

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



**INFORME FINAL DE PROYECTO DE
INVESTIGACIÓN**
**“ TRAZAS DE OPERADORES EN
ESPACIOS DE HILBERT ”**
AUTOR: ALFREDO SOTELO PEJERREY

**PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de mayo del 2021 al 30 de abril del
2022**

**RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN N° 305-2021-R
CALLAO, 2022**

A handwritten signature in blue ink, located in the bottom right corner of the page.

A handwritten signature in blue ink, located in the bottom right corner of the page. The signature is stylized and appears to consist of several overlapping loops and lines, possibly representing the initials 'A.W.' or a similar set of initials.

DEDICATORIA

Este trabajo de investigación esta dedicado a mi esposa Gaby y a mis padres Alfredo y Flor.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quiero agradecer a la Universidad Nacional del Callao por la subvención para desarrollar este trabajo de investigación. Mi alma mater siempre la llevaré en mi corazón.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis padres y esposa. Ellos son la motivación para continuar trabajando en esta hermosa ciencia que es la matemática.

INDICE

TABLAS DE CONTENIDO	7
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
INTRODUCCIÓN	10
CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.1 Descripción de la realidad problemática.	11
1.2 Formulación del problema.	12
1.3 Objetivos	12
1.3.1 Objetivos generales.	12
1.3.2 Objetivos específicos.	12
1.4 Limitantes de la Investigación	13
CAPITULO II. MARCO TEÓRICO	14
2.1 Antecedentes.	14
2.2 Marco.....	15
Teórico...	15
Conceptual	63
2.3 Definición de términos básicos	64
CAPITULO III. HIPÓTESIS Y VARIABLES	67
3.1 Hipótesis.	67
3.2 Definición conceptual de las variables.	67
3.3 Operacionalización de la variable.	68
CAPITULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO	69
4.1 Tipo y diseño de la investigación.	69
4.2 Método de investigación.	69
4.3 Población y muestra.	69
4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado	69
4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de información.	70
4.6 Análisis y procesamiento de datos.	70
CAPITULO V. RESULTADOS	72



5.1 Resultados descriptivos	72
5.2 Resultados inferenciales	77
5.3 Otro tipo de resultado estadístico, de acuerdo a la naturaleza del problema	78
CAPITULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	79
6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	79
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares	80
6.3 Responsabilidad ética	80
CONCLUSIONES	81
RECOMENDACIONES	83
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84
ANEXOS	87



TABLAS DE CONTENIDO

Índice de figuras

Ninguna



RESUMEN

“TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT”

Alfredo Sotelo Pejerrey

La presente investigación estudia diversos funcionales sobre espacios de Hilbert llamados trazas. Se estudia la traza de operadores de rango finito, la traza usual y la traza de Dixmier. Algunas aplicaciones de estos funcionales son mencionadas.

Palabras Claves: Operador compacto, traza de Dixmier, espacio de Hilbert.

ABSTRACT

**"TRACES OF OPERATORS ON HILBERT
SPACES"**

Alfredo Sotelo Pejerrey

This research studies several functional on Hilbert spaces called traces. It is studied the trace of finite rank operators, the usual trace and the Dixmier trace. Some applications of these functional are mentioned.

Keywords: Compact operator, Dixmier trace, Hilbert space.

INTRODUCCIÓN

La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de elementos de su diagonal o equivalentemente como la suma de sus valores propios. Este funcional es lineal y se anula en los conmutadores, es decir, $tr(AB) = tr(BA)$. En el contexto de operadores en espacios de Banach y Hilbert, un problema no trivial es determinar una clase de operadores donde se pueda definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en los conmutadores; este problema es difícil pues la suma de valores propios de un operador podría diverger.

El presente trabajo de investigación está centrado en el estudio de funcionales trazas sobre ciertos ideales de operadores. Inicialmente estudiamos la traza de operadores de rango finito y la traza usual definida sobre el ideal de operadores nucleares.

El primer ejemplo de traza singular fue dado por Jacques Dixmier en su artículo de 1966. Una traza singular es un funcional traza que se anula en el ideal de operadores de rango finito, es por ello que no es una extensión de la traza matricial usual. Este trabajo de investigación presenta una forma alternativa de la construcción de la traza de Dixmier y escogiendo un estado adecuado se construye la traza de Connes-Dixmier; todo esto es importante ya que sus aplicaciones se ven reflejadas en el libro de Alain Connes titulado geometría noconmutativa,



CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Sea H un espacio de Hilbert complejo infinito dimensional y F un operador lineal y acotado en H . El operador F es de rango finito si la dimensión de su imagen es finita, es decir, si $\dim(\text{Im}(T)) < \infty$; y el espacio de operadores de rango finito en H es denotado por $\mathcal{F}(H)$. Todo $F \in \mathcal{F}(H)$ puede representarse de la forma:

$$Fx = \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle y_k, \quad (x_k), (y_k) \subset H,$$

y usando esta representación, podemos definir el siguiente funcional

$$\begin{aligned} \text{Tr}: \mathcal{F}(H) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \text{Tr}(F) &:= \sum_{k=1}^n \langle y_k, x_k \rangle. \end{aligned}$$

Este funcional satisface las siguientes propiedades:

- Tr es un funcional lineal
- $\text{Tr}(FS) = \text{Tr}(SF), \forall F \in \mathcal{F}(H), \forall S \in B(H)$, aquí $B(H)$ representa el álgebra de operadores lineales y acotados en H .
- $\text{Tr}(F) = \sum_k \lambda_k(F)$, aquí $\lambda_k(F)$ son los autovalores no nulos de F .

De las tres propiedades anteriores, vemos que el funcional Tr satisface las propiedades usuales de la traza matricial, es por ello, que el funcional lineal Tr es llamado funcional traza sobre $\mathcal{F}(H)$. Además, como toda matriz puede identificarse como un operador lineal entre espacios de dimensión finita, el funcional Tr es una extensión de la traza matricial. Esto nos conduce al estudio de definir funcionales sobre ciertos ideales de operadores que satisfacen las propiedades a), b) y c); a estos funcionales

los llamaremos funcionales trazas. Una especial atención tendremos en la propiedad c) ya que como trabajaremos sobre espacios de dimensión infinita, la suma de arriba podría diverger.

En la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática se dicta el curso electivo de la línea 1 de Teoría Espectral en espacios de Hilbert. Varias herramientas de este curso son usadas para trabajar este proyecto, es por ello que este trabajo de investigación puede considerarse como una aplicación de dicho curso.

1.2. Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema General:

¿Qué otras trazas de operadores en espacios de Hilbert podemos definir?

Problemas Específicos

1. ¿Toda traza es una extensión de la traza usual?
2. ¿Qué aplicaciones de los funcionales trazas existen?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivos generales

Construir la traza usual, traza de Dixmier, Connes-Dixmier de operadores en espacios de Hilbert.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Mostrar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual.
2. Mostrar las aplicaciones de los funcionales traza para hallar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

1.4. Limitantes de la investigación

Un problema usual que se presenta cuando se trabaja sobre espacios de Hilbert es extender los resultados a espacios de Banach, es así que un limitante teórico de la investigación es trabajar en el contexto de espacios de Banach infinito dimensionales.

Por otro lado, debido al tiempo que llevará realizar las diversas etapas del proyecto como revisión e interpretación de la información bibliográfica y su traducción al español de los diversos artículos científicos; para la construcción de las trazas sobre ciertos ideales de operadores en espacios de Hilbert se establece el plazo de 12 meses como límite temporal para el desarrollo de todo el proyecto.

La limitante espacial se encuentra dentro del enfoque teórico de los espacios de Banach con la propiedad de aproximación y los espacios de Hilbert débiles.

CAPITULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

Nacional

J. Alcántara-Bode (2002) estudia el conjunto de trazas del operador A_ρ definido en $L^2(0,1)$ por $A_\rho(f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)f(x)dx$. El estudio de este operador es importante por su relación con la famosa hipótesis de Riemann.

Internacional

- 1) J. Dixmier (1966). Es en este artículo donde construye la famosa traza de Dixmier, este fue el primer ejemplo de una traza singular definida sobre el ideal de operadores de Lorentz. Su importancia radica en sus aplicaciones a la Geometría No conmutativa, ello puede ser observado en el libro de Alain Connes titulado Geometría No conmutativa.
- 2) J.V. Varga (1989) introduce los operadores irregulares y excéntricos, estas clases de operadores, definidos sobre espacios de Hilbert, permiten establecer la existencia de trazas no triviales.
- 3) A. Albeverio, D. Guido, A Ponosov, and S. Scarlatti (1996), caracteriza a aquellos operadores T definidos en espacios de Hilbert separables de tal manera que admitan una traza singular no trivial, es decir, existe una traza singular τ en el ideal generado por T de tal forma que $0 < \tau(|T|) < \infty$. Estos operadores son los llamados excéntricos generalizados y generalizan a los operadores excéntricos dados en el artículo de J. Varga.
- 4) I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), es el texto más completo que trata de trazas y determinantes sobre espacios de Banach. Inicialmente se define trazas y determinantes de operadores de rango



finito sobre espacios de Banach para luego extender estos funcionales a subálgebras sumergidas con la propiedad de aproximación, por ejemplo, al subálgebra de operadores de clase traza o al subálgebra de operadores integrales con núcleo continuo.

2.2 MARCO

TEORICO

2.2.1 Espacios de Banach

Definición 2.2.1.1: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$. Una norma $\| \cdot \|$ es una aplicación definida en V con valores no negativos que satisface:

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in V, \alpha \in K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$

El par $(V; \| \cdot \|)$ será llamado espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.2:

Sea $n \geq 1$. En \mathbb{R}^n definimos las aplicaciones

- I. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- II. $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
- III. $\|x\|_{max} = \max\{|x_i|; i = 1; 2; 3; \dots; n\}$

Entonces $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \| \cdot \|_{max})$ son espacios normados.

