UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“UNA IDENTIFICACIÓN DE UN GRUPO DE LIE, CON EL PRODUCTO DIRECTO DEL TORI Y EL ESPACIO EUCLIDEO”

AUTOR: WILFREDO MENDOZA QUISPE

(Período de Ejecución: Del 01.05.2021 al 30.04.2022)

(Resolución de Aprobación: N° 324-2021-R)

Callao – 2022

PERÚ

DEDICATORIA

A mi núcleo familiar, en especial a mis hijas Valeria y Natalia, quienes son la motivación de mi lucha cotidiana.

AGRADECIMIENTO

A la UNAC que, a través de su VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando con mucho esmero y responsabilidad la realización de la noble tarea de Investigación.

A mi familia, por el estímulo recibido y la comprensión durante el lapso en que este trabajo absorbió gran parte del tiempo que debí haberles dedicado.

A todas las personas que, de alguna manera, estuvieron motivándome en todo momento para la ejecución y culminación del proyecto.

INDICE

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se encuentra enmarcado en la geometría y topología diferencial; para el desarrollo del trabajo en mención se requiere algunos tópicos de: Álgebra, Análisis y Topología; lo cual presentamos en el capítulo II, específicamente en (2.2) y (2.3) que corresponde al Marco Teórico y Definiciones de Términos básicos respectivamente; así mismo desarrollamos muy brevemente lo referente a lo que es un grupo de Lie "G" y su respectiva derivada de Lie "L_G", en este contexto adicionamos lo referente a variedad diferencial y campos vectoriales sobre G, invariante bajo traslación a izquierda que forman un álgebra de Lie, linealmente isomórfico al espacio tangente E, en el elemento identidad **e** de G; convirtiéndose E en un álgebra de Lie.

En los capítulos III y IV presentamos las hipótesis, variables y el diseño metodológico respectivamente; y en el capítulo V exponemos los resultados: descriptivos, inferenciales y otros, finalmente en el capítulo VI hacemos la discusión de resultados.

Palabras claves: Grupo de Lie, Álgebra de Lie, Tori, representación adjunta, isomorfismo, conexo, compacto, formas, entero de Lattice.

ABSTRACT

This research work is framed in geometry and differential topology; For the development of the work in question, some topics are required: Algebra, Analysis and Topology; which we present in chapter II, specifically in (2.2) and (2.3) that corresponds to the Theoretical Framework and Definitions of Basic Terms respectively; Likewise, we briefly develop what is a Lie group "G" and its respective Lie derivative. In this context, we add the differential variety and vector fields on G invariant under translation to the left that form a Lie algebra, linearly isomorphic to the tangent space, E, at the identity element e of G; making E a Lie algebra.

In chapters III and IV we present the hypotheses, variables and the methodological design respectively; and in chapter V we present the results: descriptive, inferential and others, finally in chapter VI we discuss the results.

Keywords: Lie group, Lie algebra, Tori, adjoint representation, isomorphism, connected, compact, shapes, Lattice integer.

INTRODUCCIÓN

La Simetría de algunos objetos matemáticos, motivan o dan lugar al estudio de la estructura algebraica de grupo, es decir, las simetrías son invariantes bajo la acción de ciertas transformaciones. Tales transformaciones, forman un grupo, pues pueden componerse e invertirse; y además hay una transformación que al componerse con cualquier otra no lo altera. De esta manera y una vez más al tener la definición axiomática de grupo podemos hacer o estudiar algebra sin preocuparnos de donde proviene. Sin embargo al estudiar la teoría de representación nos enseña que se puede tomar un grupo por más abstracta que sea su estructura, este puede se "realizar" como transformaciones sobre un espacio. De esta forma representar un grupo abstracto, de alguna manera es linealizarlo así como lo señala Geordie Williamson en su obra titulada "Representación Theory and geometry" que fue presentada en: International Mathematical Congress, 2018. Para una mejor diserción y/o entendimiento, objetos que se pueden definir con una lista de condiciones algebraicas; también se pueden entender si lo hacemos actuar sobre un espacio ambiente. De esta manera la relación existente entre grupos y transformaciones, es establecida desde aproximadamente fines del siglo XIX. Época en que la teoría de grupo ya había deslumbrado en el algebra de la mano de **Evaristo Galois.**

Al mismo tiempo, Riemann y otros habían hecho lo propio con la geometría al descubrir los espacios no euclidianos. En este sentido y contexto; es Klein quien propone utilizar la teoría de grupos para establecer un orden en la geometría que actualmente no es otra cosa, que el estudio de aquello que se mantiene invariante bajo un grupo de simetrías. Diferentes grupos darán lugar a geometrías diferentes manteniendo un cierto patrón ó parámetro: Grupos más grandes y abstractos actuarán de forma más variada; manteniendo menos invariantes y, por tanto, dan lugar a geometrías menos "rígidos".

Los grupos de Lie son sin lugar a duda las clases especiales más importantes de variedades diferenciables en otras palabras los grupos de Lie tienen dos estructuras; la de variedad diferenciable y la de grupo propiamente dicho. En tal sentido buscamos en este trabajo la identificación de un grupo de Lie "G" con el producto directo del Tori T^m y del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA:

Un grupo de Lie se denomina Discreto, cuando es 0-dimensional (como variedad), es a lo más numerable y posee la Topología trivial, estableciendo el recíproco es decir; un grupo (abstracto) numerable, es un grupo discreto. Particularmente un grupo de Lie, es un grupo topológico, cuya topología es la inducida en el grupo por la estructura de variedad. De este modo nace la interrogante: Bajo que condiciones se puede asegurar que un grupo topológico admite una estructura de variedad diferenciable que lo hace grupo de Lie. Tal problema es uno de los diez propuestos por Hilbert en 1900, exactamente es el quinto problema. En el año 1952 este problema de Hilbert fue resuelto con la contribución de: Gleason, D. Montgomery y L. Zippin. Dicho resultado se puede enunciar del modo siguiente: **"Un grupo topológico de Haussdorf es un grupo de Lie si y solamente si es variedad topológica. Lo cual es equivalente que no contiene subgrupos arbitrariamente pequeños y es localmente compacto".**

La confluencia de las ramas matemáticas donde se encuentra la teoría de grupos de Lie son: La topología, el análisis, la geometría diferencial y el álgebra. Su desarrollo de dicha teoría exige y requiere técnicas de estos cuatro campos con incidencias en unos más que otros según el punto de vista enfocado.

En este trabajo estableceremos los fundamentos para el estudio de los grupos de Lie, y por ende su identificación con el producto directo de dos variedades conocidas (Tori y espacio Euclidiano), la importancia Central para la teoría de Lie es la relación entre un grupo de Lie y su algebra de Lie de campos vectoriales a izquierda. En esta teoría se puede estudiar ciertas correspondencias tales como por ejemplo correspondencia entre subgrupos y subalgebras; entre homomorfismos de grupos de Lie y homomorfismos de sus algebras de Lie; así como también las propiedades de la aplicación exponencial, lo cual es una generalización para grupos de Lie de la exponenciación matricial, y esto a su vez proporciona un enlace clave entre un grupo de Lie y su algebra de Lie.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Problema General

¿De que forma, se podría identificar un grupo de Lie, abeliano conexo con el producto directo de dos variedades?

Problema Específico

a) ¿De qué manera se pueden identificar un grupo de lie G con el producto directo del Tori T^m y el espacio $\mathbb{R}^n$?.

b) ¿Bajo que condición se puede realizar integración sobre variadades Riemanianas y sobre grupos de Lie?.

1.3 OBJETIVOS

Objetivo General

Establecer un "isomorfismo" que permita identificar un grupo de Lie con el producto de dos variedades diferenciables.

Objetivo Específico

a) Mostrar que cada grupo de Lie, abeliano Conexo es isomorfo al producto directo del Tori T^m y el espacio $\mathbb{R}^n$.

b) Calcular y/o determinar la integral de una función diferenciable sobre grupos compactos de Lie y variedades Riemanianas.

1.4 JUSTIFICACIÓN

La comprensión e identificación de muchos objetos matemáticos como: algebraicos, topológicos y otros; resultan ser muy engorrosos, es el caso que en nuestro trabajo propuesto, buscamos identificar un grupo de lie abeliano conexo como producto directo de dos variedades diferenciables cuya estructura es de fácil interpretación y comprensión tal identificación se hace mediante los denominados difeomorfismos; de este modo el estudio de los grupos de Lie resultan ser muy importantes en el análisis matemático, física y geometría, porque además sirven para describir la simetría de estructuras analíticas.

1.5 LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN

- **Limitante Teórico**

El método y/o forma de identificar y comparar un objeto matemático con otro se realiza mediante las llamadas biyecciones, isomorfismos, homeomorfismos y difeomorfismos; los cuales tendrán dependencia de la estructura sobre lo cual se estaría trabajando, es el caso que en el proyecto buscamos identificar un grupo de Lie "G" con un producto de variedades diferenciables, razón por la cual, la **limitante teórica** de nuestra investigación se circunscribe en el ámbito matemático de las variedades diferenciables, las cuales son estructuras geométricas y topológicas.

- **Limitante Temporal :** No aplica
- **Limitante Espacial:** No aplica

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

2.1.1 Internacionales

Las nociones fundamentales de los grupos de Lie y algebras de Lie fue introducido por el matemático noruego Sophus Lie (1842 – 1899) en un sinnúmero de trabajos en el año 1872. Para explicar la idea básica de los grupos de Lie, nos remontamos a principios del siglo XIX, son tres las vertientes que constituyen la Teoría Liesiana. En principio consideremos las ideas del francés Evariste Galois (1811 – 1832) uno de los problemas del que se trataba hacia 1800 era buscar una fórmula que expresará las raíces de un polinomio de quinto grado en términos de sus coeficientes. El señaló que las raíces de un polinomio deben efectuarse a través de las permutaciones del conjunto de raíces que sean de origen "algebraico". El conjunto de tales permutaciones es un grupo, conocido como "Grupo de Galois". Otra idea de gran importancia en este contexto, fue realizado alrededor de 1830, por Bolyai, Lobachevsky y Gauss, fue la existencia de geometrías no euclidianas, el descubrimiento de tales geometrías generó una intensa actividad: se sucedieron los ejemplos de geometrías no euclídeas y las investigaciones sobre estos nuevos objetos.

En tercer lugar, es oportuno mencionar los celebres trabajos del francés Joseph Fourier (1768-1830) en una memoria presentada en 1807; pero publicada en 1822. Fourier presenta su método para resolver ecuaciones diferenciales, además se presentan profundas generalizaciones de la teoría de Fourier, que están inmersas en la teoría de representaciones de grupos de Lie. Otro resultado de gran importancia de Elie Cartan es que los espacios simétricos son necesariamente cocientes de la forma G/K , donde G es un grupo de lie y K es un subgrupo bien determinado. Sophus Lie tuvo como motivación considerar que los llamados grupos de Lie fue imaginar que estos grupos jugarían un rol análogo al de los grupos de Galois, pero para solucionar ecuaciones diferenciales.

2.1.2 Nacionales

La teoría de grupos de Lie ha sido muy poco estudiada en nuestro medio, mencionaremos trabajos de tesis de pre y posgrado relacionados a dicha teoría. En el año 2019, Condeña Cahuana presenta un trabajo de tesis haciendo una introducción al concepto de fibrados vectoriales, reales complejos y homomorfos para conseguir una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas e inmersas en grupos de Lie. También en el año 2019 Suarez Sánchez, en su tesis titulada "Resolución Teórica de singularidades" expone sobre una variedad teórica afín que contiene un Toro algebraico T como un abierto de Zariski. En el año 2014 Quesada llanto en su tesis Titulada "Algebra de Lie de un grupo de trenza pura" estudia el algebra de lie asociado con una filtración de la serie central del grupo de trenzas puras de Artin, siendo estos trabajos los más recientes relacionados a la teoría de Lie.

2.2. MARCO

2.2.1 Teórico

Los grupos de lie son objetos matemáticos que están provistos hasta de tres estructuras (algebraicas, topológica y diferencial). Más específicamente un grupo de lie denotado por G es una variedad diferenciable lo cual es también grupo, y donde las operaciones son diferenciables. Modelos clásicos de tal objeto son: el grupo general lineal, el grupo unitario, el grupo ortogonal y el grupo especial lineal. De importancia central para la teoría de Lie es la relación existente entre un grupo de lie y su algebra de lie de campos vectoriales invariantes a izquierda, la cual es isomorficamente lineal al espacio tangente E, en el elemento unitario "*e*"; de este modo E se convierte en un algebra de Lie, que no es otra cosa que el algebra de lie de G.

El material estándar del marco teórico (Estado del arte) para el desarrollo de nuestro proyecto está compuesto por: la aplicación exponencial, representaciones generales, representación adjunta, clasificación de grupos de lie abelianos. Complementariamente para mostrar una aplicaciones se presenta la integral de una función diferenciable sobre un grupo de lie compacto definido desde un punto de vista de formas diferenciales.

Son muchos las teorías que afirman la existencia de subgrupos únicos satisfaciendo ciertas condiciones en este sentido considereamos dos subgrupos (H_1, φ_1) y (H_2, φ_2) de un grupo G equivalentemente si existe un isomorfismo de grupo de lie $\alpha : H_1 \to H_2$ tal que $\varphi_2 \circ \alpha = \varphi_1$. Esto es una relación de equivalencia de subgrupos de lie de G y únicos para subgrupos de lie, es decir únicos bajo esta equivalencia, esto es: cada clase de subgrupos de lie de G tiene una única representatividad de la forma (A,*i*) donde A es un subconjunto de G la cual es un subgrupo abstracto de G y a su vez tiene estructura de variedad tal que la inclusión $i : A \longrightarrow G$ produce una subvariedad y así un subgrupo de lie de G.

2.2.2 Conceptual

El término "identificación" que aparece en el título del proyecto, matemáticamente significa isomorfismo, que no es otra cosa que, una aplicación de un objeto en otro manteniendo estructuras prexistentes en cada uno de ellos, permitiendo de este modo la fácil comprensión de uno en el otro a través de dicho isomorfismo. En nuestro proyecto que presentamos es identificar un grupo de lie arbitrario con el producto $T^m x\mathbb{R}^n$ donde T^m es el tori y $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclideo, la idea es muy simple, pues si tenemos un grupo de lie G, y su algebra de lie correspondiente, los elementos del álgebra son los generadores infinitamente del grupo. Para los físicos teóricos, un grupo de lie es un grupo matricial y los generadores son matrices "B" que satisfacen que los elementos del grupo son de la forma exp(B), luego se elige el centro del álgebra de lie, el cual esta formada por elementos conmutables que permitirán trabajar con más holgura.

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS.

A) Definiciones, Proposiciones de tópicos de Álgebra.

Definición de Grupo (2.3.1): Es un conjunto denotado comúnmente por "G" provisto de una operación binaria $"\bullet"$ satisfaciendo las condiciones siguientes:

(i) $(a.b).c = a.(b.c),$ para todo $a, b, c \in G$

(ii) Para todo $a \in G,$ existe $e \in G$ tal que $a.e = a = e.a$

(iii) Para todo $a \in G,$ existe $b \in G$ tal que $a.b = e = b.a$

Ejemplo (2.2.1).- El conjunto de los números enteros con la operación de suma usual.

Definición de Espacio Vectorial (2.3.2).- Sea K un cuerpo y V un conjunto no vacío. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K ó K-espacio si está definido una ley de composición interna denotada por "+" es decir: $+ : \mathrm{VxV} \longrightarrow \mathrm{V};$ y una ley de composición externa con operadores en K denotada por "•" es decir : $\bullet : \mathrm{KxV} \longrightarrow \mathrm{V}$. Verificándose además las condiciones siguientes:

(i) $(V, +)$ es un grupo esto es que en V se verifica las propiedades de asociatividad, posee elemento neutro y elemento inverso.

(ii) (*) (tr) x = t (rx); para todo t, r $\in$K, para todo x $\in$ V.

(*) (t + r) x = tx + rx; para todo t, r $\in$K, para todo x $\in$ V.

(*) t (x + y) = tx + ty; para todo t $\in$K, para todo x, y $\in$ V.

(*) 1.x = x; para todo x $\in$V. $1 = 1_K \in K$

Definición de Dependencia e independencia lineal (2.3.3)

(i) Sea V un K – espacio vectorial y $\{v_1, ..., v_n\} = A \subset$ V un subconjunto. Se dice que A es K – linealmente independiente si: $\lambda_i v_i + ... + \lambda_n v_n = 0$ implica que $\lambda_i = 0,$ para todo i = 1, 2,…., n. Un conjunto que no es linealmente independiente se dice linealmente dependiente.

Definición de Combinación lineal (2.3.4). Sea V un K – espacio vectorial $A \subseteq$V. Un elemento $x \in$V es combinación lineal del conjunto A si existen $v_1, ..., v_n \in A$ tal que $x = t_1 v_1 + ... + t_n v_n$ para $t_i \in K,$ i = 1, 2, ….., n.

Observación (2.3.1).- Si x $\in$ V es combinación lineal de elementos de A; la suma $x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i$ se escribe comúnmente como $\sum_{i \in I} t_i v_i;$ donde $t_i = 0$ para todo $i \in I,$ excepto un número finito de elementos "i" en I.

Definición de Subespacio Vectorial (2.3.5). Sea V un K – espacio vectorial, $W \subseteq V$ un subconjunto no vacío. Se dice que W es un subespacio vectorial de V si W con las leyes de composición (interna y externa) es un espacio vectorial. Lo cual se denota comúnmente como $\mathrm{W} \leq \mathrm{V}$.

Proposición (2.3.1).- La intersección arbitraria de subespacios vectoriales de un espacio es un subespacio.

Definición de Subespacio generado (2.3.6). Sean V un K – espacio vectorial, $A \subset V$ y $\mathcal{F} = \{\mathrm{V_j} \leq \mathrm{V} : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{V_j}\}_{\mathrm{j \in I}}$ una familia de subespacio de V. El subespacio generado por A se denota por $\langle A \rangle = \langle A \rangle_V,$ y define como la intersección de los elementos de $\mathcal{F}$. Es decir $\langle A \rangle = \bigcap_{j \in I} V_j.$

Observación (2.3.2).- De la definición de subespacio generado es inmediato ver que $\langle A \rangle$ es el menor subespacio vectorial de V conteniendo A.

Proposición (2.3.2).- Sea V un espacio vectorial sobre K y $\mathrm{A} \subset \mathrm{V}$. Son equivalentes los enunciados:

(i) A es linealmente dependiente.

(ii) Existe $B \neq \phi$, tal que $\langle \mathrm{A} \rangle = \langle \mathrm{B} \rangle$

(iii) $\mathrm{x} \in \langle \mathrm{A} - \{\mathrm{x}\} \rangle$, para algún $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$

(iii) Existe $x \in \langle A \rangle$ tal que $x = \sum_{i \in I} t_i v_i$, para v_i elementos de A.

Observación (2.3.3).- Sea V un K – espacio vectorial y $\mathcal{F}$ = {A ⊂ V : A es linealmente independiente}. Si $\mathcal{F}$ es totalmente ordenado entonces $B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ es linealmente independiente.

Definición de Base y dimensión (2.3.6).- Sea V un K – espacio vectorial. Se dice que el subconjunto $\mathcal{B}$ de V es una K – base de V si : $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\mathrm{V} = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Proposición (2.3.3).- Todo K – espacio vectorial admite una base.

Demostración.- Sea V un K – espacio vectorial arbitrario y consideremos la familia.

$\mathcal{F}$ = {S ⊂ V : S es linealmente independiente}.

Es inmediato verificar que el conjunto vacío "Φ" es linealmente independiente, por tanto $\Phi \in \mathcal{F}$ y en consecuencia $\mathcal{F}$ – es no vacío. Ahora ordenemos $\mathcal{F}$ por inclusión, es decir ($\mathcal{F}$, $\subseteq$) es un conjunto ordenado y sea $\mathcal{C} = \{S_j\}_{j \in I}$ cualquier cadena.

Afirmación (I): $\bigcup_{j \in I} S_j$ es linealmente independiente. En efecto sea $\{s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n\} \subset \bigcup_{j \in I} S_j$, tenemos que para los elementos x_1, x_2 existen S_i, S_j tal que: $x_1 \in S_i$ y $x_2 \in S_j$; y como $\mathcal{C}$ es una cadena entonces $(S_i \subset S_j)ó(S_j \subset S_i)$. En cualquier caso, existe S_k tal que $x_1, x_2 \in S_k$ para k = i ó j. Ahora para un tercer elemento x_3 existe S_e tal que $x_3 \in S_e$; pero $(S_k \subset S_e)ó(S_e \subset S_k)$, nuevamente en cualquier caso, existe S_m para m = k ó *l* tal que $x_1, x_2, x_3 \in S_m$. Continuando con este proceso un número finito de veces, hallaremos S_α tal que: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in S_\alpha$; y como S_α es linealmente independiente se tiene que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente y por consiguiente $\bigcup_{j \in I} S_j$ es también linealmente independiente.

De este modo está unión será una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$ y aplicando el lema de Zorn podemos encontrar un elemento maximal S* en $\mathcal{F}$.

Afirmación: S* es una base de V. En efecto como S* está en $\mathcal{F}$ entonces S* es linealmente independiente. Ahora supongamos que $\langle S^* \rangle \neq$ V entonces existe $x_0 \in \mathrm{V} \langle S^* \rangle$, de esta manera, una combinación lineal del tipo: $t_1x_1 + ... + t_nx_n + tx_0 = 0$, con $x_j \in S^*$; $t_j, t \in \mathrm{K}$ implica necesariamente que t = 0 pues si $t \neq 0$ entonces $x_0 = -\frac{1}{t}\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right] \in \langle S^* \rangle$ es una contradicción. Entonces $t_1 = ... = t_n = 0 = t$. Por tanto el conjunto $\{x_1, ..., , x_n, x_0\}$ es linealmente independiente concluyéndose que $S^* \cup \{x_0\}$ es linealmente independiente; de este modo $S^* \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$ pero $S^* \not\subseteq S^* \cup \{x_0\}$ lo cual es una contradicción a la maximalidad de S* en $\mathcal{F}$. Por consiguiente $\langle S^* \rangle =$ V y así S* es una base.

Proposición (2.3.4).- Sea V un K – espacio vectorial generado por un subconjunto B $\subset$ V y sea A $\subset$ V otro subconjunto linealmente independiente, entonces Card(A) $\leq$ Card(B).

Demostración.- [Ver Nomitzu – Katuzumi: Algebra Lineal; Capítulo uno]

Observación (2.3.4).- Dos bases cualesquiera en un K – espacio vectorial tienen el mismo cardinal.

Definición: de Dimensión de un Espacio Vectorial (2.3.7)

La dimensión de un K – espacio vectorial V está dado por el cardinal de sus bases. El cual es denotado por $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{V}$ o dimV.

