UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

LOS NÚMEROS IRRACIONALES COMO ESPACIO TOPOLÓGICO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

CARLOS MIGUEL QUISPE ROSAS

Callao 2018

PERÚ

JURADO EVALUADOR PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL EN EL SEGUNDO CICLO DE TESIS

RESOLUCIÓN DECANAL N°147-2018-D-FCNM

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, sito Av. Juan Pablo II N° 306, Bellavista – Callao, siendo las 15:50 hrs. del día viernes 25 de enero de 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador del II Ciclo de Tesis para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

- Dr. Walter Flores Vega : Presidente
- Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana : Vocal
- Lic. Elmer Alberto León Zárate : Secretario

Designados por Resolución N° 147-2018-D-FCNM de fecha 28 de diciembre de 2018 a fin de proceder al acto de evaluación de la Tesis titulada: ***"LOS NÚMEROS IRRACIONALES COMO ESPACIO TOPOLÓGICO"***, presentada por el señor Bachiller ***QUISPE ROSAS CARLOS MIGUEL***.

Contando con la presencia del Supervisor General, Decano de la Facultad de Ciencias Económicas Dr. Pablo Mario Coronado Arrilucea, Supervisor de la FCNM, Mg. Roel Mario Vidal Guzmán, el representante de la Comisión de Grados y Títulos Dr. Richard Saúl Toribio Saavedra y el Coordinador del II Ciclo de Tesis Lic. Absalón Castillo Valdivieso.

A continuación, se dio inicio a la sustentación de la Tesis de acuerdo a lo normado en los numerales del 10.1 al 10.4 del capítulo X de la Directiva para la Titulación Profesional por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis en la Universidad Nacional del Callao, aprobada por Resolución Rectoral N° 754-2013-R del 21 de agosto de 2013, modificada por la Resolución Rectoral N° 777-2013-R de fecha 29 de agosto de 2013 y la Resolución Rectoral N° 281-2014-R del 14 de abril de 2014 con la que se modifica el Art. 4.5 del capítulo IV de la organización del Ciclo de Tesis, así como lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado, aprobado por Resolución de Consejo Universitario N° 135-2017-CU de fecha 22 de junio de 2017 y también lo establecido en el Reglamento de Grados y Títulos de la UNAC aprobado por Resolución N° 309-2017-CU de fecha 24 de octubre de 2017.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador procedieron a formular las preguntas al indicado bachiller, las mismas que fueron absueltas satisfactoriamente.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado respecto a la evaluación de la Tesis, se acordó calificar la Tesis sustentada por el señor bachiller ***QUISPE ROSAS CARLOS MIGUEL***, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática por la modalidad de Tesis con Ciclo de Tesis, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

CALIFICACIÓN CUANTITATIVA	CALIFICACIÓN CUALITATIVA
15 (QUINCE)	BUENO

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de la sustentación realizada.

Siendo las 16:45 hrs. del día viernes veinticinco de enero del dos mil diecinueve, el señor Presidente del Jurado Evaluador dio por concluido el acto de sustentación de Tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta.

Dr. Walter Flores Vega
Presidente

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Vocal

Lic. Elmer Alberto León Zárate
Secretario

LOS NÚMEROS IRRACIONALES COMO ESPACIO TOPOLÓGICO

DEDICATORIA

A Dios, por ser el amigo incondicional, el motor en mi vida y quien me da la fuerza, esperanza y provee la oportunidad de completar esta fase en el desarrollo de mi formación profesional. A mis queridos padres y hermana por brindarme su constante e incondicional apoyo, confianza y amor en todo momento. Por alentarme siempre y hacer posible mi realización personal y profesional.

AGRADECIMIENTOS

A la Mg. Ruth Medina Aparcana, asesora de tesis, por su infinita paciencia, dedicación y orientación, acompañándome y aconsejándome con sabiduría en cada asesoría, factores fundamentales que hicieron posible la realización de este proyecto. Gracias mi estimada profesora por ser mi guía y mi constante apoyo en el desarrollo de esta tesis

A la Mg. Myrna Manco Caycho, por sus aportes y tiempo que sirvieron para orientarme en el inicio de esta investigación

Al Mg. Edgar Zárate Sarapura, por brindarme su apoyo en la orientación del desarrollo de la tesis.

A Dr. Efraín Carbajal Peña por brindarme su apoyo en la finalización de este trabajo de investigación.

A los profesores que contribuyeron en mi formación académica durante todos estos años en la Universidad Nacional Del Callao.

ÍNDICE

RESUMEN **1**

ABSTRACT **2**

INTRODUCCIÓN **3**

SIMBOLOGÍAS **4**

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA……………………………......5

1.1 Descripción de la realidad problemática……………………….......................12

1.2 Formulación del problema………………………………….........……….12

1.3 Objetivos de la Investigación…………………………………………………13

1.4 Limitantes de la investigación…………………...13

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO……………………………………………….14

2.1. Antecedentes ……….……………………………………………………….14

2.2. Marco……………………………………………………………………….16

2.2.1. Teórico…………………………………………………………………....16

2.3. Definición de términos básicos……………………………..........................16

CAPITULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES………………………………………21

3.1. Hipótesis………………………………………………………………………..21

3.2. Operacionalización de variables …………………………………………………21

CAPITULO IV: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN……………………..22

4.1. Tipo y diseño de la investigación……………………………………………….22

4.2. Población y muestra………………………………………………………….23

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental……...23

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo………..23

4.5. Análisis y procesamiento de datos……………………………………………...23

CAPITULO V: RESULTADOS………………………………………………………24

5.1. Resultados de Fracciones Continuas ……………………......……………………...24

5.2. Resultados de espacios topologicos inducidos por una métrica.………………….37

5.3. Resultados de espacios de Baire y sucesiones de cubiertas abiertas……………...48

CAPITULO VI: DISCUSIÓN DE RESULTADOS…………………………………….73

6.1 Contrastación de hipótesis ……………….…………....……..... …………….73

6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares....................................73

CONCLUSIONES……………………………………………………………………...74

RECOMENDACIONES……………………………………………………………….75

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS…………………………………………………..76

RESUMEN

LOS NÚMEROS IRRACIONALES COMO ESPACIO TOPOLÓGICO

CARLOS MIGUEL QUISPE ROSAS

Diciembre – 2018

Asesora: Mg. Ruth Medina Aparcana

Título obtenido: Magister en Matemática Aplicada

El presente trabajo de investigación tiene como objeto de estudio al conjunto de los números irracionales.

El objetivo de la tesis es estudiar al conjunto de los números irracionales desde un punto de vista topológico e indicar algunos invariantes topológicos.

Palabras Claves: Números Irracionales; Fracciones Continuas; Espacios Métricos; Espacios Topológicos; Espacios Separables, Homeomorfismos, Espacios de Dimensión Cero.

ABSTRACT

IRRATIONAL NUMBERS AS TOPOLOGICAL SPACE

CARLOS MIGUEL QUISPE ROSAS

Diciembre – 2018

Advises: Mg. Ruth Medina Aparcana

Degree obtained: Magister en Matemática Aplicada

The present research work has as its object of study the set of irrational numbers. The objective of the thesis is to study the set of irrational numbers from a topological point of view and indicate some topological invariants.

Keywords: Irrational numbers; Continuous Fractions; Metric Spaces; Topological Spaces; Separable Spaces, Homeomorphisms, Zero Dimension Spaces.

INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números irracionales es un conjunto de números muy peculiar, ya que está relacionado con procesos infinitos. Su descubrimiento está relacionado con técnicas que usaban los antiguos griegos para medir longitudes de segmentos, lo que conllevo a que Pitágoras descubra la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado.

En nuestra experiencia académica de pregrado, los números irracionales son prioritariamente tratados bajo los enfoques axiomáticos y conjuntistas, debido a lo misterioso y el escaso estudio de este conjunto raramente estudiado bajo un enfoque topológico, la presente investigación tiene como objetivo realizar un estudio detallado del conjunto de los números irracionales bajo un enfoque topológico. Para lograr dicho objetivo en esta investigación usaremos el método deductivo – demostrativo, la cual está estructurada en tres partes:

En la primerta parte caracterizaremos a los números irracionales a través de las fracciones continuas. Demostraremos que la fracción continua de un número irracional es infinita mientas de un número racional es finita.

En la segunda parte estudiaremos los espacios métricos mostrando dos nociones de espacios de dimensión cero que son equivalentes en espacios separables

Finalmente, estableceremos homeomorfismos entre los espacios de Baire y los números irracionales donde se construirá una ultramétrica que induzca la topología usual e indicaremos algunas propiedades invariantes topológicos como la: Separabilidad y segundo numerable.

SIMBOLOGÍAS

En el desarrollo de esta investigación adoptaremos la siguiente simbologías:

- $\mathbb{N}$**:** Denota el conjunto de los Números Naturales.

- $\mathbb{Z}$**:** Denota el conjunto de los Números Enteros.

- $\mathbb{Q}$**:** Denota el conjunto de los Números Racionales.

- $\mathbb{I}$**:** Denota el conjunto de los Números Irracionales.

- $\mathbb{R}$**:** Denota el conjunto de los Números Reales.

- $\mathbb{L}$**:** Denota el conjunto de los Números Naturales incluyendo el cero.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El descubrimiento de los números irracionales se inició en Grecia; Pitágoras de Samos (580-500 a.C.), con el descubrimiento de la inconmensurabilidad posteriormente matemáticos provenientes de la Edad de Oro Islámica (Al- Khwarizmi) fueron los primeros en tratar los números Irracionales algebraicamente. Hasta que finalmente surge el análisis matemático y el cálculo infinitesimal lo que llevó a la aparición de la Topología a finales del siglo XIX y principios del XX

Es así, que los números irracionales se pueden tratar algebraicamente y topológicamente, debido a las escasas investigaciones que se realizan sobre este conjunto bajo un enfoque topológico relacionando con la parte algebraica. Como se puede constatar en la formación de pregrado en la carrera de Matemática de la Universidad Nacional del Callao y otras universidades coma la San Marcos, UNI y Universidad católica del Perú no se estudian a los números irracionales bajo un enfoque topológico, como se pueden evidenciar en su plan de estudios de dichas universidades.

1.2. Formulación del problema

Los números irracionales son poco estudiados, pues no es un cuerpo como lo es $\mathbb{Q}$**.** Sin embargo posee algunas propiedades que desde un punto de vista topológico son similares al conjunto de los números reales.

Frente al dificultad planteada, el Problema general de la investigación está dado por la siguiente interrogante

1.2.1. Problema General

¿Es posible caracterizar el conjunto de los números irracionales como espacio topológico? Para resolver el problema general propuesto, se deben lograr los siguientes

1.2.2. Problemas Específicos:

¿Es posible caracterizar al conjunto de los números irracionales a través de Fracciones Continuas?

¿Existirán espacios topológicos homeoformos al conjunto de los números irracionales?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Establecer las condiciones por las cuales podemos analizar las propiedades topológicas de los números irracionales.

1.3.2. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos son:

Objetivo Específico 1: Determinar la caracterización de los números irracionales a través de Fracciones Continuas

Objetivo Específico 2: Determinar espacios topológicos que son homeomorfismo al conjunto de los números irracionales.

1.4. Limitantes de la investigación

Una de las principales limitaciones de este trabajo de investigación es que no se encontró mucha bibliografía del estudio de los números irracionales bajo un enfoque topológico, pero sin embargo encontramos bibliografía de los temas que están relacionados indirectamente la cual la tomamos como base para lograr el objetivo general de esta investigación, siendo nuestra principal motivación relacionar y profundizar los conocimientos adquiridos en la formación de Pregrado.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del estudio

En la época de los griegos los números eran tratados geométricamente, ya que pensaban que las longitudes de los segmentos de recta solo pueden producir un número fraccionario. Hasta que Pitágoras de Samos (580-500 a.C.) descubre segmentos que no podían ser representados a través de un número racional (inconmensurabilidad) es allí donde surge la necesidad de asignar un nuevo tipo de magnitud "los números irracionales".

Este hecho ocasiono una convulsión en el mundo científico antiguo provocando una ruptura entre la geometría y la aritmética, ya que esta se sustentaba en la teoría de la proporcionalidad, posteriormente matemáticos provenientes de la edad de oro islámica (Al- Khwarizmi) fueron los primeros en tratar los números irracionales algebraicamente.

Ante la aparición de los números irracionales (inconmensurabilidad de los pitagóricos) e incapacidad de la geometría y aritmética para abordarlos, surge la primera idea topológica relacionados al concepto de límites, que afloran en el método de exhaución de Arquímedes, posteriormente surge el análisis matemático y el cálculo infinitesimal para formalizar conceptos como la continuidad y la variedad en la geométrica lo que llevo a la aparición de la topología a finales del siglo XIX y principios del XX. Es por eso que en esta investigación enlazamos estos conocimientos para estudiar el conjunto de los números irracionales bajo un enfoque topológico, debido a la complejidad del tema de investigación revisamos algunas tesis y artículos que se mencionan a continuación.

Campos, E. (2013) en su tesis "Una Caracterización topológica de los irracionales", tiene como objetivo general estudiar las propiedades topológicamente invariantes en el conjunto de los irracionales. Planteándose objetivos específicos como el estudio de los números irracionales a través de las fracciones continuas e identificar propiedades métricas para luego establecer homeomorfismos con algunos espacios topológicos y concluye mostrando algunas propiedades invariantes como la separabilidad. Consideramos esta investigación porque en ella se realiza un estudio detallado de los números irracionales mencionando algunas propiedades que se cumplen bajo la norma usual, que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores para compararlo con otros espacios topológicos.

Cornelio. L y Lorena. V (2013) en el artículo "Las fracciones en el desarrollo histórico de los números irracionales" se tiene como objetivo general analizar y mostrar algunos aspectos históricos de cómo se abordaban la construcción de los números reales. Teniendo como objetivos específicos analizar las diferentes perspectivas propuestas, como por ejemplo la algebraica por Cantor, la del cálculo por Dedekind y la moderna por Euler, bajo este último enfoque se concluye la formalización de la construcción de los números reales haciendo uso de las fracciones continúas, que sirven para caracterizar a los números irracionales y racionales. Esta investigación se relaciona indirectamente con nuestro tema de estudio ya que en ella se realiza un estudio minucioso de las fracciones continuas, siendo esta una de los objetivos específicos

Murillo, T. (2014) en el artículo "Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades" tiene como objetivo mostrar algunas de las aplicaciones de las fracciones continuas, por ejemplo para resolver ecuaciones diofánticas, para obtener algunos criterios de divisibilidad y como se usaron a la hora de corregir el calendario para conseguir el calendario gregoriano. Consideramos esta investigación en nuestro trabajo porque realiza un estudio detallado de los diferentes tipos de fracciones continuas, facilitándonos su comprensión para luego usarlas en los capítulos posteriores

Salgado, M. (2016) en la tesis "Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire" tiene como objetivo principal presentar la importancia que posee uno de los resultados más significativos estudiados por R. Baire, así como la importancia que pueden llegar a tener las numerosas aplicaciones de sus propiedades en distintas áreas de la matemática. Consideramos esta tesis doctoral porque realiza un estudio detallado del espacio de Baire (mostrándonos sus diferentes versiones), facilitando su comprensión para finalmente lograr caracterizar topológicamente a los irracionales.

Macho, M. (2002).En el articulo " ¿Qué es la topología ? tiene como objetivo describir el desarrollo histórico de la topología desde sus inicios, mostrando sus aplicaciones en las diversas ciencias como la ingeniería, física, química o la biología molecular, la medicina y la matemáticas. Mostrando algunos definiciones y ejemplos en superficies compactas.

