

UNIVERSIDAD NACIONAL CALLAO

ESCUELA DE POSGRADO

**UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**“CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO Y CONTROL DESLIZANTE
DE LOS ÁNGULOS DE AZIMUT Y ELEVACIÓN DE UNA ANTENA
PARABÓLICA DE COMUNICACIÓN SATELITAL”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO
EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA CON MENCIÓN EN
CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN**

AUTOR: RAÚL PEDRO CASTRO VIDAL

Callao, 2022

PERÚ

A blue ink signature of Raúl Pedro Castro Vidal, written in a cursive style.

A blue ink signature, likely of a jury member, written in a cursive style.

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO

MIEMBROS DEL JURADO

Dr. CÉSAR AUGUSTO SANTOS MEJÍA	PRESIDENTE
Mg. JORGE ELÍAS MOSCOSO SÁNCHEZ	SECRETARIO
MSc. LUIS ERNESTO CRUZADO MONTAÑEZ	MIEMBRO
MSc. CARLOS HUMBERTO ALFARO RODRÍGUEZ	MIEMBRO
Dr. NICANOR RAÚL BENITES SARAVIA	ASESOR

N.º DE ACTA	: 05-2022
N.º DE LIBRO	: 01
FOLIO	: 118
FECHA DE APROBACIÓN	: 26 DE ABRIL DE 2022

DEDICATORIA

A mis padres.

AGRADECIMIENTO

Desde lo más profundo de mi ser agradezco continuamente a Dios por iluminarme con su luz. A mi familia que incansablemente me alentaron para culminar mis estudios de Maestría, a mis colegas de la FIEE, quienes con sus consejos me animaron a realizar esta investigación. Un agradecimiento especial a mi asesor, el Dr. Ing. Nicanor Raúl Benites Saravia; por su exigencia y apoyo en el desarrollo de esta tesis.

INDICE

INDICE	1
TABLA DE CONTENIDO	3
TABLA DE GRAFICOS	3
RESUMEN	5
ABSTRACT	6
INTRODUCCIÓN	7
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.1. Descripción de la realidad problemática	8
1.2. Formulación del problema.....	8
1.2.1. Problema general	8
1.2.2. Problemas específicos	9
1.3. Objetivos	9
1.3.1. Objetivo General.....	9
1.3.2. Objetivos específicos.....	9
1.4. Limitantes de la investigación	10
1.4.1. Teórico	10
1.4.2. Temporal	10
1.4.3. Espacial.....	10
II. MARCO TEÓRICO.....	11
2.1 Antecedentes del estudio.....	11
2.1.1 Antecedentes internacionales	12
2.1.2 Antecedentes nacionales	14
2.2 Bases teóricas	14
2.2.1 Antena parabólica.....	14
2.2.2 Control por Modo Deslizante	16
2.2.3 Control Óptimo Cuadrático	25
2.3 Conceptual.....	35
2.3.1 Modelado de la antena parabólica.....	35
2.3.2 Control por Modo Deslizante Multivariable para la antena parabólica	57
2.3.3 El Controlador Optimo Multivariable Proporcional Integral para la antena parabólica	58

2.4	Definición de términos básicos	60
III.	HIPÓTESIS Y VARIABLES	61
3.1	Hipótesis	61
3.1.1	Hipótesis general.....	61
3.1.2	Hipótesis específicas.....	61
3.2	Definición conceptual de variables.....	61
3.3	Operacionalización de variables	62
IV.	DISEÑO METODOLÓGICO.....	63
4.1.	Tipo y diseño de investigación	63
4.1.1	Simulación del modelo de la Antena Parabólica de Comunicación Satelital.....	63
4.1.2	Control por modo deslizante multivariable para la antena parabólica.....	71
4.1.3	Control óptimo multivariable para la antena parabólica	80
4.2.	Método de investigación	86
4.3.	Población y muestra.....	87
4.4.	Lugar de estudio y periodo desarrollado	87
4.5.	Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	87
4.6.	Análisis y procesamiento de datos.....	87
V.	RESULTADOS.....	88
5.1	Resultados descriptivos	88
5.1.1	Resultados del modelamiento de la antena parabólica	88
5.1.2	Resultados del control por modo deslizante multivariable.....	89
5.1.3	Resultados del control óptimo discreto multivariable.....	90
5.2	Resultados inferenciales	91
5.2.1	Resultado del modelamiento de la antena parabólica.....	91
5.2.2	Resultado del control por modo deslizante multivariable.....	96
5.2.3	Resultado del control óptimo discreto multivariable.....	99
VI.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	103
6.1.	Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados..	103
6.1.1	Contrastación con hipótesis específica 1.....	103
6.1.2	Contrastación con hipótesis específica 2.....	103
6.1.3	Contrastación con hipótesis específica 3.....	104
6.2.	Contrastación de los resultados con otros estudios similares.....	104
	CONCLUSIONES	105

RECOMENDACIONES	107
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
ANEXOS	110
ANEXO A: Matriz de consistencia	110
ANEXO B: Programas en Matlab	111
B.1 Programa de Simulación de la Respuesta del Modelo No Lineal de la Antena Parabólica	111
B.2 Programa de Simulación de la Respuesta del Modelo Lineal de la Antena Parabólica.....	114
B.3 Programa de Control Deslizante Multivariable de la antena parabólica	117
B.4 Programa de Control Optimo Cuadrático Multivariable para la antena parabólica	122

TABLA DE CONTENIDO

Tabla 1: Vectores de estado del sistema.	62
Tabla 2: Vectores de estado del sistema.	71
Tabla 3: Características de respuestas de las estrategias de Control Optimo y Control Deslizante.....	106

TABLA DE GRAFICOS

Figura 1: Ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica	16
Figura 2: Construcción esquemática de Filippov.....	19
Figura 3: Condición de deslizamiento.	21
Figura 4: Sistema Regulador Optimo Discreto.....	28
Figura 5: Esquema de un Sistema de Control Optimo Proporcional.....	29
Figura 6: Esquema del Sistema de Control Optimo Proporcional Integral.	30
Figura 7: Esquema aproximado del sistema de antena parabólica de comunicación satelital.	35
Figura 8: Esquema simplificado del sistema de antena parabólica de comunicación satelital.	38
Figura 9: Diagrama general para determinar la energía cinética y potencial de una partícula i , elaboración propia.	42
Figura 10: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.	64
Figura 11: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	64
Figura 12: Gráfica de los ángulos de Azimut y Elevación en grados sexagesimales.	65
Figura 13: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.....	65
Figura 14: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.	66

Figura 15: Gráfica de las Velocidades de los ángulos de Azimut y Elevación en rad/s.....	66
Figura 16: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.	67
Figura 17: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	68
Figura 18: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	68
Figura 19: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.....	69
Figura 20: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.	69
Figura 21: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	70
Figura 22: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.....	70
Figura 23: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.....	71
Figura 24: Imperfección de la ley de control por modo deslizante.	77
Figura 25: Salida x1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.....	78
Figura 26: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.....	79
Figura 27: Salida x1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.....	79
Figura 28: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.....	80
Figura 29: Salida x1 (Ángulo de azimuth) y señal de control T1.	84
<i>Figura 30: Salida x2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2.....</i>	<i>85</i>
Figura 31: Salida x1 (Ángulo de azimuth) y señal de control T1 para referencia escalón unitario.....	85
Figura 32: Salida x2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2 para referencia escalón unitario.	86
Figura 33: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.	92
Figura 34: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	92
Figura 35: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.....	93
Figura 36: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.....	94
Figura 37: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.	95
Figura 38: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.....	95
Figura 39: Salida x1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.....	96
Figura 40: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.....	97
Figura 41: Salida x1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.....	98
Figura 42: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.....	99
Figura 43: Salida x1 (Ángulo de azimuth) y señal de control T1.	100
Figura 44: Salida x2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2.....	100
Figura 45: Salida x1 (Ángulo de azimuth) y señal de control T1 para referencia escalón unitario.....	101
Figura 46: Salida x2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2 para referencia escalón unitario.	102

RESUMEN

En la presente tesis de maestría, se desarrolla el modelamiento del sistema de antena parabólica, aplicando las ecuaciones de Lagrange. Además, se plantea el problema del control simultáneo de los ángulos de azimut (α) y de elevación (β) del sistema de antena parabólica para *apuntar* a cualquier satélite ubicado en algún punto S . El sistema antena parabólica se representa como un sistema robótico de dos grados de libertad, consistente de dos eslabones: uno de masa m_1 (cilindro hueco) y otra de masa m_2 - m_3 (m_2 : prisma de masa cuadrada, m_3 : masa del sólido rígido que es parte del paraboloide, soldada a m_2). El modelo no lineal de la antena parabólica se utiliza para diseñar el Controlador Deslizante Multivariable en tiempo continuo, con muy buenos resultados en el control de los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica, tanto para referencias constantes como para trayectorias, con pequeño sobrepico de 0.4 radianes como máximo y un tiempo de asentamiento máximo de 14 segundos para el control del ángulo de azimut, y en el caso del control del ángulo de elevación, se presenta un pequeño sobrepico de 0.03 radianes como máximo y un tiempo de establecimiento de 0.9 segundos en el control del ángulo de elevación. Asimismo, se linealiza y discretiza el modelo no lineal para diseñar el Controlador Óptimo Proporcional Integral Discreto Multivariable, con mejores resultados en el control de los ángulos de azimut y elevación, tanto para referencias constantes como para trayectorias, obteniéndose un sobrepico máximo de 0.07 radianes y un tiempo de asentamiento de 3 segundos como máximo para el ángulo de azimut, y un sobrepico de 0.07 radianes y un tiempo de asentamiento de 3.7 segundos como máximo en el control del ángulo de elevación. En todos los casos se utiliza Matlab para la simulación.

Palabras claves: Modelo de la antena parabólica, Control Deslizante Multivariable. Control Óptimo Multivariable.

ABSTRACT

In this master's thesis, the parabolic antenna system modeling is developed, applying Lagrange's equations. In addition, the problem of simultaneous control of the azimuth (α) and elevation (β) angles of the parabolic antenna system to point to any satellite located at some point S. The parabolic antenna system is represented as a robotic system of two degrees of freedom, consisting of two links: one of mass m_1 (hollow cylinder) and the other of mass m_2 - m_3 (m_2 : prism with square mass, m_3 : mass of the rigid solid that is part of the paraboloid, welded to m_2). The non-linear model of the parabolic antenna is used to design the Multivariable Slider Controller in continuous time, with very good results in controlling the azimuth and elevation angles of the parabolic antenna, both for constant references and for trajectories, with small overshoot. of 0.4 radians maximum and a maximum settlement time of 14 seconds for the control of the azimuth angle, and in the case of the control of the elevation angle, there is a small overshoot of 0.03 radians maximum and a settling time of 0.9 seconds in elevation angle control. Likewise, the nonlinear model is linearized and discretized to design the Multivariable Discrete Integral Proportional Optimum Controller, with better results in controlling azimuth and elevation angles, both for constant references and for trajectories, obtaining a maximum overshoot of 0.07 radians and a settling time of 3 seconds maximum for the azimuth angle, and an overshoot of 0.07 radians and a settling time of 3.7 seconds maximum in the elevation angle control. Matlab is used for simulation in all cases.

Keywords: Parabolic antenna model, Multivariable Slider Control. Optimal Multivariable Control.

INTRODUCCIÓN

Uno de los grandes desafíos del ser humano es automatizar los procesos, de tal manera resolver los problemas de la sociedad, tarea en la que se involucran la universidad, la empresa y otras instituciones tecnológicas, permitiendo la investigación, el desarrollo y la innovación (I+D+i).

En esa perspectiva es que se ha desarrollado el presente trabajo de tesis de maestría, que aborda el modelamiento de la antena parabólica de comunicación satelital, y cuyos modelos sirven para el diseño de las técnicas de control deslizante y control óptimo, con la finalidad de lograr un eficiente control de los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica, objetivos que se consiguen y logran mostrarse con la ejecución de programas en Matlab, permitiéndonos observar el comportamiento de las variables de interés, que son justamente los ángulos de azimut y elevación sometidos al control de lazo cerrado.

Debido a razones económicas, agravadas por la pandemia del COVID 19, el presente trabajo se orientó al modelamiento, diseño y simulación de los controladores deslizante y óptimo; dejándose como trabajo futuro la implementación en tiempo real, para todos aquellos que quisieran y pudieran obtener el financiamiento correspondiente.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El uso de mecanismos de apuntamiento de antena está compuesto de una base giratoria tripoidal para el ángulo de azimut (primer grado de libertad), un eslabón de longitud l_1 y masa m_1 para el ángulo de elevación (segundo grado de libertad), un eslabón de longitud l_2 y masa m_2 soldado a la base de una antena parabólica de masa (a modo de efector final). La estructura del sistema se parece mucho a la de un robot articular de dos grados de libertad, por lo que, en el desarrollo del modelo, se considerará como tal.

El problema a resolver es, aplicar técnicas de Control Avanzado, como son: Control Deslizante (estrategia de control no lineal) y el Control Óptimo Cuadrático Discreto (estrategia de control lineal), para controlar los indicados ángulos de azimut y elevación, lo que constituye en controlar un proceso MIMO (Múltiple Entrada y Múltiple Salida).

Debido al desarrollo de computadores digitales de alta velocidad y capacidad ha sido posible implementar por software los dos algoritmos de control de alto rendimiento ya indicados.

En la presente tesis se resuelve el problema del control simultáneo de los ángulos de azimut (α) y de elevación (β) de un sistema de antena parabólica para apuntar a cualquier satélite ubicado en un punto S , desde el punto F (punto focal del paraboloide) en dirección del eje Z_3 , tal como puede verse en la figura 1 correspondiente al capítulo II.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

Teniendo en cuenta las consideraciones arriba indicadas, se plantea la formulación del problema.

¿De qué manera las técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante permitirán controlar los ángulos de Azimut y Elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?

1.2.2. Problemas específicos

Problema específico 1: ¿Es posible obtener el modelo del sistema antena parabólica de comunicación satelital?

Problema específico 2: ¿Es posible diseñar y simular un control Óptimo Cuadrático para la regulación de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?

Problema específico 3: ¿Es posible diseñar y simular un control Deslizante para la regulación de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar las técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante que permitirá controlar los ángulos de Azimut y Elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.

1.3.2. Objetivos específicos

Objetivo Específico 1: Obtener el modelo matemático del sistema de una antena parabólica de comunicación satelital y simular su comportamiento.

Objetivo Específico 2: Diseñar y simular el Control Óptimo Cuadrático para regular los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.

Objetivo Específico 3: Diseñar y simular el Control Deslizante para regular los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórico

Si bien es cierto, existe información sobre antenas parabólicas de comunicación satelital y de las técnicas de control desarrolladas en la presente tesis; también es cierto de la falta de información teórica respecto al detalle del modelado de un sistema de antena parabólica como el que se está considerando en el presente trabajo, por lo que es un aporte a la bibliografía de modelado existente.

1.4.2. Temporal

En cuanto a la limitación temporal que se presentó durante el desarrollo del trabajo, fue la escasa información bibliográfica comprendida dentro de los últimos seis años, relacionada al tema de la tesis.

1.4.3. Espacial

Una limitante espacial es el lugar donde se desarrolló la investigación. El no contar con laboratorios y equipamiento adecuados que permitan realizar la implementación, este trabajo se limitó al diseño y simulación usando Matlab.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

Históricamente, desde la antigüedad las personas han tenido la necesidad de comunicarse, ya sea de forma oral o escrita. Uno de los desarrollos más sorprendentes en los últimos años que ha marcado un hito en la historia de la humanidad, es sin lugar a duda la posibilidad de poder conectar todas las redes de cobertura limitada en una red global que permita enlazar y comunicar usuarios ubicados en cualquier parte del mundo. Las primeras redes de telecomunicaciones surgieron con la aparición de la telegrafía óptica inventada por Claude Chape en el año 1794 (Raymond, 2001). Pero no fue hasta el año 1844 cuando se perfeccionó el código Morse, que se logró la primera transmisión telegráfica eléctrica entre Washington y Baltimore. Más tarde, en 1866, con la colocación del primer cable submarino trasatlántico entre EE. UU. e Inglaterra se hizo posible la primera comunicación transatlántica.

Thomas Edison, en el año 1885, patentó un sistema de comunicaciones utilizando antenas monopolo con carga capacitiva; y en 1891 Eduard Brenly inventó un dispositivo que permitía recibir ondas electromagnéticas el cual llamó cohesor. Este descubrimiento posibilitó que en 1895 Guillermo Marconi lograra establecer la primera comunicación entre antenas parabólicas, y que en el año 1899 se efectuara entre Inglaterra y Francia la primera comunicación por radio en el mundo.

A partir del siglo XX, se posicionó todas las tecnologías asociadas a las comunicaciones. En 1938 Grote Reber construyó una antena parabólica de 9m de diámetro, con lo que se inició los primeros radiomapas del cielo.

A finales de 1945, Arthur C. Clarke propone la utilización de tres satélites de órbita geoestacionaria, espaciando 120° para dar cobertura a todo el mundo. Tal es así que con el lanzamiento del Sputnik (primer satélite lanzado al espacio) el año 1957, se dio inicio una carrera espacial que permitió la apertura de un nuevo

panorama a las comunicaciones. La comunicación satelital de carácter comercial comenzó en el año 1965 con el lanzamiento del satélite INTELSAT, el cual fue posicionado en órbita geoestacionaria (Martínez, 2007).

Según Peña (2003), las antenas de comunicaciones espaciales han evolucionado de sobremanera en los últimos años, siendo la Agencia Espacial Europea (ESA) y la Agencia Especial Norteamericana (NASA) las dos organizaciones aeroespaciales responsables de los avances en dicha materia.

Los avances tecnológicos antes mencionados se han producido gracias al desarrollo de las antenas, dispositivos, que son fundamentales en una red de telecomunicaciones, que se ajustan al tipo de diseño y transmisión requeridas. En lo que respecta a la transmisión satelital, las que más se utilizan son las antenas parabólicas, cuyos diámetros varían.

Según Raymond (2001) existen una gran variedad de diseños de estas antenas, lo cual depende de los requerimientos técnicos que tiene que cumplir la red. Tal es así, que las antenas satelitales han evolucionado desde las de cobertura global para satélites no estabilizados, hasta la gran ganancia en los satélites en órbita geoestacionaria.

2.1.1 Antecedentes internacionales

En lo que respecta a las técnicas de control utilizadas en la regulación de los ángulos de azimut y elevación de antenas satelitales, podemos citar los siguientes trabajos:

- RODRÍGUEZ BRAVO, LAURO RUBÉN, “Controlador de elevación para una Antena Satelital: Evaluación del control Convencional PD, el controlador Difuso tipo PD y el controlador deslizante Difuso-Edición Única”, Tesis de maestría Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México, 2001. Presenta la aplicación de los controladores para regular el ángulo de elevación de una antena satelital que trabaja en la banda Ku usando Matlab. El modelo de función de transferencia de

segundo orden lo toma del trabajo de S. Dimitrijevic y D. Antic. Los resultados a nivel de simulación no permiten apreciar los tiempos de respuesta (figura ilegible y borrosa) [19].

- FLEY SOZA, ELÍAS CALEB, “DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO DE ANTENA PARABÓLICA Y SU CONTROL AUTOMÁTICO DE ORIENTACIÓN PARA ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN DE LA CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA”, Tesis profesional, 2007. Presenta el diseño y la construcción de una antena parabólica, cuya estructura de segundo orden está definida por el uso de dos motores paso a paso para controlar los ángulos de azimut y elevación respectivamente. Par ello usó dos motores paso a paso controlados por el software Sure Step Pro, consiguiendo establecer comunicación con un satélite geoestacionario de radio y televisión [8].
- FRANCISCO J., FINOL S., “Diseño de una base auto-estabilizada para la regulación de una antena direccional de la estación móvil de control del sistema aéreo no tripulado ARPÍA-1”, Tesis profesional, 2014. Presenta el diseño de la tarjeta controladora usando un DSPIC, con el cual programa el control PID de posición de la antena direccional, obteniendo controlar la posición hacia una referencia, demorando 300 segundos para llegar a dicha referencia, con un sobrepico del 10% [9].
- RUIZ QUECAN, JONNATHAN, “IMPLEMENTACIÓN, INSTALACIÓN Y PUESTA EN MARCHA DE ANTENA SEMIAUTOMÁTICA SATELITAL PARA VEHÍCULOS DE BRIGADAS DE SALUD DEL GOBIERNO NACIONAL”, Tesis profesional Universidad Santo Tomás de Aquino, Facultad de Ingeniería, Bogotá, Colombia, 2016. Presenta el diseño y la instalación de una antena satelital para mejorar la conectividad de los servicios de salud. El control de los ángulos de azimut y elevación se hacen enviando una referencia vía comandos desde una consola de control (PC), que se va ajustando hasta lograr un adecuado posicionamiento. Este tipo de control es semiautomático y básico [22].

- CÓRDOVA RIVADENEYRA, LUIS, “Diseño e implementación de un sistema de control y monitoreo mediante LabVIEW para una plataforma giratoria aplicada a los enlaces terrestre vía microondas y a una antena de recepción satelital”, Tesis profesional Universidad Politécnica Salesiana, sede Guayaquil, Ecuador, 2015. Presenta el diseño y la implementación de una base giratoria (sentidos horizontal y vertical) sobre la cual va montada una antena de recepción satelital. Asimismo, implementa el control del movimiento vertical de la antena satelital, usando un motor. Toda la implementación se realiza en ARDUINO [4].

2.1.2 Antecedentes nacionales

A la actualidad, no se cuenta con trabajos de investigación sobre técnicas de control aplicadas al posicionamiento de antenas parabólicas de comunicación satelital.

2.2 Bases teóricas

2.2.1 Antena parabólica

Las antenas son componentes vitales de toda estación terrena, ya que a través de ellas se pueden establecer comunicación con los satélites.

El rastreo de satélites es utilizado para corregir tanto la posición del mismo como de una antena de estación terrena (Hernández y S. Logarreta, 2006).

Según A. Cardama y S. Blanch (1999), una vez que el satélite se encuentra en órbita, existen algunas fuerzas no deseadas que perturban que el satélite permanezca en la misma orientación con respecto a la superficie terrestre. Debido a las fuerzas perturbadoras, la comunicación de la estación terrena con el satélite puede no ser confiable; en este caso se requiere de algún sistema de posicionamiento para mantener la antena de la estación terrena con la mejor orientación tanto para la transmisión como para la recepción de la señal.

Según J. Hernández y S. Logarreta (2006), para poder orientar una antena es necesario tener un montaje que permita realizar movimientos del reflector. Existen tres tipos de montajes que puede tener una antena: Azimut-Elevación,

X-Y y Ecuatorial. La alineación de la antena parabólica fundamentalmente depende de los ángulos de Azimut y Elevación.

La antena parabólica es un tipo de antena que se caracteriza por llevar un reflector parabólico. Su nombre proviene de la similitud a la parábola generada al cortar un cono recto con un plano paralelo a la directriz.

Las antenas de reflector parabólico proporcionan ganancias y directividades extremadamente altas, y son muy utilizadas en los enlaces de comunicaciones por radio y satélite. Una antena parabólica consiste en dos partes principales: un reflector parabólico y el elemento activo llamado mecanismo de alimentación. La antena irradia ondas electromagnéticas hacia el reflector, el cual, al ser un dispositivo pasivo, solo refleja la energía que le llega del mecanismo de alimentación [13], [6].

Las bases teóricas fundamentan las diversas relaciones de la estructura de la antena parabólica y los movimientos vitales que se debe realizar para mantener posicionado la antena y el satélite, la estructura de la antena se considerará como un robot con dos grados de libertad.

Específicamente, se ha revisado el estado del arte respecto al control óptimo cuadrático y deslizante como técnicas de control avanzado para controlar los ángulos de Azimut y elevación de antenas parabólicas de comunicación satelital, resultado que es un tema poco estudiado, según se ha podido anotar en la sección 2.1; sin embargo la teoría de control ha logrado posicionarse en todas las actividades del hombre, por lo que se ha considerado aplicar al control de posición de azimut y elevación de la antena parabólica de comunicación satelital, materia del presente trabajo.

Repetidas veces se ha mencionado los términos “azimut” y “elevación”, que vienen a ser los parámetros de alineación. Veamos brevemente cada uno de ellos:

✓ **Azimut**

El azimut es el ángulo o longitud de arco medido sobre el horizonte celeste que forman el punto cardinal Norte y la proyección vertical del astro sobre el horizonte del observador situado en alguna latitud. Se mide en grados desde el punto cardinal Norte en el sentido de las agujas del reloj, o sea Norte-Este-Sur-Oeste.

✓ **Elevación**

El ángulo de elevación nos indicará la inclinación que le debemos dar a la antena con respecto al plano vertical para orientarla hacia el satélite.

En la Figura 1 se muestran los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica.

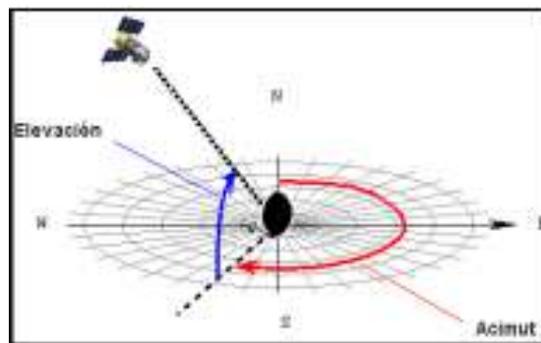


Figura 1: Ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica

Fuente: Universidad Nacional Autónoma de México (2015); José Hugo Carreón Castro.

2.2.2 Control por Modo Deslizante

El control por modo deslizante es un tipo particular de los sistemas de control de estructura variable que se caracteriza por presentar una ley de control de realimentación y una regla de decisión. Esta regla de decisión, es una función de conmutación, teniendo como entrada una medida del sistema actual y produciendo una salida particular de realimentación en un instante de tiempo. El resultado de este sistema de estructura variable puede considerarse como una

combinación de subsistemas donde cada subsistema tiene una estructura de control, [20], [15].

Hay dos ventajas principales de esta técnica de control:

Primero, la dinámica del sistema puede tolerar un cambio particular de la función de conmutación.

Segundo, la respuesta en lazo cerrado es totalmente insensible a una clase particular de incertidumbre.

La propiedad de invarianza la hace una candidata apropiada para aplicar metodología del control robusto. Por estas razones el control por modo deslizante se hace atractivo para un diseño del controlador.

El acercamiento al diseño del control por modo deslizante consiste en dos componentes:

Primero involucra el control de una función de conmutación para que el movimiento deslizante que satisfaga las especificaciones del diseño.

Segundo, se preocupa por la selección de una ley de control que hará la función de conmutación atractivo al estado del sistema. Note que esta ley del control no es necesariamente discontinua.

Ecuaciones Diferenciales Discontinuas

Considere la ecuación del diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

Donde $x \in R^n$ y $f(t, x)$ es una función definida en un dominio E del espacio de fase (t, x) . Se asumirá que para cualquier subconjunto $D \subseteq E$ existe siempre una función siempre finita $A(t)$ tal que:

$$\|f(t, x)\| < A(t) \quad (2)$$

se cumple para cualquier función en D .

Definición

Una función de vector $x(t)$ definida en el intervalo $[t_1, t_2]$ es la solución de la ecuación (1) en el sentido de Filippov, si es absolutamente continua para todo $t \in [t_1, t_2]$.

$$\frac{dx}{dt} \in K(f(t, x)) \quad (3)$$

donde:

$$K(f(t, x)) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \text{conv}f(t, B(x, \delta) - N) \quad (4)$$

donde $\text{conv}f$ denota la función convexa, $B(x, \delta)$ es la función bola de radio δ, x y μ son la medida de Lebesgue. La notación \bigcap denota la intersección sobre todos los conjuntos de medida cero. Note que la definición anterior, para un $\delta > 0$ arbitrario, el vector $\frac{dx}{dt}$ pertenece a una función convexa que contiene todos los valores de $f(t, x)$, los rangos de x están en casi toda la vecindad δ del punto $x(t)$ (es decir, la vecindad entera excepto para los conjuntos de medida cero). La solución en una superficie discontinua donde $f(t, x)$ es discontinuo, es estudiada en detalle por Filippov [7]. S es una superficie discontinua que separa el espacio en las regiones G^+ y G^- . Suponemos que S es regular, para que pueda ser cortada por una función discontinua $S(x)$ es decir:

$$S = \{x : s(x) = 0\}$$

tal que $f(t, x)$ está limitada por las funciones $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$ que existen cuando se aproximan desde G^- hasta G^+ respectivamente.