En particular, si $n = 1$, entonces $(\mathbb{R}; \| \cdot \|_1) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|_2) = (\mathbb{R}; \| \cdot \|_{max}) = (\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Ejemplo 2.2.1.3

El espacio de funciones continuas con valores en $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ definidas en $[a, b]$ es denotado por

$$C[a, b] = \{f: [a; b] \rightarrow K / f \text{ es continua} \}$$



$C[a, b]$ define un espacio vectorial sobre K con las operaciones de suma puntual de funciones y multiplicación por un escalar. Si definimos las aplicaciones en $C[a, b]$ por

$$I. \|f\|_{max} = \max\{|f(x)|; x \in [a; b]\},$$

$$II. \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$$

Se demuestra que los pares $(C[a, b]; \|\cdot\|_{max})$, $(C[a, b]; \|\cdot\|_1)$ son espacios normados.

Ejemplo 2.2.1.4

El espacio de sucesiones reales acotadas es denotado por

$$\ell^\infty(K) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}.$$

$\ell^\infty(K)$, con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar componente a componente, define un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$, y si definimos la aplicación sobre $\ell^\infty(K)$:

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{sup} = \sup\{|a_n|; n \in \mathbb{N}\},$$

no es difícil demostrar que el par $(\ell^\infty(K); \|\cdot\|_{sup})$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.5

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$L^p[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es Lebesgue medible y } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

El espacio $L^p[a, b]$ define un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con la suma puntual de funciones y la multiplicación por un complejo. La siguiente aplicación sobre $L^p[a, b]$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

define una norma en $L^p[a, b]$. Por lo tanto, el par $(L^p[a, b]; \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.6

Para $p \geq 1$, definimos el espacio



$$l^p(\mathbb{R}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

El espacio $l^p(\mathbb{R})$, con la suma y multiplicación por un real componente a componente, define un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una norma sobre $l^p(\mathbb{R})$ está dada por

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Por lo tanto, el par $(l^p(\mathbb{R}); \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

Definición 2.2.1.7: Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado $(V; \|\cdot\|)$ se dice convergente a un punto $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - x\| < \varepsilon; \forall n \geq n_0.$$

Que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converja al punto x es denotado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

Definición 2.2.1.8: Sea $(V; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión, decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - a_m\| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Propiedades algebraicas de convergencia son dadas en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1.9

Sea $(V; \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ sucesiones en V .

Entonces

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = x + y$.
- b) Si $\alpha \in K$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha x$.

Ejemplo 2.2.1.10

Consideremos el espacio normado $(C[0,1]; \|\cdot\|_1)$. Sea la sucesión de funciones continuas $f_n(x) = x^n$. Sea también $g(x) = 0$.

Como



$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

entonces $f_n \rightarrow 0$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Sin embargo,

$$\|f_n - 0\|_{max} = 1$$

por lo tanto, la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a g con la norma $\|\cdot\|_{max}$.

Definición 2.2.1.11: Un espacio normado $(V; \|\cdot\|)$ es llamado espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en V es convergente en V .

Ejemplo 2.2.1.12

Los pares

- a) $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_1); (\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_2); (\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_{max});$
- b) $(L^p[a, b]; \|\cdot\|_p), p \geq 1;$
- c) $(C[a, b]; \|\cdot\|_{max});$
- d) $(l^p(\mathbb{R}); \|\cdot\|_p), p \geq 1;$
- e) $(\ell^\infty(K); \|\cdot\|_{sup})$

son espacios de Banach.

Un resultado conocido en el contexto de espacios normados de dimensión finita es que todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Más precisamente, el resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.1.13: Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado con $\dim V < \infty$, entonces $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

2.2.2 Espacios de Hilbert

Definición 2.2.2.1: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un producto interno es una aplicación:

$$\langle \cdot ; \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que se satisface:

- i. $\langle x; x \rangle \geq 0, \forall x \in V, \langle x; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\langle \alpha x + \beta y; z \rangle = \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle \forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in K$



$$\text{iii. } \langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle} \quad \forall x, y \in V$$

El par $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado espacio con producto interno.

Observación 2.2.2.2

Todo producto interno satisface la siguiente propiedad:

Sea $x, y \in V, \alpha \in K$ luego:

$$\langle x; \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x; y \rangle$$

Un resultado elemental en todo espacio con producto interno es la desigualdad de Cauchy-Schwartz, resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.2.3

Si $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces

$$|\langle x; y \rangle| \leq \langle x; x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y; y \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall x, y \in V.$$

Observación 2.2.2.4

Todo producto interno induce una norma, más precisamente, si $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $\|x\| = \langle x; x \rangle^{1/2}, x \in V$ define una norma en V .

Definición 2.2.2.5: Sea $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y B un subconjunto de V . El conjunto B es llamado ortonormal si $\langle x; y \rangle = 0, \forall x, y \in B$ con $x \neq y$; y $\langle x; x \rangle = 1, \forall x \in B$.

Definición 2.2.2.6: El par $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert si es completo con la norma inducida por su producto interno.

Una desigualdad importante es la llamada desigualdad de Bessel:

Definición 2.2.2.7: Sea $(V, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y B un subconjunto ortonormal de V . El conjunto B es llamado una base ortonormal de V si: $\langle x, b \rangle = 0, \forall b \in B$, entonces $x = 0$.

Ejemplo 2.2.2.8

Los pares

a) $(L^2[a, b]; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ donde



$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

b) $(l^2(\mathbb{R}); \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

c) $(\mathbb{R}^n; \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

definen espacios de Hilbert.

Ejemplo 2.2.2.9

Sobre el espacio vectorial $l^2(\mathbb{R})$ definimos el producto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Se cumple que el par $(l^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert. Si definimos el vector

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots),$$

donde el número 1 se ubica en el orden k -ésimo. Entonces el conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ define un conjunto ortonormal, más aún, define una base ortonormal para $l^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.2.2.10

La familia

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

Define una base ortonormal para el espacio $L^2[-\pi, \pi]$.

Una desigualdad bastante conocida en el contexto de espacios con producto interno es la desigualdad de Bessel:

Teorema 2.2.2.11 (Desigualdad de Bessel): Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ un conjunto ortonormal de V . Entonces



$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in V.$$

Corolario 2.2.2.12: Sea $(H, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ una base ortonormal de H . Entonces todo $x \in H$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

Demostración:

Solo observe que

$$\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k, e_m \rangle = 0, \forall m \in \mathbb{N},$$

luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

Observación 2.2.2.13

Si en la desigualdad de Bessel tomamos una base ortonormal, entonces la desigualdad se transforma en una igualdad. Mas precisamente,

Sea $(V, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ una base ortonormal de V . Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n \rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in V.$$

Esta última igualdad puede verse como una generalización del teorema de Pitágoras.

2.2.3 Operadores lineales acotados.

Definición 2.2.3.1: Sea $(V; \|\cdot\|_V)$ y $(W; \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados.

Una aplicación $T: V \rightarrow W$ que satisface:

- i. $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in V$
- ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$



es llamado un operador lineal.

El espacio de operadores lineales $T: V \rightarrow W$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T: V \rightarrow W : T \text{ es un operador lineal}\}$$

Definición 2.2.3.2: Sea $(V; \|\cdot\|_V)$ y $(W; \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados. Un operador lineal $T: V \rightarrow W$ es llamado acotado si existe un $C > 0$ tal que $\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V, \forall x \in V$.

El espacio de operadores lineales y acotados $T: V \rightarrow W$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma puntual de operadores y la multiplicación puntual por un escalar. Este espacio es denotado por

$$B(V, W) = \{T: V \rightarrow W : T \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

La norma de un operador lineal y acotado $T: V \rightarrow W$ está definida por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Tx\|_W\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|Tx\|_W\}.$$

Luego si

$$\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V, \forall x \in V$$

entonces

$$\|T\| \leq C.$$

La norma de un operador lineal y acotado permite definir el siguiente espacio normado $(B(V, W), \|\cdot\|)$.

Ejemplo 2.2.3.3

Sea $T: (C[0,1]; \|\cdot\|_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \rightarrow T(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

Usando la linealidad de la integral, es inmediato afirmar que T es un operador lineal. Ahora veamos que T es un operador lineal acotado,

En efecto, si $f \in C[a, b]$, entonces



$$\begin{aligned}
|T(f)| &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \max\{|f(x)| \mid x \in [a; b]\} dx = \int_0^1 \|f\|_{\max} dx \\
&= \|f\|_{\max} \int_0^1 1 dx = \|f\|_{\max},
\end{aligned}$$

luego

$$|T(f)| \leq \|f\|_{\max}.$$

Por lo tanto, T es acotado y $\|T\| \leq 1$.

Por otra parte, si $g = 1$ entonces

$$\frac{|Tg|}{\|g\|_{\max}} = 1 \leq \sup_{f \neq 0} \left\{ \frac{|Tf|}{\|f\|_{\max}} \right\} = \|T\|.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = 1.$$

Ejemplo 2.2.3.4

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$, $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es acotado y

$$\|T\| = \sup_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0} \left\{ \frac{\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} \right\} = \sup_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0} \left\{ \frac{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} \right\} = 1.$$

Ejemplo 2.2.3.5

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R})$, $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es acotado y $\|T\| \leq 1$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ entonces $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (1, 0, 0, \dots)$ y

$$\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\| = 1.$$

Luego



$$\frac{\|T((a_n)_{n \in \mathbb{N}})\|}{\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|} = 1 \leq \|T\|.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = 1.$$

2.2.4 Operadores compactos

Definición 2.2.4.1: Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. El operador T es llamado de rango finito si $\dim(\text{Im}T) < \infty$, donde $\text{Im}T$ denota la imagen o rango de T .

El espacio de operadores de rango finito de H_1 a H_2 es denotado por

$$F(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) : T \text{ es de rango finito}\}.$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $F(H_1; H_1)$ será denotado por $F(H_1)$.

Ejemplo 2.2.4.2

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador $T: H \rightarrow H$

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente T es un operador lineal y acotado. Por otra parte, como

$$\text{Im}(T) \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Entonces

$$\dim(\text{Im}(T)) \leq n,$$

por lo tanto, T es un operador de rango finito.

Ejemplo 2.2.4.3

Sobre el espacio $L^2[a, b]$ definimos el operador

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \int_a^b f(s) \overline{v_j(s)} ds,$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son conjuntos de funciones en $L^2[a, b]$.