2.2. Marco

En esta sección, se presenta el marco teórico de nuestro objeto matemático "Los Numeros Irracionales" y está situado dentro de la línea de tipo Básica, Pura o fundamental**.**

Es así, que se desarrolla algunas definiciones, proposiciones y representaciones que serán la base de nuestra investigación.

2.2.1. Teórico

En esta sección presentaremos el problema general de la presente investigación, caracterizar al conjunto de los números irracionales como espacio topologico, para ello mostramos la caracterización de los irracionales a través de las fracciones continuas seguidamente mostramos algunas propiedades que son comunes al conjunto de los números reales pero desde un punto de vista topologico para finalmente establecer homeomorfismos con los espacios $\mathbb{G}_1$ y $\mathbb{G}_2$

2.3. Definición de terminos básicos

en el desarrollo de esta investigación consideraremos los siguientes puntos**:**

- la definicion de topologicamente equivalentes que usaremos en este trabjo es la siguiente,Si X es un conjunto φ y ψ son métricas en X, decimos que ϕ y ψ son topológicamente equivalentes si $\tau_\varphi = \tau_\psi$, en otras palabras, si la función identidad en X, id_X : (X, φ) → (X, ψ) es un homeomorfismo**.**
- A lo largo de este trabajo no hacemos distinction entre vecindad y entorno, ambas palabras aparecen de manera indistinta y son usadas como sinonimos

- En el desarrollo de este trabajo se menciona el termino familia y colección de manera indistinta, asignándole a estos dos términos el mismo significado, el cual hace referencia a un conjunto infinito de elementos no necesariamente ordenados.

Además consideraremos algunas definiciones en las siguientes tesis y libros:

[1] Macho, M. (2009) . *Topología de Espacios Métricos* y [9] Gustavo.N,O.(2002). Topología General

Consideramos estos libros en la presente investigación porque en él se realiza un estudio minucioso de los espacios métricos, en donde hacen mención de algunos conceptos que son de suma importancia, como se muestra a continuación:

Definición 2.3.1. Espacio métrico

Un conjunto X esta dotado de una distancia o métrica d, si d es una función sobre $X\ x\ X$ que toma valores en los números reales positivos y satisface: para $x, y, z\epsilon\ X$ tenemos:

(i) positividad: para cada $x, y \ \epsilon\ X$, es $d(x, y) \geq 0$.
(ii) propiedad idéntica: dados $x, y \ \epsilon\ X$, $d(x, y) = 0$ si y solo si x=y.
(iii) simetría: para cada $x, y \ \epsilon\ X$, $d(x, y) = d(y, x)$
(iv) desigualdad triangular: para cada $x, y, z\epsilon\ X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

la expresión $d(x, y)$ se lee como distnacia de x a y, y el par (X,d) se denomina espacio métrico.

Definición 2.3.2. Topología inducida

El conjunto $\tau_{\ d} := T(x, d) := \{U \ \subset \ X \ : \ U\ es\ abierto\}$ se llama topología de (X, d), o topología en X inducida por la mérica d.

Definición 2.3.3 Base de una topología

Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\subset \tau$, se llama base para la topolog´ıa τ_{d} , si todo elemento de τ_{d} es uni´on de elementos de B.

Definición 2.3.4. Isometrías

Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios metricos. Una isometría entre (X, d) e (Y, ρ) es una aplicacion biyectiva $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ que preserva la distancia, es decir, para cada a, b ∈ X, se tieneque: $d(a, b) = \rho(f(a), f(b))$.

Definición 2.3.5. Homeomorfismos: Una función $h: X \rightarrow Y$ se llama homeomorfismo (entre dos espacios métricos ((X, d) (Y, ρ)) si cumple:

(i) h es biyección
(ii) h es continua
(iii) h^{-1} es continua

Definición 2.3.6. Diámetro

Sea (X, d) y A ⊂ X.El diámetro de A es : diam(A) = sup{ d(x, y) : x, y ∈ A} si este supremo existe y es infinito.

Definición 2.3.7. Conjunto denso

Un conjunto $D \subset X$ se llama denso en X si todo conjunto abierto no vacío de X contiene un elemento de D, es decir $\overline{D} = X$

Definición 2.3.8. Conjunto separable:

Sea (X, d) un espacio métrico.X es separable si contiene un subconjunto denso y numerable**.**

[2] Macho, M. (2002). ***Topología General*****. Y [4] Martinez, J. (2011).** Producto de espacios de lindelof.Consideramos este libro y tesis para el desarrollo de la investigación ya que en ello realiza un estudio exhaustivo de los espacios topológicos y espacios de Lindelof, en él se trabajan algunas definiciones básicas que pueden ser:

Definición 2.3.9. Conjunto segundo numerable

Sea (X, d) un espacio métrico. X es segundo numerable si tiene una base numerable.

Definición 2.3.10. Conjunto Lindelof:

Sea (X, d) un espacio métrico. X es de Lindelof si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable

Definición 2.3.11. Conjuntos cerrabiertos

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto A$\subset X$ es CA O cerrabierto si es cerrado y abierto

Definición 2.3.12. Cero dimensional:

Dado un espacio métrico (X, d). Diremos que (X, d) es cero dimensional si para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, existe un conjunto CA, U, tal que $x \in U \subset B(x, r)$.

Definición 2.3.13. Dimensión de cubierta cero:

Dado un espacio métrico (X, d). Diremos que (X, d): Tiene dimensión de cubierta cero si para cada cubierta abierta U de X, existe una cubierta abierta, ajena dos a dos, V, de X tal que V refina a U

Definición 2.3.14. Dimensión. Ultramétricas

Una métrica ϕ en un conjunto X se llama una ultramétrica (o una métrica no Arquimediana) en X, si ϕ satisface:

- $\boldsymbol{\phi(x,z) \leq max\,\{\phi\,(x,y), \phi\,(y,z)\};\ para\ todo\ x,y,z \in X}$

[3] Salgado, E. (2016). ***Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire***

Consideramos esta tesis en el trabajo de investigación ya que en el se desarrolla un estudio detallado del espacio de Baire en sus diferentes versiones

Definición 2.3.15. Espacios de Baire

Un espacio topológico es llamado un espacio de Baire si la unión numerable de cualquier colección de conjuntos cerrados con interior vacío tiene un interior vacío.

Caracterizaciones:

- Toda intersección de conjuntos abiertos densos es densa.
- El interior de cada unión de un número enumerable de conjuntos esparcidos es vacía.
- Siempre que la unión de un número enumerable de conjuntos cerrados de X tiene un punto interior, uno de los subconjuntos cerrados debe tener un punto interior.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general:

Si es posible caracterizar el conjunto de los números irracionales como espacio topológico.

3.3.2. Hipótesis Específicas:

- Si es posible caracterizar al conjunto de los números irracionales a través de fracciones continuas.

- Si existen espacios topológicos homeoformos al conjunto de los números irracionales.

3.2. Operacionalización de las variables

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES
Los irracionales como espacios topológicos	El conjunto de los números irracionales	- Caracterización a través de fracciones continuas - Algunas propiedades de los números irracionales
	Espacios topológicos	- caracterización de los espacios ultrametricos. - Algunas propiedades topológicas del espacio de Baire

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y diseño de la Investigación

Según Valderrama (2013), la presente investigación es de tipo Básica, Pura o fundamental porque está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos a la línea de Análisis Funcional y la Teoría de Números; y no produce necesariamente resultados de utilidad práctica inmediata.La presente investigación está enmarcada en el ámbito de las ciencias formales por lo que según Klimovsky (2001), se utilizará el método deductivo-analítico que permitirá estudiar los números irracionales bajo un enfoque topológico de manera clara y precisa. Así mismo posee un diseño no experimental, pues es complicado manipular las variables que presenta, como lo señala Merterns (2005). Según la clasificación de Elí de Gortari se utilizarán demostraciones directas e indirecta o por reducción al absurdo, pues el partir de axiomas y definiciones nos permitirá establecer la la caracterización del conjunto de los números irracionales de una manera clara y precisa, para que sirva de motivación en la investigación de la línea de Análisis Funcional y la Teoría de Números .

En el presente trabajo de investigación está estructurado de la siguiente forma: en el primer lugar ,se caracterizara los números irracionales a través de fracciones continuas: Cualquier número irracional puede representarse como una fracción continua infinita**.** Precisamente por medio de las fracciones continuas se obtienen

aproximaciones muy buenas a cualquier número irracional y a lo largo de la historia de la matemática se han usado en topología para estudiar los números irracionales.

En el segundo lugar se estudia algunas propiedades de los números irracionales como la separabilidad, segundo numerable y Lindelof.

Finalmente definimos ultrametricas mostrando algunos ejemplos que inducen la topología usual, espacios de Baire y establecemos homeomorfos a él, que nos servirá para demostrar que el espacio de Baire es homeomorfo al conjunto de los números irracionales, donde se determina una ultramétrica que induce la topología usual de los irracionales.

4.2. Población y muestra

La abstracción del trabajo nos indica que no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla en caracterizar el conjunto de los números irracionales como espacio topológico.

4.3. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información documental

Para la realización de la tesis se utilizó la técnica documental a través de la revisión de bibliografía especializada y bases de datos bibliográficas obtenida en el repositorio las siguientes universidades: Universidad Autónoma de Puebla (México), Universidad de Murcia (España) y Universidad del País Vasco.

4.4. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información de campo

Debido a la abstracción de la tesis, no se necesitó más procedimientos de recolección de datos que la revisión de bibliografía en libros y artículos,utilizando la técnica de lectura analítica, que consiste en leer el texto en forma pausada, reflexiva y minuciosa, con el propósito de comprender e interpretar los resultados encontrados.

4.4. Análisis y procesamiento de datos

Por la característica del trabajo no se realizó ningún análisis estadístico.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5.1. Resultados de Fracciones Continuas

Las fracciones continuas es uno de los temas mas antiguos e interesantes de la Teoría de Números su origen se remonta a la antigua Grecia.Especialmente tiene sus primeros antecedentes en los trabajps de Euclides, que estudio por primera vez este tipo particular de fracciones en sus libros VII y VIII de los Elementos.

El algoritmo de Euclides,Desarrollado en los Elementos, para hallar el máximo común divisor entre dos números enteros, es un método que permite encontrar la fraccion continua de un numero racional. Este algoritmo se presenta en el libro VII de los elementos a través de algunas proposiciones.ver [1] y [2]

Los procesos que aparecen en esas proposiciones se interpretan de la siguiente manera:

Dados dos números cualesquiera a,b positivos:

con a > b existe $p_0 \in Z^+ \ y \ r_2 < b$, entero no negativo, tales que:

$$a = p_0 b + r_2$$

De igual forma existe un entero positivo $p_1 \ y \ un \ entero \ no \ negativo \ r_3 \ con \ \ r_3 < r_2$ tales que:

$$b = p_1 r_2 + r_3$$

Repitiendo el proceso se tiene:

$$r_{n-1} = p_{n-1} r_n + r_{n+1} \ \ con \ a = r_0 \ y \ b = r_1 \ hasta \ r_k = 0 \ con \ n = 1,2,3, \ldots$$

De esta forma el racional $\frac{a}{b}$ se puede escribir como una fraccion continua finita de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{+\cdots+\cfrac{\cdots}{p_{n-1}+\cfrac{1}{p_n}}}}}}$$

Cabe resaltar que este proceso no se presenta de manera explicita en el trabajo de Euclides sin embargo, constituye el principio rector utilizado a posteriori para establecer la representación en fracciones continuas para números irracionales.

En la edad moderna los algebraicos italianos, aceptaban como solución a sus ecuaciones los irracionales cuadráticos, los cuales se aproximaban a racionales utilizando la representación decimal. Estas aproximaciones que en un principio se se calculaban sin reglas generales tuvieron un gran refinamiento a través de la representación en fracciones continuas. Los primeros en implementralos fueron los italianos Pietro Cataldi (1548-1626) y Rafael Bombelli.

Bombelli acepta las soluciones negativas de ecuaciones y proporciona un algoritmo para extraer raices cuadradas, el cual es equivalente a su expansión en fracciones continuas; sus desarrollos se presentan en L'Algebra parte maggiore dell' aritmetica in tre libri (1572) y en la segunda edición denominada L'Algebra Opera (1579). En particular, Bombelli extrae la raíz cuadrada de 13, equivalente a la siguiente representación en fracción continua:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}$$

que en términos modernos se puede obtener de la siguiente manera

$$r = A - a^2 = (\sqrt{A} + a)(\sqrt{A} - a)$$

Luego $$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}} = a + \cfrac{r}{a + \cfrac{r}{a + \cfrac{r}{a + \cdots}}}$$

El método seguido por Bombelli, para la extracción de la raiz cuadrada de un número A es el siguiente $$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + x$$

Luego $\qquad r = 2ax + x^2,$

Si se omite x^2 se tiene $x = \frac{r}{2a}$, así $\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a}$ dado que $x = \frac{r}{2a}$ o $x^2 = \frac{rx}{2a}$

Entonces $\qquad r = 2ax + \frac{rx}{2a} = (2a + \frac{r}{2a})x$, es decir: $x = \frac{r}{2a+\frac{r}{2a}}$

Ahora se tiene la siguiente aproximación

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$$

Si se continúa procediendo de la misma manera se obtiene la fracción continua infinita

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}}$$

Posteriormente la mayor contribución a las fracciones continuas hasta el siglo XVIII se debe a Leonhard Euler. En sus obras, Introducción al Análisis del Infinito y Sobre Fracciones Continuas, realiza una sistematización de la teoría de las fracciones continuas.

Concretamente Euler establece tres resultados:

1. Cada número racional se puede representar como una fracción continua finita.

2. Todo número irracional se puede representar como una fracción continua infinita.

3. Una fracción continua periódica es el cero de una ecuación cuadrática

Dado que Euler encuentra que cada número se puede representar como una fracción continua, entonces se tiene que cada número irracional se puede expresar como el límite de una sucesión de racionales. Además, esta representación como fracción continua no sólo ofrece una aproximación a través de racionales, sino que ofrece la mejor aproximación.

La organizción de estos resultados desde una perspectiva moderna nos permite visualizar una construcción implícita de $\mathbb{R}$.

Cabe resaltar que Euler demuestra que las fracciones continuas finitas representan números racionales y que los números racionales se escriben como fraccionescontinuas finitas, además muestra que los irracionales se presentan como fracciones continuas infinitas. Pero no prueba que una fracción continua infinita representa un número irracional, es decir no prueba la convergencia de la fracción continua. Sin embargo se tiene los elementos básicos para establecer este resultado.

Finalmente fue el célebre matemático francés Joseph Louis Lagrange quien en 1768 formalizó esta teoría en su libro solutión d' un probléme d' arithmétique. Lagrange resolvió completamente la famosa ecuación de Fernat.

$$x^2 - dy^2=1$$

para lo cual usó de manera esencial las fracciones continuas**.**

Definición 5.1.1. Una fracción continua generalizada es una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cdots \qquad \cdots + \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}$$

donde los a_i y b_i, para $i = 1,2, \dots, n$, son números reales o complejos

Ejemplo 5.1.2. Son fracciones continuas generalizadas las expresiones

$$3 + \cfrac{\pi}{-4 + \cfrac{\sqrt{5}}{4}} \quad y \quad \cfrac{1}{6 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{1}{3}}}$$

Definición 5.1.3. En el caso particular de las fracciones continuas en donde cada $b_i = 1$, todos los a_i son números enteros y para $i \geq 2$ los a_i son positivos (a_i puede ser negativo o cero) entonces la fracción se llamará fracción continua simple y se denotará por:

$$[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, a_3, \dots, a_n] = \mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Los valores $\mathrm{a_i}$ se conocen como los términos de la fracción continua, además se dice que la fracción continua es finita si la cantidad de términos es finita, en caso contrario, se dice que la fracción continua es infinita y de la misma forma, una fracción continua simple infinita se denotara por

$$[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, a_3, \dots, a_n, \dots] = \mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}}$$

En los siguientes ejemplos, se encuentran las fracciones continuas simples asociadas con los números racionales y el proceso inverso, es decir, dada la fracción continua se encuentra el racional que esta presenta.