Sea $f_0^-(f_0^+)$ la proyección normal de $f^-(f^+)$ donde la superficie S se dirige hacia G^+ . Entonces es absolutamente continua si $x(t) \in S$ satisfacen.

$$f_0^-(t, x(t)) \geq 0 \quad , \quad f_0^+(t, x(t)) \leq 0 \quad \text{y} \quad f_0^- - f_0^+ > 0$$

es decir, las trayectorias van hacia la superficie S ; por tanto, la ecuación estará de acuerdo con la definición previa si y solo si:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)f^+(t, x(t)) + (1 - \alpha(t))f^-(t, x(t)) \quad (5)$$

Donde $\alpha(t)$ es un escalar en $0 < \alpha(t) < 1$ es tal que el vector:

$$f_0 \equiv \alpha(t)f^+(t, x(t)) + (1 - \alpha(t))f^-(t, x(t))$$

El vector f_0 es tangente a la superficie S , tal como se muestra en la Figura 2 y el escalar α puede expresarse como:

$$\alpha(t) = \frac{\partial f_0^-(t, x(t))}{\partial f_0^-(t, x(t)) - \partial f_0^+(t, x(t))}$$

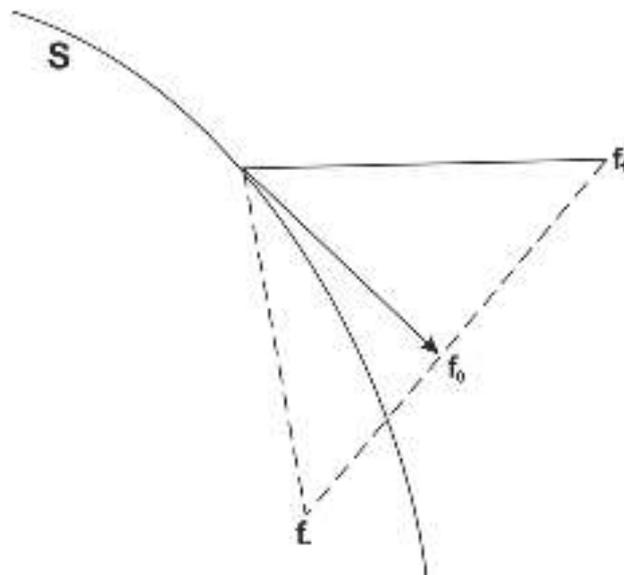


Figura 2: Construcción esquemática de Filippov.

Note que f_0^+ está dado por $f_0^+(t, x) = \nabla_S f^+(t, x)$ y similarmente para f_0^- , así mismo el término del lado derecho de la ecuación (5) es el ortogonal a ∇_S ; lo cual obliga a la solución quedarse en la superficie S . Entonces vemos que los valores en la vecindad de S , dados por (1), son la solución dinámica de la superficie deslizante S . Las condiciones $f_0^-(t, x(t)) \geq 0$ y $f_0^+(t, x(t)) \leq 0$, es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} S^2(x(t)) \leq -\eta |S| \quad (6)$$

donde η es estrictamente positiva. Esencialmente la ecuación (6) es el estado de la “distancia” elevada al cuadrado de la superficie, que decrece a lo largo de todas las trayectorias del sistema. La Figura 3 muestra que las trayectorias convergen hacia la superficie $S(t)$. Si integramos la ecuación (6) entre $t=0$ y $t=t_0$, donde t_0 es el tiempo que alcanza la superficie deslizante S , entonces:

$$0 - S(t=0) = S(t=t_0) - S(t=0) \leq -\eta(t_0 - 0)$$

Esto implica que:

$$t_0 \leq \frac{S(t=0)}{\eta}$$

Así obtendríamos un resultado similar si la ecuación (6) empieza con $S(t=0) < 0$

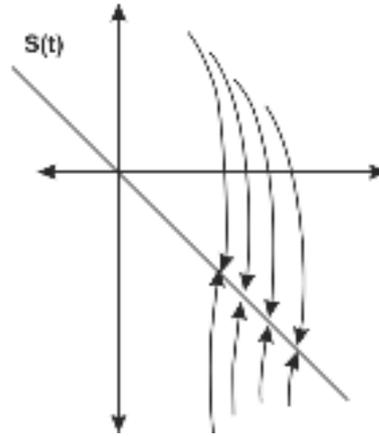


Figura 3: Condición de deslizamiento.

Control Fundamental por Modo Deslizante

Considere el sistema de control de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad , \quad x \in R^n \quad , \quad u \in R^m \quad (7)$$

tal que el sistema mostrado por la ecuación (7) es de estructura variable si el control u es continuo por partes y sus puntos de discontinuidad componen una colección discreta de superficies discontinuas en el espacio estado. En particular para cada coordenada del vector de control u asociamos un conjunto de funciones continuas con valores reales estimadas mediante:

$$\{u_i^+(t, x) \quad , \quad u_i^-(t, x) \quad , \quad S_i(x)\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

tal que el control u es:

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \text{para } S_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \text{para } S_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

El conjunto de superficies $S_i = \{x : S_i(x) = 0\}$ son superficies smooth llamadas superficies discontinuas. La intersección de un número arbitrario de funciones S_i las llamaremos superficies deslizantes siempre que sean asintóticamente estables con respecto a la dinámica (si atrae todos los movimientos que originan en una vecindad tubular).

El modo deslizante conduce a un movimiento de superficies deslizantes, cuya finalidad es evaluar el vector de la función $S : R^n \rightarrow R^m$, cuya n-ésima coordenada es $S_i(x)$ es referida usualmente como función de conmutación. La función de conmutación puede ser realizada dependiente del tiempo, es decir, $S(t, x)$, en tal caso las superficies de discontinuidad son vistas como conmutación en el plano fase (t, x) . Con este hecho nos permite suponer que la salida del sistema (7) es de la forma $y(t) = h(x(t))$ y el problema principal es encontrar una ley de control que haga que la salida a seguir sea una señal deseada $y_d(t)$. Según lo anterior, el problema de la síntesis involucra dos pasos [21], [15].

Primero, la selección de una función de conmutación S cuyos ceros comprenden una superficie con restricciones en la dinámica que conduce a un error $y(t) - y_d(t)$ asintóticamente a cero.

Segundo, el diseño de un control de conmutación (corresponde a buscar S) que haga que estos lugares sean puntos de una superficie deslizante. En tal caso, donde las entradas son lineales, el problema de determinar el movimiento deslizante se simplifica grandemente [20], es decir:

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u \quad (9)$$

Supongamos que para un tiempo t_0 , $x(t_0)$ se sitúa en la intersección de una superficie switching (es decir, $s(x(t_0)) = 0$) y que esta intersección en una superficie de deslizamiento, entonces si $G(x)$ es el gradiente de $S(x)$, se obtiene:

$$S = Gf + GBu$$

y suponiendo que GB es no singular, podemos resolver para la ley de control:

$$u_{eq} \cong GB^{-1}Gf \quad (10)$$

Donde u_{eq} es el control equivalente. Sustituyendo la ecuación (10) en (9) tendremos:

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf \quad (11)$$

La ecuación (11) describe la dinámica de la superficie de deslizamiento. Utkin [25] se refiere a este proceso como el método de control equivalente. El problema de seleccionar el control realimentado involucra un método jerárquico de diseño que normalmente se usa cuando cambian las superficies y a su vez están asociadas con el control de la trayectoria del sistema a ser controlado por modo deslizante en cada superficie. El segundo método de Lyapunov aplicado a las ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el semiplano derecho es utilizada para establecer estabilidad asintótica, la cual veremos a continuación.

Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales con Discontinuidades

Considerando una función con valores reales $g(x)$ definida para cualquier conjunto E y $x \in E$. El límite superior de $g(x)$ es el punto x , denotado por $M_x \{g(x)\}$, y se define:

$$M_x \{g(x)\} = \inf_{\mu N=0} \lim_{x_n \rightarrow x} \{g(x_n)\} \quad (12)$$

la solución de (1) se utiliza el siguiente lema de Filippov [7]:

Lema 1.- Lema de Filippov

La función de vector $x(t)$ es completamente continuo y es solución de (91) en el sentido de Filippov, si sólo sí para todo t y para cada vector v se cumple:

$$\frac{dx}{dy} v \leq M_x \{f(t, x)v\} \quad (13)$$

Considere ahora la función $V(t, x)$ continua y diferenciable de valores reales. Si $x(t)$ es la solución de (1) y $V(t, x(t))$ es una función absolutamente continua para t , entonces es derivable y existe para casi todo t y es igual a la siguiente ecuación:

$$\frac{dV}{dt} v = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \nabla_x V \quad (14)$$

El siguiente Lema emplea las técnicas de Filippov [7], que son esenciales para las consideraciones de estabilidad.

Lema 2.- Considere la ecuación (1) definida en el dominio de E . Sea $V(t, x)$ una función continua y diferenciable de valor real y $w(t, x)$ una función continua tal que:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + f(t, x) \nabla_x V(t, x) \leq w(t, x) \quad (15)$$

Para todo E , entonces si $x(t)$ es solución de (91) para todo t se cumple:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \nabla_x V \leq w(t, x(t)) \quad (16)$$

Prueba

Sea:

$$h(t, y) = f(t, y) \nabla_x V(t, x(t))$$

Por el Lema 1, se cumple para todo t , lo siguiente:

$$\frac{dx}{dt} \nabla_x V \leq M_x \{h(t, x)\} \quad (17)$$

La continuidad de $\nabla_x V$ implica para t lo siguiente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + M_x \{h(t, x)\} = \frac{\partial V}{\partial t} + M_x \{f(t, x) \nabla_x V(t, x) \leq w(t, x)\} \quad (18)$$

Una propiedad deseada para el diseño de control por modo deslizante es que las trayectorias del sistema controlado alcancen la superficie de deslizamiento en un tiempo finito. El teorema de estabilidad prueba las incorporaciones de este fenómeno.

Teorema 1 Suponga que el dominio E es positivo e invariante en el tiempo respecto a la dinámica de (1). Sea $g: E^m \rightarrow R$ y $V: R \times R^m \rightarrow R$ una función continua y diferenciable, tal que:

$$m_1 \|y\|^2 \leq V(t, y) \leq m_2 \|y\|^2 \quad (19)$$

Donde m_1 y m_2 son constantes positivas: Sea E_0 denotado por el conjunto $E_0 = \{(t, x) : g(t, x) = 0\}$ y se define $\Phi: E \rightarrow R$ para $\Phi(t, x) = V(t, g(t, x))$. Entonces para algún $k > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) + f(t, x) \nabla_x \Phi(t, x) \leq -kg(t, x) \quad (20)$$

Se sostiene que para todo E la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial (1) alcanza un conjunto E_0 fijo en un tiempo finito.

Prueba

Por el Lema 2, obtenemos para casi todo t :

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -k \|g(t, x(t))\|$$

Y por (109) se tiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq -k \left(\frac{\Phi}{m_2} \right)^{1/2} \quad (21)$$

Para todo t , vemos que $\Phi(t, x(t))$ y de $g(t, x(t))$ en (109), se vuelve cero después de un tiempo finito.

2.2.3 Control Óptimo Cuadrático

El objetivo del Control Óptimo es el de determinar una ley de control óptima u que minimice la función de costo J . La formulación de la función de costo o índice de rendimiento apropiado es muy importante, porque determina la naturaleza del control óptimo. En aplicaciones prácticas es importante considerar restricciones en la señal de control, para hacerlo físicamente realizable. Para aplicar el diseño

de control óptimo, el proceso debe ser completamente controlable y completamente observable [18], [21]. Si el proceso no es completamente observable, entonces se puede utilizar un observador óptimo que estime dichos estados.

La solución de un problema de control óptimo consiste en determinar el vector de control óptimo $u(k)$ que depende de:

- La naturaleza de la función de costo
- La naturaleza de las restricciones
- El estado inicial o la salida inicial
- El estado deseado o salida deseada
- Parámetros del sistema

En general, una solución analítica es muy complicada, por lo que debe libarse la computadora.

Regulador Óptimo Cuadrático Estacionario

Es de conocimiento general en el campo del Control Automático, que en el sistema de control óptimo cuadrático discreto no estacionario, la dinámica del sistema evoluciona hasta un tiempo finito, haciendo que la matriz de ganancia o matriz de ganancia de realimentación $K(k)$ se convierte en una matriz variante en el tiempo; mientras que en el control óptimo cuadrático estacionario, la dinámica de control evoluciona hasta un tiempo N infinito, por consiguiente, la ganancia $K(k)$ se convierte en una matriz constante K [18], [21]. La función de costo para el control óptimo estacionario de un sistema regulador es de la forma:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (22)$$

La ecuación de Riccati en estado estacionario es:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (23)$$

Una forma de resolver la ecuación de Riccati en estado estacionario es usar la ecuación de Riccati en estado no estacionario; pero con la inversión en la dirección del tiempo, como se presenta a continuación:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G \quad (24)$$

y comenzar la solución con $P(0) = 0$, usando este valor para calcular $P(1)$, y así sucesivamente hasta llegar a un tiempo discreto k para el cual $P(k) = P(k+1) = P(k+2) = \dots$. Obtenido P , usar esta matriz para calcular la matriz ganancia del controlador K , dada por:

$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (25)$$

La ley del regulador óptimo en estado estacionario está dada por:

$$u(k) = -Kx(k) \quad (26)$$

y la función de costo mínima es:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0) \quad (27)$$

El diagrama de bloques correspondiente se representa en la Figura 4, en donde se asume que todos los estados se encuentran disponibles.

El Controlador Óptimo Proporcional

El controlador óptimo proporcional es un sistema de control realimentado, en donde la salida controlada $y(k)$ sigue a una señal de referencia $r(k) = r$ (función escalón), es decir, estamos en el caso de un sistema de seguimiento. En esta sección se restringirá el tratamiento a sistemas univariados. Esta estructura solo es aplicable a procesos que poseen un comportamiento integral [18], [21].

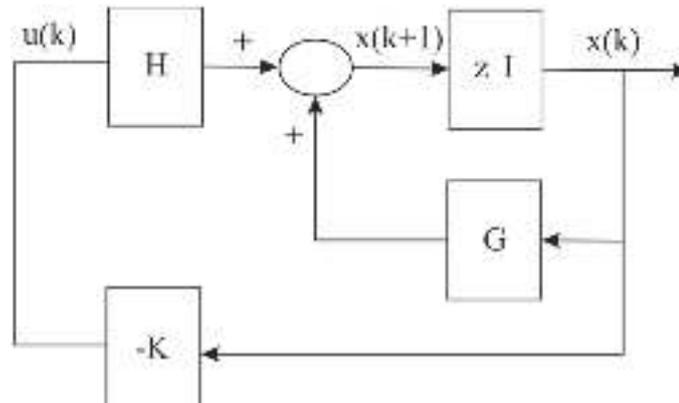


Figura 4: Sistema Regulator Optimo Discreto.

La figura 5 muestra el esquema de un controlador proporcional para la variable de estado $x_2(k)$, empleando una ley de control de retroalimentación de estados que involucra a la matriz de ganancia del controlador K , la referencia $r(k)$ y la señal de salida $y(k)$. Considerando como salida al estado $x_2(k)$ se obtiene la siguiente ley de control:

$$u(k) = -k_1x_1(k) - k_2x_2(k) - \dots - k_nx_n(k) + k_2[r(k) - x_2(k)] \quad (28)$$

$$u(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + k_2r(k) \quad (29)$$

$$u(k) = -Kx(k) + k_2r(k) \quad (30)$$

Reemplazando la ecuación (30) en la ecuación de estado de la planta en tiempo discreto, se obtiene:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (31)$$

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + Hk_2r(k) \quad (32)$$

Aplicando la transformada Z a la ecuación (32) se obtiene la siguiente solución de la ecuación de estado en términos de Z :

$$x(z) = (zI - G + HK)^{-1} Hk_2 r(z) \quad (33)$$

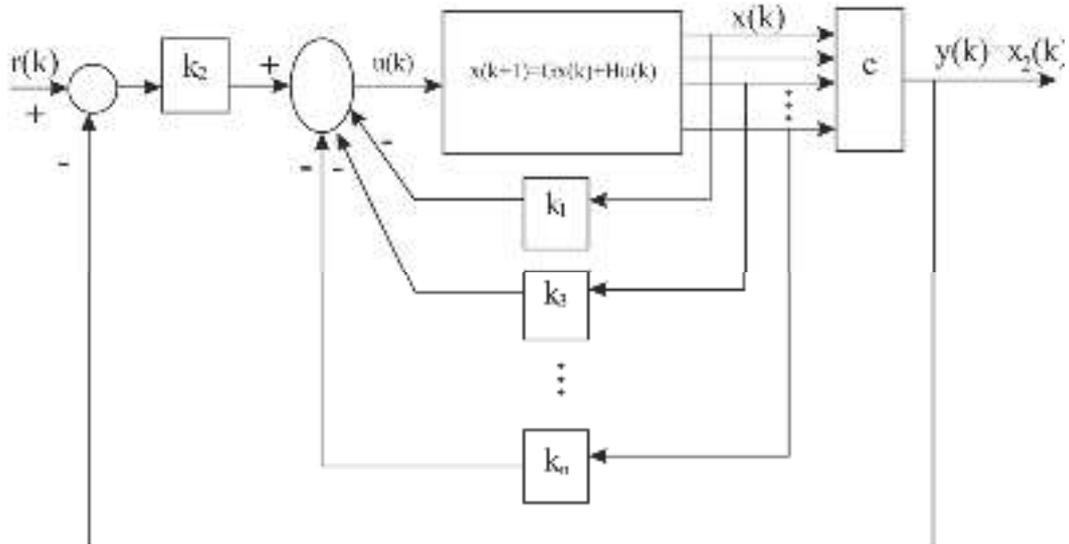


Figura 5: Esquema de un Sistema de Control Optimo Proporcional.

Reemplazando esta última ecuación en la expresión de la salida, tenemos:

$$y(z) = C(zI - G + HK)^{-1} Hk_2 r(z) \quad (34)$$

Para obtener la salida en estado estacionario como respuesta a una referencia escalón unitario, aplicamos la propiedad del valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} y(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = C(zI - G + HK)^{-1} Hk_2 \quad (35)$$

Para un perfecto seguimiento, la salida $y = 1$ (escalón unitario), condición que debe cumplirse si $C(zI - G + HK)^{-1} Hk_2 = 1$.

Las matrices de ponderación Q y R ponderan la importancia del vector de estados $x(k)$ y del vector de control $u(k)$ respectivamente.

El Controlador Óptimo Proporcional Integral

Este método es aplicable a procesos que no poseen propiedades integradoras, en tal sentido, la inclusión de un integrador en el sistema de control permite obtener un error estacionario nulo [3], [18], [21]. Incluso en el caso de procesos que tengan inherentemente un integrador, es conveniente incluir un integrador en el controlador proporcional, para asegurar error estacionario nulo no solamente para entradas escalón, sino, para trayectorias de referencia, frecuentemente usadas en sistemas de seguimiento. La Figura 6 ilustra un controlador óptimo proporcional integral para sistemas de una entrada y una salida (SISO).

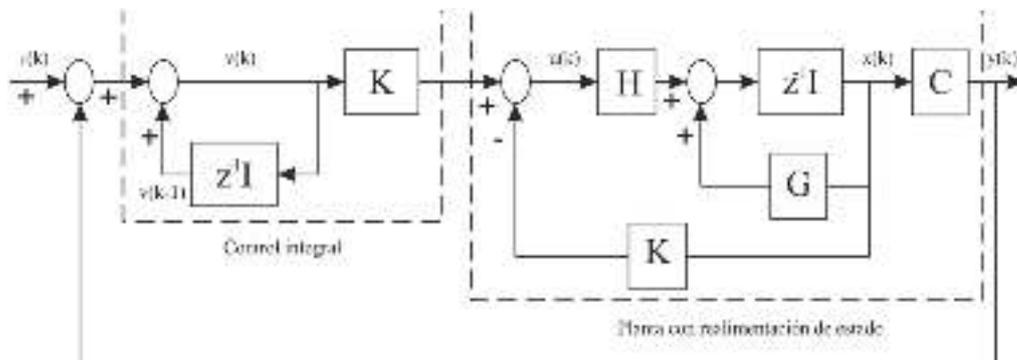


Figura 6: Esquema del Sistema de Control Óptimo Proporcional Integral.

Considerando la figura 6 se obtienen las ecuaciones de estado y de salida del proceso, expresadas por:

$$x(x+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (36)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k); \text{ con } D \text{ nulo} \quad (37)$$

Asimismo, la señal de control viene a ser:

$$u(k) = -Kx(k) + K_I v(k) \quad (38)$$

donde K es la matriz de ganancia del controlador, dada por:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n] \quad (39)$$

De dicha figura, podrá apreciarse que la ecuación para el integrador es:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (40)$$

Aplicando un corrimiento a la derecha a esta última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[Gx(k) + Hu(k)] \\ &= (1 - CHK_1)v(k) + (-CG + CHK)x(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (41)$$

Reemplazando la ecuación (38) en la ecuación (36) se obtiene:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + H[-Kx(k) + K_1v(k)] \\ &= (G - HK)x(k) + HK_1v(k) \end{aligned} \quad (42)$$

Usando las ecuaciones (41) y (42) se obtiene la siguiente ecuación de estado matricial:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_1 \\ -CG + CHK & 1 - CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (43)$$

La ecuación (37) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (44)$$

En estado estacionario, es decir cuando $k \rightarrow \infty$, los valores de $x(k)$, $u(k)$ y $v(k)$ toman valores invariantes $x(\infty)$, $u(\infty)$ y $v(\infty)$. Entonces, la ecuación (43) toma la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_1 \\ -CG + CHK & 1 - CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Si restamos la ecuación (45) de la ecuación (33) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_1 \\ -CG + CHK & 1 - CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Donde:

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty) \quad (47)$$

$$v_e(k) = v(k) - v(\infty) \quad (48)$$

Considerando nuevas asignaciones, la ecuación (46) puede ser reescrita como:

$$\zeta(k+1) = \tilde{G}\zeta(k) + \tilde{H}\omega(k) \quad (49)$$

Donde:

$$\omega(k) = -\tilde{K}\zeta(k); \quad \zeta(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix}; \quad \tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \quad (52)$$

En tal sentido, la función de costo vendrá definida por:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\zeta^T(k) \tilde{Q} \zeta(k) + \omega^T(k) \tilde{R} \omega(k) \right] \quad (53)$$

Podrá apreciarse que, al insertar un integrador, el orden del sistema de control aumenta en uno ($n+1$).

Finalmente, la ecuación de Riccati dada por (23) y la ecuación de la ganancia del controlador dada por (55) quedan reformuladas como:

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} \left[\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H} \right]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (54)$$

$$\tilde{K} = \left[\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H} \right]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (55)$$

El Observador Óptimo Cuadrático SISO

El requerimiento para el diseño e implementación de controladores en espacio de estado, es que los estados deben estar disponibles; sin embargo, cuando tan sólo se pueden medir en forma directa algunas de las variables del vector de estado, entonces es necesario estimar dicho vector de estado $x(k)$ [18], [21]. En el diseño del estimador u observador de estados discreto se calcula su matriz de ganancia K_e , que permite la obtención de la señal de control $u(k)$, donde:

K_e : matriz de ganancia de realimentación del observador con dimensión: $n \times r (n \times 1)$.

C : matriz de salida de dimensión $r \times n (1 \times n)$.

$\hat{x}(k)$: vector de estado estimado de dimensión n .

$\hat{y}(k)$: vector de salida estimado de dimensión $r (r = 1)$.

de donde se pueden escribir las siguientes ecuaciones del proceso

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (56)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (57)$$

y del observador

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - \hat{y}(k)] \\ &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - C\hat{x}(k)] \\ &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e C [y(k) - \hat{x}(k)] \end{aligned} \quad (58)$$

Ecuación de error del observador

Restando la ecuación (58) de la ecuación (56) se obtiene la siguiente ecuación de error del observador:

$$e(k+1) = [G - K_e C]e(k); \quad (59)$$

donde:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (60)$$

Ecuación característica del observador

La estabilidad del observador se determina resolviendo la siguiente ecuación característica:

$$|zI - G + K_e C| = 0 \quad (61)$$

debiendo verificarse lo siguiente:

Las raíces de la ecuación característica deben posicionarse dentro del círculo unitario para operación satisfactoria del observador.

K_e debe ser escogida apropiadamente para que el error tienda a cero.

El proceso debe ser completamente observable, condición que se consigue aplicando el criterio de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} C^T & G^T C^T & (G^T)^2 C^T & \dots & (G^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \quad (62)$$

Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati para el observador es:

$$P_e = Q_e + G P_e G^T - G P_e C^T [R_e + C P_e C^T]^{-1} C P_e G^T \quad (63)$$

Para determinar P_e aplicamos el mismo procedimiento empleado para calcular P , dada en la ecuación (23) pero con la inversión en la dirección del tiempo y efectuando las siguientes modificaciones:

$$G \rightarrow G^T; \quad H \rightarrow C^T; \quad K \rightarrow K_e^T$$

Obteniéndose:

$$P_e(k+1) = Q_e + G P_e(k) G^T - G P_e(k) C^T [R_e + C P_e(k) C^T]^{-1} C P_e(k) G^T \quad (64)$$

Matriz de ganancia K_e

Considerando las mismas modificaciones que para la ecuación de Riccati, obtenemos la matriz de ganancia del observador, que toma la siguiente forma:

$$K_e = [R_e + CP_e C^T]^{-1} CP_e G^T \quad (65)$$

Para el caso del observador de estados, las matrices de ponderación R_e y Q_e deben ser elegidas de tal forma que la respuesta del observador sea dos o tres veces más rápida en comparación con la respuesta del proceso. Generalmente para que esto ocurra, los elementos de R_e deben ser bastantes menores que los elementos de Q_e .

2.3 Conceptual

2.3.1 Modelado de la antena parabólica

El esquema aproximado del sistema de antena parabólica de comunicación satelital, que se considera para establecer el modelamiento matemático de la antena parabólica se muestra en la Figura 7.

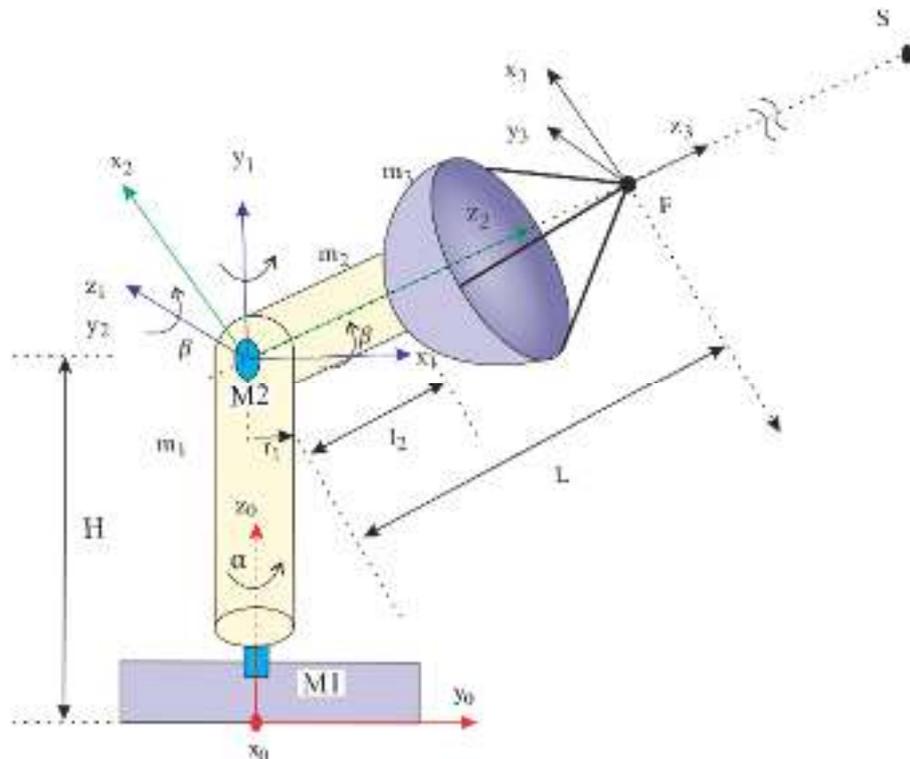


Figura 7: Esquema aproximado del sistema de antena parabólica de comunicación satelital.

Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

De la Figura 7 se puede observar la estructura de la antena parabólica a manera de un robot de dos grados de libertad, que está compuesta de:

- **El eslabón de masa m_1** : Es un cilindro hueco de longitud l_1 , de espesor delgado, de radio r_1 . Se supone que la masa está distribuida uniformemente a lo largo de su longitud y se encuentra rotando respecto del eje z_0 un ángulo α con el eje z_1 fijo en este eslabón.
- **El eslabón de masa $m_2 - m_3$** : Está formado por dos elementos, los cuales son:
 - **El elemento de masa m_2** : Es un elemento prismático de base cuadrada, de lado a y de longitud l_2 . Se considera que la masa está distribuida homogéneamente a lo largo de su longitud. Este elemento se encuentra formando una articulación con el elemento de masa m_1 , y gira un ángulo β respecto al elemento (en este caso el eslabón) m_1 alrededor del eje z_1 . En el otro extremo, a lo largo de su eje z_2 se encuentra soldado otro elemento de masa m_3 , que pasaremos a describir.
 - El elemento de masa m_3 : Es un sólido rígido, que es parte de un paraboloide con foco F , con un radio de abertura R , y cuyo vértice se encuentra soldado al elemento de masa m_2 . Se considera que el espesor de este paraboloide es muy delgado, y cuyo eje de direccionamiento z_2 está fijo. El paraboloide rota un ángulo β respecto al elemento m_1 , alrededor del eje z_1 . Se considerará, además de ser un sólido rígido de radio R y espesor pequeño; como un elemento de masa distribuida homogéneamente alrededor de su superficie.
- El foco F del paraboloide, es el punto de rotación del sistema respecto al eje de referencia fijo $x_0 y_0 z_0$, con el eje z_3 apuntando al satélite u

objetivo. Como se puede observar en la Figura 7, en este punto se encuentra el elemento transmisor/receptor.

Como se puede observar, el sistema en mención se parece a un manipulador robótico de dos grados de libertad, con la única particularidad que el segundo eslabón está conformado por los elementos de masa m_2 y m_3 . En tal sentido, se plantearán las ecuaciones que corresponden al modelo cinemático y dinámico del sistema robótico.