Ejemplo (2.3.2).- Sean V un K – espacio vectorial y X un conjunto arbitrario no vacío. Definamos H = {f: X $\longrightarrow$ V / f . aplicación}, y las operaciones siguientes $\tilde{+} : \mathrm{HxH} \longrightarrow \mathrm{H}$ y $\tilde{\bullet} : \mathrm{KxH} \longrightarrow \mathrm{H}$ como $(f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda \tilde{\bullet} f)(x) = \lambda . f(x)$; para todo f, g $\in$ H; para todo $\lambda \in \mathrm{K}$ y para todo $x \in X$. Entonces H tiene dimensión infinita.

Ejemplo (2.3.3).- Sea $\mathrm{K}^n = \{(k_1, ..., k_n) : k_j \in \mathrm{K}, \text{ para } j = 1, ..., n\} = \mathrm{V}$ donde K es un cuerpo; entonces $\mathrm{V} = \mathrm{K}^n$ es un espacio vectorial sobre K. Con las operaciones: $(k_1, ..., k_n) + (k_1', ..., k_n') = (k_1 + k_1', ..., k_n + k_n')$ y $\lambda.(k_1, ..., k_n) = (\lambda k_1, ..., \lambda k_n)$. Entonces $\dim_K \mathrm{V} < \infty$ más aún $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n.$ Además es inmediato ver que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n.$

Definición de Espacio cociente (2.3.8).- Sean V un K – espacio vectorial, $\mathrm{W} \leq \mathrm{V}$ (subespacio); consideremos x, y ∈ V y defínase la relación: $x \equiv y \,\mathrm{mod}(\mathrm{W})$ si y solo si $x - y \in \mathrm{W}$ es inmediato ver que "$\equiv$" es una relación de equivalencia por tanto se tiene el conjunto cociente que denotaremos por $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} = \{[x] : x \in \mathrm{V}\}$, donde $[x] = \{y : x \equiv y \,\mathrm{mod}(\mathrm{H})\}$.

En $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}$ definamos $[x] \tilde{+} [y] = [x + y]$ y $\lambda \tilde{\bullet} [x] = [\lambda . x]$ para todo x, y ∈ V y para todo $\lambda \in K$.

Por tanto $\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}, \tilde{+}, \tilde{\bullet} \right)$ es un K – espacio vectorial; la dimensión del espacio cociente $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}$ es denominado codimensión de W en V; lo cual es denotado por $co\dim_V(\mathrm{W})$ o simplemente codim(W).

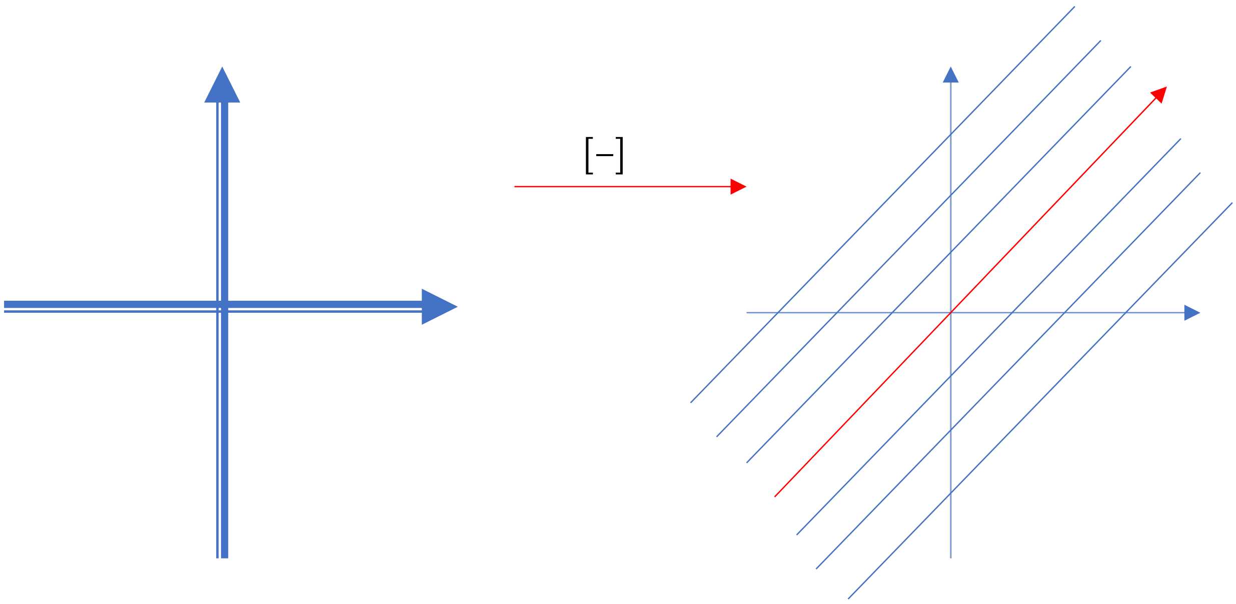

Figura N° 1 Modelo de un Espacio Vectorial cociente.

Elaboración: Fuente propia

Definición de Homomorfismos (2.3.9).- Sean V, W dos K – espacios vectoriales una aplicación $T : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ es un homomorfismo (transformación lineal) si T(x + y) = T(x) + T(y) y T(λx) = λ.T(x), para todo x, y ∈ V ∧ para todo λ ∈ K. Si V = W se suele llamar a “T” endomorfismo y si W = K se denomina funcional lineal. El conjunto de funcionales lineales de V se denota por V* y se denomina dual del espacio V, es decir

V* = {φ:V$\longrightarrow$K / φ - es lineal}.

Definición de Producto Interno o Escalar (2.3.10).- Sea V un K – espacio vectorial, el producto interno en V es una aplicación denotada por $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{V}x\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{K}$ verificando las condiciones siguientes:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo x ∈ V, $\langle x, x\rangle = 0$ si y solo si x = θ (θ elemento neutro de V)

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle \overline{y, x}\rangle$, para todo x, y ∈ V.

(iii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$, para todo $x, x', y \in \mathrm{V}$.

(iv) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, para todo x, y ∈ V, para todo λ ∈ K.

Definición (2.3.11).- Sea V un K – espacio vectorial provisto de un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ la norma de un elemento x ∈ V se denota y define como : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Nota.- En lo sucesivo nosotros consideremos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales "$\mathbb{R}$"

Observación (2.3.5).- i) Si $\mathrm{W} \leq \mathrm{V}$ es un subespacio, y donde V está provisto de un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Definimos el espacio $\mathrm{W}^{\perp} = \left\{y^* \in \mathrm{V} : \langle y, \mathrm{W}\rangle = 0, \forall w \in W\right\}$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto definido en V.

ii) El dual de una aplicación lineal $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ es denotado por φ^*; y una suma directa de espacios V^r denotaremos por $\sum_r \mathrm{V}^r$ ó $\bigoplus_r \mathrm{V}^r$

iii) Sea $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ un endomorfismo. El determinante y la traza de φ se denota por det(φ) y Trz (φ) respectivamente.

Definición (2.3.12).- Sea V un espacio vectorial n – dimensional. Una función determinante en V es una función n – lineal y antisimétrica.

Observación (2.3.6).- 1) Cada función determinante no cero Δ_V en un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial V define una orientación.

2) Sean V, W dos K – espacios vectoriales. Escribamos $\mathcal{L}$ (V, W) = {*f*: V $\longrightarrow$ W/*f* es lineal} el cual es un K – espacio vectorial. Si V = W, escribiremos $\mathcal{L}_V$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{V})$.

3) Sean: $V_1, ..., V_r$ y V; K-espacios vectoriales. Escribamos;

$\mathcal{L}(V_1, ..., V_r; V) = \{f: V_1 x.....x V_r \longrightarrow V \ / f \text{ es r} - \text{lineal}\}$..

4) El grupo de Automorfismos de un espacio vectorial V será denotado por GL (V). Es decir GL(V) = {f: V $\longrightarrow$ V / f – es un isomorfismo}.

Definición de Espacio Euclidiano y Hermitiano (2.3.13)

i) Un espacio Euclidiano es un espacio real finito dimensional; provisto de un producto interno $\langle \ , \ \rangle$positivo.

ii) Un espacio Hermitiano es un espacio Complejo finito dimensional provisto de un producto interno hermitiano $\langle \ , \ \rangle$ positivo.

(iii) Si V es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial; escribamos $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ y definamos poniendo $ß(\alpha \otimes x) = ß\alpha \otimes x$, para todo $\alpha, ß \in \mathbb{C}, x \in V$. $V^{\mathbb{C}}$ así estructurado es denominado la complexificación de V.

Proposición (2.3.5).- Si $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno definido positivo en V; entonces $\langle \alpha \otimes x, ß \otimes y \rangle_{\mathbb{C}} = \alpha \overline{ß} \langle x, y \rangle$, para todo $\alpha, ß \in \mathbb{C}$, para x, y en V. Define una métrica hermitiana en $V^{\mathbb{C}}$.

Demostración.- Bastará usar definición de métrica.

Definición (2.3.14).- Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial un producto interno definido en V es una función bilineal simétrica no degenerada.

Observación (2.3.7).- i) Si V_+ es un subespacio maximal de V, donde $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno definido positivo, entonces $V = V_+ \oplus V_+^{\perp}$

ii) $\dim V_+ - \dim V_+^{\perp}$ es un número entero el cual es independiente de la elección de V_+; y es llamado signatura de $\langle \ , \ \rangle$.

iii) El símbolo $\otimes_{\mathbb{R}}$ denota el tensor sobre $\mathbb{R}$, para otras estructuras como anillos, módulos, etc. Escribiremos simplemente como $\otimes$.

Los cuaterniones y el Espacio Vectorial Cuaternico (2.3.15)

Sea H un espacio vectorial euclidiano de dimensión cuatro. Sea $e \in H$ un vector unitario. Es decir $\|e\| = 1$ y $K = \{e\}^{\perp}$ el cual es un espacio euclidiano tridimensional orientado. De este modo si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base positiva de K entonces $\{e, e_1, e_2, e_3\}$ es una base positiva de H.

Ahora definamos una aplicación bilineal $\psi : \mathrm{H} x \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ como $\psi(p,q) = -\langle p,q \rangle e + p \text{ x } q$, para $p,q \in K$, y $\psi(p,e) = p = \psi(e,p)$ para $p \in \mathrm{H}$. Donde "x" denota el producto vectorial en el espacio euclidiano orientado K.

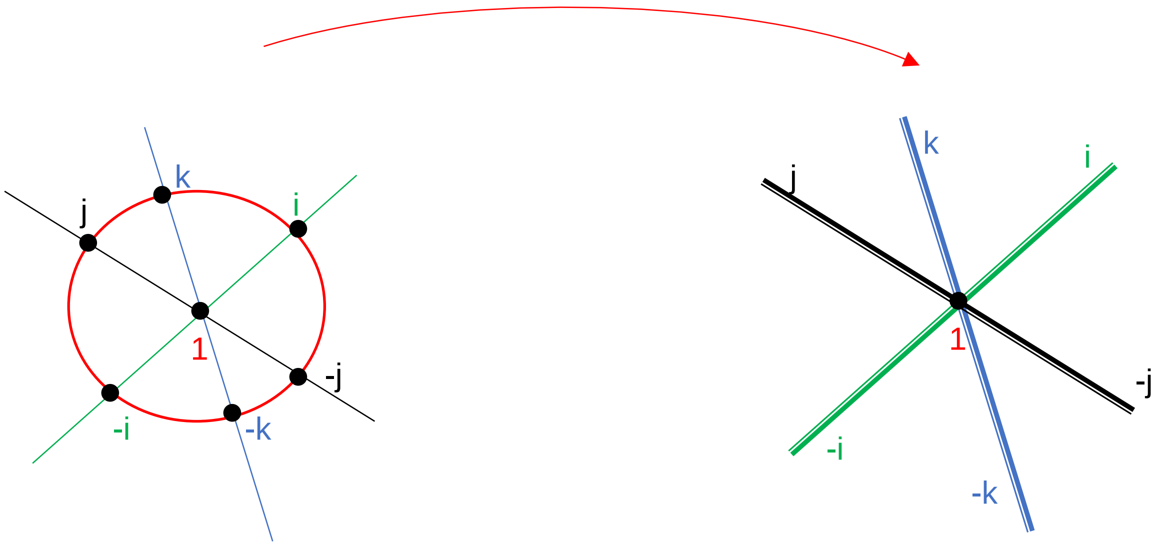

Figura N° 2 Representación gráfica de los cuaterniones: 1= (1,0,0,0), i=(0,1,0,0), j=(0,0,1,0), k = (0, 0, 0, 1).

Fuente: Elaboración propia.

Definición de Algebra (2.3.16).- Sea V un K – espacio vectorial. Diremos que V es álgebra sobre K si está definido una multiplicación "•" en V. Esto es $\bullet : \mathrm{V} x \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ tal que verifica las condiciones siguientes:

i) $(\alpha x) y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

ii) *(x + y) z = xz + yz*

iii) *x (y+z) = xy + xz*. Para todo $\alpha \in K$, para todo $x, y, z \in \mathrm{V}$. Si además verifica que: *(xy)z = x(yz)* para todo *x, y, z* ∈ V se dice que V es un álgebra asociativa sobre K.

Ejemplo (2.3.4).- El espacio H definido líneas antes es un álgebra de división asociativa con la multiplicación "ψ"; y donde "e" es un elemento unitario. Esta álgebra es llamado álgebra de los cuaterniones y es denotada por H. Los elementos de H son llamados cuaterniones mientras que los elementos de K = $\{e\}^{\perp}$ son denominados **cuaterniones puros.**

Nota.- i) Cada cuaternión puede ser escrito en la forma: $p = \lambda e + q = \lambda + q, \lambda \in \mathbb{R}, q \in \mathrm{K}$

ii) "λ" es llamada la parte real de p; y q la parte cuaternionica pura de p. El conjugado de p se denota y define como $\overline{p} = \lambda e - q$.

Definiciones (2.3.17).- (1) La aplicación $\mathscr{M} : H \longrightarrow H$ dado por $\mathscr{M}(p) = \overline{p}$ define un anti – automorfismo del álgebra H, llamado **Conjugación.** El producto $p.\mathscr{M}(p) = \|p\|^2 e = \|p\|^2$.

(2) La multiplicación "$\mathscr{M}$" y el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ en H son conectados por la relación:

$\langle pr, qr \rangle = \langle p, q \rangle \langle r, r \rangle, \quad p, q, r \in \mathrm{H}$ en particular $\|pr\| = \|p\| \|r\|, p, r \in \mathrm{H}$.

(3) Una cuaternión unitario es un cuaternión de norma uno. Un cuaternión unitario puro "q" satisface la relación $q^2 = -e$. Si $B = \{e_1, e_2, e_2\}$ es una base ortonormal positivo en $\mathrm{K} = \{e\}^{\perp}$, entonces se verifica: $e_1 e_2 = e_3,\ e_2 e_3 = e_1,\ e_3 e_1 = e_2$

(4) Sean V, W dos K – álgebras, $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ una transformación lineal es llamado un homomorfismo de álgebras si verifica: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathrm{V}$.

(5) Una derivación en un álgebra V es una aplicación lineal $\delta : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ satisfaciendo $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$. para todo x e y en V.

Nota

(i) Una derivación es nulo (cero) sobre un sistema de generadores e identificamente nulo.

(ii) Si δ_1 y δ_2 son derivaciones en V, entonces lo es: $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.

(6) De manera más general; sea $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ un homomorfismo de algebras. Entonces una φ-derivación es una aplicación lineal $\delta : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ lo cual satisface:

$$\delta(xy) = \delta(x)\varphi(y) + \varphi(x)\delta(y)$$

(7) **Una álgebra graduada** V sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial graduado $\mathrm{V} = \sum_{r \geq 0} \mathrm{V}^r$ juntamente con una estructura de álgebra, tal que: $\mathrm{V}^r . \mathrm{V}^s \subset \mathrm{V}^{r+s}$

(8) Si $xy = (-1)^{rs} yx, \quad x \in \mathrm{V}^r, \quad y \in \mathrm{V}^s$. Entonces V es llamado Anticonmutativo. Si V posee identidad, y dim $V^{\circ} = 1$, entonces V es denominado conectado.

(9) Si V y W son álgebras graduadas, entonces $\mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$ se puede convertir en un álgebra graduada de dos maneras:

(i) $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$

(ii) $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = [-1]^{s_1 t_2} x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$ donde $x_1, x_2 \in \mathrm{V}, y_1 y_2 \in \mathrm{W}$, grad $y_1 = s_1$, grad $x_2 = t_2$.

La primera álgebra es llamado Producto Tensor Canónico de V y W; mientras que el segundo es llamado Producto Tensor Sesgado o Anrticonmutativo de V y W.

(*) Si V y W son anticonmutativos entonces lo es el producto Tensor Sesgado.

(10) **Una Antiderivación**, en un álgebra graduada V es una aplicación lineal $\gamma : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ homogéneo de grado impar, tal que $\gamma(xy) = \gamma(x)y + (-1)^r x\gamma(y), x \in \mathrm{V}^r, y \in \mathrm{V}$.

Proposición (2.3.6): i) Si γ_1 y γ_2 son antiderivaciones, entonces: $\gamma_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2$ es una derivación.

ii) Si γ es una antiderivación y δ es una derivación, entonces $\gamma \circ \delta - \delta \circ \gamma$ es una antiderivación.

Demostración.- Bastará usar las definiciones de derivación y antiderivación.

Definición de Producto Directo y Suma Directa de Álgebras (2.3.18)

Sea $\mathcal{F} = \{\mathrm{V}_j\}_{j \in I}$ una familia de K-algebras.

- El Producto Directo de la familia $\mathcal{F}$ se denota y define como :

  $$\prod_{j \in I} \mathrm{V}_j = \left[(x_j)_{j \in I} : x_j \in \mathrm{V}_j \right] = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{j \in I} \mathrm{V}_j \ / \ f(j) \in \mathrm{V}_j \right\}$$ es decir $\prod_{j \in I} \mathrm{V}_j$ es el conjunto infinito de sucesiones. La multiplicación y la suma es definido componente por componente ó también $(f \circ g)(j) = f(j).g(j)$ y $(f+g)(j) = f(j) + g(j)$; para todo $f, g \in \prod_{j \in I} \mathrm{V}_j$.

- La Suma Directa denotada por $\sum_{j \in I} \mathrm{V}_j$ es la subálgebra de sucesiones con términos igual a cero salvo un número finito de índices.

Algebras de Lie (2.3.19)

(1) Sea V un K – espacio vectorial de dimensión arbitraria. Se dice que V es álgebra de Lie si está definido una aplicación bilineal $[\ ,\ ] : \mathrm{V}x\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ tal que:

$l_1)$ $[x,x]=0,$ para todo $x \in \mathrm{V}.$

$l_2)$ $\left[[x,y],z\right]+\left[[z,x],y\right]+\left[[y,z],x\right]=0;$ para todo $x,y,z \in V$ Identidad de Jacobi.

(2) Sean V, W dos álgebras de Lie y $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ una aplicación. Diremos que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie si verifica:

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \text{ para todo } x, y \in V.$$

Definición de Producto Tensorial, exterior y álgebra simétrica (2.3.20)

Sea V un K – espacio vectorial. El Producto tensorial, el producto exterior y las álgebras simétricas sobre V son denotados y definidos respectivamente como sigue:

$$\otimes \mathrm{V} = \sum_{r \geq 0} \otimes^r \mathrm{V}, \Lambda \mathrm{V} = \sum_{r \geq 0} \Lambda^r \mathrm{V}, \quad \mathrm{VV} = \sum_{r \geq 0} \mathrm{V}^r \mathrm{V}$$

Observación (2.3.8) : Si dim V = n, entonces $\Lambda \mathrm{V} = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r \mathrm{V}$

Definición (2.3.21).- Sean V, W dos K – espacios vectoriales, un Emparejamiento no degenerado entre V* ⊗ W* y V ⊗ W es dado por:

$$\langle x^* \otimes y^*, x \otimes y \rangle = \langle x^*, x \rangle \langle y^*, y \rangle, x^* \in \mathrm{V}^*, y^* \in \mathrm{W}^*; x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{W}$$

Proposición (2.3.7).- (i) Si V o W tienen dimensión finita entonces se tiene el isomorfismo $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{W}^* \cong (\mathrm{V} \otimes \mathrm{W})^*$. En particular $(\otimes^r \mathrm{V})^* \cong \otimes^r \mathrm{V}^*$

ii) Similarmente se tiene un resultado para producto exterior. Es decir si dim V $< \infty$. Entonces $(\Lambda^r \mathrm{V})^* = \Lambda^r \mathrm{V}^*, (\mathrm{V}^s \mathrm{V})^* = \mathrm{V}^s \mathrm{V}^*$

Demostración.- A modo de ejemplo veamos (ii) Para lo cual bastará escribir las igualdades siguientes:

$$\langle x_1^* \wedge ...... \wedge x_r^*, x_1 \wedge ..... \wedge x_r \rangle = \det \langle x_i^*, x_j \rangle \text{ y}$$

$\langle y_1^* \vee ...... \vee y_r^*, y_1 \vee ..... \vee y_r \rangle = perm \langle y_i^*, y_j \rangle$ donde “perm” denota la permanencia de una matriz.

Observación (2.3.9): (1) Sea V un K – espacio vectorial. Las álgebras de funciones multilineales en V son denotadas y establecidos como:

$$T(\mathrm{V}) = \sum_{r \geq 0} T^r(\mathrm{V}), \text{ (algebra multilineal sesgada)}$$

$A(\mathrm{V}) = \sum_{r\geq 0} A^r(\mathrm{V}),$ (algebra multilineal simétrica)

$S(\mathrm{V}) = \sum_{r\geq 0} S^r(\mathrm{V}),$ (algebra multilineal de grupos simétricos)

(2) Las multiplicaciones son dadas de manera respectiva del modo siguiente:

$$(\varphi \otimes \psi)(x_1,....,x_{r+t}) = \varphi(x_1,....,x_r)\psi(x_{r+1},....,x_{r+t})$$

$$(\varphi \wedge \psi)(x_1,....,x_{r+s}) = \frac{1}{r!t!}\sum_{\sigma\in S^{r+1}} \varepsilon_\sigma \varphi\left(x_{\sigma(1)},.....,x_{\sigma(r)}\right)\psi\left(x_{\sigma(r+1)},.....,x_{\sigma(r+t)}\right)$$

$$(\varphi \vee \psi)(x_1,....,x_{r+s}) = \frac{1}{r!t!}\sum_{\sigma\in S^{r+t}} \varphi\left(x_{\sigma(1)},.....,x_{\sigma(r)}\right)\psi\left(x_{\sigma(r+1)},.....,x_{\sigma(r+t)}\right)$$

Donde S^r denota el grupo simétrico sobre r – objetos, y $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ (signatura).