Ejemplo 5.1.4. Para encontrar la fracción racional asociada a la fracción continua simple [2;5,2,3].

Basta calcular $[2; 5,2,3] = 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{\frac{7}{3}}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{3}{7}} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{7}} = \frac{83}{38}$

Por lo tanto $[2; 5,2,3] = \frac{83}{38}$.

Ejemplo 5.1.5. Para expresar $-\frac{26}{47}$ como fracción continua simple.

Se procede de la siguiente forma $-\frac{26}{47} = -1 + \frac{21}{47} - 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}$ por lo tanto $-\frac{26}{47} = [-1; 2,4,5]$

Teorema 5.1.6. Si x es un número racional, x se puede representar como una única fracción continua simple finita.

Demostración. Sea $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0$, por el algoritmo de la división existen a_1, r_1 tales que:

$$\frac{p}{q} = a_1 q + r_1 = a_1 + \frac{r_1}{q}, donde\ 0 < r_1 < q$$

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$$, de nuevo existen a_2, r_2 tal que :

$$\frac{q}{r_1} = a_2 r_1 + r_2 = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, donde\ \ 0 < r_2 < r_1$$

Sucesivamente se tiene

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2} + \cdots}}, 0 < r_1 < q\ \ y\ \ 0 < r_2 < r_1$$

Observamos que se tiene una sucesión de residuos r_i decreciente. Luego, por el principio de buen orden se concluye que este proceso es finito. Por lo tanto:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots \frac{}{\cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}} = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

Por lo tanto se demostró $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$

Corolario 5.1.7. Toda fracción continua simple infinita representa a un número irracional.

Demostración. Dada una fracción continua simple infinita cualquiera, esta debe representar a algún número real x, por el teorema anterior, x no puede ser racional, por lo que x debe ser un número irracional.

Definición 5.1.8.

Un número irracional cuadrático es un numero real que tiene la siguiente forma**:** $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}\sqrt{k}$ donde r y s $\in \mathbb{Q}$, $s \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}^{+}$, pero no es un cuadrado perfecto. Es decir un irracional cuadrático es un número irracional que es la solución de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=o\ donde\ a \in \mathbb{Z}-\{0\},\ b\ y\ c \in \mathbb{Z}$

Definición 5.1.9. Fracciones continuas periódicas

Una fracción continua periódica es una fracción continua simple de la forma:

$$[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, a_3, \dots, a_n, \overline{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{m}}]$$

Donde $n\ y\ m$ son enteros con $n \geq 0\ y\ m \geq 1$. E periodo es la sucesión de términos $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n}$ que se repiten y la longitud del periodo es m. Si $n=0$ se dice que la que la fracción continua $[\overline{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{m}}]$ es periódica pura.

Nota 5.1.10.

- Las fracciones continuas periódicas difieren de otras fracciones continuas en que ellas representan irracionales cuadráticos, asi por ejemplo

$a)$ $\frac{1+\sqrt{10}}{3}=[\overline{1,2,3}]$ b) $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[4,\overline{1}]$ c) $\sqrt{23}=[4,\overline{1,3,1,8}]$

- Mostraremos algunas fracciones continuas que se pueden obtener mediante procesos de álgebra elemental

a) Obtener la fracción continua de $\sqrt{5}$

Sea $x=\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x^2-4=1 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)=1$

$$\Leftrightarrow x=2+\frac{1}{2+x}$$

Sustituyendo la x de la derecha por el valor de x a la izquierda

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + x}} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + x}},$$ repitiendo el proceso sucesivamente

Se tiene $\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}}$

b) Obtener la fracción continua de $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$ (sección áurea)

Sea $x = \frac{\sqrt{5}+1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{5}^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 5 = 4x^2 - 4x - 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x}$$

Sustituyendo la x de la derecha por el valor de x a la izquierda

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$ repitiendo el proceso sucesivamente

$$\phi = x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = [1,1,\dots,1,\dots] = [\,\overline{1}\,]$$

Teorema 5.1.11.

Toda fracción continua periódica representa un número irracional cuadrático.

Demostración. Véase [8], página 197.

Teorema 5.1.12.

Todo número irracional cuadrático se puede representar como una fracción continua simple infinita periódica.**Demostración.** Véase [8]

Nota 5.1.13. Note que este teorema es el recíproco del teorema 5.5.11. y ambos resultados nos permite concluir que los irracionales cuadráticos son los únicos reales que poseen representación en forma de fracción continua periódica.

Recordemos que los los a_i, en la descomposición de una fracción continua simple son números enteros positivos. ¿ Entoces podremos representar una fracción continua infinita, como el límite de una fracción continua finita.?

Esto es $$[a_1; a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

Este resultado no es imnediato por eso definiremos las n-ésimas convergentes de una fracción continua simple y algunas proposiciones que se muestran a continuación.

Definición 5.1.14. Convergentes n-ésimas. Para cada n, el número racional generado por la expansión de $[a_1; a_2, \ldots, a_n]$. Así pues tenemos

$$[a_1] = a_1 = \frac{a_1}{1}$$

$$[a_1; a_2, a_3] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1}{a_3 a_2 + 1}$$

En general se tiene $[a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = c_n, \forall n \in \mathbb{N}, con\, p_n\, y\, q_n \in \mathbb{Z}/mcd(p_n, q_n) = 1$

Entonces p_n y q_n se llaman las **convergentes n-ésimas** de la fracción continua dada. Es claro que tanto p_n como q_n son polinomios que dependen de $a_1; a_2, \ldots, a_n$. Tenemos entonces las siguientes expresiones para estos polinomios

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2 a_1 + 1, \quad p_3 = a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1, \quad \ldots$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = a_2, \quad q_3 = a_3 a_2 + 1, \quad \ldots$$

Ejemplo 5.1.15.

Calcular las cuatro primeras corvengentes de la fracción continua infinita $[\,4;\overline{3,2}\,]$.

Por definición $c_1 = [\,4\,] = 4,\;\; c_2 = [\,4,3\,] = 4 + \frac{1}{3}\,,\;\; c_3 = [\,4,3,2\,] = 4 + \frac{1}{3+\frac{1}{2}} = \frac{30}{70}$

Por último $$c_4 = [\,4,3,2,3\,] = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$$

Proposición 5.1.16. Si $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, es el n-ésimo convergente de la fracción continua simple $[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots, a_n, \dots]$. $\forall n \;\geq 3$ se cumple:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(\alpha)$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\theta)$$

Demostración. Usaremos indución sobre n.

- Para $n = 3$ es válido, pues de la misma defición c_3 verifica las ecuaciones $\alpha\; y\; \theta$
- Supongamos que las ecuaciones $\alpha\; y\; \theta$ son válidas para n
- Se debe probar que las ecuaciones $\alpha\; y\; \theta$ son válidas para $n + 1$, entonces

$$c_{n+1} = [\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

Por H.I $$c_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}a_n p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1}\, p_{n-2}}{a_{n+1}a_n q_n \; + \; q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}}$$

Por H.I $$c_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+1}(p_n - p_{n-2}) + p_{n-1} + a_{n+1}\, p_{n-2}}{a_{n+1}(q_n - q_{n-2}) \; + \; q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

Entonces $c_{n+1} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$. Por lo tanto las fórmulas $\alpha\; y\; \theta$ son validas $\forall n \;\geq 3$.

Proposición 5.1.17. Si $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, es el n-ésimo convergente de la fracción continua simple $[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots, a_n, \dots]$. $\forall n \ \geq 1$ se cumple:

$$p_n\, q_{n-1} - \ p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\delta)$$

Demostración. Por el método de inducción:

- Para n = 2 es válido, pues de la definición de fracciones continuas cumple la desigualdad.
- Supongamos que la proposición es válida para n
- Ahora veamos si la proposición se verifica para n+1; así:

$$p_{n+1}\, q_n - \ p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1})\, q_n - \ p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}), \quad \text{por } 5.1.16$$

$$= \ a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1}\, q_n - \ p_n a_{n+1} q_n - \ p_n q_{n-1},$$

$$= \ -(p_n\, q_{n-1} - \ p_{n-1} q_n) \overset{H.I}{\cong} (-1)^n,$$ por lo tanto el resultado es válido $\forall n \ \geq 2$

Si en la ecuación (δ), dividimos ambos miembros entre $q_n\, q_{n-1}$ obtenemos.

Proposición 5.1.18. Para todo $n \ \geq 1$ se tiene

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

Proposición 5.1.19. Para todo $n \ \geq 1$ se tiene

$$p_n q_{n-2} - \ p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

Demostración. Por proposición 5.1.16 se tiene:

$$p_n q_{n-2} - \ p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - \ p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

$$= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \overset{\text{por }(\delta)}{\cong} (-1)^n a_n$$

Corolario 5.1.20. La subsucesión de los convergentes de índice par de toda fracción continua simple infinita es decreciente, mientras que la subsucesión de los convergentes de índice impar es creciente. Además, todo convergente impar es menor que todo convergente par.

Demostración. Dado que a_n, q_n y q_{n-2} son positivos, de la proposición 5.1.19. se tiene que $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < 0$ si n es par y $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} > 0$ si n es impar. Por otro lado, para s y t números enteros positivos cualesquiera:

- Si $s < t$, se tiene que $c_{2s} > c_{2t}$ pues es decreciente para los pares. Además, se sabe que $c_{2t} > c_{2t-1}$, con lo cual $c_{2s} > c_{2t-1}$
- Si s > t, se tiene que $c_{2s-1} > c_{2t-1}$, pues es creciente para los impares. Además, se sabe que $c_{2s} > c_{2s-1}$, con lo cual $c_{2s} > c_{2t-1}$
- Si $s = t$, es claro que $c_{2s} > c_{2t-1}$

con lo que $c_{2s} > c_{2t-1}$en cualquier caso y con ello todo convergente impar es menor que todo convergente par.

Teorema 5.1.20. Toda fracción continua simple es convergente a un número real.

Demostración.

Sea $x = [\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \ldots]$ y para $n \geq 1$ sea $\mathrm{x_n} = [\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \ldots \mathrm{a}_2] = \frac{p_n}{q_n}$, por definición 5.1.14

Probaremos que la sucesión $\mathrm{x_n}$ converge a un limite l

De la proposición 5.1.19. se obtiene:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n a_n$$

De donde; si n es par $\Rightarrow \frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ y si n es impar $\Rightarrow \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$

Por lo tanto la subsucesión { x_{2n} } es creciente y la subsucesión { x_{2n-1} } es decreciente.

Por la proposición 5.1.18. se deduce $x_{2n} - x_{2n-1} < 0 \Leftrightarrow x_{2n} < x_{2n-1}$

Como { x_{2n} } es creciente y { x_{2n-1} } es decreciente se obtiene

$$x_2 < x_{2n} < x_{2n-1} < x_1 , . \forall n \geq 1$$

Por lo tanto { x_{2n} } es monótoma creciente y acotada, luego es convergente

Digamos $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = l_1$

Análogamnete { x_{2n-1} } es momótoma decreciente acotada y por lo tanto convergente es decir $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = l_2$

para demostrar que la sucesión { x_n } es convergente solo basta ver que sea de Cauchy.

Nos planteamos $|\ x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \overset{por\ 5.1.18.}{\cong} \frac{1}{q_n q_{n-1}} \leq \frac{1}{n^2}$

Por lo tanto la sucesión { x_n } es de Cauchy entonces la sucesión es convergente a un limite l, y toda subsucesión converge al mismo limite.

Es decir: $l_1 = l_2 = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l$.

5.2.Resultados de espacios topologicos inducidos por una métrica.

En esta sección describiremos algunas nociones elementales de espacios topológicos inducidos por una métrica. Estudiando algunas propiedades que tiene en común el conjunto de los números irracionales con el conjunto de los números reales, desde un punto de vista topológico. Finalmente mostraremos que los espacios cero dimensionales y de dimensión de cubiera cero son equivalenetes en espacios métricos separables.

Definición 5.2.1. Espacios Métricos

Los espacios métricos son conjuntos particulares de los espacios topológicos. Estos espacios fueron introducidos por M. Fréchet en 1906, constituyendo uno de los pasos desicivos en la creación de la topología general. Se trataba de definir el concepto de distancia de la manera más general posible para objetos matemáticos de naturaleza no específica (puntos en curvas o funciones) con tan pocas condiciones. Fréchet pudo introducir de nuevo todas las nociones topológicas introducidas hasta ese entonces, es decir, límites,continuidad, vecindades para un punto, conjuntos abiertos, compacidad, conexidad, etc.

Un conjunto $X \neq \emptyset$, donde se define la función d: $X \, x \, X \rightarrow \mathbb{R}_0{}^+$ y que verifican las siguientes propiedades:

(i) Positividad: $d(x, y) \geq 0, \forall \, x, y \in X$

(ii) Propiedad idéntica: $d(x, y) = 0$ si y solos si $x = y, \; \forall \, x, y \in X$

(iii) Simetría: $d(x, y) = d(x, y), \; \forall \, x, y \in X$

(iv) Desigualdad Triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \; \forall \, x, y, z \in X$

Entoces el par (X, d) se llama Espacio Métrico.

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 5.2.2. A continuación damos una breve lista de espacios métricos

- El par $(\mathbb{R}, d_u)$ donde d_u es la función distancia usual, definida por $d_u = |x - y|$. Este es el ejemplo más importante de espacio métrico y, salvo indicación en contrario, consideraremos a $\mathbb{R}$ provisto de esta estructura de espacio métrico.

- El par (X, d_{dis}) donde d_{dis} es la métrica discreta sobre X definida por:

$$d_{dis}(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

- Si X es un espacio métrico, entonces tambíen lo es cada subconjunto Y de X, con la métrica inducida. Cada uno de estos espacios es llamado un subespacio métrico de X. Por ejemplo, $(\,\mathbb{I}, d_u) \,/\, d_u : \mathbb{I}\ x\ \mathbb{I} \rightarrow {\mathbb{R}_0}^+$ es un subespacio de $(\,\mathbb{R}, d_u)$

Definición 5.2.3. Sea (X, d) un espacio métrico entonces:

a) Se llama **vecindad básica o bola abierta** centrada en $x \in X$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(x,r) = \{\, y \in X \colon d(x,y) < r\}$$

b) Un conjunto $U \subset X$ se llama **abierto** si U es unión de vecindades básicas, es decir

$$\forall x \in U, \;\; \exists\, r = r(x) > 0 \;\; tal\ que \;\; B(x,r) \subset U$$

c) Un conjunto $H \subset X$, se llama **cerrado** en X, si X/H es abierto en X

d) Decimos que un conjunto $B \subset X$ es **cerrabierto** si es cerrado y abierto en X, y lo denotaremos por $\boldsymbol{CA}$**.**

e) El conjunto $\tau_d = \{\, U \subset X : U\ es\ abierto\}$ se llama topología de (X, d) o **topología en $\boldsymbol{X}$ inducida por la métrica $\boldsymbol{d}$.**

f) Una familia $\boldsymbol{\beta} \subset \tau_d$ se llama base para la topología τ_d, si todo elemento de τ_d es la unión de elementos de $\boldsymbol{\beta}$**.** Es decir para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de X existe $B \in \boldsymbol{\beta}$ tal que $x \in B \;\subset U$.

