposición será de gran utilidad posteriormente.

Proposición II.19. *Sea S un conjunto. Entonces*

$$\left|\bigcup S\right| \leqslant |S| \cdot \sup\{|X| : X \in S\}$$

Demostración. Ver: Thomas Jech. *Set Theory*, Pag. 49, [14]. ■

Corolario II.5. *Si κ es un cardinal infinito y $|X_\alpha| \leqslant \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$ entonces $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leqslant \kappa$.*

Demostración. Ver: Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, Pag. 70, [7]. ■

Presentamos algunas propiedades del cardinal ω.

(a) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = \omega$.

(b) $k < \omega$ si y sólo si $k \in \omega$.

(c) $n + \omega = \omega + \omega = \omega$ $(n \in \omega)$.

(d) $n \cdot \omega = \omega \cdot \omega = \omega$ $(n \in \omega, n > 0)$.

(e) $\omega^n = \omega$ $(n \in \omega, n > 0)$.

Ahora presentamos el segundo número cardinal infinito más importante, el cardinal del continuo, 2^ω. Denotamos por $\mathfrak{c}$ la cardinalidad de $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Algunas propiedades del cardinal 2^ω.

(a) $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$.

(b) $n + 2^\omega = \omega + 2^\omega = 2^\omega + 2^\omega = 2$ $(n \in \omega)$.

(c) $n \cdot 2^\omega = \omega \cdot 2^\omega = 2^\omega \cdot 2^\omega = 2^\omega$ $(n \in \omega, n > 0)$.

(d) $(2^\omega)^n = (2^\omega)^\omega = n^\omega = \omega^\omega = 2^\omega$ $(n \in \omega, n > 0)$.

La Hipótesis del contínuo (CH)

Por el Teorema de Cantor sabemos que $\omega < 2^\omega$, Así 2^ω es un cardinal no numerable, entonces $\omega_1 \leqslant 2^\omega$.

La Hipótesis del Continuo, (CH) es la afirmación:

$$2^\omega = \omega_1$$

o bien: el cardinal del continuo es $\aleph_1$, el cardinal sucesor de $\aleph_0$. Otras versiones equivalentes de la Hipótesis del Continuo son las siguientes:

1. No hay cardinal entre el cardinal del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales (que es $\aleph_0$) y el cardinal del continuo o del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (que es $2^{\aleph_0}$).

2. Para cada subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$, o bien $|A| = \aleph_0$ o bien $|A| = \aleph_1$.

3. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = \omega_1$.

Se probó que la hipótesis del contínuo ni es falsa (Godel, 1938) ni es verdadera (Cohen, 1964). En 1966 Cohen recibió la medalla Fields por su contribución a la solución de este problema.

Como mencionamos anteriormente, la hipótesis del contínuo es una declaración independiente de los axiomas de ZFC. Esto significa que no podemos demostrar CH ni su negación. En otras palabras, si asumimos CH (o su negación), solo nos enfrentaremos a una contradicción si ya existía una contradicción antes de asumir CH (o su negación).

En particular en este trabajo usaremos la consistencia de CH con los axiomas de teoría de conjuntos (ZFC), es decir, que la teoría ZFC + CH es consistente. En el presente trabajo estaremos asumiendo que ZFC es consistente.

En general decimos que una teoría T es **consistente** y escribimos Con(T), si T no implica una contradicción.

Con eso, tenemos un tipo de técnica de prueba de consistencia que usaremos más adelante. Explicaremos esta técnica con el ejemplo específico de CH, pero eso se aplica a cualquier otra declaración independiente. En efecto, suponga que probamos un enunciado P usando CH. Esto nos da automáticamente que la negación de P no se puede probar en ZFC. De hecho, si ZFC demuestra $\neg P$, entonces ZFC + CH también demuestra $\neg P$. Por lo tanto, ZFC + CH demuestra que tanto P en cuanto a $\neg P$, es decir, cuando asumimos CH obtenemos una contradicción.

En lo que sigue, vamos usar el término **enumeración** de un conjunto, para algo de la forma $X = \{x_\xi : \xi < \kappa\}$. Esto apenas quiere decir que, se $\xi \neq \eta$, entonces $x_\xi \neq x_\kappa$ (pero no quiere decir que κ es numerable).

En particular en nuestro caso asumiendo la hipótesis del Contínuo, tenemos que

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}.$$

La topología de la densidad en $\mathbb{R}$

En esta sección estudiamos la topología de la densidad en $\mathbb{R}$. Para mayor detalle se remite al lector consultar [26] y [17]. En lo que sigue, denotaremos por m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denota el σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{E}$ la topología euclideana (o usual) de $\mathbb{R}$.

Para cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{U})$, denotamos por $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la topología del producto en $X \times X$ inducida por $\mathcal{U}$ y para cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$, denotamos $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ por $\mathcal{F} \cap A$.

Definición II.37. Un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene **densidad** d en x si

$$d(x, E) = \lim_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x - h, x + h])}{2h}$$

existe y es igual a d.

Es decir, si un punto x tiene una densidad alta (cercana a 1) en un conjunto E, significa que los puntos cercanos a x serán miembros de E con alta probabilidad.

Denotamos por $\phi(E)$, al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : d(x, E) = 1\}$. Escribimos $A \sim B$ cuando $A \Delta B$ es un conjunto de medida cero.

Sobre $\phi(E)$, podemos mencionar lo siguiente: Si $d(x, E) = 1$, podemos concluir que los puntos cercanos a x se encuentran en E con probabilidad 1. Por supuesto, esto puede ser solo probabilidad 1 en el límite de los intervalos de contracción alrededor de x. Así que debemos tener cuidado con la palabra **cerca**. En la práctica, los puntos de densidad 1 son de gran importancia. Si un punto tiene densidad 1 en un conjunto E, se dice que es un punto de densidad de E.