El objetivo del trabajo de tesis consiste en usar controladores avanzados que permitan controlar los ángulos de azimut (α) y de elevación (β), para apuntar a cualquier satélite ubicado en un punto S , desde el punto focal F en dirección del eje z_3 .

La Figura 7 se representa mediante un esquema simplificado, tal como se muestra en la Figura 8. En esta segunda figura se puede observar que el sistema de referencia $x_0y_0z_0$ de la base es fijo. Asimismo, el sistema de referencia $x_1y_1z_1$ corresponde al elemento 1 y rota junto a éste un ángulo α respecto al eje z_0 . Como se puede ver, el eje de referencia del sistema $x_1y_1z_1$ se encuentra a una distancia H del eje de referencia del sistema $x_0y_0z_0$ a lo largo del eje z_0 . El eje de referencia del sistema $x_2y_2z_2$ se encuentra fijado en un extremo del elemento 2, y rota junto con este un ángulo β respecto del eje z_1 . Como se puede ver, los centros de referencia de los sistemas $x_1y_1z_1$ y $x_2y_2z_2$ coinciden. Se vuelve a recalcar que el elemento de masa m_3 que lo dominamos elemento 3, está soldado (fijado) en su vértice a un extremo del elemento 2. El eje de referencia $x_3y_3z_3$ es paralelo al eje de referencia $x_2y_2z_2$; pero desplazado una distancia L desde el centro de referencia $x_2y_2z_2$, a lo largo del eje z_2 .

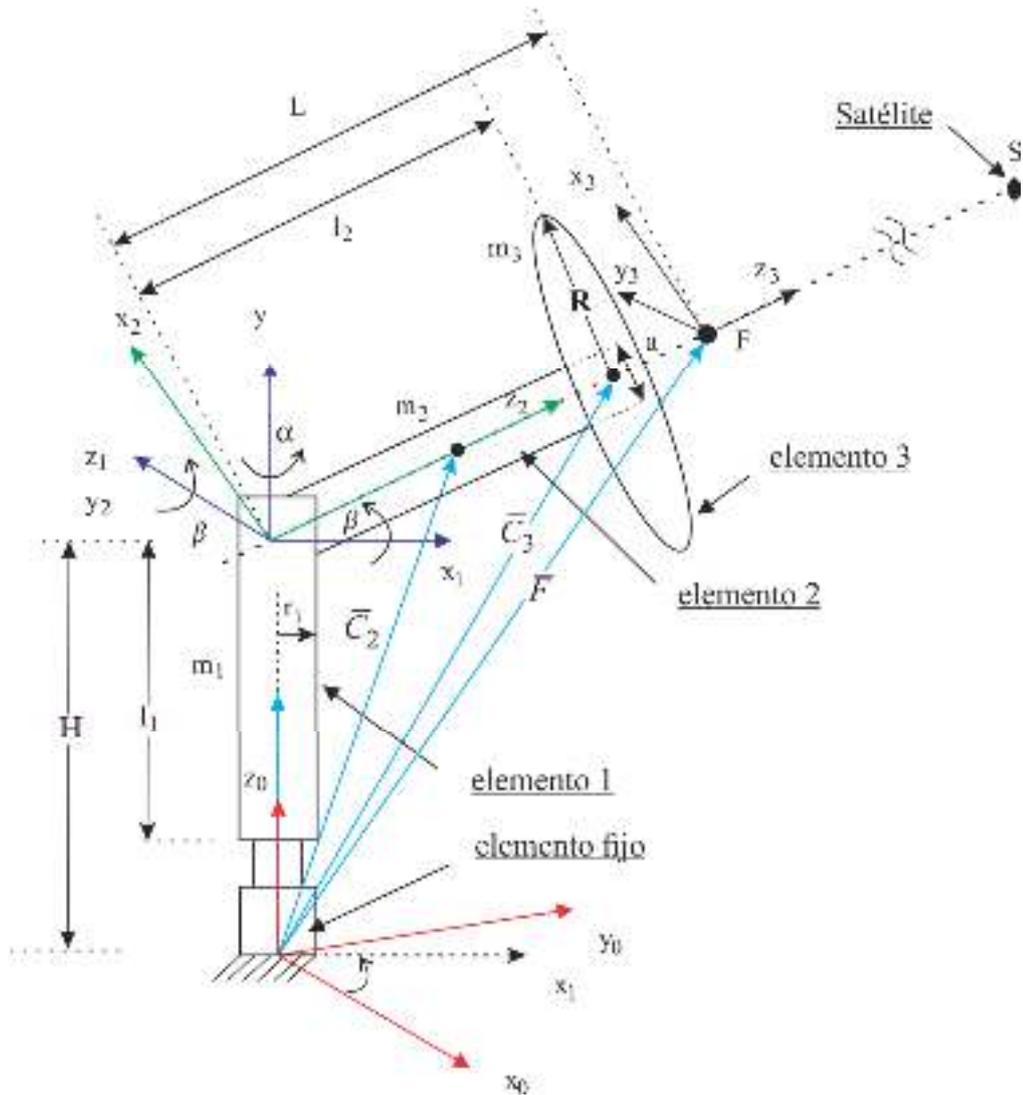


Figura 8: Esquema simplificado del sistema de antena parabólica de comunicación satelital.

Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

Llamaremos C_1 al centro de masa del elemento 1, y correspondientemente \vec{C}_1 al vector apuntando al punto C_1 desde el eje de referencia de la base x_0, y_0, z_0 .

Llamaremos C_2 al centro de masa del elemento 2, y correspondientemente \vec{C}_2 al vector apuntando al punto C_2 desde el eje de referencia del elemento 2.

Asimismo, llamaremos C_3 al centro de masa del elemento 3, y

correspondientemente \vec{C}_3 al vector apuntando al punto C_3 desde el eje de referencia del elemento 2. El vector \vec{F} apunta al punto focal F desde el centro del eje de referencia $x_0y_0z_0$.

Los ángulos de azimut (α) y de elevación (β) son datos referenciales de apuntamiento al satélite.

Modelo Cinemático

El modelo cinemático trata de la relación entre los valores de las variables asociadas a las articulaciones del robot (en nuestro caso un sistema de antena parabólica) y a la situación o localización (posición y orientación) de un sistema de referencia, solidario al sistema de antena parabólica, que se define teniendo en cuenta la tarea que se pretende desarrollar en el mismo. En el caso del sistema de antena parabólica, este sistema suele elegirse de tal modo que esté asociado al transmisor/receptor (que en un manipulador robótico sería el efector final), con lo cual se trata de estudiar la relación entre las variables articulares y la posición y orientación final con relación a la base del sistema de antena parabólica.

Según la representación de Denavit-Hartenberg, la matriz de transformación homogénea que relaciona el elemento i con el elemento $i-1$, está dado por:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Donde θ_i , a_i , d_i , α_i son los parámetros $D-H$ del eslabón i . C y S las funciones coseno y seno, respectivamente [1], [2], [10], [16].

Para el sistema de la antena parabólica, la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de referencia $x_0y_0z_0$ con el sistema de referencia de la base $x_0y_0z_0$, está dada por:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Donde $q_1 = \alpha$ (ángulo de azimut).

Idénticamente, la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de referencia $x_2y_2z_2$ con el sistema de referencia $x_1y_1z_1$, está dada por:

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Donde $q_2 = \beta$ (ángulo de elevación).

La matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de referencia $x_3y_3z_3$ con el sistema de referencia $x_2y_2z_2$, está dada por:

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

La matriz de transformación total que relaciona el sistema de referencia $x_3y_3z_3$ con el sistema de referencia de la base $x_0y_0z_0$, está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -\cos(q_1)\sin(q_2) & \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(q_2) & L\cos(q_1)\cos(q_2) \\ \sin(q_1)\sin(q_2) & -\cos(q_1) & \sin(q_1)\cos(q_2) & L\sin(q_1)\cos(q_2) \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & L\sin(q_2)+H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Modelo Dinámico

El modelo dinámico del sistema de antena parabólica se obtiene a partir de leyes físicas, que relacionan las causas y efectos, o a partir de ecuaciones de energía.

De acuerdo con esto, existen varios métodos para obtener la descripción dinámica de un manipulador. Las más utilizadas son las de Lagrange-Euler y Newton-Euler. La metodología de Lagrange-Euler permite obtener una ecuación diferencial estructurada cuyos términos tienen una interpretación física simple como: inercia del robot, fuerza de fricción, efecto de la gravedad, fuerzas centrífugas y de Coriolis; por su parte, la metodología de Newton-Euler produce una formulación recursiva de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del manipulador, lo cual no sólo facilita su implementación del algoritmo de control en el computador, sino que representa una mayor eficiencia computacional comparado con el método de Lagrange-Euler, particularmente cuando aumenta el número de ejes o de articulaciones del robot [1], [2], [3], [19].

Los sistemas dinámicos complejos se pueden modelar en forma directa mediante la formulación de Lagrange, que se basa en la noción de la energía total, en el movimiento de sus coordenadas generalizadas y en la aplicación de fuerzas generalizadas [1], [3], [5], [11] [19].

La ecuación de Lagrange $L(q, \dot{q})$ se define como la diferencia de la energía cinética total $E_c(q, \dot{q})$ y la energía potencial total $E_p(q)$ del sistema como sigue:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = E_c(q(t), \dot{q}(t)) - E_p(q(t)) \quad (71)$$

Donde:

L : Expresión de Lagrange en función de las variables generalizadas q y de sus derivadas \dot{q} .

E_c : Expresión de la energía cinética total del sistema.

E_p : Expresión de la energía potencial total del sistema.

En la Figura 9 se muestra un esquema general que permite deducir las energías cinética y potencial de cualquier cuerpo físico, donde los vectores referenciales se designan por:

- $\bar{C}_i(q)$: Vector desde el Sistema de referencia $x_0y_0z_0$ al centro de masa.

- $\Delta\bar{C}_i(q)$: Vector desde el Sistema de referencia $x_1y_1z_1$ al centro de masa.
- $\bar{P}_i(q)$: Vector desde el Sistema de referencia $x_0y_0z_0$ al sistema de referencia $x_1y_1z_1$ de la partícula i .

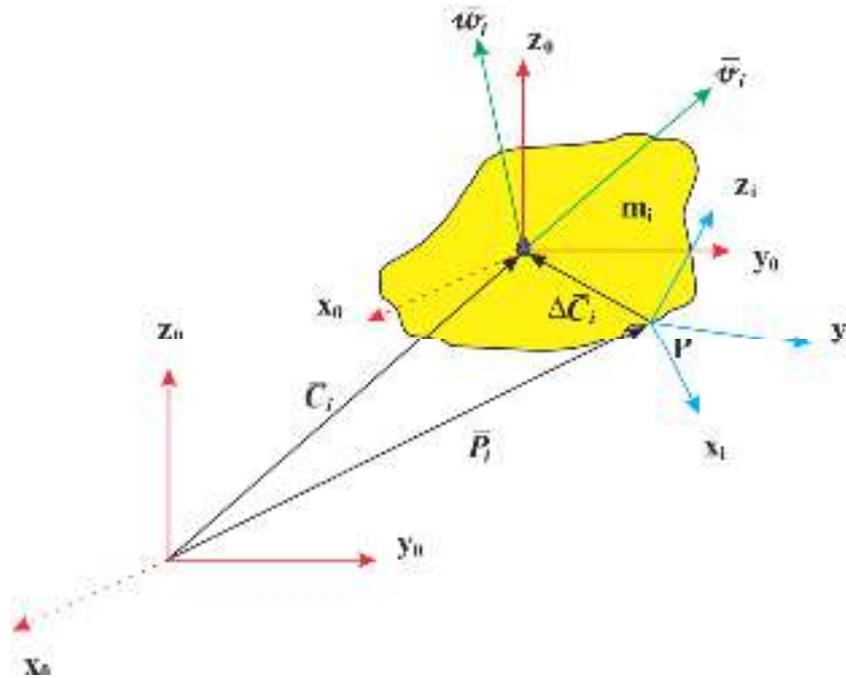


Figura 9: Diagrama general para determinar la energía cinética y potencial de una partícula i , elaboración propia.

• Energía Cinética

La energía cinética para n partículas se determina con la siguiente expresión:

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[(\bar{v}_i(q, \dot{q}))^T m_i \bar{v}_i(q, \dot{q}) + (\bar{w}_i(q, \dot{q}))^T \bar{D}_i(q) \bar{w}_i(q, \dot{q}) \right] \quad (72)$$

Donde:

m_i : Masa del i -ésimo enlace.

$\bar{D}_i(q)$: Tensor de inercia de la partícula i en su centro de masa, expresado respecto al sistema de referencia $x_0y_0z_0$.

$\bar{v}_i(q, \dot{q})$: Vector velocidad lineal del centro de masa del i-ésimo eslabón con respecto al sistema de referencia de la base $x_0y_0z_0$.

$\bar{w}_i(q, \dot{q})$: Vector velocidad angular relativa a su centro de masa del i-ésimo eslabón con respecto al sistema de referencia de la base $x_0y_0z_0$.

- **Energía Potencial**

La energía potencial para n partículas se determina con la siguiente expresión:

$$E(q) = -\sum_{i=1}^n m_i g^T \bar{C}_i(q) \quad (73)$$

donde:

g : Vector de la aceleración $g = (0 \ 0 \ g_0)^T$.

C_i : Vector desde el sistema de referencia $x_0y_0z_0$ al centro de masa.

La expresión general del movimiento dinámico para cada partícula queda expresada por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) = \tau_i - b_i(\dot{q}) \quad (74)$$

donde:

τ_i : Torque generalizado.

$b_i(\dot{q})$: Fricción opuesta al movimiento.

$$q = [q_1 \ q_2]^T = [\alpha \ \beta]^T$$

Para el sistema de antena parabólica, la expresión de las energías cinética y potencial se puede obtener evaluando elemento por elemento, usando las ecuaciones (72) y (73), y considerando la Figura 8 y la Figura 9. Veamos:

Para el elemento 1:

Energía Cinética para el elemento 1: Viene dada por la siguiente expresión:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} [(\bar{v}_1)^T m_1 \bar{v}_1 + (\bar{w}_1)^T \bar{D}_1 \bar{w}_1] \quad (75)$$

siendo:

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_1(l_1^2 + 6r_1^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1(l_1^2 + 6r_1^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 r_1^2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\bar{v}_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (77)$$

$$\bar{w}_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \dot{q}_1 \quad (78)$$

Entonces, evaluando la ecuación (84), se obtiene:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} [m_1 r_1^2] \dot{q}_1^2 = \frac{I_{zz} \dot{q}_1^2}{2} \quad (79)$$

Energía Potencial para el elemento 1: Viene dada por la siguiente expresión:

$$E_{p_1} = -m_1 g^T \bar{C}_1 \quad (80)$$

Siendo:

$$\bar{C}_1 = \left[0 \quad 0 \quad H \quad -\frac{l_1}{2} \right]^T \quad (81)$$

$$g^T = [0 \quad 0 \quad -g_0] \quad (82)$$

Para el elemento 2:

Energía Cinética para el elemento 2: Viene dada por:

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} \left[(\bar{v}_2)^T m_2 \bar{v}_2 + (\bar{w}_2)^T \bar{D}_2 \bar{w}_2 \right] \quad (83)$$

siendo:

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{m_2 [l_1^2 + a^2]}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 [l_1^2 + a^2]}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\bar{w}_2 = \left[\sin(q_1) \dot{q}_2 \quad -\cos(q_1) \dot{q}_2 \quad \dot{q}_1 \right]^T \quad (85)$$

Evaluando el segundo miembro de la ecuación, se obtiene la energía rotacional:

$$E_{cr_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 q_2 I_{xx} + \sin^2 q_2 I_{zz} & 0 \\ 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Asimismo, el vector \bar{C}_2 desde el sistema de referencia $x_0 y_0 z_0$ al centro de masa, viene dado por:

$$\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -\cos(q_1) \sin(q_2) & \sin(q_1) & \cos(q_1) \cos(q_2) \\ -\sin(q_1) \sin(q_2) & -\cos(q_2) & \sin(q_1) \cos(q_2) \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} \end{bmatrix}^T \quad (87)$$

que, operando se obtiene:

$$\bar{C}_2 = \left[\frac{l_2}{2} \cos(q_1) \cos(q_2) \quad \frac{l_2}{2} \sin(q_1) \cos(q_2) \quad \frac{l_2}{2} \sin(q_2) + H \right]^T \quad (88)$$

El cálculo de la energía cinética traslacional se obtiene del primer miembro de la ecuación (83) en función de la velocidad lineal \bar{v}_2 del centro de masa del elemento 2 respecto al sistema de referencia $x_2y_2z_2$. Dicha velocidad lineal se obtiene derivando \bar{C}_2 (de la ecuación 88) respecto de t , así:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{2x}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{2x}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial C_{2y}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{2y}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial C_{2z}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{2z}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (89)$$

que reemplazando $\bar{C}_2 = [C_x \quad C_y \quad C_z]^T$ en la ecuación (88), obtenemos:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_2 \sin q_1 \cos q_2}{2} & -\frac{l_2 \cos q_1 \sin q_2}{2} \\ \frac{l_2 \cos q_1 \cos q_2}{2} & -\frac{l_2 \sin q_1 \sin q_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2 \cos q_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$= \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_2 \sin q_1 \cos q_2}{2} \dot{q}_1 & -\frac{l_2 \cos q_1 \sin q_2}{2} \dot{q}_2 \\ \frac{l_2 \cos q_1 \cos q_2}{2} \dot{q}_1 & -\frac{l_2 \sin q_1 \sin q_2}{2} \dot{q}_2 \\ 0(\dot{q}_1) & \frac{l_2 \cos q_2}{2} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

La energía cinética traslacional queda representada por la siguiente expresión:

$$E_{ct} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{bmatrix} m_2 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \quad (92)$$

por lo que reemplazando la ecuación (91) en la ecuación (92) se obtiene:

$$E_{ct} = \frac{m_2}{2} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \begin{bmatrix} v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{bmatrix} m_2 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$E_{ct} = \frac{m_2}{2} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \text{Cos}^2 q_2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Reemplazando las ecuaciones (86) y (94) en (83) se obtiene la energía cinética en el elemento 2, así:

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \begin{bmatrix} m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \text{Cos}^2 q_2 + \text{Cos}^2 q_2 I_{xx} + \text{Sin}^2 q_2 I_{zz} & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Energía Potencial para el elemento 2. Viene dada por la siguiente expresión:

$$E_{p_2} = -m_2 \mathbf{g}^T \bar{C}_2 \quad (96)$$

Siendo:

$$\bar{C}_2 = \left[\frac{l_2}{2} \text{Cos}(q_1) \text{Cos}(q_2) \quad \frac{l_2}{2} \text{Sin}(q_1) \text{Cos}(q_2) \quad \frac{l_2}{2} \text{Sin}(q_2) + H \right]^T \quad (97)$$

Para el elemento 3:

Energía cinética para el elemento 3: Se obtiene siguiendo los mismos pasos que para el elemento 2, por lo que se obtendrá la siguiente expresión:

$$E_{c_3} = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \begin{bmatrix} m_3 (l_2)^2 \text{Cos}^2 q_2 + \text{Cos}^2 q_2 J_{xx} + \text{Sin}^2 q_2 J_{zz} & 0 \\ 0 & m_3 (l_2)^2 + J_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Donde analógicamente al elemento 2, los valores de \bar{C}_3 y \bar{D}_3 son:

$$\bar{C}_3 = \left[l_2 \text{Cos}(q_1) \text{Cos}(q_2) \quad l_2 \text{Sin}(q_1) \text{Cos}(q_2) \quad l_2 \text{Sin}(q_2) + H \right]^T \quad (99)$$

$$\bar{D}_3 = \begin{bmatrix} \frac{m_3 R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 R^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Energía Potencial para el elemento 3: Viene dada por la siguiente expresión:

$$E_{p3} = -m_3 g^T \bar{C}_3 \quad (101)$$

Siendo:

$$\bar{C}_3 = [l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \quad l_2 \sin(q_1) \cos(q_2) \quad l_2 \sin(q_2) + H]^T \quad (102)$$

La energía cinética total del sistema de antena parabólica viene dada por la suma de las energías cinéticas de los tres elementos, es decir:

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2} + E_{c_3} \quad (103)$$

y que, reemplazando las energías cinéticas de cada elemento, dadas por las ecuaciones (79), (99) y (98) en (103), se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Donde el tensor de inercia D viene a ser:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (105)$$

siendo:

$$d_{11} = m_1 r_1^2 + (I_{zz} + J_{zz}) \sin^2 q_2 + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) l_2^2 \cos^2 q_2 + (I_{xx} + J_{xx}) \cos^2 q_2 \quad (106)$$

que a su vez puede expresarse así:

$$d_{11} = d_{zz} + d_{zz} \cos^2 q_2 \quad (107)$$

Donde:

$$d_{zz} = m_1 r_1^2 + I_{zz} + J_{zz} = m_1 r_1^2 + m_2 \frac{a^2}{6} + m_3 \frac{R^2}{2} \quad (108)$$

$$d_{xz} = \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 - m_2 \frac{a^2}{12} - m_3 \frac{R^2}{4} \quad (109)$$

$$d_{12} = d_{21} = 0 \quad (110)$$

$$d_{22} = \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 - m_2 \frac{a^2}{12} - m_3 \frac{R^2}{4} \quad (111)$$

Por lo que D puede reescribirse de la siguiente manera:

$$D = \begin{bmatrix} d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2 & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Entonces la energía cinética total puede escribirse como:

$$E_c = \frac{1}{2} \left[(d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \dot{q}_1^2 + d_{22} \dot{q}_2^2 \right] \quad (113)$$

Asimismo, la energía potencial total E_p se puede encontrar a partir de la Figura 9, y considerando la ecuación (73) y las ecuaciones correspondientes a cada elemento (ya determinado), así:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = -m_1 g^T \bar{C}_1 - m_2 g^T \bar{C}_2 - m_3 g^T \bar{C}_3 \quad (114)$$

Reemplazando la ecuación (82) en la ecuación (114) y operando se encuentra:

$$E_p = \left[m_1 \left(H - \frac{l_1}{2} \right) + (m_2 H + m_3 H) + \left(m_2 \frac{l_2}{2} + m_3 l_2 \right) \sin q_2 \right] g_0 \quad (115)$$

El modelo dinámico del sistema se encuentra usando las ecuaciones (71), (75), (113) y (115), que conlleva a obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} (E_c(q, \dot{q}) - E_p(q)) - \frac{\partial}{\partial q_i} E(q, \dot{q}) \quad (116)$$

Siendo $q = [q_1 \ q_2]^T = [\alpha \ \beta]^T$; $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T = [\dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$

obteniéndose los siguientes componentes:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} E_c(q, \dot{q}) = (d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \dot{q}_1 \quad (117)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} E_c(q, \dot{q}) = d_{22} \dot{q}_2 \quad (118)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} E_c(q, \dot{q}) = (d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \ddot{q}_1 - d_{xz} \cos q_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (119)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} E_c(q, \dot{q}) = d_{22} \ddot{q}_2 \quad (120)$$

En forma idéntica, usando las ecuaciones (75), (113) y (115), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} L(q, \dot{q}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (E_c(q, \dot{q}) - E_p(q)) = \frac{\partial}{\partial q_1} E_c(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_1} E_p(q) = 0 \quad (121)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} L(q, \dot{q}) = \frac{\partial}{\partial q_2} E_c(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_2} E_p(q) \quad (122)$$

que procesando esta última ecuación (122) se obtienen las siguientes componentes:

$$\frac{\partial}{\partial q_2} E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} d_{xz} \cos^2 q_2 \dot{q}_1^2 = -d_{xz} \cos^2 q_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 \quad (123)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} E_p(q, \dot{q}) = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g_0 \cos q_2 \quad (124)$$

Reemplazando las ecuaciones (123) y (124) en (122) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial q_2} L(q, \dot{q}) = -d_{xz} \cos^2 q_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g_0 \cos q_2 \quad (125)$$

De las ecuaciones (119), (120), (121) y (125), conjuntamente con la ecuación (75), se obtiene el siguiente modelo dinámico del sistema:

$$(d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \ddot{q}_1 - 2d_{xz} \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_1(\dot{q}_1) = T_1 \quad (126)$$

$$d_{22} \ddot{q}_2 + d_{xz} \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g_0 \cos q_2 + b_2(\dot{q}_2) = T_2 \quad (127)$$

Considerando $b_1(\dot{q}_1) = b_1\dot{q}_1$; $b_2(\dot{q}_2) = b_2\dot{q}_2$ como los efectos de las fricciones en los ejes de rotación, y siendo T_1 y T_2 los torques generados por los motores y aplicados a las articulaciones q_1 y q_2 respectivamente, las ecuaciones (126) y (127) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$(d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \ddot{q}_1 - 2d_{xz} \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_1 \dot{q}_1 = T_1 \quad (128)$$

$$d_{22} \ddot{q}_2 + d_{xz} \cos q_2 \sin q_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g_0 \cos q_2 + b_2 \dot{q}_2 = T_2 \quad (129)$$

De las ecuaciones (128) y (129) podemos realizar el siguiente análisis físico:

El torque T_1 que actúa sobre el elemento 1 debe vencer el efecto inercial de las masas m_1 , m_2 y m_3 que depende de la posición angular β (factor $\cos^2 q_2$). Si $\beta = 0$ este efecto es máximo y si $\beta = \pi/2$, el efecto inercial es mínimo, dependiendo de la aceleración angular \ddot{q}_1 . Asimismo, está presente la influencia del acoplamiento de velocidades (factor $\dot{q}_1 \dot{q}_2$), consiguiéndose que si $\dot{q}_2 = 0$ este efecto de acoplamiento o también denominado efecto de Coriolis, desaparece. El efecto nulo también se consigue si $q_2 = 0, \pi/2, \pi, -\pi$, o sea depende de la posición angular de los elementos 2 y 3 (factor $\cos q_2 \sin q_2$). Asimismo, deberá vencer el efecto de la fricción $b_1 \dot{q}_1$.

El torque T_2 que actúa sobre los elementos 2 y 3, se vence el efecto inercial de estos elementos (factor d_{22}) independientemente de la posición angular q_2 ; pero está afectado por la fuerza centrífuga del elemento 1 (factor \dot{q}_1^2) dependiendo de la posición angular en que se encuentre (factor $\cos q_2 \sin q_2$). Asimismo, debe vencer el efecto de la fricción que se opone al movimiento, pudiendo ser pequeño si es que los ángulos α y β rotan a baja velocidad; sin embargo, el efecto

gravitatorio será el que más influya, debido a la gravedad g_0 , dependiendo de la posición de q_2 ; por lo que será nulo, cuando $q_2 = \pi/2, -\pi/2$; y será máximo cuando $q_2 = 0, \pi$.

Linealización y Discretización

Antes de proceder a la linealización, reescribamos nuevamente las ecuaciones no lineales que representa el comportamiento dinámico de la antena parabólica:

$$(d_{zz} + d_{xz} \cos^2 q_2) \ddot{q}_1 - 2d_{xz} \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_1 \dot{q}_1 = T_1 \quad (130)$$

$$d_{22} \ddot{q}_2 + d_{xz} \cos q_2 \sin q_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g_0 \cos q_2 + b_2 \dot{q}_2 = T_2 \quad (131)$$

Cada una de las ecuaciones diferenciales es de orden 2, lo que significa que el orden total es 4, por consiguiente, tendremos 4 variables de estado, los cuales son:

$$x_1 = q_1$$

$$x_2 = q_2$$

$$x_3 = \dot{q}_1$$

$$x_4 = \dot{q}_2$$

En este trabajo de Tesis, se considera que las señales de control y de entrada al sistema son los torques T_1 y T_2 ; por lo que deberá considerarse la ecuación dinámica de cada motor.

Las variables de salida pueden expresarse como:

$$y_1 = q_1 = \alpha$$

$$y_2 = q_2 = \beta$$

Por lo tanto, las ecuaciones de estado no lineales serán:

$$\dot{x}_1 = x_3 \rightarrow f_1(x, u) \quad (132)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \rightarrow f_2(x, u) \quad (133)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{2d_{xz} \cos(x_2) \sin(x_2) x_3 x_4 - b_1 x_3 + T_1}{d_{zz} + d_{xz} \cos^2(x_2)} \rightarrow f_3(x, u) \quad (134)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-d_{xz} \cos(x_2) \sin(x_2) x_3^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \cos(x_2) b_2 x_4 + T_2}{d_{22}} \rightarrow f_4(x, u) \quad (135)$$

Linealización

La linealización del sistema de ecuaciones no lineales, comprende la determinación de las matrices jacobianas A , B , C y D , evaluadas alrededor de los puntos de equilibrio o puntos de operación \bar{X} . Asimismo, será necesario conocer el vector de control \bar{U} , correspondiente al vector de estado en el punto de operación \bar{X} [14], [17], [18], [24].