Proposición 5.2.4. Sea (X, d) un espacio métrico entonces el conjunto:

$\beta = \{ B(x,r) : x \epsilon X, r > 0\}$ es base para una topología en X.

Demostración. Sean $B(x,\delta)$ y $B(y,\varphi)$ dos vecindades cualesquiera, encontremos una vecindad que esta en la intersecion. Sea $p \epsilon X$ tomando un $k < m$, donde

$$m = mín\{ \delta - d(p,y),\ \varphi - d(p,x)\}.$$

Por lo tanto $$B(p,k) \subset B(x,\delta) \cap B(y,\varphi).$$

Mostraremos algunos ejemplos de conjuntos abiertos, cerrados, cerrabiertos y bases como se muestra a continuación

Ejemplos 5.2.5.

- En $\mathbb{R}$, la recta real, la vecindad básica $B(x,r)$ es el intervalo abierto $]x-r, x+r[$. un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ es: $[x-r, x+r]$ porque $]-\infty,\ x-r[\ \cup\ ]\ x+r,\ +\infty[$ es abierto en $\mathbb{R}$

- En (X, d), los únicos conjuntos abiertos y cerrados ($\boldsymbol{CA}$) son: $\emptyset\ y\ X$

- Sea (X, d_{dis}), todo $B \subset X$ es $\boldsymbol{CA}$ y una base para la topología τ_d es $\beta = \{\{x\} : x \epsilon X\}$

- En $\mathbb{R}$ con la topología inducida por la métrica usual, una base para este conjunto esta dado por $$\beta = \{\ ]a,b[: a \leq b, a, b \epsilon \mathbb{R}\}$$

  Sin embargo no es base el siguiente conjunto $\beta = \{\ ]-a, a\ [\ : a > 0\}$ ya que el intervalo $]0,1[$ es un abierto y no puede ser escrito como unión de intervalos de tipo $]-a, a\ [$

Proposición 5.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $E \subset X$ y $D \subset X$ son dos conjuntos abierto y cerrado en X respectivamente, entonces E/D y D/E son conjuntos abierto y cerrado respectivamente en X.

Demostración. Hipótesis el conjunto E es abierto y el conjunto D es cerrado. Veamos que $E \setminus D$ es un conjunto abierto. Notemos que $E \setminus D = E \cap \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}$ por hipótesis D es es cerrado $\Longrightarrow X \setminus D$ es abierto, luego $E \setminus D = E \cap \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}$ es abierto por ser intersecion de conjuntos abiertos por lo tanto $E \setminus D$ es abierto en X. Análogamente se prueba que $D \setminus E$ es un conjunto cerrado en X.

Definición 5.2.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $E \subset X$ se puede definir la misma métrica restrinigida en ExE que lo denotamos por $(E,\ d|_{E\,x\,E})$ que es un espacio métrico y se llama subespacio métrico de (X, d).

Observación 5.2.8.

- Si $E \subset X$ el conjunto $B_E(e, r), tal\ que\ \ e \in E\ y\ r > 0$ denota una vecindad básica en el espacio $(E,\ d|_{E\,x\,E})$ y $B_X(e, r)$ denota la vecindad básica en X. Entonces $B_E(e, r) = B_X(e, r) \cap E$. Por lo tanto un conjunto $A \subset E$ es abierto en $(E,\ d|_{E\,x\,E}) \Leftrightarrow \exists U \subset X$ tal que $A = U \cap E$. Analogamente se cumple para un conunto cerrado en E.

- Si β es una base para la topología τ_d de X, entonces $\beta\ |_E\ = \{\ B \cap E \colon B \in \beta\ \}$ es una base para la topología $\tau_{\ d|_{E\,x\,E}}$

En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$ se pueden definir los siguientes subespacios métricos $(\mathbb{Q}, d_u|_{\mathbb{Q}\,x\mathbb{Q}})\ y\ \ (\mathbb{I}\ , d_u|_{\mathbb{I}\ \,x\,\mathbb{I}})$, en ambos conjuntos existen muchos conjuntos cerrados (abiertos) en $\mathbb{Q}\ o\ \mathbb{I}$ sin ser cerrados (abiertos)en $\mathbb{R}$, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.9. Si $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b\ \Longrightarrow D = (a, b)\ \cap\ \mathbb{I}$ es $\boldsymbol{CA}$ en $\mathbb{I}$ pero no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Veamos que D es $\boldsymbol{CA}$ en $\mathbb{I}$. Notemos que los conjuntos (a,b) y [a,b] son abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$. $\Longrightarrow D = (a, b) \cap\ \mathbb{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \cap\ \mathbb{I}$ es abierto y cerrado en en $\mathbb{I}$, ya que $\mathbb{I}$ es abierto y cerrado por lo tanto la intersección de dos abiertos (cerrados) es un abierto (cerrado).

veamos que D no es abierto en $\mathbb{R}$. Fijemos $x \in D$; supongamos que D fuera abierto en $\mathbb{R}$,

$\Longrightarrow \exists (y-r, y+r)/x \in (y-r, y+r) \subset D$ pero $\exists$ al menos un $q \in \mathbb{Q} \ / \ q \ \in (y-r, y+r)$

$$\Longrightarrow (y-r, y+r) \not\subset D \text{ por lo tanto D no es abierto en } \mathbb{R}.$$

veamos que D no es cerrado en $\mathbb{R}$. Supongamos que D es cerrado en $\mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \ \mathbb{R} \backslash D = \mathbb{R} \backslash [(a,b) \cap \ \mathbb{I}] = [\ \mathbb{R} \backslash (a,b)] \cup \mathbb{Q} \text{ , es abierto en } \mathbb{R}$$

Fijemos $r > 0/(a-r, a+r) \subset [\ \mathbb{R} \backslash (a,b)] \cup \mathbb{Q} \ \ y \ (a, a+r) \subset \ (a,b)$.

Si $x \in \mathbb{I}$ con $x \in (a, a+r) \Longrightarrow x \in [\ \mathbb{R} \backslash (a,b)] \cup \mathbb{Q}$ y $x \in (a,b) \cap \ \mathbb{I}$ lo cual es imposible por lo tanto D no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Definición 5.2.10. Sea (W, d) un espacio métrico entonces:

- Un conjunto $F \subset W$ se llama **denso** en W si $\bar{F} = W$. Observemos que, utilizando la caracterización de la cerradura en términos de abiertos, se tiene que F es denso si, y sólo si, todo abierto no vacío de W intersecta a F.

- W es **separable** (ó **de Fréchet)** si W tiene un conjunto denso numerable.

- W es **segundo numerable** si tiene alguna base de abiertos numerable.

- W es de Lindelöf si toda cubierta abierta de W tiene una subcubierta numerable.

Ejemplos 5.2.11.

- El conjunto de los números $\mathbb{Q} \ y \ \mathbb{I}$ son subconjuntos densos en $\mathbb{R}$ ya que para todo abierto $H \subset \mathbb{R}$ se tiene $\mathbb{Q} \cap \ \mathbb{R} \neq \emptyset \ \ y \ \ \mathbb{I} \cap \ \mathbb{R} \neq \emptyset$

- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable ya que tiene como conjuntos densos a los números $\mathbb{Q} \ y \ \mathbb{I}$.
- En $(\mathbb{R}, d_u)$ la base formada por todos los intervalos abiertos no es enumerable, pero de ella podemos extraer la subfamilia enumerable $\beta = \{\ (a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ que es una base numerable ya que su cardinal es el mismo de $\mathbb{Q} \ x \ \mathbb{Q}$, por lo tanto $\mathbb{R}$ es segundo numerable.

- Por observación 5.2.8. la familia $\beta = \{ (a,b) \cap \mathbb{I} : a,b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base numerable para la la topología inducida por el espacio métrico $(\mathbb{I}, d_u|_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}})$, por lo tanto $\mathbb{I}$ es segundo numerable.

  Veamos que es una base, dado un $x \in \mathbb{I}$ y $B(x,y) \subset \mathbb{I}$

  $\Rightarrow$ $B = B(x,y) \cap \mathbb{I}$, es un conjunto abierto ya que $B(x,y)$ y $\mathbb{I}$ son abiertos .

  $\Rightarrow B = B(x,y) \cap \mathbb{I} = (y - r. y + r) \cap \mathbb{I}$, por densidad de $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$, existen p y q tal que

  $$\Rightarrow y - r < p < x < q < y + r,$$

  $\Rightarrow$ $H = (\mathrm{p}, \mathrm{q}) \cap \mathbb{I}$ por ejemplo 5.2.9. es $\boldsymbol{CA}$ y esta conbtenido en B

  Por lo tanto hemos demostrado que existe un conjunto H $(\boldsymbol{CA})$ contenido en un abierto B cualesquiera

  Veamos que $\beta = \{ (a,b) \cap \mathbb{I} : a,b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es numerable, para $i \in \mathbb{Q}$

  $$\Rightarrow \beta_i = \{ (i,b) \cap \mathbb{I} : b \in \mathbb{Q}, \quad i < b\} \Rightarrow \beta = \bigcup \{ \beta_i : i \in \mathbb{Q} \}$$

por lo que β es unión de conjuntos numerables. Por lo tanto hemos demostrado que β es una base numerable la topología inducida por el espacio métrico $(\mathbb{I}, d_u|_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}})$.

Lema 5.2.12. Sea (X,d) un espacio métrico y $H \subset X$ un conjunto denso numerable,

$$\Longrightarrow \beta = \{ B\left(p, \frac{1}{n}\right) : p \in H, n \in \mathbb{N} \} \text{ es una base numerable para la topología } \tau_d.$$

Demostración. Primero demostraremos que β es una base , es decir, para todo abierto A de X existe $B \in \boldsymbol{\beta}$ tal que $B \subset A$. Sea A un conjunto abierto en X y $x \in A \Longrightarrow \exists r > 0 / B(x,r) \subset A$. Tomemos un $n \in \mathbb{N} \,/\, \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Como $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ es un conjunto abierto y como $x \in \overline{H} \Longrightarrow \exists p \in H \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow d(x,p) < \frac{1}{n}$ por lo que $x \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$. Por otro lado $p \in H$ de donde $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \in \beta$. Solo faltaría demostrar que $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset A$. Veamos, sea $z \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow d(z,p) < \frac{1}{n}$, por desigualdad triangular $d(z,x) < d(z,p) + d(p,x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \Longrightarrow d(z,x) < r \Longrightarrow z \in B(x,r) \subset A$. Por lo tanto se deduce que $z \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset B(x,r) \subset A$. Esto demuestra que β es una base para la topología τ_d en X. Ahora demostremos que β es numerable. Veamos, para cada $i \epsilon H \Longrightarrow \beta_i = \left\{B\left(i, \frac{1}{m}\right) : m \epsilon \mathbb{N}\right\} \Longrightarrow$ $\beta = \bigcup\{\beta_i : i \epsilon H\}$ por lo que β es unión de conjuntos numerables. Por lo tanto hemos demostrado que β es una base numerable para τ_d.

Proposición 5.2.13. Un espacio métrico es separable si y solo si es segundo numerable

Demostración. Por lema Lema 5.2.12. se cumple que si un espacio métrico es separable entonces es segundo numerable. Faltaría demostrar la suficiencia, tenemos que (X, d) es segundo numerable entonces tiene una base numerable $\beta = \{\beta_i : i \epsilon \mathbb{N}\}$ para la topología τ_d. Fijemos $x_n \epsilon \beta_n$ para cada $n \epsilon \mathbb{N}$ consideremos el conjunto numerable $D = \{x_n : n \epsilon \mathbb{N}\}$. Veamos que D es denso. Sean $x \epsilon X$ y A un conjunto abierto para el cual $x \epsilon A, \exists x \epsilon \mathbb{N} / x \epsilon B_n \subset A \Longrightarrow \exists x_n \epsilon B_n \subset A$, como $x_n \epsilon D \Longrightarrow D \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto hemos demostrado X es separable. ■

Observación 5.2.14. Por la proposición 5.2.12 se concluye que $\mathbb{I}$ es separable y segundo numerable, estas propiedades son comunes al conjunto de los números reales. El estudio de los números irracionales implica la consideración de espacios que son idénticos en el sentido topológico al espacio de los números irracionales. Para ello Recordamos el concepto básico de homeomorfismo, que es la noción precisa de idéntico en el sentido topológico.

Definición 5.2.15. Dados dos espacios métricos $(M, d)\ y\ (N, \varphi)$ decimos que M es homeomorfo a N o que M es **topológicamente equivalente** a N si existe una función f de M en N que cumple:

- f es una biyección.
- f es continua
- La inversa de f es continua

Ejemplo 5.2.16. El tamaño es subjetivo no interesa en topología, por ejemplo el intervalo $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$, cada uno con la topología usual, son homeomorfos mediante $f : R \rightarrow (-1, 1)$

definida como f(x) =$\frac{x}{1\ +\ |x|}$, la cual es un homeomorfismo. Donde f^{-1}: (−1, 1) → R definida como $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-\ |x|}$.

El homeomorfismo f no es tan solo una relación biunívoca entre los elementos de los espacios, sino que tambíen lo es entre los elementos abiertos de las topologías respectivas. Por tanto, cualquier propiedad sobre un espacio que se exprese solo en términos de conjuntos abiertos, junto con las relaciones y operaciones entre estos, es cierta para (M, d) si y solo si lo es para (N, φ). Dichas propiedades se llaman invariantes bajo homeomorfismos o invariantes topológicos. Hablando intuitivamente, una propiedad que puede establecerse en términos de conjuntos abiertos, sin mencionar la métrica, es un invariante topológico. Dos invariantes topológicos son: la separabilidad, numerabilidad y la compacidad. Un ejemplo de una propiedad que no es un invariante topológico es la acotación, pues (−1,1) y ℝ son homeomorfos, pero sólo uno es acotado.

Definición 5.2.17. Se dice que una colección de subconjuntos A de un conjunto X es un ***recubrimiento***, ***cubrimiento*** o **cubierta** de X, si y solo si: la unión de los elementos de la colección de A es igual a X. El calificativo del recubrimiento hereda en general los calificativos topológicos o métricos que se asumen para los elementos de la colección que constituyen el recubrimiento. Así por ejemplo: un recubrimiento abierto está formado por una colección de conjuntos abiertos. Un recubrimiento cerrado está formado por una colección de conjuntos cerrados; y de forma análoga para otras propiedades como: compacto, convexo, conexo, etc.

Definición 5.2.18. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ dos familias de subconjuntos de X.

- Decimos que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$ (o que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$) si para cada $V \epsilon \mathcal{V}$ existe $U \epsilon \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$ y cubre el mismo conjunto que $\mathcal{U}$, es decir, $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$
- Decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$ y para cada V en $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto de X.

- Una familia $\mathcal{U}$ se llama **ajena dos a dos**, si para cada $U\ y\ U' \epsilon\, \mathcal{U}$, con $U \neq U'$, se tiene $U \cap U' = \phi$.

Ejemplos 5.2.19. La familia $\mathcal{U} = \{(n, n+1) \cap \mathbb{I} : n\ es\ entero\}$ es un ejemplo de una cubierta de conjuntos $\boldsymbol{CA}$, ajena dos a dos, de los números irracionales.