Recuerde que la imagen inversa de un conjunto abierto por una función contínua es un conjunto abierto. Considere cualquier conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ y cualquier $x \in U$. Los intervalos de contracción centrados en x eventualmente estarán contenidos en U.

Para definir la densidad en un conjunto, también tomaremos intervalos de contracción alrededor de un punto. Pero, en lugar de requerir que los intervalos sean eventualmente contenidos en U, aflojamos la restricción para decir que las medidas del conjunto alrededor del punto deben aproximarse a la medida del intervalo.

Teorema II.24 (Teorema de la densidad de Lebesgue). *Para cualquier conjunto medible* $E \subseteq \mathbb{R}$*,* $m(E\Delta\phi(E)) = 0$*.*

Demostración. Ver: John Oxtoby, *Measure and Category*, Pag. 17, [19]. ∎

Teorema II.25. *Sea* A *un conjunto medible en* $\mathbb{R}$*. Entonces*

(1) $\phi(A) \sim A$*,*

(2) si $A \sim B$*, entonces* $\phi(A) = \phi(B)$*,*

(3) $\phi(\varnothing) = \varnothing$ *y* $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*,*

(4) $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(A)$*,*

(5) si $A \subseteq B$*, entonces* $\phi(A) \subseteq \phi(B)$*.*

Demostración. Ver: John Oxtoby, *Measure and Category*, Pag. 18, [19]. ∎

Teorema II.26. *La familia de todos los conjuntos medibles* E *tal que* $E \subseteq \phi(E)$ *es una topología en* $\mathbb{R}$*, de ahora en adelante denotado por* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$*. Claramente* $\mathcal{T}$ *es más fuerte que la topología usual, es decir,* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$*.*

Demostración. Ver: Stuart Nygard, *The density topology on the reals with analogues on other spaces*, Pag. 30, [18].

∎

$\mathcal{T}$ es llamada la topológia de la densidad.

Lema II.7. *Todo conjunto* $\mathcal{T}$*-abierto no vacío* $A \subseteq \mathbb{R}$ *es un conjunto no numerable y tiene medida positiva.*

Demostración. Sea A un conjunto $\mathcal{T}$-abierto no vacío, note que $m(A) > 0$ (caso contrário, tendríamos que $A \nsubseteq \phi(A)$). Ahora, por el Teorema de Vitali (Teorema II.8), A contiene un subconjunto P que no es medible, en particular P es un conjunto no numerable, por tanto A es no numerable. ∎

Teorema II.27. *Las siguientes condiciones en subconjunto Y de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ son equivalentes:*

(1) Y es un conjunto de medida cero,

(2) Y es nunca denso,

(3) Y es magro.

Demostración. Ver: Franklin D. Tall, *The density topology*, Pag. 275, [26]. ∎

Proposición II.20.

(1) Si $A \in \mathcal{L}$, entonces sigue del teorema de densidad de Lebesgue que $\text{int}_{\mathcal{T}} A = \{x \in A : d(x, A) = 1\}$.

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio completamente regular, Hausdorff que no es normal.

(3) Todo intervalo de $\mathbb{R}$ es un conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(4) Un subconjunto D de $\mathbb{R}$ es $\mathcal{T}$-denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $m_*(\mathbb{R} \backslash D) = 0$.

(5) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire.

Demostración. Vamos a demostrar (4) y (5), para las demás afirmaciones el lector interesado puede consultar J. Lukes , J. Maly and L. Zajicek, *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory*, Pag. 151-152, [17].

Veamos (4). Suponga que D es $\mathcal{T}$-denso en $\mathbb{R}$, entonces $\text{int}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R} \backslash D) = \varnothing$. Sea C un conjunto cerrado de $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ tal que $C \subseteq \mathbb{R} \backslash D$, en particular C es $\mathcal{T}$-cerrado, entonces $\text{int}_{\mathcal{T}}(\overline{C}^{\mathcal{T}}) = \text{int}_{\mathcal{T}}(C) \subseteq \text{int}_{\mathcal{T}}(\mathbb{R} \backslash D) = \varnothing$, por el Teorema II.27, $m(C) = 0$, luego $m_*(\mathbb{R} \backslash D) = 0$. Ahora, suponga que D no es $\mathcal{T}$-denso, entonces existe $A \in \mathcal{T} \backslash \{\varnothing\}$ tal que $A \cap D = \varnothing$, luego $A \subseteq \mathbb{R} \backslash D$, entonces $m(A) = 0$, contradicción.

Veamos (5). Sea $\{A_n\}_{n \in \omega}$ una familia de $\mathcal{T}$-abiertos y $\mathcal{T}$-densos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, entonces para cada $n \in \omega$, $m(\mathbb{R} \backslash A_n) = m_*(\mathbb{R} \backslash A_n) = 0$.

Entonces $m_*(\mathbb{R}\backslash\bigcap_{n\in\omega} A_n) = m(\bigcup_{n\in\omega} \mathbb{R}\backslash A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m(\mathbb{R}\backslash A_n) = 0$, por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es $\mathcal{T}$-denso. ■

Teorema II.28. *Todo subespacio de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *es Baire.*

Demostración. Ver: J. Lukes , J. Maly and L. Zajicek, *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory*, Pag. 151, [17]. ■

Teorema II.29. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *satisface la condición de cadena numerable.*

Demostración. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos abiertos dos a dos disjuntos en X, podemos suponer que $A_\lambda \neq \varnothing$ luego $m(A_\lambda) > 0$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces por el Teorema II.7, Λ es numerable. ■

2.3. Conceptual

- **Conjunto nunca denso**. Decimos que un subconjunto N de un espacio topológico X es nunca denso si int$(\overline{A}) = \varnothing$. (Ryszard Engelking, *General Topology* (1989), [9]).

- **Conjunto magro**. Decimos que un subconjunto M de un espacio topológico X es magro si M es una unión numerable de conjuntos nunca densos. (Ryszard Engelking, *General Topology* (1989), [9]).

