UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“PERTURBACIÓN DE UNA ECUACIÓN ABSTRACTA DE ONDA”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

JESÚS YUNCAR ALVARON

Callao, 2021

PERÚ

Mg. Jesús Yuncar Alvaron

Autor

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Asesor

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

“Perturbación de una Ecuación Abstracta de Onda”

Jesús Yuncar Alvaron

Tesis presentada a consideración del Jurado desigando por Resolución Decanal N° 053-2021-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg.: MORENO VEGA, Dionicio Orlando
Presidente

Mg.: MEDINA APARCANA, Ruth
Vocal

Mg.: SOTELO PEJERREY, Alfredo
Secretario

Lima – Perú

2021

DEDICATORIA

A mis padres, Alejandro y Matilde, que con sus enseñanzas me forjaron a ser perseverante en todas las acciones de mi vida y que guardo todos sus recuerdos en mi mente por siempre.

AGRADECIMIENTO

Al finalizar con este trabajo, que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

A todos los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, que son formadores de nuevos profesionales, por ser mis guías en cada momento de mi vida profesional.

A los profesores que son parte de mi jurado de Tesis, por la disponibilidad comprensión y paciencia en todo momento.

A mi asesor, el Doctor Eugenio Cabanillas Lapa, por la constante ayuda, paciencia y consejos en la realización de mi tesis, además de ser un ejemplo a seguir y guia de profesionales de nuestra patría.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO........3
TABLA DE GRÁFICOS........3
TABLA DE IMÁGENES Y OTROS........3
RESUMEN........4
ABSTRACT........5
INTRODUCCIÓN........6

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA........8
1.1 Descripción de la realidad problemática........8
1.2 Formulación del problema........9
1.3 Objetivos........9
1.4 Limitantes de la investigación........10

II. MARCO TEÓRICO........11
2.1 Antecedentes:........11
2.2 Bases teóricas:........14
Espacio de las Distribuciones........14
Los Espacios $L^p(\Omega)$........19
Espacios de Sobolev........25
Topologías débil y débil estrella........27
Los Espacios $L^p(0,T,V)$........30
Convergencia en $L^p(0,T,V)$........33
Operadores lineales no limitados........35
2.3 Conceptual........40
2.4 Definición de términos básicos........40

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES........42
3.1 Hipótesis........42
3.2 Definición conceptual de variables........42
3.3 Operacionalización de la variable........43

IV. DISEÑO METODOLÓGICO 44
4.1 Tipo y diseño de la investigación 44
4.2 Método de investigación 44
4.3 Población y muestra 44
4.4 Lugar de estudio y período de desarrollo 44
4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información 45
4.6 Análisis y procesamiento de datos 45

V. RESULTADOS 46
Existencia y Unicidad 46
Problema Aproximado 47
Estimativa a priori 55
Pasaje al límite 57
Verificación de los datos iniciales 62
Unicidad 63
5.1 Resultados descriptivos 65
5.2 Resultados inferenciales 65
5.3 Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis 65

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS 66
6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados 66
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares 67
6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes 68

CONCLUSIONES 69

RECOMENDACIONES 70

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 71

ANEXOS 73

TABLAS DE CONTENIDO

La presente investigación no contiene tablas de contenido.

TABLA DE GRÁFICOS

La presente investigación no contiene tabla de gráficos.

TABLA DE IMÁGENES Y OTROS

La presente investigación no contiene tabla de imágenes y otros.

RESUMEN

"PERTURBACIÓN DE UNA ECUACIÓN ABSTRACTA DE ONDA"

JESÚS YUNCAR ALVARON

Junio-2021

Asesor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

Encontramos la existencia y unicidad de la solución del problema abstracto:

$$\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en} \quad H \\ u(0) = u_0 \ ; & \text{en} \quad V \\ u'(0) = u_1 \ ; & \text{en} \quad H \end{cases}$$

donde A y L son operadores lineales; f, u_0 y u_1 son datos dados tales que el operador lineal A, esta definido por la terna $\{H, V; a(u,v)\}$, donde H , V son espacios de Hilbert, la inmersión de V en H es densa y compacta, con la forma bilineal a no negativa, aquí L representa una perturbación del operador A, mediante el método teórico constructivo, inductivo-deductivo y empleando el método de Faedo-Galerkin, el cual consiste en aproximarnos a la solución proyectando el problema original a espacios de dimensión finita, determinamos la unicidad de la solución utilizando la desigualdad de Gronwall. Como resultado de todo lo anterior se tiene que, al considerar $u_0 \in L^{\infty}\left(0, T, D(A^{1/2})\right)$ y $u_1 \in L^{\infty}\left(0, T, H\right)$ se obtiene la existencia y unicidad de la solución del problema abstracto. Concluimos que, bajo las condiciones consideradas y definidas para espacios de Sobolev se demuestra la existencia y unicidad de la solución del problema abstracto.

Palabras Claves:

Ecuación de onda, método de Faedo-Galerkin, existencia de soluciones, unicidad de solución.

ABSTRACT

PERTURBATION OF AN ABSTRACT WAVE EQUATION

JESÚS YUNCAR ALVARON

June-2021

Adviser: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

We find the existence and uniqueness of the solution of the abstract problem:

$$\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en} \quad H \\ u(0) = u_0 \ ; & \text{en} \quad V \\ u'(0) = u_1 \ ; & \text{en} \quad H \end{cases}$$

where *A* and *L* are linear operators; f, u_0 and u_1, are given such that the linear operator *A*, is defined by the triple $\{H, V; a(u,v)\}$, where *H*, *V* are Hilbert spaces, the immersion of *V* in *H* is dense and compact, the bilinear form *a* is non-negative, here *L* represents a perturbation of the operator *A*, using the constructive, inductive-deductive and using the Faedo-Galerkin method, which consists of approaching the solution by projecting the original problem to finite-dimensional spaces, we determined the uniqueness of the solution using Gronwall's inequality. As a result of all the above, when considering $u_0 \in L^\infty\left(0, T, D(A^{1/2})\right)$ and $u_1 \in L^\infty\left(0, T, H\right)$ the existence and uniqueness of the solution of the abstract problem is obtained. We conclude that, under the conditions considered and defined for Sobolev spaces, the existence and uniqueness of the solution of the abstract problem is demonstrated.

Key Words:

Wave equation, Faedo-Galerkin method, existence of solution, uniquesses of the solution.

INTRODUCCIÓN

Al modelar fenómenos de la Ciencia e Ingeniería surgen de manera natural ecuaciones diferenciales parciales que, si consideran la evolución en el tiempo del fenómeno estudiado, son denominadas ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de evolución. Estas ecuaciones son muy frecuentes porque permiten conocer y explicar el mundo que nos rodea: un mundo tridimensional que se transforma en el tiempo.

Un modelo clásico y básico de EDP de evolución es la ecuación de onda:

$$u'' - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T]$$

más condiciones de frontera y condiciones iniciales, que permiten describir el comportamiento de una onda en determinado medio. Cuando el medio es heterogéneo, el fenómeno ondulatorio es afectado (perturbado) en diversos aspectos: amplitud, velocidad, temperatura, densidad, etc., lo que matemáticamente puede ser expresado mediante el sistema:

$$(P_1)\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times [0, T] \\ u = 0 \; ; & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times [0; T] \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1; \; \text{en} \quad \Omega & \end{cases}$$

que es una ecuación típica de onda, perturbada con un término lineal $a(x)u$. Evidentemente, podemos considerar muchos otros sistemas perturbados de evolución, por ejemplo:

$$(P_2)\begin{cases} u'' - \Delta^2 u + a(x)u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times [0, T] \\ u = 0 \; ; & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times [0; T] \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1; \quad \text{en} \quad \Omega & \end{cases}$$

que es la ecuación de vibraciones transversales de una viga, perturbada por el término lineal $a(x)u$.

Motivados por estos ejemplos, investigaremos un modelo abstracto que abarque todas las situaciones anteriores, y nos permita obtener la mayor cantidad de información y resultados para una posterior interpretación y uso. El modelo de ecuación abstracta de onda perturbada que estudiaremos es:

$$\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en } H \\ u(0) = u_0 \ ; & \text{en } V \\ u'(0) = u_1 \ ; & \text{en } H \end{cases} \qquad (P)$$

donde A y L son operadores lineales; f, u_0 y u_1, son datos dados.

Considerando lo anterior, demostramos la existencia y unicidad de solución del problema abstracto (P), empleando el método de Faedo-Galerkin, el cual consiste en aproximarnos a la solución proyectando el problema original a espacios de dimensión finita.

Nuestro trabajo esta organizado en seis capítulos, en el primer capítulo realizamos la descripción de la realidad problemática, formulación del problema, objetivos de la investigación y limitantes de la investigación, en el segundo capítulo realizamos los antecedentes, bases teóricas, conceptual y definición de términos básicos, en el tercer capítulo realizamos la Hipótesis, definición conceptual de variables y Operacionalización de la variable, en el cuarto capítulo establecemos el tipo, diseño, y método de la investigación, en el quinto capítulo realizamos la estimativa, el pasaje al límite, verificación de las condiciones iniciales, la unicidad de la solución y los resultados obtenidos, en el sexto capítulo realizamos la contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados, y la contrastación de los resultados con otros estudios similares.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

La ecuación abstracta de onda perturbada se considera como una generalización de la ecuación de onda. Una aplicación específica ocurre en fenómenos ondulatorios que son alterados por una perturbación en diversos aspectos: amplitud, velocidad, temperatura, densidad, etc., ya sea a causa de efectos climáticos o producidos por el ser humano, logrando cambiar las ondas en su posición en el tiempo. Motivados por esta problemática demostraremos la existencia y unicidad de solución débil del problema abstracto:

$$\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en } H \\ u(0) = u_0 \;; & \text{en } V \\ u'(0) = u_1 \;; & \text{en } H \end{cases} \qquad (P)$$

donde V es un espacio de Hilbert separable real, cuyo producto interno es representado por $(\ ,\ )_V$ y la norma $|\cdot|_V$, H es un espacio de Hilbert separable real, cuyo producto interno es representado por $(\ ,\ )_H$ y la norma $|\cdot|_H$, $V \subseteq H$ denso y una inmersión V en H compacta, en consecuencia:

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$$

siendo A un operador lineal, autoadjunto, simétrico, coercivo, y f una función dada, además $L: H \to H$ es un operador lineal continuo y monótono, también $u:[0,T] \to \mathrm{V}$ es la función incógnita, con u_0 y u_1 datos iniciales dados, para esta demostración utilizaremos el método de Faedo Galerkin conjuntamente con la teoría espectral para operadores autoadjuntos.

1.2 Formulación del problema

Problema General

¿Es posible garantizar la existencia y unicidad de solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden?

Problemas específicos

¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que el problema abstracto (P) sea un problema general que engloba diferentes modelos?

¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que exista solución del problema abstracto (P) ?

¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución del problema abstracto (P) sea única ?

1.3 Objetivos

Objetivo General:

Demostrar de la existencia y unicidad de solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden.

Objetivos Específicos:

Determinar condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que el problema abstracto (P) sea un problema general que engloba diferentes modelos.

Establecer condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para la existencia de solución del problema abstracto (P).

Analizar condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución del problema abstracto (P) sea única.

1.4 Limitantes de la investigación

Teórico: La investigación, es del tipo teórica y se tiene como limitante o enmarcada dentro del Análisis funcional en Ecuaciones en derivadas parciales en Espaciós de Sobolev.

Temporal: No aplica.

Espacial: No aplica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes:

Internacional

Brezis (2010) en su libro titulado Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones estudió la ecuación de onda para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de frontera Γ

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0\ ; & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in L^2(\Omega)\ ; \ \text{en} \quad \Omega & \end{cases}$$

donde:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

designa el laplaciano con respecto a las variables espaciales, *t* es la variable tiempo y u_0, u_1, son funciones dadas. (p.213). Logrando demostrar la existencia y unicidad de solución débil, donde se consideró la función:

$$u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}.$$

Medeiros y Milla (1989) en su libro titulado Espacos de Sobolev estudiarón la ecuación de onda para Ω un abierto limitado bien regular de $\mathbb{R}^n$ en el cilindro $\mathrm{Q} = \Omega \times]0,\mathrm{T}[$ siendo $0 < \mathrm{T} < +\infty$. La frontera lateral del cilindro Q se representada por $\sum = \Gamma \times]0;\mathrm{T}[$, el problema consiste en dados $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q})$, $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ encontrar una función real $u = u(x,t)$ definida en Q, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f & \text{en} \quad Q \\ u = 0\ ; & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1\ ; & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

considerando estimativas a priori y la desigualdad de Gronwall (p.171) lograron demostrar la existencia y unicidad de la solución débil del problema.