El operador K puede expresarse de la forma



$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \langle f, v_j \rangle,$$

luego

$$Kf = \sum_{j=1}^n w_j \langle f, v_j \rangle,$$

entonces

$$\text{Im}(K) \subset \text{span}\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

Por lo tanto,

$$\dim(\text{Im}(K)) \leq n,$$

por lo tanto, K es un operador de rango finito.

El siguiente teorema muestra que el espacio $F(H_1; H_2)$ tiene estructura de subespacio vectorial.

Teorema 2.2.4.4: $F(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Demostración:

Si $T_1, T_2 \in F(H_1; H_2)$, entonces

$$\dim \text{Im}(T_1 + T_2) \leq \dim \text{Im}(T_1) + \dim \text{Im}(T_2) < \infty.$$

Por lo tanto

$$T_1 + T_2 \in F(H_1; H_2).$$

Obviamente que $\beta T_1 \in F(H_1; H_2)$ para todo β escalar.

Definición 2.2.4.5: Sean $H_1; H_2$ dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$.

El operador T es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ existe una subsucesión de $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_2$ convergente.

El espacio de operadores compactos de H_1 a H_2 es denotado por

$$K(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \mid T \text{ es compacto}\}$$

Si $H_1 = H_2$ entonces $K(H_1; H_1)$ se escribirá como $K(H_1)$.



El siguiente teorema muestra que el espacio $K(H_1; H_2)$ tiene estructura de subespacio vectorial.

Teorema 2.2.4.6: $K(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Demostración:

Sea $T_1, T_2 \in K(H_1; H_2)$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ una sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(Tx_{n'})_{n \in \mathbb{N}} \subset H_2$ es convergente.

Como T_2 es compacto entonces existe una subsucesión $(x_{n''})_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_{n'})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(Tx_{n''})_{n \in \mathbb{N}} \subset H_2$ es convergente.

Luego la sucesión $((T_1 + T_2)(x_{n''}))$ es convergente. Por lo tanto, el operador $T_1 + T_2$ es compacto.

Trivialmente $\beta T_1 \in K(H_1; H_2)$ para todo β escalar.

Teorema 2.2.4.7: $K(H)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{L}(H)$.

Demostración:

Por el teorema anterior $K(H)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(H)$. Veamos ahora que $TR, RT \in K(H), R \in K(H), T \in \mathcal{L}(H)$.

En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Rx_{n'} \rightarrow r$ como T es continua se tiene $TRx_{n'} \rightarrow Tr$. Por tanto TR es compacto.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión acotada entonces $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Luego existe una subsucesión $(x_{n'})_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(RTx_{n'})_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

El teorema de Bolzano-Weierstrass en el contexto de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n establece que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. El siguiente teorema generaliza este resultado a espacios de Banach de dimensión finita. El resultado es el siguiente:



Teorema 2.2.4.8: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces $\dim X < \infty$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ acotada, existe una subsucesión $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

Demostración:

Supongamos que $\dim X = n$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base para X .

Sea $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada. Entonces existe un $M > 0$ tal que $\|x^k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Cada elemento de la sucesión x^k puede escribirse como combinación lineal de elementos de la base, esto es,

$$x^1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_2^1 e_2 + \dots + \alpha_n^1 e_n$$

$$x^2 = \alpha_1^2 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \dots + \alpha_n^2 e_n$$

$$x^j = \alpha_1^j e_1 + \alpha_2^j e_2 + \dots + \alpha_n^j e_n.$$

Por el lema de la combinación lineal tenemos que existe $c_j > 0$ tal que

$$(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)c_j \leq \|x^j\| < M; \quad j \in \mathbb{N}.$$

Luego para $1 \leq p \leq n$ tenemos que

$$|\alpha_p^j| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \leq \frac{M}{c_j}.$$

Entonces la sucesión $(\alpha_p^j)_{j \in \mathbb{N}}$ es acotada. Luego por el teorema de

Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $(\alpha_p^{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (\alpha_p^j)_{j \in \mathbb{N}}$

convergente, digamos que $\alpha_p^{j_k} \rightarrow \alpha_p$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sea

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \in X,$$

luego



$$x^{jk} = \alpha_1^{jk} e_1 + \alpha_2^{jk} e_2 + \dots + \alpha_n^{jk} e_n$$

Obviamente $(x^{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Además

$$\|x^{jk} - x\| = \left\| \sum_{p=1}^n (\alpha_p^{jk} - \alpha_p) e_p \right\| \leq \sum_{p=1}^n |\alpha_p^{jk} - \alpha_p| \cdot \|e_p\| \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{jk} = x.$$

Esto nos dice que existe una subsucesión $(x^{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergente.

Para la otra implicación, supongamos que $\dim X = \infty$.

Sea $x_1 \in X / \|x_1\| = 1$ y sea $f_1 = \text{span}\{x_1\}$. Luego f_1 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, para $\theta = \frac{1}{2}$ existe un $x_2 \in X / \|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}$ y $\|x_2\| = 1$.

Sea ahora $f_2 = \text{span}\{x_1; x_2\}$. Luego f_2 es un conjunto cerrado en X . Luego por el lema de Riesz, existe un $x_3 \in X / \|x_3 - x\| \geq \theta = \frac{1}{2} \forall x \in f_2$ y $\|x_3\| = 1$. En particular tenemos que

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \wedge \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$$

Siguiendo este proceso de forma inductiva, tenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la bola unitaria cerrada $\overline{B(0; 1)}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2},$$

lo cual nos dice que de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no se puede extraer subsucesiones convergentes, lo cual contradice la hipótesis.





Como consecuencia directa del teorema 2.2.4.8 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.2.4.9

a) Todo operador de rango finito es compacto, es decir,

$$F(H_1; H_2) \subset K(H_1; H_2)$$

b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ y $\dim H_1 < \infty$, entonces $T \in K(H_1; H_2)$.

El siguiente teorema prueba que el espacio de operadores compactos es cerrado con la norma de operadores.

Teorema 2.2.4.10

Sea (T_n) una sucesión en $K(H)$ tal que $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces $T \in K(H)$.

Veamos algunos ejemplos de operadores compactos:

Ejemplo 2.2.4.11

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y (e_n) un conjunto ortonormal infinito en H . Consideremos a I como el operador identidad, luego

$$\|Ie_n - Ie_m\| = \sqrt{2},$$

El cual implica que (Ie_n) no tiene subsucesiones convergentes. Por lo tanto, el operador identidad I no es compacto.

Ejemplo 2.2.4.12

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador $T: H \rightarrow H$ definido por

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente T es un operador lineal y acotado. Por otra parte, como

$$\text{Im}(T) \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Entonces



$$\dim(\text{Im}(T)) \leq n,$$

por lo tanto, T es un operador de rango finito, y por el teorema 2.2.4.9, T es compacto.

Ejemplo 2.2.4.13

Sobre el espacio $L^2[a, b]$ definimos el operador

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \int_a^b f(s) \overline{v_j(s)} ds,$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son conjuntos de funciones en $L^2[a, b]$.

El operador K puede expresarse de la forma

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) \langle f, v_j \rangle,$$

luego

$$Kf = \sum_{j=1}^n w_j \langle f, v_j \rangle,$$

entonces

$$\text{Im}(K) \subset \text{span}\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\},$$

Por lo tanto,

$$\dim(\text{Im}(K)) \leq n,$$

por lo tanto, K es un operador de rango finito. Luego, por el teorema 2.2.4.9, K es un operador compacto.

Ejemplo 2.2.4.14

Sea (φ_n) una sucesión en \mathbb{C} que converge a cero. Definimos el operador T en l^2 por

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \varphi_1, \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n, \dots).$$

Para cada natural n , sea T_n el operador en l^2 definido por

$$T_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \varphi_1, \alpha_2 \varphi_2, \dots, \alpha_n \varphi_n, 0, 0, 0 \dots).$$

Es claro que cada T_n es de rango finito y

$$\|T_n - T\| \leq \sup_{k \geq n} |\varphi_k| \rightarrow 0.$$



Por lo tanto, la sucesión (T_n) converge a T , y como cada T_n es de rango finito, entonces cada T_n es compacto (teorema 2.2.4.9). Finalmente, por el teorema 2.2.4.10, T es compacto.

De ahora en adelante, a partir del teorema de representación de Riesz, vamos a introducir el operador adjunto de un operador lineal y acotado en espacios de Hilbert.

El teorema de representación de Riesz es conocido y puede encontrarse en cualquier referencia de Análisis Funcional. El resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.4.15 (Representación de Riesz)

Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $h: H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$, donde una forma sesquilineal acotada, es decir un funcional lineal respecto a la primera componente y lineal conjugada respecto a la segunda componente; además existe un $M > 0$ tal que $|h(x; y)| \leq M\|x\|\|y\|, \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$. Entonces h puede escribirse de la forma $h(x; y) = \langle Sx; y \rangle$, donde: $S: H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal acotado. Además S está únicamente determinado por h y

$$\|S\| = \|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \left\{ \frac{|h(x; y)|}{\|x\|\|y\|} \right\}.$$

A continuación, mostramos la existencia del operador adjunto:

Teorema 2.2.4.16 (existencia y unicidad del operador adjunto): Sean $H_1; H_2$ dos espacios de Hilbert y consideremos $T: H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ lineal y acotado tal que:

$$\langle Tx; y \rangle = \langle x; T^*y \rangle \quad \forall x \in H_1, y \in H_2 \quad \|T\| = \|T^*\|$$

Demostración:

Basta introducir la forma sesquilineal acotada:



$$h: H_2 \times H_1 \rightarrow \mathbb{C}; h(y; x) = \langle y; Tx \rangle.$$

El siguiente teorema establece que todo operador lineal y acotado es compacto si y solo si su adjunto lo es.

Teorema 2.2.4.17

Un operador lineal y acotado $T: H \rightarrow H$ es compacto si y solo si T^* es compacto.