- **Espacio de Baire**. Decimos que un espacio topológico X es un espacio de Baire si todo subconjunto abierto no vacío de X no es magro. (Ryszard Engelking, *General Topology* (1989), [9]).

- **Espacio productivamente Baire**. Decimos que un espacio topológico X es un espacio productivamente Baire si $X \times Y$ es un espacio de Baire, para todo espacio de Baire Y. (Ryszard Engelking, *General Topology* (1989), [9]).

- **σ-álgebra**. Fijado un conjunto no vacío X. Decimos que una colleción no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un σ-álgebra si $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables y si $E \in \mathcal{A}$, entonces $X \backslash E \in \mathcal{A}$. (Gerald Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (1999), [10]).

- σ**-álgebra de Borel**. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Denotamos por $\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{T})$ el menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$, el cual es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{T}$. (Gerald Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (1999), [10]).

2.4. Definición de términos básicos

A continuación presentamos una definición de términos básicos. Mas aún la referencia bibliográfica de donde ha sido obtenida.

- **Espacio de Baire :** Decimos que un espacio topológico X es de Baire si toda colección numerable de abiertos densos tiene intersección densa (Ryszard Engelking, *General Topology* (1989), [9]).

- **Medida de Lebesgue :** Se considera la medida m de Lebesgue en la recta real $\mathbb{R}$ (Gerald Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (1999), [10]).

- **Conjuntos medibles:** Se considera los conjuntos medibles los cuales forman el σ-álgebra, el cual contiene el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ (Gerald Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (1999), [10]).

- Un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene **densidad** d en x si

  $$d(x, E) = \lim_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

  existe y es igual a d (Franklin D. Tall, *The density topology* (1976), [26]).

- **Topología de la densidad en** $\mathbb{R}$ **:** Es la familia de todos los conjuntos medibles E tal que $E \subseteq \{x \in \mathbb{R} : d(x, E) = 1\}$ (Franklin D. Tall, *The density topology* (1976), [26]).

- **Conjunto Arquimediano :** Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es Arquimediano, cuando el conjunto de los puntos $r \in \mathbb{R}$ tal que $A + r = A$ es denso (Andrew Simoson, *On Two Halves Being Two Wholes* (1984), [24]).

- **Conjunto transitivo :** Decimos que un conjunto X es **transitivo** si, para todo $y \in X$, tenemos que $y \subset X$ (Thomas Jech, *Set Theory* (2003), [14]).

- **Número ordinal :** Decimos que un conjunto α es un ordinal si es transitivo y bien ordenado por la relación $\in$ (Thomas Jech, *Set Theory* (2003), [14]).

- **Hipótesis del Contínuo :** Es la afirmación $2^{\omega} = \omega_1$ (Thomas Jech, *Set Theory* (2003), [14]).

Notaciones básicas	
$\mathcal{E}$	Denota la topología euclideana (o usual) de $\mathbb{R}$.
m	Denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	Denota el σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.
$\mathcal{L}$	Denota el σ-algebra de los conjuntos medibles el cual contiene a $\mathcal{B}$.
$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$	Denota el espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topológia de la densidad.
$(Y, \mathcal{T} \cap Y)$	Denota al subconjunto Y de $\mathbb{R}$ con la topológia del subespacio.
ω	Denota el cardinal de los números naturales.
$\omega_1 = \aleph_1$	Denota al primer cardinal no numerable.
CH	Denota la Hipótesis del Contínuo, la cual es la afirmación $2^{\omega} = \omega_1$.

Tabla II.1: Tabla 1: Fuente: Autoría própia

III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis general

Existen espacios de Baire cuyo producto con él mismo no es un espacio de Baire.

Hipótesis específicas

Asumiendo la hipótesis del contínuo, existen espacios de Baire cuyo producto con él mismo no es un espacio de Baire.

3.2. Definición conceptual de variables

Nuestras variables a estudiar estarán dadas por

- **Variables Independientes :** Medida exterior de Lebesgue y espacio de Baire.
- **Variable dependiente :** Espacio topológico no productivamente Baire con medida exterior positiva.

3.3. Operacionalización de variable

Variables	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
Independiente ▪ Medida exterior de Lebesgue	Espacio medible	El conjunto contiene un subconjunto no medible.	Teórico: Demostrativo-constructivo	Constructiva
▪ Espacio de Baire	Categoría de Baire.	Si la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos es densa.	Teórico: Demostrativo-constructivo	
Dependiente ▪ Espacio topológico no productivamente Baire con medida exterior positiva.	Espacio topológico	Si el espacio producto es magro en sí mismo	Asumiendo CH, se construye un subespacio de medida exterior positiva y por lo tanto denso de Baire cuyo cuadrado no es Baire	Constructiva

Tabla III.1: Tabla 2: Operacionalización de las variables

IV

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación

Con respecto al tipo de investigación, el presente trabajo es una investigación básica, pura o fundamental, debido a que está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos basados en la topología general y la teoría de conjuntos.

Para el diseño de la investigación, manifestamos que, de acuerdo a la naturaleza de nuestra investigación, es un estudio no experimental ya que no hemos requerido de datos experimentales y estadísticos.

Según su enfoque es cualitativa, ya que tiene como propósito la descripción de las cualidades del fenómeno a estudiar; y de acuerdo a que no solo describe y relaciona, sino requiere encontrar las causas de un fenómeno que es explicativo según su alcance.

Finalmente, manifestamos que las demostraciones presentes en nuestro trabajo son de clase directa, ya que se prueba la validez de una tesis estableciendo que esta necesariamente se da a partir de ciertas proposiciones que han sido probadas como verdaderas.

4.2. Método de investigación

En esta investigación el método de investigación es inductivo-deductivo, dado que se reduce a la hipótesis, que consiste en la interpretación de la demostración de la propiedad de ser un espacio de Baire en el producto.