En efecto, por el ejemplo 5.2.9. $(a, b) \cap \mathbb{I}$ tal que $a, b \,\epsilon\, \mathbb{Q}$ es un conjunto $\boldsymbol{CA}$ en $\mathbb{I}$ puesto que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ es claro que $(n, n+1) \cap \mathbb{I}$ es $\boldsymbol{CA}$ para toda $n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$. Además dichos conjuntos son disjuntos dos a dos por la misma construción .Veamos que $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{I}$.

[⊇] Fijemos $\epsilon \bigcup \mathcal{U}$, existe $n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$, tal que $x \,\epsilon\, (n, n+1) \cap \mathbb{I} \Rightarrow x \,\epsilon\, \mathbb{I}$.

[⊇] Sea $x \,\epsilon\, \mathbb{I}$ y tomemos $n = sup\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} = máx\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$.■

La familia $\mathcal{V} = \{(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}) \cap \mathbb{I} : n\ es\ un\ entero\}$ es un ejemplo de una cubierta de conjuntos $\boldsymbol{CA}$ ajena dos a dos tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$.

Definición 5.2.20. Dado un espacio métrico (X, d). Diremos que (X, d):

- Es cero dimensional si y solo si su topología, tiene una base formada por conjuntos $\boldsymbol{CA}$, es decir $\forall\ x \,\epsilon\, X$, $\exists r > 0$, existe un conjunto U ($\boldsymbol{CA}$) tal que $x \in U \subset B(x, r)$.
- Tiene dimensión de cubierta cero si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una cubierta, ajena dos a dos, $\mathcal{V}$, de X tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$.

Proposición 5.2.21. Todo espacio métrico (X, d) con dimensión de cubierta cero es cero dimensional.

Demostración: Fijemos $x_0 \,\epsilon\, X\ y\ r > 0$. Consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{B(x, \frac{r}{2}) : x \,\epsilon\, X\}$ de X; por hipótesis existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X, ajena dos a dos, que refina a $\mathcal{U}$. Como $X = \bigcup_{V \in V} V$ existe $V_0 \in \mathcal{V}$ tal que $x_0 \,\epsilon\, V_0$

Además existe $x_1 \epsilon X$ para el cual $x_0 \epsilon V_0 \subseteq B(x_1, \frac{r}{2})$, puesto que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$. Como $x_0 \epsilon B(x_1, \frac{r}{2})$, entonces $d(x_0, x_1) < \frac{r}{2}$. Afirmamos que $B(x_1, \frac{r}{2}), \subset$ B(x_0,r); en efecto, si y$\in$ $B(x_1, \frac{r}{2})$ entonces $d(x_0, y) \leq d(x_0, x_1) + d(x_0, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, de donde y $\in$ B(x_0,r); por consiguiente $B(x_1, \frac{r}{2}),) \subset$ B(x_0,r); Por lo que $x_0 \in V_0 \subset B(x_0, r)$.

Solo falta ver que V_0 es cerrado. Notemos X\ $V_0 = \bigcup_{V \in V \setminus \{b\}} V$ es un abierto en X entonces V_0 es cerrado. Hemos demostrado que todo espacio con dimensión de cubierta cero es cero dimensional.

Observación 5.2.22.

Por el ultimo inciso del ejemplo 5.2.11. los números irracionales y racionales con su métrica usual, son ceros adimensionales. Ya que $\beta_1 = \{ (a, b) \cap \mathbb{I} : a, b \epsilon \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base numerable para $\mathbb{I}$ y $\beta_2 = \{ (a, b) \cap \mathbb{Q} : a, b \epsilon \mathbb{I}\ a < b\}$ es una base numerable para $\mathbb{Q}$. Por lo tanto se concluye que los $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$ son cero dimensionales, Segundo numerable y separable por proposición 5.2.13.

Proposición 5.2.23. Sean (X, d) un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Si X es separable $\Longrightarrow$ Y es separable.

Demostración: Si X es separable, por proposición 5.2.13, es segundo numerable. Sean β $=\{B_n : n \epsilon \mathbb{N}\}$ base numerable para la topología τ_d. Afirmamos que la familia $\beta' = \{ B_n \cap Y : B_n \epsilon \beta \}$ es base numerable para una topología en Y. Fijemos $y \epsilon Y$ y $A = U \cap Y$ un conjunto abierto en Y con y$\in$A, como U es un conjunto abierto en X, existe un $B_n \epsilon \beta$ tal que y ϵ $B_n \subset$ U, por lo que y $\in B_n \cap Y \subset A$. Esto demuestra que β' es una base numerable para Y, así Y es segundo numerable por proposición 5.2.13 Y es separable.■

Proposición 5.2.24. Si un espacio topológico X es segundo numerable $\Leftrightarrow$ X es Lindelöf.

Demostración. ver [6]

Proposición 5.2.25. Si (X, d) es segundo numerable, entonces toda base para la τ_d del espacio X. contiene un subconjunto numerable que tambien es base para τ_d.

Demostración. Sea $\beta = \{B_i : i \in \mathbb{L}\}$ una base numerable para la τ_d. Para i $\in \mathbb{L}$ definimos $\beta_i = \{U \in \beta : U \subset B_i\}$ Como β es una base, tenemos que $\bigcup_{i \in \mathbb{L}} \beta_i = B_i$. Como X es segundo numerable, por proposición 5.2.13 y 5.2.23, cada subespacio B_i es segundo numerable; por proposición 5.2.24, X es Lindelöf. Entonces la cubierta abierta β_i de B_i contiene una subcubierta numerable $\beta_{0,i}$. Afirmación la familia $\beta_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{L}} \beta_{0,i}$ es numerable y es una base para τ_d de X . En efecto fijemos $x \in X$ y A un abierto en X con $x \in A$; entonces existe $i \in \mathbb{L}$ tal que $x \in$ B_i $\subseteq A$. Luego existe $B_{0,i} \in \beta_{0,i}$ / $x \in B_{0,i} \subseteq B_i \subseteq A \Longrightarrow B_{0,i} \in \beta_0$ y $x \in B_{0,i} \subseteq A$ Por lo que β_0 es una base para τ_d de X y es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables.■

Lema 5.2.26. Todo espacio métrico (X, d) cero dimensional y separable tiene una base de conjuntos $\boldsymbol{CA}$ para la topología τ_d de X. En particular $\mathbb{I}$ tiene tal base donde la base se muestra en el ultimo inciso del ejemplo 5.2.11.

Demostración. Como la topología τ_d de (X, d) tiene una base β formada por conjuntos $\boldsymbol{CA}$ entonces existe $\beta' \subseteq \beta$ numerable tal que β' también es base para τ_d de (X, d).

Teorema 5.2.27. Si (X, d) es un espacio métrico separable, entonces (X, d) es cero dimensional $\Longleftrightarrow$ (X, d) tiene dimensión de cubierta cero. En particular $\mathbb{I}$ tiene dimensión de cubierta cero.

Demostración: Por la proposición **5.2.21.** sólo resta demostrar que si (X,d) es cero dimensional y separable, entonces tiene dimensión de cubierta cero. Por lema 5.2.26. X tiene una base numerable B de conjuntos CA. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y

$$\mathcal{W} = \{B \in \beta : \ B \subset U \ para \ un \ U \in \mathcal{U}\}$$

Puesto que $\mathcal{W}$ es numerable ya que $\mathcal{W} = \{B_n : n \in \mathbb{L}\} \Longrightarrow \mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, pero no es necesariamente ajena dos a dos. Definimos una sucesión de conjuntos abiertos por inducción. Fijemos $V_0 = B_0$, y para $n \geq 1$ $V_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} B_i$ Afirmamos que $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{L}\}$

es una familia, ajena dos a dos, de conjuntos abiertos (y cerrados), cada uno de los cuales está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$. Para completar la demostración necesitamos ver que $\mathcal{V}$ cubre a X, en efecto para cada $x \in X$ existe un miínimo $n \in \mathbb{L}$ tal que $x \in B_n$ Esto implica $x \in V_n$. Por lo tanto hemos demostrado que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto, ajeno dos a dos y por lo tanto tiene dimensión de cubierta cero.

Nota 5.2.28. Por observación 5.2.22 y teorema 5.2.27 concluimos que el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números racionales son cero dimensionales, dimension de cubierta cero, Segundo numerable, separable y Lindelöf.

5.3 RESULTADOS DE ESPACIOS DE BAIRE Y SUCESIONES DE CUBIERTAS ABIERTAS

Recordemos que las sucesiones están dadas por : $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \,/\, S(n) = S_n$.

Sea $A \neq \phi$ y $n \in \mathbf{L}$, donde: $\mathbf{L} = \mathbf{N} \cup \{0\}$, definimos:

$$A^n = \{S \in A^n / S = (S_{(0)}, \dots, S_{(n-1)}) = (S_0, \dots, S_{n-1}), S_{(n)} \in A \}$$

Es decir, el conjunto A^n está formado por todas las sucesiones finitas de A y longitud $n \left(long(s) = n\right)$.

Consideremos algunas notaciones que desarrollaremos en esta sección.

- Si $S \in A^n$ y $m \leq n$, entonces denotamos $S \mid m = (S_0 , \dots , S_{m-1})$
- Si S y t son sucesiones finitas de A, entonces decimos que S es un segmento inicial de t y t es una extensión de S. Si $S = t \mid m$ para algún $m \leq long(t)$ y la denotaremos por $S \subseteq t$.
- Dos sucesiones finitas son compatibles si una es un segmento inicial de la otra e incompatible de otro modo y usamos $S \perp t$ para indicar que S y t son incompatibles.
- El conjunto de todas las sucesiones finitas de A está denotado por:

$$A^{<\mathbf{L}} = \bigcup_{n \in \mathbf{L}} A^n$$

- $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \left\{ f \,/\, f : \mathbf{L} \to \mathbf{L} \wedge f = \left(f_0 , \ldots , f_n , \ldots \right) \right\}$, es decir, podemos considerar un punto $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ como una sucesión de enteros no negativos.

Definición 5.3.1. Sea $\mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, para cada f y $g \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ con $f \neq g$, $K_1(f,g) = \min\{n \in \mathbf{L} : f_n \neq g_n\}$ definimos la siguiente función:

$$\varphi_1(f,g) = \begin{cases} \dfrac{1}{K_1(f,g)} & , \quad f \neq g \\ 0 & , \quad f = g \end{cases}$$

Proposición 5.3.2. La función φ_1 es una métrica en $\mathbf{L}^{\mathbf{L}}$

Demostración. Sean f y $g \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$

- La positividad y la propiedad idéntica se verifican por definición ya que $\varphi_1(f,g) \geq 0$ y $\varphi_1(f,g) = 0$, sí y sólo sí, $f = g$.
- Simetría, por definición $\varphi_1(f,g) = \dfrac{1}{K_1(f,g)+1} = \dfrac{1}{K_1(g,f)+1} = \varphi_1(g,f)$
- Desigualdad triangular, para ello demostraremos que:

$$\varphi_1(f,g) \leq \max\{\varphi_1(f,g), \varphi_1(g,h)\}$$

Fijando f y $g \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$. Si $f = h, f = g$ ó $g = h$, la desigualdad se verifica. Supongamos que $f \neq h$ y $K_1(f,g) = n$, $f \neq g$ y $K_1(f,g) = m$, además $g \neq h$ y $K_1(f,g) = q$. Es suficiente demostrar que: $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{m+1}$, ó $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{q+1}$ lo que es equivalentemente a $m \leq n$ ó $q \leq n$.

Supongamos que $m > n$ entonces $f_n = g_n$, como $K_1(f,g) = n$, se tiene que $h_n \neq f_n \neq g_n$. Lo que diría que $K_1(f,g) \leq n$, ya que *n* es el mínimo en $\mathbf{L}$ que hace $h_n \neq g_n$. Por lo tanto $q \leq n$

.

Definición 5.3.3. El espacio métrico $\mathbf{G}_1 = \left(\mathbf{L}^{\mathbf{L}}, \varphi_1\right)$ se llama espacio de Baire.

Observación 5.3.4.

- Para cada $n \in \mathbf{L}$, $\mathbf{L}^n$ denota el conjunto de todas las funciones de n en $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \bigcup_{n \in \mathbf{L}} \mathbf{L}^n$ representa el conjunto de todas las sucesiones finitas de $\mathbf{L}$.
- Para cada $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ y $m \in \mathbf{L}$, usamos la notación $[f \mid m] = \{g \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}} : f \mid m \subseteq g\}$

Lema 5.3.5. Sea $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ y $r > 0$. Si $r > 1$, entonces en $\mathbf{G}_1, B(f,r) = \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$

Demostración. Fijemos $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ por hipótesis $r > 1$. Veamos que $B(f,r) = \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$

- $B(f,r) \subset \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ inmediato puesto que si $h \in B(f,r)$ por definición se tiene que $h \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$.
- $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} \subset B(f,r)$, si $h \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ por definición $\varphi_1(f,h) \leq 1 < r$, entonces $h \in B(f,r)$. Por lo tanto, hemos demostrado que si $r > 1$, entonces $B(f,r) = \mathbf{L}^{\mathbf{L}}$.

Definición 5.3.6. Sea $\mathbf{G}_2 = \left(\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^{\mathbf{N}} = \{(z,h) : z \in \mathbf{Z}, h \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\}\right)$, donde $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ denota al conjunto de todas las funciones $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Un punto cualesquiera $p \in \mathbf{G}_2$ puede considerarse como una sucesión $(p_0, \ldots, p_n, \ldots)$ / $p_0 \in \mathbf{Z}$ y $p_n \in \mathbf{N}$ para $n \geq 1$.

Definición 5.3.7. Sean p y $q \in \mathbf{G}_2$. Si $p \neq q$ y si $p = (p_0, \ldots, p_n, \ldots)$ y $q = (q_0, \ldots, q_n, \ldots)$, entonces $K_2(p,q) = \min\{n \in \mathbf{L} : p_n \neq q_n\}$. En $\mathbf{G}_2$ definimos la siguiente función:

$$\varphi_2(p,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{K_2(p,q)+1} & , \quad p \neq q \\ 0 & , \quad p = q \end{cases}$$

Proposición 5.3.8. La función φ_2 es una métrica en $\mathbf{G}_2$

Demostración. La demostración es análoga a la que se realizó en la Proposición 5.3.2.

Proposición 5.3.9. Si $f : (x, d_1) \to (y, d_2)$ es una isometría, entonces:

a) f es inyectiva.

b) f es continua.

c) Si f es sobreyectiva, entonces la inversa de f es una isometría.

Demostración. Ver [2]

Observación 5.3.10. La proposición anterior demuestra que toda isometría sobreyectiva es un homeomorfismo, pero no todo homeomorfismo es una isometría. Por ejemplo, sea $d_1(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ y $d_2(a,b)=\ |a_1-b_1|+|a_2-b_2|$ dos métricas en $\mathbf{R}^2$ la función identidad $f:(\mathbf{R}^2,d_1)\to(\mathbf{R}^2,d_2)$ es una isometría, sin embargo, no es una homeomorfismo.

Teorema 5.3.11. Los espacios $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2$ Son homeomorfos.

Demostración. Sean $f:L\to\mathbf{Z}$ y $g:L\to\mathbf{N}$ funciones biyectivas, definimos

$$\begin{aligned}\psi:\mathbf{C}_1 &\to \mathbf{C}_2\\ h &\mapsto \psi(h)=\left(f(h_0),g(h_1),\ldots,g(h_n),\ldots\right)\end{aligned}$$

Por la proposición anterior, basta demostrar que ψ es una isometría sobreyectiva.

