

T/510/A18

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA**

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Una Barrera Autoconcordante para el Hiper cubo

Tesis para Optar el Título Profesional de
Licenciado en Matemática

Norma Flor Acosta Tafur

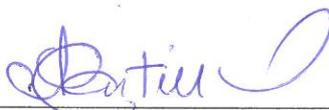
**CALLAO-PERU
SETIEMBRE-2005**

UNA BARRERA AUTOCONCORDANTE PARA EL HIPERCUBO

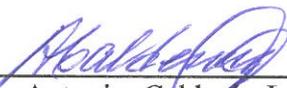
NORMA FLOR ACOSTA TAFUR

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por el jurado:



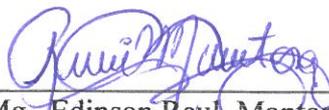
Lic. Absalón, Castillo Valdivieso
Presidente



Lic. Antonio, Calderón Leandro
Secretario



Lic. Wilfredo, Mendoza Quispe
Objetante



Mg. Edinson Raul, Montoro Alegre
Asesor

**CALLAO-PERU
SETIEMBRE-2005**

Ficha Catalográfica

Acosta Tafur, Norma Flor

Una Barrera Autoconcordante para el Hipercubo, Callao (2005).

ix , 72 p., 29,7 cm. (UNAC, Licenciado en Matemática, 2005).

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 1 .
Matemática.

I.UNAC / FCNM II. Título (Serie)

Dedico este trabajo a mis Padres **Daniel** y **Norma** , por su apoyo incondicional e infinito amor y comprensión.

AGRADECIMIENTO

A mi asesor Mg. Edinson Raul Montoro Alegre, por brindarme su sincera amistad, motivación, confianza y orientación en la elaboración de esta tesis y por dedicarme muchas horas con ahínco en el desarrollo del presente trabajo.

Agradezco también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por mi formación profesional, a mis padres y hermanos por su plena confianza y su apoyo incondicional. En especial a Erik Alex Papa Quiroz por sus valiosos aportes y sugerencias, por su apoyo moral durante todo el desarrollo de esta tesis. Asimismo agradezco el importante apoyo de mi amigo Roberto Yantas Rivera.

RESUMEN
UNA BARRERA AUTOCONCORDANTE PARA EL HIPERCUBO
NORMA FLOR, ACOSTA TAFUR

SETIEMBRE-2005

Asesor: Mg. Edinson Raul, Montoro Alegre.

Título obtenido: Licenciado en Matemática.

La mayoría de los artículos que tratan sobre métodos de punto interior para primal y primal-dual usan la función Barrera Logarítmica para garantizar la polinomialidad de sus algoritmos.

En este trabajo se propone una nueva función barrera 4n-Autoconcordante, definida como:

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$$

Y se presenta un Algoritmo siguiendo un camino de paso largo para resolver el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c'x \\ \text{s.a :} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Presentamos una cota superior para el número total de iteraciones Newton necesarias para obtener una solución ε -óptima. Se obtiene la complejidad de $O\left(n \ln\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$ iteraciones para este algoritmo.

PALABRAS CLAVES:

MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR

FUNCIÓN AUTOCONCORDANTE

FUNCIÓN BARRERA

MÉTODO DE NEWTON

ABSTRACT

A SELF-CONCORDANT BARRIER FOR THE HYPERCUBE

NORMA FLOR, ACOSTA TAFUR

SEPTEMBER-2005

Adviser: Mg. Edinson Raul, Montoro Alegre.

Obtained Title: Licenciante in Mathematic.

The majority of the articles that treat on Methods of Interior Point for primal and primal-dual use the function Logarithmic Barrier to guarantee the polynomiality of their algorithms.

In this work a new function proposes Barrier $4n$ -self-Concordante, defined like:

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - 1)[\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$$

And one presents an long step path following Algorithm to solve the linear programming problem :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c'x \\ \text{s.a :} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

We present a upper bound for the total number of Newton iterations necessary to obtain a solution ε -optimal. The complexity of $O\left(n \ln\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$ iterations is obtained for this algorithm.