(3) Si dim V < ∞. Identificamos las algebras, graduadas T(V) y $\otimes V^*$ [respectivamente: $A(\mathrm{V})$ y ΛV^*, S(V) y VV*]. Poniendo

$$\varphi(x_1,....,x_r) = \langle \varphi, x_1 \otimes .... \otimes x_r \rangle, \varphi \in \otimes^r V^*$$

$$\psi(x_1,....,x_r) = \langle \psi, x_1 \wedge .... \wedge x_r \rangle, \psi \in \Lambda^r V^*$$

$$\gamma(x_1,....,x_r) = \langle \gamma, x_1 \vee .... \vee x_r \rangle, \gamma \in \mathrm{V}^r\mathrm{V}.$$

El Módulo $HOM_R(M,N)$

Sean M, N dos R – módulos, donde R es un anillo conmutativo. El módulo $HOM_R(M,N)$ está definido por todos los R-homomorfismos de M a N. Es decir

$HOM_R(M,N) = \{ f : \mathrm{M} \to \mathrm{N} \,/\, f \text{ es un R-homomorfismo} \}$

Observación (2.3.10) (i) Si N = R entonces $HOM_R(\mathrm{M}, R) = \mathrm{M}^*$ y llamaremos a M* el dual de M.

(ii) La aplicación $\lambda : \mathrm{M}^* \otimes_R \mathrm{N} \longrightarrow HOM_R(\mathrm{M},\mathrm{N})$ dada por $\lambda(f \otimes g)(x) = f(x)y;$ para $x \in \mathrm{M}, y \in \mathrm{N}, \quad f \in \mathrm{M}^*$ es llamada R-aplicación lineal canónica.

(iii) Un módulo M es llamado libre si M posee una base.

Proposición (2.3.8).- Si M es proyectivo finitamente generado entonces M* lo es. Más aún el homomorfismo "λ" dado en (ii) es un isomorfismo particularmente

$M^* \otimes M \cong HOM_R(M, M)$. Específicamente un único tensor $t_M \in M^* \otimes_R M$ tal que $\lambda(t_M) = t_M$ es llamado el Tensor Unitario para M.

Módulo graduado (2.3.22).- Un módulo M es graduado en lo cual los submódulos M^r han sido distinguidos tal que $M = \sum_{r \geq 0} M^r$

Nota.- Los elementos de M^r son llamados homogéneos de grado "r". Si $x \in M^r$, entonces "r" es llamado el grado de "x". Escribamos grad(x) = r.

Definiciones (2.3.23) (1) Si M, N son módulos graduados, entonces una graduación en el módulo $M \otimes_R N$ es dado por: $(M \otimes_R N)^k = \sum_{r+s=k} M^r \otimes_R N^s$

(2) Sean M, N dos módulos graduados. $\varphi : M \to N$ un R – homomorfismo es llamado homogéneo de grado "p" si $\varphi(M^r) \subset N^{r+p}, p \geq 0$.

(3) Un R – homomorfismo homogéneo de grado cero es llamado un homomorfismo de módulos graduados.

(4) Un módulo Bigraduado es un módulo en la cual es la suma directa del submódulos $M^{rs}, r \geq 0, s \geq 0$.

Observación (2.3.11): (i) Un Álgebra sobre un anillo R es un R – módulo "A" juntamente con una R-aplicación $\mathcal{M} : A \otimes_R A \longrightarrow A$.

(ii) En particular si M es un R – módulo. El Producto Tensorial, el producto exterior y las álgebras simétricas sobre M serán escritas como:

$\otimes_R M, \Lambda_R M$ y $V_R M$

(iii) Si M es finitamente generado y proyectivo; entonces existen isomorfismos.

$(\otimes_R^r M)^* \cong \otimes_R^r M^*$, $(\Lambda_R^r M)^* \cong \Lambda_R^r M^*$, $(V_R^r M)^* \cong V_R^r M^*$

Espacios Diferencial (2.3.12).- Un espacio diferencial es un espacio vectorial X conjuntamente con una aplicación lineal $\rho : X \longrightarrow X$ tal que $\rho^2 = 0$. $\rho -$ es llamado el operador diferencial en X.

Notación: Z(X) = $\ker(\rho)$ y B(X) = $\operatorname{Im}(\rho)$ son llamados: cociclos y cobordes respectivamente. El espacio $H(X) = \dfrac{Z(X)}{B(X)}$, es llamado espacio cohomología de X.

Definición (2.3.13).- Sean $\left(X,\rho_x\right)\ y\ \left(Y,\rho_y\right)$ dos espacios diferenciales, $f:\left(X,\rho_x\right)\longrightarrow\left(Y,\rho_y\right)$ una aplicación lineal. Se dice que f es un homomorfismo de espacios diferenciales si $f\circ\rho_x=\rho_y\circ f$

Observación (2.3.12).- El homomorfismo $f:\left(X,\rho_x\right)\longrightarrow\left(Y,\rho_y\right)$ induce una aplicación lineal; $f_*:\mathrm{H(X)}\longrightarrow\mathrm{H(Y)},$ entre espacios de cohomología.

Definición de Operador homotopía (2.3.14) Sean $\varphi,\psi:\left(\mathrm{X},\rho_x\right)\longrightarrow\left(\mathrm{Y},\rho_y\right)$ dos homomorfismos de espacios diferenciales. Un operador homotopía para φ y $\psi,$ es una aplicación lineal $h:X\longrightarrow Y$ tal que $\varphi-\psi=h\circ\rho_Y+\rho_X\circ h.$

Observación (2.3.13).- (1) Si el Operador homotopía existe para φ y $\psi,$ entonces $\varphi_*=\psi_*$

Espacio Diferencial Graduado (2.3.15).- Sea $\mathrm{X}=\sum_{r\geq 0}\mathrm{X}^r$ un espacio graduado. Se dice que X juntamente con un operador diferencial homogéneo de grado (+1) es llamado un espacio diferencial graduado, en tal caso el cociclo, coborde, y cohomología son espacios graduados:

$$Z^r(\mathrm{X})=Z(\mathrm{X})\cap\mathrm{X}^r,\ \ B^r(\mathrm{X})=B(\mathrm{X})\cap\mathrm{X}^r\ \ \text{y}\ \ H^r\left(\mathrm{X}\right)=\frac{Z^r(\mathrm{X})}{B^r(\mathrm{X})}$$

Definición (2.3.16).- Un homomorfismo de espacios diferenciales graduados es un homomorfismo de espacios diferenciales homogéneos de grado cero.

Observación (2.3.14) (1) Sea dim (X) < ∞ y $\varphi:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}$ un homomorfismo de espacios diferenciales graduados. Sea $\varphi^r:\mathrm{X}^r\longrightarrow\mathrm{X}^r$ y $\left(\varphi_*\right)^r:H^r\left(\mathrm{X}\right)\longrightarrow H^r\left(\mathrm{X}\right)$ las restricciones de φ y φ_* a $X^r\ y\ H^r\left(X\right)$ respectivamente.

(2) La fórmula algebraica de lefschetz establece que:

$$\sum_{r\geq 0}(-1)^r tr\varphi^r=\sum_{r\geq 0}(-1)^r tr\left(\varphi_*\right)^p$$

En particular si, $\varphi=1_X$ (identidad) obtenemos la fórmula de Euler – Poincaré.

$$\sum_{r\geq 0}(-1)^r\dim X^r=\sum_{r\geq 0}(-1)^r\dim H^r\left(\mathrm{X}\right)$$

Algebra Diferencial Graduada (2.3.17)

Un álgebra diferencial graduada “A” es una algebra graduada juntamente con una antiderivación "γ" homogénea de grado uno tal que $\gamma^2=0$. En este caso Z(A) es una subalgebra graduada y B(A) es un ideal graduado en Z(A). Así H(A) se convierte en un álgebra graduada. Esta es la denominada algebra de cohomología de A. Si A es anticonmutativa, entonces lo es H(A).

Definición (2.3.18).- Un homomorfismo de álgebras diferenciales graduadas es una aplicación $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que "φ" es un homomorfismo de espacios diferenciales graduados y un homomorfismo de algebras. Esto a su vez induce un homomorfismo entre algebras de cohomología $\varphi_* : \mathrm{H}(A) \longrightarrow \mathrm{H}(B)$.

Observación (2.3.15) (1).- Sean A, B dos álgebras diferenciales graduadas y consideremos el producto Tensorial. A $\otimes B.$ Entonces la antiderivación en A $\otimes B$, dado por:

$\gamma(x \otimes y) = \gamma x \otimes y + (-1)^r x \otimes y,\ \ x \in A^r, y \in B,$ satisface que $\gamma^2 = 0,$ de este modo A $\otimes B$ se convierte en un álgebra diferencial graduada.

(2) La multiplicación tensorial entre A y B induce un isomorfismo $\mathrm{H}(A) \otimes \mathrm{H}(B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}(A \otimes B)$ de algebras graduadas, tal isomorfismo es llamado: **El Isomorfismo De Künneth.**

B. DEFINICIONES Y PROPOSICIONES DE ANÁLISIS Y TOPOLOGÍA

Definición de Aplicaciones suaves (2.3.18): Sean E, F dos K – espacios vectoriales finitos dimensionales con la topología estándar, y sea $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}$ un abierto. Una aplicación $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{F}$ es diferenciable en un punto $a \in U$ si para algún $\psi_a \in L(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \psi_a(h),\ h \in E$$

En este caso ψ_a es llamado la derivada de f en a y es denotado por $f^{'}(a)$. Y así escribiremos:

$$f'(a;h) = f^{'}(a)h = \psi_a(h),\ \ h \in E.$$

Observación (2.3.16): Si f es diferenciable en cada punto $a \in U$, este es llamado una aplicación diferenciable y la aplicación $f' : U \longrightarrow L(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dada por $a \mapsto f'(a)$ es llamada la derivación de f. Como L(E,F) es también un espacio vectorial finito dimensional tiene sentido que f' sea diferenciable. En este caso la derivada de f' es denotada por f''; la cual es una aplicación.

$\varphi'' : U \longrightarrow L\left(\mathrm{E}, L(\mathrm{E},\mathrm{F})\right) = L(\mathrm{E},\mathrm{E};\mathrm{F})$

Más generalmente, la "n"-ésima derivada de *f* (si esta existe) es denotada por $f^{(n)}$ y es la aplicación.

$$f^{(n)} : U \longrightarrow L\left(\underbrace{E, \ldots., E; F}_{n-tér\min os}\right)$$

Para cada $a \in U$, $f_{(a)}^{(n)}$ es una aplicación n – lineal simétrica de: E x ….. x E en F. Si toda derivada de f existe; f – es llamada infinitamente diferenciable o suave.

Definición de Difeomorfismo (2.3.19).- Sean E, F dos espacios vectoriales y sean $\mathrm{U} \subset \mathrm{F}$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{F}$; subconjuntos abiertos. Una aplicación suave $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$ se denomina **Difeomorfismo** si esta tiene inversa que también debe ser suave.

Observación (2.3.20).- Si $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{F}$ es una aplicación con derivada continua tal que para algún punto $a \in U$ se tiene que $f^{'}(a) : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ es un isomorfismo lineal. Entonces el Teorema de la función inversa establece que existen vecindades U_a y $\mathrm{V}_{f(a)}$ tal que *f* restringe a una difeomorfismo $U \cong V$.

La Aplicación Exponencial (2.3.20).- Sea E un espacio vectorial finito dimensional (dim(E) = n) sobre el cuerpo de los reales o complejos y sea $\sigma : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. De resultados (Teoremas) estandart de ecuaciones diferenciales existe una única aplicación infinitamente diferenciable $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow L_E$ satisfaciendo la ecuación diferencial lineal $\dot{\tau} = \sigma \circ \tau$, y cuyo valor frontera $\tau(0)$ = *l*. La transformación lineal $\tau(1)$ es llamado la exponencial de σ y es denotada por exp(σ).

Observación (1) (2.3.21).- De la definición inmediata anterior obtenemos una aplicación (no lineal) denotada por $\exp : \mathrm{L_E} \longrightarrow \mathrm{L_E}$; la cual posee las propiedades siguientes:

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) Si $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$, entonces exp $\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) = \exp\left(\sigma_1\right) \circ \exp\left(\sigma_2\right)$

(iii) exp $\left(k\sigma\right) = \left(\exp\left(\sigma\right)\right)^k, k \in \mathbb{Z}$

(iv) det $\exp\left(\sigma\right) = \exp tr\left(\sigma\right)$

(v) Si un producto interno Euclidiano (Hermitiano) es definido en el espacio vectorial real (Complejo) E y si σ^* denota el adjunto de la transformación lineal σ, entonces $\exp(\sigma^*) = [\exp(\sigma)]^*$

Demostración.- Son consecuencias directas e inmediatas de la definición de la aplicación "exp" así como también de los teoremas de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales.

2. Las propiedades (i) y (ii) implican que σ - es un automorfismo, donde $[\exp(\sigma)]^{-1} = \exp(-\sigma)$

3. Si σ - es autoadjunto (i.e. $\sigma = \sigma^*$) entonces la aplicación exp (σ) lo es. Mas aún si σ es antisimétrica (respectivamente hermitiana antisimétrica) entonces exp(σ) es una rotación propia (respectivamente transformación unitaria), de E.

4. La aplicación exponencial puede ser expresado en términos de una serie infinita del modo siguiente:

$$\exp(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\sigma^k$$

Ahora consideremos un espacio Topológico (X, τ) = X, y sea A ⊂ X, la clausura de A denotaremos como $\overline{A}$, y si A,B ⊂ X. Escribiremos:

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Nota.- Una vecindad de A en X significará o se entenderá siempre como un subconjunto abierto U de X tal que U ⊃ A.

Definiciones Topológicas (2.3.21).-

1. Un cubrimiento abierto de un espacio topológico X es una familia V de conjuntos abiertos cuya unión es X. Es decir $V = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ donde U_λ son conjuntos abiertos; es un cubrimiento abierto de X si y solo si $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$.

2. Un cubrimiento abierto "V" de X es llamado localmente finito si cada punto tiene una vecindad lo cual satisface solamente un número finito de elementos de V.

3. Un cubrimiento abierto V es llamado un Refinamiento de un cubrimiento abierto W si cada v ∈ V es un subconjunto de algún w ∈ W.

4. Un espacio topológico X es llamado paracompacto si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito.

5. Una base para la topología de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos tal que cada subconjuntos abiertos de X es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

6. Si $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas; esta es llamada una K-base. Si X posee una base contable esta es llamada segundo contable.

Definición Previas para variedades diferenciales y haces vectoriales (2.3.22)

(1) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, donde U es abierto. Se dice que "f" es diferenciable de clase C^k sobre U para "k" entero no negativo si las derivadas parciales $\dfrac{\partial^t f}{\partial x^t}$ existen y son continuas sobre U para $|t| \leq k$.

Observación.- (2.3.22) (i) Particularmente, f es de clase C^0 si f es continua.

(ii) Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, entonces f es diferenciable de clase C^k si cada una de las funciones componentes $f_i = r_i \circ f$ es de clase C^k, donde $r_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada como $r_i(a) = a_i$

(iii) Se dice que f es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \geq 0$..

(2) Un espacio localmente Euclidiano M de dimensión "n" es un espacio topológico de Hausdorff M tal que para cada punto $x \in M$ tiene una vecindad V_X homeomorfica a un subconjunto abierto del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(3) Sea M un espacio localmente Euclidiano y; sea $U \subseteq M$ un conjunto abierto conexo y W un abierto en $\mathbb{R}^n$. Un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow W$ es llamado una aplicación coordenada, las funciones $x_i = r_i \circ \varphi$ son llamadas las funciones coordenadas y la pareja (U, φ) es llamada un Sistema Coordenada.

Estructura Diferenciable (2.3.23).- Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase $C^k\ (1 \leq k \leq \infty)$ sobre un espacio localmente Euclidiano M, es una colección de sistemas coordenadas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \wedge}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

(E1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} = M$

(E2) $\varphi_\lambda \circ \varphi_B^{-1}$ es de clase C^k, para todo λ, $ß$ en Λ

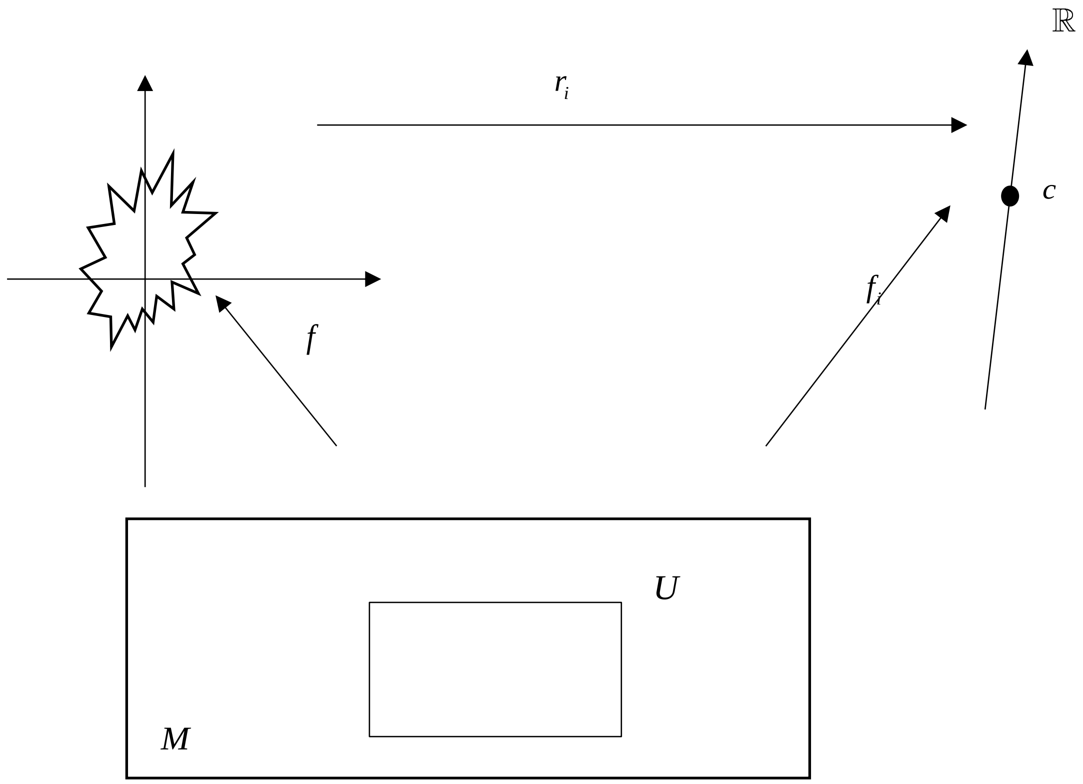

Figura N° 3 Función Diferenciable. Definida en una variedad M.

Fuente: Elaboración propia.

(E3) La colección $\mathcal{F}$ es maximal respecto a (E2).

Esto es: Si (U, φ) es un sistema coordenada tal que: $\varphi \circ \varphi_\lambda^{-1}$ y $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi$ son de clase C^k para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$.

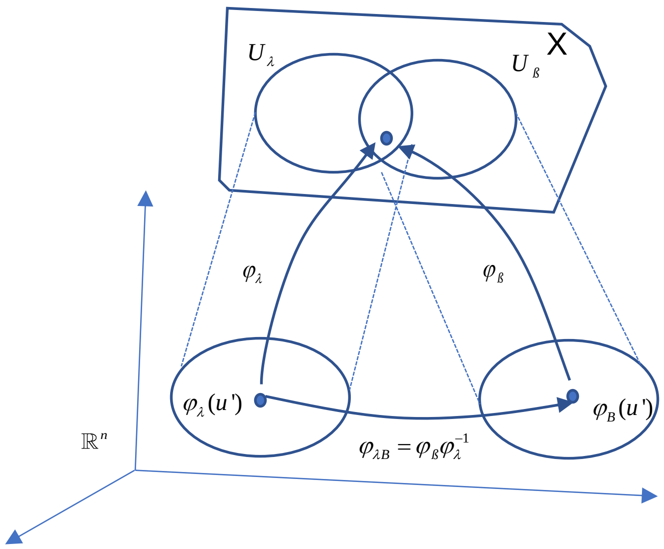

Figura N° 4 Estructura diferenciable sobre un espacio local.

Fuente: Elaboración propia.

Observación (2.3.23).- Si $\mathcal{F}_* = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es cualquier colección de sistemas de coordenadas satisfaciendo (E_1) y (E_2) entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{F}$ conteniendo $\mathcal{F}_*$.

Definición (2.3.24).- Una Variedad Diferenciable n – dimensional de clase C^k (similarmente C^∞ o analítica compleja) es un par $(M, \mathcal{F})$ consistente de un espacio localmente Euclidiano n – dimensional segundo contable (i.e. su topología tiene una base numerable) juntamente con una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase C^k.

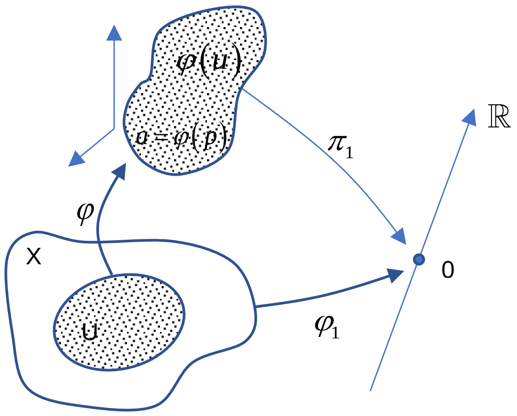

Figura N° 5 Variedad Diferenciable n - dimensional

Fuente: Elaboración propia.

Nota.- Por diferenciable, siempre se entenderá de clase C^∞, y también usaremos el término suave para indicar diferenciabilidad clase C^∞.

Ejemplo (2.3.5).- La estructura diferenciable estándar sobre $\mathbb{R}^n$ es obtenido al tomar $\mathcal{F}$ como la colección maximal conteniendo $(\mathbb{R}^n, i)$ donde $i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad.

Ejemplo (2.3.6).- Sean $(M, \mathcal{F})$ y $(M', \mathcal{F}')$ dos variedades diferenciables de dimensión "n" y "p" respectivamente entonces $M \ x \ M'$ es una variedad diferencial de dimensión (n + p) con estructura diferencial $\mathcal{F}$ la colección maximal que contiene es:

$$\left\{ \left(U_\lambda x V_ß\right), \varphi_\lambda x \psi_ß : U_\lambda x V_ß \longrightarrow \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^p : (U_\lambda, \varphi) \in \mathcal{F}, \ \left(V_ß, \psi_ß\right) \in \mathcal{F}' \right\}$$

Definición (2.3.25).- Sea $U \subseteq M$ un abierto. Diremos que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función C^{∞} sobre U [denotada por $f \in C^{\infty}(U)$] si $f \circ \varphi^{-1}$ es C^{∞} para cada aplicación φ sobre M.