Cerdón (2018) desarrollo de forma numérica una ecuación diferencial parcial hiperbólica: La ecuación de onda. Ciencias, 2(1), 59-65. En este trabajo de investigación se estudio la ecuación de la onda, sus condiciones de frontera y su dominio para finalmente realizar la solución numérica de esta ecuación.

Melgarejo, Gonzales, y Ramírez (2013) solucionaron la ecuación diferencial parcial de una membrana vibrante mediante Maple y MatLab. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol, 7(4), 609. En este trabajo, se presenta la solución exacta de la ecuación diferencial parcial de una membrana vibrante dependiente del tiempo y su simulación en Maple y MatLab. Esta simulación puede ser utilizada como herramienta didáctica para el estudio del fenómeno físico de propagación de ondas en una membrana circular; así mismo puede utilizarse para despertar el interés por el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones.

Nacional

Pon Quispe (2013) con su tesis titulada "Estudio de una Ecuación de onda no lineal que modela una actividad del cerebro", en la cual se estudia la ecuación de onda no lineal que modela la actividad neuronal del cerebro, determinado por el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u = a(u,p)u_t + b(u,p,p_t), & (t,x) \in [0,+\infty[\times \Omega \\ u(0,x) = u_0, u_t(0,x) = u_1 & x \in \Omega \\ u = 0, & (t,x) \in [0,+\infty[\times \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, $(n \leq 4)$, con frontera $\partial\Omega$ bien regular y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $a \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), b \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, para $\alpha \geq 1$, tiene por objetivo principal estudiar la existencia de la solución débil global del sistema dado, utilizando el método de Faedo-Galerkin, establecer su unicidad y estabilidad de la solución utilizando criterios de desigualdades integrales e inmersiones de Sobolev.

Tarmeño (2012) con su tesis titulada "Existencia y unicidad de solución y comportamiento asintótico para la ecuación de onda con condición de frontera del tipo Neumann y disipación localmente distribuido", en la cual se estudia el siguiente problema:

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in \mathrm{H}^1, u_t(0) = u_1 \in \mathrm{L}^2 & \text{en} \quad \Omega \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $0 < a_0 < a(x)$ c.s. en $w \subset \Omega$ vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$.

Determinando la existencia y unicidad de solución de la ecuación de onda con condiciones de frontera de tipo Neuman con disipación localmente distribuida, usando el método de Faedo-Galerkin. Además, analiza el decaimiento no exponencial de la energía asociado al sistema planteado.

Carbajal (2006) con su tesis titulada "Existencia y unicidad de la solución débil para una ecuación de evolución semi lineal de segundo orden", en la cual estudia una ecuación de evolución semilineal de segundo orden, para el cual considera dos casos:

El caso no lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{A}_2(.)\dfrac{dy}{dt} + \mathrm{A}_1(.)y = f(.,y) \quad \text{en} \quad (0.T) \\ \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0 \quad en\ V_1 \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(0) = \mathrm{y}_1 \ \ en\ \ H \end{cases}$$

y el caso lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{A}_2(.)\dfrac{dy}{dt} + \mathrm{A}_1(.)y = \mathrm{g}(\ .\ ) \quad \text{en} \quad (0.T) \\ \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0 \ en\ V_1 \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}(0) = \mathrm{y}_1\, en \ \ H \end{cases}$$

Su trabajo consiste en desarrollar de una manera minuciosa y detallada la demostración de la existencia, unicidad y regularidad de la solución de los problemas descritos anteriormente, haciendo uso del método de Faedo-Galerkin, y el método de la energía.

2.2. Bases teóricas:

Presentaremos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes, sus demostraciones serán omitidas por que se trata de resultados ya conocidos. Solo se citarán las referencias donde serán encontrados con sus respectivas demostraciones.

Espacio de las Distribuciones

Una distribución es una aplicación $D(\Omega) \cong \left(C_0^\infty(\Omega), \to\right)$ dotada de una topología.

Definición 2.1

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos como una distribución sobre Ω a toda forma lineal y continua con relación al límite, definido en $\boldsymbol{D(\Omega)}$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω en un espacio vectorial el cual es representado por $D'(\Omega)$, llamado el espacio de las distribuciones sobre Ω unido de la siguiente relación de convergencia. Sea $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D'(\Omega)$ y $T \in \boldsymbol{D'(\Omega)}$

diremos que $T_k \to T$ en $D'(\Omega)$ si la sucesión numérica $\{\langle T_k , \varphi \rangle\}$ converge para $\langle T , \varphi \rangle$ en $\mathbb{R}, \forall \varphi \in D(\Omega)$.

Es decir, una distribución es una aplicación:

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

tal que:

(i) $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2); \ \forall \alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

(ii) T es continua, esto es si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$ entonces:

$$\{T(\varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge para } (T(\varphi)) \text{ en } \mathbb{R} .$$

Consideremos el espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω en este espacio una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ si y solo si la sucesión $\{T_k(\varphi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ para todo φ en $D(\Omega)$.

El espacio de las distribuciones sobre Ω. Con esta noción de convergencia será denotado por $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\mapsto \langle T_u , \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Observamos que T_u esta bien definida, en efecto:

$$\left|\langle T_u , \varphi \rangle\right| = \left|\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\right| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|\,dx \leq \int_{k=sop(\varphi)} |u(x)||\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \underset{x\in k}{máx}\left|\varphi(x)\right|\int_k \left|u(x)\right| dx \equiv C(k)\,\underset{x\in k}{máx}\left|\varphi(x)\right| < \infty$$

Es evidente la linealidad de T_u, veamos la continuidad de T_u:

sea $\varphi_\gamma \to \theta$ en $D(\Omega)$, entonces $\langle T_u, \varphi_\gamma \rangle \to 0$, entonces $\left|\langle T_u, \varphi_\gamma \rangle\right| \to 0$

se tiene así:

a) Existe k_1 compacto $\subseteq \Omega \,/\, Sop(\varphi_\lambda) \subseteq k_1$, para todo γ

b) $D^\alpha \varphi_\gamma \to \theta$ uniformemente en k_1 para todo $\alpha \in N^n \cup \{\theta\}$

por lo que en particular de (b) para $\alpha = (0,0,0,...0)$, $\varphi_\gamma \to \theta$ uniformemente en k_1

$\underset{x\in k}{máx}\left|\varphi_\gamma(x)\right| \to 0$, si $\gamma \to +\infty$, luego:

$$\left|\langle T_u, \varphi_\gamma \rangle\right| = \left|\int_\Omega u(x)\varphi_\gamma(x)dx\right| \leq \underset{x\in k_1}{máx}\left|\varphi_\gamma(x)\right|\int_{k_1}\left|u(x)\right|dx \to 0$$

por tanto $T_u \in D'(\Omega)$.

Definiendo la aplicación:

$$\begin{array}{l} \phi : L^1_{LOC}(\Omega) \to D'(\Omega) \\ \qquad u \quad \to \quad T_u : D(\Omega) \;\to\; \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi \;\; \to \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

es evidente que ϕ es lineal, usando el lema de Du-Bois Raymond obtenemos que ϕ es inyectiva, afirmamos que ϕ es continua, en efecto:

Sea $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1_{LOC}(\Omega)$, $u \in L^1_{LOC}(\Omega)$ tal que $u_\gamma \to u$ en $L^1_{LOC}(\Omega)$, si $\gamma \to +\infty$, esto es para todo k $\subseteq \Omega$ compacto, se tiene $\left|u_\gamma - u\right|_{L^1_{(k)}} \to 0$, probaremos que: $\phi(u_\gamma) \to \phi(u)$ en $D'(\Omega)$, en efecto, para $\varphi \in D'(\Omega)$:

$$\langle \phi(u_\gamma) - \phi(u), \varphi \rangle = \langle T_{u_\gamma}, \varphi \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u_\gamma(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

$$= \int_{\Omega} (u_{\gamma}(x) - u(x))\varphi(x)dx \leq \int_{\Omega} \left|u_{\gamma}(x) - u(x)\right| \left|\varphi(x)\right| dx$$

$$\leq \underset{x\in k}{máx}\left|\varphi(x)\right| \int_{k=Sop(k)} \left|u_{\gamma}(x) - u(x)\right| dx \equiv C(k)\left|u_{\gamma} - u\right|_{L^1_{(k)}} \to 0$$

esto implica que podemos identificar una distribución T_u con la función $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$. En ese sentido se tiene que $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$, como $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω. Esta y toda función de $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Observación 2.1 $L^1_{Loc}(\Omega)$ es llamado el espacio de las funciones localmente integrales. Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ consideremos el funcional $T = T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$< T, \phi > = < T_u, \phi > = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx .$$

Observación 2.2 El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$) .

Observación 2.3 Las distribuciones T_u definidas por funciones $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas, por esta razón se identifica a u con las funciones y a T_u con la distribución, luego tenemos $L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$.

Definición 2.2

Una función $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ es derivable en el sentido débil en Ω si existe una función $v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_{\Omega} v(x)\varphi(\mathrm{x})dx \,; \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Derivada Distribucional

Definición 2.3

Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, se denomina derivada de orden α de *T,* a la distribución $D^{\alpha}T$ definida por:

$$< D^{\alpha}T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^{\alpha}\varphi > \,; \;\; \forall \; \varphi \in D(\Omega)$$

se sigue de la definición que cada distribución *T* sobre Ω tiene derivadas de todos los órdenes. Así las funciones $L^1_{Loc}(\Omega)$ poseen derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.

Observación 2.4

El operador $D^{\alpha} : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es lineal y continuo en el sentido de la convergencia definida en $D'(\Omega)$. En efecto

- Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; $T_1, T_2 \in D'(\Omega).$ Entonces:

$$\left\langle D^{\alpha}(a_1T_1 + a_2T_2), \varphi \right\rangle = \left(-1\right)^{|\alpha|} \left\langle a_1T_1 + a_2T_2, D^{\alpha}\varphi \right\rangle$$

$$= a_1\left(-1\right)^{|\alpha|}\left\langle T_1, D^{\alpha}\varphi \right\rangle + a_2\left(-1\right)^{|\alpha|}\left\langle T_2, D^{\alpha}\varphi \right\rangle$$

$$= a_1\left\langle D^{\alpha}T_1, \varphi \right\rangle + a_2\left\langle D^{\alpha}T_2, \varphi \right\rangle$$

$$= \left\langle a_1D^{\alpha}T_1 + a_2D^{\alpha}T_2, \varphi \right\rangle \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

luego: $D^{\alpha}(a_1T_1 + a_2T_2) = a_1D^{\alpha}T_1 + a_2D^{\alpha}T_2$

- Sea $T_k \to T$ en $D'(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Se prueba que $D^{\alpha}T_k \to D^{\alpha}T$ en $D'(\Omega)$, en efecto:

  $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle D^{\alpha}T_k,\varphi\right\rangle = \left(-1\right)^{\alpha}\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle T_k, D^{\alpha}\varphi\right\rangle = \left(-1\right)^{\alpha}\left\langle T, D^{\alpha}\varphi\right\rangle = \left\langle D^{\alpha}T,\varphi\right\rangle$ para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Entonces $D^{\alpha}T_k \to D^{\alpha}T$ en $D'(\Omega)$.