Definición 2.2.4.18: Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se dice autoadjunto si $T = T^*$ donde H es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 2.2.4.19

Sea (φ_n) una sucesión en \mathbb{C} que converge a cero. Definimos el operador lineal y acotado T en l^2 por

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, \dots, \alpha_n\varphi_n, \dots).$$

El adjunto de T es

$$T^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1\overline{\varphi_1}, \alpha_2\overline{\varphi_2}, \dots, \alpha_n\overline{\varphi_n}, \dots).$$

Ejemplo 2.2.4.20

Sea H un espacio de Hilbert y $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores en H . Sea el operador lineal y acotado $T: H \rightarrow H$ definido por

$$Tx = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Entonces T es autoadjunto.

Ejemplo 2.2.4.21

Sea

$$T: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

El adjunto de T es

$$T^*: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R}), T^*((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_2, a_3, \dots).$$



Ejemplo 2.2.4.22

Sea $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$ y $T: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ definido por

$$(Tf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds.$$

El operador lineal T es acotado, más precisamente,

$$\|T\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

y su adjunto es

$$(T^*g)(t) = \int_a^b \overline{k(s, t)}g(s)ds.$$

Definición 2.2.4.23: Consideremos un espacio de Hilbert H y un operador lineal acotado:

$$T: H \rightarrow H$$

El escalar $\beta \in \mathbb{C}$ es llamado valor propio o autovalor de T si existe un vector no nulo $x \in H$, tal que $T(x) = \beta x$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama vector propio o autovector de T , asociado al valor propio β .

Ejemplo 2.2.4.24

Sea

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

El operador K es un operador lineal acotado y compacto. Veamos que K no tiene autovalores. En efecto, si $Kf = \beta f$, entonces



$$\int_0^t f(s) ds = \beta f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$f(t) = \beta f'(t), \quad f(0) = 0,$$

luego $f = 0$.

Teorema 2.2.4.25: Los autovalores de un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ son números reales y sus autovectores correspondientes a distintos autovalores, son ortogonales.

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto, luego $T = T^*$ y sea λ un autovalor de T , correspondiente al autovector v , entonces: $Tv = \lambda v$.

Como

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, v \rangle} = \overline{\lambda \langle v, v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

entonces

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Por otro lado, sean λ, β autovalores diferentes y sus respectivos autovectores $v; w$, entonces

$$Tv = \lambda v; Tw = \beta w.$$

Luego

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = \langle v, \beta w \rangle = \beta \langle v, w \rangle.$$

Lo que implica que

$$(\lambda - \beta) \langle v, w \rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \beta$ entonces

$$\langle v; w \rangle = 0.$$



Otra forma de expresar la norma de un operador lineal y acotado autoadjunto se da en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4.26: Sea T un operador autoadjunto, entonces:

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx; x \rangle| / \|x\| = 1\}.$$

Demostración:



Por la desigualdad de Cauchy Schwartz

$$|\langle Tx, y \rangle| = |\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \leq \|y\| \|T\| \|x\| = \|T\| \|x\| \|y\|$$

Para $x = y$, $\|x\| = 1$ se tiene

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|x\| = \|T\|$$

lo que implica que

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle|: \|x\| = 1\} \leq \|T\|.$$

Por lado, denotemos por

$$s = \sup\{|\langle Tx, x \rangle|: \|x\| = 1\}$$

Sea $x, y \in H$ entonces

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4\operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle$$

Aplicando desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, tenemos

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq s(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2s(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

En particular, si tomamos $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $Tx \neq 0$, $y = \|Tx\|^{-1}Tx$ se obtiene

$$\|Tx\| = \operatorname{Re}\langle Tx, \|Tx\|^{-1}Tx \rangle \leq \frac{1}{2}s(1+1) = s$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle|: \|x\| = 1\}.$$



2.2.5 Teoremas espectrales

Teorema 2.2.5.1: Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un autovalor de T .

Demostración:

Si $T = 0$ se tiene $\lambda = 0$ y por lo tanto el resultado es trivial.

Ahora supongamos que $T \neq 0$, como T es autoadjunto entonces por el teorema 2.2.4.26 tenemos que



$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Luego existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset H$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \text{ y } |\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\|.$$

Luego la sucesión $(\langle Tx_n, x_n \rangle)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano – Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n'}) \subset (x_n)$ tal que

$$\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$|\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle| \rightarrow |\lambda| = \|T\|,$$

de donde $\lambda = \|T\|$ o $\lambda = -\|T\|$.

Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad que $\lambda = \|T\|$.

Como

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tx_{n'} - \|T\|x_{n'}\|^2 &= \|Tx_{n'}\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle + \|T\|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}, x_{n'} \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$Tx_{n'} - \|T\|x_{n'} \rightarrow 0.$$

Luego, por compacidad existe una subsucesión $(x_{n''}) \subset (x_{n'})$ tal que $Tx_{n''} \rightarrow y \in H$, esto nos dice que $(\|T\|x_{n''}) \rightarrow y$. Por lo tanto $x_{n''} \rightarrow \frac{y}{\|T\|}$,

concluyendo que $Tx_{n''} \rightarrow T\left(\frac{y}{\|T\|}\right) = y$. Por tanto, $T(y) = \|T\|y$ de donde $\|T\|$ es autovalor de “ T ”



Lema 2.2.5.2: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y M un subespacio invariante por T , es decir, $T(M) \subset M$. Entonces M^\perp es invariante por T^* .

Demostración:

Sea $y \in M^\perp$, entonces para cada $x \in M$ se tiene $\langle x; T^*y \rangle = \langle Tx; y \rangle = 0$ (pues $T(M) \subset M$). Luego:

$$T^*y \in M^\perp.$$



Teorema 2.2.5.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x; x_n \rangle x_n \dots \dots \dots (2.1)$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración:

Por el teorema 2.2.5.1, T tiene un auto valor λ_1 tal que $|\lambda_1| = \|T\|$. Sea x_1 un autovector asociado a λ_1 tal que $\|x_1\| = 1$.

Sea $H_2 = (\text{span}\{x_1\})^\perp$. Como $(\text{span}\{x_1\})^\perp$ es invariante por T , entonces por el lema 2.2.5.2, H_2 es invariante por $T^* = T$, $(T(H_2) \subset H_2)$.

Ahora consideremos $T_2 = T/H_2$, entonces T_2 es compacto y autoadjunto en H_2 , luego por el teorema 2.2.5.1, T_2 tiene un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, además $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$.

Sea x_2 un autovector asociado a λ_2 tal que $\|x_2\| = 1$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ consideramos $x_1 \perp x_2$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $x_1 \perp x_2$, por teorema.

Ahora sea $H_3 = (\text{span}\{x_1; x_2\})^\perp$, entonces por el lema 2.2.5.2 tenemos que $T(H_3) \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 = H$.

Ahora consideremos $T_3 = T/H_3$, entonces T_3 es compacto y autoadjunto en H_2 .

Continuando con este proceso, hemos construido una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de T tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|, \forall n \in \mathbb{N}$, y un sistema ortonormal de vectores $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$.

Como T es compacto, entonces si la sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ es infinita tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1} = 0$.

Ahora veamos la representación de T :



Caso 1: si $T_{n+1} = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$y_n = x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j \Rightarrow y_n \in H_{n+1} = (\mathcal{L}\{x_1; x_2; \dots; x_n\})^\perp$$

$$T_{n+1}(y_n) = T(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow T\left(x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j\right) = 0 \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle T(x_j)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle \lambda_j x_j \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

Caso 2 $T_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Sea:

$$y_n = x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j ; y_n \in (\mathcal{L}\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\})^\perp = H_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T_{n+1}(y_n)\| = \left\| T(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\|,$$

Pero:

$$\|y_n\| = \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|x\|,$$

Por tanto:

$$\left\| T(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

■

Si suponemos que T es un operador compacto, la representación es la dada en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.5.4: (Espectral para operadores compactos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H_1; (y_n)_{n \geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \dots\dots\dots (2.2)$$

Además, se tiene que $s_n(T) \rightarrow 0$ si $(s_n(T))$ es infinito.

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces $T^*T \in \mathcal{L}(H_1)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.2.5.3, tenemos un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots\}$ de autovectores de T^*T y

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Por otra parte, como

$$\langle T^*Tx; x \rangle = \langle Tx; Tx \rangle = \|Tx\|^2 > 0$$

entonces $\lambda_n(T^*T) \geq \lambda_{n+1}(T^*T) > 0$.

Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación:

$$Ker(T) = Ker(T^*T)$$

(\subset) Trivial

(\supset) Sea $x \in Ker(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx; x \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx; Tx \rangle = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(T)$.

Consideremos

$$y_n = \frac{Tx_n}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle y_n; y_m \rangle &= \frac{\langle Tx_n; Tx_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T) \cdot \lambda_m(T^*T)}} = \frac{\langle T^*Tx_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T) \cdot \lambda_m(T^*T)}} \\ &= \frac{\langle \lambda_n(T^*T)x_n; x_m \rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T) \cdot \lambda_m(T^*T)}} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$



Como $H_1 = (\text{Ker } T) \oplus (\text{Ker } T)^\perp$, $(\text{Ker } T)^\perp = \overline{\text{Im } T}$, entonces por el teorema 2.2.5.3, tenemos que $\{x_1; x_2; \dots\}$ es una base ortonormal para $\overline{\text{Im } T}$ y

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x; x_n \rangle x_n, \quad \forall x \in H_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} x \in H_1 = (\text{Ker } T) \oplus \overline{\text{Im } T} &\Rightarrow x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle x_n \\ \Rightarrow Tx = Tu + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n \rangle Tx_n, \end{aligned}$$

Pero $Tu = 0$, pues $u \in \text{Ker } T$

De donde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Si escribimos $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n. \quad \blacksquare$$

Observación 2.2.5.5

$s_n(T)$ es llamado el n – esimo numero singular de T

La representación (2.2) es llamada la representación Hilbert – Schmidt de T .

El siguiente corolario, muestra que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito. Mas precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Corolario 2.2.5.6: $\overline{F(H)} = K(H)$.