Definición (2.3.26).- Sean M, N dos variedades.

Una aplicación $F : M \longrightarrow N$ se dice diferenciable de clase C^{∞} [denotada por $F \in C^{\infty}(M, N)$ o simplemente por $F \in C^{\infty}$] si $g \circ F$ es una función C^{∞} sobre $\psi^{-1}\left[Dom(g)\right]$ para toda función g definida sobre abiertos en N.

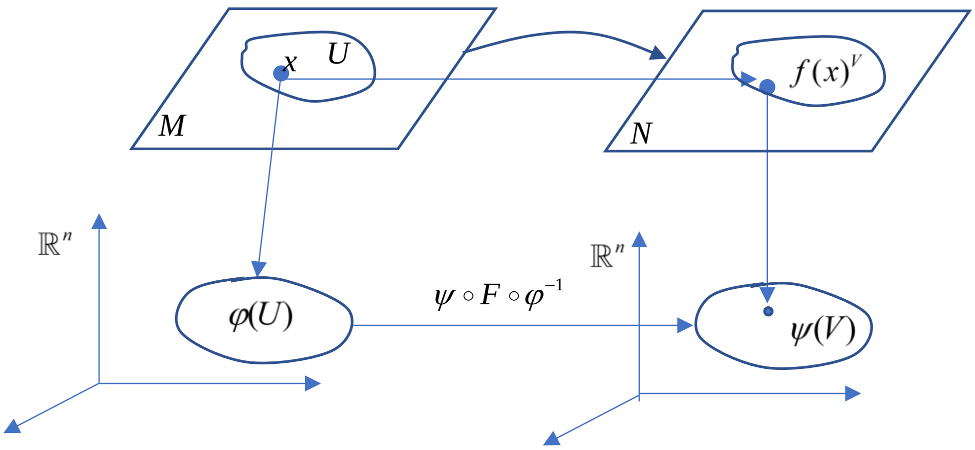

Figura N° 6 Aplicación Diferenciable entre variedades

Fuente: Elaboración propia.

Definición (2.3.27).- Sea M una variedad, y $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de M. Se dice que $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta de un conjunto W ⊂ M si $W \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$. Está cubierta será abierta si cada U_{λ} es abierta.

Definición de Refinamiento (2.3.28).- Un refinamiento $\{V_{ß}\}$ de la cubierta $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento tal que para cada ß existe un λ con la condición $V_{ß} \subseteq U_{\lambda}$.

Definición de Partición de la Unidad (2.3.29).- Una partición de la unidad sobre una variedad M es una colección $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ de funciones C^{∞} sobre M tal que

(i) La colección de soportes $\{Supp\varphi_i\}_{i \in I}$ es localmente finito.

(ii) $\sum_{i \in I} \varphi_i\left(p\right) = 1$ para todo $x \in M$, y $\varphi_i(x) \geq 0$.

Observación (2.3.24).- Una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ es subordinada al cubrimiento $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada $i\in I$ existe $\lambda\in\Lambda$ tal que $Supp\ \varphi_i \subseteq U_\lambda$. Diremos que esto es subordinado al cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ con el mismo conjunto de índices como la partición de la unidad si $Supp\ \varphi_i \subseteq U_i$ para cada $i\in I$.

Lema (2.3.1).- Sea (X,τ) un espacio topológico lo cual es localmente compacto Hausdorff y segundo contable. Entonces X es para compacto.

Demostración.- (Ver Frank W. Warner; Pag. (9)).

Proposición (2.3.9).- Existen funciones C^∞ no negativas φ en $\mathbb{R}^n$ las cuales son iguales a uno sobre $\overline{C(1)}$ $\left(\overline{C(1)} \equiv \text{clausura del cubo unitario}\right)$ y cero sobre el complemento del Cubo abierto.

Demostración.- Solo necesitamos considerar el producto $\varphi=(h\circ r_i)......(h\circ r_d)$, donde $h\in C^\infty$, y es no negativa sobre $\mathbb{R}$; la cual es igual a uno en $[-1,1]$ y cero en $[-2,2]$.

Para construir "h" empezamos definiendo la función

$$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, t>0 \\ 0 \quad , t\le 0 \end{cases}$$

Claramente $f\ge 0$ y es C^∞ entonces la función

$$g(t)=\frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$$

La cual también es C^∞ y no negativa, además g(1) = 1, más aún g(t) = 1, para todo $t\ge 1$ y g(t) = 0 para $t\le 0$; y así podemos definir h(t) = g(t+2) g (2– t); la cual verifica las condiciones requeridas.

Proposición.- Existencia de Partición de la Unidad (2.3.10)

Si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable M. Entonces existe una partición contable de la unidad $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ subordinado al cubrimiento $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con $Supp\ \varphi_j$ compacto para cada j. Si uno no requiere el soporte compacto, entonces existe una partición de unidad $\{\varphi_\lambda\}$ subordinada al cubrimiento $\{U_\lambda\}$ (esto es: $Supp\ \varphi_\lambda \subseteq U_\lambda$) la cual es a lo sumo contable, muchos de los φ_λ no son idénticamente cero.

Demostración .- (Frank W. Warner; Pag. 10).

Proposición (2.3.11).- Sea G un abierto en una variedad M, y sea F un cerrado en M. Con $F \subseteq G,$ entonces existe una función C^{∞}, $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in M.$

(ii) $\varphi(x) = 1$ si $x \in F$

(iii) $Supp(\varphi) \subseteq G.$

Demostración.- Existe una partición de unidad $\{\varphi, \psi\}$ subordinada a la cubierta $\{G, M \setminus F\}$ de M con Sopp $(\varphi) \subseteq G$ y Sopp $(\psi) \subseteq M$ F, entonces φ es la función derivada.

Notación : (1) El conjunto de aplicaciones diferenciales entre variedades M y N, lo escribiremos como $\mathcal{L}$ (M, M). Si $\varphi : M \longrightarrow N$ tiene inversa diferenciable, esto es llamado un difeomorfismo.

(2) El álgebra de funciones real – valuados sobre M será denotada por $\mathcal{L}$(M).

(3) Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son $\mathcal{L}$(M) – módulos, entonces $\mathcal{M} \otimes_M \mathcal{N}$, Hom_M ($\mathcal{M}$; $\mathcal{N}$) y Λ_M $\mathcal{M}$ denotan construcciones lineales y multilineales sobre $\mathcal{L}$(M).

Haz – Vectorial (2.3.30).- La cuaterna $\xi = (E, \pi, B, F)$ es llamada **Haz Vectorial** donde $\pi : E \longrightarrow B$ es diferenciable, F y cada conjunto $F_x = \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial finito dimensional y existe un cubrimiento abierto $\{U_\lambda\}$ de B, y un sistema de difeomorfismo $\psi_\lambda : U_\lambda x F \xrightarrow{\cong} \prod^{-1}(U_\lambda)$ tal que ψ_λ restringido a isomorfismos lineales $\psi_{\lambda, ß} : F \xrightarrow{\cong} F_x\left(x \in U_\lambda\right).$ E, B y F son llamados el espacio total, espacio base y fibra típica de ξ; respectivamente π es llamada la proyección; y F_x es llamado la fibra en x.

Observación (2.3.25).- (1).- La dimensión de F es llamado el rango de ξ. La colección $\{U_\lambda, \psi_\lambda\}$ es llamado una representación coordenada para "ξ". Si E = B x F y π es obviamente la proyección ξ es llamado trivial.

Definición (2.3.31).- Sea $\xi' = (E', \pi', B', F')$ otro haz vectorial. Una aplicación Haz u homomorfismo $\xi \longrightarrow \xi'$ es una aplicación diferenciable $\varphi : E \longrightarrow E'$ que restringe a aplicaciones lineales $\varphi_x : F_x \longrightarrow F_{\psi(x)}, x \in B.$ La correspondencia $x \mapsto \varphi(x)$ define una aplicación diferenciable $\psi : B \longrightarrow B'$

Observación (2.3.26).- 1.- Si $\psi = i$, entonces φ es llamado un Haz Fuerte.

2. El Producto Cartesiano de ξ y ξ', es el Haz vectorial :

$\xi \; x \; \xi' = (E \; x \; E', \pi \; x \; \pi', B \; x \; B', F \; x \; F')$

3. Un Haz Vectorial ξ determina haces vectoriales: $\xi^* \overset{P}{\otimes} \xi, \; \Lambda\xi, \; V^q \xi$; cuyas fibras en x son los espacios vectoriales: $F_x^*, \otimes^p F_x, \Lambda F_x$ y $\mathrm{V}^q F_x$.

4. Si η – es un segundo haz vectorial con la misma base y con fibra típica H; entonces $\xi \oplus \eta, \; \xi \otimes \eta$ y $L(\xi, \eta)$ denotan los haces vectoriales con fibras $Fx \oplus Hx, \; Fx \otimes Hx$ y $L(Fx; Hx), \xi \oplus \eta$ es llamado la Suma de Whitney de ξ y η. El Haz $L(\xi;\xi)$ es cierto por L_ξ.

Definición (2.3.32).- (1) Las **Secciones Cruz** en "ξ" son aplicaciones diferenciables $\sigma : B \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = i$

(2) El Transporte de σ descrito por: Carr σ, es la clausura del conjunto $x \in B$ tal que $\sigma(x) \neq 0$.

Lema (2.3.2).- Las secciones Cruz es un $\mathcal{L}$ (B) – módulo; el cual es denotado por Sec (ξ).

Demostración.- Bastará definir las operaciones siguientes:

$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), (f.\sigma)(x) = f(x)\sigma(x)$

Observación (2.3.27).- (1) Una seudo Métrica Riemaniana en un Haz Vectorial "ξ" es un asignamiento (aplicación) diferenciable a la fibra Fx de productos internos g(x) = < , > x. De esta manera $g \in \mathrm{Sec}(V^2 g^*)$ si cada g(x) es definida positivo, g es llamado una métrica Riemaniana.

(2) La relación "~" definida en la sección Cruz $\Lambda^r \xi^*$ como: $\Delta_1 \sim \Delta_2$ si y solo si $\Delta_1 = f \Delta_2$ para algún $f \in \mathcal{L}(B)$, con f(x) > 0, x ∈ B. Y donde r = rang (ξ) es de equivalencia, de este modo, una orientación en ξ es definida como una clase de equivalencia anulándose en casi todas partes de $\Lambda^r \xi^*$.

(3) Una Sección Cruz en una de las clases $[\bullet]$ es llamada una función determinante en ξ lo cual representa tal orientación.

Haz Tangente (2.3.33) .- Sea M una n – variedad. **El espacio tangente**, denotado por: $T_x M$ en x ∈ M es el espacio de aplicaciones lineales $\rho : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$\rho(f.g) = \rho(f) \bullet g(x) + f(x).\rho(g)$. El **Haz Tangente de M,** denotado por: $\tau_M = \left(T_M, \pi, M, \mathbb{R}^n\right)$ es el Haz Vectorial, cuya fibra en x es $T_x(M)$. La derivada de una aplicación suave (diferenciable) $F: M \longrightarrow N$ es la aplicación haz $dF: T_M \longrightarrow T_N$ cuya restricción a $T_x(M)$ es dado por: $\left((dF)_x \rho\right)(f) = \rho(f \circ F);\ f \in \mathcal{L}(M)$

Observación (2.3.28).- (i) Si cada $(dF)_x$ es suryectiva, F es denominada Submersión; si también F es suryectiva, entonces N se llama variedad cociente de M.
(ii) si dF es inyectiva (M, F) es llamada una variedad incrustada (incorporada); si además φ es un homeomorfismo sobre F(M), entonces M es llamada una subvariedad de N.

Definición (2.3.34).- Un Campo Vectorial sobre M es una sección Cruz X en τ_M; el módulo de los campos vectoriales será denotado por $\mathcal{X}$(M). Una órbita de X es un camino diferenciable $\alpha(t)$ tal que la derivada $\dot{\alpha}(t)$ = x (α(t)).

Nota.- El Teorema de Picard, afirma que para cada $x \in M$ existe una única orbita de X mediante x.

Definición de Producto de lie (2.3.35).- Sea X ∈ $\mathcal{X}$(M), f ∈ $\mathcal{L}$ (M), entonces X (f) ∈ $\mathcal{L}$ (M) es definido por $(X(f))_{(x)} = X_{(x)}$ (f). De este modo **El Producto de Lie**, denotado por [X, Y] es definido como el único Campo Vectorial satisfaciendo.
$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, para X, Y ∈ $\mathcal{X}$(M)

Observación (2.3.29).- Sean X ∈ $\mathcal{X}$(M), Y∈ $\mathcal{X}$(N) campos vectoriales. Se dice que X e Y están F – relacionados con respecto a la aplicación suave $F: M \longrightarrow N$ si:
$(dF)_x X(x) = Y(F(x)), x \in M$. En este caso escribiremos X Y. Si F es un difeomorfismo, entonces F_* (X) denota el único campo vectorial sobre N el cual es F – relacionado a X.

Forma Diferencial en una variedad (2.3.36).- Sea M una variedad; una forma diferencial en M es una **sección Cruz** Φ en $\Lambda\tau_M^*$. Si cada $\Phi(x) \in \Lambda^P T_x(M)^*$; entonces Φ tiene grado "p" las formas diferenciales son una algebra graduada, denotada como A(M) = $\sum_p A^P(M)$, con multiplicación dada por: $(\Phi \wedge \psi)(x) = \Phi(x) \wedge \psi(x)$, $A^p(M)$ puede ser considerado como el espacio de las aplicaciones p – lineales antisimétricas de: $\mathcal{X}$(M) x …….x $\mathcal{X}$(M) en $\mathcal{L}$(M), mediante la ecuación.

$$\left(\Phi\left(X_1,....,X_p\right)\right)(x):=\Phi\left(x;X_1(x),....,X_p(x)\right)$$

Entonces:

$$(\Phi\wedge\psi)\left(X_1,.....,X_{p+q}\right)=\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S^{p+q}}\varepsilon_\sigma\Phi\left(X_{\sigma(1)},.....,X_{\sigma(p)}\right)\psi\left(X_{\sigma(p+1)},.....,X_{\sigma(p+q)}\right)$$

(♦) Una aplicación F : M $\longrightarrow$ N determina el homomorfismo

$F^*:A(M)\longrightarrow A(N)$ definida por:

$$\left(F^*\Phi\right)\left(x;\xi_1,....,\xi_p\right)=\Phi\left(F(x);(dF)\xi_1,....,(dF)\xi_p\right)p\geq 1$$

$$\left(F^*f\right)(x)=f(F[x])$$

Observación (2.3.30).- (1) Sean M, N dos variedades diferenciales las aplicaciones: $i:M\longrightarrow MxN\ y\ j:N\longrightarrow MxN$ dadas como i(m) = (m, n_0) y j(n) = $\left(m_0,n\right)$ son llamadas las inclusiones opuestas $n_0\ y\ m_0$. Sus derivadas definen un isomorfismo $Tm_0(M)\oplus Tn_0(N)\cong T_{(m_0,n_0)}(MxN)$; Estos isomorfismos identifican τ_M x τ_N con $\tau_{M\text{ x N}}$. Particularmente $X\in\mathcal{X}(M)$ determina el campo vectorial, $i_M X$ en $\mathcal{X}$(M x N) dado por $(x,y)\mapsto(X(x),0)$; esto es también denotado por $i_L X$. Además el isomorfismo inducido.

$$\Lambda T_{(m_0,n_0)}(M\text{ x N})^*\cong\sum\Lambda^p T_{m_0}(M)^*\otimes\Lambda^q T_{n_0}(N)^*$$

Define una bigraduación en A (M x N) por A (M x N) = $\sum A^{p,q}(M\text{ x N})$.

2. Si $\phi\in A^p(M)$ y $\psi\in\Lambda^q(N)$, entonces ϕ x $\psi\in A^{p,q}(M\text{ x N})$ denota la (p + q) forma dado por $\pi_M^*\Phi\Lambda\pi_N^*\psi$ donde $\pi_M:M\text{ x N}\longrightarrow M$ y $\pi_N:M\text{ x N}\longrightarrow N$ son las proyecciones, así $(\Phi\text{ x }\psi)\left(m_0,n_0\right)=\Phi\left(m_0\right)\otimes\psi\left(n_0\right)$.

3. El operador sustitución i(X), la derivada de Lie $\theta(X)$, y la derivada exterior δ son los operadores Homogéneos en A (M), de grado -1, 0 y 1 definida respectivamente, por:

- $\left[i(X)\Phi\right]\left(X_2,.....,X_p\right)=\Phi\left(X,X_2,.....,X_P\right)$
- $\left[\theta(X)\Phi\right]\left(X_1,.....,X_p\right)=X\left(\Phi,X_1,.....,X_P\right)$ v $-\sum_{j=1}^{p}\Phi\left(X_1,.....,\left[X,X_j\right],....,X_p\right)$

- $(\delta\Phi)\left(X_0,.....,X_p\right)= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j X_j\left(\Phi\left(X_0,......,\hat{X}_j,......X_p\right)\right)$

$$+\sum_{0\le i\le j\le p}(-1)^{i-j}\Phi\left(\left(X_i,X_j\right),X_0,.....,\hat{X}_i,.....\hat{X}_j,......X_p\right)$$

Donde $\Phi\in A^p(M), p\ge 1$, y así también se tiene:

$i(X)f=0,\theta\left(X\right)f=X(f),\left(\partial f\right)(X)=X(f), f\in\mathcal{L}(M)$

Ellas son respectivamente un antiderivación, una derivación y un antiderivación.

Satisfacen las relaciones:

$i\left(\left[X,Y\right]\right)=\theta\left(X\right)\circ i(Y)-i(Y)\circ\theta\left(X\right)$

$\theta\left(\left[X,Y\right]\right)=\theta\left(X\right)\circ\theta(X)-\theta(Y)\circ\theta\left(X\right)$

$\theta(X)=i(X)\circ\delta+\delta\circ i(X), y$

$\delta^2=0$

Además, si $F:M\longrightarrow N$ es diferenciable y $X \overset{F}{\frown\!\!\!\smile}$ Y entonces $i(X)\circ F^*=F^*\circ i(Y)$ y $\theta\left(X\right)\circ F^*=F^*\circ\theta(Y)$ en cualquier caso: $F^*\circ\delta=\delta\circ F^*$

4. Sea E un espacio vectorial finito dimensional las secciones cruz en el Haz $L\left(\Lambda\tau_M^*:M \text{ x E}\right)$ respectivamente, $L\left(\Lambda^p\tau_M^*;M \text{ x E}\right)$ son llamadas formas diferenciales con valores en E. (Respectivamente las p – formas con valores en E).

Estos módulos son denotados por: A (M, E) y $A^p(M;E)$. Si $\Omega\in\Lambda^p(M;E)$, entonces $\Omega\left(x\right)$ es una p – lineal antisimétrica, E – valuada en $T_x(M)$. Un isomorfismo $A\left(M\right)\otimes E\longrightarrow A\left(M,E\right)$ es dado por:

$\left(\Phi\otimes m_0\right)\left(x;\xi_1,....,\xi_p\right)=\Phi\left(x;\xi_1,....,\xi_p\right).m_0$

5. Los Operadores $i(X)\otimes L,\ \theta\left(X\right)\otimes L,$ y $\delta\otimes L$ en A(M, E) son denotados simplemente por $i(X),\theta(X)$ y δ ellos satisfacen las relaciones dadas líneas arriba en el caso: E = $\mathbb{R}$ una aplicación diferenciable $F:M\longrightarrow N$, induce una aplicación.

$$F^* = \left(\varphi^* \otimes L\right) : A(M,E) \longleftarrow A(N,E)$$

6. Si $\alpha : F \longrightarrow H$ es una aplicación lineal. Definimos $\alpha_* : A(M,H) \longrightarrow A(M,H)$ como $\left(\alpha_* \Phi\right)\left(x, \xi_1, ..., \xi_p\right) = \alpha\left(\Phi\left(X; \xi_1, ..., \xi_p\right)\right)$, α_* conmuta con el operador i(X), $\theta\left(X\right), \delta$ y F^*.

Definición (2.3.37).- 1) Una orientación de una variedad M es una orientación de τ_M; así esto es una clase de equivalencia de n – formas que se anulan en casi toda parte.

2) Una aplicación diferenciable $F : M \longrightarrow N$ (dim M = dim N) es llamado orientación preservante (respectivamente orientación revertida) si F*Δ (Respectivamente - F*Δ) representa la orientación de M cuando Δ es la representación de N.

Observación (2.3.31).- El espacio de las formas diferenciales con transporte compacto denotado por $A_c(M)$ es un ideal en A(M).

Haces de Esferas (2.3.38).- Un Haz de r- esferas es un haz diferenciable (suave) con fibra la r – esfera. Si $\xi = \left(E, \pi, B, F\right)$ es un haz vectorial con una métrica Riemaniana, entonces las esferas unitarias $S_x \subset F_x$ son las fibras de un haz de esferas $\xi_S = \left(E_S, \pi_s, B, S\right)$llamada el haz de esfera asociada.

Una orientación en ξ define una orientación en las fibras F_x; las orientaciones inducidos en las esferas S_x define una orientación en ξ_S.

Definición de Grupo de Lie (2.3.39).- Un grupo de Lie es un conjunto el cual simultáneamente es grupo y variedad diferenciable (suave), tal que las aplicaciones siguientes son también diferenciables.

(i) La multiplicación $\mu : G \ x \ G \longrightarrow G$ dado por $\mu(x,y) = xy$

(ii) La inversión $\upsilon : G \longrightarrow G$ dado por $\upsilon(x) = x^{-1}$

Nota.- El elemento identidad de un grupo de lie es denotado por "e".

Definición (2.3.40).- Sea G y H dos grupos de Lie, $\varphi : G \longrightarrow H$ una aplicación. Se dice que φ es un **Homomorfismo de Grupos de Lie** si "φ" es un homomorfismo y además diferenciable de grupos. Un **isomorfismo de Grupos de Lie** es un homomorfismo y un difeomorfismo.

Observación (2.3.32).- (1) Sea G un grupo de Lie. Cada elemento $a \in G$ determinan aplicaciones diferenciables $\lambda_a, \rho_a : G \longrightarrow G$, dadas como: $\lambda_a(x) = ax$ y $\rho_a(x) = xa$; estas son llamadas traslación a izquierda y traslación a derecha por "*a*" .