Los Espacios $L^{p}(\Omega)$

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

Definición 2.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Para $1 \leq p < \infty$ denotemos por $L^p(\Omega)$ al conjunto (de las clases) de funciones de Lebesgue medibles de *u*, tales que $|u|^p$ es una función integrable sobre Ω, que en términos de conjuntos lo denotamos por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, u \text{ es medible, } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

y su norma inducida será denotado por:

$$\|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

de este modo $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ para *p* mayor o igual a 1, es un espacio de Banach. Para el caso cuando $p = 2$ tenemos también que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert denotadas con su producto escalar y norma respectivamente:

$$\left(u,v\right) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \ ; \ u,v \in L^2\left(\Omega\right)$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}};$$

para $p = \infty$ definimos L^{∞} al conjunto (de las clases) de funciones medibles u acotadas casi siempre sobre Ω que en término de conjuntos lo denotamos por:

$$\| f \|_{L^{\infty}} = \underset{x\in\Omega}{ínf} \left\{ C > 0, \left| f\left(x\right)\right| \leq C,\ casi\ siempre\ en\ \Omega \right\}$$

en este caso el número real *C* es un mayorante esencial de *u* y denotado por:

$$A = \left\{ C \in \mathbb{R} / \left| u(x) \right| \leq C \text{ casi siempre en } \Omega \right\}$$

y definido por la norma en $L^{\infty}\left(\Omega\right)$ como:

$$\left\| u \right\|_{L^{\infty}} = \underset{x\in\Omega}{\sup \text{ess}} \left| u(x) \right|; u \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$$

Teorema 2.1 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)

Sea $\left\{u_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente casi siempre a una función *u*. Si existe una función $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $\left|u_k\right| \leq u_0$ casi siempre, $\forall k \in \mathbb{N}$ entonces *u* es integrable y se cumple lo siguiente:

$$\int_{\Omega} u = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} u_k$$

Demostración. Ver (Brezis,1989, p.54)

Proposición 2.1 (Desigualdad de Young) Sean $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $a, b > 0$ entonces:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración. Ver (Brezis,1989, p.56)

Teorema 2.2 (Desigualdad de Minkowski) Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$\left\| u + v \right\|_{L^p} \leq \left\| u \right\|_{L^p} + \left\| v \right\|_{L^q}$$

Demostración. Ver (Adams,1976, p.23)

Teorema 2.3 (Desigualdad de Hölder) Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$u, v \in L^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p} \, \|v\|_{L^q} \, .$$

Demostración. Ver (Brezis,1983, p.56)

Proposición 2.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_p \leq (\text{med}(\Omega))^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_q$$

donde $\text{med}(\Omega)$, denota la medida de Ω.

Demostración. Ver (Adams,1976, p.25)

Teorema 2.4 (Teorema de representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1 < p < \infty$, $T \in \left(L^p(\Omega)\right)'$. Entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p(\Omega)$:

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad y \quad \| v \|_{L^{p'}(\Omega)} = \|T\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'}$$

Demostración. Ver (Adams,1976, p.40)

Teorema 2.5 (Teorema de representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

Sea $T \in \left(L^1(\Omega)\right)'$ entonces existe un única $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$ se tiene:

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

y $\|v\|_\infty = \|T\|_{\left(L^1(\Omega)\right)'}$. Así $\left[L^1(\Omega)\right]^l \cong L^\infty(\Omega)$.

(Donde $\cong$ representa un isomorfismo isométrico)

Demostración. Ver (Adams,1976, p.41)

Definición 2.5 Representaremos por $L^p_{Loc}(\Omega), 1 \le p < \infty$ el espacio vectorial de las (clases) de funciones medibles $u:\Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable en Ω equipado con la norma:

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

y equipado con la familia de semi-normas:

$$\{p_k; \ k \text{ subconjunto abierto acotado de } \Omega\}$$

donde:

$$p_k(u) = \left(\int_k |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

decimos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $L^p_{Loc}(\Omega)$ converge para cero en $L^p_{Loc}(\Omega)$ si $\lim_{n\to\infty} p_k(u_n) = 0$ para todo *k* abierto acotado de Ω.
Sea $u \in L^p_{Loc}(\Omega)$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^p_{Loc}(\Omega)$. Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u en $L^p_{Loc}(\Omega)$ si $(u_n - u)$ converge para cero en $L^p_{Loc}(\Omega)$.

Lema 2.1 (Du Bois Raymond) Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ entonces $T_u = 0$ si y solamente si $u = 0$ casi siempre en Ω. Donde T_u es una distribución definida por :

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \ ; \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.10)

Proposición 2.3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \le p \le \infty$ entonces:

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$$

Demostración. Ver (Adams,1976, p.26)

Proposición 2.4 Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p_{Loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, tal que $u_k \to u$ en $L^p_{Loc}(\Omega)$, entonces $u_k \to u$ en $D'(\Omega)$.

Demostración. Ver (Adams,1976, p.27)

Lema 2.2 Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es reflexivo. Sin embargo $L^1(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$ no son reflexivos.
2. Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es separable. Sin embargo $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

Demostración. Ver (Adams,1976, p.42)

Teorema 2.6 $L^p\left(\Omega\right)$ es separable y reflexivo para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Ver (Brezis,1983, p.62)

Definición 2.6 Sea V y W espacios de Banach con $V \subseteq W$ como sub espacio vectorial (probablemente con normas diferentes). Si la aplicación de la inclusión:

$$i : V \to W$$

es continua, denotamos $V \hookrightarrow W$, decimos que V tiene inmersión continua en W. Esto es equivalente a si existe C >0 tal que:

$$\|u\|_W \leq C|u|_V\,,\ \forall u \in V$$

Noción de derivada débil

En el estudio de los problemas descritos por las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) cuyos datos iniciales no son regulares o insuficientes para poseer su derivada en el sentido clásico se hace necesario un nuevo concepto en el sentido clásico.

Observación 2.5 (Funciones de Prueba)

Un múlti-índice α de dimensión n es una n-upla de números enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, el módulo del multi-índice α será denotado por $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ representamos por D^α al operador diferencial de orden α definido por:

$$D^{\alpha}u = \frac{D^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...........\partial x_n^{\alpha_n}}$$

cuando $\alpha = 0$, definimos: $D^0\varphi = \varphi$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, bien regular. La función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, diremos que el soporte de φ, denotado por $Sop(\Omega)$, es el conjunto:

$$Sop(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, bien regular. La función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, diremos que φ tiene soporte compacto en Ω, si $Sop(\varphi)$ es un compacto de Ω.

Con $C_0^{\infty}(\Omega)$, denotamos al espacio vectorial de funciones infinitamente diferenciables en Ω con soporte compacto en Ω. Así:

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} / \varphi \text{ es infinitamente diferenciable y } \mathrm{Sop}(\varphi) \subseteq \Omega\}$$

$$D(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} / \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ y } \mathrm{Sop}(\varphi) \subseteq \Omega\}$$

Definición 2.7 Sea la sucesión $\{\varphi_{\gamma}\}_{\gamma \in N} \subseteq C_0^{\infty}(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ diremos que $\{\varphi_{\gamma}\}_{\gamma \in \mathbb{N}}$ converge a φ en $C_0^{\infty}(\Omega)$; denotando $\varphi_{\gamma} \to \varphi$ cuando $\gamma \to \infty$, si:

i) *Existe un compacto* $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi_{\gamma} - \varphi) \subset K;\ \forall \gamma \in \mathbb{N}$.

ii) $D^{\alpha}\varphi_{\gamma} \to D^{\alpha}\varphi$ uniformemente en *K*; $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3....\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, es decir:

$$\underset{x \in K}{Sop}\left|D^{\alpha}\varphi_{\gamma}(x) - D^{\alpha}\varphi(\alpha)\right| \to 0$$

Luego el espacio vectorial $C_0^{\infty}(\Omega)$, dotado de esta convergencia es llamado el espacio de las Funciones de Prueba, el cual es denotado con $D(\Omega)$.

Teorema 2.7 $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \le p < \infty$.

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.12)

Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistas en las referencias Adams, Brezis, Kesavan, Medeiros, y Rivera.

Definición 2.8 Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p \le \infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^P(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \le m,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de *u*. El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden *m* relativo al espacio $L^P(\Omega)$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m \right\}$$

para todo $m, p \in \mathbb{N}$.

Si p = 2 se denota $W^{m,2} = H^m(\Omega)$, es decir:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \le m \right\}$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{|\cdot|_{H^m(\Omega)}}$, si $H_0^m(\Omega) = H^m(\Omega)$ entonces $med(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = 0$, en consecuencia:

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) / u/_\Gamma = 0 \right\}$$

Definición 2.9 Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se tiene que:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty$$

también se tiene para $p = \infty$:

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

($D^{\alpha}u$ en el sentido distribucional)

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Definición 2.10 Sea $1 \leq p < \infty$ y $q > 1$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, representamos a $W^{-m,p}(\Omega)$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se representa como $H^{-m}(\Omega)$.

Inmersiones de Sobolev

Teorema 2.8 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces:

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega) \text{ si } m > \frac{n}{2} + k$$

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.98)

Proposición 2.5 Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ de clase C^m con frontera limitada y sea m un entero tal que $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:

a) $Si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

b) $Si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$

c) $Si \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$

siendo todas las inmersiones continúas.

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.84)

Teorema 2.9 (Teorema de Rellich Kondrachov) Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, Ω es de clase C^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

(a) Si $p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[1, p^*\right]$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

(b) Si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$,

(c) Si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$.

en los tres casos las inmersiones son compactas.

Demostración. Ver (Medeiros y Milla, 2000, p.79)

Topologías débil y débil estrella

Los conceptos de convergencia débil y convergencia débil estrella en un espacio de Banach X con norma $\|.\|_X$. Consideremos inicialmente al dual topológico $X' = L(X, \mathbb{R})$ que es también un espacio de Banach y cuya norma es denotado por:

$$\| f \|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|_X \leq 1} \left|\langle f, x\rangle\right|.$$

Además, también podemos considerar al espacio bidual de Banach $X'' = L(X', \mathbb{R})$ de *X*, cuya norma es:

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f\in X', \|f\|_{X'} \leq 1} \left|\langle \xi, f\rangle\right|.$$

Como es bien sabido, de la teoría de análisis funcional, (por ejemplo, ver H. Brezis [2]) la aplicación:

$$J : X \to X''$$

$$X \to J_x : X' \to \mathbb{R}$$

$$f \to J_x(f) = \langle f, x\rangle$$

Es un isomorfismo de X sobre $J(X)$. Esto nos permite identificar X con $J(X) \subset X''$.

Ahora para cada $f \in X'$ consideremos el funcional:

$$\varphi_f : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$$

como $f \in X'$ obtenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_f\}_{f\in X'}$. sobre estas consideraciones decimos que:

a) La topología débil $\sigma(X, X')$ en X es la topología menos fina en X en el cual son continuas todas las funciones φ_f, $f \in X'$.

b) La topología débil estrella $\sigma(X',X)$ en X' es la topología menos fina en X' en el cual son continuas todas las funciones $J_x, x \in X$.

Definición 2.11 Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge débil para $x \in X$, si $\{x_n\}$ converge a x en la topología $\sigma(X,X')$; esto es:

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \text{ para todo } f \in X'$$

en este caso denotamos $x_n \rightharpoonup x$

Definición 2.12 Diremos que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ converge débil estrella para $f \in X'$, cuando $\{f_n\}$ converge a f en la topología $\sigma(X',X)$; esto es para todo $x \in X$ tenemos:

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$$

en este caso denotamos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Definición 2.13

Un espacio de Banach X es llamado reflexivo cuando $J(X) = X''$, donde la aplicación *J* es la inyección canónica de X en X'' .

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado *V* se denomina un espacio de Hilbert de *V*, si *V* es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno.

Un espacio *E* es separable si existe un sub-conjunto $D \subseteq E$, tal que *D* es denso numerable en *E*.

Sea *E* un espacio de Banach y sea $f \in E'$, siendo E' el dual topológico de E y designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(x) = < f, x >$.

Proposición 2.6 Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión de E entonces:

(i) $x_n \to x$ débil en $\sigma(E,E')$ sí y solo si $< f, x_n > \to < f, x >, \forall f \in E'$

(ii) $x_n \to x$ fuerte en E entonces $x_n \to x$ débil en E

Demostración. Ver (Brezis,1983, p.36)

Proposición 2.7 Sea E un espacio de Banach y sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de E' entonces se tiene:

a) $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$ si y solo si $< f_n, x_n > \longrightarrow \;\; < f, x >, \forall x \in E;$

b) $f_n \longrightarrow f$ fuerte en E' entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E',E'');$

c) $f_n \longrightarrow f$ débil en $\sigma(E',E'')$ entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E',E);$

d) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y

$\|f\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|f_n\|;$

e) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, y si $x_n \longrightarrow x$ fuerte en E entonces

$< f_n, x_n > \longrightarrow < f, x >$, $\forall x \in E$

donde ($\xrightarrow{*}$) denota la convergencia débil estrella.