Más especificamente, iniciándose con la definiciones de topológia general (con enfasis en los espacios de Baire), definición de la medida de Lebesgue en la recta, la hipótesis del contínuo y la topología de la densidad en $\mathbb{R}$. Luego con toda la teoría desarrollada hasta esta parte del trabajo, presentamos algunos resultados previos sobre subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$. Finalmente mostraremos el objetivo principal del presente trabajo. Asumiendo CH, construimos un subespacio Baire de la topología de la densidad cuyo cuadrado no es Baire.

4.3. Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

Las actividades de investigación se realizaron remotamente en la Facultad de Ciencias naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Gran parte del presente trabajo se ha realizado en el país vecino de Brasil, específicamente en la biblioteca del Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP), precisando que se inició en Enero del 2020 y por el problema de la pandemia del COVID 19, me permitió dedicarme exclusivamente a la presente tesis.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizó la técnica del análisis documental dado que se revisó exhaustivamente libros, revistas, artículos que gracias a su confiabilidad nos permitieron validar los conceptos necesarios para nuestra investigación. Dado el tipo de investigación, no se hizo recolección de datos del tipo estadístico ni observaciones experimentales.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Dado que no se contó con datos estadísticos u otros que se puedan adquirir mediante observaciones experimentales, no se requirió de algún tipo de análisis ni procesamiento de datos.

V

RESULTADOS

Finalmente presentamos el objetivo general del presente trabajo. Para mayor detalle se remite al lector consultar [28].

Relación entre subgrupos aditivos y la topología de la densidad en $\mathbb{R}$

En lo que sigue, denotaremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ por m, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denota el σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{E}$ la topología euclideana (o usual) de $\mathbb{R}$. Para cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{U})$, denotamos por $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la topología del producto en $X \times X$ inducida por $\mathcal{U}$ y para cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$, denotamos $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ por $\mathcal{F} \cap A$.

Comenzamos la construcción de nuestro espacio, con el siguiente

Lema V.1. *Sea G un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ de medida exterior de Lebesgue positiva. Entonces G es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.*

Demostración. Por el Corolário II.4, tenemos que para todo intervalo I,

$$m^*(G \cap I) = m^*(I).$$

Afirmación V.1.1. *Para todo conjunto medible limitado A tenemos que*

$$m^*(G \cap A) = m^*(A).$$

Demostración. Sea I un intervalo limitado que contiene A, definimos la siguiente familia

$$\mathcal{F}_I = \{B \subseteq I : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ y } m^*(G \cap B) = m^*(B)\}$$

Afirmamos que $\mathcal{F}_I$ es un λ-sistema en $\mathcal{P}(I)$.

En efecto,

- $I \in \mathcal{F}_I$

- Si $C, D \in \mathcal{F}_I$ y $C \subseteq D$, entonces $D \backslash C \in \mathcal{F}_I$. Primero, note que si $C \in \mathcal{F}_I$ entonces $I \backslash C \in \mathcal{F}_I$, por que $m^*(I) = m^*(G \cap I) = m^*(G \cap C) + m^*(G \cap (I \backslash C)) = m^*(C) + m^*(G \cap (I \backslash C))$, como I es limitado, $m^*(I \backslash C) = m^*(G \cap (I \backslash C))$. Ahora, $m^*(I \backslash C) = m^*(G \cap (I \backslash C)) = m^*(G \cap (D \backslash C)) + m^*(G \cap (I \backslash D)) = m^*(G \cap (D \backslash C)) + m^*(I \backslash D)$, entonces $D \backslash C \in \mathcal{F}_I$.

- Si la sucesión $\{F_1, F_2, \cdots\} \subseteq \mathcal{F}_I$ satisface $F_n \uparrow F$, entonces $F \in \mathcal{F}_I$. Note que $F = F_1 \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_{n+1} \backslash F_n$, entonces $m^*(F \cap G) = m^*(G \cap F_1) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G \cap (A_{n+1} \backslash A_n) = m^*(F)$.

Consideremos $\mathcal{I} = \{I' \subseteq I : I' \text{ es un intervalo }\}$, note que $\mathcal{I}$ es un π-sistema y $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}_I$. Por el Lema de Dynkin (II.3), $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{F}_I$.

De otro lado, sabemos que si $\mathcal{C} = \{[a, b] : a < b\}$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Luego $\sigma(\{C \cap I : C \in \mathcal{C}\}) = \{B \cap I : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. Note que $\{C \cap I : C \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \sigma(\mathcal{I})$. Entonces $\sigma(\{C \cap I : C \in \mathcal{C}\}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$. Por lo tanto $\{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : B \subseteq I\} \subseteq \{B \cap I : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} = \sigma(\{C \cap I : C \in \mathcal{C}\}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{F}_I$.

Ahora, por el Teorema II.5, $A = H \cup N_2$ donde H es un conjunto F_σ y $m(N_2) = 0$, luego H es un conjunto de Borel contenido en I, entonces $m^*(H \cap G) = m^*(H)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} m^*(G \cap H) &\leqslant m^*(G \cap A) \\ &= m^*((G \cap H) \cup (G \cap N_2)) \\ &\leqslant m^*(G \cap H) + m^*(G \cap N_2) \\ &= m^*(G \cap H) \end{aligned}$$

Así $m^*(G \cap H) = m^*(G \cap A)$ y

$$m^*(G \cap A) = m^*(G \cap H) = m^*(H) = m^*(A)$$

$\blacksquare$

Finalmente veamos que G es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Sea $A \in \mathcal{T} \backslash \{\varnothing\}$, y sea I un intervalo abierto limitado tal que $A \cap I \neq \varnothing$, por la Afirmación V.1.1, tenemos que

$$m^*(G \cap (A \cap I)) = m^*(A \cap I)$$

Note que $A \cap I \in \mathcal{T} \backslash \{\varnothing\}$, luego $m(A \cap I) > 0$. Entonces

$$m^*(G \cap A) \geqslant m^*(G \cap (A \cap I)) = m^*(A \cap I) > 0$$

Por lo tanto $A \cap G \neq \varnothing$, así G es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. $\blacksquare$

La siguiente proposición será de gran importancia más adelante.