2. Las aplicaciones dadas en la Observación inmediata anterior (1); verifican las siguientes igualdades.

$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_a b,\ \rho_a \circ \rho_b = \rho_{ba},\ \lambda_e = \rho_e = i_d$ y $\lambda_a \circ \lambda_b = \rho_b \circ \lambda_a$

En particular son difeomorfimos, con inversas $\lambda_{a^{-1}}$ y $\rho_{b^{-1}}$

Derivaciones de las traslaciones (2.3.41).- (1) Las derivaciones de las traslaciones λ_a y ρ_b serán denotados por La y Rb; es decir $La = d\lambda a : T_G \longrightarrow T_G$ y $R_b = d\rho_b : T_G \longrightarrow T_{G'}$. Tales derivaciones producen las siguientes relaciones:

$L_a \circ L_b = L_a b,\ R_a \circ R_b = Rb_a,\ \mathrm{R_e} = L_e = 1_{T_G}$ y $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$

2. Si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $\varphi \circ \lambda_a = \lambda \varphi_a \circ \varphi$ y $\varphi \circ \rho_b = \rho_{\varphi_{(b)}} \circ \varphi$; de aquí $d\varphi \circ L_a = L\varphi_a \circ d\varphi$ y $d\varphi \circ R_b = R\varphi_{(b)} \circ d\varphi.$

En particular, cada $(d\varphi)_x : T_x(G) \longrightarrow T_{\varphi(x)}(H), x \in G$ es inyectivo (respectivamente suryectiva) si y solamente $(d\varphi)_e$ lo es.

Ahora consideremos las aplicaciones multiplicación e inversión. Sus derivadas son aplicaciones de haces.

$d\mu : T_G\ x\ T_G \longrightarrow T_G$ y $d\upsilon : T_G \longrightarrow T_G.$

Lema (2.3.3).- Sean $\xi \in T_a(G),\ \eta \in \mathrm{T}_b(G);$ entonces:

1. $d\mu(\xi, \eta) = R_b \xi + L_a \eta$
2. $d\upsilon(\xi) = -\left[L_a^{-1} \circ R_a^{-1}\right](\xi)$

Demostración.- (1) Consideremos las inclusiones $j_a : G \longrightarrow \{a\} xG$ y $j_b : G \longrightarrow Gx\{b\}$ opuestas a los elementos *a* y b respectivamente. Entonces

$d\mu\{\xi, \eta\} = (d\mu \circ dj_b)(\xi) + (d\mu \circ dj_a)(\eta) = R_b(\xi) + L_a(\eta)$

Ahora nótese que $x \mapsto \mu\left(x, \upsilon(x)\right)$ es la aplicación constante $G \mapsto \{e\}$, de donde

$d\mu\left(\xi, d\upsilon(\xi)\right) = 0$

(2) Para mostrar este item; obsérvese (1)

Campos Vectoriales Invariantes (2.3.42).- Las traslaciones $\lambda_a, \rho_a : G \longrightarrow G$ (G – grupo de lie) inducen automorfismos $(\lambda_a)_*$ y $(\rho_a)_*$ de el álgebra de lie real $\mathcal{X}$ (G) [Que veremos más adelante] de campos vectoriales sobre G.

- Un Campo Vectorial X sobre G es llamado **invariante a izquierda** si $La(X(x) = X(ax), a, x \in G;$ es decir; si $(\lambda a)_* X = X$, $a \in G.$ En virtud del lema anterior, esto es equivalente a $i_R X \sim_{\mu} X$, con $\left(i_R X(x,y)\right) = (0, X(y)).$

Observación (2.3.33).- Como cada $(\lambda_a)_*$ preserva productos de lie, los campos vectoriales invariantes forman un subalgebra, $\mathcal{X}_1$(G) de $\mathcal{X}$ (G).

Proposición (2.3.12).- Un fuerte isomorfismo de haces $\alpha : G \text{ x } \mathrm{T}_e(G) \xrightarrow{\simeq} T_G$ es dado por $\alpha(a,h) = L_a(h).$

Demostración.- Restringiendo "α" a las fibras es un isomorfismo. Además esto es dado por: $\alpha(a,h) = d\mu(O_a, h)$, y nuevamente usando el lema anterior parte (1). [Esto es: $d\mu(\xi, \eta) = R_b\xi + L_a\eta$] de donde se obtiene que α es diferenciable, y por tanto el resultado.

Consecuencias de la proposición (2.3.12): Obtenemos lo siguiente:

(i) Un isomorfismo $\mathcal{X}_L$(G) $\cong T_e(G)$ es dado por $x \mapsto x(e)$. En particular

$\dim \mathcal{X}_L(G) = \dim G$

(ii) Un isomorfismo de $\mathcal{L}$(G) – módulos $\mathcal{X}_L(G) \otimes \mathcal{L}(G) \cong \mathcal{X}(G)$ es dador por :

$x \otimes f \mapsto f - x$

Definición (2.3.43).- (1) Sea $h \in T_e(G)$. El único campo vectorial invariante a izquierda X tal que X (e) = h es denotado por X_h, y es llamado **Campo Vectorial Invariante a Izquierda Generado por "h".**

(2) Un campo Vectorial Y es llamado invariante a derecha si $(\rho_b)_* Y = Y$, con $b \in G.$ El algebra de lie de campos vectoriales invariantes a derecha es denotado por $\mathcal{X}_R(G)$.

Observación (2.3.34).- De modo análogo a lo demostrado en la proposición (2.3.12). $\left[\alpha : G \text{ x } \mathrm{T}_e(G) \cong T_G ; \alpha(a,h) = L_a(h)\right]$ se tiene que $\mathcal{X}_R(G) \cong T_e(G)$ el cual está dado por: $Y \mapsto Y(e)$. El campo vectorial invariante a derecha correspondiente a $h \in T_e(G)$ bajo este isomorfismo es llamado: Campo Vectorial Invariante a Derecha generado por h, el cual es denotado por Y_h.

Corchete de lie (2.3.44).- Sean X, Y dos campos vectoriales diferenciales en M. El Corchete de lie de X e Y se define como el campo vectorial denotado por [X,Y]. Verificando la igualdad siguiente:

$$[X,Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf); m \in M.$$

Proposición (2.3.13):

(i) $[X,Y]$ es un Campo Vectorial Diferenciable.

(ii) Si $f, g \in C^\infty(M)$, entonces $[fX, gy] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(y_f)X$.

(iii) $[X,Y] = -[Y,X]$

(iv) $\left[[X,Y],Z\right] + \left[[Y,Z],X\right] + \left[[Z,X],Y\right] = 0$ para todo campo vectorial X, Y, Z en M.

Demostración.- [Ver Frank W. Warner; Pag. 36]

Nota.- La igualdad (iv) es conocida como la identidad de Jacobi.

Proposición (2.3.14).- Si $X \in \mathcal{X}_1(G)$ y $\mathrm{Y} \in \mathcal{X}_R(G)$ entonces $[X,Y] = 0$.

Demostración: Definamos $i_L Y \in \mathcal{X}(G \text{ x } G)$ como $i_L Y(x,y) = (Y(x), 0)$, entonces $i_R X \overset{\mu}{\sim}$ X y $i_L Y \overset{\mu}{\sim}$ Y; de aquí se sigue que $0 = [i_R X, i_L Y] \overset{\mu}{\sim} [X,Y]$ y como μ es suryectiva, entonces $[X,Y] = 0$

Algebra de Lie Asociada A un grupo de Lie (2.3.45).- Sea G un grupo de lie. El álgebra de lie; de G es el espacio vectorial, $T_e(G)$, juntamente con la estructura de Lie inducida de

$\mathcal{X}_L(G)$. En otras palabras un espacio vectorial con una operación bilineal satisfaciendo las condiciones (iii) y (iv) de la proposición inmediata anterior es llamada un álgebra de lie.

Observación (2.3.35).- (1) Para $h,k \in T_e(G)$ se verifica: $[k,h]=[X_h,X_k](e)$. Nótese además que el isomorfismo $\mathcal{X}_R(G)\cong T_e(G)$ determina el segundo producto de lie $[h,k]=-[h,k], h_1k \in T_e(G)$. Así la aplicación $h \mapsto -h$ define un isomorfismo entre estas estructuras de algebras de lie.

(2) Consideremos un homomorfismo de grupos de lie, $\varphi : G \longrightarrow H$. Como $\varphi(e)=e$ la derivada $d\varphi$ restricto a una aplicación lineal

$(d\varphi)_e : T_e(G) \longrightarrow T_e(H)$

Será denotada por φ'.

Proposición (2.3.15).- $\varphi'=(d\varphi)_e$ es un homomorfismo de algebras de lie.

Demostración.- Tenemos la siguiente relación $X_h \overset{\varphi}{\sim} X_{\varphi' h}$, para $h \in T_e(G)$. De aquí $[X_h, X_k] \overset{\varphi}{\sim} [X_{\varphi' h}, X_{\varphi' k}]$. Evaluando esta relación en "e" obtenemos $\varphi'[h,k]=[\varphi' h, \varphi' k]$

Observación (2.3.36).-: Si $\varphi : H \longrightarrow G$ y $\psi : H \longrightarrow K$ son dos homomorfismos de grupos de lie entonces $(\psi \cdot \varphi)' = \psi' \cdot \varphi'$

Ejemplo : (El Grupo GL(V)) (2.3.6).- Consideremos el grupo GL(V) del automorfismo de un espacio vectorial V n – dimensional (Real o complejo). Este es un subconjunto abierto del espacio vectorial $L_V = L(V,V)$, y de aquí una variedad; además las operaciones de multiplicación e inversión son diferenciales y así GL(V) es un Grupo de Lie.

Observación (2.3.37).- (1) Claramente GL(V) es un subconjunto abierto de L_v; su haz tangente es la restricción del haz tangente de Lv.

$$T_{GL(V)} = GL(V)\ x\ L_V$$

En particular, el espacio vectorial subyacente de la correspondiente algebra de Lie es Lv.

(2) Las traslaciones a izquierda $\lambda_\tau, \tau \in GL(V)$ son dados por: $\lambda_\tau(\sigma)=\tau\circ\sigma; \sigma,\tau \in GL(V)$.

De aquí se sigue que:

$L_\tau(\sigma,\alpha)=(\tau\circ\sigma, \tau\circ\alpha), \sigma \in GL(V), \alpha \in Lv$

Y por lo tanto el campo vectorial generado por $\alpha \in L_V$ es dado por:

$X_{\alpha}(\tau) = (\tau, \tau \circ \alpha), \tau \in GL(V)$

(3) Para determinar el producto de Lie, sea f una función bilineal en Lv, y denotemos su restricción a GL(V), también por f; entonces $(X_{\alpha} f)(\tau) = f(\tau \circ \alpha),$ y así:

$([X_{\alpha}, X_{ß}] f)(\tau) = f(\tau \circ (\alpha \circ ß - ß \circ \alpha))$

Puesto que $\tau \in GL(V)$ y $f \in L_v^*$ son arbitrarios, obtenemos:

$$[X_{\alpha}, X_{ß}] = X_{\alpha \circ ß - ß \circ \alpha}$$

En particular la estructura de algebra de lie, de Lv inducida de la estructura del grupo de lie, de GL(V) es dado por:

$$[\alpha, ß] = \alpha \circ ß - ß \circ \alpha$$

El Grupo de Elementos Invertibles de un Algebra Asociativa (2.3.46)

Sea A un algebra asociativa finito dimensional sobre $\mathbb{R}$, con elemento unitario. Para $a \in A$ definimos $\mu(a): A \longrightarrow A$ la multiplicación por "*a*"; entonces se tiene que "*a*" posee inverso en A, si y solamente si μ(*a*) es un isomorfismo lineal; es decir si y solo si

$$\det(\mu(a)) = 0$$

Los elementos inversibles de A forman un grupo que denotamos por G(A) bajo la composición. De la condición mostrada líneas arriba implica que G(A) es un abierto en A. De aquí G(A) es un grupo de lie. El mismo argumento como se da para GL(V) en Lv muestra que el algebra de lie de G(A) es A, con el corchete de lie dado por:

$$[\alpha, ß] = \alpha ß - ß\alpha, \ \alpha, ß \in A$$

Producto de Lie (2.3.47):

Sean G, H dos grupos de lie. El Producto variedad G x H puede convertirse en un grupo de Lie, poniendo la operación.

$(X, Y) \bullet (X', Y') = (XX', YY'), \ X, Y' \in G; \ \mathrm{Y,Y'} \in \mathrm{H}$

Este grupo de lie es llamado El Producto Directo de G y H.

Las Proyecciones $\pi_G : G \text{ x H} \longrightarrow G$ y $\pi_H : G \text{ x H} \longrightarrow H$ y las inclusiones

$i_G : G \longrightarrow G\ x\ H,\ i_H : H \longrightarrow G\ x\ H,$ opuestas "e" son todos homomorfismos de grupos de lie. Los homomorfismos de algebras de lie: $\pi_G^{'},\ \pi_H^{'}$ son dados por:

$\pi_G^{'}(h,k) = h$ y $\pi_H^{'}(h,k) = k$

Esto se sigue el producto de lie en $T_e(G\ x\ H)$ es dado por:

$\left[(h,k),(h',k')\right] = \left([h,h'],[k,k']\right), h,h' \in T_e(G);\ \ k,k' \in T_e(H).$

Haz Tangente (2.3.48).- Si G es un grupo de lie, entonces la aplicación

$$d\mu : T_G\ x\ T_{G'} \longrightarrow T_G$$

En un grupo de lie, con aplicación inversión $d\upsilon$ (La ley asociativa es obtenida diferenciando la relación: $\mu \circ (\mu\ x\ i) = \mu \circ (i\ x\ \mu)$; la sección cruz cero $0 : G \longrightarrow T_G$ es un homomorfismo de grupos de lie.

El un Guión Componente (2.3.49).- Sea G un grupo de lie, y denótese por G° la componente conexa de la variedad G; la cual contiene "e", esto es una subvariedad abierta. Como μ, υ son continuas y G° x G°, G° son conexos entonces se sigue que:

μ (G° x G°) ⊂ G° y υ (G°) ⊂ G°.

Análogamente; a G° $a^{-1} \subset G°,\ a \in G.$ Así G° es un subgrupo normal de G, esto claramente resulta ser un Grupo de Lie y es llamado el **un - componente (1 – Componente)** de G. El Grupo cociente $G/G°$ es llamado el Grupo Componente de G.

Ejemplo (2.3.7).- Consideremos los números reales y complejos no ceros denotados por $\mathbb{R}*$ y $\mathbb{C}*$ grupo de lie bajo la multiplicación.

Si V (Respectivamente W) es un espacio real (Respectivamente complejo). Entonces las aplicaciones $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}*$ y $\det : GL(W) \longrightarrow \mathbb{C}*$ son homomorfismos de grupos de Lie. Sus derivadas son dados respectivamente por:

$tr : Lv \longrightarrow \mathbb{R}$ y $tr : Lw \longrightarrow \mathbb{C};$ donde $\det' = tr$

CAPITULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 HIPÓTESIS

3.1.1 Hipótesis General

Los grupos de Lie y los difeormorfismo entre variedades evidenciaran la identificación de un grupo de Lie “G” con el producto directo de dos variedades.

3.1.2 Hipótesis Específica

a) Los isomorfismos entre grupos de Lie permitirán determinar la identificación de un grupo de Lie G con el producto directo del Tori T^m y el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$.

b) La integral de una función diferenciable definida en un grupo de Lie “G” con valores reales dependerá de la compacidad y de la estructura diferencial que posee G.

3.2 DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE VARIABLES

Las variables identificados en la hipótesis general, se pueden definir conceptualmente de la forma que se indica a continuación.

Variable Independiente

La estructura algebraica de grupo, la estructura diferencial de variedad y por ende del grupo de Lie.

Variable dependiente

El isomorfismo a establecer entre grupos de Lie y por ende entre variedades.

3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE LA VARIABLE

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente Estructura de Grupo Lie	Teoría de Grupos de Lie	Grupos de Lie	El Grupo "G"	Analítico	Constructiva
Dependiente Un Isomorfismo entre variables.	Teoría de Variables diferenciables	Isomorfismos	El Tori "T^m" y espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$	Analítico	Constructiva

CAPITULO IV
DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 TIPO Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación (Estudio) es básica, según Alva Lucía Marin Villada (2008), “También, llamada investigación Pura, teórica o dogmática. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, en incrementar los conocimientos científicos o filosóficos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico”. A esta investigación le correspondió el código Unesco 220212 y el Código del Plan Nacional CTI 04050201.

Es un estudio básico porque mediante el cual, se buscará aportar conocimientos que permitan mejorar algunos detalles del marco teórico (Variable Diferenciable). El diseño es no experimental.

4.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El método utilizado es demostrativo e Inductivo - deductivo; lo cual consiste en presentar previamente base teórica basada en definiciones, proposiciones, lemas y otros relacionados al tema a investigar, en este caso tal presentación se hace en el item (2.3.), donde se expone algunos tópicos referente a: álgebra, análisis, topología y geometría diferencial. Tal teoría nos permitirá lograr nuestro objetivo, que consiste en identificar estructuras diferenciables mediante los denominados difeomorfismos; es decir se a demostrado que una estructura diferenciable es difeomorfa a otra; (Producto directo). Para obtener tal demostración; así como algunos ejemplos de aplicación se ha utilizado una serie de acciones matemáticas muy meditadas y encaminadas hacia un fin determinado; mostrándose, de esta manera la utilización del método inductivo y deductivo.

4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

No aplica

4.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Por ser un trabajo netamente "matemático" (Teórico – abstracto); no se requiere procedimientos especiales para la recolección de la información. Lo que se realiza es una búsqueda y revisión bibliográfica: (libros de especialidad, páginas web, papers, revistas especializadas, etc.) Así como también se ha utilizado una PC, una impresora y otros.

4.5 ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

En el presente trabajo no hay un procedimiento de datos y mucho menos procesos estadísticos, en tanto que es un trabajo analítico. En tal aspecto y luego de tener y/o revisar preliminarmente algunos tópicos algebraicos, analíticos y topológicos; ponemos enfásis en el estudio de un grupo de Lie, álgebra de Lie, espacios diferenciables graduados, y algebras graduadas, seguido de ello presentamos la aplicación exponencial de una transformación lineal σ en L(E, E), con esta noción definimos la aplicación "exp" del álgebra de Lie $E = Te(G)$ en el grupo de Lie G la cual es diferenciable y está dado por exp (h) = ψ (1, h) = $\alpha_h(1)$; donde $\psi : \mathbb{R} \; x \; E \longrightarrow G$ y α_h es el denominado subgrupo un – paramétrico generado por "h" es decir $\alpha_h : \mathbb{R} \longrightarrow G$; la cual está definido por el homomorfismo $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G'$ tal que $\alpha(0) = h.$

A continuación, presentamos algunas definiciones, conceptos proposiciones entre otros que nos permitirá establecer y obtener nuestro resultado. De está manera empezamos presentando la definición de: Subgrupos un paramétricos, seguido de ello exponemos la representación de un grupo de Lie y representación multilineal.

1. **Subgrupos un paramétricos.-** Sea G un grupo de lie. Un subgrupo un – paramétrico de G es un homomorfismo "φ" del grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ en G, es decir:

   $$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

   En otras palabras un subgrupo un – paramétrico es una aplicación diferenciable (suave) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ tal que:

   $$\varphi(t+r) = \varphi(t).\varphi(r), \text{ con } t, r \in \mathbb{R}$$

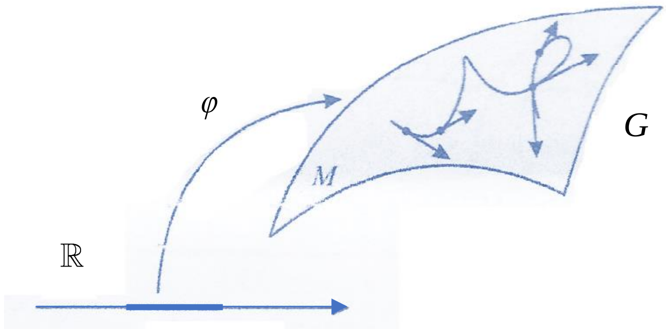

Figura N° 7 Subgrupo un paramétrico

Fuente : Elaboración propia

Observación (4.5.1).- Si φ es un subgrupo Un – parámetrico entonces, $\varphi(0)=e$ y $\varphi(-t)=\varphi(t)^{-1}$; además φ determina un camino $\dot{\varphi}:\mathbb{R}\longrightarrow T_G$ tal que $\dot{\varphi}(t)=(d\varphi)_t=\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ es un elemento de $T_{\varphi(t)}(G)$. Particularmente $\dot{\varphi}(0)\in T_e(G)$

Recordando que para un elemento h en el espacio tangente $T_e(G)$. El único campo vectorial invariante a izquierda X . Tal que $X(e)=h$, es descrito como X_h y es denominado el campo vectorial invariante a izquierda generado por h.

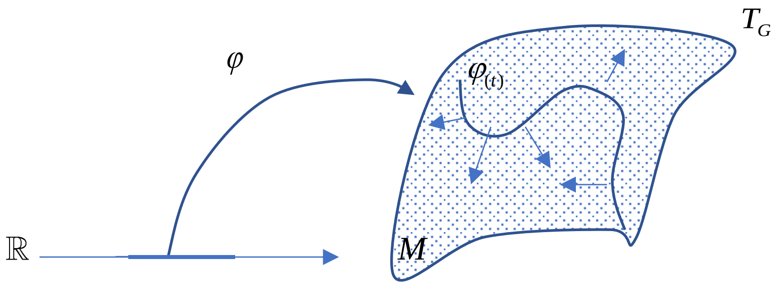

Figura N° 8 Subgrupo un paramétrico inducido

Fuente : Elaboración propia

Proposición (Equivalencias) (4.5.1).- Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ una aplicación diferenciable tal que $\varphi(0) = e$ y $\dot{\varphi}(0) = h$, entonces son equivalentes:

(i) φ es un subgrupo un – paramétrico.

(ii) φ es una orbita de X_h

(iii) φ es un órbita de Y_h, para Y_n campo vectorial invariante a derecha.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $t \mapsto \frac{d}{dt}$ el campo vectorial sobre $\mathbb{R}$, que lo denotamos por "T" este es el campo vectorial invariante a izquierda y derecha generado por T(0). Ahora si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un subgrupo un-paramétrico se tiene que:

$$T \sim_{\varphi} X_h$$

Es decir; φ es una orbita de X_h, donde la orbita de una sección *X* en τ_M (donde M es una subvariedad de alguna variedad N) es un camino suave $\alpha(t)$ (diferenciable) tal que $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$. De esta manera se tiene el resultado,

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Asumamos que "φ" es una orbita de X_h; y tomemos un elemento fijo $s \in \mathbb{R}$; de donde se tiene: $t \mapsto \varphi(s-t)$ y $t \mapsto \varphi(s).\varphi(t)$, los cuales, ambas son orbitas de X_h (Pues bastará usar la invarianza de X_h), y de acuerdo a t=0. Luego se tiene $\varphi(s+t) = \varphi(s).\varphi(t)$

(iii) $\Leftrightarrow$ (i): La demostración de esta equivalencia es similar a lo realizado en (ii) si y solo si (i)

Proposición (4.5.2).- Para cada vector $h \in T_e(G)$ corresponde un único subgrupo un – paramétrico, "φ", tal que: $\dot{\varphi}(0) = h$.