Demostración. Ver (Brezis,1983, p.41)

Teorema 2.10 (Teorema de Alaoglu-Bourbaki)

Sea X un espacio de Banach, entonces la bola unitaria es débil estrella compácta, es decir:

$\|u_n\|_X \leq C \Rightarrow \exists \{u_{n_i}\} \subset \{u_n\}$ y $u \in X$; $u_{n_i} \xrightarrow{*} u$ débil estrella en X

Demostración: Ver (Cavalcanti,2000, p.123)

Lema 2.3 (Lema de Gronwall) Sean $f, g : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ funciones continuas no decrecientes y c una constante $c > 0$ tal que:

$$f(t) \leq g(t) + c\int_{t_0}^{t} z(s)ds \ , \ \ \forall t \in [t_0, T]$$

entonces:

$$f(t) \leq g(t)e^{c(t-t_0)} \ , \ \forall t \in [t_0, T]$$

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.82)

Los Espacios $L^p(0,T,V)$

Sea $0 < T < \infty$ y V un espacio de Banach, una función $u :]0,T[\to V$ es llamada medible en $]0,T[$ si la función real $t \to \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V}$ es Lebesgue medible en $]0,T[$ para todo $f \in V'$ donde V' es el dual topológico de V y $\langle \ . \ \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V' y V en este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u :]0,T[\to V$, es llamada integrable en el sentido de Bochner en $]0,T[$, si u es medible en $]0,T[$ y la función real $t \to \|u(t)\|_V$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$, en este caso la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt \in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad:

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V' \times V} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V} dt \qquad \forall f \in V'$$

Si $1 \leq p < \infty$ denotaremos por $L^p(0,T,V)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u :]0,T[\to V$ medibles y tales que $t \to \|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$. Este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p=2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T,V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno:

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)} = \int_0^T \big(u(t),v(t)\big)\,dt$$

Si $p=\infty$ representaremos por $L^\infty(0,T,V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:\left]0,T\right[\to V$ que son medibles y tal que el supremo esencial $\left\{\|u(t)\|_V \,; t\in \left]0,T\right[\right\}$ es finito $L^\infty(0,T,V)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{u\in\left]0,T\right[} ess\, \|u(t)\|_V$$

Proposición 2.8 Sea V un espacio de Banach y $0<T<\infty$, entonces $L^p(0,T,V)$ es separable en el caso que V sea separable y $1\le p<\infty$

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.407)

Proposición 2.9 Sea X , Y dos espacios de Banach. Si la inmersión $X\hookrightarrow Y$ es continua. Entonces si $1\le p<q\le\infty$ la inmersión $L^p(0,T,X)\hookrightarrow L^p(0,T,Y)$ es también contínua.

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.419)

Teorema 2.11 (Lions-Aubin)

Sean B_0, B_1 y B tres espacios de Banach tales que B_0 y B_1 son espacios reflexivos además $B_0\hookrightarrow B$ con inmersión compacta y $B_0\hookrightarrow B\hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas.

Sea $W(0.T)=\left\{u\in L^p(0,T,B_0);\, u'\in L^q(0,T,B_1)\right\}$, donde $0<T<\infty\,; 1<p,q<\infty$ con la norma definida por: $\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0.T,B_0)} + \|u'\|_{L^q(0.T,B_1)}$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T,B)$ con inmersión continua.

Demostración. Ver (Lions,1969, p.57)

Lema 2.4 (Lema de Lions). Sea (u_k) una sucesión de funciones pertenecientes $L^q(Q)$; con $1 < q < \infty$. Si:

(i) $u_k \to u$ casi siempre en Q

(ii) $\|u_k\|_{L^q(Q)} \leq C$; $\forall k \in \mathbb{N}$

entonces $u_k \to u$ débil en $L^q(Q)$.

Demostración. Ver (Lions,1969, p58)

Lema 2.5 Sean X e Y dos espacios de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ si $u \in L^p(0,T;X)$ y $u' \in L^p(0,T;Y)$ entonces $u \in C([0,T];Y)$ al menos en un conjunto de medida nula en $[0,T]$.

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.407)

Lema 2.6 Sea X , B , e Y tres espacios de Banach tal que $X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y$; y sean los siguientes conjuntos:

$$W = \left\{u \in L^p(0,T;X) \,/\, u' \in L^1(0,T;Y)\right\};$$

$$W_1 = \left\{u \in L^\infty(0,T;X) \,/\, u' \in L^r(0,T;Y)\right\}$$

donde $1 \leq p < \infty, r > 1$ entonces:

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;B),\ W_1 \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];B)$$

Demostración. Ver (Zeidler,1989, p.408)

Convergencia en $L^p(0,T,V)$

Sea *V* un espacio de un espacio de Banach y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en *V*. Decimos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si existe $u \in V$, tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando $k\to\infty$ en tal caso denotaremos por $u_k \to u$.

Decimos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V , si existe $u\in V$ tal que:

$$\langle f, u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f, u\rangle_{V'\times V};\ \ \forall f\in V'$$

con inmersión compacta y continua, en este caso denotaremos por $u_k \to u$.

Por ejemplo si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^p(0,T,V)$ y $u\in L^p(0,T,V)$ se dice que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u\in L^p(0,T,V)$ si:

$$\langle f, u_k\rangle_{L^q(0,T,V)\times L^p(0,T,V')} \to \langle f, u\rangle_{L^q(0,T,V)\times L^p(0,T,V')};$$

$\forall f\in L^q(0,T,V')$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,esto significa que:

$$\int_0^T \langle f, u_k\rangle_{V'\times V}\, dt \to \int_0^T \langle f, u\rangle_{V'\times V} dt;\qquad \forall f\in L^q(0,T,V').$$

Teorema 2.12 **(Compacidad débil)** Sea *X* un espacio de Banach reflexivo. Si $B\subset X$ es limitado y compacto en la topología débil $\sigma(X,X')$, esto es cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ convergente en *X* con la topología débil $\sigma(X,X')$.

Demostración. Ver (Cavalcanti,2000, p.135)

Teorema 2.13 Sea *X* un espacio de Banach separable. Si $F\subset X'$ es limitado, entonces *F* es compacto en la topología débil estrella de $\sigma(X',X)$, esto es cualquier suseción $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset F$ posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset F$ convergente en X' con la topología débil estrella $\sigma(X',X)$.

Demostración. Ver (Cavalcanti,2000, p.138)

Distribuciones Vectoriales.

Sea V un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre $\left]0,T\right[$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0.T)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(0.T)$. Dada una distribución T su valor en φ se representa por $\langle T,\varphi\rangle$.

Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $\left]0,T\right[$, denotaremos por $D'(0.T,V)$ y sea $u \in L^p(0,T,V);\quad 1 \le p \le \infty$ definimos:

$$T_u : D(0,T) \to V \,/\, \langle T_u,\varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt$$

donde la integral está en el sentido de Bochner.

Observación 2.6

Se verifica que T_u es una distribución y están definidas por funciones $u \in L^p(0,T,V)$, $\varphi \in D(0,T)$. Luego $\varphi u \in L^1(0,T,V)$.

a) T_u es lineal y continua en $D(0,T)$

b) T_u esta unívocamente determinado por u.

Lema 2.7 Sea V un espacio de Banach si $u \in L^1(0,T,V)$ y $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$ para todo φ en $D(0,T)$ entonces $u(t) = 0$ $c.s$ en $\left]0,T\right[$.

Demostración: Ver (Zeidler,1989, p.409)

Lema 2.8 Sea X un espacio de Banach con X' sean *u*, *g* dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T,X)$. Entonces son equivalentes

a) u es c.s igual a la primitiva de *g* es decir $\exists \xi \in X$ tal que:

$$u(t) = \xi + \int_0^T g(s)ds, \qquad c.s \quad t \in [0,T]$$

b) Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds = \int_0^T g(s)\varphi(s)ds$$

c) Para todo $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}(\eta, u(t))_{X'\times X} = (\eta, g(t))_{X'\times X}$$

en el sentido distribucional sobre $]0,T[$.

Demostración. Ver (Temam,1979, p.108)

Lema 2.9 Sean V, H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso V , V' dual de $(V \hookrightarrow H \hookrightarrow V')$. Si $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$, luego tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\big(u'(t), u(t)\big)_{V'\times V}$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $[0,T]$

Demostración. Ver (Temam,1979, p.117)

Operadores lineales no limitados

Definición 2.14 (Operador A asociado a una forma bilineal)

Sean $\left(W, |\ |_W, (.,.)_W\right)$ y $\left(H, |\ |_H, (.,.)_H\right)$ dos espacios de Hilbert tales que *W* es denso en *H* con inclusión $W \hookrightarrow H$ continua y compacta. Denotaremos por $\langle\, .\, ,\, .\rangle$ a la dualidad entre W' y W . Identificando a *H* con su dual, por medio del teorema de representación de Riesz, obtenemos la siguiente cadena de inclusiones.

$$W \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow W'$$

considerando una forma bilineal y continúa $a(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$ podemos definir un operador lineal $W \to W'$ dado por:

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v);\ \forall u, v \in W$$

más aun el dominio del operador *A* está definido por:

$$D(A)=\{u\in W \ / \ Au\in H\}$$

y decimos que el operador lineal *A* está definido por la terna $\{W, H, a(.,.)\}$

si $a(.,.)$ es continua, coerciva y simétrica entonces el operador:

$$A: D(A)\subset W\rightarrow W'$$

es cerrado, no limitado, definido positivo, autoadjunto. Además, dotando el dominio $D(A)$ con la norma $\|u\|_{D(A)}=\|Au\|_H$ obtenemos así que el dominio $D(A)$ es un espacio denso en *H.*

Observación 2.7

Un ejemplo clásico de una forma bilineal satisfaciendo la definición anterior y con un producto interno $(.,.)_W$ en *W* es al considera al operador *A* dado por la terna $\{W, H, (.,.)_W\}$, entonces $A: D(A)\subset W\rightarrow W'$ es tal que:

$$(Au,v)_H=(u,v)_W \ , \ \forall u\in D(A), \ \forall v\in W$$

mediante las condiciones satisfechas por el operador *A* y usando también la inclusión $W\hookrightarrow H$ es compacta y de la teoría espectral existe una base ortonormal y completa $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de *H* y una secuencia de números reales $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq.....\leq\lambda_j... \text{ con } \lambda_j\rightarrow\infty \text{ cuando } j\rightarrow\infty$$

$$w_j\in D(A) \ \text{ y } \ Aw_j=\lambda_j w_j \ , \ \forall j\in\mathbb{N}$$

y cumple las siguientes relaciones:

$$\left(w_i,w_j\right)_H=\delta_{ij} \quad \text{y} \quad a\left(w_i,w_j\right)_H=\lambda_i\delta_{ij} \ ; \ \forall i,j\in\mathbb{N}$$

donde δ_{ij} denota el delta de Kronecker.

Definición 2.15 (Potencias fraccionarias del operador *A*) Sea el número real $\alpha>0$ y $A^\alpha : D(A^\alpha)\subset W\rightarrow W'$ es un operador lineal no limitado, definido positivo, auto adjunto e inyectivo, cuyo dominio $D(A^\alpha)$ es denso en *W*, con producto interno y norma respectivamente:

$$\left(u,v\right)_{D(A^{\alpha})}=\left(A^{\alpha}u,A^{\alpha}v\right)_{H} \quad \text{y} \quad \left\|u\right\|_{D(A^{\alpha})}=\left\|A^{\alpha}u\right\|_{H},$$

obtenemos que $D(A^{\alpha})$ es un espacio de Hilbert. Más aun $D(A^{-\alpha})$ es definido como el dual de $D(A^{\alpha})$ y con esto el operador A^{α} puede ser extendido como un isomorfismo de H en $D(A^{-\alpha})$. En $D(A^{-\alpha})$ consideramos también el producto interno dado anteriormente sustituyendo a α por $-\alpha$.

Usando nuevamente la inclusión $W \hookrightarrow H$ compacta, se puede definir A^{α}, para $\alpha > 0$ en términos de su base $\left\{w_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ por:

$$A^{s}u=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\alpha}\left(u,w_j\right)_H w_j \ ; \ \forall u\in D(A^{\alpha}),$$

donde:

$$D\left(A^{\alpha}\right)=\left\{u\in W \ / \ \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\alpha}\left|\left(u,w_j\right)_H\right|^2<\infty\right\}$$

en este caso la norma en $D(A^{\alpha})$ se denota:

$$\left\|u\right\|_{D(A^{\alpha})}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\alpha}\left|\left(u,w_j\right)_H\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ; \ \forall u\in D(A^{\alpha})$$

además $D(A^{-\alpha})$ es el complemento de H para la norma $\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\alpha}\left|\left(u,w_j\right)_H\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y $A^{-\alpha}$ es definido de igual modo con $-\alpha$ en lugar de α.