Proposición V.1. *Suponga que G es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ de medida exterior de Lebesgue positiva tal que G es magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.*

Entonces $(G, \mathcal{T} \cap G)$ es un espacio completamente regular, de Hausdorff tal que

(1) G es un espacio de Baire, y

(2) $G \times G$ es magro en sí mismo (en particular $G \times G$ no es un espacio de Baire).

Demostración. Note que, como $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff completamente regular, entonces $(G, \mathcal{T} \cap G)$ también lo es. Además por el Lema V.1, G is denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Primero veamos que $(G, \mathcal{T} \cap G)$ es un espacio de Baire. En efecto, suponga lo contrario, luego existe un conjunto abierto en G no vacío A, el cual es magro en G, luego por la Proposición II.11, A es magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, por el Teorema II.27, $m(A) = 0$. Como $A = V \cap G$ con $V \in \mathcal{T} \backslash \{\varnothing\}$, por el Lema II.7, $m(V) > 0$. Como G es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ y por la Proposición II.20, tenemos que $m_*(\mathbb{R} \backslash G) = 0$, luego $m_*(V \backslash G) = 0$. Como $V = (V \backslash G) \sqcup A$, tenemos que $V \backslash G$ es medible, entonces $0 < m(V) \leqslant 0$, contradicción. Por lo tanto $(G, \mathcal{T} \cap G)$ es un espacio de Baire.

Ahora veamos que $G \times G$ es magro en sí mismo. Como G es magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ por lo tanto $\mathbb{R} \backslash G$ es un conjunto residual, como $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ es un espacio de Baire, y por el Teorema II.14, tenemos que existe un subconjunto H denso G_δ de $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ tal que $H \subseteq \mathbb{R} \backslash G$, así $H = \bigcap_{n \in \omega} H_n$ donde cada $H_n \in \mathcal{E}$. Note que $G \cap H = \varnothing$.

Sea $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in H\}$. Considere la función contínua

$$\begin{array}{rccl} S & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longrightarrow & S(x, y) = x - y \end{array}$$

Entonces $K = S^{-1}(H) = S^{-1}(\bigcap_{n \in \omega} H_n) = \bigcap_{n \in \omega} S^{-1}(H_n)$. Luego K es un subconjunto G_δ de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{E} \times \mathcal{E})$. Además, como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$, tenemos que K es también un subconjunto G_δ de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

Afirmación V.1.2. *K es un subconjunto denso de* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$

Demostración. Sea $A, B \in \mathcal{T} \backslash \{\varnothing\}$, en particular, $m(A), m(B) > 0$. Por el Teorema de Kuczma y Kuczma (Teorema II.10), tenemos que existe un intervalo abierto I tal que $I \subseteq A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, como H es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, existe $h \in H \cap I \subseteq A - B$, entonces $h = a - b \in H$, para algunos $a \in A$ y $b \in B$, entonces $(a, b) \in K \cap (A \times B)$. ■

Así K es un subconjunto denso G_δ de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Note que $G \times G$ es denso en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$, pues $\overline{G \times G}^{\mathcal{T} \times \mathcal{T}} = \overline{G}^{\mathcal{T}} \times \overline{G}^{\mathcal{T}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Finalmente note que $(G \times G) \cap K = \varnothing$, luego $G \times G \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash K$, entonces $G \times G$ es magro en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$. Como $G \times G$ es denso en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$, por la Observación II.3, tenemos que $G \times G$ es magro en sí mismo, por lo tanto $G \times G$ no es un espacio de Baire.

■

Recuerde que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y dados x, y en $\mathbb{R}$, denotamos por $xA + y$ el conjunto $\{xa + y : a \in A\}$.

La hipótesis del contínuo implica que existe un espacio de Baire no productivamente Baire

Finalmente demostraremos el siguiente teorema.

Teorema V.1 (H. E. White Jr.). *Si* $2^{\aleph_1} = \aleph_0$*, entonces existe un espacio de Hausdorff regular* Y *tal que*

(1) Y *satisface la condición de cadena numerable.*

(2) Y *es un espacio de Baire.*

(3) $Y \times Y$ *no es un espacio de Baire.*

Demostración. Suponga que $2^{\omega} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = \omega_1$. Considere Z un denso G_δ de $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ tal que $0 \notin Z$ y $m(Z) = 0$, note que este conjunto existe por la construcción hecha en la Proposición II.9.

Considere $(F_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ la familia de todos los conjuntos $\mathcal{E}$-Borel de medida cero (esto es posible por la Observación II.2), y suponga $F_0 = Z$.

Por recursión transfinita sobre ω_1 vamos a definir una sucesión $(Y_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de subespacios vectoriales racionales de $\mathbb{R}$ tal que cada Y_α es numerable.

Sea $Y_0 = \{0\}$. Defina $Y^1 = Y_0 = \{0\}$ y $Z^1 = \bigcup\{qZ : q \in \mathbb{Q}\}$, note que $m(Z^1) = 0$, y elija $h_1 \in \mathbb{R} \backslash Z^1$, en particular $h_1 \neq 0$ y defina $Y_1 = \{qh_1 : q \in \mathbb{Q}\}$, entonces $|Y_1| = \aleph_0$.

Suponga que, para algún α, $0 < \alpha < \omega_1$, tenemos construído $(Y_\beta)_{\beta<\alpha}$. Luego para cada β, $0 \leqslant \beta < \alpha$, Y_β es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

Sean $Y^\alpha = \bigcup\{Y_\beta : \beta < \alpha\}$ y $Z^\alpha = \bigcup\{qF_\beta + y : q \in \mathbb{Q}, \beta < \alpha, y \in Y^\alpha\}$. Note que Y^α es un conjunto numerable y $Y^\alpha \subseteq Z^\alpha$.