Demostración.- Del Teorema inmediato anterior se tiene la unicidad del subgrupo un – paramétrico.

Ahora probaremos la existencia, para lo cual usaremos resultados básicos; esto es: para algún $\varepsilon > 0$, existe una orbita.

$$\varphi_0 : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \longrightarrow G$$

Para X_h, satisfaciendo $\varphi_0(0) = e$.

De otro lado fijemos t_0 en el intervalo $\langle 0, \varepsilon \rangle$. Definimos aplicaciones diferenciables.

$$\varphi_m : \langle mt_0 - \varepsilon, mt_0 + \varepsilon \rangle \longrightarrow G, m \in \mathbb{Z}$$

Como sigue: $\varphi_m(t) = \varphi_0(t_0)^m . \varphi_0(t - mt_0)$

Por tanto X_h es invariante a izquierda; estas aplicaciones son todas orbitas para X_h. Además

$$\varphi_{m-1}(mt_0) = \varphi_0(t_0)^m = \varphi_m(mt_0)$$

Aquí φ_{m-1} y φ_m están en la intersección de sus dominios.

Esto sigue que una aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es dada por.

$\varphi(t) = \varphi_m(t)$, para $t \in \langle mt_0 - \varepsilon, mt_0 + \varepsilon \rangle$ φ es una orbita para X_h satisfaciendo $\varphi(0) = e$; de este modo usando el teorema anterior se tiene que φ es un subgrupo un – paramétrico.

Definición (4.5.1).- El Subgrupo un-paramétrico "φ", que satisface $\dot{\varphi}(0)$ = h es llamado el subgrupo un – paramétrico generado por h, y es denotado por φ_h. En particular el subgrupo un-paramétrico generado por "O" es la aplicación constante $C : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dado como c(t) = e.

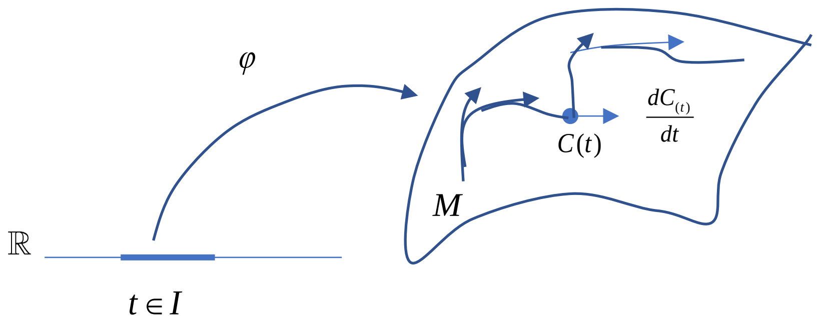

Figura N° 9 Campo de velocidad, de un sub grupo, un paramétrico φ, generado por "h" esto es: $\dot{\varphi}(0) = h$

Fuente : Elaboración propia

Ejemplo (4.5.1): Sea $\left(\mathbb{C}^{*},\bullet\right)$ el grupo multiplicativo de los números complejos; es decir $C^{*}=\{z\in\mathbb{C}: z\neq 0\}$ entonces la correspondiente algebra de lie es $\mathbb{C}$. Considerando como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Observación (4.5.2).- El subgrupo un – paramétrico generado por un vector $h\in\mathbb{C}$ es dado por $\varphi_h(t)=e^{th}$

Definición (4.5.2).- Sea G un grupo de lie con algebra de lie $E=T_e\left(E\right)$. Definimos o establecemos una aplicación.

$\psi:\mathbb{R}xE\longrightarrow G$

Como $\psi(t,h)=\varphi_h(t),$ para $t\in\mathbb{R},\ h\in E$

Lema (4.5.1).- La aplicación ψ dada en la definición anterior es diferenciable, esto satisface.

(*) $\psi(st,h)=\psi(t,sh),$ para s, t$\in\mathbb{R},\ h\in E$

Demostración.- Observe que la ecuación dada en (*) define el subgrupo un – paramétrico generado por "sh". Para mostrar que ψ es diferenciable, definimos un campo vectorial Z sobre la variedad E x G como:

$$Z(h,a)=\left(0,X_h(a)\right)$$

Entonces vemos que, existen vecindades W de 0 en $\mathbb{R}$ $\left(W=W_0\right)$ V de 0 en E $\left(V=V_0\right)$ y U de "e" en G $\left(U=U_e\right)$, y existe una aplicación diferenciable

$$\rho:Wx\left(VxU\right)\longrightarrow ExG$$

Tal que: $\dot{\rho}(t,h,a)=Z\left(\rho(t,h,a)\right),t\in W,h\in V,a\in U$

Y así :

$$\rho(0,h,a)=(h,a)$$

Ahora escribamos:

$\rho(t,h,e)=\left(\rho_E(t,h),\rho_G(t,h)\right)t\in W,h\in V$ entonces

$\dot{\rho}_E(t,h)=0,\ \rho_E(0,h)=h;$ y así $\rho_E(t,h)=h,\ \ t\in W,\ \ h\in V,$ de aquí se sigue que: $\dot{\rho}_G(t,h)=X\rho_{E(t,h)}\left(\rho_G(t,h)\right)=X_h\left(\rho_G(t,h)\right)$ aquí $\rho_G(t,h)=\varphi_h(t)=\psi\left(t,h\right)$ y así ψ es diferenciable en W x V.

Ahora la ecuación funcional $\psi(t+r,h)=\psi(t,h)\psi(r,h); t,r\in\mathbb{R}, h\in E$ da lugar a la diferenciabilidad de ψ en $\mathbb{R}$ x V. Finalmente, aplicando la ecuación $\psi_s(t,h)=\psi(t,sh)$; vemos que ψ es diferenciable en $\mathbb{R}$ x E.

Definición (aplicación exponencial) (4.5.3).

Con las notaciones y consideraciones de la definición, y del tema anterior, la aplicación exponencial para G es la aplicación diferenciable denotada y definida como:

$e: E \longrightarrow G$. Tal que e (h) = $\psi(1,h)=\varphi_h(1)$

Del lema inmediato anterior se sigue que el grupo un – paramétrico generado por $h\in E$ puede ser establecido o escrito como:

$$\varphi_h(t)=e(th), t\in\mathbb{R}$$

Particularmente *e(mh)* = $\left(e(h)\right)^m$ para $m\in\mathbb{Z},\ h\in E$

Proposición (4.5.3).- La aplicación exponencial satisface: $e(0)=e$ y $d(e)_0=i$

Demostración**.-** Fijemos un elemento $h\in E$ entonces:

$$h=\dot{\varphi}_h(0)=\left(e(th)\right)(0)=(de)_0(h)$$

Proposición (4.5.4) (1) Existen vecindades *V* de 0 en E $(V=V_0)$ y U de e en G $(U=U_e)$ tal que la aplicación exponencial restringido al difeomorfismo

$$e: V \xrightarrow{\cong} U$$

2. Sea $E=E_1\oplus.......\oplus E_k$ una descomposición de E. Como una suma directa de subespacios. Definimos $\rho: E\longrightarrow G$ como:

$$\rho(h_1\oplus.....\oplus h_k)=e(h_1).......e(h_k), h_j\in E_j$$

Entonces $(d\rho)_0=i,$ y así ρ aplica una vecindad de “O” difeomorficamente sobre una vecindad de “e”.

En efecto: Claramente $(d\rho)_0$ restringido a la identidad en cada E_i resulta ser la identidad en E.

Si G es conexo, entonces la imagen de E según la exponencial genera G.

En efecto.- Por corolario (1) se tiene que e (E) contiene una vecindad de “e” de este modo se sigue el resultado. (Basta observar el lema siguiente).

Lema (4.5.2).- Si G es conexo, y $U \subset G$ es una vecindad de “e” entonces U genera G.

Demostración. U genera un subgrupo abierto H de G $(H \leq G)$ asi cada clase Ha $(a \in G)$ es abierto y

$$G = H \cup \bigcup_{a \notin H} Ha$$

Particiona G sobre dos conjuntos abiertos disjuntos; de esta manera G es conexo G = H

Ejemplo (4.5.2) (1).- Consideremos el grupo G = GL(V), E = Lv, entonces la aplicación exponencial esta dada como $e(\varphi^*) = (e(\varphi))^*$

(2) Sea *H* otro grupo de lie con algebra de Lie F, entonces la aplicación exponencial para *G x H* es dado por:

$e(h,k) = (e_G(h), e_H(k)), h \in E, k \in F$

Proposición (Homomorfismo inducido en algebras de Lie) (4.5.5)

Sean *G*, *H* dos grupos de Lie, $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo entonces el homomorfismo inducido f', de algebras de lie, satisface:

$$f \circ e_G = e_H \circ f'$$

Demostración.- Sea h un elemento fijo en el espacio tangente $T_e(G)$, entonces las aplicaciones: $\varphi : t \mapsto f(e_G(th))$ y $\gamma : t \mapsto e_H(tf'(h))$

Son subgrupos un – paramétricos de H. Además

$$\dot{\varphi}(0) = f'(h) = \dot{\gamma}(0)$$

Recordando: “Para cada $h \in T_e(G)$ corresponde un único subgrupo un – paramétrico φ, tal que $\dot{\varphi}(0) = h$” (#). Entonces por tal resultado (#) se tiene que φ = γ en particular

$$f(e_G(h)) = e_H(f'(h)),\ h \in T_e(G)$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] & H \\
T_e(G) \arrow[u, "e_G"] \arrow[r, "f'"] & T_e(H) \arrow[u, "e_H"']
\end{tikzcd}$$

Figura N° 10 Conmutatividad entre Homomorfismos de grupos de Lie con los inducidos de álgebras de Lie.

Fuente : Elaboración propia

Proposición (4.5.6).- Sea $g : G \longrightarrow H$ un segundo homomorfismo de grupos de Lie tal que $f' = g'$. Si G es conexo, entonces $f = g$.

Demostración.- La proposición anterior implica que f y g son iguales en $e_G\left(T_e(G)\right)$. Por un corolario anterior este conjunto genera G. Como f y g son homomorfismos de grupos, esto se sigue que f = g.

Proposición (4.5.7).- El homomorfismo f es inyectivo si y solo si $df : T_G \longrightarrow T_H$ es inyectivo. En este caso f es inmersión de G sobre H.

Prueba.- Si df es inyectivo, es inmediato ver que f es inyectivo.

Recíprocamente asumiendo que f es inyectivo. Sea V una vecindad de cero “O” en $T_e(G)$ tal que la restricción de e_G a V es inyectivo. Como $e_H \circ f' = f \circ e_G$ la restricción de $e_H \circ f'$ a V es inyectivo. En particular, la restricción de f' a V es inyectivo.

Como f' es lineal y V es un subconjunto abierto de $T_e(G)$, se sigue que f' es inyectivo por tanto.

$$(df)_a = L_{f(a)} \circ f' \circ L_{a^{-1}}, \; a \in G$$

Cada $(df)_a$ es inyectiva y de aquí se tiene que df lo es.

Proposición (4.5.8).- Si f es biyectivo, entonces este es un difemorfismo y por ende un isomorfismo entre grupos de Lie.

Demostración.- Como $f:G \longrightarrow H$ es inyectivo; de la proposición inmediato anterior se tiene que $df:T_G \longrightarrow T_H$ es inyectiva, de esta manera f es un difeomorfismo

Proposición (4.5.9).- Un homomorfismo continuo $f:G \longrightarrow H$ entre grupos de lie es diferenciable.

Demostración: Primer caso: Si $G=\mathbb{R}$. Esto tiene para ser mostrado que una aplicación continua $\alpha:\mathbb{R} \longrightarrow H$ la cual satisface

$$\alpha(s+t)=\alpha(s).\alpha(t), \text{ s,t} \in \mathbb{R}$$

Es diferenciable. Por proposición (4.5.8) existe una vecindad V de "0" en $T_e(H)$ la cual e_H aplica difeomorficamente sobre una vecindad U de "e" en *H.*

Sin pérdida de generalidad; asumimos que $\alpha(t) \in U, \quad |t| \leq 1.$ Definamos una aplicación continua $ß:W \longrightarrow V$ donde $W=\{t \in \mathbb{R}:|t| \leq 1\}$; como $\beta(t)=e_H^{-1}(\alpha(t))$ en tanto que α - es un homomorfismo

$e_H(q.ß(t))=\alpha(qt)=e_H(ß(qt)), q \in \mathbb{Z}, \quad |qt| \leq 1$, y $|t| \leq 1$ de aquí $q.ß(t) \in V$ si y solamente si $q.ß(t)= ß(qt).$

Fijando $q \neq 0.$ Consideremos el conjunto $\left\{t \in \left(\frac{1}{q}\right)W : q.ß(t) \in V\right\}$

La relación anterior muestra que este conjunto es simultáneamente cerrado y abierto en $\left(\frac{1}{q}\right)W$, y de aquí igual a $\left(\frac{1}{q}\right)W.$ Así

$$q.ß(t)= ß(qt) \text{ para } |qt| \leq 1$$

Se sigue que para $\frac{p}{q} \in Q$ y $\left|\frac{p}{q}\right| \leq 1$ de donde $ß\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}ß(1).$ Por tanto ß – es continuo y así ß(t) = tß(1) con $|t| \leq 1$.

Ahora tenemos $\alpha(t)=e_H(tß(1)), \quad |z| \leq |1$. Puesto que α es un homomorfismo y el intervalo $\langle -1,1 \rangle$ genera el grupo aditivo $\mathbb{R}$, esto se sigue que

$$\alpha|t|=e_H(tß(1)), t \in \mathbb{R}$$

Y así α es diferenciable .

Finalmente consideremos el caso general, $f : G \longrightarrow H$. Elijamos una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $T_e(G)$ y consideremos la aplicación suave $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$ dada como $\psi(t_1, ..., t_n) = e_G(t_1 e_1) .... e_G(t_n e_n)$, de esta forma ψ aplica una vecindad V de "0" difeomorficamente sobre una vecindad U de e.

De otro lado; las aplicaciones $t \mapsto f(e_G(te_i))$ para i = 1, 2,.,,,,n son homomorfismos continuos que van de $\mathbb{R}$ en H; asi todos son diferenciables; por tanto f es un homomorfismo; asi tenemos

$$(f \circ \psi)(t_1, ..., t_n) = f(e_G(t_1 e_1)) .... f(e_G(t_n e_n))$$

Y así $f \circ \psi$ es diferenciable. En particular, f es diferenciable en U, pero para cualquier $a \in G$

$$f(ax) = f(a) f(x)$$

Asi f es diferenciable en una vecindad de *a* y por tanto en G.

2. Representación de un Grupo de Lie

En esta sección G denota un grupo de lie fijo con álgebra de lie E.

Definiciones (4.5.4): (1) Una representación de G en un espacio vectorial finito dimensional W (real o complejo) es un homomorfismo de grupos de lie.

$$P : G \longrightarrow GL(W)$$

Como el álgebra de Lie de GL (W) es el espacio L_W de transformaciones lineales de W, la derivada del homomorfismo P es un homomorfismo de algebras de Lie, que lo denotamos por p' esto es:

$$P' : E \longrightarrow L_W$$

(2) El homomorfismo $p' : E \longrightarrow L_W$ es llamado la derivada de la representación "p".

(3) Un homomorfismo de algebra de Lie $\theta : E \longrightarrow L_W$ es llamado una representación de E en W. Así P' es una representación de E en W.

(4) Una representación, P, de G (respectivamente, θ de E) es llamado fiel si Ker(P) = (e) (respectivamente si Ker(θ) = (0)).

Observación (4.5.3): i) Si P es una representación de G en W, entonces el subespacio invariannte de P es el subespacio $W_{P=1}$ (O simplemente W_1) dado por:

$$W_1 = \{w \in W : p(x)w = w, x \in G\}$$

(ii) Simplemente, si θ es una representación de E en W, entonces el subespacio invariante por θ es el subespacio

$$W_{\theta=0} = \{w \in W : \theta(h)w = 0, \quad h \in E\}$$

Definición (4.5.5).- Un subespacio $V \subseteq W$ es llamado estable para p (respectivamente, estable para θ) si cada de los operadores $p(x),\ x \in G$ (respectivamente $\theta(h), h \in E$) aplica *V* en sí misma.

Ahora fijemos $h \in E.$ Entonces $p\big(e(th)\big),$ y $p'(h)$ son transformaciones lineales de W. En particular, respecto al grupo un – paramétrico.

$$p_h : t \mapsto p(e(th))$$

Como un camino en el espacio vectorial L_W. Así diferenciación produce un camino $\dot{p}_h(t)$ en L_W.

De otro lado recordemos que $T_{GL(W)} = GL(W)xL_W$. Además:

$$X_{p'(h)}(\tau) = (\tau, \tau_0 p'(h)), \tau \in GL(W), h \in E$$

Aplicando esta fórmula con $\tau = P_h(t)$ se obtiene $\dot{p}_h(t) = p_h(t) \circ p'(h) \qquad (\xi_0)$

Proposición (4.5.10): (1) Los subespacios invariantes W_1 y W_0 para P y P' están relacionados por: $W_1 \subseteq W_0$.

Si G es conexo, entonces $W_1 = W_0$.

(2) Si $V \subseteq W$ es estable por P, entonces es estable por P'. Si V es estable para P' y G es conexo, entonces V es estable para P.

Demostración : (1).- Supongamos que $h \in E$ y w $\in$ W, entonces $P_h(t)w = w$ y por ende el inducido P' verifica la igualdad siguiente:

$$\dot{p}_h(t)w = \left(p_h(t)w\right)^{\bullet} = 0$$

Aplicando la igualdad (ξ_0) se obtiene que $p'(h)w = 0$ y por tanto $W_1 \subseteq W_0$.

Recíprocamente, sea $h \in E$ y asumiendo que $w \in W_0$, entonces nuevamente por (ξ_0) se tiene que $p_h(t)w = w,$ para $t \in \mathbb{R}$ y por consiguiente:

$$p(e(h))w = w, \text{ con } h \in E$$

Ahora si G es conexo y considerando el resultado: ("Si G es conexo, entonces e(E) genera G) obtenemos $p(x)w = w, x \in G.$

Nota.- La demostración de la parte (2) es similar siguiendo el mismo procedimiento.

Observación (4.5.4).- En lo siguiente la aplicación p(respectivamente) en W serán considerados fijos.

Definición: (Representación contragrediente) (4.5.6)

- La representación contragradiente a P se denota como $P^{\#}$ y será establecido de G en W* y es definido como:

$$p^{\#}(x) = \left[p(x)^{-1}\right]^{*}, \text{ con } x \in \text{G}$$

- La representación contragradiente a θ se denotará como $\theta^{\#}$ y será establecido de E en W* y es definido como:

$$\theta^{\#}(h) = -\theta(h)^{*}, \text{ con } h \in E$$

Observación: Claramente se tiene que

$$\left(p^{\#}\right)' = \left(p'\right)^{\#}$$

3. Representación Multilineal

Definición (4.5.7) 1.- Las representaciones del producto Tensorial, productos, y las álgebras simétricas exteriores denotadas por: $\otimes P, \Lambda P$ y $\vee P$ del grupo de Lie G en $\otimes W, \Lambda W, VW$ están dadas como:

$\left(\otimes P\right)(x) = \otimes P(x), \quad \left(\Lambda P\right)(x) = \Lambda P(x)$ y $\quad \left(VP\right)(x) = VP(x), x \in G$

2) Las representaciones $\theta_{\otimes}, \theta_{\wedge}, \theta_{\vee}$ de E en $\otimes W, \Lambda W$ y VW están dadas y/o definidos como:

(i) $\theta_{\otimes}(h)\left(w_1 \otimes ......\otimes w_p\right) = \sum_{k=1}^{p} w_1 \otimes ......\theta\left(h\right) w_k .... \otimes w_p$

(ii) $\theta_{\Lambda}(h)\left(w_1 \Lambda ......\Lambda w_p\right) = \sum_{k=1}^{p} w_1 \Lambda ......\theta\left(h\right) w_k ....\Lambda w_p$

(iii) $\theta_{\vee}(h)\left(w_1 \vee ......\vee w_p\right) = \sum_{k=1}^{p} w_1 \vee ......\theta\left(h\right) w_k .... \vee w_p, \ p \geq 1$

Además:

$\theta_{\otimes}(h)\lambda = 0, \ \theta_{\wedge}(h)\lambda = 0, \ \theta_{\vee}(h)\lambda = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Observación (4.5.5): De las definiciones antes dadas es claro e inmediato ver que:

$\left(\otimes P\right)' = \left(P'\right)_{\otimes}, \left(\wedge P\right)' = (P')_{\wedge}$ y $(\vee \mathrm{P})' = (\mathrm{P}')_{\vee}$

Definición (4.5.8).- Recordando que $T^p(W)$ denota el espacio de las funciones p – lineales en W. La representación denotada por P^p, del grupo de Lie G en $T^P(W)$ se define como:

$\left(P^p(x)\phi\right)\left(w_1,...,w_p\right) = \phi\left(P(x^{-1})w_1,...., p(x^{-1})w_p\right)$ donde $w_j \in W, \ x \in G, \ \phi \in \mathrm{T}^p(W)$

Observación (4.5.6).- 1) La derivada de P^p es dado por

$\left[\left(P^p\right)'(h)\right](\phi)\left(w_1,....,w_p\right) = -\sum \phi\left(w_1,...., p'(h)w_j,....,w_p\right) h \in E$

2) Recordando que un espacio diferencial es un espacio vectorial *X* juntamente con una aplicación lineal $\delta : X \longrightarrow X$ tal que $\delta^2 = 0;$ donde δ es llamado el operador diferencial en *X*. Mientras que los elementos de los subespacios.

Z(*X*) = Ker (δ) y B(*X*) = Im(δ)

Son llamados cociclos y cobordes respectivamente. Y el espacio cociente $H(X) = \dfrac{Z(X)}{B(X)}$ es llamado el espacio cohomología de *X*.

Definición (Espacio Diferencial) (4.5.9)

Sea (W, d) un espacio diferencial, y denotemos su homología por H(W). Supóngase que P es una representación de G en W tal que:

$p(x)\circ d = d\circ p(x), x\in G.$ Entonces p(x) determina una aplicación lineal

$$p(x)_{\#}: H(W) \longrightarrow H(W)$$

y $P_{\#}: x \mapsto P(x)_{\#}$ es una representación de G en H (W).