Para tal fin, hagamos cero la parte izquierda de las ecuaciones no lineales denominadas $f_1(x, u)$, $f_2(x, u)$, $f_3(x, u)$ y $f_4(x, u)$, así:

$$0 = \bar{x}_3 \quad (136)$$

$$0 = \bar{x}_4 \quad (137)$$

$$0 = \frac{2d_{xz} \cos(\bar{x}_2) \sin(\bar{x}_2) \bar{x}_3 \bar{x}_4 - b_1 \bar{x}_3 + \bar{T}_1}{d_{zz} + d_{xz} \cos^2(\bar{x}_2)} \quad (138)$$

$$0 = \frac{-d_{xz} \cos(\bar{x}_2) \sin(\bar{x}_2) \bar{x}_3^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \cos(\bar{x}_2) b_2 \bar{x}_4 + \bar{T}_2}{d_{22}} \rightarrow f_4(x, u) \quad (139)$$

De la ecuación (138), se obtiene $\bar{T}_1 = 0$ y de la ecuación (139) se obtiene que

$$\text{Cos}(\bar{T}_2) = \frac{1}{\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \text{Cos}(\bar{x}_2)} \bar{T}_2 \quad (140)$$

Si $\bar{T}_2 = 0 \rightarrow \text{Cos}(\bar{x}_2) = 0 \rightarrow \bar{X}_2 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Determinemos las matrices jacobianas en función de \bar{x}_2 , así:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_1} & \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_2} & \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_3} & \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_4} \\ \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_1} & \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_2} & \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_3} & \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_4} \\ \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_1} & \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_2} & \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_3} & \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_4} \\ \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_1} & \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_2} & \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_3} & \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{X}_4} \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{b_1}{d_{zz} + d_{xz} \text{Cos}^2(\bar{x}_2)} & 0 \\ 0 & \frac{\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \text{Sin}(\bar{x}_2)}{d_{22}} & 0 & -\frac{b_2}{d_{22}} \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_1} & \frac{\partial f_1(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_1} & \frac{\partial f_2(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_2} \\ \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_1} & \frac{\partial f_3(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_2} \\ \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_1} & \frac{\partial f_4(\bar{X}, \bar{T})}{\partial \bar{T}_2} \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{d_{zz} + d_{xz} \text{Cos}^2(\bar{x}_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} \end{bmatrix} \quad (144)$$

Las matrices C y D son lineales, y vienen a ser:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (146)$$

Si consideramos $\bar{X}_2 = +\frac{\pi}{2} \rightarrow$ El sistema de antena parabólica será estable.

Si consideramos $\bar{X}_2 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ El sistema de antena parabólica será inestable.

Sin embargo, no interesa si el sistema a controlar sea estable o inestable; sino que dicho sistema sea controlable, que es la condición principal para diseñar algún método de control.

Finalizaremos esta sección, anotando que el sistema linealizado tiene la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad \text{con } u = T \quad (147)$$

$$y = Cx + Du \quad (148)$$

Efectuando la siguiente asignación:

$$a_{33} = -\frac{b_1}{d_{zz} + d_{xz} \text{Cos}^2(\bar{x}_2)}$$

$$a_{42} = \frac{\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \text{Sin}(\bar{x}_2)}{d_{22}}$$

$$a_{44} = -\frac{b_2}{d_{22}}$$

$$b_{31} = \frac{1}{d_{zz} + d_{xz} \text{Cos}^2(\bar{x}_2)}$$

$$b_{42} = \frac{1}{d_{22}}$$

Las matrices A y B pueden reescribirse así:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \quad (150)$$

Considerando $\bar{X}_2 = -\frac{\pi}{2}$, las matrices A y B serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -0.0019 & 0 \\ 0 & -9.0395 & 0 & -0.0099 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1864 & 0 \\ 0 & 0.0658 \end{bmatrix}$$

Discretización

La Discretización del sistema de la antena parabólica linealizado, comprende la obtención de un sistema equivalente, que pueda ser procesada por un

Computador, un Microcontrolador o un Procesador Digital de Señales (DSP). El sistema discretizado deberá tener la siguiente representación [21], [22]:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k); \quad \text{con } u = T \quad (151)$$

$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \quad (152)$$

Las matrices G y H pueden obtenerse mediante las siguientes expresiones:

$$G = e^{AT_s} \quad (153)$$

Siendo T_s el periodo de muestreo.

$$H = \left(\int_0^{T_s} e^{At} dt \right) B \quad (154)$$

mientras que las matrices de salida y de transmitancia en tiempo discreto son las mismas que las de tiempo continuo, es decir $C_d = C$ y $D_d = D$.

2.3.2 Control por Modo Deslizante Multivariable para la antena parabólica

Consideremos la dinámica del sistema de la antena parabólica de dos grados de libertad, podemos formular una ecuación lagrangiana descrita por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = -M^{-1} \left(P \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + Q \right) + M^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (155)$$

donde el vector de estado x viene a ser $x = [q_1 \quad q_2]^T$. Podemos modificar la ecuación dinámica (155) por la siguiente ecuación de estado:

$$\ddot{x} = -M^{-1} (P\dot{x} + Q) + M^{-1}u \quad (156)$$

Implementación de la Ley de Control

Las condiciones u_i^+ y u_i^- aseguran convergencia de todas las trayectorias a la intersección de las superficies de conmutación puede expresarse en una forma más conveniente:

$$\begin{cases} u_i^+ = (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i + \bar{u}_i^+ \\ u_i^- = (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i + \bar{u}_i^- \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (157)$$

Donde \hat{u}_{eq} es el estimado de u_{eq} y \hat{P} es el estimado de P . Con esta propiedad de control, nosotros debemos escoger \bar{u}_i^+ y \bar{u}_i^- según:

$$\bar{u}_i^+ + \epsilon \leq (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i \leq \bar{u}_i^- - \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que satisface (157).

Si escogemos K_i de modo que:

$$K_i \geq |(\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i| + \epsilon$$

entonces con $\bar{u}_i^- = K_i$ y $\bar{u}_i^+ = -K_i$ las desigualdades anteriores están satisfechas y además se obtiene:

$$u_{oi} = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-) = (\hat{u}_{eq} - \hat{P}S)_i \quad (158)$$

y

$$U = \text{diag}[K_i]$$

de esta forma, se busca u_i^+ y u_i^- . En síntesis, el control consiste en una estimación continua de $u_{eq} - PS$ y un término discontinuo que tienda a poner a cero la estimación de $u_{eq} - PS$.

2.3.3 El Controlador Optimo Multivariable Proporcional Integral para la antena parabólica

En esta sección se tratará del diseño del controlador óptimo multivariable proporcional integral para el sistema de antena parabólica. El esquema del sistema de control es el mismo que ara el proceso SISO tratado en la sección 2.2.3, con la diferencia que al tratarse de un proceso MIMO, se deben tener presente las siguientes consideraciones:

- $r(k)$ es un vector de referencia de orden r
- $u(k)$ es un vector de control de orden m
- $x(k)$ es un vector de estados de orden n
- $y(k)$ es un vector de salida de orden r
- G es una matriz de estados de dimensión $n \times n$
- H es una matriz de control de dimensión $n \times m$
- C es una matriz de salida de dimensión $r \times n$
- D es una matriz de transmisión directa de dimensión $r \times m$
- donde $n=4$ (número de variables de estado), $r=2$ (número de salidas del proceso), $m=2$ (número de entradas al proceso).

El Observador Óptimo Cuadrático MIMO

Las ecuaciones del observador óptimo cuadrático MIMO son las mismas que para el caso SISO, con las siguientes consideraciones:

K_e es una matriz de ganancia del observador de dimensión $n \times r$

P_e es una matriz simétrica definida positiva de dimensión $n \times n$

En consecuencia, reescribimos las ecuaciones que gobiernan la dinámica del observador MIMO:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(k+1) &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - \hat{y}(k)] \\
 &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - C\hat{x}(k)] \\
 &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e C [y(k) - \hat{x}(k)]
 \end{aligned} \tag{159}$$

$$e(k+1) = [G - K_e C]e(k); \tag{160}$$

$$|zI - G + K_e C| = 0 \tag{161}$$

$$P_e(k+1) = Q_e + GP_e(k)G^T - GP_e(k)C^T [R_e + CP_e(k)C^T]^{-1} C_e P(k)G^T \tag{162}$$

$$K_e = [R_e + CP_e C^T]^{-1} CP_e G^T \tag{163}$$

2.4 Definición de términos básicos

Las siguientes definiciones nos ayudarán a fundamentar la propuesta de la investigación:

- **Técnica.** - Es un conjunto de reglas y operaciones para el manejo de los instrumentos que auxilia al individuo en la aplicación de los métodos.
- **Estrategias.** - Son acciones propias del investigador para obtener lo que necesita para su investigación.
- **Procesos.** - Los procesos son mecanismos de comportamiento que diseñan los hombres para mejorar la productividad de algo, para establecer un orden o eliminar algún tipo de problema.
- **Grados de libertad.** - El número de movimientos independientes que realiza un sistema.
- **Discretización.** - Transformar un proceso continuo en discreto.
- **Linealización.** – Procedimiento en el cual se aplica el álgebra lineal para llevar el modelo no lineal a su equivalente lineal.
- **SISO (Single Input/ Single Output).**- Se refiere a sistemas de una entrada y una salida.
- **MIMO (Multiple Input/ Multiple Output).**- Se refiere a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis general

El diseño de técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante, permitirá controlar con precisión razonable los ángulos de azimut y de elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.

3.1.2 Hipótesis específicas

Hipótesis específica 1: La obtención del modelo matemático del sistema antena parabólica de comunicación satelital y su simulación, permitirá apreciar su comportamiento.

Hipótesis específica 2: La aplicación del Control Óptimo Cuadrático, permitirá controlar los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica de comunicación satelital con precisión razonable.

Hipótesis específica 3: La aplicación del Control Deslizante, permitirá controlar los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica de comunicación satelital con precisión razonable.

3.2 Definición conceptual de variables

Relacionando las variables relevantes que intervienen en el presente problema objeto de estudio, que conllevan a la explicación, demostración y comprobación de la formulada hipótesis, se han identificado las siguientes variables:

- **Variables Independientes (X).** - Variables de control o, de entrada, está determinada por las señales de:
 - ✓ Control Óptimo Cuadrático y
 - ✓ Control Deslizante.
- **Variables dependientes (Y).** - El sistema cuenta con dos grados de libertad representados por:
 - ✓ ángulo de azimut y
 - ✓ ángulo de elevación

3.3 Operacionalización de variables

Para demostrar y comprobar la Hipótesis formulada, procedemos a realizar el proceso metodológico que consiste en descomponer deductivamente las variables que componen el problema de investigación, partiendo desde lo más general a lo más específico, como se muestra en la Tabla 1.

Variables	Dimensiones	Indicadores	Escala medición
Variable Independiente X: algoritmos de control Óptimo Cuadrático y Deslizante	X.1 Obtención de las leyes de control	Componentes del sistema de control	Cualitativo
	X.2. Medida de la acción de control	Valor observable	Voltaje
	X.3. Limitación de la acción de control	Grado de actuación apropiado	Voltaje
Variable dependiente Y: ángulos de azimut y elevación	Y.1 Medida del ángulo de azimut	Medida estimada	Grados sexagesimales.
	Y.2. Medida del ángulo de elevación	Medida estimada	Grados sexagesimales.
	Y.3. Medidas angulares de movimiento simultaneo	Medidas estimadas	Grados sexagesimales.

Tabla 1: Vectores de estado del sistema.

Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación

El presente trabajo, es una investigación científica, que corresponde a una investigación de tipo básico y transversal, por lo que se utilizan las teorías de: Control Óptimo Cuadrático y Control Deslizante, que nos permite diseñar los controladores adecuados para el sistema antena parabólica.

4.1.1 Simulación del modelo de la Antena Parabólica de Comunicación Satelital

En esta subsección se presentarán los resultados de la simulación de los modelos no lineal y linealizado de la antena parabólica de comunicación satelital.

Simulaciones del sistema No lineal

Considerando las ecuaciones de estado no lineales (132) a (135), obtenidas en la subsección 2.3.1 y ejecutando el programa *anteparnolin m* listado en el Anexo B, se obtienen los resultados gráficos mostrados en las figuras 10 hasta 15, frente a torques de excitación, asumidos como: $T_1 = 0.35N.m$ y $T_2 = 8.381N.m$.

Los valores de los ángulos de azimut y elevación a ser considerados para efectos de control, van a depender de la ubicación de la antena y el satélite. Podríamos considerar el siguiente rango práctico:

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

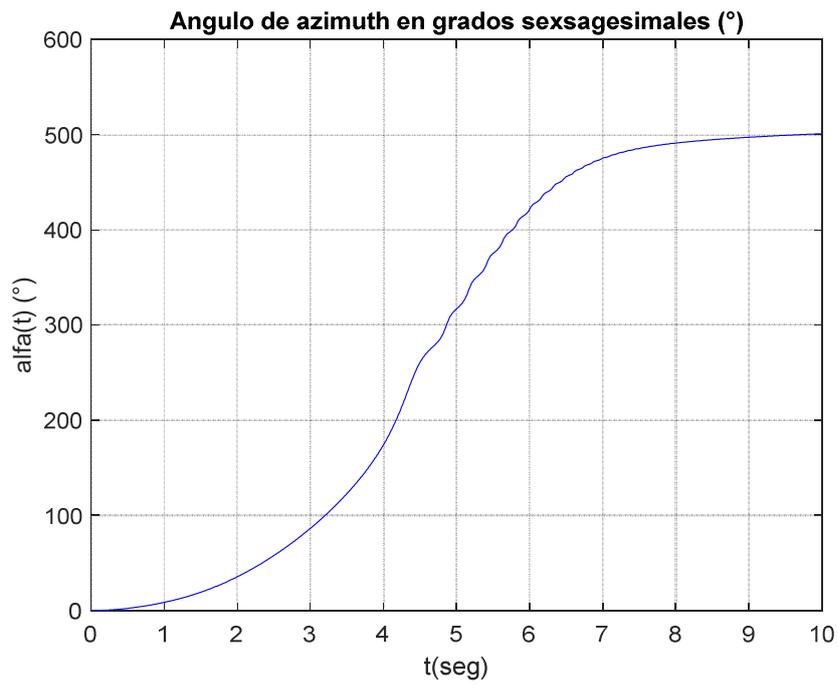


Figura 10: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.

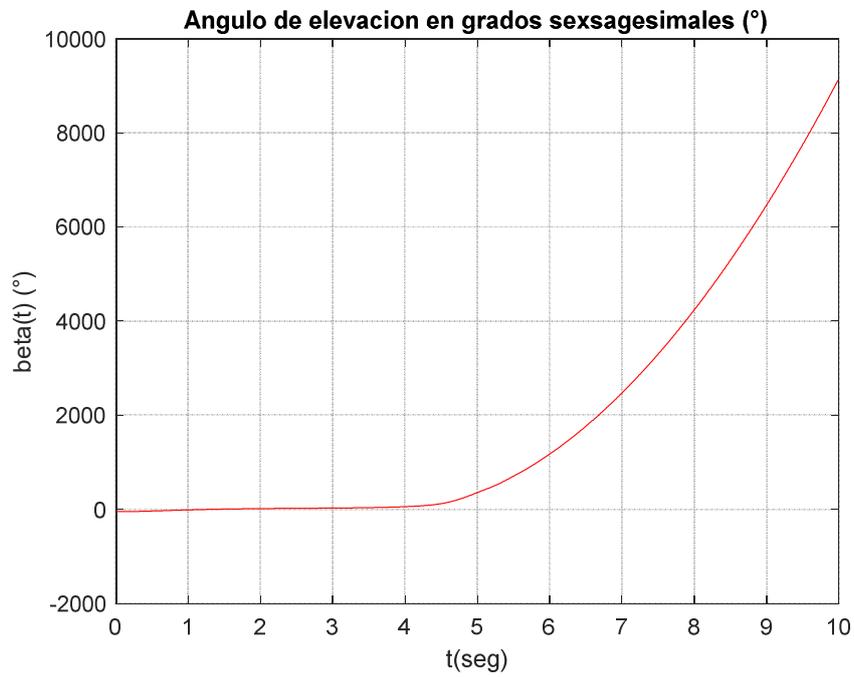


Figura 11: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

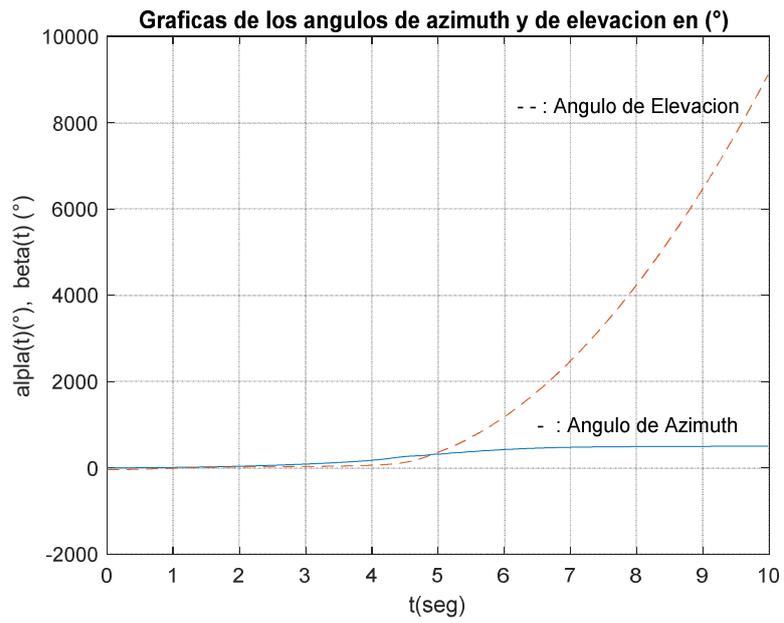


Figura 12: Gráfica de los ángulos de Azimut y Elevación en grados sexagesimales.

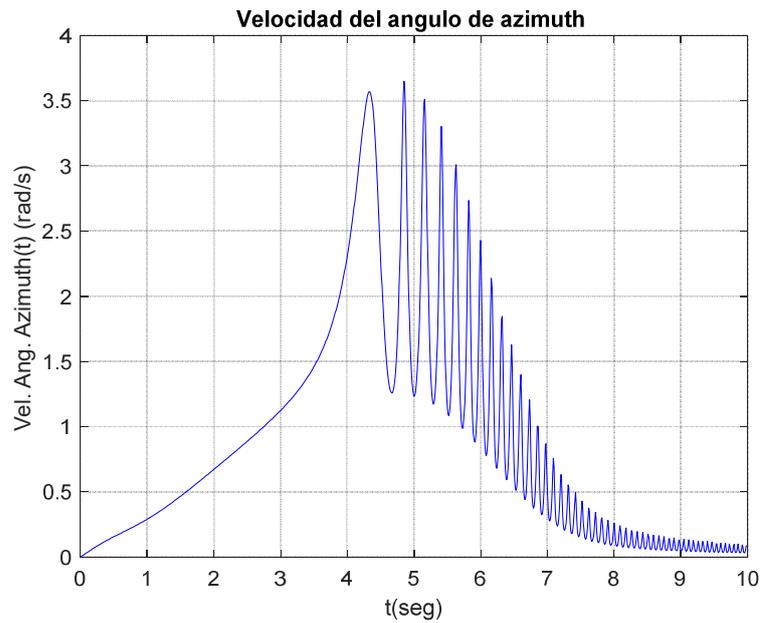


Figura 13: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.

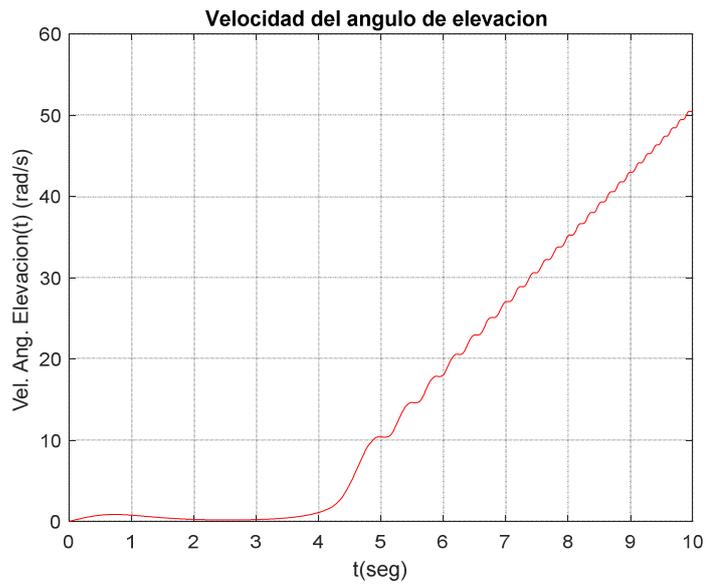


Figura 14: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.

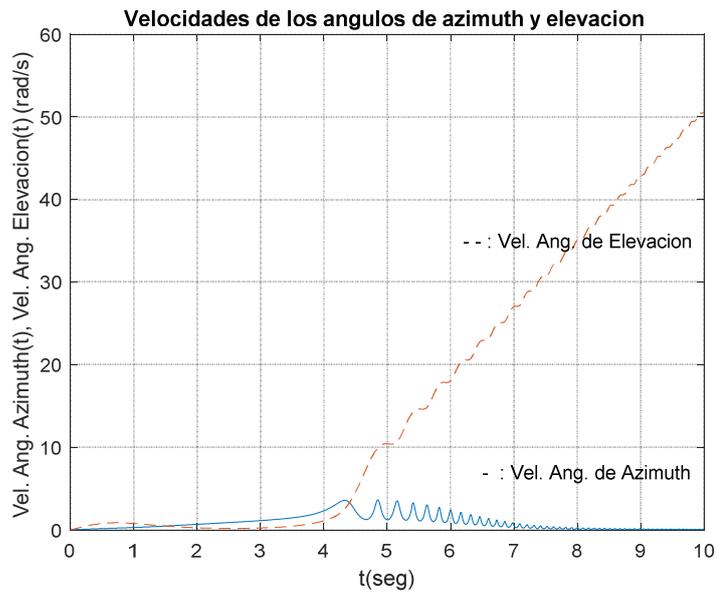


Figura 15: Gráfica de las Velocidades de los ángulos de Azimut y Elevación en rad/s.

Como se puede observar de los resultados gráficos mostrados, los valores de posición angular, tanto para los de azimuth y elevación, muestran cantidades que exceden los rangos de variación considerados, debido a que sólo estamos

graficando la respuesta del modelo del sistema a entradas de torque de tipo escalón de magnitudes ya indicadas, es decir, es una respuesta a lazo abierto sin la presencia del controlador.

Simulación del sistema linealizado

Considerando las ecuaciones del sistema linealizado dadas por las ecuaciones (147) y (148) en tiempo continuo, así como las ecuaciones (151) y (152), obtenidas en la subsección 2.3.1 y ejecutando el programa en código Matlab denominado *anteparlin* (ver Anexo B), permite obtener los resultados gráficos del modelo de la antena parabólica linealizada, en tiempo continuo y en tiempo discreto, tal como pueden apreciarse en las figuras 16 hasta 23.

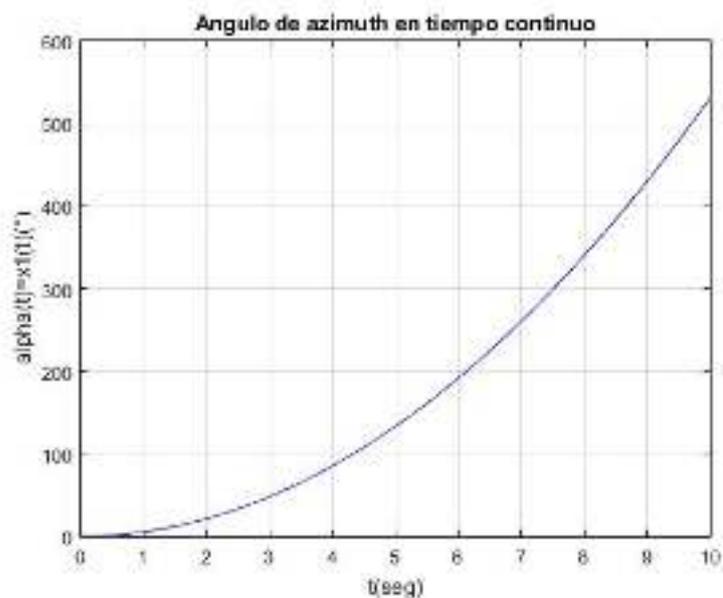


Figura 16: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.

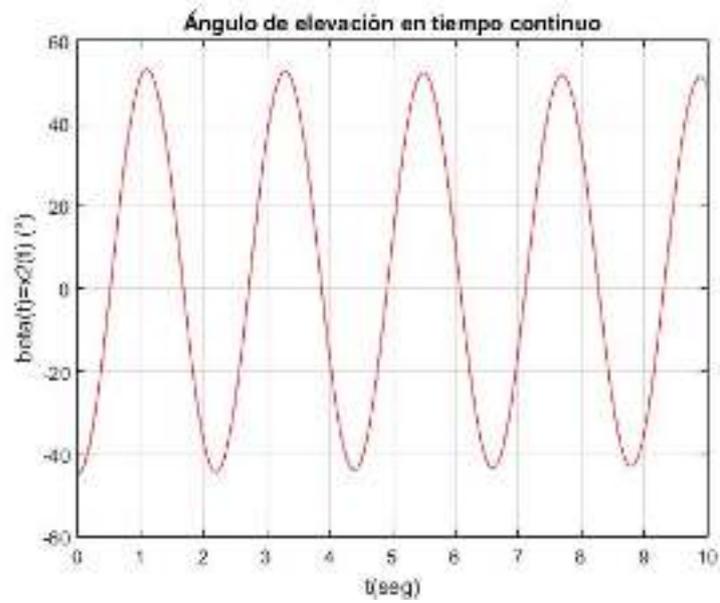


Figura 17: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

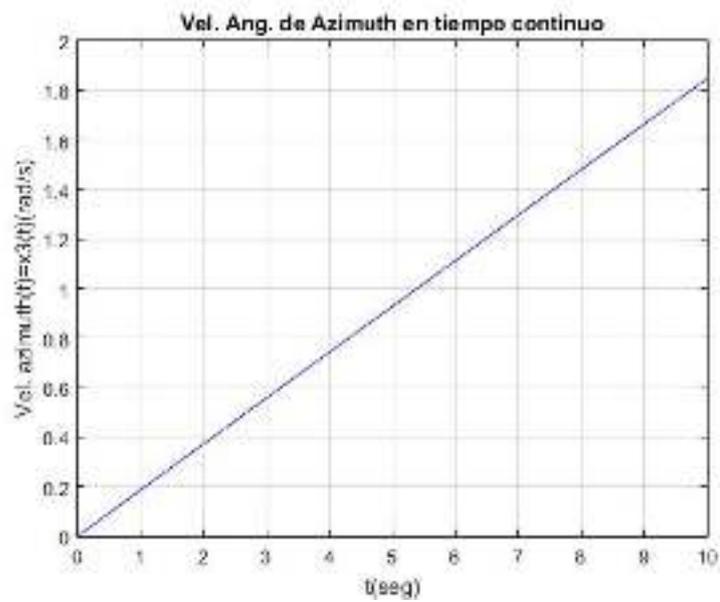


Figura 18: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

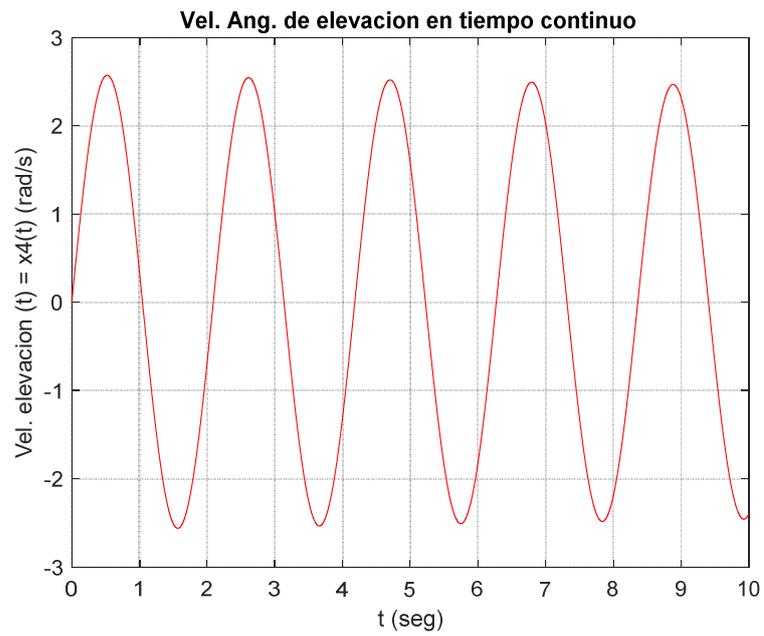


Figura 19: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.

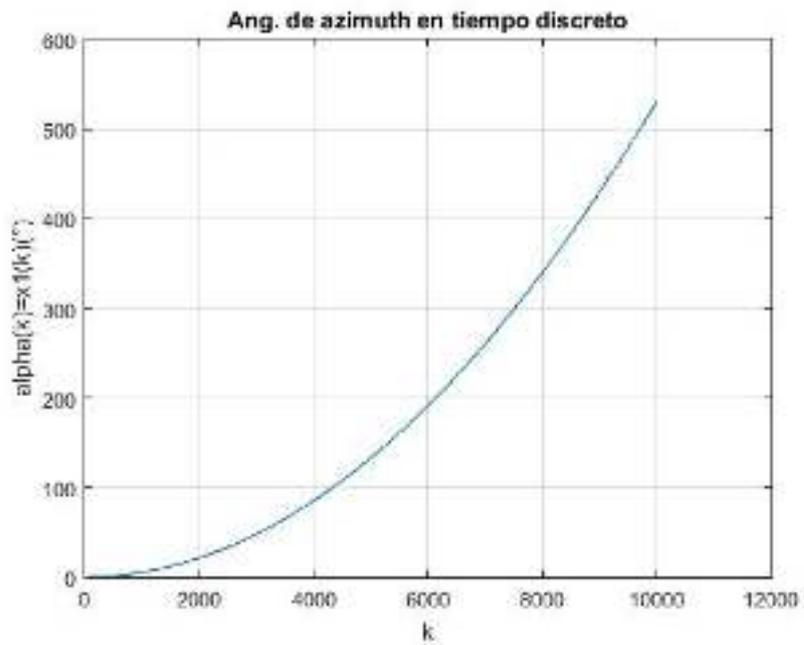


Figura 20: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.