Además para cada $q \in \mathbb{Q}, \beta < \alpha$ y $y \in Y^\alpha$ tenemos $m(qF_\beta + y) = |q|m(F_\beta) = 0$, así $m(Z^\alpha) = 0$. Entonces podemos escoger $h_\alpha \in \mathbb{R} \backslash Z^\alpha$. Defina $Y_\alpha = \{qh_\alpha + y : q \in \mathbb{Q}, y \in Y^\alpha\}$, en particular $\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta = Y^\alpha \subseteq Y_\alpha$ y

$h_\alpha \in Y_\alpha \backslash Y^\alpha$. Note que Y_α es un conjunto numerable. Luego, por el Teorema de Recursión (Teorema II.19), la sucesión $(Y_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ existe.

Note que si $\beta < \alpha$ tenemos que $Z^\beta \subseteq Z^\alpha$, $Y^\beta \subseteq Y^\alpha$ y $Y_\beta \subseteq Y_\alpha$.

Afirmación V.1.3. *Y_α es subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$, para cada $\alpha < \omega_1$.*

Demostración. Por construcción $Y_0 = \{0\}$, además $Y_1 = \{qh_1 : q \in \mathbb{Q}\}$. Ahora asumimos que para algún $1 < \alpha < \omega_1$ tenemos que Y_β es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$ para todo $0 < \beta < \alpha$. Afirmamos que Y_α es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$. Para esto, considere $a, b \in Y_\alpha$ y $q, r \in \mathbb{Q}$ luego existen $q_a, q_b \in \mathbb{Q}$ y $y_a, y_b \in Y^\alpha$ tales que $a = q_a h_\alpha + y_a$ y $b = q_b h_\alpha + y_b$ entonces $qa + rb = (qq_a + rq_b)h_\alpha + qy_a + ry_b$. Además existen $\beta_1, \beta_2 < \alpha$ tal que $y_a \in Y_{\beta_1}$ y $y_b \in Y_{\beta_2}$ podemos suponer que $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$, luego $qy_a + ry_b \in Y_{\beta_2}$, entonces $qa + rb \in Y_\alpha$. ■

Finalmente, considere

$$Y = \bigcup\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

Note que

$$|Y| = \left|\bigcup\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}\right| \leqslant |\omega_1| \cdot \sup\{|Y_\alpha| : \alpha < \omega_1\} \leqslant \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1.$$

Por otra parte $|\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}| = \aleph_1$ y $\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq Y$ por lo tanto $|Y| = \aleph_1$. Por la Afirmación V.1.3, se ve facilmente que Y es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$.

Afirmación V.1.4.

$$(Y_\alpha \backslash Y^\alpha) \cap \left[\bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\}\right] = \varnothing, \text{ para } 0 < \alpha < \omega_1$$

Demostración. Suponga lo contrario, luego existe $x \in (Y_\alpha \backslash Y^\alpha) \cap [\bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\}]$, donde $0 < \alpha < \omega_1$. Luego $x \in Y_\alpha \backslash Y^\alpha$ y $x \in \bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\}$. Entonces existen $q \in \mathbb{Q}, y \in Y^\alpha$ y $\gamma < \alpha$ tal que $x = qh_\alpha + y$ y $x \in F_\gamma$. Ya que $x \notin Y^\alpha$, $q \neq 0$. Luego $h_\alpha = \frac{x-y}{q} = q^{-1}(x + (-y)) \in q^{-1}[F_\gamma + (-y)] \subseteq Z^\alpha$, contradiciendo la elección de h_α (pues, por construcción $h_\alpha \in \mathbb{R} \backslash Z^\alpha$). ■

Afirmación V.1.5.

(a) $|Y \cap A| \leqslant \aleph_0$*, para todo subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *de medida de Lebesgue* 0*, y*

(b) $Y \cap Z = \varnothing$*.*

Demostración. En efecto, para demostrar (a), sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $m(A) = 0$, por el Lema II.2, tenemos que existe G un conjunto G_δ tal que $A \subseteq G$ y $m(G) = m^*(G) = m(A) = 0$, en particular G es un conjunto $\mathcal{E}$-Borel de medida cero, luego existe $\beta < \omega_1$ tal que $G = F_\beta$. Afirmamos que

$$\bigcup_{\alpha>\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta)$$

Caso contrario, existe $x \in \bigcup_{\alpha>\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta) \backslash \left(\bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta)\right)$, sea $\alpha = \min\{\gamma > \beta : x \in Y_\gamma\}$, luego $x \in Y_\alpha \cap F_\beta$, entonces $x = qh_\alpha + y$ para algunos $q \in \mathbb{Q}, y \in Y^\alpha$, note que $q \neq 0$ (si $q = 0$, existe $\gamma < \alpha$ tal que $x \in Y_\gamma$, además $\beta < \gamma < \alpha$, contradiciendo la minimalidad de α) entonces $h_\alpha = \frac{x-y}{q} \in Z^\alpha$, contradicción. Por lo tanto $Y \cap A \subseteq Y \cap F_\beta = \bigcup_{\alpha>\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta) \cup \bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta) = \bigcup_{\alpha\leqslant\beta}(Y_\alpha \cap F_\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha\leqslant\beta} Y_\alpha$. Note que $\bigcup_{\alpha\leqslant\beta} Y_\alpha$ es un conjunto numerable, pues $\beta < \omega_1$. Luego $Y \cap A$ es un conjunto numerable.

Para demostrar (b), suponga caso contrario, luego existe $x \in Y \cap Z$ luego considerando $\alpha < \omega_1$ el mínimo tal que $x \in Y_\alpha$, luego $x = qh_\alpha + y$ para algunos $q \in \mathbb{Q}, y \in Y^\alpha$. Si $q \neq 0$, $h_\alpha \in Z_\alpha$, contradicción, y si $q = 0$, $x \in Y^\alpha$, es otra vez una contradicción. Por tanto $Y \cap Z = \varnothing$.