Demostración:

Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H$; $(y_n)_{n \geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n, s_n(T) \rightarrow 0 \text{ si } (s_n(T)) \text{ es infinito.}$$

Si definimos

$$T_n = \sum_{k=1}^n s_k(T) \langle \cdot; x_k \rangle y_k \in F(H),$$

entonces $T_n \rightarrow T$, por lo tanto $T \in \overline{F(H)}$. ■

De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario:

Corolario 2.2.5.7: Sea el operador lineal B definido en un espacio de Hilbert H por

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x; x_n \rangle y_n$$

donde (x_n) , (y_n) son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces B es compacto y $a_n = s_n(T)$.

El siguiente corolario, calcula la adjunta de un operador compacto, vía la representación Hilbert-Schmidt.

Corolario 2.2.5.8: Sea

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$



Demostración:

Por linealidad y continuidad, basta demostrar que

$$(\langle \cdot ; x_n \rangle y_n)^* = (\langle \cdot ; y_n \rangle x_n)^*.$$

Sea

$$R = \langle \cdot ; x_n \rangle y_n \Rightarrow R.$$

Entonces

$$x = \langle x ; x_n \rangle y_n.$$

Luego

$$\langle Rx ; y \rangle = \langle \langle x ; x_n \rangle y_n ; y \rangle = \langle x ; x_n \rangle \langle y_n ; y \rangle = \langle x ; \langle y ; y_n \rangle x_n \rangle$$

por lo tanto,

$$R^* y = \langle y ; y_n \rangle x_n.$$

Es así que

$$R^* = \langle \cdot ; y_n \rangle x_n.$$



Observación 2.2.5.9

Como

$$T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x ; y_n \rangle x_n,$$

Entonces por el corolario 2.2.5.8 tenemos que

$$s_n(T) = s_n(T^*)$$

El siguiente teorema, demuestra otra representación de los números singulares.

Teorema 2.2.5.10

$$s_n(T) = \min_{\dim M=n-1} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego

$$s_1(T) = \|T\|$$

Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente:



Corolario 2.2.5.11: Sea A un operador compacto y B un operador acotado
Entonces:

$$s_n(AB) \leq \|B\|s_n(A)$$

$$s_n(BA) \leq \|B\|s_n(A)$$

El siguiente corolario puede encontrarse en I. Gohberg, S. Goldberg and K. Krupnik (2000), pag. 52. y afirma que:

Corolario 2.2.5.12: Si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación 2.2.5.13

Por el corolario anterior, si $A_n \rightarrow A$ entonces $s_k(A_n) \rightarrow s_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Ejemplo 2.2.5.14

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 2.2.5.15

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador:



$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Claramente el operador T es un operador lineal y acotado. Para cada n consideremos el operador

$$T_n x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Se cumple que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Como cada T_n es de rango finito entonces es compacto. Por el corolario 2.2.5.6 concluimos que T es compacto. Finalmente, por el corolario 2.2.5.7 tenemos que

$$s_n(T) = \frac{1}{n^2}.$$

Ejemplo 2.2.5.16

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Varias desigualdades de los números singulares son dados en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.5.17

Para cada $n \geq 1$ se cumplen las siguientes desigualdades:

1. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^n s_j(A)$
2. $\prod_{j=1}^n |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^n s_j(A)$
3. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^n [s_j(A)]^p, p \geq 1.$
4. $\sum_{j=1}^n [s_j(A+B)]^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A) + s_j(B))^p, p \geq 1.$



5. $\sum_{j=1}^n (s_j(AB))^p \leq \sum_{j=1}^n (s_j(A))^p (s_j(B))^p, p \geq 1.$
6. $\prod_{j=1}^n s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^n s_j(A)s_j(B)$
7. $\left(\sum_{j=1}^n (s_j(A+B))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n (s_j(A))^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n (s_j(B))^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$

2.2.6 Trazas de Operadores

Definición 2.2.6.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es un funcional lineal positivo unitariamente invariante, esto es $\varphi: J \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y $\varphi(U^*TU) = \varphi(T); \forall T \in J, \forall U \in \mathcal{L}(H)$ unitario.

En el contexto de espacios de Banach, la definición de traza puede reformularse de la siguiente forma:

Teorema 2.2.6.2: Sea J un ideal bilatero en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

Un funcional lineal φ sobre J es una traza si y solo si

$$\varphi(AB) = \varphi(BA); \forall A \in J, \forall B \in \mathcal{L}(H)$$

Demostración:

$$(\Leftarrow) \varphi(U^*(TU)) = \varphi(U^*(UT)) = \varphi((U^*U)T) = \varphi(T)$$

(\Leftarrow) Es conocido que todo operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert puede expresarse como combinación lineal de cuatro operadores positivos, es decir, si $B \in \mathcal{L}(H)$ entonces

$$B = \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i; \text{ donde } U_i \in \mathcal{L}(H) \text{ unitario, } \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3,4.$$

Primero veamos que

$$\varphi(UA) = \varphi(AU); \forall A \in J, \forall U \in \mathcal{L}(H) \text{ unitario.}$$

En efecto,

$$\varphi(UA) = \varphi(U^*UAU) = \varphi(AU).$$

Como

$$B = \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i,$$

entonces



$$\begin{aligned}\varphi(AB) &= \varphi\left(A \sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi(AU_i) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi(U_i A) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i U_i\right)A\right) \\ &= \varphi(BA).\end{aligned}$$

■

2.2.6.1 La traza de Operadores de Rango Finito

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Consideremos un operador de rango finito $F \in \mathcal{F}(H)$. Luego podemos considerar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ una base para $Im(F)$. Es conocido que F puede representarse de la forma:

$$Fx = \sum_{j=1}^m g_j(x) \varphi_j, \quad (g_j) \subset X^*.$$

La traza de F está definida

$$tr(F) = \sum_{j=1}^m g_j(\varphi_j).$$

Esta traza, definida sobre el ideal de operadores de rango finito, es un funcional lineal y verifica

$$tr(AF) = tr(FA); \quad \forall F \in \mathcal{F}(X), \forall A \in \mathcal{L}(X).$$

Por lo tanto, el funcional lineal tr es una traza sobre el ideal bilatero $\mathcal{F}(H)$. Además, el funcional tr es espectral, es decir, si $F \in \mathcal{F}(H)$ entonces

$$tr(F) = \sum_j \lambda_j,$$

donde (λ_j) son los valores propios no nulos de F .

2.2.6.2 La traza Usual

A continuación, vamos a definir el ideal de operadores nucleares.

En lo que sigue H denotará un espacio de Hilbert separable infinito dimensional.

Definición 2.2.6.2.1: Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. El operador T es llamado nuclear o de clase traza si

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

El espacio de operador nucleares es denotado por

$$S_1(H) = \left\{ A \in \mathcal{L}(H) : A \text{ es compacto y } \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty \right\}.$$

Usando la proposición 2.2.5.17 no es difícil demostrar que $S_1(H)$ es un ideal bilatero del espacio $\mathcal{L}(H)$ de operadores lineales y acotados.

A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares:

Teorema 2.2.6.2.2:

$$\| \cdot \|_1 : S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \text{ es una norma}$$

Demostración:

1) Como los $s_j(A) \geq 0, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \geq 0$

Además

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = 0 \Rightarrow s_1(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, A \in S_1(H)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 \cdot \lambda_j[A^*A]} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha| \sqrt{\lambda_j[A^*A]} = |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = |\alpha| \cdot \|A\|_1 \end{aligned}$$

3) Usando las desigualdades de los números singulares tenemos que

$$\|A + B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A + B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_1.$$



Teorema 2.2.6.2.3: $(S_1(H), \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach.



Demostración:

Sea $(A_n)_{n \geq 1} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad m, n \geq m_0 \Rightarrow \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon$$

Pero

$$\|A_m - A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Luego $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(H)$ el cual es completo, entonces existe un operador $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\|A_m - A\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, además como cada A_m es compacto, por el corolario 2.2.5.6, tenemos que A es compacto.

También

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon,$$

y haciendo $m \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^k s_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall n > m_0 \Rightarrow \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall n > m_0$$

Por lo tanto,

$$A_n \rightarrow A,$$

en la norma $\|\cdot\|_1$. ■

A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear:

Definición 2.2.6.2.4: Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y sea (φ_n) una base ortonormal de H . La traza usual de A está definida por:

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle$$

El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida:

Teorema 2.2.6.2.5: Si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$



converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de H y su suma es independiente de la elección de la base.

Demostración:

Sea

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x_n; y_n \rangle$$

la representación Hilbert-Schmidt de T . Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle y_n, e_k \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty. \end{aligned}$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_n, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k \rangle e_k \right\rangle = \langle y_n, x_n \rangle,$$

tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle y_n, x_n \rangle.$$

Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida. ■



Ejemplo 2.2.6.2.6

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Como

$$s_n(T) = \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

Entonces $T \notin S_1(H)$.

Ejemplo 2.2.6.2.7

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H .
Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Como

$$s_n(T) = \frac{1}{n^2},$$

y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

Entonces $T \in S_1(H)$.

Ejemplo 2.2.6.2.8

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por



$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \notin S_1(H)$.

Por otro lado, usando la definición 2.2.6.2.4, es sencillo demostrar las siguientes propiedades de la traza usual:

1. $Tr(\alpha T + \beta R) = \alpha Tr(T) + \beta Tr(R)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $T, R \in S_1$. Esto se sigue directamente de la definición.
2. $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ para $T \in S_1(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades

$$Tr(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^* e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, T e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle T e_k, e_k \rangle} = \overline{Tr(T)}.$$

3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante.

Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario:

Corolario 2.2.6.2.9: El funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

Para establecer más ejemplos de operadores nucleares, el teorema de Mercer es un ingrediente importante.



El teorema de Mercer se ubica en el contexto de operadores integrales positivos, su prueba puede ser I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), pag. 197 y afirma que:

Teorema 2.2.6.2.10 (Mercer)

Sea k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds;$$

entonces

$$k(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)x_k(t)\overline{x_k(s)}, \dots \dots \dots (2.3)$$

donde (x_n) es la sucesión de autovectores de A dadas por (1). Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[a, b] \times [a, b]$.