Veamos que ψ es una isometría, fijemos r y $l\in\mathbf{L}^{\mathbf{L}}$ con $r\neq l$ y $p=\psi(r)$, $q=\psi(l)$ entonces

$$\psi(r)=\left(f(r_0),g(r_1),\ldots,g(r_n),\ldots\right)$$

$$\psi(l)=\left(f(l_0),g(l_1),\ldots,g(l_n),\ldots\right)$$

Si $K_1=(r,l)=n_0$ tenemos que:

a) Si $n_0=0\to r_0\neq l_0$ se infiere que $f(r_0)\neq f(l_0)$, luego el $K_2(p,q)=0$.

b) Si $n_0\neq 0\to r_{n_0}\neq l_{n_0}$ y $r_n=l_n,\forall n\in\mathbf{N}/n<n_0$, luego $f(r_0)=f(l_0)$ y $\forall n\in\mathbf{N}$ tenemos que $g(r_n)\neq g(l_n)$ y además $g\left(r_{n_0}\right)\neq g\left(l_{n_0}\right)$

Se infiere que $K_2(p,q)=n_0$.

Por lo tanto, si $K_1 = (r,l) = n_0$ entonces $K_2(p,q) = K_2(\psi(r),\psi(l)) = n_0$

Con esto

$$\varphi_2(p,q) = \varphi_2(\psi(r),\psi(l)) = \frac{1}{K_2(\psi(r),\psi(l))+1} = \frac{1}{K_2(r,l)+1} = \varphi_1(r,l)$$

Esto demuestra que ψ es una isometría.

Demostraremos que ψ es sobreyectiva, es decir, $\psi(\mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_2$

$[\subseteq]$ $\psi(\mathbf{G}_1) \subseteq \mathbf{G}_2$, inmediato por definición.

$[\supseteq]$ $\mathbf{G}_2 \subseteq \psi(\mathbf{G}_1)$. Sea $p \in \mathbf{C}_2 \to p = (p_0, \ldots, p_n, \ldots)$, donde $p_0 \in \mathbf{Z}$ y $p_i \in \mathbf{N}$, $\forall i \in \mathbf{N}$, observemos que $f^{-1}(p_0) \in \mathbf{L}$ y $g^{-1}(p_i) \in \mathbf{L}, \forall i \in \mathbf{N}$.

Sea $f^* = (f^{-1}(p_0), g^{-1}(p_1), \ldots, g^{-1}(p_n), \ldots)$,

$\Rightarrow \psi(f^*) = (f(f^{-1}(p_0)), g(g^{-1}(p_1)), \ldots, g(g^{-1}(h_n)), \ldots) = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$

Es decir, $\mathbf{G}_2 \subset \psi(\mathbf{G}_1)$, hemos demostrado que ψ es sobreyectiva.

Por lo tanto ψ es un homeomorfismo entre $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2$.

Definición 5.3.12. Una métrica ψ es un conjunto *M* se llama una **ultramétrica** (o **métrica no Arquimediana**) en *M* si ψ satisface:

$$\psi(x,z) \leq \max\{\psi(x,y), \psi(y,z)\}, \forall x, y, z \exists M$$

Por lo tanto (M,ψ) se llama **espacio ultramétrico** (o **espacio no Arquimediano**) si ψ es una ultramétrica en *M.*

Observación 5.3.13. La demostración de 5.3.2 (y por analogía, la de 5.3.8) muestra que la métrica φ_1 definida en $\mathbf{G}_1$ y la métrica φ_2 definida en $\mathbf{G}_2$ son ultramétricas, por lo tanto $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2$ son espacios ultramétricos.

Teorema 5.3.14. Sea (X,φ) un espacio ultramétrico. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) Para cada $x \in X$, y cada $r > 0$, $B(x,r)$ es un conjunto ***CA,*** es decir todas las vecindades de radio estrictamente positivo son a la vez conjuntos abiertos y cerrados.

(ii) Si $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \phi$ y $r \leq s \rightarrow B(x,r) \subseteq B(y,s)$, es decir las vecindades que se intersectan están contenidas unas en otras.

(iii) Si $B(x,r) \cap B(y,r) \neq \phi \rightarrow B(x,r) = B(y,r)$, es decir si dos vecindades con el mismo radio se intersectan, entonces las vecindades son iguales

(iv) Si $y \in B(x,r) \rightarrow B(y,r) = B(x,r)$, es decir cualquier punto de una vecindad es centro de la misma

Demostración

(i) Sabemos que $B(x,r)$ es un conjunto abierto. Para ver que $B(x,r)$ es cerrado, demostraremos que $X \setminus B(x,r)$ es abierto. Fijemos $y \in X \setminus B(x,r)$; entonces $\varphi(x,y) \geq r$. Afirmamos que $B(x,r) \cap B(y,r) = \phi$. Si esto no es cierto, entonces existe un $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$; por lo que $\varphi(z,x) < r$ y $\varphi(z,y) < r$. Por la desigualdad fuerte del triángulo tenemos:

$$r \leq \varphi(x,y) \leq \max\{\varphi(x,z), \varphi(z,y)\} < r$$

Pero esto es una contradicción. Por consiguiente $B(x,r) \cap B(y,r) = \phi$ y con ello $B(y,r) \subseteq X \setminus B(x,r)$. Se ha demostrado entonces que $B(x,r)$ es cerrado.

(ii) Supongamos que $p \in B(x,r) \cap B(y,s)$ y $r \leq s$. Fijemos $z \in B(x,r)$; entonces $d(x,z) < r$. Notemos que $d(y,p) < s$ y $d(z,p) < r$ puesto que $d(z,p) \leq \max\{d(z,x), d(x,p)\} < r$.

Luego $d(z,y) \leq \max\{d(z,p), d(p,y)\} < s$, esto implica que $z \in B(y,s)$, con lo que hemos demostrado que $B(x,r) \subset B(y,s)$.

(iii) y (iv) Se sigue inmediatamente del inciso (ii) (Como $r \le r$ se sigue que $B(x,r) \subseteq B(y,r)$ y $B(y,r) \subseteq B(x,r)$.

Definición 5.3.15. Si $X \neq \phi$, φ y ψ son métricas en *x*, decimos que φ y ψ son topológicamente equivalentes si $\tau_\varphi = \tau_\psi$, es decir, los espacios (X, τ_φ) y (X, τ_ψ) son iguales. En otras palabras, la función identidad en $X, id_X : (X, \tau_\varphi) \to (X, \tau_\psi)$ es un homeomorfismo.

Teorema 5.3.16. (caracterización de los espacios ultrametrizables)
Sea (X, φ) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) existe una ultramétrica ρ que es topológicamente equivalente a φ.
b) (X, φ) tiene dimensión de cubierta cero.
c) Existe una sucesión $\{u_i : i \in \mathbf{L}\}$ de cubiertas abiertas de *X*, que satisfacen las siguientes tres propiedades:
    1) $\forall i \in \mathbf{L}$, u_i es una colección de conjuntos abiertos ajenos dos a dos.
    2) $\forall i \in \mathbf{L}$, si $U \in u_i$, entonces $diam(U) \le 2^{-(i+1)}$.
    3) $\forall i \in \mathbf{L}$, u_{i+1} refina a u_i.

Demostración.
$[a \Rightarrow b]$. Sea ρ una ultramétrica en *X* tal que ρ y φ son topológicamente equivalentes. Fijemos una cubierta u en X (puesto que ρ y φ son topológicamente equivalentes, el término “abierto” no es ambiguo), es decir, los espacios (X, τ_ρ) y (X, τ_φ) son iguales. Si *x* está en X y $r > 0$ denotaremos por $B_\rho(x,r)$ a la vecindad básica $B(x,r)$ en (X, p). Necesitamos encontrar una cubierta abierta *v* ajena dos a dos tal que *v* refina a *u*. Para cada

$x \in X$ sea $A_x = \left\{ i \in \mathbf{N} : \text{existe}\, U \in u \text{ tal que } B_\rho\left(x, \frac{1}{i}\right) \subseteq U \right\}$. Notemos que $A_x \neq \phi$ pues, como u es cubierta abierta de X, existe U en u tal que $x \in U$ y por lo tanto, existe i en $\mathbf{N}$ tal que $B_\rho\left(x, \frac{1}{i}\right) \subseteq U$; esta i es elemento de A_x. Para cada x en X sea $\mathrm{i}(x) = \min A_x$.

Pongamos $v = \left\{ B_\rho\left(x, \frac{1}{i(x)}\right) : x \in X \right\}$. Claramente v es una cubierta abierta de X que refina a u, por lo que necesitamos únicamente mostrar que v es ajena dos a dos. Sean $B_\rho\left(x, \frac{1}{i(x)}\right)$ y $B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$ elementos distintos de v y supongamos que no son ajenos. Entonces existe $z \in B_\rho\left(x, \frac{1}{i(x)}\right) \cap B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$. Por el Teorema 5.3.14 (ii) una de estas vecindades básicas está contenida en la otra, digamos $B_\rho\left(x, \frac{1}{i(x)}\right) \subset B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$. Por definición de $i(y)$ existe $U \in u$ tal que $B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right) \subset U$. Ya que $x \in B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$, puede ser el centro de la bola, es decir, $B_\rho\left(x, \frac{1}{i(y)}\right) = B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$. Así tenemos:

$$B_\rho\left(x, \frac{1}{i(y)}\right) = B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right) \subseteq U$$

Por definición de $i(x)$, tenemos $i(x) \leq i(y)$, por lo que:

$$B_\rho\left(x, \frac{1}{i(x)}\right) \supseteq B_\rho\left(x, \frac{1}{i(y)}\right) = B_\rho\left(y, \frac{1}{i(y)}\right)$$

Por tanto, $B_\rho\left(x,\frac{1}{i(x)}\right)=B_\rho\left(y,\frac{1}{i(y)}\right)$, lo que contradice nuestra suposición que estos dos elementos de *v* son distintos.

$[b\Rightarrow c]$ Construiremos la sucesión $\{u_i : i\in\mathbf{L}\}$ inductivamente. Por hipótesis, (X,φ) tiene dimensión de cubierta cero. Sea u_0 un refinamiento abierto ajeno dos a dos de $\left\{B\left(x,\frac{1}{4}\right):x\in X\right\}$. Notemos que para cada $U\in u_0$, $diam(U)\leq\frac{1}{2}$. En efecto, si $U\in u_0$ y $x\in X$ es tal que $U\subseteq B\left(x,\frac{1}{4}\right)$, entonces, para cada $y,z\in U$, $\varphi(y,z)\leq\varphi(y,x)+\varphi(x,z)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2^{0+1}}$. Por lo tanto $diam(U)\leq\frac{1}{2^{0+1}}$.

Supongamos que hemos definido una cubierta ajena dos a dos de *X* digamos, u_i, para cada $i\leq n$ tal que las propiedades 1), 2) y 3) en c) se cumplen para toda $i\leq n$. Construimos u_{n+1} de la siguiente manera:

$$v=\left\{B\left(x,2^{-(n+3)}\right):x\in X\right\} \text{ y } W=\{B\cap U:B\in v \text{ y } U\in u_n\}$$

Entonces W es una cubierta de X, así que, por hipótesis, existe un refinamiento abierto, ajeno dos a dos, de *W*, digamos u_{n+1}. Veamos que la sucesión $\{u_i:i\in\mathbf{L}\}$ satisface los requisitos de (c).

Demostraremos por inducción matemática que, para cada $i\in\mathbf{L}$ y para cada $U\in u$, $diam(U)\leq\frac{1}{2^{i+1}}$ (1) Si $i=0$, entonces para cada $U\in u_0$, existe $x\in X$ tal que $U\subseteq B\left(x,\frac{1}{4}\right)$.

Demostraremos que para cada $U \in u_{n+1}$ $diam(U) \leq \frac{1}{2^{(i+1)+1}} = \frac{1}{2^{i+2}}$. Sea $U \in u_{n+1}$, entonces existen $V \in u_i$ y $x \in X$, tales que $U \subseteq B\left(x, 2^{-(n+3)}\right) \bigcap V$. Para cada $y, z \in U$ $\varphi(y,z) \leq \varphi(y,x) < \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+2}}$; por lo tanto $diam\ (U) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.

Ahora demostraremos u_{n+1} refina a u_n. Pero por construcción para cada $U \in u_{n+1}$ existen $V \in u_n$ y $x \in X$ tales que $U \subseteq B\left(x, 2^{-(i+3)}\right) \bigcap V \subseteq V$.

$[c \Rightarrow a]$ Sea $\{u_i : i \in \mathbf{L}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X cada una ajenos dos a dos, que satisfacen las propiedades 1), 2) y 3) de (c). Para cada $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces $\varphi(x,y) > 0$, así que existe $i \in \mathbf{L}$ tal que $\frac{1}{2^{i+1}} < \varphi(x,y)$. Como u_i es cubierta abierta de *X*, existen U y $V \in u_i$ tales que $x \in U$ e $y \in V$. Puesto que $diam(U) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \varphi(x,y)$, y no pertenece a *V*, así, $U \neq V$. Entonces: $A_{(x,y)} = \{i \in \mathbf{L}$: x e y se encuentran en distintos elementos de $u_i\} \neq \phi$. Por lo tanto, existe $\min A_{(x,y)}$. Si $D = \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$, entonces la función $k : X \times X \setminus D \to w$ tal que para $(x,y) \in X \times X \setminus D, k(x,y) = \min A_{(x,y)}$ está bien definida, ya que si $(x,y) = (x',y') \in X \times X \setminus D$ y si $n_0 = k(x,y)$, entonces existen U y $V \in u_{n_0}$ tales que $U \neq V, x \in U$ e $y \in V$. Pero entonces $x' \in U$ e $y' \in V$, así que n_0 está en $A(x',y')$ y $k(x',y') \leq n_0 = k(x,y)$.

Similarmente, $k(x,y) \leq k(x',y')$. Por lo que $k(x',y') = k(x,y)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$ definimos:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{k(x,y)+1} & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

Tenemos que verificar primero que ρ es una ultramétrica y la única parte de la definición que no es evidente es la forma más fuerte de la desigualdad del triángulo.

Sean $x, y, z \in X$. Demostraremos que:

$$\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z)\,,\ \rho(z,y)\} \qquad (*)$$

Si $x = y$ la demostración es trivial, por lo que suponemos que $x \neq y$. Sean $n = k(x,y)$, U y $U' \in u_n$ tales que $U \neq U'$, $x \in U$ y $y \in U'$. Si $z \notin U$, entonces z y x están en elementos distintos de u_n lo que implica que $k(z,x) \leq n$; por eso $\rho(z,x) \geq \dfrac{1}{n+1} = \rho(x,y)$ y la desigualdad (*) se cumple. Si *z* no está en U', entonces z y y están en elementos distintos de u_n, así la desigualdad (*) se cumple. La única posibilidad restante es que $z \in U \cap U'$, pero esto es imposible porque u_n es una familia ajena dos a dos. Para finalizar la prueba tenemos que demostrar que ρ es topológicamente equivalente a la métrica original φ en X.