De otro lado, la representación, P' de E satisface:

$$p'(h)\circ d = d\circ p'(h), \quad h\in E \qquad (\xi_1)$$

De la relación diferenciable (ξ_1) se tiene que $p'(h)$ determina un operador $p'(h)_{\#}$ en H (W) y $(p')_{\#}: h \mapsto p'(h)_{\#}$ es una representación de E en H(W), se sigue inmediatamente de la definición que $(P')_{\#}$ es la derivada de $P_{\#}$; verificándose que:

$$(P_{\#})' = (P')_{\#}$$

Definición (La Representación adjunta) (4.5.10)

Cada elemento $a\in G$ (G – grupo de Lie) determina el **Automorfismo interno** $\tau_a : G \longrightarrow G$ dado por:

$$\tau_a(x) = axa^{-1}, \quad x\in G$$

De aquí la derivada τ_a' del automorfismo τ_a también es un automorfismo pero de el álgebra de Lie E es decir $\tau_a' : E \longrightarrow E,$ el cual es denotado por: $Ad(a) = \tau_a'.$ Puesto que $\tau_a = \lambda_a \circ \rho_a^{-1},$ entonces se tiene:

$$Ad(a) = L_a \circ R_a^{-1}, \ \ a\in G.$$

Proposición (4.5.11).- La correspondencia $Ad: a \mapsto Ad(a)$ define una representación de *G* en *E*.

Demostración.- Para los elementos $a,b\in G$ claramente se tiene : $\tau_a\tau_b = \tau_{ab},$ y así $Ad(a)\circ Ad(b) = Ad(ab).$ De este modo la aplicación $Ad: G \longrightarrow E$ es un homomorfismo de grupos. Esto permite mostrar que Ad es diferenciable. En efecto Definamos una aplicación diferenciable $T: G \ x \ G \longrightarrow G$ como $T(y,x) = \tau_y(x)$ para $x,y\in G.$ Su derivada dT es diferenciable, pero $(dT)_{(y,e)}(0,h) = Ad \ \ y \ (h)$. De aquí, para cada $h \in E$, la aplicación $y \mapsto Ady(h)$ es diferenciable y por lo tanto Ad es diferenciable.

Nota.- La representación Ad es llamada la representación Adjunta de G.

De otro lado; una representación ad de el álgebra de Lie E en el espacio vectorial E es dado por.

$$(ad\ h)_{(k)} = [h,k], \quad con \quad h,k \in E$$

Esto es llamada la representación adjunta de E.

Lema (4.5.3): Sean $a \in G$, un elemento fijo y $h \in E$, entonces $X_h(a) = Y_{Ad_a}(h)(a)$

Demostración.- Sabemos que $Ada = R_a^{-1} \circ L_a$ de aquí

$$Y_{Ada(h)}(a) = (R_a \circ Ada)(h) = L_a(h) = X_h(a)$$

Proposición (4.5.12).- La representación ad es la derivada de Ad.

Demostración: Sea $h \in E$ un elemento fijo y sea $B = \{e_1, ..., e_n\}$ una base de E entonces funciones f_i sobre G son definidos por: $Adx(h) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i, \quad x \in G$; lo cual satisface

$Ad'k(h) = \sum_{i=1}^{n} (X_k(f_i))(e) e_i,\ k \in E$.

De otro lado aplicando el lema anterior obtenemos: $X_h = \sum_{i=1}^{h} f_i Ye_i$ y como $[X_k, Ye_i] = 0$ entonces se tiene que $[X_k, X_h] = \sum_{i=1}^{n} X_k(f_i) Ye_i$; al evaluar esto en el elemento identidad "e" obtenemos $[k,h] = Ad'k(h)$.

Consecuencia: Ad(e(h)) = e (ad h), h $\in$ E.

CAPITULO V
RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

En este trabajo identificamos mediante un isomorfismo (algebraica y topológicamente) a un grupo de lie G con el producto directo $T^n x\mathbb{R}^m$; donde $T^n = S^1 x.....xS^1 \left(n - veces\right)$ es el denominado n – Tori o simplemente Tori; mientras que $\mathbb{R}^n$ es el producto de n – copias del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y G es un conjunto con estructura algebraica de grupos y que adicionalmente las operaciones de cerradura e inverso son continuas, para lo cual presentamos las siguientes equivalencias:

(1) G es un grupo de Lie abeliano
(2) La representación adjunta de G es trivial
(3) Los campos vectoriales a izquierda y derecha coinciden
(4) La representación adjunta del álgebra de Lie E correspondiente al grupo G es trivial.
(5) E es abeliana.

Estas equivalencias conjuntamente con unos ejemplos que exponemos a continuación nos permitirá determinar nuestro resultado descriptivo propuesto.

1. Identificación de un Grupo de Lie "G" con el producto directo del Tori $"T^m"$ y el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Iniciamos esta sección recordando la función ψ de $\mathbb{R}$ x E en el grupo de Lie G, y donde E es su algebra de Lie, la cual está definida por $\psi\left(t,h\right) = \alpha_h(t)$, para $t \in \mathbb{R}, h \in E$ con $\alpha_h : \mathbb{R} \longrightarrow G$ la aplicación un paramétrica. También recordemos el homomorfismo de grupos de lie $\varphi : G \longrightarrow H$, el cual verifica: $\varphi_0 \exp_G = \exp_H \circ \varphi'$, donde φ' es el homomorfismo inducido de algebras de lie.

Definición (5.1.1).- Un grupo abeliano de lie, es un grupo de lie G que satisface $xy = yx$ para todo $x, y \in G$. Mientras que un algebra abeliana de lie es un algebra de Lie E que satisface $[h, r] = 0$ para todo $h, k \in E.$

Observación (5.1.1).- Consideremos un grupo de lie G con algebra de lie E con las siguientes condiciones:

i) G es abeliano

ii) La representación adjunta de G es trivial: esto es $Ad = \tau_a^{'} : E \longrightarrow E$ con $\tau_a : G \longrightarrow G$ automorfismo interno y $\tau_a^{'}$ derivada de τ_a. Verifica $Ad(a) = e$ para $a \in G.$

iii) Los campos vectoriales a izquierda y derecha coinciden; es decir $X_h = Y_h$, para $h \in E$.

iv) La representación adjunta de E, dada por $(adh)(k) = [h, k]$, $h, k \in E$ es trivial esto es: $ad\ h = 0$ con $h \in E$

v) E es abeliana.

A continuación, recordemos los resultados obtenidos:

Primero.- Sean $\varphi, \psi : G \longrightarrow H$, homomorfismos de grupos de Lie tal que $\varphi' = \psi'$; donde además G es conexo, entonces $\varphi = \psi$.

Segundo.- Sea $a \in G$ un elemento fijo así como también $h \in E$ entonces $X_h(a) = Y_{Ada(h)}(a)$

Proposición (5.1.1).- Si G es un grupo de lie abeliano entonces la representación adjunta "Ad" es trivial.

Demostración.- Del resultado segundo inmediato anterior tenemos que $X_h(a) = Y_{Ad_a(h)}(a)$, y de las relaciones $\tau_a^{'} = Ada$ y $Ad' = ad$, se obtiene lo requerido es decir la representación adjunta "Ad" es trivial.

Proposición (5.1.2).- Las implicaciones directas restantes de la observación inmediata anterior se verifican: esto es : (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$(iv) $\Rightarrow$(v).

Demostración.- Bastará observar la proposición inmediato anterior y proceder de modo análogo.

Proposición (5.1.3).- Con las consideraciones de la observación inmediata anterior se cumple la doble implicación siguiente (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) y (iv) $\Leftrightarrow$ (v).

Demostración.- Del resultado "primero" que $Ad = \gamma$ y $\tau_a = e$ para $a \in G$ donde $\gamma : G \longrightarrow G$ es el homomorfismo constante es decir $\gamma(a) = i$.

Ejemplo (5.1.1) (1).- Sea V un espacio vectorial finito dimensional real $(\mathbb{R})$ complejo $(\mathbb{C})$, bajo la adición es un grupo abeliano de lie.

(2) • El círculo unitario complejo denotado por

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

es un grupo abeliano de lie, bajo la multiplicación.

• El espacio tangente de S^1 denotado por $T_e(S^1)$ es igual al ortogonal de: $\langle 1 \rangle$ es decir : $Te(S^1) = \langle 1 \rangle^{\perp}$. En otras palabras es el eje imaginario puro. De este modo identificamos $\mathbb{R}$ con $Te(S^1)$ bajo la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dado como $f(t) = 2\pi i t$. Con está identificación la aplicación exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ esta dada por: exp(x) = $e^{f(x)}$, para $x \in \mathbb{R}$, en particular, $\exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$

3. Tori: Recordemos que el espacio $\mathbb{R}^n$ es un grupo abeliano de lie bajo la adición y consideremos $\mathbb{Z}^n = \{(k_1, ..., k_n) : k_j \in \mathbb{Z} \; para \; j = 1, \; 2, \; ....., n\}$ como subgrupo cerrado (topológicamente) de $\mathbb{R}^n$.

Afirmación.- El grupo cociente $T^n = \mathbb{R}^n \big/ \mathbb{Z}^n$ es una variedad diferenciable de tal manera que la proyección $\pi^n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ resulta ser un difeomorfismo local. En efecto [Ver: Greub Connections curvature, and cohomology; Volumen I; Sección (1.4)]. De tal afirmación el grupo factor (cociente) T^n con dicha estructura diferenciable se convierte en un grupo abeliano de lie conexo llamado el n- toro.

• Si n = 1, entonces $T^1 = \dfrac{\mathbb{R}^1}{\mathbb{Z}^1}$ es el círculo S^1 y π es la aplicación exponencial [ver: ejemplo (2) inmediato anterior]. Puesto que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x....x\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}x......x\mathbb{Z}$ (n veces) como grupos de lie, implica que $T^n \cong S^1 x......x S^1$ (n – veces) como grupos de lie. Particularmente, T^n es compacto. Más aún $\pi^n \cong \pi x.......x\pi = \exp x.......x \exp = \exp_{T^n}$ así podemos identificar π^n con la aplicación exponencial para T^n.

Teorema: (Resultado central) (5.1.1)

Sea G un grupo abeliano de lie conexo. Entonces G es isomorfo al Producto directo $T^m x\mathbb{R}^n$ para algunos m, n en $\mathbb{N}$.

Demostración.- Realizamos la prueba bajo las afirmaciones siguientes.

Afirmación (1): $\exp(h+k) = \exp(h).\exp(k); h, k \in E$ donde E es el algebra de lie del grupo G.

En efecto.- Como G es un grupo abeliano entonces la aplicación $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dada por $\alpha(t) = \exp(th).\exp(tk)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo un–paramétrico, pero $\dot{\alpha}(0) = h + k$, de aquí se tiene exp (th) . exp (tk) = α(t) = exp t (h + k).

Ahora el resultado se obtiene haciendo t = 1.

Afirmación (2): La aplicación exponencial "exp" es un difeomorfismo local. Más aún $\exp^{-1}(e)$ es un subgrupo discreto cerrado de E.

En efecto.- Recordemos que la aplicación exponencial $\exp : E \longrightarrow G$ dado por exp(h) = ψ(1, h) = $\alpha_h(1)$ satisface exp (0) = e y $(d\exp)_0 = i_0$ y también se tiene que exp(E) genera G cuando G es conexo. De este modo se tiene dicha afirmación.

Afirmación (3).- Sea K en $\mathbb{R}^n$ un subgrupo discreto cerrado, entonces existen vectores linealmente independientes: $v_1, \ldots\ldots, v_p$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $K = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i v_i : q_i \in \mathbb{Z} \right\}$ (es decir K consiste de las combinaciones enteras de los vectores v_i).

En efecto: Claramente, podemos asumir que K contiene una base de $\mathbb{R}^n$ y discutimos de manera inductivo sobre "n". Fijemos un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Elijemos $v_1 \in K$ así que $v_1 \neq 0$ y $\|v_1\| \leq \|x\|$ para $x \in K$; luego $(\mathbb{R}.v_1) \cap K$; el cual consiste de los enteros múltiplos de v_1. Ahora consideremos la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \dfrac{\mathbb{R}^n}{(\mathbb{R}_{v_1})}$.

De este modo vemos que $\pi(K)$ es un subgrupo cerrado discreto de $\dfrac{\mathbb{R}^n}{(\mathbb{R}_{v_1})}$, de aquí, por hipótesis inductiva, existen vectores linealmente independientes: $\pi(v_2), \ldots\ldots, \pi(v_n)$ en

$\dfrac{\mathbb{R}^n}{\left(\mathbb{R}_{v_1}\right)}$ tal que $v_i \in K$ y cada elemento de $\pi(K)$ es una combinación lineal entera de los $\pi(v_i)$, para $i \geq 2$.

Ahora un fácil argumento muestra que los vectores $v_1,....,v_n$ satisfacen las condiciones del lema; lo cual cierra la inducción; y en consecuencia se muestra que tal afirmación es válida. Finalmente de estas tres afirmaciones se tiene el Teorema.

Consecuencia (1).- Del Teorema y de manera particular, un grupo abeliano lie compacto y conexo es un Toro.

Observación: (5.1.2) i) Un elemento "*a*" de un grupo de lie G es llamado **un generador de G** si el conjunto $a^k, k \in \mathbb{Z}$ es denso en G.

ii) Un grupo de lie que tiene un generador es claramente abeliano.

Consecuencia (2).- El Toro T^m posee un generador.

En efecto.- Sea $B = \{v_1,....,v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ y escribamos $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_{v_1}x......x\mathbb{Z}_{v_n}$. Elijamos números reales $t_i \in \mathbb{R}$ de modo que las condiciones $\lambda_0, \lambda_v \in Q$ y $\lambda_0 + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r.t^r = 0$ implican que $\lambda_r = 0$ para r = 0, 1,….,n. Escribiendo $a = \sum_{r=1}^{n} t^r.v_r$.

5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

El resultado descriptivo que no es otra cosa la identificación de G con el Producto $T^n x\mathbb{R}^m$; nos permite inferir un estudio para integrar funciones sobre grupos compactos; para efecto de tal estudio se hace necesario definir las n – formas invariantes sobre un grupo de lie G, de esta manera formamos y/o definimos la integral de una representación de un grupo de Lie compacto en un espacio vectorial finito dimensional.

Definición: (n – formas invariantes) (5.2.1)

Sea G un grupo de Lie n – dimensional con algebra de Lie E. Una n – forma Ω en G es llamada invariante a izquierda (respectivamente a derecha) si:

$\lambda_a^*\Omega = \Omega,$ para $a \in G$ (respectivamente, $\rho_a^*\Omega = \Omega,\ a \in$ G).

Si Ω es ambas : invariante a izquierda y derecha esta es llamado: Bi – invariante o simplemente invariante.

A cada función determinante $\Delta_e \in \Lambda^n E^*,$ le corresponde una única forma invariante a izquierda Δ_L tal que $\Delta_L(e) = \Delta_e$ y recíprocamente. Esto es dado por:

$$\Delta_L(x; y_1, y_2, ..., y_n) = \Delta_e\left(L_x^{-1}(y_1), ..., L_x^{-1}(y_n)\right) x \in G, y_i \in T_x(G) \qquad \text{(I)}$$

Similarmente, la única forma invariante a derecha Δ_R la cual satisface $\Delta_R(e) = \Delta_e$ es dado por:

$$\Delta_R(x; y_1, y_2, ..., y_n) = \Delta_e\left(R_x^{-1}(y_1), ..., R_x^{-1}(y_n)\right) \qquad \text{(II)}$$

Las relaciones (I) y (II) da lugar a:

$$\rho_a^*\Delta_L = \det(Ada^{-1})\Delta_L \ \text{ y } \ \Delta_R(a) = \det(Ad\ a)\Delta_L(a), a \in G \qquad \text{(III)}$$

De aquí G admite n – formas invariantes no cero si y solo si

$$\det \text{(Ad x)} = 1,\ x \in G$$

Sea Δ_e orientación de E; entonces la correspondiente n – forma invariante a izquierda Δ_L orienta G. Similarmente Δ_R orienta G. Estas orientaciones depende solamente de la orientación de E representada por Δ_e y son llamadas (respectivamente) las **orientaciones izquierda y derecha** de G correspondiendo a la orientación dada de E. Ellos coinciden si y solo si.

$$\det(Ad_x) > 0,\ \ x \in G$$

Observe que cada traslación izquierda preserva la orientación izquierda; y cada traslación derecha preserva la orientación derecha.

Ejemplo: (Grupos de lie y Algebras de Lie, Modulares) (5.2.1)

Un grupo de lie G (respectivamente, un álgebra de lie E) es llamada Modular, si $|\det(Adx)| = 1, x \in G$ (respectivamente, si $Tr(ad\ h) = 0, h \in E$). En particular, si G es un grupo de lie conexo unimodular entonces $\det(Ad\ x) = 1, x \in G;$ así G admite n – forma invariante no cero.

Sea G cualquier grupo de lie con álgebra de Lie E y como ad es la derivada de Ad (i.e $(Ad)' = ad$) entonces se tiene $(\det\ \circ Ad)' = tr \circ ad$

De aquí, si G es unimodular; entonces lo es E; y estas condiciones son equivalentes si G es conexo.

Finalmente, observe que un grupo de lie compacto es unimodular. En este caso la imagen de **det o Ad** es un subgrupo compacto del grupo multiplicativo $\mathbb{R}$ i.e. $\operatorname{Im}(\det \circ Ad) \leq \mathbb{R}^*$ (subgrupo), esto puede solamente ser : $\{1\}$ o $\{\pm 1\}$. En particular, cada grupo de lie compacto conexo admite una n – forma invariante no cero.

Integración de funciones

Sea G un grupo de lie n – dimensional con álgebra de lie E. y G orientada por una n – forma invariante a izquierda Δ_L. Sea W un espacio vectorial finito dimensional real o complejo.

(*) Para cada función $f : G \longrightarrow W$ de soporte compacto, podemos formar la integral.

$$\int_G f.\Delta_L$$

La invarianza a izquierda de Δ_L y el hecho que traslaciones izquierdas preservan la orientación dada.

$$\int_G f.\Delta_L = \int_G \lambda_a^* f.\Delta_L,\ a \in G$$

De otro lado y en virtud de la relación (III):

$$\int_G \rho_a^* f.\,\Delta_L = \det(Ad\ a)\int_G \rho_a^* f\ \rho_a^*\Delta_L = \det(Ada)\int_G \rho_a^*\left(f.\Delta_L\right)$$

Como ρ_a preserva la orientación a izquierda precisamente si det (Ad a) > 0; de aquí se sigue que:

$$\int_G \rho_a^* f.\,\Delta_L = \left|\det(Ad\ a)\right| \bullet \int_G f.\Delta_L,\ \ a \in G$$

Si G es unimodular (en particular, si G es compacto), esta fórmula se convierte en:

$$\int_G \rho_a^* f.\,\Delta_L = \int_G f.\Delta_L,\ \ a \in G$$

Ejemplo: (Integración sobre grupos compactos) (5.2.2)

Sea G un grupo de lie compacto n – dimensional con algebra de Lie E. Dada la orientación a izquierda de G inducida por una orientación de E. Sea Δ la única n – forma invariante a izquierda tal que

$$\int_G \Delta = 1$$

Sea $f \in L\,(G;W)$ con W espacio vectorial, entonces el vector $\int_G f \bullet \Delta$ es independiente de la orientación. Esto es llamado **la integral de f** y lo cual escribiremos.

$$\int_G f \bullet \Delta = \int_G f(a)da$$

En particular, $\int_G da = 1.$

Puesto que G es unimodular, entonces por las relaciones de integración establecidas en el ejemplo inmediato anterior se tiene

$$\int_G f(ab)da = \int_G f(a).da = \int_G f(ba)da \text{ , } b \in G$$

Mas generalmente, asumiendo que φ es un difeomorfismo de G tal que.

$$\varphi^* \Delta = \varepsilon.\Delta$$

Donde $\varepsilon : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $|\varepsilon| = 1.$ Entonces para $f \in L\,(G;W)$

$$\int_G f(\varphi(a))da = \int_G f(a)d_a$$

También sabemos que : si $\xi \in T_a(G), \eta \in T_b(G)$ entonces : $d\mu(\xi, n) = R_b\xi + L_a\eta$ y $d_v(\xi) = -\left(L_a^{-1} \circ R_a^{-1}\right)(\xi)$ donde $du : T_G x T_G \longrightarrow T_G$ y $d_v : T_G \longrightarrow T_G$ son las aplicaciones derivadas de las aplicaciones multiplicación e inversión respectivamente. Entonces aplicando esto de manera particular para $\varphi = \upsilon$ la aplicación inversión se tiene que

$$\int_G f(a^{-1})da = \int_G f(a)da.$$

Finalmente, si $\alpha : W \longrightarrow V$ es una aplicación lineal entonces:

$$\alpha\left(\int_G f(a)da\right)=\int_G (\alpha\circ f)(a)da$$

Seguidamente sea $\varphi: G\longrightarrow G$ una aplicación diferenciable. Esto induce la aplicación diferenciable $\psi: G\longrightarrow L_E$ dada por:

$$\psi(x)=\left(L^{-1}_{\varphi(x)}\right)_{\varphi(x)}\circ\left(d\varphi\right)_x\circ\left(L_x\right)_e, x\in G$$

Proposición (5.2.1): Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, entonces

$$grad(\varphi).\int_G f(x)dx=\int_G f(\varphi(x)).\det\psi(x)dx,\ f\in L\ (G;W)$$

Demostración.- Claramente $\varphi^*\Delta=\det\psi.\Delta.$ De aquí

$$grad\left(\varphi\right).\int_G f(x)dx=\int_G\varphi^*(f\Delta)=\int_G\varphi^* f.\det\psi.\Delta=\int_G f(\varphi(x))\det\psi(x)dx$$

Proposición (5.2.2).- $grad(\varphi)=\int_G\det\psi(x)dx$

Demostración.- Inmediato

Ejemplo (5.2.3) (1).- Si $\varphi=\lambda_a,\rho_a$ o υ; entonces ψ es dado por $\psi(x)=l_E,\ \psi(x)=Ad\ a^{-1},$ o $\psi(x)=-Adx.$ Respectivamente

(2) Si $\varphi(x)=x^2,$ entonces $\psi_{(x)}=l+Adx^{-1}.$ Entonces por Corolario juntamente con la igualdad siguiente "$\int_G f(-a^{-1})da=\int_G f(a)da$" da lugar a:

$$grad(\varphi)=\int_G\det(l+Adx)dx$$

(3) Si φ es un homomorfismo. Entonces $\psi(x)=\varphi', x\in G$ así :

$$grad\left(\varphi\right).\int_G f(x)dx=\det\varphi'\bullet\int_G f(\varphi(x))dx,\ f\in L\ (G;W)$$

Observación (5.2.1), i) Si f = 1; obtenemos $grad(\varphi)=\det(\varphi').$ En particular, $\det\left(\varphi'\right)$ es un número entero.