El teorema de Mercer nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.2.6.2.11: Sea k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds;$$

entonces A es nuclear y



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)$$

Demostración:

Tomando $t = s$ en (2) tenemos que

$$k(t, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) |x_k(t)|^2,$$

e integrando esta última expresión llegamos a

$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) \|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Como para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que $\langle Af, f \rangle \geq 0$, entonces A es un operador positivo, luego $\lambda_k(A) = s_k(A)$. Por lo tanto,

$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)$$

lo que nos dice que A es nuclear. ■

El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; por esta razón, algunos autores se refieren a la traza usual como una traza espectral, su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como son I. Gohberg S. Goldberg and M. Kaashoek (2003), J.R. Retherford (1993). El enunciado es el siguiente:

Teorema 2.2.6.2.12 (Lidskii)

Si $T \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T),$$



donde, $(\lambda_k(T))$ es la sucesión de valores propios de T ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

Observación 2.2.6.2.13

Por el teorema de Lidskii y el lema de Weyl, la traza usual es continua (acotada) con la norma $\| \cdot \|_1$, mas precisamente se cumple

$$|Tr(T)| \leq \| T \|_1, \forall T \in S_1(H).$$

Ejemplo 2.2.6.2.14

Por el corolario 2.2.6.2.11, si k una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ y para todo $f \in L^2[a, b]$ se cumple que

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds;$$

entonces A es nuclear y

$$\int_a^b k(t, t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador A en función de su núcleo, es decir, no depende de los autovalores de A .

Ejemplo 2.2.6.2.15

Sea g una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ con valores complejos. Sea

$$k(t, s) = \int_a^b \overline{g(x, t)}g(x, s)dx.$$

La función k satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Por el teorema de Lidskii, tenemos que

$$Tr(A) = \int_a^b k(t, t) dt = \int_a^b \int_a^b |g(s, t)|^2 ds dt.$$

2.2.6.3 Trazas de Dixmier

Definición 2.2.6.3.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es llamada singular si $\varphi(F) = 0, \forall F \in F(H)$.

La traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular y no es una extensión de la traza de operadores de rango finito, a diferencia de la traza usual. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de límites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia y dilatación. A continuación, presentamos la construcción de la traza de Dixmier asociado a un estado.

Durante toda esta sección, ℓ^∞ denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y C_0 el subespacio de sucesiones convergentes a cero.

Por Carey y Sukochev (2006) existe un estado ω en ℓ^∞ (un funcional lineal positivo en ℓ^∞ tal que $\omega(1,1,1,1, \dots) = 1$) con la siguiente propiedad: para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega \circ D_n = \omega \circ T = \omega \circ H = \omega,$$

donde

$$T: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

$$H: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, H(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots)$$

$$D_n: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, D_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n\text{-veces}}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n\text{-veces}}, \dots)$$



Observación 2.2.6.3.2:

Si un estado ω en ℓ^∞ es invariante por T , entonces $\omega(a) = 0$ para todo $a \in CN$, donde CN denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como CN es denso en C_0 , por continuidad tenemos que $\omega(a) = 0$ para todo $a \in C_0$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en C_0 . Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares.

Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador D_2 , veamos la construcción de la traza de Dixmier.

Consideremos el siguiente espacio:

$$M_{1,\infty}(H) = \left\{ T \in K(H) / \|T\|_{1,\infty} = \sup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \right\} < \infty \right\}$$

Usando la proposición 2.2.5.17 se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del algebra $\mathcal{L}(H)$.

Sea ω un estado singular en ℓ^∞ invariante por el operador D_2 (su existencia esta garantizada en la observación 2.2.6.3.2), sobre

$$M_{1,\infty}^+(H) = \{ T \in M_{1,\infty}(H), T \text{ es positivo} \}$$

definimos el funcional Tr_ω por

$$Tr_\omega(T) := \omega\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T)\right).$$

Como $s_k(U^*TU) = s_k(T)$ para todo $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario, entonces Tr_ω es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto:

Sean

$$T_1, T_2 \in M_{1,\infty}^+(H), \quad \alpha_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1), \quad \beta_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_2),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T_1 + T_2).$$

Por la proposición 2.2.5.17 se tiene que



$$\gamma_n \leq \alpha_n + \beta_n,$$

lo cual implica que

$$Tr_\omega(T_1 + T_2) \leq Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2).$$

Por A. Alberverio, D. Guido, A. Ponosov and S. Scarlatti (1996), para operadores positivos se cumple que

$$\sum_{k=1}^n s_k(T_1) + \sum_{k=1}^n s_k(T_2) \leq \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2).$$

La desigualdad anterior implica que

$$\alpha_n + \beta_n \leq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n},$$

y como

$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n} - \gamma_{2n} \right) \in C_0,$$

entonces

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n}\right)\right).$$

Veamos ahora que

$$\omega((\gamma_{2n})) = \omega((\gamma_n)).$$

En efecto, como ω es invariante por D_2 , la igualdad anterior es equivalente a que

$$\omega(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) = \omega((\gamma_n)).$$

Como ω es un estado singular, basta verificar que

$$(\gamma_n) - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) \in C_0.$$

Restando lo anterior tenemos

$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \dots),$$

luego vemos que esta última sucesión converge a cero.

Para esto, basta verificar que



$$(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n}) \in C_0.$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} &= \frac{1}{\log(2n)} \sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1 + T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2) \\ &= \frac{\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\log(2n+1)} \gamma_{2n-1} - \frac{s_{2n}(T_1 + T_2)}{\log(2n+1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tomamos ω y concluimos que

$$Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2) \leq Tr_\omega(T_1 + T_2),$$

Concluimos entonces que Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}^+(H)$.

Definición 2.2.6.3.3. La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(T) := Tr_\omega(T_+) - Tr_\omega(T_-)$$

donde $T_+ = \frac{1}{2}(T + |T|)$ y $T_- = -\frac{1}{2}(T - |T|)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de T respectivamente, donde $|T|$ denota la raíz cuadrada de operador T^*T .

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(T) := Tr_\omega(Re(T)) + i Tr_\omega(Im(T))$$

donde $Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $Im(T) = \frac{-i}{2}(T - T^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de T respectivamente.

El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

Teorema 2.2.6.3.4

- 1) Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
- 2) $Tr_\omega(T) = 0, \forall T \in S_1(H)$.
- 3) Tr_ω es una funcional lineal continuo con la norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$, más precisamente,

$$|Tr_\omega(T)| \leq \|T\|_{1,\infty} \quad \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$



Demostración:

1) Todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(\text{Re}(T))_+$, $T_2=(\text{Re}(T))_-$, $T_3=(\text{Im}(T))_+$, $T_4=(\text{Im}(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. como Tr_ω es aditivo en $M_{1,\infty}(H)$, entonces Tr_ω se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal Tr_ω sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^*TU) = s_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{L}(H)$ operador unitario.

2) Como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, donde $T_1=(\text{Re}(T))_+$, $T_2=(\text{Re}(T))_-$, $T_3=(\text{Im}(T))_+$, $T_4=(\text{Im}(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Basta verificar que si $T \in S_1(H)$ es un operador positivo entonces $Tr_\omega(T) = 0$. En efecto, como $T \in S_1(H)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty,$$

luego

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \leq \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T).$$

Tomando limite a la anterior desigualdad, concluimos que

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T) \rightarrow 0,$$

y como ω es un estado singular, entonces $Tr_\omega(T) = 0$.

3) Puede verificarse que el estado ω es acotado y $\|\omega\| = 1$, por lo tanto

$$|Tr_\omega(T)| \leq \|T\|_{1,\infty}, \forall T \in M_{1,\infty}(H).$$

El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo T en $M_{1,\infty}(H)$. ■

Definición 2.2.6.3.5. Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado Dixmier medible si el numero $Tr_\omega(T)$ no depende del estado ω elegido.

Observación 2.2.6.3.6

Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, Tr_ω se anula en el ideal de operadores de rango finito. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular.

Alain Connes sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación D_2 . Veamos esto:

Sea el operador

$$M: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty, M((x_n)) = \left(\frac{\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \right).$$

Consideremos φ un estado singular, por A. Pietsch (2013) tenemos que

$$MD_2x - Mx \in C_0, \forall x \in \ell^\infty,$$

luego, por continuidad de φ tenemos que

$$\varphi MD_2 = \varphi M.$$

Tomando $w = \varphi M$ se tiene

$$wD_2 = w,$$

luego w es invariante por el operador dilatación D_2 .

La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes-Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el recíproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por \mathcal{D} el conjunto de trazas de Dixmier y por \mathcal{C} el conjunto de trazas de Connes-Dixmier, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Ejemplo 2.2.6.3.7

Sea (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Consideremos el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Luego



$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

Claramente $T \in M_{1,\infty}(H)$ y

$$Tr_\omega(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, T es Dixmier medible.

Observación 2.2.6.3.8

Puede encontrarse en S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin (2012) que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que:

Si $T \in M_{1,\infty}(H)$ entonces

$$Tr_\omega(T) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right).$$

Ejemplo 2.2.6.3.9

Sea el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definida por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

Puede demostrarse que

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \in M_{1,\infty}(L^2[0,1])$.

Ahora supongamos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces



$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores. Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que

$$\begin{aligned} Tr_{\omega}(K) &= \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(K) \right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Dixmier medible.

2.2.6.4 Aplicaciones de trazas

Como primera aplicación de la teoría de trazas, en particular la traza de Dixmier, tenemos el comportamiento asintótico de los autovalores de un operador. Veamos esto:

Por Lord, Sukochev y Zanin (2021), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.6.4.1

Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T),$$

existe.

Observación 2.2.6.4.2

Como consecuencia directa del teorema 2.2.6.4.2, podemos afirmar que si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 1,$$



entonces las sucesiones $(\log(n+1))$ y $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$ son asintóticamente equivalentes.

Por otra parte, si $T \in M_{1,\infty}(H)$ es un operador positivo Dixmier medible y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) = 0,$$

Entonces la sucesión $(\log(n+1))$ crece más rápidamente que la sucesión $(\sum_{k=1}^n \lambda_k(T))$.