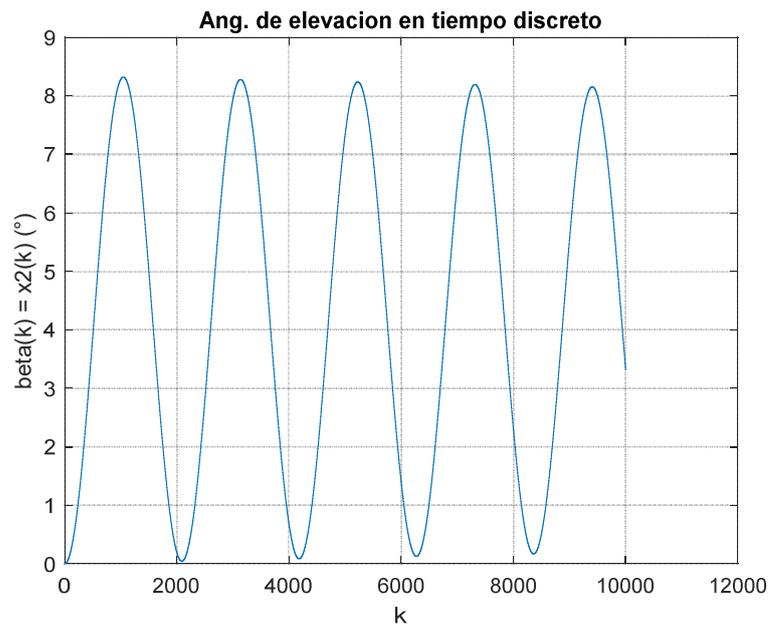


Figura 21: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

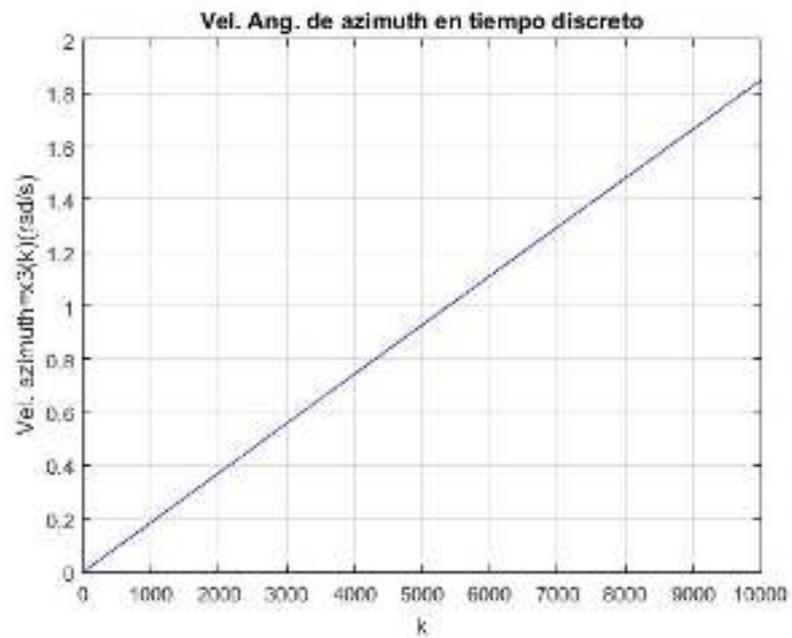


Figura 22: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.

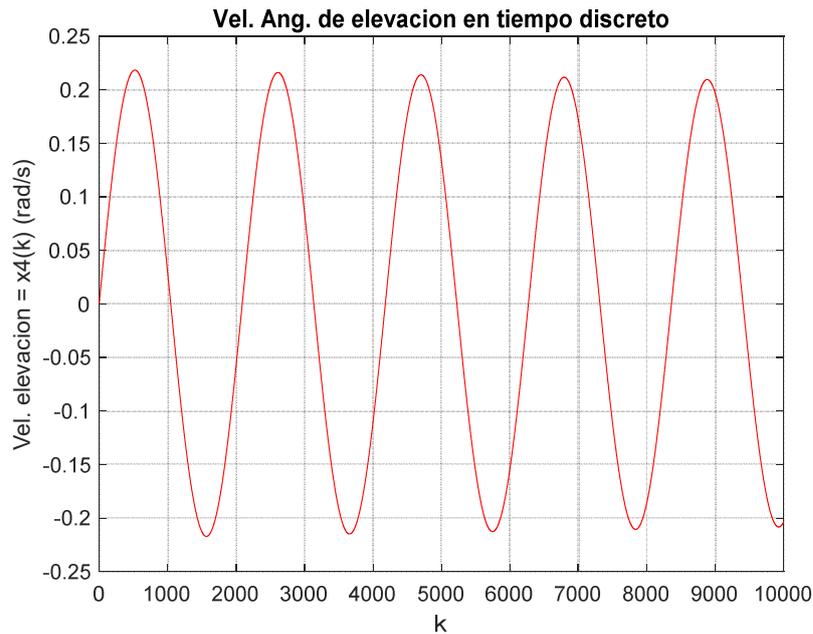


Figura 23: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.

4.1.2 Control por modo deslizante multivariable para la antena parabólica

Por la naturaleza del sistema en estudio, el control por modo deslizante es multivariable, por lo que en la Tabla 2 se muestran las matrices y los vectores de la dinámica del sistema descrito en la ecuación (156).

Asumimos que los vectores de posición y velocidad deseadas, son funciones continuamente diferenciables en el tiempo, la meta es que el sistema tenga que seguir la posición y velocidad actual de estos valores en tiempo real, luego escogemos la superficie de conmutación siguiente:

$$S_i(t, x) = S_i(t, x, \dot{x}) = (\dot{x} - \dot{x}_d) + C_i(x - x_d) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (164)$$

Tabla 2: Vectores de estado del sistema.

q_1	Angulo de Azimut
q_2	Angulo de elevación
$M(q_i)$	Matriz de inercia definida positiva
$P(q_i, \dot{q}_i)$	Matriz que representa la fuerza de Coriolis
$Q(q_i)$	Matriz de fuerza gravitacional
(u_1, u_2)	Vector de control aplicadas al sistema (en este casi son torques generados por los motores)

donde $C_{t_i} > 0$ es una constante y son la posición y velocidad deseadas respectivamente. Sea x, \dot{x} una trayectoria de (7). Los vectores de error son definidos usualmente, como:

$$\tilde{x} = x - x_d \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$$

Si se logra desarrollar un control que convergen todas las trayectorias que se originan en la intersección de estas superficies para permanecer allí, entonces para algún tiempo $t_0, S_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$ tendremos:

$$\dot{\tilde{x}} = -C_i \tilde{x} \quad \text{para } t \geq t_0$$

Los errores de posición y velocidad convergen exponencialmente a cero. Sea la ley de control u :

$$u = u_0 - U \operatorname{sgn}(S) \quad (165)$$

donde el i -ésimo elemento del vector u_0 es:

$$u_{0_i} = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-)$$

la constante U es:

$$U = \operatorname{diag} \left[\frac{1}{2}(u_i^- - u_i^+) \right]$$

y la función signo ($\text{sgn}(\cdot)$) podemos definirla como el vector:

$$\text{sgn}(S) = [\text{sgn}(S_1) \quad \text{sgn}(S_2) \quad \dots \quad \text{sgn}(S_n)]^T$$

Diferenciando la superficie S descrita en la ecuación (164) a lo largo de la trayectoria:

$$\dot{S} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + C_t(\dot{x} - \dot{x}_d) \quad (166)$$

Reemplazando (7) en (164), tendremos:

$$\dot{S} = M^{-1}(P\dot{x} + Q) + M^{-1}u \quad \ddot{x} + C_t\dot{x} \quad (167)$$

Y agrupando (167) adecuadamente, obtendremos:

$$\dot{S} = M^{-1}[-P\dot{x} + Q + u - M\ddot{x}_d + MC_t\dot{x}] \quad (168)$$

Donde:

$$u_{eq} = -MC_t\dot{x} + P\dot{x} + Q + M\ddot{x}_d \quad (169)$$

Considerando la ecuación (169) en (168) tendremos:

$$\dot{S} = M^{-1}[u - u_{eq}] \quad (170)$$

Reemplazando (165) se obtiene:

$$\dot{S} = M^{-1}[u_0 \quad U \text{sgn}(S) \quad u_{eq}] \quad (171)$$

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov dado por:

$$V(t, x) = \frac{1}{2} S^T M S \quad (172)$$

derivando (172), tendremos:

$$\dot{V}(t, x) = S^T M \dot{S} + \frac{1}{2} S^T \dot{M} S \quad (173)$$

reemplazando (171) en (173):

$$\dot{V} = S^T (u_0 - U \operatorname{sgn}(S) - u_{eq}) + \frac{1}{2} S^T \dot{M} S \quad (174)$$

La matriz M siendo una, función del vector de posición q_i continuamente diferenciable. Koditschek estableció la identidad dada en (175) para dos eslabones $[q_k, q_i]$, y que, en nuestro caso, consideraremos sólo el eslabón referido a q_k :

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{dM}{dt} - J \right) \quad (175)$$

Donde J es una matriz anti-simétrica sesgada dada por:

$$J_{ik} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \right)$$

Utilizando (175) en (174), obtendremos:

$$\dot{V} = S^T (u_0 - U \operatorname{sgn}(S) | PS - u_{eq}) + \frac{1}{2} S^T JS \quad (176)$$

Note que $(S^T JS = 0)$, y para $\epsilon > 0$ (una constante arbitraria), seleccionamos los controles u_i^- y $-u_i^+$ que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\left| (u_0 + PS - u_{eq})_i \right| \leq \frac{1}{2} (u_i^- - u_i^+) - \epsilon \quad (177)$$

por lo que:

$$\dot{V} \leq -\epsilon \sum_{j=1}^n |S_j| \quad (178)$$

Por consiguiente, como puede verse de (178), el control debe seleccionarse para satisfacer:

$$u_i^+ + \epsilon \leq (u_{eq} - PS)_i \leq u_i^- - \epsilon \quad (179)$$

Esto nos permite mostrar que u_i^+ y u_i^- son limitados. Se asume que q_{1d} y q_{2d} son uniformemente limitados para satisfacer (179) con igualdad. Se nota que V es monótona decreciente y M es definida positiva y uniforme, limitado por algún múltiple de la matriz identidad. Entonces \tilde{x} permanecen limitados inferiormente,

son gobernados por la dinámica lineal $\dot{\tilde{x}} - c\tilde{x} = S$, a su vez asegura los límites de $(u_{eq} - PS)_i$. La estabilidad asintótica en la intersección de las superficies de conmutación, así como la propiedad de cada trayectoria alcanzará a las superficies deslizantes en un tiempo finito.

- **Ley de control por modo deslizante**

Si consideramos el diseño del controlador para la antena parabólica, cuyo modelo es:

$$M_{ij}(q_i)\ddot{q}_i + P_{ij}(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + Q_i(q_i) = u_i \quad (180)$$

Con (21) y (22) formamos las matrices M , P y Q , donde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} (d_{zz} + d_{xz} \cos^2(q_2)) & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$P(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 - 2d_{xz} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 & 0 \\ d_{xz} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 g_0 \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

Una apreciación bastante común es que el término gravitatorio dado por la matriz Q puede ser calculada en tiempo real. Por consiguiente, bajo este criterio, se escoge nuestra estimación de $u_{eq} - PS$:

$$u_{eq} - PS = -MC_t \dot{\tilde{x}} + P\dot{x} + Q + M\dot{x}_d - P\dot{\tilde{x}} - PC_t \tilde{x}$$

El término $P\dot{x}$, podemos expresarlo como $P\dot{\tilde{x}} + P\dot{x}_d$, luego:

$$u_{eq} - PS = MC_t \dot{\tilde{x}} \rightarrow |P\dot{x}_d| |Q| M\dot{x}_d - PC_t \tilde{x}$$

En estado estacionario el error de convergencia es cero, entonces se considera a $\dot{\tilde{x}}$ y \tilde{x} iguales a cero. Para una referencia constante, la estimación de $u_{eq} - PS$ será igual a la matriz de gravedad Q .

Se selecciona K_i para satisfacer:

$$K_i \geq \left| \left(\hat{u}_{eq} - \hat{P}S \right)_i \right| + \epsilon = \left| \left(-MC_i \ddot{x}_d + PxM\ddot{x}_d - \hat{P}S \right) \right| + \epsilon$$

Las entradas de una matriz M pueden limitarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |M_{11}| &\leq d_{zz} + d_{xz} \equiv \bar{M}_{11} \\ M_{12} &= M_{21} = 0 \\ |M_{22}| &\leq d_{22} \equiv \bar{M}_{22} \end{aligned}$$

similarmente, asumiendo \dot{q} de límite uniforme, podemos limitar las entradas de P :

$$\begin{aligned} |P_{11}| &\leq b_1 - 2d_{xz} \left| \dot{q}_2 \cos(q_2) \sin(q_2) \right| \equiv \bar{P}_{11} \\ |P_{12}| &\leq 0 \equiv \bar{P}_{12} \\ |P_{21}| &\leq d_{xz} \left| \dot{q}_1 \cos(q_2) \sin(q_2) \right| \equiv \bar{P}_{21} \\ |P_{22}| &\leq b_2 \equiv \bar{P}_{22} \end{aligned}$$

así una opción razonable para K_i es:

$$K_i = \sum_{j=1}^2 \left(\bar{M}_{ij} \left| \ddot{x}_{d_j} - c_j \dot{x}_j \right| + \bar{P}_{ij} \left| \dot{x}_j - S_j \right| \right) + \epsilon_i \quad (181)$$

donde:

$$K_1 = \bar{M}_{11} \left| \ddot{x}_{d_1} - c_1 \dot{x}_1 \right| + \bar{P}_{11} \left| \dot{x}_1 - S_1 \right| + \bar{M}_{12} \left| \ddot{x}_{d_2} - c_2 \dot{x}_2 \right| + \bar{P}_{12} \left| \dot{x}_2 - S_2 \right| + \epsilon_1 \quad (182)$$

y:

$$K_2 = \bar{M}_{21} \left| \ddot{x}_{d_1} - c_1 \dot{x}_1 \right| + \bar{P}_{21} \left| \dot{x}_1 - S_1 \right| + \bar{M}_{22} \left| \ddot{x}_{d_2} - c_2 \dot{x}_2 \right| + \bar{P}_{22} \left| \dot{x}_2 - S_2 \right| + \epsilon_2 \quad (183)$$

La ley de control por modo deslizante es dada por:

$$u = Q(q) - K \operatorname{sgn}(S) \quad (184)$$

donde, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo que se define:

$$\operatorname{sgn}(S) = \begin{cases} +1 & \text{si } S > 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases}$$

La ecuación general de control con la función signo es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \operatorname{sgn}(S_1) \\ K_2 \operatorname{sgn}(S_2) \end{bmatrix} \quad (185)$$

La ley de control puede ser modificada para evitar el fenómeno del "chattering" que se muestra en la Figura 24. Tal modificación se hace reemplazando la función $\operatorname{sgn}(S)$ por la función de saturación $\operatorname{sat}(S/\Phi)$, donde el término Φ es el ancho de la banda de la zona de saturación dentro de la superficie de deslizamiento, dentro del cual la relación de la ley de control u y la superficie de deslizamiento S es lineal [21].

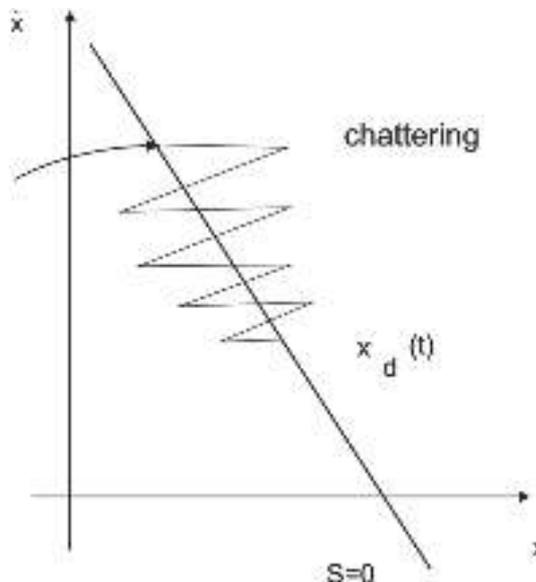


Figura 24: Imperfección de la ley de control por modo deslizante.

La ley de control en donde se incluye la saturación es dada por:

$$u = Q(q) - K \operatorname{sat}(S/\Phi) \quad (186)$$

donde $\operatorname{sat}(\cdot)$ es la función saturación que se define:

$$\operatorname{sat}(S/\Phi) = \begin{cases} S/\Phi & \text{si } |S/\Phi| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(S/\Phi) & \text{otro caso} \end{cases}$$

La ecuación general de control con saturación es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \text{sat}(S_1/\Phi) \\ K_2 \text{sat}(S_2/\Phi) \end{bmatrix} \quad (187)$$

La modificación apropiada de la ley de control por modo deslizante puede moderar la actividad de control. Por ejemplo, el empleo de la función saturación en una región de superficie de deslizamiento en lugar de la clásica ley de control que incluye el término $\text{sgn}(S)$.

Simulaciones del sistema control deslizante multivariable

El programa correspondiente al modo deslizante se denomina `slid_antena.m`, tal como puede apreciarse en el Anexo B. Al ejecutarse dicho programa se obtiene los resultados mostrados en las figuras 25 y 26, que corresponden a referencias variantes (trayectorias). Como podrá apreciarse, dichos resultados son satisfactorios; ya que siguen muy bien las referencias asignadas para los ángulos de azimuth y elevación; así como las señales de control de torque generados. Al considerar referencias constantes tipo escalón, se obtienen las respuestas mostradas en las figuras 27 y 28.

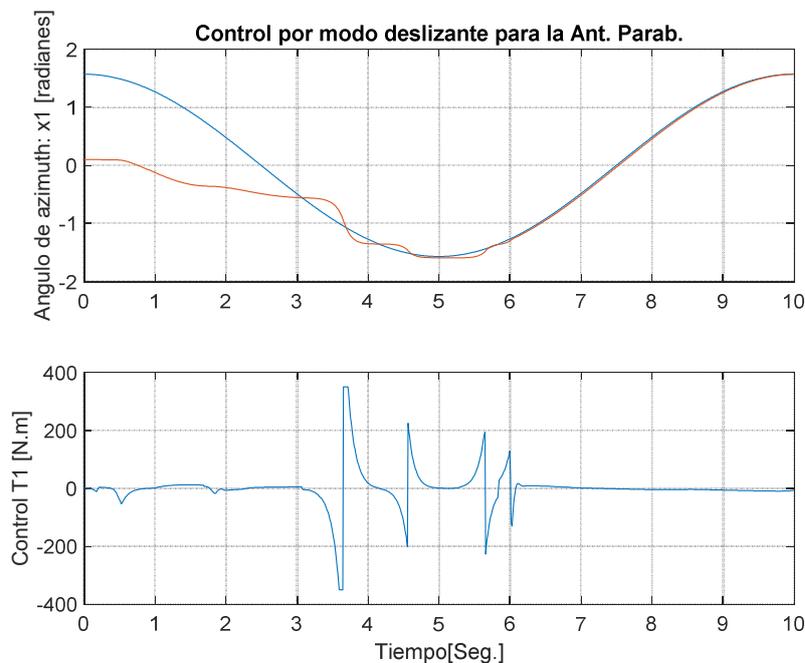


Figura 25: Salida x_1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.

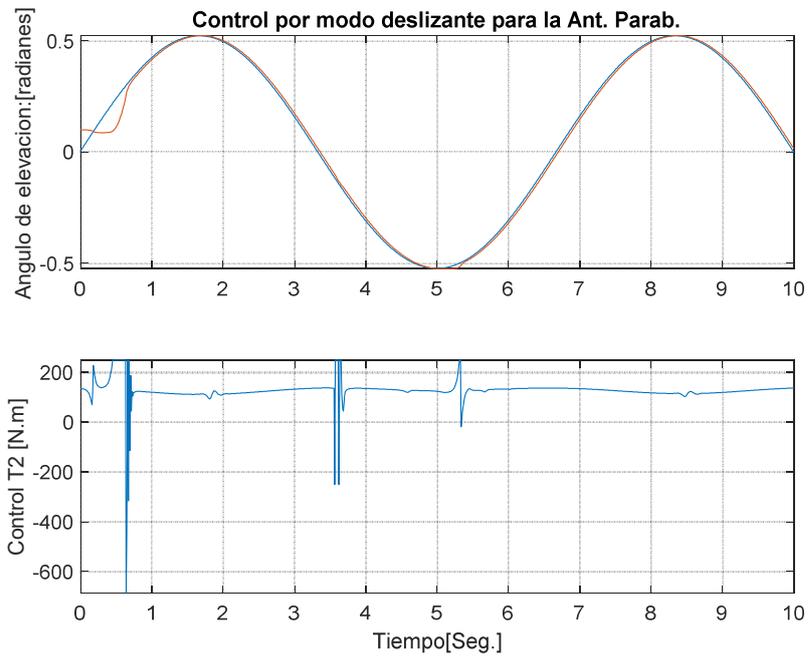


Figura 26: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.

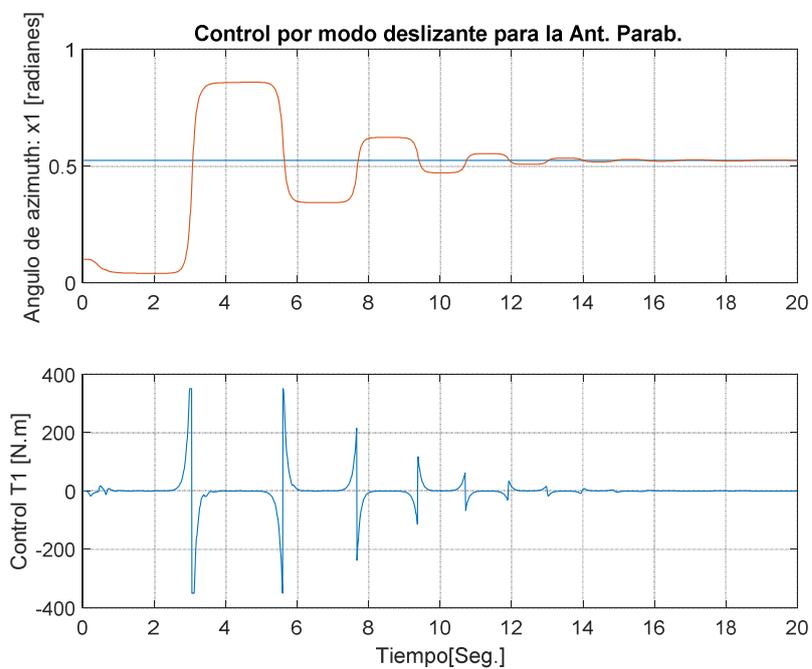


Figura 27: Salida x1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.

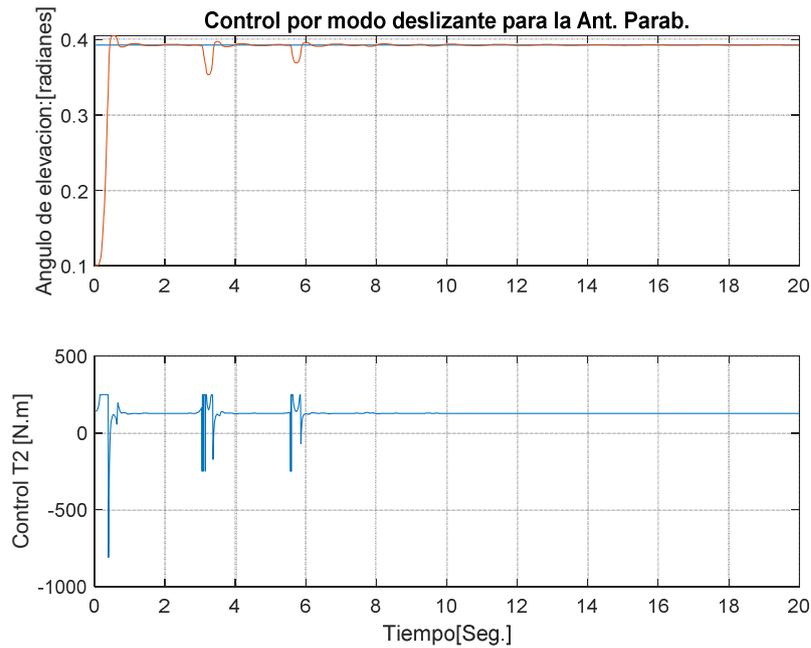


Figura 28: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.

4.1.3 Control óptimo multivariable para la antena parabólica

Por la naturaleza del sistema en estudio, se considerará el diseño de un controlador óptimo proporcional integral multivariable.

Considerando un período de muestreo $T = 0.01$ segundo y asumiendo retención de memoria de orden cero, las ecuaciones de estado y de salida del proceso linealizado y discretizado están dadas por las ecuaciones (40) y (41), que a continuación se reescriben:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (188)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (189)$$

donde:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.9995 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0904 & 0 & 0.9994 \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0019 & 0 \\ 0 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

Las ecuaciones de estado, de salida y de control del sistema de control multivariable vienen dadas por:

$$x(k+1) = Cx(k) + Hu(k) \quad (191)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (192)$$

$$u(k) = -Kx(k) + K_I v(k) \quad (193)$$

Donde $v(k)$ es el vector de salida del integrador de orden m , K es la matriz ganancia del controlador de dimensión $m \times n$ (en este caso: 2×4) y la matriz ganancia del integrador de dimensión $m \times r$ que adquieren la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}; K_i = \begin{bmatrix} ki_{11} & ki_{12} \\ ki_{21} & ki_{22} \end{bmatrix} \quad (194)$$

Asimismo, la ecuación para el integrador está dada por:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (195)$$

Finalmente, la ecuación de estado del controlador óptimo multivariable proporcional integral viene dada por:

$$\zeta(k+1) = \tilde{G}\zeta(k) + \tilde{H}\omega(k) \quad (196)$$

Donde:

$$\omega(k) = -\tilde{K}\zeta(k); \quad \zeta(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (197)$$

$$\tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix}; \quad \tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad (198)$$

$$\tilde{K} = [K \quad -K_I] \quad (199)$$

donde $\omega(k)$ es un vector de entrada de orden m .

La función de costo es la misma que para el caso SISO; sin embargo, es necesario tener presente el orden de los vectores y las dimensiones de las

matrices del sistema multivariable. Por último, la solución al problema de diseño del control óptimo multivariable proporcional integral es, calcular la matriz de realimentación de estado ampliada \tilde{k} que minimice la función de costo dada en la ecuación (200). La ecuación asociada de Riccati y la ganancia ampliada del controlador vienen dadas por las ecuaciones (201) y (202), que a continuación se reescriben.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\zeta^T(k) \tilde{Q} \zeta(k) + \omega^T(k) \tilde{R} \omega(k)] \quad (200)$$

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (201)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (202)$$

donde:

\tilde{P} es una matriz simétrica definida positiva de dimensión $(n+r) \times (n+r)$.

\tilde{Q} es una matriz simétrica semidefinida positiva de dimensión $(n+r) \times (n+r)$.

\tilde{R} es una matriz simétrica definida positiva de dimensión $m \times m$.

Para determinar la ganancia \tilde{K} se siguen los siguientes pasos:

Elegir las matrices de ponderación \tilde{Q} y \tilde{R} , que en nuestro caso son:

$$\tilde{Q} = 100 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{R} = 20 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (203)$$

Resolver la ecuación de Riccati en forma recursiva (ver ecuación (28)), que a continuación, se reescribe:

$$\tilde{P}(k+1) = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P}(k) \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P}(k) \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P}(k) \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P}(k) \tilde{G} \quad (204)$$

Calculada la matriz \tilde{P} (de elementos estacionarios), obtener la matriz ganancia del controlador \tilde{K} , usando la siguiente ecuación:

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} = [K \quad -K_I] \quad (205)$$

El diseño del controlador óptimo proporcional integral multivariable, conlleva al diseño de un observador óptimo cuadrático multivariable (MIMO).

Las ecuaciones del observador óptimo cuadrático MIMO son las mismas que para el caso SISO, con las siguientes consideraciones:

K_e es una matriz de ganancia del observador de dimensión $n \times r$ (en nuestro caso: 4×2)

P_e es una matriz simétrica definida positiva de dimensión $n \times n$ (en nuestro caso: 4×4)

En consecuencia, reescribimos las ecuaciones que gobiernan la dinámica del observador MIMO:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - \hat{y}(k)] \\ &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - C\hat{x}(k)] \\ &= G\hat{x}(k) + Hu(k) + K_e C [y(k) - \hat{x}(k)] \end{aligned} \quad (206)$$

$$e(k+1) = [G - K_e C] e(k); \quad (207)$$

$$|zI - G + K_e C| = 0 \quad (208)$$

$$P_e(k+1) = Q_e + GP_e(k)G^T - GP_e(k)C^T [R_e + CP_e(k)C^T]^{-1} C_e P(k)G^T \quad (209)$$

$$K_e = [R_e + CP_e C^T]^{-1} CP_e G^T \quad (210)$$

donde K_e es la matriz de ganancia del observador calculada recursivamente.