■

Finalmente presentamos las **propiedades topológicas de** $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$.

Note que $|Y| = \aleph_1 > \aleph_0$, luego de (a) se sigue que Y tiene medida exterior de Lebesgue positiva.

Además de (b), como Z es un subconjunto denso G_δ de $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ se sigue que, Y es magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Como Y es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$ (en particular Y es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$), con $m^*(Y) > 0$ y magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, por la Proposición V.1, tenemos que:

(1) $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ **es un espacio de Hausdorff, completamente regular**, pues $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ lo es.

(2) Por el Lema V.1 tenemos que Y **es denso en** $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(3) Como $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ satisface la condición de cadena numerable, por la Proposición II.4 tenemos que $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ **también satisface la condición de cadena numerable**.

(4) $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ **es un espacio de Baire**, pues todo subespacio de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es de Baire.

Observación V.1. Presentamos otra demostración de que $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ es un espacio de Baire. En efecto, como Y es denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire, podemos usar el Teorema II.13. En efecto, sea H un conjunto G_δ tal que $H \subseteq \mathbb{R} \backslash Y$. Por la parte (4) de la Proposición II.20, $m_*(\mathbb{R} \backslash Y) = 0$. Como H es un conjunto G_δ en $(\mathbb{R}, \tau)$, entonces H es medible y $0 \leqslant m(H) = m_*(H) \leqslant m_*(\mathbb{R} \backslash Y) = 0$, así H es un conjunto de medida cero, luego, por el Teorema II.27, H es nunca denso. Por lo tanto Y es un espacio de Baire.

(5) $Y \times Y$ es magro en sí mismo. Por lo tanto $Y \times Y$ **no es un espacio de Baire**. En particular Y no es productivamente Baire.

(6) $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ **no es extremadamente disconexo**, pues considere el subconjunto abierto en Y no vacío $Y \cap]0, +\infty[$ tenemos que

$$\overline{Y \cap]0, +\infty[}^{Y} = Y \cap \overline{Y \cap]0, +\infty[}^{\mathcal{T}} = Y \cap \overline{]0, +\infty[}^{\mathcal{T}} = Y \cap [0, +\infty[$$

Afirmamos que $Y \cap [0, +\infty[$ no es un abierto en Y. En efecto, caso contrário, existe un subconjunto A abierto no vacío de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ tal que

$Y \cap [0,+\infty[= A \cap Y$. Luego $A \cap]-\infty, 0[\cap Y = \varnothing$. Como Y es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$ con medida exterior positiva, sigue que existe $0 < c < 1$ tal que $m^*(Y \cap]a,b[) = c \cdot \ell(]a,b[)$. Entonces para todo intervalo abierto $]a,b[$ tenemos que $m(A \cap]a,b[) \leqslant (1-c) \cdot \ell(]a,b[)$, finalmente por el Lema II.1, tenemos que $m(A) = 0$, contradicción.

■

5.1. Resultados descriptivos

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se obtienen resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística inferencial, no se obtienen resultados inferenciales.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

De lo desarrollado en la presente investigación, con lo establecido en el Marco teórico y en Resultados tenemos:

(a) Asumiendo CH podemos hacer una enumeración de tamaño ω_1 de todos los conjuntos $\mathcal{E}$-Borel de medida cero.

(b) En seguida construímos una sucesión $(Y_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de subespacios vectoriales racionales de $\mathbb{R}$ tal que cada Y_α es numerable. Finalmente considero $Y = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} Y_\alpha$ el cual es un subespacio vectorial racional de $\mathbb{R}$.

(c) Luego Y es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ con medida exterior de Lebesgue positiva y magro en $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, por la Proposición V.1 tenemos que $(Y, \mathcal{T} \cap Y)$ es Baire y $Y \times Y$ es magro en sí mismo, luego $Y \times Y$ no es un espacio de Baire.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Consideraremos las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco teórico

(a) En el artículo [20] también es construido, asumiendo la hipótesis del contínuo, un espacio de Baire cuyo cuadrado no es un espacio de Baire, estos espacios **no son homeomorfos** pues el espacio construído en [20] es extremadamente disconexo y el espacio Y no lo es, por lo demostrado en la parte (6) del Teorema V.1.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación.

CONCLUSIONES

Como se analizó en la presente tesis, CH implica que existen espacios de Baire que satisfacen la condición de cadena numerable no productivamente Baire.

Es decir con los axiomas de la teoría de conjuntos no podemos demostrar que “ **todo espacio de Baire satisfaciendo la condición de cadena numerable es productivamente Baire** ".

Posteriormente Rui Li y László Zsilinszky introducen la noción de espacio topológico almost locally ccc.

Definición VI.1. Un espacio topológico es **almost locally ccc** si todo conjunto abierto contiene un subespacio abierto que satisface la condición de cadena numerable.

Note que todo espacio que satisface la condición de cadena numerable es almost locally ccc. En el artículo [16], aparece el siguiente

Teorema VI.1. *Sean X, Y espacios de Baire, y suponga que Y es almost locally ccc. Entonces $X \times Y$ es un espacio de Baire.*

Por lo expuesto anteriormente concluímos que **no es posible demostrar el Teorema VI.1 sólo usando los axiomas ZFC de la teoría de conjuntos**.

Pues si fuese posible hacerlo, entonces asumiendo CH también podríamos demostrarlo. Pero asumiendo CH, por el Teorema V.1 tenemos que Y es un contraejemplo para el supuesto Teorema. Esto sería una contradicción en esta teoría, ya que CH es consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos.

Esta conclusión fue observada y posteriormente mostrada para Taras Banakh y aparece mencionada en el artículo [4].