Obsérvese que cualquier sucesión de cubiertas de (X, φ) que satisfacen 1) es una base para (X, φ), con más precisión: Si $\{u_i\ ;\ i \in \mathbf{L}\}$ es una sucesión de cubierta de *X*, cada una formada por conjuntos ajenos dos a dos y que satisfacen las condiciones 1) y 2) y 3) en (c), entonces $\bigcup_{n \in \mathbf{L}} u_n \cup \{X\}$ es base para la topología τ_φ de (X, φ). En efecto si *A* es un conjunto abierto en (X, φ) y $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r)_\varphi \subseteq A$; pero existe $i > 0$ tal que $\dfrac{1}{2^{i+1}} < r$ y, como u_i es cubierta abierta de (X, φ), existe *U* en u_i tal que $x \in U$, como $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}}$

, para cada y en U $\varphi(x,y) < \frac{1}{2^{i+1}} < r$; entonces y está en $B(x,y) \subseteq A$. Por lo que $x \in U \subseteq A$. Por definición de la topología métrica, $\{B_\rho(x,r)\colon x \in X \text{ , y } r > 0\}$ es una base para la topología τ_ρ de (X,ρ); así que para ver $\tau(X,\varphi) = \tau(X,\rho)$ basta demostrar que:

$$\{B_\rho(x,r)\colon x \in X \text{ , y } r > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbf{L}} u_n \cup \{X\} \qquad (\varphi)$$

Para este fin, sea $B = B_\rho(x,r)$. Si $r > 1$, entonces $B = X$. Si $r \leq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$. Puesto que u_{n-1} cubre a *X*, existe $U \in u_{n-1}$ tal que $x \in U$. Afirmamos que $U = B$. Si $y \in U$, entonces x y y están en el mismo elemento de u_{n-1} y por lo tanto $k(x,y) \geq n$. Por consiguiente $\rho(x,y) \leq \frac{1}{n+1} < r$, luego $y \in B$. Inversamente $y \in B$, y $y \neq x$, entonces sea $m \in \mathbf{L}$ tal que $k(x,y) = m$. Puesto que $y \in B$, tenemos que $\rho(x,y) \leq \frac{1}{m+1} < r \leq \frac{1}{n}$, luego $n < m+1$, entonces $n-1 < k(x,y)$. Así x e y están en el mismo miembro de u_{n-1}; por lo que $y \in U$.

Para completar la demostración de la igualdad (φ), sean $n \in \mathbf{L}$ y $U \in u_n$. Afirmamos que $U = B_\rho\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ para cualquier $x \in U$; sea x en U; si $y \in u_n$, entonces x y y están en el mismo elemento de u_n; así $k(x,y) \geq n+1$. Por consiguiente $\rho(x,y) \leq \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$; así $y \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$. Si $y \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ entonces $\rho(x,y) < \frac{1}{n+1}$; luego $k(x,y) \geq n$. Por consiguiente x y y están en el mismo elemento de u_n, lo que implica que $y \in U$. Esto completa la demostración del Teorema 3.5.16.

Como $\mathbf{I}$ tiene dimensión de cubierta cero (es cero dimensional y separable) el Teorema 3.5.16 implica que existe una ultramétrica ρ que induce la topología usual de $\mathbf{I}$ y que hay una sucesión de cubiertas de $\mathbf{I}$ que satisfacen las propiedades del inciso (c) del Teorema 3.5.16.

Finalmente haremos una construcción explícita de tal sucesión de cubiertas en los $\mathbf{I}$ a través de fracciones continuas porque será útil para demostrar que $\mathbf{I}$ es homeomorfismo al espacio de Baire $\mathbf{G}_1$ y por el Teorema 5.3.11 sera homeomorfo a $\mathbf{G}_2$.

Estas cubiertas abiertas están compuestas por una cantidad numerable de intervalos abiertos, ajenos dos a dos y con extremos racionales. A continuación pasaremos a definir sucesiones de cubiertas abiertas y sus propiedades.

Definición 5.3.17. Una sucesión $\{u_n : n < \mathbf{L}\}$ de familias de intervalos abiertos con puntos finales racionales la definimos de la siguiente forma:

$$u_0 = \{(a_0 , a_0 + 1) : a_0 \in \mathbf{Z}\}$$

Observemos que u_0 es una cubierta de $\mathbf{I}$ en $\mathbf{R}$ formada por intervalos abiertos en $\mathbf{R}$, ajenos dos a dos y que la longitud de cada uno de ellos es 1.

Tomemos un elemento de u_0, digamos $J = (a_0 , a_0 + 1)$, con $a_0 \in \mathbf{Z}$.

Definamos:

$$u_1(J) = \{([a_0, k+1], [a_0, k]) : k \in \mathbf{N}\}$$

Por la Proposición 5.1.22, la sucesión $\{[a_0, k]\}_{k\in\mathbf{N}}$ es decreciente y por la proposición 5.1.23 converge a $[a_0]$; entonces su primer elemento $[a_0, 1] = [a_0 + 1]$ es su máximo y a_0 es su ínfimo, así que cada intervalo en $u_1(J)$ está contenido en *J*. Más aún, la cerradura de cualquier intervalo de $u_1(J)$, a excepción del intervalo $\left(a_0+\frac{1}{2}\ ,\ a_0+1\right)$ está contenida en *J*.

pero la cerradura de cualquier elemento de $u_1(J)$ está contenida en $(a_0\ ,\ a_1+1]$. En efecto, si $x \in \left[[a_0\ ,\ k+1][a_0\ ,k]\right]$, entonces $a_0 < [a_0\ ,k+1] \leq x \leq [a_0,k] \leq [a_0\ ,1]$.

Además si $k, k' \in \mathbf{N}$ y $k < k'$, entonces $k+1 \leq k'$, lo que implica $\frac{1}{k'} \leq \frac{1}{k+1}$ y por consiguiente $a_0 + \frac{1}{k'} \leq a_0 + \frac{1}{k+1}$. Por lo tanto:

$$\left(a_0 + \frac{1}{k'+1}\ ,\ a_0 + \frac{1}{k'}\right) \bigcap \left(a_0 + \frac{1}{k+1}\ ,\ a_0 + \frac{1}{k}\right) = \phi$$

Así, los elementos de $u_1(J)$ son ajenos entre sí, pero todo irracional x en J está en algún elemento de $u_1(j)$, pues si *k* es igual a la parte entera de $\frac{1}{x-a_0}$, entonces $k \leq \frac{1}{x-a_0} < k+1$,por lo que $\frac{1}{k+1} < x-a_0 \leq \frac{1}{k}$ y puesto que $x \notin \mathbf{Q}$ tenemos que $x \in \left([a_0\ ,k+1],[a_0\ ,k]\right).u_1(J)$ es entonces una cubierta de $(a_0\ ,a_0+1) \bigcap \mathbf{I}$.

Por otro lado, la longitud de cada elemento de $u_1(J)$ es menor o igual a $\frac{1}{2}$ que es la longitud del "más largo" de ellos, es decir $\left([a_0\ ,2],[a_0\ ,1]\right)$ (ver Proposición 5.1.2.4).

Si lo que hemos hecho para *J* lo hacemos para cada elemento de u_1, obtenemos una cubierta de $\mathbf{I}$,

$$u_1 := \bigcup_{J\, \in\, u_0} u_1(J);$$

Formada por intervalos abiertos en $\mathbf{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor o igual a $\frac{1}{2}$. Además u_1 refina a u_0 pues si $I \in u_1$, existe $J \in u_0$ tal que $I \in u_1(J)$.

Pero todos los elementos de $u_1(J)$ están contenidos en *J*, como ya se ha visto. Por lo tanto, $I \subseteq J$.

Antes de continuar con la construcción de las siguientes cubiertas, será útil recordar la siguiente definición.

Definición 5.3.18 Sea (X, φ) un espacio métrico. Entonces:

a) Si $U \subseteq X$ el diámetro de *U* es: $diam(U) := sup\ \{\varphi(x, y) : x, y \in U\}$

b) Si *u* es una familia no vacía de subconjunto de *X* la ***malla*** de *u* es: $malla(u) = sup\{diam(U) \in u\}$

Tenemos entonces que $malla(u_0) \leq 1$ y $malla(u_1) \leq \frac{1}{2}$

Ahora sea *I* un elemento cualquiera de $u_1; I$ es de la forma $([a_0, a_1+1], [a_0, a_1])$ para algún $a_0 \in \mathbf{Z}$ y algún $a_1 \in \mathbf{N}$.

Definimos: $u_2(I) := \{([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1]) : k \in \mathbf{N}\}$

Por la Proposición 5.1.22 ahora la sucesión $\{[a_0, a_1, k]\}$ es creciente y por la Proposición 5.1.23 converge a $[a_0, a_1]$. Entonces su mínimo es su primer elemento, es decir, $[a_0, a_1, 1] = [a_0, a_1+1]$ y su supremo es $[a_0, a_1]$. Así que cada intervalo de $u_2(I)$, a excepción del intervalo $([a_0, a_1, 1], [a_0, a_1, 2])$ está contenido en *I*. sin embargo la cerradura de cualquier elemento de $u_2(I)$ está contenido en $([a_0, a_1, 1], [a_0, a_1])$.

En efecto, sean $([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1]) \in u_2(I)$ y $x \in [[a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1]]$.

Entonces:

$$[a_0, a_1, k] \leq x \leq [a_0, a_1, k+1]$$

Pero

$$\left[a_0\,,a_1\,,1\right] \le \left[a_0\,,a_1\,,k\right]$$

Y

$$\left[a_0\,,a_1\,,k+1\right] < \left[a_0\,,a_1\right]$$

Por consiguiente:

$$x \in \left[\left[a_0\,,a_1\,,1\right]\,,\,\left[a_0\,,a_1\right]\right]$$

Sin embargo, la cerradura de cada elemento de $u_2\left(I\right)$ está contenido en algún elemento de $u_0\left(J\right)$. Ya que si

$$\left(\left[a_0\,,a_1\,,1\right]\,,\,\left[a_0\,,a_1\right]\right) \in u_1\left(J\right) \text{ y } x \in \left[\left[a_0\,,a_1\,,k\right]\,,\,\left[a_0\,,a_1\,,k+1\right]\right]$$

Entonces:

$$a_0 < \left[a_0\,,a_1\,,1\right] \le \left[a_0\,,a_1\,,k\right] \le x \le \left[a_0\,,a_1\,,k+1\right] < \left[a_0\,,a_1\right] \le a_0+1$$

Es decir:

$$\left[\left[a_0\,,a_1\,,k\right]\,,\,\left[a_0\,,a_1\,,k+1\right]\right] \subseteq \left[\left[a_0\,,a_1\,,1\right],\,\left[a_0\,,a_1\right]\right] \subseteq \left[\left[a_0\,,a_1\,,1\right],\left[a_0\,,a_1\right]\right] \subseteq \left[a_0\,,a_1+1\right]$$

Por lo tanto $x \in \left[a_0\,,a_1+1\right]$

Ahora demostraremos que los elementos de $u_2\left(I\right)$ son ajenos entre sí. Sean $k,k' \in \mathbf{N}$ con $k<k'$, entonces $k+1<k'$, lo que implica $\frac{1}{k'} \le \frac{1}{k+1}$ y por la Proposición 5.1.22

$$\left[a_0\,,a_1\,,k+1\right] \le \left[a_0\,,a_1\,,k'\right]$$

Por consiguiente:

$$\left(\left[a_0\,,a_1\,,k\right],\left[a_0\,,a_1\,,k+1\right]\right) \cap \left(\left[a_0\,,a_1\,,k'\right],\left[a_0\,,a_1\,,k'+1\right]\right) = \phi$$

Ahora bien, todo irracional x de I está en algún elemento de $u_2\left(I\right)$. En efecto, si $x \in \mathbf{I}$ y también $x \in I = \left(\left[a_0\,,a_1+1\right],\,\left[a_0\,,a_1\right]\right)$. Entonces por la Proposición 5.1.25, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que

$[a_0, a_1, k] < x\, [a_0, a_1, k+1]$, es decir $x \in ([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1])$ que es un elemento de $u_2(I)$. Por consiguiente $u_2(I)$ cubre a $I \cap \mathbf{I}$.

La longitud de cada elemento de $u_2(I)$ es menor o igual que $\frac{1}{3}$. En efecto, como $k < k+1$ por la Proposición 5.1.22 tenemos que:

$$[a_0, a_1, k+1] - [a_0, a_1, k] < \frac{k+1-k}{k(k+1)+1} < \frac{1}{3}$$

Si lo que hemos hecho para *I* lo hacemos para cada elemento de u_2, obtenemos una cubierta de $\mathbf{I}$

$$u_2 := \bigcup_{I \in u_1} u_2(I)$$

Formada por intervalos abiertos en $\mathbf{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor o igual a $\frac{1}{3}$. Además u_2 refina a u_1 pues si $H \in u_2$, existe $I \in u_1$ tal que $H \in u_1(I)$. Pero todos los elementos de $u_1(I)$ están contenidos en *I*, como ya hemos visto. Po lo tanto $H \subseteq I$. Notemos que la $malla(u_2) \leq \frac{1}{3}$.

Sea $n \in \mathbf{L}$ y supongamos que hemos construido una sucesión $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de familias de subconjuntos de $\mathbf{R}$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}, V \in u$, sí y solo sí *V* es un intervalo abierto en $\mathbf{R}$ de una de las siguientes formas:

    a. Si j es par, entonces $V = ([a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j], [a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + 1])$ donde $a_0 \in \mathbf{Z}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_j$ son naturales.

b. Si j es impar, entonces $V=\left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+1\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j\right]\right)$ donde $a_0 \in \mathbf{Z}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_j$ son naturales.

2) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, los intervalos de u_j son ajenos dos a dos.

3) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, u_{j+1} refina a u_j.

4) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Si j es impar y

$V=\left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+1\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j\right]\right) \in u_j$, entonces

$$\bar{V} \subseteq \left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-2}, a_{j-1}\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-2}, a_{j-1}+1\right]\right)$$

Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Si n es par y

$V=\left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+1\right]\right) \in u_j$, entonces

$$\bar{V} \subseteq \left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-2}, a_{j-1}+1\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{j-2}, a_{j-1}\right]\right)$$

5) Si para cada familia u de subconjuntos de $\mathbf{R}, \bar{u}$ denota el conjunto $\{Cl_{\mathbf{R}}(U) : U \in u\}$, entonces para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}, \bar{u}_{j+2}$ refina a u_j.

6) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}, u_j$ es una cubierta abierta de $\mathbf{I}$.

7) Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $malla(u_j) < \dfrac{1}{j+1}$

Construiremos u_{n+1} de tal forma que la nueva sucesión de familias: $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ siga cumpliendo las propiedades del 1) al 7).

Haremos una construcción para el caso en que n es impar. El otro caso será completamente similar. Sea V un elemento cualquiera de u_n, entonces es de la forma:

$$\left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+1\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\right]\right)$$

Para algún $a_0 \in \mathbf{Z}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$

Definamos a:

$$u_{n+1}(V) = \{([a_0, a_1, \ldots, a_n, k], [a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1]) : k \in \mathbf{N}\}$$

Por la Proposición 5.1.22, $\{[a_0, a_1, \ldots, a_n, k]\}_{k\in\mathbf{N}}$ es creciente y por la Proposición 5.1.23, converge a $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Por lo tanto $[a_0, a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_n + 1]$ es su mínimo.