Simulaciones del sistema control óptimo multivariable

Considerando las ecuaciones del Controlador Óptimo Multivariable discreto, así como del Observador Óptimo, se realizan las simulaciones mediante un programa en código MAT-LAB anteoptimo.m listado en el Anexo B, cuyos resultados se muestran en las figuras 29 y 30.

Como podrá apreciarse, dichos resultados son satisfactorios; ya que siguen muy bien las referencias asignadas para los ángulos de azimut y elevación; así como las señales de control de torque generados.

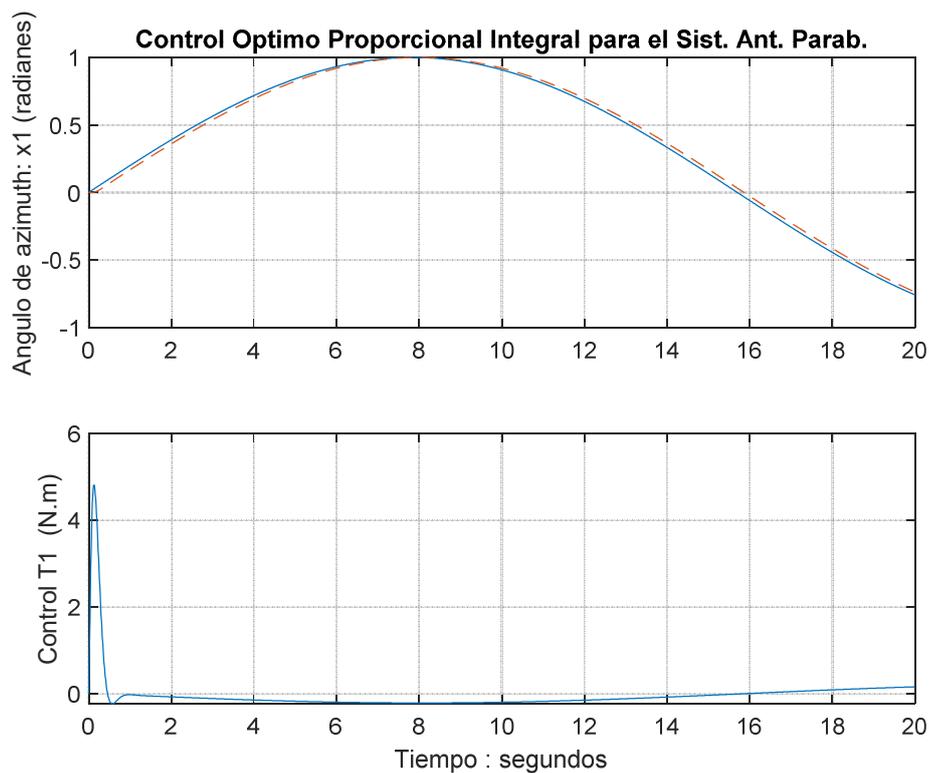


Figura 29: Salida x_1 (Ángulo de azimut) y señal de control T_1 .

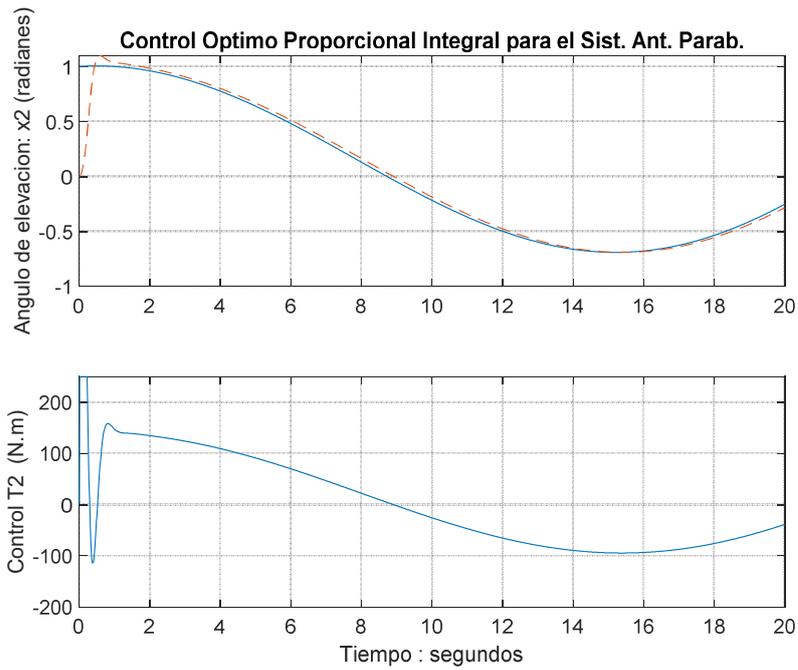


Figura 30: Salida x_2 (Ángulo de elevación) y señal de control T_2 .

Para referencias constantes, el resultado de la simulación también es satisfactorio, según puede apreciarse en las figuras 31 y 32.

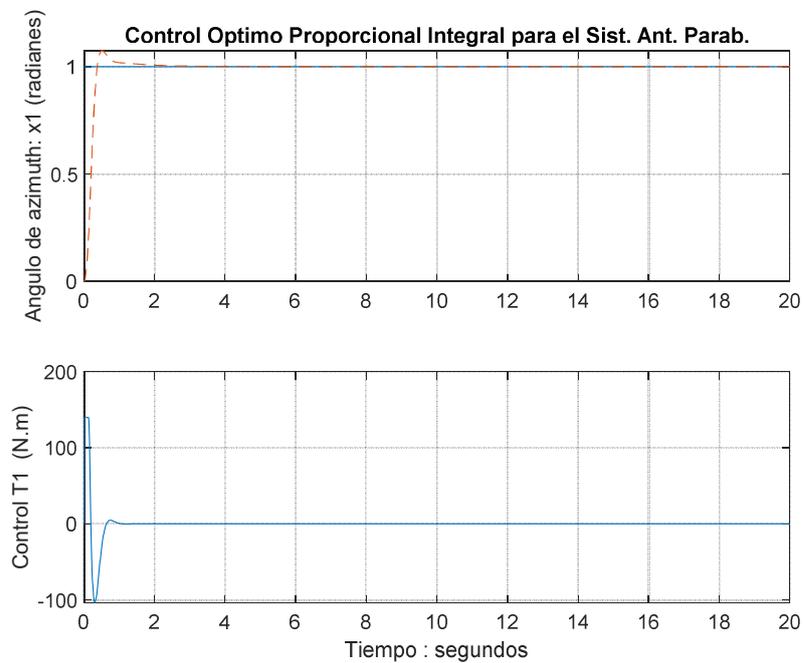


Figura 31: Salida x_1 (Ángulo de azimut) y señal de control T_1 para referencia escalón unitario.

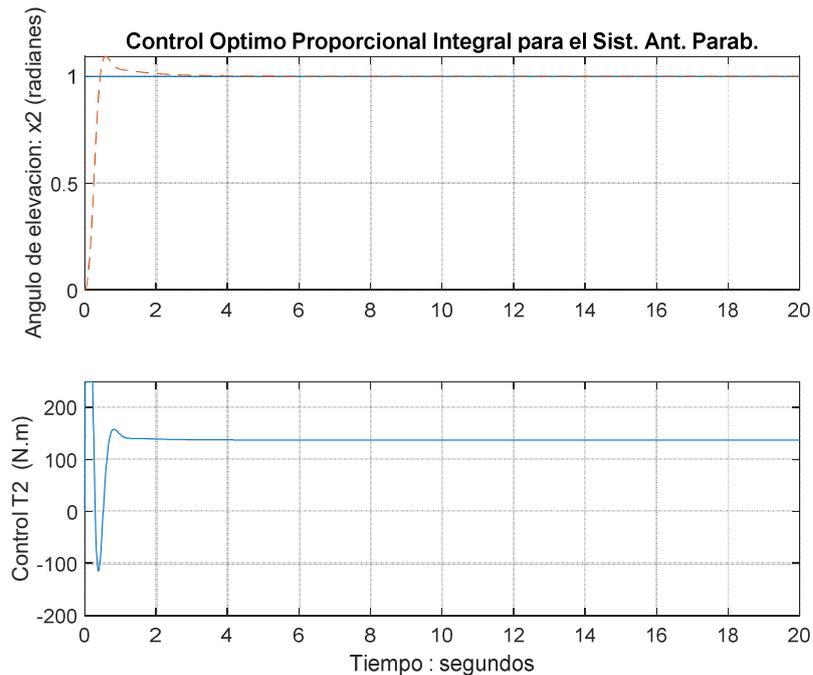


Figura 32: Salida x_2 (Ángulo de elevación) y señal de control T_2 para referencia escalón unitario.

4.2. Método de investigación

El presente trabajo, es una investigación científica, que corresponde a una investigación de tipo básico y transversal, por lo que se utilizó las teorías de: Control Óptimo Cuadrático y Control Deslizante, que nos permitirá diseñar los controladores adecuados para el sistema antena parabólica.

El procedimiento metodológico utilizado es el siguiente:

- Recopilar información.
- Realizar el modelo matemático y simulación del modelo no lineal del sistema antena parabólica.
- Realizar la linealización y discretización y la simulación correspondiente del sistema antena parabólica.
- Diseñar y simular el sistema de control por modo deslizante multivariable.
- Diseñar y simular el sistema de control óptimo en su versión proporcional integral multivariable con la inclusión de un observador óptimo multivariable.

- Efectuar la comparación de resultados de las dos técnicas de control y las conclusiones correspondientes.

4.3. Población y muestra

Por la naturaleza de la investigación, esta sección no es aplicable, debido a que la población se reduce al objeto de estudio, que es el sistema de control de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

El presente trabajo de investigación se desarrolló en las instalaciones del laboratorio de Mecatrónica de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) y debido a la pandemia del COVID 19 tuvo que finalizarse en domicilio del suscrito autor de la tesis.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Por la naturaleza de la investigación, esta sección no es aplicable.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la naturaleza de la investigación, esta sección no es aplicable.

V. RESULTADOS

5.1 Resultados descriptivos

Considerando el modelado de la antena parabólica y la aplicación de dos técnicas de control, podemos presentar la descripción de los resultados de la simulación:

5.1.1 Resultados del modelamiento de la antena parabólica

a) Resultados del modelo no lineal

Los valores de los ángulos de azimut (α) y elevación (β) a ser considerados para efectos de control, fueron los siguientes:

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Sin embargo, como la simulación se realiza en lazo abierto (sin la acción de control), los resultados gráficos muestran que para entradas de torque de tipo escalón, presentan respuestas cuyos valores exceden los rangos de variación considerados, tanto de posición angular de azimut y elevación, según puede apreciarse en las figuras 10, 11 y 12 de la subsección 4.1.1.

b) Resultados del modelo linealizado y discretizado

Con las mismas consideraciones de los ángulos de azimut y elevación para el sistema no lineal, se obtienen respuestas en lazo abierto del modelo linealizado y discretizado de la antena parabólica, que pueden observarse en las figuras 20 y 21 de la subsección 4.1.1. En la Figura 20 que corresponde al ángulo de azimut, se observa su crecimiento exponencial, y en el caso de la Figura 21 que corresponde al ángulo de elevación se observa que la respuesta es oscilatoria.

5.1.2 Resultados del control por modo deslizante multivariable

a) Resultado para referencias variantes (trayectorias)

Las señales de referencia usadas son $r_1(t) = \frac{\pi}{2} \cos 2t$, $r_2(t) = \frac{\pi}{6} \sin 3t$, y el periodo de muestreo considerado es $T = 0.01$ segundo (equivalente a una frecuencia de muestreo de 100Hz).

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 25, se puede observar que la señal de control (torque) $T_1(t)$ necesario para que la posición angular $x_1(t)$ (ángulo de azimut) siga a la referencia $r_1(t)$, alcanza un valor pico transitorio de aproximadamente -350 a 350 Nm, estabilizándose decreciendo hasta un valor muy pequeño de aproximadamente 3 Nm en un tiempo estacionario de aproximadamente 5.7 segundos.

Idénticamente, de la Figura 26 se puede observar que el torque de control $T_2(t)$ necesario para llevar el ángulo de elevación a la posición deseada $r_2(t)$, alcanza un valor pico transitorio positivo de aproximadamente 250 Nm, decreciendo hasta aproximadamente -687 Nm y amortiguándose en un rango de 107 a -137 Nm en un tiempo estacionario de aproximadamente 0.7 segundos, guardando cierta forma senoidal, debido a la referencia de ese tipo. Se puede verificar que en ambos casos los ángulos de azimut y de elevación siguen muy bien a sus correspondientes referencias.

b) Resultado para referencias constantes (escalón)

Considerando referencias escalón $\pi/6$ para $r_1(t)$ y $\pi/8$ para $r_2(t)$, se obtienen los resultados mostrados en las figuras 27 y 28.

Del resultado gráfico de la simulación mostrado en la Figura 27 se puede observar que, para llegar a la referencia escalón de $\pi/6$, se produce un sobrepico de 0.35 radianes para x_1 , estabilizándose en $\pi/6$ en un tiempo de 14 segundos, para lo cual, la señal de control T_1 necesario para controlar el ángulo de azimut, alcanza un pico máximo positivo en el transitorio de 350

Nm, decreciendo a un valor de -350 Nm y estableciéndose a un valor de 0.11 Nm.

Asimismo, de la Figura 28 se puede apreciar que la señal x_2 produce un sobrepico de 0.03 radianes y luego se estabiliza en la referencia escalón de $\pi/8$ en un tiempo de 0.9 segundos, para lo cual la señal de control T_2 generado para controlar el ángulo de elevación es de -809 Nm en el transitorio, y estabilizándose en 126 Nm.

5.1.3 Resultados del control óptimo discreto multivariable

a) Resultado para referencias variantes (trayectorias)

Las señales de referencia usadas son $r_1(t) = \sin t$, $r_2(t) = \cos t + 0.01t$, y el periodo de muestreo considerado es $T = 0.01$ segundo (equivalente a una frecuencia de muestreo de 100Hz).

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 29, se puede observar que la señal de control (torque) $T_1(t)$ alcanza un valor pico transitorio de aproximadamente 4.8 Nm, decreciendo hasta un valor muy pequeño (aproximadamente cero) en tiempo estacionario, necesario para que la posición angular $x_1(t)$ (ángulo de azimut) siga a la referencia $r_1(t)$ luego de 0.13 segundos.

Idénticamente, de la Figura 30 se puede observar que $x_2(t)$ presenta un sobrepico de 0.07 radianes y sigue a la referencia $r_2(t)$ a partir de 1.10 segundos, gracias a la acción de control $T_2(t)$, que alcanza un valor pico transitorio positivo de aproximadamente 250 Nm, decreciendo hasta aproximadamente -110 Nm y amortiguándose en un rango de 160 y -100 Nm en tiempo estacionario, guardando la forma senoidal, debido a la referencia de ese tipo. En ambos casos se puede verificar que los ángulos de azimut y de elevación siguen muy bien a sus correspondientes referencias.

b) Resultado para referencias constantes (escalón)

Las señales de referencia usadas son escalón unitario.

Del resultado gráfico de la simulación mostrado en la Figura 31 se puede observar que, para llegar a la referencia del escalón unitario, se produce un sobrepico de 0.07 radianes para x_1 , estabilizándose en 1radian en un tiempo de 3 segundos, para lo cual, la señal de control T1 necesario para controlar el ángulo de azimut, alcanza un pico máximo positivo en el transitorio de 137 Nm, decreciendo a un valor de -100 Nm y estableciéndose a un valor de 3 Nm.

Asimismo, de la Figura 32 se puede apreciar que la señal x_2 produce un sobrepico de 0.07 radianes y luego se estabiliza en 1 radian en un tiempo de 3.7 segundos, para lo cual la señal de control T2 generado para controlar el ángulo de elevación es de 250 Nm, decreciendo a un valor de -107 Nm y estabilizándose alrededor de 137 Nm.

5.2 Resultados inferenciales

Considerando la aplicación de dos técnicas de control, podemos presentar los resultados inferenciales siguientes:

5.2.1 Resultado del modelamiento de la antena parabólica

a) Resultados del modelo no lineal

Los resultados de las figuras 10, 11 y 12 de la subsección 4.1.1, nos permite observar que la respuesta del modelo no lineal excede los rangos establecidos para los ángulos de azimut y elevación, debido a que no están presentes las acciones de control correspondientes.

A continuación, se vuelven a presentar las dos primeras figuras para precisar resultados.

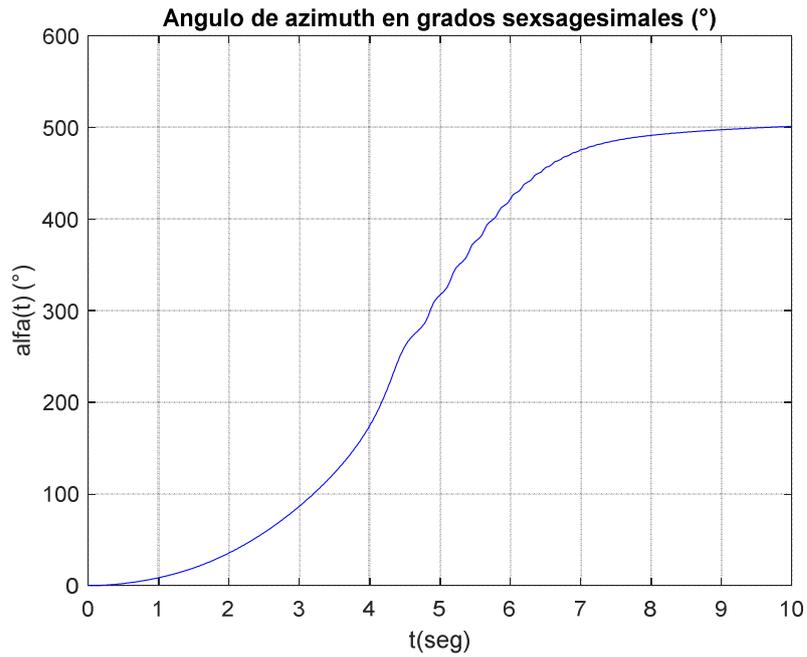


Figura 33: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.

Se puede observar que la respuesta del ángulo de azimut presenta no linealidades suaves, y excede en demasía los 180° ($-\pi \leq \alpha \leq \pi$).

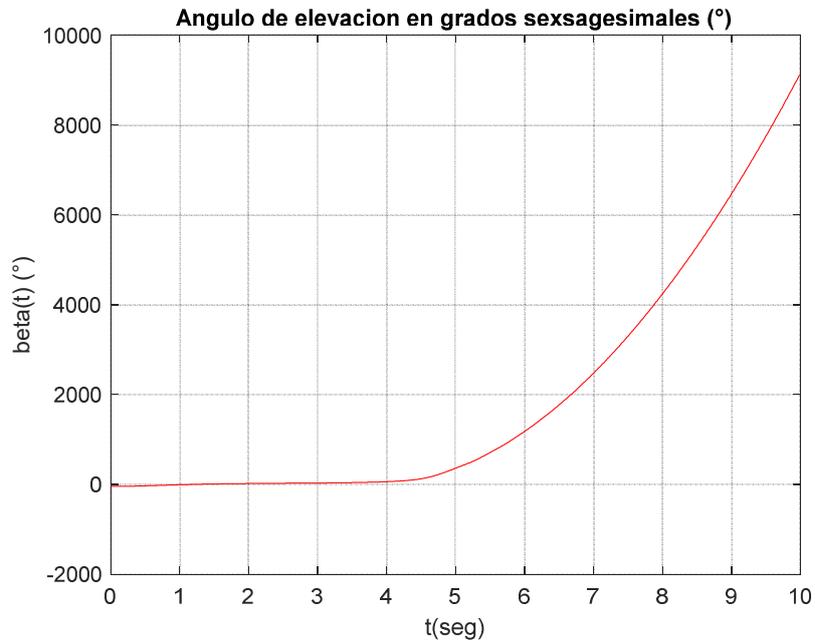


Figura 34: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

Contrariamente a la respuesta del ángulo de azimut, en el caso del ángulo de elevación, su respuesta no lineal es exponencial, excediendo los límites considerados:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Estas respuestas llevan a deducir que la velocidad de respuesta del ángulo de azimut es baja y tiende a mantenerse en valores pequeños; mientras que la velocidad de respuesta del ángulo de elevación es creciente, lo que se pueden confirmar con las respuestas gráficas de velocidad de los ángulos de azimut y elevación mostradas en las figuras 35 y 36, respectivamente.

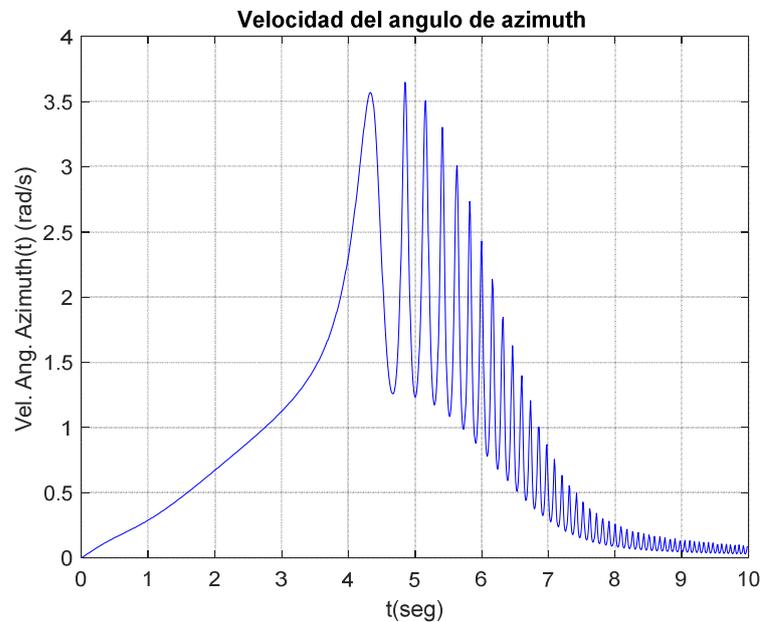


Figura 35: Velocidad del Ángulo de Azimut en rad/s.

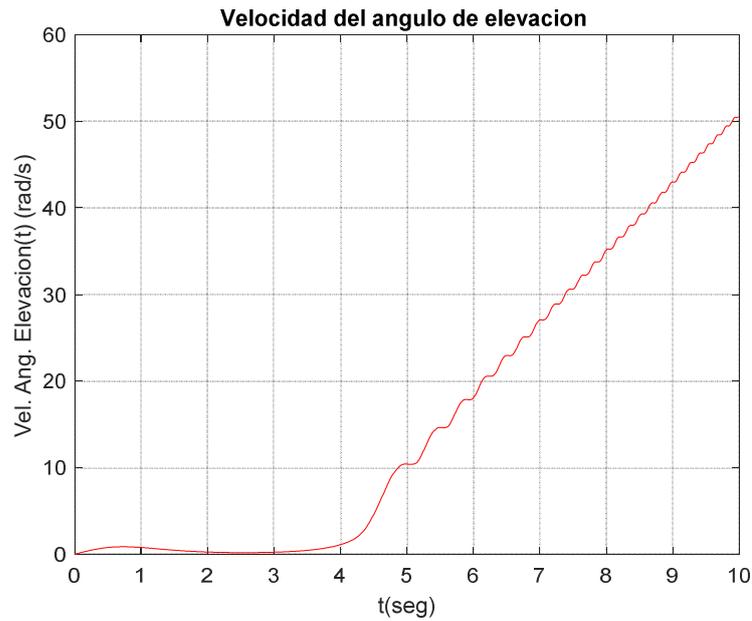


Figura 36: Velocidad del Ángulo de Elevación en rad/s.

De los resultados gráficos mostrados y explicados, se puede afirmar que dichos comportamientos son lo esperado.

b) Resultados del modelo linealizado y discretizado

En forma similar a la respuesta del modelo no lineal, la respuesta del modelo linealizado y discretizado, mostradas en las figuras 20 y 21 de la subsección 4.1.1, volvemos a presentar las respuestas del modelo linealizado i discretizado, mostradas en las figuras 37 y 38.

La figura 37 muestra la respuesta del ángulo de elevación en lazo abierto ante una entrada de torque T_1 tipo escalón. Debido a un proceso de linealización alrededor determinados puntos de equilibrio anotados en la subsección 2.3.1, la región linealizada abarca una parte de la región no lineal; por lo que bajo esas consideraciones la respuesta visualizada difiere ligeramente de la respuesta no lineal; pero responde dentro de la región de trabajo lineal.

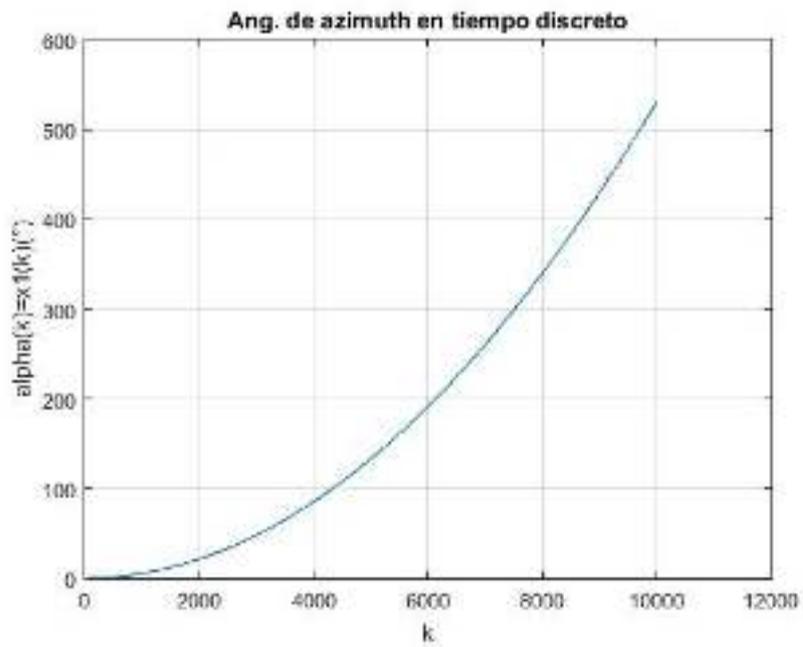


Figura 37: Ángulo de Azimut en grados sexagesimales.

De forma similar, la respuesta del ángulo de elevación ante una entrada de torque T_2 tipo escalón, se comporta de acuerdo a lo mostrado en la Figura 38; y en este caso, la respuesta dentro del rango lineal, presenta oscilaciones sostenidas, con magnitudes positivas de 8° respecto al origen.

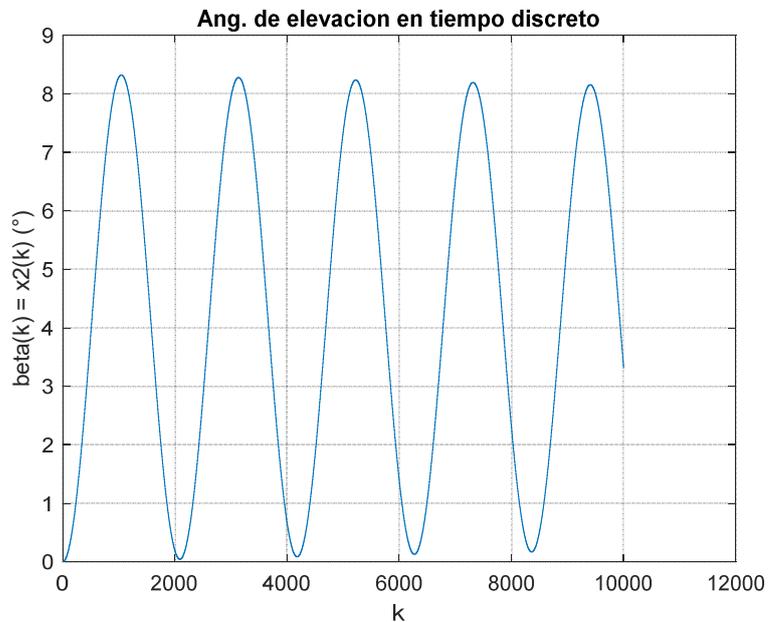


Figura 38: Ángulo de Elevación en grados sexagesimales.

De lo descrito líneas arriba, nos permite afirmar que dichas respuestas son la respuesta natural del sistema sin la presencia del controlador.

5.2.2 Resultado del control por modo deslizante multivariable

a) Resultado para referencias variantes (trayectorias)

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 25 de la subsección 4.1.2, que se vuelve a presentar como Figura 39, se observa que la salida x_1 (ángulo de azimuth) sigue a la referencia a partir de un tiempo de establecimiento de 5.7 segundos, por lo que se puede inferir que la respuesta del ángulo de azimuth es prácticamente aceptable, ya que es un tiempo razonable para mover la antena al punto de referencia y seguir la trayectoria deseada.