Un resultado para operadores con potencia fraccionarias es el siguiente.

Lema 2.10

Sea $\alpha\geq 0$ y $\beta>0$ entonces $D\left(A^{\alpha+\beta}\right)\hookrightarrow D\left(A^{\alpha}\right)$ con inmersión compacta.

Demostración. Ver (Medeiros y Milla,2000, p.82)

Observación 2.8 También en particular tenemos:

i) $V = D(A^{1/2}) \hookrightarrow H$

ii) $(Au,u) = (A^{1/2}u, A^{1/2}u) = \left|A^{1/2}u\right|_H^2 = |u|_V^2$

Para obtener la solución del problema aproximado, utilizado en el capítulo siguiente, necesitaremos dos resultados a seguir.

Definición 2.16 (Prolongamiento de Soluciones)

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre Ω si:

(i) $f(t,x)$ es medible en *t* para cada x fijo

(ii) $f(t,x)$ es continua en *x* para casi toda *t* fijo

(iii) Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, existe una función real $m_K(t)$ integrable tal que:

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t,x) \in K$$

Teorema 2. 14 (Teorema de Caratheodory)

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Entonces existe una solución de (*) en $x(t)$ sobre algún intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$

Demostración. Ver (Coddington y Levinson,1955, p.43)

Teorema 2.15

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado y conexo, tal que *f* satisface sobre *D* las dos primeras condiciones de Caratheodory y existe una función integrable *m*(*t*), tal que $|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m(t),\ \forall (t,x) \in D.$ Sea φ una solución de (*) sobre el intervalo abierto $\left]a,b\right[$ entonces:

a) Existen $\varphi(a+0),\ \varphi(b-0)$

b) Si $(b, \varphi(b-0) \in D$, entonces φ puede ser prolongado hasta $\left]a,b+\delta\right]$ para algún $\delta > 0$. De manera análogo se procede para *a*

c) $\varphi(t)$ puede ser prolongado hasta un intervalo $\left]\gamma,w\right[$ tal que $\left(\gamma,\varphi(\gamma+0)\right),\left(w,\varphi(w-0)\right) \in \partial D$ (∂D es la frontera de *D*)

d) Si *f* puede a extenderse a $\bar{D}$ sin que ella pierda sus propiedades, entonces $\varphi(t)$ puede ser prolongada hasta un intervalo $\left[\gamma,w\right]$ tal que $\left(\gamma,\varphi(\gamma+0)\right),\left(w,\varphi(w-0)\right) \in \partial D$

Demostración. Ver (Coddington y Levinson,1955, p.59)

Corolario 2.1 Sea $D = \left[0.T\right] \times B$, *T* finito > 0, $B = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x|_{\mathbb{R}^n} \leq b,\ b > 0\}$, tal que $|x_0|_{\mathbb{R}^n} \leq b$ y donde *f* cumple con las condiciones del teorema 2.15. Sea $\varphi(t)$ una solución de:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

supongamos que en cualquier intervalo *I*, donde $\varphi(t)$ está definido, se tiene $|\varphi(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq M, \forall t \in I, M$ independiente de I y $M < b$ entonces φ posee un prolongamiento hasta $[0,T]$.

Demostración. Ver (Coddington y Levinson,1955, p.60)

2.3 Conceptual

La perturbación es todo fenómeno que modifica o altera las propiedades de un sujeto (Asinel-Unesa, 1992, p.34). En el campo de las ciencias, la física se encarga de la teoría de perturbaciones, siendo desarrollado desde el siglo XIX con bastante auge.

Abstractacción (Nicolescu, 1996, p.23), afirma que la abstracción hace parte integral de la realidad, la misma ecuación matemática hace surgir infinitas formas que germinan en más ecuaciones o en las series de números. En nuestra investigación analizamos la perturbación de una ecuación abstracta de onda, apoyándonos con la teoría del análisis funcional, y las ecuaciones Diferenciales Parciales de evolución de segundo orden.

Dadas las condiciones del problema, en el sentido débil, los espacios más adecuados para analizar nuestra ecuación fueron los espacios de Sobolev (Brezis,1983, p.44). Mediante el método de Faedo - Galerkin (Coddington,1955, p.137), el teorema de Caratheodory (Medeiros y Mello,1989, p.72), las hipótesis sobre la función f, los operadores A, L y las condiciones iniciales, obtenemos la existencia de la solución. Con el Lema de Gronwall (Zeidler,1989, p.82), probaremos la unicidad de la solución.

2.4 Definición de términos básicos

Definición (Espacios de Hilbert)

Es un espacio normado y completo cuya norma es inducida por un producto interno. (Brezis,1983)

Definición (Espacios de Banch)

Es un espacio normado y completo es decir, un espacio normado donde toda sucesión de cauchy es convergente en algún punto de dicho espacio. (Lions,1969)

Definición (Subconjunto denso)

Dado un espacio normado E, un sub conjunto A de E es denso, si para todo x que pertenece a E y todo real $\varepsilon > 0$, existe un punto y que pertenece a A tal que $\|x - y\|_E \leq \varepsilon$. (Brezis,1983)

Definición (Espacio separable)

Un espacio separable es aquel espacio que contiene un subconjunto denso y numerable. (Brezis,1983)

Definición (Espacio reflexivo)

Un espacio reflexivo es aquel espacio de Banach que coincide con su bidual. (Brezis,1983)

Definición (Operador de rango finito)

Se dice que un operador T es de rango finito si dim R(T) < ∞. Es claro que todo operador continuo de rango finito es compacto. (Kesavan,1989)

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis General

Existe única solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden.

Hipótesis Específicas

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces se garantiza que el problema abstracto (P) es un problema general que engloba diferentes modelos.

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces existe solución del problema (P).

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces existe solución única del problema (P).

3.2 Definición conceptual de variables

Variables independientes

- Variable espacio-temporal: $(x,t) \in \Omega \times]0,T[$
- Espacios funcionales: $D(\Omega), D'(\Omega), L^p(\Omega), L^p(0,T,V), H^m(\Omega)$.

Variable dependiente: $u(x,t)$

La función $u(x,t)$ representa el desplazamiento, presenta dependencia respecto a la variable independiente. Representa los cambios en la longitud, en el instante t causado por la vibración.

3.3 Operacionalización de la variable

$u = u(x,t)$ **:** Función desplazamiento

Variable	Dimensiones	Indicadores
u	Existencia	.Método de Faedo-Galerkin
	Unicidad	Técnica de contradicción con la desigualdad de Gronwall.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación es de tipo básica, pura o fundamental, no experimental, cuyo diseño es Longitudinal, debido a que nos centramos en demostrar la existencia, unicidad de la solución del problema abstracto (P) en ecuaciones de derivadas parciales de evolución de segundo orden.

4.2 Método de investigación

Teniendo en consideración lo planteado y/o descrito en el proyecto, el método utilizado en nuestra investigación es el método del tipo deductivo–inductivo, siendo lo más exhaustivo posible en cada una de las demostraciones.

4.3. Población y muestra

Por ser un trabajo matemático teórico abstracto no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro del conjunto de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de tipo hiperbólico.

4.4. Lugar de estudio y período de desarrollo

El trabajo se ha realizardo en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la realización de nuestro trabajo de tesis se revisará bibliografía especializada y con la Formulación Variacional de Problemas coleccionamos los datos establecidos para nuestro problema abstracto (P) usando la técnica deductiva, mediante la solución de ecuaciones en derivadas parciales.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la característica del trabajo no se realiza ningún análisis y procesamiento de datos, por ser un trabajo no experimental.

V. RESULTADOS

Existencia y Unicidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto acotado, con frontera bien regular Γ, con $T > 0$ un número real en $Q = \Omega \times]0,T[$ consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times \left]0,T\right[\\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times \left]0,T\right[\\ u(0) = u_0; \quad u'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Hacemos las siguientes suposiciones:

(H_1) La función: $f \in L^2(0,T;H)$

(H_2) $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}$, donde: $\mathcal{H} = V \times H$ equipado con la siguiente norma

$$\left|(u,v)\right|_{\mathcal{H}}^2 = |u|_V^2 + |v|_H^2 = \left|A^{1/2}u\right|_H^2 + |v|_H^2$$

donde $V = D(A^{1/2})$, además $D(A) = W \hookrightarrow V = D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$

(H_3) A y L son operadores tales que:

i. $A : D(A) \subset W \to [D(A)]^{-1} \subset W'$ donde A es un operador lineal, simétrico, coercivo, autoadjunto, no acotado con $(Av,v) \geq \alpha |v|^2$.

ii. $a(u,v) = (Au,v) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)$ para todo $u,v \in V$

iii. $L : \mathrm{D}(L) \subseteq H \to H$, es un operador lineal, continuo y verifica que: $\left(Lu,u\right)_H \geq 0$, para todo $u \in H$.(Esto indica que L es monótono).

Observe que L induce una forma bilineal b continua en $H \times H$,

dada por $b(u,v) = (Lu,v)_H$ para todo $u,v \in H$.

En esta sección, demostraremos la existencia y unicidad de la solución débil del problema (5.1) considerando u_0 y u_1 suficentemente regulares.

Definición 5.1 Sea $I=[0,T]$, con $T>0$ diremos que una función $z := (u,u') \in C(I,\mathcal{H})$ es una solución débil para el problema (5.1) en el intervalo *I*, si $z(0) := (u_0,u_1) \in \mathcal{H}$ y

$$\frac{d}{dt}(u',v) + (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v) + b(u,v) = (f,v)$$

para todo $v \in D(A^{1/2})$.

Teorema 5.1

Asumiendo las supociones (H_1), (H_2) y (H_3) entonces el problema (5.1) posee una única solución débil tal que:

$$(u,u') \in C([0,T],\mathcal{H});\ \forall T>0$$

satisfaciendo:

$$u \in L^{\infty}(0,T;D(A^{\frac{1}{2}})),\ u' \in L^{\infty}(0,T;H) \text{ y } u'' \in L^{\infty}(0,T;(D(A))')$$

Demostración:

Para probar la existencia de la solución aplicaremos el Método de Faedo Galerkin.

Problema Aproximado

Utilizamos el teorema espectral para proyectar el problema en estudio a espacios de dimensión finita, obteniendo un problema más simple que tendrá solución garantizada por el teorema de Caratheodory.