(ii) Asumiendo que $grad(\varphi)\neq 0.$ Entonces de las relaciones anteriores obtenemos

$$\int_G f(x)dx=\int_G f(\varphi(x))dx.$$

Subespacios Invariantes de una Representación

Sean; W un espacio vectorial finito dimensional, y P una representación de un grupo de lie compacto en W. Como P es una aplicación suave $G \mapsto L_W$, Podemos formar la integral

$$P_0 = \int_G p(x)dx$$

Para obtener una transformación lineal de W.

Proposición (5.2.3).- Con las notaciones e hipótesis antes dadas se verifican las igualdades siguientes:

i) $p_0 \circ p(x) = p \circ p_0(x), \quad x \in G$

ii) $p_0^2 = p_0$

iii) Si $p^{\#}$ denota la representación contragradiente entonces $\left(p_0^{\#}\right) = p_0^{*}$

iv) Un vector w es invariante (i.e. $w \in W_I$) si y solamente si $p_0 w = w$

Demostración.- Previamente recordemos las relaciones:

$$\int_G f(ab)da = \int_G f(a)da = \int_G f(ba)da \quad , b \in G$$

$$\int_G f(a^{-1})da = \int_G f(a)da$$

$$\alpha\left[\int_G f(a)da\right] = \int_G (\alpha \circ f)(a)da$$

Ahora utilizaremos tales relaciones y verifiquemos las igualdades: i), ii), iii) y iv)

i) $p_0 \circ p(x) = \left[\int_G p(y)dy\right] \circ p(x) = \int_G p(y) \circ p(x)dy$

$$= \int_G p(x)dy = \int_G p(y)dy = p_0$$

Análogamente $P \circ P_0(x) = P_0$

ii) $p_0^2 = p_0 \int_G p(x)dx = \int_G p_0 \circ p(x)dx = \int_G p_0 dx = p_0$

iii) $\left(p^{\#}\right)_0 = \int_G p(x^{-1})^* dx = \left[\int_G p(x)dx\right]^* = p_0^*$

iv) $p_0 w = \int_G \left(p(x)w\right) dx = \int_G w dx = w,\ w \in W_I$

De otro lado, si $P_0 w = w,$ entonces de (i) obtenemos:

$p(x)w = (p(x) \circ p_0)w = p_0 w = w, x \in G;$ y asi $w \in W_I$

Proposición (5.2.4) (i): La dimensión de W_I es dado por $\dim W_I = \int_G t_r\ p(x)dx,$ en particular, $W_I = 0$ si y solo si $\int_G t_r\ p(x)dx = 0$

Demostración.- Como $P_0^2 = P_0$ y $\operatorname{Im}(P_0) = W_I$ entonces $\dim W_I = t_r P_0 = \int_G t_r\ p(x)dx.$

Proposición (5.2.5): Si W_I^* es el subespacio invariante para $p^{\#}$, entonces $\dim W_I^* = \dim W_I$

Demostración.- Directamente de la definición de invarianza.

Proposición (5.2.6).- Consideremos las representaciones inducidas $\Lambda^K P,$ en $\Lambda^k W$ para k = 0, 1, …., r (r = dim W) y sea $c_K = \dim\left(\Lambda^k W\right)_I$, $k = 0,1,.....,r$ supóngase que G es conexo. Entonces

$$\int_G \det\left(p(x) + \lambda_I\right) dx = \sum_{k=0}^{r} c_k \lambda^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} c_k \lambda^k$$

Demostración**.-** De la proposición (5.2.4)

$$c_K = \int_G T_r \Lambda^k p(x) dx$$

Pero $T_r \Lambda^k p(x)$ es el coeficiente de λ^{r-k} en el polinomio $\det\left[p(x) + \lambda_I\right]$. Así obtenemos:

$$\int_G \det\left(p(x) + \lambda_I\right) dx = \sum_{k=0}^{r}\left[\int_G T_r \Lambda^k P(x) dx\right]\lambda^{r-k} = \sum_{k=0} c_k \lambda^{r-k}$$

Para establecer la otra igualdad; note que, por el hecho de que G es compacto y conexo, el homomorfismo $\det\ \circ p : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una imagen compacta conexa es decir: $\det P(x) = 1,\ x \in G;$ de aquí se sigue para

$\lambda \neq 0, \det\left[p(x)+\lambda_l\right] = \lambda^r.\det\left[\lambda_l^{-1} + p(x^{-1})\right]$ integrando sobre G; obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{r} c_k \lambda^{r-k} = \lambda^r \sum_{k=0}^{r} c_k \lambda^{k-r} = \sum_{k=0}^{r} c_k \lambda^k$$

5.3. OTRO TIPO DE RESULTADO

Por la naturaleza del trabajo; los otros resultados que presentamos; está basado en aplicaciones sobre espacios invariantes con producto interno; donde cada representación de un grupo de Lie compacto admite un producto interno invariante; y además es semisimple. Finalmente mostramos algunas propiedades que posee el grupo $\mathbb{R}P^3$.

Definición Producto Interno Invariante (5.3.1)

Sea P una representación de un grupo de Lie en un espacio vectorial real (respectivamente complejo) W. Un producto interno Euclidiano (respectivamente, Hermitiano) < , > en W es llamado invariante con respecto a P si satisface:

$$\left\langle P(x)u; P(x)v \right\rangle = \left\langle u, v \right\rangle,\ x \in G;\ u, v \in W$$

Proposición (5.3.1).- Cada representación de un grupo de Lie Compacto admite un producto interno invariante.

Demostración**.-** Sea (,) cualquier producto interno Euclidiano (respectivamente Hermitiano). Definamos < , > del modo siguiente:

$\left\langle u, v \right\rangle = \int_G (p(a)u, p(a)v)da;$ entonces < , > posee las propiedades requeridos y por tanto el resultado.

Proposición (5.3.2).- Sea G un grupo de lie compacto conexo, entonces la aplicación $\varphi : x \mapsto x^2$ es suryectiva.

Demostración.- Por un ejemplo antes estudiado tenemos

$$grad(\varphi) \int_G \det\left(l + Ad\ x\right) dx$$

Ahora elijamos un producto interno en $T_e\left(G\right)$ lo cual es invariante bajo la representación adjunta. Así cada Adx es una rotación propia, y esto sigue del álgebra lineal elemental que $\det\left(l + Adx\right) \geq 0,\ x \in G$.

Puesto que : $\det\left(l + Ad\ e\right) = \det(2l) = 2^n, (n = \dim G)$ nosotros obtenemos: $grad(\varphi) > 0;$ de aquí se tiene que φ es suryectivo.

Ejemplo (Invariante de Hopf) (5.3.1)

En este ejemplo mostramos que la aplicación $x \mapsto x^2$ no es necesariamente suryectiva si G no es compacto. Sea $G = SL(2,\mathbb{R}),$ fácilmente se muestra que G es un grupo de Lie. El Teorema de Hamilton Cayley produce la igualdad siguiente:

$$\alpha^2 - \left(t_r\alpha\right)\alpha + l = 0,\ \alpha \in G$$

De donde $tr\alpha^2 - \left(tr\alpha\right)^2 + 2 = 0,$ y así $tr\alpha^2 \geq -2$ si $\alpha \in G$. En particular, la transformación $ß \in G$ dado por $ß\left(e_1\right) = -2e_1,\ ß\left(e_2\right) = -\frac{1}{2}e_2$ tiene traza < - 2, y asi no es el cuadrado de ningún α en G.

Definición (5.3.2).- Una representación de un grupo de Lie en un espacio vectorial W es llamado semisimple si cada subespacio estable $W_I \subset W$ tiene un complemento estable; es decir si $W_I \subset W$ es estable, entonces existe un subespacio estable W_2 tal que $W = W_1 \oplus W_2$

Ejemplo (5.3.2).- Cada representación de un grupo de Lie Compacto en un espacio Vectorial finito dimensional es semisimple.

En efecto.- Por la proposición inmediata anterior existe un producto interno invariante en W. Ahora sea $W_I \subset W$ estable. Entonces $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. y $W_1^{\perp}$ es también un subespacio estable.

ALGUNAS APLICACIONES

Para cada una de las aplicaciones siguiente: G denota un grupo de Lie y E un álgebra de Lie.

1ro). Sean h, k dos elementos en E y f $\in$ L (G) entonces se tiene :

- $X_h(f)(x) = \left[\frac{d}{dt} f\left(x.\exp(th)\right)\right]_{t=0}$

- $Y_k(f)(x)=\left[\dfrac{d}{dt} f\left(x.\exp(tk)\right).x\right]_{t=0}$

2do). El corchete formado por los campos X_h e Y_k es nulo; es decir $\left[X_h, Y_k\right]=0$

En efecto**.-** Bastará usar la igualdad siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} f\left(\exp\left(\tau k\right).x.\exp(th)\right)=\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} f\left(\exp\left(\tau k\right).x.\exp(th)\right)$$

3ro). Sea $q: M \longrightarrow N$ una aplicación suave (diferenciable) con derivada nula en un punto $a \in M$. Defina una aplicación bilineal $ß: T_a(M) x T_a(M) \longrightarrow T_{q(a)}(N)$ tal que ß sea simétrica.

En efecto**.-** Sean $(\xi, n) \in T_a(M) x T_a(M)$ y $f \in L\ (N),$ definamos la aplicación "ß" como: $ß(\xi,\eta)(f)=X\left(Y(q^* f)\right)(a);$ donde $X(a)=\xi$ y $Y(a)=\eta$. Claramente ß es simétrica.

4to.) Sea T un n – toro con algebra de Lie L_T. El subconjunto $\Gamma_T=\exp^{-1}(e) \subset L_T$ es llamado el entero de Lattice de L_T. Entonces:

(i) $\Gamma_T \cong \mathbb{Z}^n$, para $\mathbb{Z}^n=\mathbb{Z} \oplus ..... \oplus \mathbb{Z}$ (n -términos)

(ii) Si $\varphi: T \longrightarrow S$ es un homomorfismo entre toros entonces $\tilde{\varphi}: L_T \longrightarrow L_S$ restringe a un homomorfismo de grupos $\varphi_\Gamma: \Gamma_T \longrightarrow \Gamma_S$. De aquí se concluye que existe una biyección entre el conjunto Hom (T, S) y el conjunto $Hom\left(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m\right);$ donde n = dim T y m = dim S.

5to.) Definamos las llamadas aplicaciones potencia $P_k: G \longrightarrow G$ por $p_k(x)=x^k, k \in \mathbb{Z}$, entonces $\left(dp_k\right)_x=\left(L_x\right)^k \circ \phi_k(x) \circ (L_x)^{-1};$ y $\phi_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(Ad\ x^{-1})^j$ para k ≥ 1.

- Además: para x $\in$ G un elemento fijo se tiene : $\phi_k(x)=0$ si y solo si existe $h \in E$ tal que $\left(Adx\right)^k h=h$ y $\left(Adx\right) h \neq h$.

- De otro lado se observa que : Si G es compacto y conexo entonces $\det(\phi_k(x)) \geq 0, x \in G$ concluyéndose que las aplicaciones P_k son suryectivas y en consecuencia la aplicación exponencial también es sobre.

6to). El Grupo Proyectivo $\mathbb{R}P^3$: Fijemos un producto interno euclidiano y una orientación en $\mathbb{R}^3$.

- El producto cruz convierte a $\mathbb{R}^3$ en un algebra de Lie. La aplicación dada como $\psi(h)(x) = h \text{ x } x$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ al algebra de Lie de las transformaciones de $\mathbb{R}^3$.
- Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq \pi\}$. Considerando $\mathbb{R}P^3$ como el espacio cociente de B bajo la relación de equivalencia "$\sim$" dada por : $x \sim y$ si y solo si x = y ó $\|x\| = \pi$ y x = - y, de la siguiente relación

$$\exp\psi(h)(x) = (\cos\|h\|)x + \left(2\frac{\langle h, x\rangle}{\langle h, h\rangle} sen^2\frac{\|h\|}{2}\right)h + \frac{sen\|h\|}{\|h\|}(h \text{ x } x), h, x \in \mathbb{R}^3$$

  Obtenemos una incrustación (inmersión) cuya imagen es el conjunto de isometrías propias de $\mathbb{R}^3$, concluyéndose que $\mathbb{R}P^3$ es un grupo de Lie con algebra de Lie $\mathbb{R}^3$.

CAPITULO VI
DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON OTROS RESULTADOS.

En el proyecto de investigación se formuló la hipótesis general, lo cual establecía que los grupos de Lie y los difeomorfismos entre variedades evidenciaran la identificación de un grupo de Lie "G" con el producto directo de dos variedades; lo que permitió formular las siguientes hipótesis específicas.

1. Los isomorfismos entre grupos de Lie permitirán determinar la identificación de un grupo de Lie G con el producto directo del Tori y el espacio Euclidiano.
2. La integral de una función diferenciable definida en un grupo de Lie G con valores reales dependerá de la compacidad y de la estructura diferencial que posee G.

6.2. CONTRASTACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON ESTUDIOS SIMILARES

Como es de vuestro conocimiento, este trabajo está enmarcado en la Topología Diferencial, la cual es una rama de la matemática donde se estudia las variedades diferenciables y las aplicaciones diferenciables entre variedades. Es el caso que muchos autores entre ellos Frank W. Warner, en su obra "Foundations of diferentiable Manifolds and Lie Groups" establecen resultados muy similares, en una variedad muy específica como la Euclidiana. Asimismo la integración de las n – formas lo estudian sobre dominios regulares. A diferencia o a Contraste de este autor y otros nosotros estudiamos sobre un grupo de Lie G y una variedad arbitraria.

Establecemos una identificación entre tales objetos. Asimismo considerando material fundamental sobre grupos de Lie como: aplicación exponencial, representación general, representación adjunta y clasificación de grupos abelianos de Lie, encontramos una estrecha relación entre un grupo y su algebra de Lie.

De otro lado la integral invariante de una función diferenciable sobre un grupo de Lie compacto es definido desde el punto de vista de formas diferenciales. Así mismo se obtuvo dos aplicaciones.

1. Cada representación de un grupo de Lie compacto admite un producto interno invariante.
2. Cada representación de un grupo de Lie compacto en un espacio vectorial finito dimensional es semisimple.

6.3. RESPONSABILIDAD ÉTICA

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación, el reglamento de propiedad intelectual y el reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobados por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.

CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados obtenidos como la identificación de un grupo de Lie con un producto directo de dos variedades; así mismo también la integración de aplicaciones diferenciables sobre grupos de Lie compacto se han podido establecer las siguientes conclusiones:

1. Cualquier grupo de Lie Conexo se puede expresar como el producto de dos variedades diferenciables.
2. La integral de una función *f* definida en un grupo de Lie G en un espacio vectorial W es independiente de la orientación.
3. El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^3$; puede expresarse como el espacio cociente de la bola cerrada de radio π en $\mathbb{R}^3$ bajo una cierta relación de equivalencia.

RECOMENDACIONES

- Los resultados obtenidos, sobre la identificación, de un grupo de Lie con el producto de Tori y el espacio euclidiano se recomienda debilitar hipótesis y/o condiciones y obtener dicho resultado.
- Estudiar resultados similares a lo realizado, sobre subgrupos de Lie y espacios homogéneos.
- Analizar la estructura topológica y algebraica del llamado Tori – Maximal.
- Impulsar y motivar la investigación de la matemática en la topología diferencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. Borel and F. Hirzebruch, "Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, I" *Amer. J. Math.* 80 (1958), 485-538.
2. A. Borel and F. Hirzebruch, "Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, II" *Amer. J. Math.* 80 (1959), 315-382.
3. A. Borel and F. Hirzebruch, "Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, III" *Amer. J. Math.* 80 (1960), 491-504.
4. A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Vol. 1. Graylock Press, Rochester, New York, 1957.
5. Bers, L., F. John, and M. Schechter. *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964
6. C. Chevalley, "Fundamental Concepts of Algebra", Academic Press, New York, 1956.
7. Cartan, H. *Séminaire* 1950/1951. Paris: Ecole Normale Superieure, 1955.
8. Chevalley, C. *Theory of Lie Groups I.* Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1946.
9. De Rham, G. *Variétés Differentiables.* Paris: Hermann, 1960.
10. E. Coddington and N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations" McGraw- Hill, New York, 1955.
11. G. Hochschild, "The Structure of Lie Groups", Holden – Day, San Francisco, 1965.
12. Helgason, S. *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* New York: Academic Press, 1966.
13. Hoffman, Kennett – Kunze Ray; Algebra Lineal (C) Por Editorial. Prentice – Hall Internacional. (1973).
14. Hurewicz, W. *Lectures on Ordinary Differential Equations.* New York and Cambridge, Mass.: John Wiley & Sons, Inc., and MIT Press, 1958.
15. J. Milnor, "Lecture on Characteristic Classes" Mimeographed notes, Princeton University, 1957.
16. Jacobson, N. *Lie Algebras.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
17. James R. Munkres, Topología 25. Edición © Prentice Hall, Inc. Madrid, 2002.
18. Kelley, J.L. *General Topology.* Princeton, N.J. : Van Nostrand Company, Inc. 1955

19. Kobayashi, S., and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1963.
20. Kohn J.J. *Introduccion a la teoría de integrales harmónicas.* Lecture notes issued by the Centro de Investigación del IPN, México, 1963.
21. Lang, S. *Introduction to Differentiable Manifolds.* New York: John Wiley & Sons, Inc. 1962.
22. Milnor, J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann of Math*, 64 (1956), 399-405.
23. N. Bourbaki, "Eléments de Mathématique, Algébre I", Hermann, Paris, 1970.
24. Pontrjagin, L. S. *Topological Groups.* Princeton, N.J. Princeton Univesity Press, 1939.
25. S. Sternberg, "Lectures on Differential Geometry", Prentice – Halla, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
26. Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. New York: McGraw – Hill, 1966.
27. Spivak, M. *Calculus on Manifolds.* New York: W.A.Benjamin, Inc. 1965.
28. V. Guillermin y A. Pollack. Differential Topology. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Yersey, 1974.
29. W. H. Greub, "Linear Algebra", Springer – Verlag, Berlin and New York, 1967.
30. W. H. Greub, "Multilinear Algebra", Springer – Verlag, Berlin and New York, 1967.
31. W. Rudin. Real and Complex Analysis, 39 edition. Mc Graw – Hill, Book Company, New York, 1987.
32. Warner, Frank W. AMS Copyright © 1971 by scott in the united states of America. (1970)

ANEXOS

ANEXOS NECESARIOS SEGÚN LA NATURALEZA DEL PROBLEMA

La definición de espacio topológico que actualmente esta estandarizada llego a formularse con mucho tiempo de retraso varios matemáticos entre ellos: Frechet, Hausdorff y otros propusieron definiciones diferentes años más tarde buscaron la definición más general y acertada posible, la misma que presentamos a continuación.

Definición (Topología).- Sea X un conjunto $\tau \subset P(X)$ es una topología sobre X si satisface lo siguiente:

(1) ϕ, X son elementos de τ

(2) La unión arbitraria de elementos de τ se encuentran en τ

(3) La intersección finita de elementos de τ se encuentran en τ

Definición .- La pareja (X, τ) se denomina espacio topológico.

Definición (Base).- Sea (X, τ) un espacio topológico una base para τ es una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tales que:

(1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento B en $\mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(2) Si $x \in B_1 \cap B_2$, con B_1, B_2 en $\mathcal{B}$, entonces existe un elemento B_3 en $\mathcal{B}$ con $x \in B_3$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Observación.- Si $\mathcal{B}$ satisface las dos condiciones anteriores se define la topología τ generada por $\mathcal{B}$ del modo siguiente: $U \in \tau$ si para cada $x \in U$, existe un elemento B en $\mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$

Definición (Subbase).- Sea (X, τ) un espacio topológioco, una subbase S para τ es una colección de subconjuntos de X tal que la unión es igual a X. La topología generada por la subbase S se define como la colección τ de todos las uniones de intersecciones finitas de elementos de S.

Espacio de Hausdorff.- Un espacio topológico X es de Hausdorff si para cada par de puntos x, y en X $(x \neq y)$ existen V_x, V_y (Vecindades) tales que $V_x \cap V_y = \phi$.

Definición (Espacio Segundo Contable).- Decimos un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad, si existe una base numerable para la topología definida en X.

Inmersión.- Sean M, N dos variedades $f : M \longrightarrow N$ una aplicación. Diremos que f es una inmersión si f es diferenciable con derivada inyectiva en todo punto de M. Es decir la aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una inmersión si $df : T_pM \longrightarrow T_pN$ es inyectiva para todo p – elemento de M.

Grupo (Definición).- Sea G un conjunto. Se dice que G es un grupo si está provisto de una operación "." Binaria tal que:

(i) a (b.c.) = (a . b) . c, para todo a, b, c $\in$ G

(ii) Para todo $a \in$ G, existe $e \in G$ tal que $a.e = a = e.a$

(iii) Para todo $a \in$ G, existe $e \in G$ tal que $a.a' = e = a'a.$

Si además se verifica que $a.b = b.a,$ para todo a, b en G se dice que G es un grupo abeliano.

Homomorfismo de grupos.- Sean G y G' dos grupos $f : G \longrightarrow G'$ una aplicación, se dice que f es un homomorfismo de grupos si $f(a.b) = f(a).f(b)$ para todo $a, b \in G.$

Homomorfismo local.- Sea G un grupo de Lie y H un grupo abstracto cualesquiera. Un homomorfismo local de G en H es una aplicación $\varphi : U \longrightarrow H$ tal que $\varphi(e) = e_H$ para U vecindad de e, y donde además $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ para x, y en una vecindad V de $e.$

Definición.- Sean M, N dos variedades $f: M \longrightarrow N$ una aplicación. Diremos que f es un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa también diferenciable.

Definición (Espacio Dual).- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. El espacio dual de V es el espacio vectorial formado por todos los funcionales lineales en V el cual se denota por V^*.

Observación.-1) Si V es finito dimensional entonces V* lo es; más aún dim V = dim V*.
2) El espacio bidual se obtiene de manera similar es decir si X es el dual de V* entonces X* = (V*)* es el espacio bidual de V.

BIBLIOGRAFIA (DE LOS ANEXOS)

1. Halmos, P. *Finite – Dimensional* Vector Spaces. Nueva York, D. Van Nostrand Co, 1958.
2. Hoffman, K. And R. Kunze. *Linear Algebra*. (2nd. Ed). Englewoord Cliffs, Nueva Jersey, Prentice Hall, Inc. 1971.
3. J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966
4. J.L. Kelley. *General Topology*. Springer – Verlag, New York, 1991.
5. J.R. Munkres. Elements of Algebraic Topology. Perseus Books, Reading, Mass., 1993.
6. Lages Lima, Elon, *Álgebra Exterior*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, C. N. Pq. (9° Coloquio Brasileiro de Matemática, Pocos de Caldas, Julho 1973).
7. P.R. Halmos. *Naïve Set Theory*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.
8. S. Willard. *General Topology*. Addison – Wesley Publishing Company. Inc., Reading, Mass. 1970