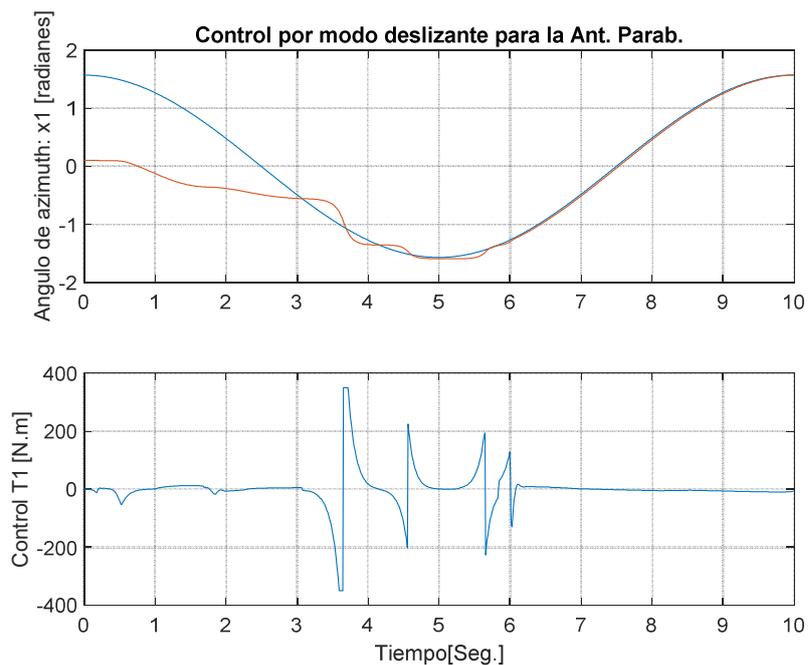


Figura 39: Salida x_1 (ángulo de azimuth) y señal de control T1.

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 26, de la subsección 4.1.2, que se vuelve a presentar como Figura 40, se observa que la salida x_2 (ángulo de elevación) sigue a la referencia luego de un tiempo de 0.7 segundos, por

lo que se puede inferir que la velocidad de control es mayor en este caso comparado al de la salida x1.

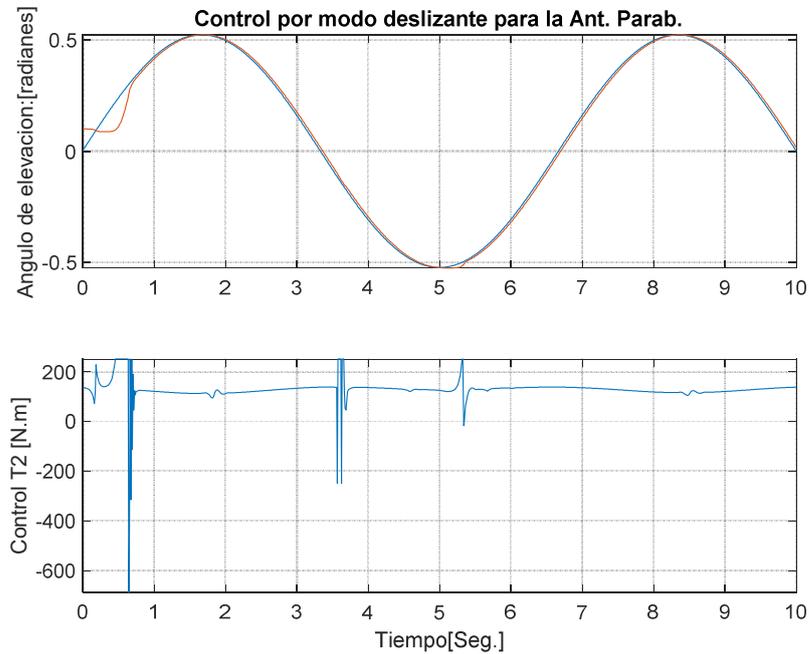


Figura 40: Salida x2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.

b) Resultado para referencias constantes (escalón)

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 27, de la subsección 4.1.2, que se vuelve a presentar como Figura 41, se puede observar que la salida x1 (ángulo de azimuth) sigue a la referencia de $\pi/6$, con un sobrepico en el transitorio de 0.35 radianes, estabilizándose en $\pi/6$ en un tiempo de 14 segundos, por lo que se puede inferir que si bien es cierto que la salida x1 sigue a la referencia; sin embargo, se puede inferir que este seguimiento es relativamente lento respecto al seguimiento de una trayectoria.

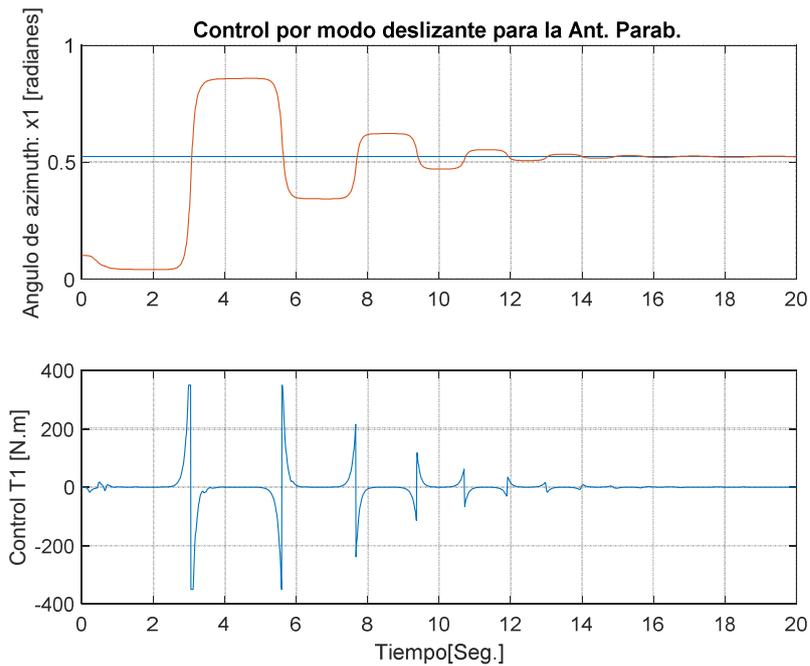


Figura 41:Salida x_1 (ángulo de azimuth) y señal de control T_1 .

Asimismo, del resultado gráfico mostrado en la Figura 28, de la subsección 4.1.2, que se vuelve a presentar como Figura 42, se puede apreciar que la señal x_2 produce un sobrepico de 0.03 radianes y luego se estabiliza en $\pi/8$ en un tiempo de 0.9 segundos, por lo que se puede inferir que se produce una rápida respuesta; aunque luego del establecimiento, se produce unas “caídas breves” en 3 segundos y 5.7 segundos; que no son significativas en la respuesta de un sistema real; ya que el tiempo de “caída o inestabilidad” de 0.32 segundos es muy pequeño y no afectaría la respuesta real del sistema.

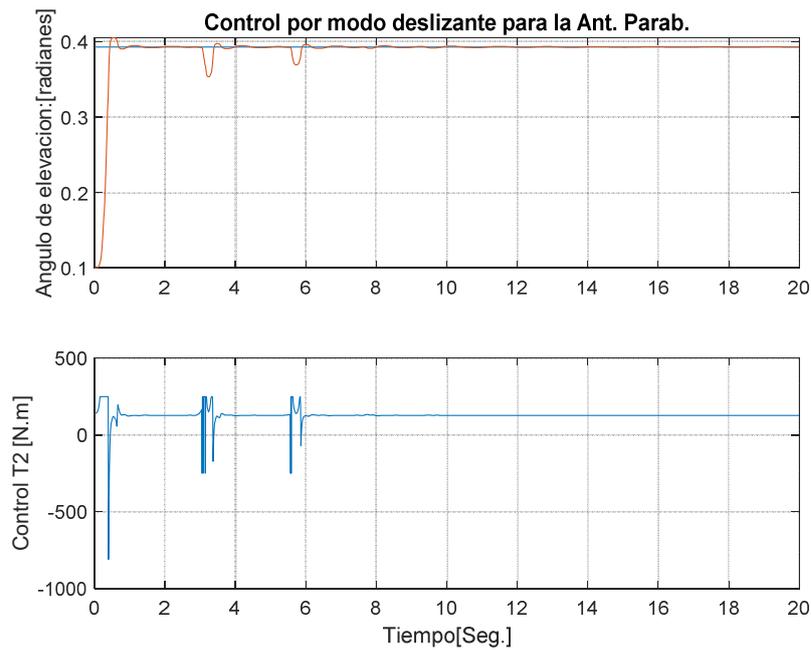


Figura 42: Salida x_2 (ángulo de elevación) y señal de control T2.

5.2.3 Resultado del control óptimo discreto multivariable

a) Resultado para referencias variantes (trayectorias)

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 29, de la subsección 4.1.3, que se vuelve a presentar como Figura 43, se puede observar que la salida $x_1(t)$ sigue rápidamente a la trayectoria de referencia $r_1(t)$, en 0.13 segundos, por lo que se infiere que la velocidad de control es muy rápida.

Idénticamente, de la Figura 30, de la subsección 4.1.3, que se vuelve a presentar como Figura 44, se puede observar que $x_2(t)$ presenta un sobrepico de 0.07 radianes, para luego seguir a la referencia $r_2(t)$ a partir de un tiempo de establecimiento de 1.10 segundos, por lo que se puede inferir que hay una buena velocidad de respuesta del controlador.

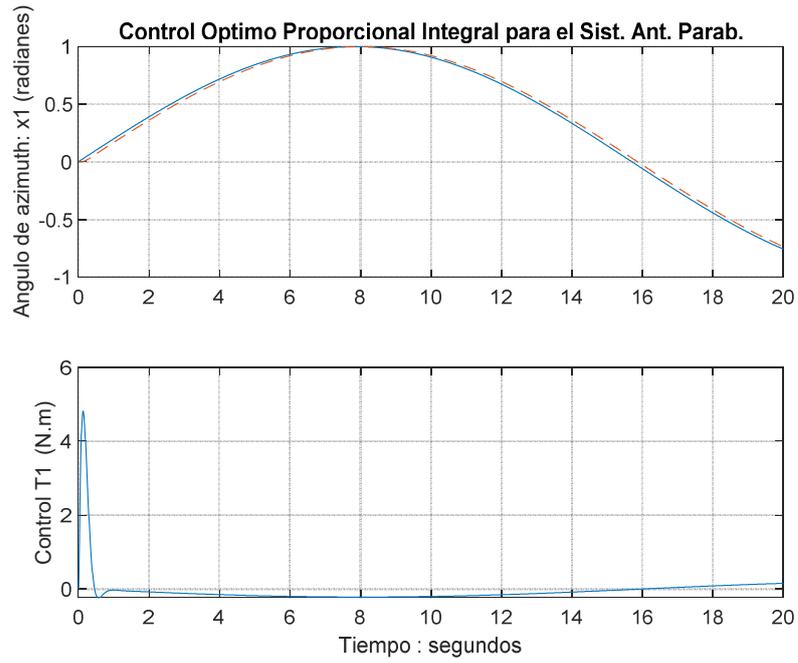


Figura 43: Salida x1 (Ángulo de azimuth) y señal de control T1.

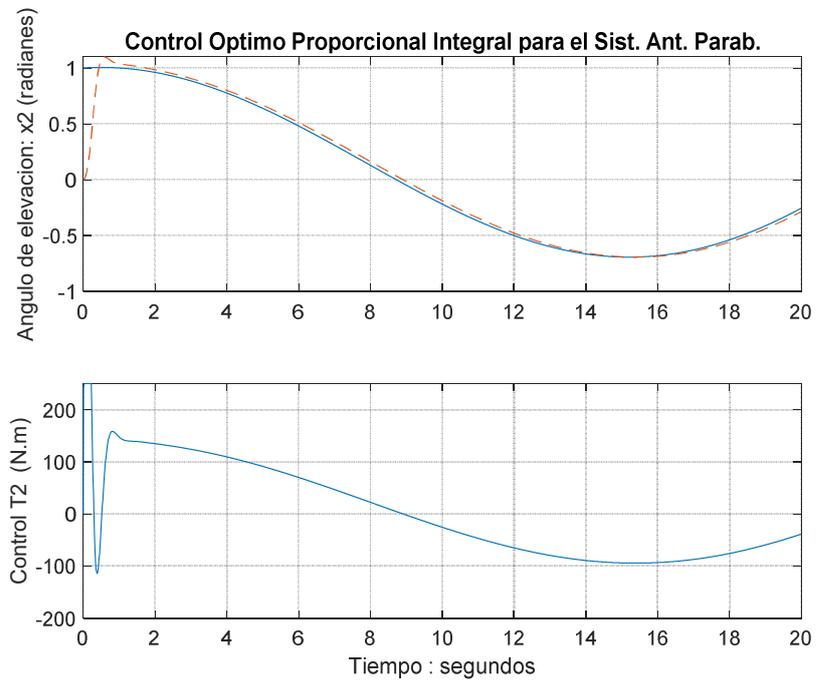


Figura 44: Salida x2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2.

b) Resultado para referencias constantes (escalón)

Del resultado gráfico mostrado en la Figura 31, de la subsección 4.1.3, que se vuelve a presentar como Figura 45, se puede observar que, para llegar a la referencia del escalón unitario, se produce un sobrepico de 0.07 radianes para x_1 , estabilizándose en 1radian en un tiempo de 3 segundos, por lo que se puede inferir que la velocidad de control es adecuada.

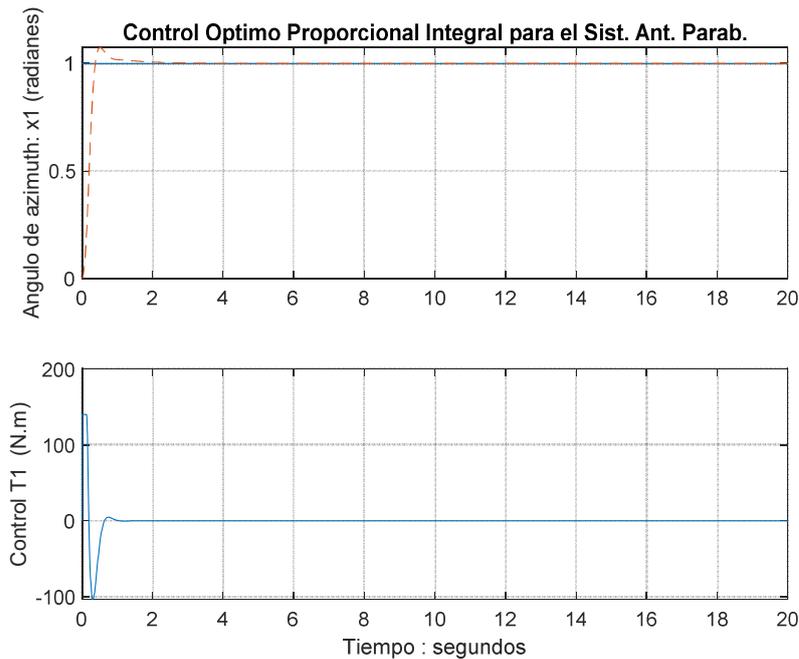


Figura 45: Salida x_1 (Ángulo de azimut) y señal de control T_1 para referencia escalón unitario.

Idénticamente, de la Figura 32, de la subsección 4.1.3, que se vuelve a presentar como Figura 46, se puede observar que $x_2(t)$ presenta un sobrepico de 0.07 radianes, para luego seguir a la referencia $r_2(t)$ escalón de 1 radian, a partir de un tiempo de establecimiento de 3.7 segundos, por lo que se puede inferir que hay una buena velocidad de respuesta del controlador.

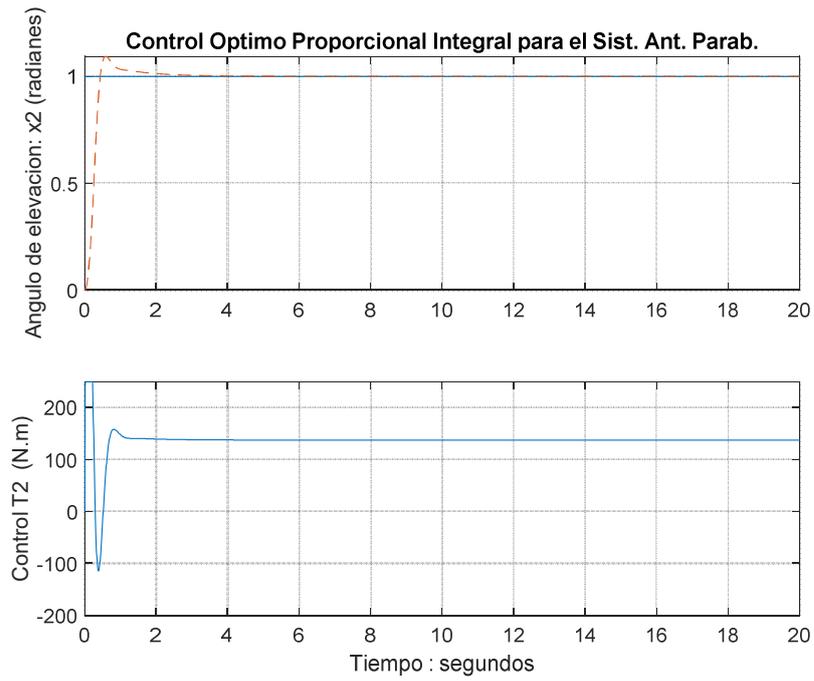


Figura 46: Salida x_2 (Ángulo de elevación) y señal de control T2 para referencia escalón unitario.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

6.1.1 Contrastación con hipótesis específica 1

Los resultados de la simulación de los modelos no lineal y linealizado, presentados en la subsección 5.1.1, nos permiten apreciar su comportamiento en lazo abierto, es decir sin la presencia del controlador, cumpliéndose así con la hipótesis específica 1.

6.1.2 Contrastación con hipótesis específica 2

Los resultados de la simulación del control óptimo multivariable, presentados en la subsección 5.1.3, nos permiten observar que:

- Para referencia variante, la salida $x_1(t)$ (ángulo de azimut) sigue rápidamente a la trayectoria de referencia $r_1(t)$, en 0.13 segundos, y en el caso de la salida $x_2(t)$ (ángulo de elevación) se puede observar que presenta un sobrepico de 0.07 radianes, para luego seguir a la referencia $r_2(t)$ a partir de un tiempo de establecimiento de 1.10 segundos.
- Para referencia constante, se puede observar que, para llegar a la referencia del escalón unitario, se produce un sobrepico de 0.07 radianes para la salida $x_1(t)$, estabilizándose en 1radian en un tiempo de 3 segundos, y para el caso de la salida $x_2(t)$ presenta un sobrepico de 0.07 radianes, para luego seguir a la referencia $r_2(t)$ escalón de 1 radian, a partir de un tiempo de establecimiento de 3.7 segundos.

Por consiguiente, se puede afirmar que la respuesta del control óptimo discreto multivariable es rápido y presenta un sobrepico muy pequeño en tiempo transitorio, sea para referencia variante o constante, cumpliéndose así con la hipótesis específica.

6.1.3 Contrastación con hipótesis específica 3

Los resultados de la simulación del control deslizante multivariable, presentados en la subsección 5.1.2, nos permiten observar que:

- Para referencia variante, la salida x_1 (ángulo de azimut) sigue a la referencia a partir de un tiempo de establecimiento de 5.7 segundos, y en el caso de la salida la salida x_2 (ángulo de elevación) sigue a la referencia luego de un tiempo de 0.7 segundos.
- Para referencia constante, la salida x_1 (ángulo de azimut) sigue a la referencia de $\pi/6$, con un sobrepico en el transitorio de 0.35 radianes, estabilizándose en $\pi/6$ en un tiempo de 14 segundos, y en el caso de la salida $x_2(t)$, produce un sobrepico de 0.03 radianes y luego se estabiliza en $\pi/8$ en un tiempo de 0.9 segundos

En tal sentido, se puede afirmar que la respuesta del control deslizante multivariable presenta buena respuesta en cuanto a un sobrepico pequeño en el transitorio, como también en velocidad de respuesta, particularmente para la salida x_1 frente a referencia variante, con un pequeño retardo para referencia constante y para la salida x_2 con muy buena velocidad de respuesta, sea para referencia variante y constante, cumpliéndose así con la hipótesis específica 3.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

De los antecedentes internacionales presentados en la subsección 2.1.1, el trabajo que nos permite aproximar una contrastación es el obtenido en [9], en el que realiza el control en una sola dirección, aplicando control Proporcional Integral Derivativo (PID), alcanzando un tiempo de establecimiento de 300 segundos (5 minutos) y con un sobrepico en el transitorio del 10%, que son valores mayores a los obtenidos en nuestro trabajo, sea para control óptimo o control deslizante; por lo que podemos anotar que nuestros resultados son más eficientes en cuanto a tiempo de respuesta (menor tiempo = mayor velocidad) y en cuanto a sobrepico.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha modelado la antena parabólica de comunicación satelital y aplicado las estrategias de control deslizante multivariable y control óptimo proporcional integral discreto multivariable, para el control de posición de los ángulos de azimut y elevación, cuyos resultados fueron expuestos en los capítulos IV y V.

En tal sentido, se puede concluir, anotando que:

- Se han obtenido los modelos no lineal y lineal de la antena parabólica de comunicación satelital, que han permitido la simulación de sus respuestas (ángulo de azimut y ángulo de elevación) usando Matlab.
- El diseño y simulación de la respuesta del controlador óptimo discreto multivariable, nos presenta una alta velocidad de respuesta, es decir un tiempo de asentamiento pequeño, que en el peor caso llega a 3.7 segundos en el caso del ángulo de elevación para referencia constante. Asimismo, presenta sobrepicos muy pequeños y torques generados, que como máximo llega a 250Nm para T2 (ver Tabla 3).
- El diseño y simulación de la respuesta del controlador deslizante multivariable, nos presenta una menor velocidad de respuesta para el ángulo de azimut, comparadas con el control óptimo; pero una alta velocidad de respuesta para el ángulo de elevación; sin embargo, los torques generados por el controlador deslizante, son mayores y mucho mayores que los generados por el control óptimo, que pueden llegar a -800 Nm para el ángulo de elevación (ver Tabla 3).

Tabla 3: Características de respuestas de las estrategias de Control Óptimo y Control Deslizante

Técnicas de Control	$x_1(t)$: Ang. Azimut		$x_2(t)$: Ang. Elevación	
	Referencia variante	Referencia constante	Referencia variante	Referencia constante
Control Óptimo	$t_s = 0.13 \text{ seg.}$	$t_s = 3 \text{ seg.}$	$t_s = 1.10 \text{ seg.}$	$t_s = 3.7 \text{ seg.}$
	$T_1 = 5 \text{ N.m (Máx)}$	$T_1 = 150 \text{ N.m (Máx)}$	$T_2 = 250 \text{ N.m (Máx)}$	$T_2 = 250 \text{ N.m (Máx)}$
	$MP = 0.0 \text{ rad}$	$MP = 0.07 \text{ rad}$	$MP = 0.07 \text{ rad}$	$MP = 0.07 \text{ rad}$
Control Deslizante	$t_s = 5.7 \text{ seg.}$	$t_s = 14 \text{ seg.}$	$t_s = 0.7 \text{ seg.}$	$t_s = 0.9 \text{ seg.}$
	$T_1 = \pm 300 \text{ N.m (Máx)}$	$T_1 = \pm 350 \text{ N.m (Máx)}$	$T_2 = -700 \text{ N.m (Máx)}$	$T_2 = -800 \text{ N.m (Máx)}$
	$MP = 0.4 \text{ rad}$	$MP = 0.35 \text{ rad}$	$MP = 0.0 \text{ rad}$	$MP = 0.03 \text{ rad}$

Finalmente podemos concluir que en general, la estrategia de Control Óptimo Proporcional Integral Discreto multivariable tiene mejor performance que el Control Deslizante multivariable; sin embargo, no debe descartarse el Control por Modo Deslizante, ya que los torques T_1 y T_2 pueden ser limitados por software, lo que produciría un incremento del tiempo de establecimiento, es decir, disminuiría la velocidad de respuesta del sistema de control, que desde el punto de vista físico, no habría inconvenientes para su implementación en tiempo real, ya que seguiría teniendo mejor respuesta del control PID [9].

RECOMENDACIONES

En primer lugar, se recomienda para trabajos futuros, buscar financiamiento para la implementación en tiempo real de la antena parabólica de comunicación satelital con todo el hardware y software asociados. De esta manera se fomentaría y motivaría el desarrollo de proyectos en las áreas del control, la robótica y la mecatrónica.

En segundo lugar, sería recomendable aplicar diferentes algoritmos de control lineales y no lineales, que permita comparar y validar resultados y finalmente aplicar el más eficiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARNAEZ, E. Enfoque práctico de la teoría de robots con aplicaciones a Matlab. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Perú, primera publicación: abril 2015.
- [2] BARRIENTOS, A. et al. Fundamentos de Robótica. McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A, segunda edición, ISBN 978-84-481-5636-7.
- [3] BENITES, N. Diseño de un Sistema Control de Posición Optimo Multivariable para un Manipulador Robótico Esférico. Tesis de Magister, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 2002.
- [4] CÓRDOVA, L. Diseño e implementación de un sistema de control y monitoreo mediante LabVIEW para una plataforma giratoria aplicada a los enlaces terrestre vía microondas y a una antena de recepción satelital. Tesis profesional, Universidad Politécnica Salesiana, sede Guayaquil, Ecuador, 2015.
- [5] CORKE, P. Robotics, Vision and Control FUNDAMENTAL ALGORITHMS IN MATLAB®. Springer International Publishing AG 2017, second edition. Springer Tracts in Advanced Robotics Volume 118.
- [6] COURSEWARE SAMPLE. Satellite Orbits, Coverage, and Antenna Alignment. Festo Didactic Ltee/Ltd, Quebec, Canada. ISBN 978-89640-473-5. 2011.
- [7] FILIPOV, A. Differential Equations with Discontinuous Righthands Sides. Kluwer Academic Publishers. Mathematics and Its Applications (Soviet Series)- ISBN 90-277-2699-X. 1988.
- [8] FLEY, E. Diseño y construcción de un prototipo de antena parabólica y su control automático de orientación para actividades de investigación y experimentación de la carrera de ingeniería electrónica de la universidad nacional de ingeniería. Tesis profesional, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, 2007.
- [9] FRANCISCO J., FINOL S. Diseño de una base auto-estabilizada para la regulación de una antena direccional de la estación móvil de control del sistema aéreo no tripulado ARPÍA-1. Tesis profesional, Universidad Rafael Urdaneta, 2014.
- [10] FU, K. et al. Robotics: control, sensing, vision and intelligence. McGraw-Hill. 1987.
- [11] H.M, MALDONADO-DEL TORO, R. et al. Modelado y simulación de un robot rígido de dos grados de libertad. ISSN 1870-9095. 2011.

- [12] HUERTA E., MANGIATERRA, A., NOGUERA, G. GPS: Posicionamiento Satelital. Argentina-Universidad Rosario, primera edición- ISBN: 950-673-488-7. 2005.
- [13] HUIDOBRO, J. Antenas de telecomunicaciones. Revista Digital de ACTA 2013.Publicación patrocinada por CEDRO, 2013.
- [14] ISERMANN R. & WITTERMARIC B. 1989. Digital Control Systems. Springer Verlag.
- [15] KHALIL, H. Nonlinear Systems. Prentice Hall, Third Edition – ISBN 0-13-067389-7. 2002
- [16] KUMAR, S. Introducción a la Robótica. McGraw-Hill/ Interamericana editores S.A., primera edición. ISBN 978-607-15-0313-8. 2010.
- [17] OGATA, K. Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall Hispanoamericana, tercera edición- ISBN 970-17-0048-1. 1998.
- [18] OGATA, K. Sistemas de Control en Tiempo Discreto. Prentice Hall Hispanoamericana, segunda edición- ISBN 968-880-539-4. 1996.
- [19] OLLERO, A. 2001. Robótica, Manipuladores y robots móviles. Alfaomega.
- [20] RODRÍGUEZ, L. Controlador de elevación para una Antena Satelital: Evaluación del control Convencional PD, el controlador Difuso tipo PD y el controlador deslizante Difuso-Edición Única. Tesis de maestría Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México, 2001.
- [21] ROJAS A. Control Avanzado Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real. Universidad Nacional de Ingeniería, Publicación independiente. Lima-Perú. 2001.
- [22] ROJAS, A. Applied Multivariable Nonlinear Control–Design and Real–Time Applications. 2002.
- [23] RUIZ, J. Implementación, instalación y puesta en marcha de antena semiautomática satelital para vehículos de brigadas de salud del gobierno nacional. Tesis profesional, Universidad Santo Tomás de Aquino, Facultad de Ingeniería, Bogotá, Colombia, 2016.
- [24] UMEZ-ERONINI, E. Dinámica de Sistemas y Control. Thomson Learning. 2001.
- [25] UTKIN, V. et al. Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems. CRC Press. Second Edition. 2009.