El teorema espectral para operadores auto-adjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bien regular de $V = D(A^{1/2})$ constituidas por las auto-funciones del operador laplaciano A tal que:

$$\left| \begin{array}{l} Aw_j = \lambda_j w_j ; \\ w_j \big|_\Gamma = 0 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

donde $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son los correspondientes autovalores del operador A tal que

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le .... \le \lambda_j \le ..... \;\; y \;\; \lambda_j \to \infty \;\; cuando \;\; j \to \infty$$

para cada *m* denotamos por $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ el espacio generado por las m-primeras auto-funciones del sistema $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, queremos encontrar una función u_m tal que:

$$\begin{array}{l} u_m : [0, T_m[\to \; V_m \subset V \\ \quad t \quad \to \quad u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \end{array} \tag{5.3}$$

donde las funciones $g_{im}(t)$ son funciones reales definidas en algún intervalo $[0, t_m)$ y que satisface las condiciones iníciales del siguiente problema aproximado:

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_j) + (A^{\frac{1}{2}} u_m(t), A^{\frac{1}{2}} w_j) + b(u_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \quad \forall w_j \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \qquad\qquad en \quad D(A^{\frac{1}{2}}) \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \qquad\qquad en \quad H \end{cases} \tag{5.4}$$

este sistema tiene solución sobre $[0, T_m[$ por medio del teorema de Caratheodory. En efecto para cada término tenemos:

$$(a_1) \;\; (u_m''(t), w_j) = (\sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t) w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t)(w_i, w_j) = g_{jm}''(t)$$

$$(a_2) \quad (A^{\frac{1}{2}} u_m(t), A^{\frac{1}{2}} w_j) = (A \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(A w_i, w_j) = \lambda_j g_{jm}(t)$$

$\left(a_3\right) \quad b(u_m(t), w_j) = (Lu_m(t), w_j) = (L\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(Lw_i, w_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) b(w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} g_{im}(t)$$

donde $b_{ij} = b(w_i, w_j)$

$\left(a_4\right) \quad (f(t), w_j) = f_j$

para todo $1 \le i\,, \quad j \le \mathrm{m}$

y tomandoen cuenta (a_1), (a_2), (a_3), y (a_4) se tiene:

$$g''_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} g_{im}(t) = f_j \;, \quad i, j = 1,2,3,\ldots,m \tag{5.5}$$

Para dotar de adecuados datos iniciales al problema (5.1), tenemos en cuenta que el conjunto $\{w_j\}_{j\ge 1}$, es una base Hilbertiana de V, $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = V$ entonces dado $u_0 \in V$, existe una sucesión $\{u_0\}_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_m$, tal que $u_{0m} \to u_0$ en V luego:

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{im}(0) w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{im} w_j = u_{0m} \,,$$

entonces podemos hacer:

$$u_m(0) = (\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{mm}) = g_{0m} \in \mathbb{R}^m \,.$$

Análogamente existe una sucesión $\{u_1\}_{m\in\mathbb{N}} \subset V_m$, tal que $u_{1m} \to u_1$ en H, luego:

$$u'_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} d_{jm}(0) w_j = u_{1m}$$

como u_{0m} y $u_{1m} \in V_m$, tal que $u_{0m} \to u_0$ converge en V y $u_{1m} \to u_1$ converge en *H*, luego haciendo:

$$g_{jm}(0) = c_j \quad \text{y} \quad g'_{jm}(0) = d_j \tag{5.6}$$

de (5.5) y (5.6) tenemos:

$$\begin{cases} g''_{jm}(t)+\lambda_j g_{jm}(t)+\sum_{i=1}^{m} b_{ij} g_{im}(t)= f_j(t) \\ g_{jm}(0)=c_j \\ g'_{jm}(0)=d_j \end{cases} \tag{5.7}$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., m$, luego (5.7) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con *m* incógnitas tal que:

$$\begin{array}{l} g''_{1m}(t)+\lambda_1 g_{1m}(t)+\sum_{i=1}^{m} b_{i1} g_{1m}(t)= f_1 \\ g''_{2m}(t)+\lambda_2 g_{2m}(t)+\sum_{i=1}^{m} b_{i2} g_{2m}(t)= f_2 \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\ .g''_{mm}(t)+\lambda_m g_{mm}(t)+\sum_{i=1}^{m} b_{im} g_{mm}(t)= f_m \end{array} \tag{5.8}$$

y ordenando matricialmente obtenemos:

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} +$$

$$+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & & b_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \tag{5.9}$$

luego denotando:

$$G(t)=\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad , \quad M=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{5.10}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & & b_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m}, \quad h(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \tag{5.11}$$

luego el sistema (5.10), (5.11) en (5.9) se tiene:

$$G''(t) + (M+B)G(t) = h(t) \tag{5.12}$$

por otro lado:

1. Suponiendo que $u_m(0) = u_{0m}$, como $u_0 \in V$, entonces:

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j \quad \text{y} \quad u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \left(u_0, w_j\right) w_j$$

de donde tenemos que:

$$g_{jm}(0) = (u_0, w_j) \ ; \quad 1 \le j \le m$$

2. Suponiendo que $u'_m\left(0\right) = u_{1m}$, como $u_1 \in V$, entonces:

$$u'_m\left(0\right) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}\left(0\right) w_j \quad \text{y} \quad u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \left(u_1, w_j\right) w_j$$

de donde tenemos que:

$$g'_{jm}(0) = (u_1, w_j) \ ; \ 1 \le j \le m$$

luego:

$$G(0) = \begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \end{bmatrix}_{m\times 1} = G_0 \qquad \text{y} \qquad G'(0) = \begin{bmatrix} g'_{1m}(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{m\times 1} = G_1$$

luego obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} G''(t) = h(t) - (M+B)G(t) \\ G(0) = G_0 \ ; \qquad G'(0) = G_1 \end{cases}$$

también podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{cases} G'(t) = \overline{0}.G(t) + I.G'(t) \\ G''(t) = h(t) - (M+B)Y(t) \end{cases} \tag{5.13}$$

ahora haciendo:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ G'(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(M+B) & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m},$$

y
$$Y(0) = \begin{bmatrix} G(0) \\ G'(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}_{2m\times 1} = Y_0 \tag{5.14}$$

entonces de (5.13) y (5.14) se tiene:

$$\begin{cases} Y'(t) = CY(t) + H(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{5.15}$$

ahora probemos que el sistema (5.15) satisface las condiciones del teorema de Caratheodory. Entonces sí: $F : R \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que $R \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2m}$, donde $R = [0,T]\times B$, $T > 0$, T finito y sea:

$$B = \{Y \in \mathbb{R}^{2m}, \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C_R\,;\ C_R > 0\}$$

también $Y_0 \in B$, por otro lado:

$$\begin{aligned} F : \left[0,T\right]\times\mathbb{R}^{2m} &\to \mathbb{R}^{2m} \\ \left(t,Y\right) &\to F\left(t,Y\right) = CY + H \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde $Y = \left(g, g'\right) \in \mathbb{R}^{2m}$.

Luego se sigue que:

i. $F(t,Y)$ es medible en *t*, para cada *Y* fijo. En efecto:

   Si fijamos *Y*, tenemos que *Y*, *H* y *C* no dependen de t. En general $F(t,Y)$ no depende de t entonces *F* es medible en $t \in \left]0,T\right[$.

ii. $F(t,Y)$ es continua en *Y* para cada t fijo. En efecto:

   a) Si *t* es fijo entonces F es continua en Y. Así: Sea $Y = \left(g, g'\right) \in \mathbb{R}^{2m}$, luego consideramos $Y_k = \left(g^k, g'^k\right) \in \mathbb{R}^{2m}$ $\forall g^k, g'^k \in \mathbb{R}^m$, tal que $Y_k = \left(g^k, g'^k\right) \to \left(g, g'\right)$; $k \to \infty$, esto implica que $g^k \to g$ cuando

$k \to \infty$ siendo $g^k = (g_{1m}^k, \ldots\ldots, g_{mm}^k)$ y $g = (g_{1m}, \ldots\ldots g_{mm})$; se sigue también para cada elemento $g_{im}^k \to g_{im}$ en $\mathbb{R}$; $k \to \infty$ $\forall i = 1, 2\ldots, m$, luego se tiene $\sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_{im}^k(t) \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_{jm}(t)$ y del mismo modo tenemos $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} g_{im}^k(t) \to \sum_{i=1}^{m} b_{ij} g_{jm}(t)$ cuando $k \to \infty$. Así tenemos:

$$C\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{1m}^k(t) \\ \vdots \\ g_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \xrightarrow{k\to\infty} C\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2mx1} \tag{5.17}$$

b) H es continua en Y: Debido a la regularidad de la base $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se sigue que

$$f_j^k := (f^k(t), w_j) \xrightarrow{k\to\infty} (f(t), w_j) := f_j$$

y de la hipótesis sobre f tenemos:

$$C\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (f^k(t), w_1) \\ \vdots \\ (f^k(t), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times1} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (f(t), w_1) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix}_{2m\times1} \tag{5.18}$$

c) Para cada compacto K en D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que:

$$\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le I_K(t) \quad \forall (t,Y) \in R$$

En efecto, como $Y \in D$, tenemos $\|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le C_R$, entonces:

$$\|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le \|CY + \mathrm{H}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le |C| \, \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\mathrm{H}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \tag{5.19}$$

Luego usando el factor de que $\text{proj}_{\mathbb{R}^{2m}} R$ es un compacto de $\mathbb{R}^{2m}$ e $Y \in \text{proj}_{\mathbb{R}^{2m}} R$ también se deduce que $\text{proj}_{\mathbb{R}^{m}} R$ es un compacto de $\mathbb{R}^{m}$ siendo $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$, $g' = (g'_1, g'_2, ..., g'_m) \in \text{proj}_{\mathbb{R}^{m}} R$ entonces existe una constante C_R tal que $\|g\|_{\mathbb{R}^m} \le C_R$, $\|g'\|_{\mathbb{R}^m} \le C_R$ y como $Y \in G$ deducimos que $\forall i = 1, ..., m$ tenemos:

(i) $\|Y\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} = \sum_{i=1}^{m} \left[|g_{im}|^2 + |g'_{im}|^2 \right] \le C_R^2 \Rightarrow |g_{im}| \le C_R$, $|g'_{im}| \le C_R$; $\forall i = 1, ..., m$

(ii) $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_j ; \quad 1 \le j \le m\}$

(iii) $\bar{b} = \max\{b_{ij} ; \quad 1 \le i, j \le m\}$

y como $(w_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ entonces luego de (i) y (ii) se tienen:

$a)$ $\|CY\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \le |\bar{b} + \bar{\lambda}| \|Y\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \le b_\lambda C_R$, donde: $b_\lambda = |\bar{b} + \bar{\lambda}|$

$b)$ $\|\mathrm{H}\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} = \left(\sum_{j=1}^{m} \left| (f, w_j) \right|^2 \right)^{1/2}$ dado que f es continua, también se tiene:

$$\|\mathrm{H}\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \le \left(\sum_{j=1}^{m} \|f\|_2 \|w_j\|_2 \right)^{1/2} \le K \|f\|_2 \left(\sum_{j=1}^{m} \|f\|_2 \|w_j\|_2 \right)^{1/2} \le KC_R \qquad (5.20)$$

luego de (5.19) y (5.20) tenemos:

$$\|F(t, Y)\| \le b_\lambda C_R + KC_R = m_k(t) \qquad (5.21)$$

Siendo $m_K(t)$ una función real integrable sobre $\text{proj}_t R \subseteq [0, T_m]$ entonces concluimos que (5.21) satisface las condiciones de Caratheodory. Así tenemos que existe $Y(t)$ una solución definida en $[0, T_m[$, $0 < t < T_m$, siendo $Y(t)$ absolutamente continua y derivable en casi siempre en $[0, T_m[$. Luego las funciones $g_{im}(t), g'_{im}(t)$ con

$i=1,2,\ldots,m$, son soluciones locales del problema aproximado (5.4) (sistema E.D.O) en $[0,T_m[$. Consecuentemente, para cada $m\in\mathbb{N}$ el problema aproximado posee una solución local $u_m(t)$ en algún intervalo $[0,T_m[$ con $0<t<T_m$.

Estimativa a priori

La estimativa que determinaremos nos permitirán extender las soluciones locales $u_m(t)$ a el intervalo $[0,T]$, para cualquier $T>0$ dado. Además, la estimativa a priori me posibilitará de extraer una subsucesión (de soluciones) convergentes para una función del cual será candidata a solución débil, del problema original.