RECOMENDACIONES

(1) La topología de la densidad $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ fue de gran de ayuda en la construcción, se recomendaría hacer un estudio más profundo de esta nueva topología en $\mathbb{R}$.

(2) Posteriormente Cohen demostró que sólo los axiomas de ZFC sirven para demostrar que existe un espacio de Baire cuyo cuadrado no es Baire, para esto se necesitó herramientas mas abstractas de teoría de conjuntos, mas especificamente se utilizó forcing, se recomendaría hacer una introduccion al forcing como un primer estudio para alumnos de pregrado.

(3) Siguiendo las ideas de Cohen, Fleissner y Kunen construyen ejemplos específicos de productos de espacios de Baire cuyo producto no es Baire, para esto se utilizan los conjuntos estacionarios en ω_1, se recomendaría estudiar estos ejemplos en un futuro.

(3) Ya que existen existen espacios de Baire no productivamente Baire. Lo natural ahora sería como solucionar este problema, es decir, que condiciones podemos agregar a un espacio de Baire para que sea productivamente, se recomendaría hacer un estudio de este nuevo problema.

Se espera que con este trabajo, se genere una base de futuros proyectos en estos campos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aliprantis, C.D. and Border, K. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[2] Asmat Medina, Gabriel Andre. *The Banach-Mazur game and products of Baire spaces*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. doi:10.11606/D.55.2020.tde-10092020-171236. Recuperado em 2021-04-10, de www.teses.usp.br

[3] Aurichi, Leandro Fiorini. *Sobre a hipótese do contínuo, algumas aplicações e equivalências*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. doi:10.11606/T.45.2009.tde-24092010-150623. Recuperado em 2021-04-10, de www.teses.usp.br

[4] Banakh T., Hryniv O. *Some Baire category properties of topological groups*, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. **86** (2018.), 71–76.Disponible en https://arxiv.org/abs/1901.01420

[5] Bartle R., Sherbert, D. *Introduction to Real Analysis*. Wiley, 2018.

[6] Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. *Regular variation*. Cambridge University press, 1987.

[7] Ciesielski, K. *Set Theory for the Working Mathematician*. Cambridge University Press, 1997.

[8] Cunningham, Daniel W. *Set theory. A first course.*. Cambridge University Press, 2016.

[9] Engelking, R. *General Topology*. Sigma Series in Pure Mathematics, 1989.

[10] Folland, Gerald B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 1999.

[11] Garcia-Ferreira S. , Garcia-Maynez A. and Hrusak M. *Spaces in which every dense subset is Baire*, Houston Journal of Mathematics **1** (2013), 247–263.

[12] Goldrei, D. *Classic set theory for guided independent study*, Routledge, New York, 1996.

[13] Hrbácek K., Jech T. *Introduction to Set Theory*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 1987.

[14] Jech, T. *Set Theory*. Springer-Verlag, 2003.

[15] Kunen, K. *The Foundations of Mathematics*. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, 2009.

[16] Li R., Zsilinszky L. *More on products of Baire spaces*, Topology and its Applications **230** (2017), 35–44.

[17] Lukes J., Maly, J. and Zajicek, L. *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[18] Nygard, S. *The Density Topology on the Reals with Analogues on Other Spaces*, Boise State University Theses and Dissertation. 2016

[19] Oxtoby, John C. *Measure and Category*. Springer-Verlag, 1980.

[20] Oxtoby, John C. *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math. (49). 157–166. 1961

[21] Rivas Mamani, Miguel Angel. *Los resultados fundamentales del análisis funcional como consecuencia del teorema de la categoría de Baire*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional del Altiplano. Puno, Perú 2017

[22] Royden H., Fitzpatrick P. *Real Analysis*. Pearson, 2010.

[23] Schimmerling, E. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 2011.

[24] Simoson, A. *On Two Halves Being Two Wholes*. The American Mathematical Monthly, Volume 91, 1984.

[25] Singh, T. B. *Elements of topology*. Chapman and Hall/CRC, 2013

[26] Tall, Franklin D. *The density topology*. Pacific Journal of Mathematics, 1976.

[27] Waldmann, S. *Topology. An introduction*. Springer International Publishing, 2014.

[28] White, H. E. *An example involving Baire spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **254** (2013), 4066–4087.

[29] Willard, S. *General Topology*. Dover Publications, 2004.

[30] Yeh, J. *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*. World Scientific, 2014.

ANEXOS

Matriz de consistencia

Formulación del problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
1.1 Problema General. ¿Existen espacios de Baire cuyo producto no es un espacio de Baire? **1.2 Problemas específicos.** ¿Es posible estudiar exhibir un espacio de Baire cuyo producto con el mismo no es un espacio de Baire?	**Objetivo General.** Demostrar, asumiendo la hipótesis del contínuo, que existe un espacio topológico Hausdorff, regular Y tal que Y es un espacio de Baire y $Y \times Y$ es magro en sí mismo. **Objetivos específicos.** 1. Estudiar una nueva topología en $\mathbb{R}$ llamada la topología de la densidad. 2. Mostrar que la hipótesis del contínuo no es una sentencia con influencia sólo en áreas de los fundamentos de las matemáticas.	**Hipótesis general.** Asumiendo la hipótesis del contínuo demostraremos el Teorema de H. E. White. **Hipótesis específica.** Aplicando los resultados de teoría de la medida en $\mathbb{R}$ construiremos una topología en $\mathbb{R}$, llamada topología de la densidad.	**Tipo.** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. **Método.** La metodología usada es de tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. **Diseño de la investigación.** Comenzaremos presentando resultados básicos de topología general, teoría de la medida y teoría de conjuntos. En segundo lugar, introduciremos la topología de la densidad en $\mathbb{R}$, y sus propiedades principales. Finalmente mostraremos el objetivo principal, para esto usaremos las propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y propiedades de la topología de la densidad.	**4.3. Población y muestra.** Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.