Así cada intervalo en $u_{n+1}(V)$ está contenido en:

$$([a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1] m [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]) = V$$

Más aún, la cerradura de cualquier intervalo de $u_{n+1}(V)$ con excepción del intervalo $([a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 2])$ está contenido en *V*. Sin embargo, la cerradura de cualquier elemento de $u_{n+1}(V)$ está contenido en:

$$W := [[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]]$$

En efecto, si $x \in [[a_0, a_1, \ldots, a_n, k], [a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1]]$, entonces: $[a_0, a_1, \ldots, a_n, k] \le x \le [a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1]$, pero

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1] < [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Y

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, 1] \le [a_0, a_1, \ldots, a_n, k]$$

Por consiguiente:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, 1] \le x < [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Por lo que $x \in W$. Si $U \in u_{n+1}(V)$, entonces existe $k \in \mathbf{N}$ tal que:

$$U = \left([a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k], [a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k+1] \right)$$

Por lo tanto $\bar{U} = W$. Pero $\bar{U} = W \subseteq \bar{W} = \bar{V}$. Por consiguiente:

$$\bar{U} = \bar{V} \subseteq \left([a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}] , [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1} + 1] \right)$$

Por (4), si $x \in \bar{U}$ tenemos que:

$$[a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k] \leq x < [a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k+1]$$

pero

$$[a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}] < [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-1}, a_n + 1] \leq [a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k]$$

y

$$[a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k+1] < [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-1} , a_n] \leq [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

De modo que:

$$[a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}] < x < [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

Por lo tanto:

$$x \in \left([a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}], [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1} + 1] \right)$$

Entonces la cerradura de cualquier elemento de $u_{n+1}(V)$ está contenido en

$$\left([a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}], [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-2}, a_{n-1} + 1] \right) \in u_{n-1}(V)$$

Ahora demostraremos que los elementos de $u_{n+1}(V)$ son ajenos dos a dos entre sí. Sean k y $k' \in \mathbf{N}$ con $k < k'$, entonces $k+1 \leq k'$; luego:

$$[a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k+1] \leq [a_0 , a_1 , \ldots , a_n , k']$$

Por consiguiente:

$$\left(\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k\right],\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k+1\right]\right)\cap\left(\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k'\right],\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k'+1\right]\right)=\phi$$

Ahora bien, todo irracional $x \in V$ está en algún elemento de $u_{n+1}(V)$.

En efecto, como

$$\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_{n-1},a_n+1\right] < x < \left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_{n-1},a_n\right]$$

Por 5.1.25 existe $k \in \mathbf{N}$ tal que:

$$\left(\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k\right] < x < \left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k+1\right]\right)$$

Por lo tanto $u_{n+1}(V)$ cubre a $V \cap \mathbf{I}$.

La longitud de cada elemento de $u_{n+1}(V)$ es menor o igual a $\dfrac{1}{n+2}$. Puesto que $1 \leq k < k+1$. Por la proposición 5.1.24, tenemos que:

$$\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k+1\right]-\left[a_0\,,\,a_1\,,\,...\,,\,a_n\,,k\right]<\frac{k-1+k}{k(k+1)+n}=\frac{1}{k^2+k+n}\leq\frac{1}{n+2}$$

Esta última desigualdad se sigue de $2+n \leq k^2+k+n$.

Si lo que hemos hecho para V lo hacemos para cada elemento de u_{n+1}, obtenemos una cubierta de $\mathbf{I}$.

$$u_{n+1} := \bigcup_{V \in u_n} u_{n+1}(V)$$

Formada por intervalos abiertos en $\mathbf{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor a $\dfrac{1}{n+2}$ y por consiguiente *malla* $(u_{n+1}) < \dfrac{1}{n+2}$. Además u_{n+1} refina a u_n y $\overline{u}_{n+1}$ refina a u_{n-1}.

En resumen, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5.3.19. La sucesión de familias $\{u_n : n \in \mathbf{L}\}$ de subconjuntos de $\mathbf{R}$ satisface las siguientes propiedades.

(1) Para cada $n\in\mathbf{L}, V\in u_n$ sí y sólo sí si V es un intervalo abierto en $\mathbf{R}$ de una de las siguientes formas:

a. Si n es par, entonces $V = \left(\left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{n-1}, a_n\right], \left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{n-1}, a_n+1\right]\right)$, donde $a_0\in\mathbf{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ son naturales.

b. Si n es impar, entonces $V = \left(\left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{n-1}, a_n+1\right], \left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{n-1}, a_n\right]\right)$ donde $a_0\in\mathbf{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ son naturales.

(2) Para cada $n\in\mathbf{L}$, los intervalos de u_n son ajenos dos a dos.

(3) Para cada $n\in\mathbf{L}$, u_{n+1} refina a u_n.

(4) Para cada $n\in\mathbf{L}$, u_{n+2} refina a u_n.

(5) Para cada $n\in\mathbf{L}$, u_n es una cubierta abierta de $\mathbf{I}$.

(6) Para cada $n\in\mathbf{L}, malla\left(u_n\right) < \dfrac{1}{n+1}$.

Proposición 5.3.20. Para cada x número irracional, hay una sucesión

$$\left\{a_i : a_0\in\mathbf{Z}\text{ y } a_j\in\mathbf{N}, \forall\, j\in\mathbf{N}\right\}_{i\in\mathbf{L}}$$

Tal que:

(1) x es el único punto en:

$$\bigcap\left\{\left(\left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{2n-1}, a_{2n}\right], \left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{2n-1}, a_{2n}+1\right]\right)\right\}_{i\in\mathbf{L}}$$

(2) x es el único punto en:

$$\bigcap\left\{\left(\left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{2n-1}, a_{2n+1}+1\right], \left[a_0\,,\, a_1\,,\, ...\,,\, a_{2n-1}, a_{2n+1}\right]\right)\right\}_{i\in\mathbf{L}}$$

<u>Demostración</u>:

Supongamos que u_n es la sucesión de cubiertas de $\mathbf{I}$ del teorema anterior. Sea x un número irracional. Puesto que para cada $n\in\mathbf{L}$, u_n es cubierta abierta de $\mathbf{I}$, para cada $n\in\mathbf{L}$ existe un único $U_n\in u_n$ tal que $x\in U_n$.

$(1)\ \bigcap_{m\geq 1} U_{2m} \subseteq \bigcap_{m\geq 1} \bar{U}_{2m} \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_{2m-2} = \bigcap_{m\geq 1} U_{2m} \cap U_0 \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_{2m}$

Por consiguiente $\bigcap_{m\in \mathbf{L}} \bar{U}_{2m} = \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m}$. Como para cada $m \in \mathbf{L}$, tenemos que $\bar{U}_{2m} \subseteq U_{2m-2}$, entonces:

$$\lim_{m\to\infty} diam\left(\bar{U}_{2m}\right) \leq \lim_{m\to\infty} diam\left(\bar{U}_{2m-2}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

Por lo tanto $\left(\bar{U}_{2m}\right)_{m\in \mathbf{L}}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero, y por consiguiente su intersección es un solo punto, el cual es *x*.

$(2)\ \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m+1} \subseteq \bigcap_{m\in \mathbf{L}} \bar{U}_{2m+1} \subseteq \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m-1} = \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m+1} \cap U_0 \subseteq \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m-1}$

Por lo tanto: $\bigcap_{m\in \mathbf{L}} \bar{U}_{2m+1} = \bigcap_{m\in \mathbf{L}} U_{2m+1}$. Tenemos que $\bar{U}_{2m+1} \subseteq U_{2m-1}$ y por lo tanto $\lim_{m\to\infty} diam\left(\bar{U}_{2m+1}\right) = 0$; entonces $\left(\bar{U}_{2m+1}\right)_{m\in \mathbf{L}}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero. Su intersección es un solo punto, a saber *x*.

Proposición 5.3.21. Si *x* es irracional y $\left\{a_i : a_0 \in \mathbf{Z} \text{ y } a_j \in \mathbf{N},\ \forall j \in \mathbf{N}\right\}$ es la sucesión de la Proposición 5.3.19, entonces: $x = \lim_{n\to\infty} \left\{\left[a_0, a_1, \ldots, a_n\right]\right\}_{n\in w}$.

Denotaremos este límite por $\left[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\right]$.

Demostración

Para cada $n \in \mathbf{L}$: $\left[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}\right] < x < \left[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}+1\right]$ y tomando el límite obtenemos: $\left[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\right]$.

Definición 5.3.22. Sea $\phi : \left(\mathbf{G}_2, \varphi_2\right) \to \mathbf{I}$ la función tal que si $\left\{a_i\right\}_{i\in \mathbf{L}}, \phi\left(\left\{a_i\right\}_{i\in \mathbf{L}}\right)$ es único irracional en

$$\bigcap \left\{\left(\left[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}\right], \left[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}+1\right]\right) : n \in \mathbf{L}\right\}$$

Teorema 5.3.23. ϕ es un homeomorfismo de $\mathbf{G}_2$ en $\mathbf{I}$

Demostración

ϕ es inyectiva. En efecto si $\{a_i\} \neq \{b_i\}$, entonces existe el mínimo $n \in \mathbf{L}$ tal que $a_n \neq b_n$. Si $n = 0$, entonces $a_0 = b_0$ y los intervalos $(a_0 , a_0 + 1)$ y $(b_0 , b_0 + 1)$ son ajenos dos a dos, por lo que $\phi(\{a_i\}) \neq \phi(\{b_i\})$. En caso de que $n > 0$, $n = 2m$ y $m \in \mathbf{L}$ tenemos:

$$\phi(\{a_i\}) \in ([a_0 , a_1 , \ldots , a_{2m-1} , a_{2m}] , [a_0 , a_1 , \ldots , a_{2m-1} , a_{2m} + 1])$$

$$\phi(\{b_i\}) \in ([b_0 , b_1 , \ldots , b_{2m-1} , b_{2m}] , [b_0 , b_1 , \ldots , b_{2m-1} , b_{2m} + 1])$$

Puesto que $a_{2m} \neq b_{2m}$ estos intervalos son elementos distintos de u_{2m}. Se deduce que $\phi(\{a_i\}) \neq \phi(\{b_i\})$.

El caso para $n = 2m + 1$ es similar.

ϕ es sobreyectiva. Si $x \in \mathbf{I}$, entonces por la Proposición 5.3.20 existe una sucesión $\{a_i\}$ tal que *x* es el único punto en

$$\bigcap \left\{ ([a_0 , a_1 , \ldots , a_{2m}] , [a_0 , a_1 , \ldots , a_{2m} + 1]) \right\}_{n \in \mathbf{L}} = \phi(\{a_i\})$$

Es decir, $\phi(\{a_i\}) = x$. Esto demuestra que ϕ es sobreyectiva. Por lo tanto ϕ es biyectiva. Resta ver que ϕ es homeomorfismo. Para esto es suficiente demostrar que existe una base B para el espacio de Baire $\mathbf{G}_2$, y una base u para los números irracionales tales que ϕ manda a cada $B \in \mathrm{B}$ en algún $U \in u$ y cada $U \in u$ es la imagen de algún $B \in \mathrm{B}$.

Consideremos a B como la base usual para la topología inducida por la métrica en $\mathbf{G}_2$, es decir:

$$N = B\left(\{a_i\}, \frac{1}{n}\right): n \in \mathbf{L} \text{ y } \{a_i\} \in \mathbf{G}_2$$

Para los números irracionales consideremos $u = \bigcup_{i<\mathbf{L}} u_i$, donde $\{u_{i<\mathbf{L}}\}$ es la sucesión de cubierta de $\mathbf{I}$ construidas en 5.3.19. como u satisface $c(1)$ de 5.3.16 es una base de $\mathbf{I}$.

Notamos que:

$$d_2\left(\{a_i\} ; \{b_i\}\right) < \frac{1}{n}, \text{ sí y solo sí } a_i \neq b_i \text{ para } i < n$$

Ahora basta demostrar que para cada $\{a_i\} \in \mathbf{G}_2$ y para cada $B = \mathrm{B}\left(\{a_i\}, \frac{1}{n}\right) =$ $\left\{\{b_i\} \in \mathbf{G}_2 : b_i = a_i \,; i < n\right\}$, tenemos:

(i) $\phi(B) = \left([a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n], [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]\right)$

(ii) $\phi(B) = \left([a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n} + 1], [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}]\right)$

Demostración de (*i*). Para n para y por la definición de ϕ y la propiedad de los intervalos encajados, se deduce que $x \in \phi(B)$ sí y sólo si existe $\{b_i\} \in \mathbf{G}_2$, tal que $a_i \neq b_i$ para $i \leq n$ y $\phi\left(\{b_i\}\right) = x$, sí y solo sí:

$$\bigcap \left\{\left([a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i], [a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{2i} + 1]\right): i \text{ es par} \leq n\right\}$$

sí y solo sí:

$$x \in \left([a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n], [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{2n} + 1]\right)$$

La demostración de (*ii*) es análoga que para (*i*).

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación de hipótesis con los resultados

De acuerdo con los resultados de fracciones continuas, propiedades de los irracionles, espacios ultrametricos y espacios de Baire, verificamos, gracias a los teoremas probados, que las hipótesis específicas planteadas son verdaderas

6.2. Contrastación de resultados con otros estudios similares

En Campos, M. (2013) observamos que el autor establece el homeomorfismos de los irracionales con el espacio de Baire no tan detallada, no estan bien determinadas las simbologías, en cambio en nuestro trabajo, se realizó una demostración más dellada con fines didácticos.

En Salgado, E. (2016) observamos que el autor muestra las difentes definiciones y caracterizaciones del espacio de Baire, pero en nuestro trabajo mostramos detalladamente una definición en base a una familia de suceciones que sera de suma importancia par establecer el homeomorfismo con el conjunto de los números irracionales

6.3. Responsabilidad ética.

En nuestra investigación tiene como responsabilidad ética fomentar el estudio, lo cual brinda un gran aporte a nuestra sociedad que puede ser utilizado para futuras investigaciones. Asimismo, se manifiesta que el presente trabajo es auténtico, usando como antecedentes los textos mencionados en las referencias bibliográficas.

CONCLUSIONES

- Los números irracionales, que sirven para definir a los números reales, se pueden caracterizar a través de las fraciones continuas infinitas.
- Los números irracionales, con la métrica usual de los reales, contiene conjuntos no triviales cerrados y abiertos a la ves (*cerrabiertos*)
- Los números irracionales tiene algunas propiedades en común con el conjunto de los números reales como la separabilidad, lindelof y segundo numerable.

RECOMENDACIONES

Siendo nuestro objetivo general establecer homeomorfismos entre los espacios de Baire y los números irracionales indicando algunas propiedades topológicas invariantes. Debido a que el espacio de Baire se puede interpretar de diferentes convenciones entonces surge de manera natural la siguiente pregunta ¿se puede estudiar los irracionales bajo las diferentes concepciones de los espacios de Baire? Es así que esta investigación sirve como base para futuras investigaciones ya que se puede generalizar a principios más amplios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Cornelio, L & Lorena, V. (2013). Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. *Lecturas Matemáticas*, *34*(1), 131-148. Recuperado de http://www.scm.org.co/aplicaciones/revista/Articulos/1102.pdf

[2] Murillo, M. (2015). Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *15*(2).recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2171/1976

[3] Salgado, E. (2016). *Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire*. (Tesis Posgrado). Universidad Autónoma de Puebla, México. Recuperado de https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/ErickSalgadoMatias.pdf

[4] Martinez, J. (2011). Producto de espacios de lindelof. (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Puebla, México. Facultad de Matemáticas, México. Recuperado de: https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/JuanAlbertoMartinezCadena.pdf

[5] Macho, M. (2002). *Topología General*. Recuperado *d*e http://www.ehu.eus/~mtwmastm/TopoGralMana.pdf

[6] Campos, M. (2013). Una Caracterización Topológica de los Irracionales. (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Puebla, México.

[7] Macho, M. (2009) . *Topología de Espacios Métricos*. Recuperado de http://www.ehu.eus/~mtwmastm/TEM0910.pdf

[8] Macho, M. (2002). ¿Qué es la topología ?. *SIGMA,(*20),63-77. Recuperado de: http://www.ehu.eus/~mtwmastm/sigma20.pdf

[9] Gustavo.N.(2002). *Topología General.*Bogota,Colombia:Panamericana. Recuperado de: **https://books.google.com.pe/books?id=lVsff1JINwYC&printsec=frontcover&dq=TOPOLOGIA&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjjy4bXi_3dAhWNm-AKHURqA0cQ6AEIJzAA#v=onepage&q=TOPOLOGIA&f=false**