Estimativa a Priori I

Multiplicando a (5.4) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de *j =1* hasta *j = m* se tiene:

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)+(A^{1/2}u_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)A^{1/2}w_j)+(Lu_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)=$$

$$=(f(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j) \qquad (5.22)$$

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)+(A^{\frac{1}{2}}u_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)A^{\frac{1}{2}}w_j)+b(u_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)=$$

$$=(f(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+(A^{\frac{1}{2}}u_m(t),A^{\frac{1}{2}}u'_m(t))+b(u_m(t),u'_m(t))=(f(t),u'_m(t))$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|_H^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A^{\frac{1}{2}}u_m(t)\right|_H^2=(f(t),u'_m(t))_H-(Lu_m(t),u'_m(t))_H \qquad (5.23)$$

luego, utilizando las desigualdades de Holder, Young adecuadamente y teniendo en cuenta que $D(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow H$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 \right] \leq 2 |f(t)|_H |u'_m(t)|_H + 2C|L||u_m(t)|_H |u'_m(t)|_H \qquad (5.24)$$

$$\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 \right] \leq |f(t)|_H^2 + |u'_m(t)|_H^2 + |L|^2 \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 + C^2 |u'_m(t)|_H^2$$

donde C es constante de inmersión, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 \right] \leq |f(t)|_H^2 + C_0 \left(|u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 \right) \qquad (5.25)$$

donde $C_0 = \max\left\{1, C^2, |L|^2\right\}$, luego haciendo:

$$E_m(t) = |u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2$$

integrando (5.25) de 0 a t y teniendo en cuenta lo anterior se tiene:

$$E_m(t) \leq \int_0^t |f(t)|_H^2 \, dt + E_m(0) + C_0 \int_0^t E_m(t) dt, \qquad \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}] \qquad (5.26)$$

por otro lado, de la hipótesis sobre f y de las condiciones iniciales se sigue:

- $u_m(0) = u_{0m} \to u_0 = u(0)$ en $D(A^{\frac{1}{2}})$, esto implica $|u_{0m}|_V \to |u_0|_V \Rightarrow |u_{0m}|_V \leq C_1$
- $u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 = u'(0)$ en H esto implica $|u_{1m}|_H \to |u_1|_H \Rightarrow |u_{1m}|_H \leq C_2$
- Así mismo teniendo en cuenta que $D(A^{1/2}) \hookrightarrow H$ entonces se deduce que:

$$|u_{0m}|_H \leq c_3 |u_{0m}|_V \leq c_4$$

ahora de los ítems anteriores y la hipotesis sobre f se tiene de (5.26):

$$E_m(t) \leq C_1 + C_0 \int_0^t E_m(t)dt \tag{5.27}$$

luego aplicando el lema de Gronwall en (5.27) tenemos que:

$$E_m(t) = |u'_m(t)|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}} u_m(t) \right|_H^2 \leq C_2 \tag{5.28}$$

esto implica que:

$$\left|(u_m(t), u'_m(t))\right|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \tag{5.29}$$

en consecuencia se tiene entonces:

$$\begin{aligned} &\{u'_m\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;H) \\ &\{u_m\} \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}})) \end{aligned} \tag{5.30}$$

Pasaje al límite

Convergencia de las soluciones aproximadas

De (5.30) existe una subsucesión $\{u_m\}$ que la seguimos denotando de la misma manera tal que:

$$\begin{aligned} &u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ en } L^\infty(0,T;H); \\ &u_m \xrightarrow{*} u \text{ en } L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}})) \end{aligned} \tag{5.31}$$

luego se tiene de (5.31) que $\{u_m\}_{m \in N}$ también esta acotada en el siguiente espacio:

$$W_1 = \left\{ u \in L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}));\ u' \in L^2(0,T;H) \right\}$$

definido con la siguiente norma:

$$|u|_{W_1} = |u|_{L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))} + |u'|_{L^2(0,T;H)}$$

y como $D(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow H$, luego usando el teorema (Lions - Aubin) se tiene que $W_1 \hookrightarrow L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$. Por lo tanto:

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$$

se sigue entonces:

$$\left|A^{\frac{1}{2}}u_m - A^{\frac{1}{2}}u\right|_H \to 0 \text{ casi siempre en } [0, T], \tag{5.32}$$

también por continuidad del operador L se tiene que:

$$\left|Lu_m - Lu\right|_H \to 0 \text{ casi siempre en } [0, T] \tag{5.33}$$

por lo tanto, se tiene que u_m, u, u'_m y $u' \in L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$ y por Lema 2.5 resulta que $u_m, u \in C([0,T];D(A^{\frac{1}{2}}))$ por lo tanto de (5.31) se deduce que

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad C([0,T];D(A^{\frac{1}{2}})) \tag{5.34}$$

con estas convergencias podemos pasar al límite en el problema aproximado (5.4) y asi obtener solución débil para el problema (5.1). Para lograr este objetivo tenemos que considerar una función de prueba $\theta \in D(0,T)$ y luego multiplicando (5.4) por θ e integrando sobre $(0,T)$ se tiene:

$$\int_0^T \left\{(u''_m(t), w_j) + (A^{\frac{1}{2}}u_m(t), A^{\frac{1}{2}}w_j) + b(u_m(t), w_j) - (f(t), w_j)\right\}\theta(t)dt = 0$$

desarrollando e integrando se tiene:

$$-\int_0^T (u'_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \left\{(A^{\frac{1}{2}}u_m(t), A^{\frac{1}{2}}w_j) + b(u_m(t), w_j) - (f(t), w_j)\right\}\theta(t)dt = 0$$

también:

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \left\{(A^{\frac{1}{2}}u_m(t), A^{\frac{1}{2}}w_j) + b(u_m(t), w_j) - (f(t), w_j)\right\}\theta(t)dt = 0$$

Verificando para cada término.

$* \ (u''_m(t), v) \to (u''(t), v)$ en $D(0,T)$ para cada $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$

Se identifica a $L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$ como un subespacio de $L^1(0,T;(D(A^{\frac{1}{2}}))')$ de este factor se sabe que $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$ entonces se tiene;

$$(u'_m, w) \to (u', w), \quad \forall w \in L^\infty(0,T;(D(A^{\frac{1}{2}}))')$$

también:

$$\int_0^T (u'_m(t), w)dt \to \int_0^T (u'_m(t), w)dt \quad \forall w \in L^\infty(0,T;(D(A^{\frac{1}{2}}))')$$

en particular: $w(t) = v\theta(t) \quad \theta \in D(0,T); \quad v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ se sigue:

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt$$

luego se tiene:

$$(u'_m(t), v) \to (u'(t), v) \quad \text{en} \quad D'(0,T), \forall v \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

por lo tanto:

$$(u''_m, v) = \frac{d}{dt}(u'_m, v) \to \frac{d}{dt}(u', v) = (u'', v) \quad \text{en} \quad D'(0,T), \quad \forall v \in D(A^{\frac{1}{2}}) \tag{5.35}$$

$* \ (A^{\frac{1}{2}} u_m(t), v) \to (A^{\frac{1}{2}} u(t), v)$ en $D(0,T)$ para cada $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$

se sabe que $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))$ entonces se tiene:

$$\left(A^{\frac{1}{2}} u_m, w \right) \longrightarrow \left(A^{\frac{1}{2}} u, w \right), \quad \forall w \in L^1(0,T,H)$$

también:

$$\int_0^T (A^{\frac{1}{2}} u_m(t), w)dt \to \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} u(t), w)dt$$

para todo $w \in L^1(0,T;H)$, en particular: $w = \theta v$ tal que

$\theta \in L^1(0,T), \forall v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ se sigue:

$$\int_0^T (A^{\frac{1}{2}}u_m(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}u(t),v)\theta(t)dt$$

luego se tiene:

$$(A^{\frac{1}{2}}u_m,v) \to (A^{\frac{1}{2}}u,v) \text{ en } L^1(0,T)\,,\ \forall v \in D(A^{\frac{1}{2}}) \qquad (5.36)$$

con el mismo procedimiento y la salvedad de que L es lineal y continuo se tiene:

$$(Lu_m,v) \to (Lu,v) \qquad (5.37)$$

en $D'(0,T)$ para cada $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

Por lo tanto, cocluimos usando los límites anteriores que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T (A^{1/2}u(t),A^{1/2}v)\theta'(t)dt + \int_0^T (Lu(t),v)\theta'(t)dt$$

$$= \int_0^T (f(t),v)\theta'(t)dt$$

por lo tanto se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + (A^{\frac{1}{2}}u(t),A^{\frac{1}{2}}v) + (Lu(t),v) = (f(t),v) \qquad (5.38)$$

en $D'(0,T)$ y para todo $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

Luego la solución del problema (5.1) para $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}$ está en la clase:

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}})) \\ &u' \in L^\infty(0,T;H) \end{aligned} \qquad (5.39)$$

Por otro lado, podemos identificar H con su dual H' y en general por medio del teorema de representación de Riesz tenemos la siguiente cadena de inmersiones:

$$D(A) \hookrightarrow D(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow (D(A^{\frac{1}{2}}))' \hookrightarrow (D(A))'$$

luego se tiene:

$$-\left\langle \int_0^T u'(t)\theta'(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^T Au(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^T Lu(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V}$$

$$=\left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} \quad (5.40)$$

integrando por partes el primer factor se tiene:

$$\left\langle \int_0^T u''(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^T Au(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^T Lu(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V}$$

$$=\left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} \quad (5.41)$$

para todo $w \in D(A)$ donde la notación $\langle .,. \rangle$ significa la notación de dualidad $\langle .,. \rangle_{(D(A))'\times D(A)}$ del cual se concluye que:

$$u'' + Au + Lu = f \text{ en } D'(0,T;(D(A))') \quad (5.42)$$

luego de lo anterior y las inclusiones se tiene:

- Au y $Lu \in L^\infty(0,T;D(A))')$
- $u' \in L^\infty(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}))') \hookrightarrow L^\infty(0,T;D(A))')$
- $f \in L^\infty(0,T;(D(A^{\frac{1}{2}}))') \hookrightarrow L^\infty(0,T;(D(A))')$

luego como $L^\infty(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ y de los ítems anteriores se concluye que:

$$u'' + Au + Lu = f \text{ en } L^2(0,T;(D(A))') \quad (5.43)$$

por lo tanto, se concluye que:

$$\begin{aligned} &u \in L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}})) \\ &u' \in L^\infty(0,T;H) \\ &u'' \in L^2(0,T;(D(A))') \end{aligned} \quad (5.44)$$

y del Lema 2.6, la inmersión $H' \hookrightarrow (D(A))'$ tenemos que para:

$$W_2 = \left\{ u' \in L^\infty(0,T;H) / u'' \in L^2(0,T;(D(A))') \right\}$$

entonces se deduce, usando el lema 2.6, que:

$$u' \in C[0,T;H]; \quad \forall T > 0 \quad (5.45)$$

luego de (5.44) y (5.45) concluimos que:

$$\Rightarrow z := (u,u') \in C\left([0,T],\mathcal{H}\right);\ \forall T > 0 \quad (5.46)$$

Verificación de los datos iniciales

El objetivo de esta sección es mostrar que para una función dada esta satisface las condiciones iniciales dado en (5.4) esto es:

$$u(0) = u_0 \qquad \text{y} \qquad u'(0) = u_1$$

luego se tiene que $z(0) := (u(0), u'(0))$: esta forma tiene sentido verificar $z(0) := (u_0, u_1)$.

- **Verificación de** $u(0)$: Primero consideremos $\theta \in C^1[0,T]$, con $\theta(0) = 0$ y $\theta(T) = 0$ de (5.38) hacemos para cada caso $v = w_j\theta'(t)$ y $v = w_j\theta(t)$ tenemos :

$$\int_0^T \left(u_m(t), w_j\right)\theta'(t)dt \quad \rightarrow \quad \int_0^T \left(u(t), w_j\right)\theta'(t)dt \tag{5.47}$$

$$\int_0^T \left(u_m(t), w_j\right)\theta(t)dt \quad \rightarrow \quad \int_0^T \left(u(t), w_j\right)\theta(t)dt \tag{5.48}$$

luego usando integración por partes en (5.38) se tiene:

$$-(u_m(0), w_j) - \int_0^T \left(u_m'(t), v\right)\theta(t)dt \quad \rightarrow -(u(0), w_j) - \int_0^T \left(u'(t), v\right)\theta(t)dt$$

luego se concluye que:

$$u_m(0) \rightarrow u_0 \qquad \text{en} \qquad D(A^{\frac{1}{2}})$$

y por la unicidad de limite, se concluye que:

$$u(0) = u_0 \tag{5.49}$$

- **Verificación de** $u'(0)$: Multiplicando a (5.4) por $\theta(t)$ e integrando de 0 a T y usando integración por partes se tiene:

$$-(u_m'(t), w_j) - \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}u_m(t), A^{\frac{1}{2}}w_j)\theta(t)dt +$$

$$+\int_0^T (Lu_m(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt \tag{5.50}$$

de la convergencia para los datos iniciales se tiene luego:

$$(u'_m(0), w_j) \to (u_1, w_j) \qquad (5.51)$$

luego tomando limite $m \to \infty$ y teniendo en cuenta las convergencias dadas anteriormente se tiene:

$$-(u'_1(t), w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}u(t), A^{\frac{1}{2}}w_j)\theta(t)dt +$$

$$+\int_0^T (Lu(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w_j)\theta(t)dt \qquad (5.52)$$

para todo $w \in V$ y usando nuevamente intergracion por partes se tiene:

por lo tanto, de (5.51) y (5.52) se tiene:

$$(u'(0), w) = (u_1, w);\ \forall w \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

y por densidad de $D(A^{\frac{1}{2}})$ en H se tiene luego:

$$u'(0) = u_1 \qquad (5.53)$$

Unicidad

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen u y v dos soluciones que satisfacen las condiciones del teorema (5.1). Sea $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ la solución de:

$$\begin{cases} w'' + Aw + Lw = f \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \qquad (5.54)$$

luego multiplicando por w' e integrando sobre Ω obtenemos:

$$(w'', w')_H + (Aw, w')_H + (Lw', w')_H = 0 \qquad (5.55)$$

$$(w'', w')_H + (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}w')_H + (Lw', w')_H = 0$$

$$\frac{1d}{2dt}\left[|w'|_H^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}w \right|_H^2 \right] = -(Lw, w')_H \qquad (5.56)$$

y por hipótesis del operador *L* se sigue:

$$\frac{d}{dt}\left[\left|w'\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}w\right|_H^2\right]=-(Lw,w'_H)\leq 2\left|L\right|_H\left|w\right|_H\left|w'\right|_H\leq C.\left[\left|w'\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}w\right|_H^2\right]$$

luego haciendo:

$$z=\left|w'\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}w\right|_H^2$$

así tenemos:

$$\frac{d}{dt}Z(t)\leq C.Z(t)$$

y teniendo en cuenta que $Z(0)=0$, luego integrando de 0 a *t* tenemos:

$$Z(t)\leq C.\int_0^t Z(t)dt$$

aplicando el lema 2.3 (Lema de Gronwall) tenemos:

$$Z(t)=\left|w'\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}w\right|_H^2=0$$

así deducimos que:

$$\left|w\right|_H^2=0=(u-v,u-v)$$

concluyendo que:

$$u(t)=v(t) \tag{5.57}$$

por lo tanto la solución es única.