Como segunda aplicación de la teoría de trazas podemos comentar lo siguiente:

Basados en el trabajo de Marchenko, H. Aden y Carl, B. (1996) inventaron el método del operador o método de traza para encontrar soluciones para la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv):

$$v_t = v_{xxx} + 3v_x^2$$

La principal idea de este método consiste en:

Dada una ecuación diferencial parcial no lineal y una solución escalar específica, el primer paso para encontrar otras soluciones es trasladar la ecuación no lineal dada, a una ecuación de operadores con su respectiva solución. Habiendo obtenido esta solución, el segundo paso es transferirla a una solución escalar usando un funcional adecuado (una traza). Este método fue usado por diferentes autores a otras ecuaciones diferenciales no lineales como la Kdv modificada, Sine-Gordon y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP).

CONCEPTUAL

La construcción de la traza usual puede realizarse a partir del método de subálgebras sumergidas con la propiedad de aproximación (Gohberg, Goldberg & Krupnik, 2000). La traza de operadores de rango finito permitirá,



usando un teorema de extensión, construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares.

Otras trazas podrán construirse usando límites generalizados invariantes por dilatación, como son, la traza de Dixmier y Connes-Dixmier (Connes, 1990).

Aplicaciones de trazas pueden ser realizadas al cálculo de solución de ciertas ecuaciones diferenciales, usando sus propiedades de linealidad y su nulidad en los conmutadores.

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003)

Consideremos un espacio un espacio vectorial $(H; +; K; \cdot)$ Donde K es \mathbb{R} o \mathbb{C} . Un producto interno es una aplicación:

$$\langle \cdot ; \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$$

tal que se cumple:

- Definida positiva $\langle x; x \rangle \geq 0 \forall x \in E \wedge \langle x; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Lineal en la primera variable: $\langle \alpha x + \beta y; z \rangle = \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle \forall x, y, z \in E \wedge \alpha, \beta \in K$
- Es hermítica $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle} \forall x, y \in E$

El par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en H es llamado espacio prehilbert y si la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ es completa, entonces el par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert.

Operadores lineales y acotados en Espacios de Hilbert (Gohberg, Goldberg & Kaashoek, 2003)

Sea $(X; \| \cdot \|_X)$ y $(Y; \| \cdot \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \rightarrow Y$ que satisface:

- $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall x; y \in X$



- $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in X \wedge \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

“ T ” así definido se llama operador lineal.

Sea $(X; \|\cdot\|_X)$ y $(Y; \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$, para algun $M > 0$, “ T ” es llamado operador lineal acotado. Además, Si $X = Y$ el espacio $L(X)$ representará el espacio de operadores lineales y acotados en X .

Operadores Compactos (Retherford, 1993)

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$, T es llamado compacto si para toda sucesión acotada (a_n) en H , $(T(a_n))$ tiene una subsucesion convergente en H . El espacio de operadores compactos en H es denotado por $K(H)$ y define un ideal del algebra de operadores lineales y acotados $L(H)$.

Sucesión de números singulares (Retherford, 1993)

La sucesión de números singulares de un operador compacto T definido sobre un espacio de Hilbert H , es una sucesión de decreciente de números no negativos $(s_n(T))$, donde $s_n(T) = (T^*T)^{1/2}$.

Ideal de Operadores (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Sea $L(H)$ denota el espacio de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert H . Un ideal J de operadores de $L(H)$ es un subespacio vectorial tal que si $A \in L(H)$ y $T \in J$, entonces $AT, TA \in J$.

Funcional Traza (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es un funcional lineal tal que $\tau(AT) = \tau(TA), \forall T \in J, \forall A \in L(H)$.



Traza Singular (Lord, Sukochev & Zanin, 2012)

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es llamada singular si $\tau(F) = 0, \forall F$ operador de rango finito, es decir, para todo operador cuya dimensión de su imagen es finita.

CAPÍTULO III. HIPOTESIS Y VARIABLES

3.1. HIPÓTESIS

Hipótesis general.

El funcional traza definido sobre el espacio de operadores de rango finito y los límites generalizados permitirán construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares así como la traza de Dixmier y Connes-Dixmier.

Hipótesis específica.

La propiedad de singularidad de la traza de Dixmier permitirá demostrar que este funcional no es una extensión de la traza usual.

Propiedades de un funcional traza permitirá aplicar la teoría de trazas al cálculo de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

3.2. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES

Variable dependiente

Traza de operador sobre espacio de Hilbert.

Variable independiente

Operador lineal sobre un espacio de Hilbert



3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Dependiente Traza de operador sobre espacio de Hilbert	Traza Usual Traza de Dixmier Traza de Connes-Dixmier	- Traza definida sobre el ideal de operadores nucleares - Traza definida sobre el ideal de operadores de Lorentz - Traza de Dixmier escogiendo otro estado.	- $Tr(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$ - $Tr(T) = w\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n s_k(T)\right)$ - $Tr(T) = w\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n S_k(T)\right)$	Deductivo	Analítica
Independiente Operador lineal sobre un espacio de Hilbert	Operador lineal acotado	La norma del operador es finita	$\ T\ < \infty$	Deductivo	Analítica

CAPITULO IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica. A esta investigación le corresponde el código UNESCO 120201 y el código del plan nacional CTI 04050102.

El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar los ideales de operadores de rango finito, clase traza o nucleares y el ideal de operadores de Lorentz. Luego, se pretender definir los funcionales traza usual y traza de Dixmier. El trabajo termina con una aplicación de la teoría de trazas en la solución de la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv).

4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un tratamiento estadístico de datos.

4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO

El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao-Trabajo Remoto.

4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La técnica a usarse en este trabajo de investigación es la inductiva pues pasamos de un caso particular (caso matricial) a un caso general (caso de operadores).

La representación de operadores de rango finito en espacios de Hilbert como combinación lineal de operadores de rango uno, nos llevara a definir la traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Esto será de utilidad para construir la traza usual sobre el espacio de operadores nucleares.

El teorema espectral para operadores compactos nos introducirá la sucesión de números singulares de un operador compacto. Esta sucesión aparece de tanto en la traza usual como en las trazas de Dixmier y Connes-Dixmier.

La teoría de límites generalizados es usada para la construcción de algunas trazas singulares como la traza de Dixmier. Esta teoría se basa en la forma analítica del teorema de extensión de Hahn Banach.

Para ejemplificar el cálculo de ciertas trazas de Dixmier, estudiamos la teoría de operadores Volterra (Gohberg & Krein, 1970).

Los instrumentos que se usarán para la recolección de la información necesaria serán, lápiz, papel, artículos científicos, textos especializados y un laptop personal.

4.6. ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

Con el estudio de la traza para operadores de rango finito se determina la traza usual sobre el ideal de operadores de clase traza o nucleares en espacios de Hilbert. Luego, se estudia varias propiedades de la traza usual.

A continuación, usando el teorema de extensión de Hahn Banach, se construyen límites generalizados invariantes por dilatación. Esto determinará la traza de Dixmier y Connes Dixmier sobre el ideal de operadores de Lorentz.

Finalmente, basados en los resultados de Aden y Carl mostraremos algunas aplicaciones de la teoría de trazas para hallar soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.



CAPÍTULO V. RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{L}(H)$.

2) Por el teorema 2.2.4.8, el teorema de Bolzano- Weierstrass puede extenderse a todo espacio normado de dimensión finita.

3) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma.

4) El teorema para operadores compactos autoadjuntos afirma que; Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

5) En general, si el operador T es compacto se tiene el teorema espectral para operadores compactos el cual afirma que:

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \dots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n \geq 1} \subset H_1$; $(y_n)_{n \geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n.$$

Además, se tiene que $s_n(T) \rightarrow 0$ si $(s_n(T))$ es infinito.

6) Por el corolario corolario 2.2.5.6, todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito.



7) Por el corolario 2.2.5.8, si

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n$$

es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; y_n \rangle x_n.$$

8) Por el teorema 2.2.5.10, otra forma de expresar los números singulares de un operador compacto es la siguiente:

$$s_n(T) = \min_{\substack{\dim M=n-1 \\ x \perp M}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego

$$s_1(T) = \|T\|.$$

9) El corolario 2.2.5.12 afirma que si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto nos conduce a afirmar que si $A_n \rightarrow A$ entonces $s_k(A_n) \rightarrow s_k(A)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

10) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$.

11) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$.



12) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

13) Por el teorema 2.2.6.2.2, la aplicación

$$\| \cdot \|_1: S_1(H) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)$$

define una norma en $S_1(H)$.

14) Por el teorema 2.2.6.2.3, el par $(S_1(H), \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach

15) Por el teorema 2.2.6.2.5, si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T e_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier base ortonormal (e_k) de H y su suma es independiente de la elección de la base.

16) El corolario 2.2.6.2.9, nos permite afirmar que el funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

17) Con el ejemplo 2.2.6.2.15 y el teorema de Mercer, si g una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ con valores complejos. Sea

$$k(t, s) = \int_a^b \overline{g(x, t)} g(x, s) dx.$$

La función k satisface las hipótesis del teorema de Mercer. Por lo tanto,



$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Por el teorema de Lidskii, tenemos que

$$Tr(A) = \int_a^b k(t, t) dt = \int_a^b \int_a^b |g(s, t)|^2 ds dt.$$

18) El teorema 2.2.6.3.4 nos dice que Tr_{ω} es una traza singular acotada sobre el ideal $M_{1, \infty}(H)$.

19) El ejemplo 2.2.6.3.7 establece que si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H . Entonces el siguiente operador compacto

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

cumple

$$s_n(T) = \frac{1}{n}.$$

y claramente $T \in M_{1, \infty}(H)$ y

$$Tr_{\omega}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2.$$

Por lo tanto, T es Dixmier medible.

20) El ejemplo 2.2.6.3.9 establece que el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(K) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

Luego, como



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} = \infty,$$

entonces $K \in M_{1,\infty}(L^2[0,1])$.

Por otra parte, si suponemos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces

$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores. Usando el corolario 2.2.6.3.9 tenemos que

$$\begin{aligned} Tr_{\omega}(K) &= \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(K) \right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, K es Dixmier medible.