ANEXOS

ANEXO A: Matriz de consistencia

Título: “Control Deslizante y Control Óptimo Cuadrático de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital”

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	INDICADORES	DISEÑO DE INV.	POBLACION Y MUESTRA
<p>Problema General:</p> <p>¿De qué manera las técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante permitirán controlar los ángulos de Azimut y Elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?</p> <p>Problemas Específicos</p> <p>P.E. 1: ¿Es posible obtener el modelo del sistema antena parabólica de comunicación satelital?</p> <p>P.E. 2: ¿Es posible diseñar y simular un control Óptimo Cuadrático para la regulación de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?</p> <p>P.E. 3: ¿Es posible diseñar y simular un control Deslizante para la regulación de los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital?</p>	<p>Objetivo General:</p> <p>Diseñar las técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante que permitirá controlar los ángulos de Azimut y Elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.</p> <p>Objetivos Específicos</p> <p>O.E. 1: Obtener el modelo matemático de una antena parabólica de comunicación satelital y simular su comportamiento.</p> <p>O. E. 2: Diseñar y simular el Control Óptimo Cuadrático para regular los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.</p> <p>O. E. 3: Diseñar y simular el Control Deslizante para regular los ángulos de azimut y elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.</p>	<p>Hipótesis General:</p> <p>El diseño de técnicas de control óptimo cuadrático y control deslizante, permitirá controlar con precisión razonable los ángulos de azimut y de elevación de una antena parabólica de comunicación satelital.</p> <p>Hipótesis Específicas</p> <p>H.E. 1: La obtención del modelo matemático del sistema antena parabólica de comunicación satelital y su simulación, permitirá apreciar su comportamiento.</p> <p>H.E. 2: La aplicación del Control Óptimo Cuadrático, permitirá controlar los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica de comunicación satelital con precisión razonable.</p> <p>H.E. 3: La aplicación del Control Deslizante, permitirá controlar los ángulos de azimut y elevación de la antena parabólica de comunicación satelital con precisión razonable.</p>	<p>Variables Independientes</p> <p>Variables de control o de entrada, está determinada por las señales de:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Control Óptimo Cuadrático y ✓ Control Deslizante. <p>Variables Dependientes</p> <p>El sistema cuenta con dos grados de libertad representados por:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ ángulo de azimut y ✓ ángulo de elevación 	<p>X1. Componentes del sistema de control</p> <p>X2. Valor observable</p> <p>X3. Grado de actuación apropiado</p> <hr/> <p>Y1. Medida estimada</p> <p>Y2. Medida estimada</p> <p>Y3. Medidas estimadas</p>	<p>Temporal.</p> <p>El estudio es del tipo transversal, su ejecución se inicia el 3 de agosto del año 2018 y su posible término el 30 de julio del 2019.</p> <p>Espacial.</p> <p>El estudio se realizará en los ambientes de la facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.</p>	<p>Población</p> <p>No corresponde al presente proyecto de tesis.</p> <p>Muestra</p> <p>No corresponde al presente proyecto de tesis</p>

ANEXO B: Programas en Matlab

B.1 Programa de Simulación de la Respuesta del Modelo No Lineal de la Antena Parabólica

```
% FILE anteparnolin.m
% SIMULACION DE LOS ANGULOS DE AZIMUT Y ELEVACION DE UNA
ANTENA PARABOLICA
% DE COMUNICACION SATELITAL
% EN ESTE SISTEMA MIMO DE DOS ENTRADAS Y DOS SALIDAS SE
USAN DOS SERVOMOTORES

clear
close all
%DATOS DEL SISTEMA DE LA ANTENA PARABOLICA
% Todas las unidades estan en MKS
g0 = 9.81;% m/s
m1 = 5;    % kg
m2 = 8;    % kg
m3 = 10;   % kg
H = 2;     % m
l2 = 1;    % m
r1 = 0.25; % m
a = 0.20;  % m
R = 1;     % m
b1 = 0.01;
b2 = 0.15;

% EVALUACION DE ALGUNAS EXPRESIONES
dzz = m1*r1^2+m2/6*a^2+m3/2*R^2;
dxz = (m3+m2/3)*l2^2-m2/12*a^2-m3/4*R^2;
d22 = (m3+m2/3)*l2^2+m2/12*a^2+m3/4*R^2;

% CONDICIONES INICIALES DE LAS VARIABLES DE ESTADO
X(1,1)=0;    % X1(0)
X(2,1)=-pi/4; % X2(0)
X(3,1)=0;    % X3(0)
X(4,1)=0;    % X4(0)

h = 0.01;    % PRECISION DE INTEGRACION
for k=1:10/h;
    TT(k)=(k-1)*h;
    t = (k-1)*h;

    % ASIGNACION DE LOS TORQUES DE CADA MOTOR
    T(1,k)= 0.35; % TORQUE GENERADO POR EL MOTOR 1 (ACTUA
SOBRE EL ANGULO DE AZIMUTH)
```

```
T(2,k)= 8.381; % TORQUE GENERADO POR EL MOTOR 2 (ACTUA
SOBRE EL ANGULO DE ELEVACION)
```

```
% CALCULOS DE ALGUNAS EXPRESIONES ASIGNADAS PARA
SIMPLIFICACION
```

```
d11 = dzz+dxz*cos(X(2,k))*cos(X(2,k));
dnn = dxz*cos(X(2,k))*sin(X(2,k));
dmm = (m2/2+m3)*l2*g0*cos(X(2,k));
```

```
% SOLUCION MEDIANTE EL METODO DIFERENCIAL DE EULER
X(1,k+1)= X(1,k)+h*X(3,k);
X(2,k+1)= X(2,k)+h*X(4,k);
X(3,k+1)= X(3,k)+h*((2*dnn*X(3,k)*X(4,k)-
b1*X(3,k))/d11+T(1,k));
X(4,k+1)= X(4,k)+h*((-dnn*X(3,k)*X(3,k)-dmm-
b2*X(4,k))/d22+T(2,k));
```

```
% EVALUACION DE LAS SALIDAS
Y1(k)= X(1,k);
Y2(k)= X(2,k);
```

```
% ASIGNACION DE LOS ESTADOS
X1(k)= X(1,k);
X2(k)= X(2,k);
X3(k)= X(3,k);
X4(k)= X(4,k);
```

```
end
```

```
% Graficas
```

```
figure(1)
plot(TT,180/pi*Y1,'b')
grid
title ('Angulo de azimuth en grados sexagesimales (°)')
ylabel('alfa(t) (°)')
xlabel('t(seg)')
```

```
figure(2)
plot(TT,180/pi*Y2,'r')
grid
title ('Angulo de elevacion en grados sexagesimales (°)')
ylabel('beta(t) (°)')
xlabel('t(seg)')
```

```
figure(3)
plot(TT,180/pi*X1,'-',TT,180/pi*X2,'--')
grid
title ('Graficas de los angulos de azimuth y de elevacion
en (°)')
ylabel('alpha(t) (°), beta(t) (°)')
```

```

xlabel('t(seg)')

text(6.2,8400,'- - : Angulo de Elevacion')
text(6.5,1000,'- : Angulo de Azimuth')

figure(4)
plot(TT,X3,'b')
grid
title ('Velocidad del angulo de azimuth ')
ylabel('Vel. Ang. Azimuth(t) (rad/s)')
xlabel('t(seg)')

figure(5)
plot(TT,X4,'r')
grid
title ('Velocidad del angulo de elevacion ')
ylabel('Vel. Ang. Elevacion(t) (rad/s)')
xlabel('t(seg)')

figure(6)
plot(TT,X3,'-',TT,X4,'--')
grid
title ('Velocidades de los angulos de azimuth y elevacion ')
ylabel('Vel. Ang. Azimuth(t), Vel. Ang. Elevacion(t) (rad/s)')
xlabel('t(seg)')

text(6.2,35,'- - : Vel. Ang. de Elevacion')
text(6.5,7,'- : Vel. Ang. de Azimuth')

```

B.2 Programa de Simulación de la Respuesta del Modelo Lineal de la Antena Parabólica

```
% FILE anteparlin.m
% RESPUESTA DEL MODELO LINEALIZADO EN TIEMPO CONTINUO Y EN
TIEMPO DISCRETO
% SIMULACION DE LOS ANGULOS DE AZIMUTH Y ELEVACION DE UNA
ANTENA PARABOLICA
% DE COMUNICACION SATELITAL
% EN ESTE SISTEMA MIMO DE DOS ENTRADAS Y DOS SALIDAS SE
USAN DOS SERVOMOTORES

clear
close all
%DATOS DEL SISTEMA DE LA ANTENA PARABOLICA
% Todas las unidades estan en el sistema MKS
g0 = 9.81;% m/s
m1 = 5; % kg
m2 = 8; % kg
m3 = 10; % kg
H = 2; % m
l2 = 1; % m
r1 = 0.25; % m
a = 0.20; % m
R = 1; % m
b1 = 0.01;
b2 = 0.15;

% EVALUACION DE ALGUNAS EXPRESIONES
dzz = m1*r1^2+m2/6*a^2+m3/2*R^2;
dxz = (m3+m2/3)*l2^2-m2/12*a^2-m3/4*R^2;
d22 = (m3+m2/3)*l2^2+m2/12*a^2+m3/4*R^2;

% VARIABLE X2 EN EL PUNTO DE OPERACION
X2b=-pi/2;

% EVALUACION DE ALGUNAS ASIGNACIONES PARA SIMPLIFICACION
a33=-b1/(dzz+dxz*(cos(X2b))^2);
a42=(m3+m2/2)*l2*g0*sin(X2b)/d22;
a44=-b2/d22;
b31=1/(dzz+dxz*(cos(X2b))^2);
b42=1/d22;

% MATRICES DEL SISTEMA LINEALIZADO
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 a33 0; 0 a42 0 a44];
B=[0 0; 0 0; b31 0; 0 b42];
C=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
D=[0 0; 0 0];
```

```

% DETERMINACION DE LA CONTROLABILIDAD EN TIEMPO CONTINUO
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
rangoM=rank(M); % al ejecutarse, el rango sale 4
(completamente controlable)

% PLOTEO PARA ENTRADAS ESCALON EN TIEMPO CONTINUO
sys=ss(A,B,C,D);
t=0:0.001:10; % asignacion del tiempo de ploteo

T12=ones(2,length(t)); % torques asignados a cada motor
(tipo escalón)
T(1,:)=1*T12(1,:);
T(2,:)=10*T12(2,:);
%T(1,:)=0.35*T12(1,:);
%T(2,:)=8.381*T12(2,:);

X0=[0 -pi/4 0 0]';
[Yc,t1,Xc]=lsim(sys,T,t,X0);

figure(1)
plot(t,Yc(:,1)*180/pi,'b')
grid
title('Angulo de azimuth en tiempo continuo')
ylabel('alpha(t) = x1(t) (°)')
xlabel('t (seg)')

figure(2)
plot(t,Yc(:,2)*180/pi,'r')
grid
title('Angulo de elevacion en tiempo continuo')
ylabel('beta(t) = x2(t) (°)')
xlabel('t (seg)')

figure(3)
plot(t,Xc(:,3),'b')
grid
title('Vel. Ang. de azimuth en tiempo continuo')
ylabel('Vel. azimuth (t) = x3(t) (rad/s)')
xlabel('t (seg)')

figure(4)
plot(t,Xc(:,4),'r')
grid
title('Vel. Ang. de elevacion en tiempo continuo')
ylabel('Vel. elevacion (t) = x4(t) (rad/s)')
xlabel('t (seg)')

% DISCRETIZACION DEL SISTEMA

```

```

Ts=0.001;    % Periodo de muestreo
% CONVERSION DE TIEMPO CONTINUO A TIEMPO DISCRETO
[G,H,Cd,Dd]=c2dm(A,B,C,D,Ts,'zoh');

% CONTROLABILIDAD
Md=[H G*H G^2*H G^3*H];
rangoMd=rank(Md);

% OBSERVABILIDAD
Nd=[C' G'*C' G'^2*C' G'^3*C'];
rangoNd=rank(Nd);

% GENERACION DE LA SALIDA Y LOS ESTADOS EN TIEMPO DISCRETO
[Yd,Xd]=dlsim(G,H,Cd,Dd,T);

% PLOTEO EN TIEMPO DISCRETO
figure(5)
stairs(Yd(:,1)*180/pi);
grid
title('Ang. de azimuth en tiempo discreto')
ylabel('alpha(k) = x1(k) (°)')
xlabel('k')

figure(6)
stairs(Yd(:,2)*180/pi);
grid
title('Ang. de elevacion en tiempo discreto')
ylabel('beta(k) = x2(k) (°)')
xlabel('k')

figure(7)
plot(t/Ts,Xd(:,3),'b')
grid
title('Vel. Ang. de azimuth en tiempo discreto')
ylabel('Vel. azimuth = x3(k) (rad/s)')
xlabel('k')

figure(8)
plot(t/Ts,Xd(:,4),'r')
grid
title('Vel. Ang. de elevacion en tiempo discreto')
ylabel('Vel. elevacion = x4(k) (rad/s)')
xlabel('k')

```

B.3 Programa de Control Deslizante Multivariable de la antena parabólica

```
%FILE slid_antena.m
%SIMULACIÓN DE LOS ANGULOS DE AZIMUT Y ELEVACION DE UNA
ANTENA PARABOLICA
%DE COMUNICACION SATELITAL
%EN ESTE SISTEMA MIMO DE DOS ENTRADAS Y DOS SALIDAS SE USAN
DOS SERVOMOTORES

clear close all
%DATOS DEL SISTEMA DE LA ANTENA PARABOLICA
%Todas las unidades estan en el sistema MKS
g0=9.81; %m/s
m1=5; % kg
m2=8; % kg
m3=10; % kg
H=2; % m
l2=1; % m
r1=0.25; % m
a=0.20; % m
R=1; % m
b1=0.01; b2=0.15;

%EVALUACIÓN DE ALGUNAS EXPRESIONES
dzz=m1*r1^2+m2/6*a^2+m3/2*R^2;
dxz=(m3+m2/2)*l2^2-m2/12*a^2-m3/4*R^2;
d22=(m3+m2/2)*l2^2+m2/12*a^2+m3/4*R^2;

%PARAMETROS DEL CONTROL
c1=30; c2=30; e1=0.1; e2=0.6; phi=0.1;

%CONDICIONES Y PARAMETROS INICIALES
x1(1)=0.1;
x2(1)=0.1;
x3(1)=0;
x4(1)=0;

%ALGUNAS CONSTANTES
M11=dzz;
M12=0;
M21=0;
M22=d22;

%TIEMPO DE MUESTREO
Nm=1000;
Ts=0.01;

for k=1:Nm
```

```

%Trayectoria deseada xd1 y xd2
%xd1(k)=pi/2*cos(k*4*pi/Nm);
%xd2(k)=pi/6*sin(k*3*pi/Nm);

xd1(k)=pi/2*cos(k*2*pi/Nm); % referencia variante para
xd1
xd2(k)=pi/6*sin(k*3*pi/Nm); % referencia variante para
xd2

%xd1(k)=pi/6; % referencia constante para xd1
%xd2(k)=pi/8; % referencia constante para xd2

%dxd1(k)=diff(xd1(k));
%ddxd1(k)=diff(dxd1(k));

%dxd2(k)=diff(xd2(k));
%ddxd2(k)=diff(dxd2(k));

dxd1(k)=0; ddxd1(k)=0;
dxd2(k)=0; ddxd2(k)=0;

%Dinámica del sistema
m11(k)=M11+dxz*cos(x2(k))*cos(x2(k));
m12(k)=M12;
m21(k)=M21;
m22(k)=M22;

p11(k)=b1-2*dxz*cos(x2(k))*sin(x2(k))*x4(k);
p12(k)=0;
p21(k)=dxz*cos(x2(k))*sin(x2(k))*x3(k);
p22(k)=b2;

if(p11(k)>x3(k))
    p11(k)=p11(k)+x3(k);
elseif(p11(k)<-x3(k))
    p11(k)=p11(k)-x3(k);
end
%LIMITANDO p11
if(p11(k)>2)
    p11(k)=2;
elseif(p11(k)<-2)
    p11(k)=-2;
end

if(p22(k)>x4(k))
    p22(k)=p22(k)+x4(k);
elseif(p11(k)<-x4(k))
    p22(k)=p22(k)-x4(k);

```

```

end
%LIMITANDO p22
if (p22 (k) >2)
    p22 (k) =2;
elseif (p22 (k) <-2)
    p22 (k) =-2;
end

q11 (k) =0;
q21 (k) = (m2/2+m3) *l2*g0*cos (x2 (k) );

P11 (k) =b1-2*dxz*cos (x2 (k) ) *sin (x2 (k) ) *abs (x4 (k) );
P12 (k) =0;
P21 (k) =dxz*cos (x2 (k) ) *sin (x2 (k) ) *abs (x3 (k) );
P22 (k) =b2;

if (P11 (k) >x3 (k) )
    P11 (k) =P11 (k) +x3 (k) ;
elseif (P11 (k) <-x3 (k) )
    P11 (k) =P11 (k) -x3 (k) ;
end
%LIMITANDO P11
if (P11 (k) >2)
    P11 (k) =2;
elseif (P11 (k) <-2)
    P11 (k) =-2;
end

if (P22 (k) >x4 (k) )
    P22 (k) =P22 (k) +x4 (k) ;
elseif (P11 (k) <-x4 (k) )
    P22 (k) =P22 (k) -x4 (k) ;
end
end
%LIMITANDO p22
if (P22 (k) >2)
    P22 (k) =2;
elseif (P22 (k) <-2)
    P22 (k) =-2;
end

end

%SUPERFICIE DE CONTROL
s1 (k) = (x3 (k) -dxd1 (k) ) +c1* (x1 (k) -xd1 (k) );
s2 (k) = (x4 (k) -dxd2 (k) ) +c2* (x2 (k) -xd2 (k) );

K1 (k) =M11*abs (ddxd1 (k) -c1* (x3 (k) -
dxd1 (k) ) ) +P11 (k) *abs (x3 (k) -s1 (k) ) + ...
M12*abs (ddxd2 (k) -c2* (x4 (k) -
dxd2 (k) ) ) +P12 (k) *abs (x4 (k) -s2 (k) ) +e1;

```

```

K2(k)=M21*abs(ddxd1(k)-c1*(x3(k)-
dxd1(k)))+P21(k)*abs(x3(k)-s1(k))+...
M22*abs(ddxd2(k)-c2*(x4(k)-
dxd2(k)))+P22(k)*abs(x4(k)-s2(k))+e2;

```

```

%if(s1(k)>0)
%   sigs1=1;
%else
%   sigs1=-1;
%end

```

```

if(s1(k)/phi>1)
    sat1=1;
elseif (s1(k)/phi<-1)
    sat1=-1;
else sat1=s1(k)/phi;
end

```

```

%if(s2(k)>0)
%   sigs2=1;
%else
%   sigs2=-1;
%end

```

```

if(s2(k)/phi>1)
    sat2=1;
elseif (s2(k)/phi<-1)
    sat2=-1;
else
    sat2=s2(k)/phi;
end

```

```

u1(k)=q11(k)-K1(k)*sat1;

```

```

%LIMITANDO FUERZA DE CONTROL u1
if (u1(k)>350)
    u1(k)=350;
elseif (u1(k)<-350)
    u1(k)=-350;
end

```

```

u2(k)=q21(k)-K2(k)*sat2;

```

```

%LIMITANDO FUERZA DE CONTROL u1
if (u2(k)>250)
    u2(k)=250;
elseif (u1(k)<-250)

```

```

        u2(k)=-250;
    end

    x1(k+1)=x1(k)+Ts*x3(k);
    x2(k+1)=x2(k)+Ts*x4(k);
    x3(k+1)=x3(k)+Ts*(-p11(k)*x3(k)+u1(k))/m11(k);
    x4(k+1)=x4(k)+Ts*(-p21(k)*x3(k)-q21(k)-
p22(k)*x4(k)+u2(k))/M22;
end

q=[x1' x2'];
%Simulaciones
ejex=linspace(0,Nm*Ts,Nm);

figure(1)
subplot(211)
plot(ejex,xd1(1:Nm),ejex,x1(1:Nm))
grid on
title('Control por modo deslizante para la Ant. Parab.')
ylabel('Angulo de azimuth: x1 [radianes]')
subplot(212)
plot(ejex,u1),
grid on
%title('Señal de Control Azimuth-Modo deslizamiento')
ylabel('Control T1 [N.m]')
xlabel('Tiempo[Seg.]')

figure(2)
subplot(211)
plot(ejex,xd2(1:Nm),ejex,x2(1:Nm))
grid on
title('Control por modo deslizante para la Ant. Parab.')
ylabel('Angulo de elevacion:[radianes]')
subplot(212)
plot(ejex,u2),
grid on
%title('Señal de Control Elevación - Modo deslizamiento')
ylabel('Control T2 [N.m]')
xlabel('Tiempo[Seg.]')

figure(3)
subplot(211)
plot(ejex,x3(1:Nm))
grid on
title('Velocidad de Azimuth-Modo deslizamiento')
ylabel(' [Rad/Seg.]')
subplot(212)
plot(ejex,x4(1:Nm))
grid on

```

```

title ('Velocidad de Elevación - Modo deslizamiento')
ylabel ('[Rad/Seg.]')
xlabel ('Tiempo[Seg.]')

```

B.4 Programa de Control Optimo Cuadrático Multivariable para la antena parabólica

```

% Archivo: anteoptimo.m
% CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL INTEGRAL DE LOS ANGULOS DE
AZIMUTH
% Y ELEVACION DE UNA ANTENA PARABOLICA DE COMUNICACION
SATELITAL

```

```

clear
close all
%DATOS DEL SISTEMA DE LA ANTENA PARABOLICA
% Todas las unidades estan en el sistema MKS
g0 = 9.81;% m/s
m1 = 5;      % kg
m2 = 8;      % kg
m3 = 10;     % kg
H = 2;      % m
l2 = 1;      % m
r1 = 0.25;   % m
a = 0.20;    % m
R = 1;      % m
b1 = 0.01;
b2 = 0.15;

```

```

% EVALUACION DE ALGUNAS EXPRESIONES
dzz = m1*r1^2+m2/6*a^2+m3/2*R^2;
dxz = (m3+m2/3)*l2^2-m2/12*a^2-m3/4*R^2;
d22 = (m3+m2/3)*l2^2+m2/12*a^2+m3/4*R^2;

```

```

% VARIABLE X2 EN EL PUNTO DE OPERACION
X2b=-pi/2;

```

```

% EVALUACION DE ALGUNAS ASIGNACIONES PARA SIMPLIFICACION
a33=-b1/(dzz+dxz*(cos(X2b))^2);
a42=(m3+m2/2)*l2*g0*sin(X2b)/d22;
a44=-b2/d22;
b31=1/(dzz+dxz*(cos(X2b))^2);
b42=1/d22;

```

```

% MATRICES DEL SISTEMA LINEALIZADO
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 a33 0; 0 a42 0 a44];
B=[0 0; 0 0; b31 0; 0 b42];

```

```

C=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
D=[0 0; 0 0];

% DETERMINACION DE LA CONTROLABILIDAD EN TIEMPO CONTINUO
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
rangoM=rank(M); % al ejecutarse, el rango sale 4
(completamente controlable)

% DISCRETIZACION DEL SISTEMA
Ts=0.01; % Periodo de muestreo

% CONVERSION DE TIEMPO CONTINUO A TIEMPO DISCRETO
[G,H,Cd,Dd]=c2dm(A,B,C,D,Ts,'zoh');

% CONTROLABILIDAD
Md=[H G*H G^2*H G^3*H];
rangoMd=rank(Md);

% OBSERVABILIDAD
Nd=[C' G'*C' G'^2*C' G'^3*C'];
rangoNd=rank(Nd);

% MATRICES AMPLIADAS DEBIDO A LA INSERCIÓN DEL INTEGRADOR
EN EL CONTROLADOR
Ga = [G zeros(4,2)
      -Cd*G eye(2,2)];
Ha = [H;-Cd*H];

% CALCULO DE LA CONTROLABILIDAD EN TIEMPO DISCRETO DEL
SISTEMA AMPLIADO
Md=[Ha Ga*Ha Ga^2*Ha Ga^3*Ha Ga^4*Ha Ga^5*Ha];
rangoMd=rank(Md); %RANGO DEL SISTEMA AMPLIADO= 6
% CALCULO DE LA OBSERVABILIDAD EN TIEMPO DISCRETO DEL
SISTEMA AMPLIADO
Nd=[Cd' G'*Cd' (G')^2*Cd' (G')^3*Cd'];
rangoNd=rank(Nd); %RANGO DEL SISTEMA AMPLIADO= 4

% MATRICES DE PONDERACION
%Qa=[1000 0 0 0 0 0;
%    0 1000 0 0 0 0;
%    0 0 1000 0 0 0;
%    0 0 0 1000 0 0;
%    0 0 0 0 500 0;
%    0 0 0 0 0 500];

%R=[50 0;
%   0 50];

R=1*eye(2);

```

```

Qa=80000*eye(6);
P=zeros(6,6);
for i=1:5000
P=Qa+Ga'*P*Ga-Ga'*P*Ha*inv(R+Ha'*P*Ha)*Ha'*P*Ga;
end

K1=inv(R+Ha'*P*Ha)*Ha'*P*Ga;
[KK,PP]=dlqr(Ga,Ha,Qa,R); % K1=KK, P=PP
K=[KK(1,1) KK(1,2) KK(1,3) KK(1,4)
    KK(2,1) KK(2,2) KK(2,3) KK(2,4)];
KI = - [KK(1,5) KK(1,6)
        KK(2,5) KK(2,6)];

Kc1=[KK(1,1) KK(1,2) KK(1,3) KK(1,4)];
Kc2=[KK(2,1) KK(2,2) KK(2,3) KK(2,4)];
KI1= - [KK(1,5)];
KI2= - [KK(2,6)];

% CALCULO DE LA GANANCIA DEL OBSERVADOR DE ESTADOS

% MATRICES DE PONDERACION PARA EL OBSERVADOR
%Qe=[100  0  0  0;
%    0 100  0  0;
%    0  0 100  0;
%    0  0  0 100];

%Re=[10  0;
%    0 10];

Qe=400*eye(4); Re=1*eye(2);
Pe = zeros(4,4);
for i=1:5000
Pe = Qe + G*Pe*G' -G*Pe*Cd'*inv(Re+Cd*Pe*Cd')*Cd*Pe*G';
end
KeT = inv(Re+Cd*Pe*Cd')*Cd*Pe*G'; Ke=KeT';
[KKeT,PPe] = dlqr(G',Cd',Qe,Re); KKe=KKeT';% Pe=PPe,
Ke=KKe

% SIMULACION DEL SISTEMA DE CONTROL OPTIMO MULTIVARIABLE
% CONDICIONES INICIALES
x1=0; x2=0; x3=0; x4=0;
xe1=0; xe2=0; xe3=0; xe4=0;
x = [x1;x2;x3;x4];
xe = [xe1;xe2;xe3;xe4];
v1=0; v2=0;
v=[v1;v2];

% LAZO DE CONTROL
N = 2000; % TIEMPO EN SEGUNDOS: T*N

```

```

for k=1:N

% LEY DE CONTROL
u1=-Kc1*xe+KI1*v1;
u2=-Kc2*xe+KI2*v2;
u=[u1;u2]; % REPRESENTACION VECTORIAL

% RESTRICCIONES PARA NO SATURAR A LOS AMPLIFICADORES
if(u1 > 140), u1 = 140;
elseif(u1 < -140), u1 = -140;
end

if(u2 > 250), u2 = 250;
elseif(u2 < -250), u2 = -250;
end

% ESTADOS ESTIMADOS
xe = G*xe + H*u + Ke*([x1;x2] - Cd*xe);

% PROCESO LINEAL DISCRETIZADO

x1=G(1,1)*x1+G(1,2)*x2+G(1,3)*x3+G(1,4)*x4+H(1,1)*u1+H(1,2)*u2;

x2=G(2,1)*x1+G(2,2)*x2+G(2,3)*x3+G(2,4)*x4+H(2,1)*u1+H(2,2)*u2;

x3=G(3,1)*x1+G(3,2)*x2+G(3,3)*x3+G(3,4)*x4+H(3,1)*u1+H(3,2)*u2;

x4=G(4,1)*x1+G(4,2)*x2+G(4,3)*x3+G(4,4)*x4+H(4,1)*u1+H(4,2)*u2;

% SETPOINT
%r1(k)=exp(-0.003*k)+sin(0.003*k);%TRAYECTORIA 1
%r2(k)=cos(0.003*k)+0.00028*k; %TRAYECTORIA 2

r1(k)=sin(0.002*k); %TRAYECTORIA 1
r2(k)=cos(0.002*k)+0.0002*k; %TRAYECTORIA 2
%r1(k)=1; r2(k)=1; %REFERENCIAS 1 Y 2
CONSTANTES

% ERROR DE SEGUIMIENTO
e1=r1(k)-x1; e2=r2(k)-x2;

% SALIDA DEL INTEGRADOR
v1 = v1 + r1(k) - x1;
v2 = v2 + r2(k) - x2;

```

```

v=[v1;v2]; % REPRESENTACION VECTORIAL

% ASIGNACION DE VARIABLES PARA PLOTEO
y1(k)=x1; y2(k)=x2;
U1(k) =u1; U2(k)=u2;

end

% PLOTEO
t = linspace(0,N*Ts,N);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,r1,'-',t,y1,'--'); grid
title('Control Optimo Proporcional Integral para el Sist.
Ant. Parab.')
ylabel('Angulo de azimuth: x1 (radianes)')
%xlabel('Tiempo : segundos')
%text(1.2,0.4,'- : r1(t)')
%text(1.2,0.1,'- - : x1(t)')
subplot(2,1,2)
plot(t,U1), grid
ylabel('Control T1 (N.m)')
xlabel('Tiempo : segundos')
%print -f -deps anteopt1

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,r2,'-',t,y2,'--'); grid
title('Control Optimo Proporcional Integral para el Sist.
Ant. Parab.')
ylabel('Angulo de elevacion: x2 (radianes)')
%xlabel('Tiempo : segundos')
%text(2.2,0.6,'- : r2(t)')
%text(2.2,0.2,'- - : x2(t)')
subplot(2,1,2)
plot(t,U2), grid
ylabel('Control T2 (N.m)')
xlabel('Tiempo : segundos')
%print -f -deps anteopt2

```