■

5.1 Resultados descriptivos

Siendo esta una investigación que no requirío de datos estadísticos o la aplicaciónde la estadística descriptiva, no se tiene resultados descriptivos.

5.2 Resultados inferenciales

Siendo esta una investigación que no requirío de datos estadísticos o la aplicaciónde la estadística descriptiva, no se tiene resultados inferenciales.

5.3 Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirío de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

En nuestra investigación se formuló la hipótesis general que, existe única solución del problema abstracto (*P*) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden, lo que permitió formular las siguientes hipótesis especificas:

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces se garantiza que el problema abstracto (*P*) es un problema general que engloba diferentes modelos.

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces existe solución del problema (*P*).

Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ entonces existe solución única del problema (*P*).

Apartir de los resultados en la presente investigación aceptamos la Hipótesis general, que establece que existe solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden, aceptamos las hipótesis especificas dadas, debido a:

Que las condiciones $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ garantizaron que el problema abstracto (P) es un problema general que engloba diferentes modelos.

Que con las condiciones $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ existe solución del problema abstracto (P).

Que con las condiciones $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty\left(0,T,H\right)$ existe la unicidad de la solución, para el problema abstracto (P).

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Apartir de los resultados en la presente investigación tenemos que, estos resultados guardan relación con las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco Téorico:

a) En la investigación de Brezis se trabaja un modelo clásico y básico de EDP de evolución, es la ecuación de onda: $u'' - \Delta u = 0$ en $\Omega x \left]0, T\right[$ más condiciones de frontera y condiciones iniciales, que permiten describir el comportamiento de una onda en determinado medio, nosotros consideramos el término no lineal A, L, y f generando la perturbación en la onda a medida que transcurre el tiempo considerando las condiciones del problema (P).

b) En la investigación de Medeiros y Milla se estudio la ecuación de onda $u'' - \Delta u = f$ en $\Omega x \left]0, T\right[$ más condiciones de frontera y condiciones iniciales, considerando las propiedades propias de el operador $-\Delta$ en un espacio de Sobolev H_0^1, en nuestro trabajo generalizamos el operador Laplaciano considerando A*u* + L*u* un nuevo operador lineal , además ellos consideran en su investigación el método de Faedo Galerkin, realizan estimativas e indica el pasaje al límite, que es un procedimiento similar al nuestro pero que detallamos en profundidad.

c) En el artículo de Amaya Cedron, se aplicó las diferencias finitas para una solución numérica de la ecuación diferencial parcial, se aplicó las dferencias finitas para una solución numérica de la ecuación de la onda, en nuestro trabajo usamos la teoría del análisis funcional y mediante el método de Faedo Galerkin para demostrar la existencia del problema (P), la unicidad de la solución se demostró utilizando la técnica de contradicción, con auxilio de la desigualdad de Gronwall.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedío con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos se pudo establecer las sigientes conclusiones:

Se demostró la existencia y unicidad de solución del problema abstracto (5.1) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden.

Se determinó las condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que el problema abstracto (5.1) sea un problema general que engloba diferentes modelos, por que considerando que $u_0 \in L^{\infty}\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^{\infty}\left(0,T,H\right)$ conseguimos la existencia de la solución que engloba diferentes modelos.

Se estableció condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para la existencia de solución del problema absatracto (5.1), por que considerando que $u_0 \in L^{\infty}\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^{\infty}\left(0,T,H\right)$ obtuvimos la existencia de la solución del problema (5.1).

Se analizó condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución del problema absatracto (5.1) sea única, por que al considerar que $\mathrm{u}_0 \in \mathrm{L}^{\infty}\left(0,\mathrm{T},\mathrm{D}\left(\mathrm{A}^{1/2}\right)\right)$ y $\mathrm{u}_1 \in \mathrm{L}^{\infty}\left(0,\mathrm{T},\mathrm{H}\right)$ y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtuvo la unicidad de solución del problema abstracto (5.1).

RECOMENDACIONES

Al finalizar la investigación podemos recomendar a los interesados en el área lo siguiente:

Estudiar otras condiciones de la perturbación de una ecuación abstracta de onda que pueda satisfacer, como su comportamiento asintótico del problema en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden.

Estudiar la aplicación de otros tipos de ecuaciones abstractas, como:

$$\begin{cases} u'' + A^{\alpha}u + Lu = f(u) & \text{en} \quad H \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad V \\ u'(0) = u_1 & \text{en} \quad H \end{cases}$$

determinando su existencia de solución y comportamiento asintótico de las soluciones, considerando los mismos argumentos dados en el problema inicial con la diferencia que f una función no lineal, y $A^{\alpha}u$ un operador no acotado en el problema dado para $\alpha > 0$, debido a que el problema abstracto inicial es un problema general que engloba diferentes modelos.

Plantear en el problema abstracto inical a $A = -\Delta$ y $L = a(x)$ que se obtiene una ecuación típica de onda perturbada con un término lineal $a(x)$, y para $A = \Delta^2$ y $L = a(x)$ representa la ecuación de las vibraciones transversales de una viga perturbada por el término lineal $a(x)u$.

Estudiar la solución con el método de la teoría general de semigrupos para problemas de evolución abstracta tipo ecuación de Cauchy abstracto y con problemas de valor inicial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R.(1976). *Sobolev Space*. New York-London and San Francisco: Academic press. Inc.

Brezis, H. (1983). *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Madrid: Editorial Alianza.

Brito, H. (1982). *Damped Elastic Stretchet String Equation Generalized: Existence Uniqueses, Regularity and Stability*, Appl, Vol 13 219-233.

Cavalcanti, M., Domingos Cavalcanti. (2000). *Iniciacao µa Teoria das distribuicoes e aos Espacos de Sobolev.* Vol. I-II, DMA/UEM, Maringa.

Coddington E., Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Diferential Equations*. New York .Mac Graw-Hill.

Izaguirre R., Cabanillas E. (2002). *Solución global y decaimiento de la energía de soluciones para una clase de ecuaciones abstractas asociadas a la ecuación no lineal de la viga con termino disipativo*.Lima-Perú: PESQUIMAT. Revista de la Fac.CC.MM de la UNMSM. Vol VI, N°1, Pag. 1-15.

Kesavan S.(1989). *Topics in functional analysis and Applications*. Wiley Eastern Limited Bangolore.

Lasiecka I., Tataru D. (1993). *Uniform boundary stabilization of semi- linear wave equations with nonlinear boundary damping*. New York: Lecture Notes in Pure and Applied Maths, 142, Dekker.

Lions J. (1969). *Quelques Methods de Resolution des aux Limits nonlinéaires*; Paris: Dunod Gauthier.

Limaco J., Becerra S. (1998). *Vibration of Elastic String. Atas do 48º Seminario Brasileiro de analice* 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear).

Martinez P. (2001). *Precise Decay Rate Estimate For Time-Depended Dissipations System*, Israel: Journal of Mathematics to appear.

Medeiros A. (1983). *Iniciacao aos Espacos de Sobolev e Aplicacoes*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ: Textos e Métodos Matemáticos 16.

Medeiros A., Mello L. (1989). *A Integral de Lebesgue*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ: Textos e Métodos Matemáticos 18.

Medeiros A., Rivera L. (1977). *Espacos de Sobolev e Aplicacoes µas Equacoes Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro, IM-UFRJ: Textos e Metodos Matematicos 9.

Medeiros A., Milla L.(2000). *Espacos de Sobolev (iniciacao aos problemas elipticos nao homogéneos)*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ: Textos e Metodos Matematicos 12.

Milla M. (1988). *Traco para o Dual dos Espacos de Sobolev*. Rio de Janeiro: Seminario Brasileiro de Analise, Atas 28-Seminario Brasileiro de Analise, p. 171-191, 1988.

Milla M. (1990). *Analise espectral em espacos de Hilbert*. Rio de Janeiro, UFRJ: Instituto de Matemática.

Quispe T. (2011). *Solución local y singularidad para una ecuación de viga no lineal de tipo Kirchhoff con termino disipativo*. Lima – Perú: PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la UNMSM. Vol. XIV N°2, pp. 67-86.

Rivera P. (1999). *Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales*. Rio de Janeiro: textos avanzados, LNCC.

Simon J. (1985). *Compact Sets in the Space* $L_p(0, T; B)$. Paris: Universite Pierre etMarie Curie.Laboratoire de Analyse Numerique.

Teman R. (1979). *Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holand, Amsterdam.

Zeidler E. (1989). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* Vol.II/A. VOL II/ B. New York: Springer-Verlag.

ANEXOS

Matriz de consistencia

Problema	Objetivo	Hipótesis	Operacionalización de variables			Diseño metodológico
			Variables	**Dimensiones**	**Indicadores**	
Problema general ¿Es posible garantizar la existencia y unicidad de solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden? $(P)\begin{cases} u'' + Au + Lu = f & \text{en } H \\ u(x,0) = u_0 & \in V \\ u'(x,0) = u_1 & \in H \end{cases}$ **Problemas específicos** ¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que el problema abstracto (P) sea un problema general que engloba diferentes modelos? ¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que exista solución del problema abstracto (P) ? ¿Qué condiciones se debe establecer a los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución del problema abstracto (P) sea única ?	**Objetivo general** Demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden. **Objetivos específicos** Determinar condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que el problema abstracto (P) sea un problema general que engloba diferentes modelos. Establecer condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para la existencia de solución del problema abstracto (P). Analizar condiciones adecuadas sobre los datos iniciales u_0 y u_1 para que la solución del problema abstracto (P) sea única.	**Hipótesis general** Existe única solución del problema abstracto (P) en ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden. **Hipótesis específicas** Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty(0,T,H)$ entonces se garantiza que el problema abstracto (P) es un problema general que engloba diferentes modelos. Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty(0,T,H)$ entonces existe solución del problema (P). Sean $u_0 \in L^\infty\left(0,T,D\left(A^{1/2}\right)\right)$ y $u_1 \in L^\infty(0,T,H)$ entonces existe solución única del problema (P).	**Dependiente** $u(x,t)$ Representa el desplazamiento, presenta dependencia respecto a la variable independiente. Representa los cambios en la longitud, en el instante t causado por la bivración. **Independiente** Variable espacio-temporal $(x,t) \in \Omega \times]0,T[$	Existencia Unicidad	Método de Faedo-Galerkin Técnica de contradicción con la desigualdad de Gronwail.	La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, no experimental, cuyo diseño es Longitudinal, debido a que nos centramos en demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema abastaracto P. El método utilizado es del tipo deductivo-inductivo, siendo lo más exhaustivo posible en cada una de las demostraciones. Por ser un trabajo matemático teórico abstracto no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro del conjunto de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de tipo Hiperbólico.