21) El teorema 2.2.6.4.1 establece la caracterización de un operador positivo Dixmier medible, más precisamente, afirma que:

Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T),$$

existe.

5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 tenemos que los ideales $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{L}(H)$, mas aun, tienen estructura de ideales bilateros del algebra $\mathcal{L}(H)$.

2) Por el teorema 2.2.5.1, todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existen operadores compactos no autoadjuntos que no tienen autovalores, estos operadores son llamados Volterra.

3) Por el corolario 2.2.5.8, si

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n$$

es la representación Hilbert-Schmidt de T . Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, y_n \rangle x_n.$$

Por lo tanto, podemos inferir que $s_n(T) = s_n(T^*)$.

4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$. De esto podemos inferir que T no es nuclear.

5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$. De esto podemos inferir que T es nuclear.

6) Por la observación 2.2.6.2.13, se puede inferir que el funcional Tr es acotada con la norma $\|\cdot\|_1$.



7) Usando la observación 2.2.6.3.8 tenemos que para todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ se cumple

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\omega(T) &= \omega\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T)\right) \\ &= 0, \forall \omega \text{ estado singular invariante por } D_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la traza de Dixmier de todo operador en $M_{1,\infty}(H)$ depende de sus autovalores y multiplicidades algebraicas.

5.3 OTRO TIPO DE RESULTADOS DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA Y LA HIPÓTESIS

Ninguno.

CAPÍTULO VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS.

Con respecto a lo hecho en esta investigación tenemos la definición de la traza usual y la traza de Dixmier asociada a un estado singular invariante por dilatación. La traza usual de un operador nuclear T se define por

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle,$$

Por el teorema 2.2.6.2.5 esta suma no depende de la base ortonormal elegida y por lo tanto este funcional está bien definido. Hemos visto que este funcional es lineal e unitariamente invariante lo que nos lleva a inferir que es una traza sobre el ideal de operadores nucleares. Por otra parte, por la observación 2.2.6.2.13, la traza usual es acotada con la norma $\|\cdot\|_1$. Finalmente, por el teorema de Lidskii, la traza usual puede expresarse como la suma

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T),$$

lo que nos dice que la traza usual es espectral.

Respecto a la traza de Dixmier, hemos visto su construcción usando límites generalizadas invariantes por dilatación. Por el teorema 2.2.6.3.4, la traza de Dixmier es un funcional lineal unitariamente invariante, y por lo tanto es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$. El mismo teorema nos permite afirmar que la traza de Dixmier es singular y acotada con la norma $\|\cdot\|_{1,\infty}$. Finalmente, si consideramos la observación 2.2.6.3.8 se puede inferir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores del operador considerado y sus multiplicidades algebraicas.



6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES.

En A. Pietsch (2013) se estudia de manera exhaustiva las trazas de Dixmier y Connes-Dixmier. En este artículo se estudia el conjunto de trazas de Dixmier y el conjunto de trazas de Connes-Dixmier; se compara ambos conjuntos y se demuestra que existen trazas de Dixmier que no es de Connes.Dixmier.

En A. Albeverio (1996) se construyen otras trazas singulares diferentes de la traza de Dixmier. Es en este artículo que se introducen los operadores excéntricos generalizados.

6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA

NINGUNA

CONCLUSIONES

1) Por los teoremas 2.2.4.4 y 2.2.4.6 podemos concluir que $K(H)$ y $F(H)$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{L}(H)$.

2) Por el teorema 2.2.4.8, se puede concluir que el teorema de Bolzano-Weierstrass admite extensión a todo espacio normado de dimensión finita.

3) Por el teorema 2.2.5.1, concluimos que todo operador compacto autoadjunto tiene al menos un autovalor que es su norma o el inverso aditivo de su norma. Sin embargo, existen operadores compactos no autoadjuntos sin autovalores.

4) Por el ejemplo 2.2.5.14, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n}$. Esto nos conlleva a concluir que T no es nuclear.

5) Por el ejemplo 2.2.5.15, si (e_n) una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces el siguiente operador:

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

es compacto y $s_n(T) = \frac{1}{n^2}$. Esto nos conlleva a concluir que T es nuclear.

6) Por el ejemplo 2.2.5.16, el operador compacto

$$K: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$$

definido por

$$(Kf)(t) = 2i \int_0^t f(s) ds.$$

satisface

$$s_n(T) = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$



Esto nos lleva a concluir que T no es nuclear. Por otra parte, si suponemos que K tiene un autovalor λ con autovector no nulo f , entonces

$$Kf = \lambda f,$$

lo que implica

$$2i \int_0^t f(s) ds = \lambda f(t).$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$2if(t) = \lambda f'(t), f(0) = 0,$$

lo que implica que $f = 0$, lo que es una contradicción, por lo tanto, el operador K no tiene autovalores.

7) Por la observación 2.2.6.3.8, se puede concluir que la traza de Dixmier es espectral, es decir, esta depende de los autovalores y multiplicidades algebraicas del operador considerado. Mas precisamente, tenemos que:

Si $T \in M_{1,\infty}(H)$ entonces

$$Tr_\omega(T) = \omega \left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^n \lambda_k(T) \right).$$

RECOMENDACIONES

El libro más completo que trata la teoría de trazas de operadores en espacios de Banach y Hilbert es I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik (2000), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo. Por otra parte, la teoría de trazas singulares y sus aplicaciones ha sido estudiado de manera exhaustiva en los últimos veinte años, la referencia más completa de este tema es S. Lord , F. Sukochev and D. Zanin (2012), por lo cual se recomienda su lectura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aden, C. and Carl, B. (1996). On realizations of solutions of the KdV equation by determinants on operator ideals. *J. Math. Phys.* 37, 1833-1857.

Albeverio, A., Guido, D., Ponosov, A. and Scarlatti, S. (1996). Singular traces and compact operators. *J. Funct. Anal.* 137, 281-302.

Alcántara-Bode, J. (2002), Rearrangings of Series in Banach Spaces and some problems in number theory. *Pro Mathematica. XVI*, 98-105.

Ben-artzi, A. (1984). Traces of compact operators. *Integral Equations Operator Theory* 7, 310-324.

Brislaw, C. (1988). Kernels of trace class operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 1181-1190.

Douglas, R. G. (1966). On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert Spaces. *Proc Amer. Math. Soc.*, 17, 413-415.

Carey, A. L. and Sukochev, F. A. (2006). Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry. *Uspek hi mat. Nauk*, 61(6(372)):45-110.

Connes, A. (1990). *Geometrie non commutative*. Paris: Interditions.

Dixmier, J. (1966). Existences de traces non normales, C.R. Acad. Sci. Paris 262.

Enflo, P. (1973). A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Math.* 130, 309-317.



Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces, *J. Funct. Anal.* 271, no.3, 566-576.

Fuhrmann, P.A. (1981). *Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. Beer Sheva: McGraw-Hill.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000). *Traces and determinants of linear operators, Operator Theory: Advances and Applications*. Basel: Birkhauser Verlag.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*. Basel: Birkhauser.

Gohberg, I. and Krein, M. G. (1985). *Introduction to the Theory of Non-selfadjoint Operators*. Moscow: Translations of Mathematical Monographs.

Gohberg, I. and Krein, M. G. (1970). *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert Space*. Moscow: Translations of Mathematical Monographs.

Guido, D. and Isola, T. (2002). On the Domain of Singular Traces. *J. Funct. Anal.* 13, 667-674.

Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014). The trace formula in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics* 203, 1-16.

Jorgens, K. and Roach, G.F. (1982). *Linear Integral Operators*. Boston: Pitman Advanced Publishing Program.



Kwapień, S. (1972). Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector coefficients. *Studia Math.* 44, 583-595.

Pietsch, A. (1987). *Eigenvalues and s-Numbers*, Geest & Portig. Leipzig: Cambridge Univ. Press.

Pietsch, A. (2013). Connes-Dixmier versus Dixmier traces. *Integral Equations Operator Theory* 77(2), 243-259.

Pisier, G. (1988). Weak Hilbert spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society* 56, 547-579.

Retherford, J. R. (1993). *Hilbert Space: Compact Operator and the Trace Theorem*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces, Theory and Applications*. Berlin: De Gruyter.

Varga, J.V. (1989). Traces on irregular ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.* 107, 715.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA: TRAZAS DE OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p>Problema General</p> <p>¿Qué otras trazas de operadores en espacios de Hilbert podemos definir?</p> <p>Problemas Específicos</p> <p>1. ¿Toda traza es una extensión de la traza usual?</p> <p>2. ¿Qué aplicaciones de los funcionales trazas existen?</p>	<p>Objetivo General</p> <p>Construir la traza usual, traza de Dixmier, Connes-Dixmier de operadores en espacios de Hilbert.</p> <p>Objetivos Especificas</p> <p>1. Mostrar que existen trazas que no son extensiones de la traza usual.</p> <p>2. Mostrar las aplicaciones de los funcionales traza para hallar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.</p>	<p>Hipótesis General</p> <p>El funcional traza definido sobre el espacio de operadores de rango finito y los límites generalizados permitirán construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares así como la traza de Dixmier y Connes-Dixmier.</p> <p>Hipótesis Especifica</p> <p>1. La propiedad de singularidad de la traza de Dixmier permitirá demostrar que este funcional no es una extensión de la traza usual.</p> <p>2. Propiedades de un funcional traza permitirá aplicar la teoría de trazas al cálculo de la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.</p>	<p>Variable dependiente</p> <p>Traza de operador sobre espacio de Hilbert.</p> <p>Variable independiente</p> <p>Operador lineal sobre un espacio de Hilbert</p>	<p>Método de investigación</p> <p>El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p> <p>Tipo de Investigación</p> <p>Investigación básica.</p> <p>Diseño de la investigación</p> <p>será teórico y consiste en, inicialmente, estudiar los ideales de operadores de rango finito, clase traza o nucleares y el ideal de operadores de Lorentz. Luego, se pretender definir los funcionales traza usual y traza de Dixmier. El trabajo termina con una aplicación de la teoría de trazas en la solución de la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv).</p>