KEY WORDS:

METHOD OF THE INTERIOR POINT

SELF-CONCORDANT FUNCTION

BARRIER FUNCTION

METHOD OF NEWTON

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN	1
	CONCEPTOS PREVIOS	2
	1.1 CONDICIONES NECESARIAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN	2
	1.2 CONDICIONES SUFICIENTES DE SEGUNDO ORDEN	6
	1.3 DERIVACIÓN DEL ALGORITMO POR PUNTO INTERIOR	7
	1.4 EXPOSICIÓN GENERAL DEL ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN POR PUNTO INTERIOR	9
	1.5 PRUEBAS DE CONVERGENCIA POR EL ALGORITMO DE PUNTO INTERIOR	11
	EJEMPLO 1.1	13
CAPÍTULO 2	EL CAMINO CENTRAL	15
	2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	15
	2.2 LA FORMULACIÓN DUAL	16
	DEFINICIÓN 2.1.-EL CAMINO CENTRAL	17
	DEFINICIÓN 2.2.-BARRERA C-AUTOCONCORDANTE	19
	TEOREMA 2.1	20
	LEMA 2.1	28
CAPÍTULO 3	PROPIEDADES CERCANAS AL CAMINO CENTRAL	33
	LEMA 3.1	33
	LEMA 3.2	36
	LEMA 3.3	41
	LEMA 3.4	43

CAPÍTULO 4	ALGORITMO SIGUIENDO EL CAMINO DE PASO LARGO	48
	4.1 ALGORITMO	48
	4.2 DEFINICIONES	50
CAPÍTULO 5	ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD	51
	LEMA 5.1	51
	LEMA 5.2	51
	TEOREMA 5.1	52
	LEMA 5.3	55
	TEOREMA 5.2	57
	TEOREMA 5.3	63
	RESULTADOS	65
	DISCUSIÓN	66
	CONCLUSIONES	67
APÉNDICES		68
A	ESTABILIDAD DE BARRERAS AUTOCONCORDANTES	68
	PROPOSICIÓN A.1	68
B	LEMAS GENERALES	70
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		71

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los métodos polinomiales, (es decir aquellos métodos cuyas operaciones aritméticas requeridas para resolver el problema está acotada superiormente por un polinomio en el tamaño del problema) para optimización Convexa han llegado a ser un tema central en programación matemática desde que Nesterov y Nemirovsky [10] probaron La Polinomialidad para cierta clase de optimización convexa, introduciendo el concepto de Barrera Autoconcordante . En este contexto la Barrera logarítmica propuesta por Frisch [5] y otra desarrollada por Fiacco y McCormick [4], juega un rol fundamental, debido a que, la mayoría de trabajos usa esta barrera para garantizar la polinomialidad de sus algoritmos.

Otras barreras para métodos de punto interior fueron introducidas, pero desafortunadamente ellas no probaron la polinomialidad, ver [2], [3], [13]. Así la pregunta natural surge si es posible probar la polinomialidad para otros métodos de barrera.

El esbozo de este trabajo es como sigue: En éste capítulo se analiza la convergencia para Barreras Generales. En el capítulo 2 , se describe el problema a tratar y se define el camino central asociado para resolver dicho problema de programación lineal con variables acotadas para luego introducir una nueva Barrera 4n-Autoconcordante

$\sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$ sobre el Hipercono $\langle 0,1 \rangle^n$. En el capítulo 3 se estudia

algunas propiedades cercanas al camino central que son necesarias para analizar la complejidad de nuestro algoritmo siguiendo el camino de paso largo, que es propuesto en el capítulo 4. En el capítulo 5, derivamos cotas superiores para obtener la polinomialidad de este algoritmo, en ese sentido obtenemos la siguiente cota superior de

$O\left(n \ln\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$ para el número de iteraciones para encontrar una ε -solución, finalmente

se presenta los resultados, discusión y conclusiones.

Los Apéndice contienen algunos Lemas generales que son usados en este trabajo.

CONCEPTOS PREVIOS

1.1 Condiciones necesarias de Primer orden

Un problema con restricciones es de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{s.a: } & g_i(x) \geq 0 \quad , i=1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad , j=1, \dots, p \end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde f, g_i , para $i=1, \dots, m$, h_j , para $j=1, \dots, p$ son funciones reales de variable vectorial.

Vamos a convertirla en un problema sin restricciones y analizar su convergencia a la solución óptima, para esto será necesario lo siguiente:

Definición 1.1.- Definimos la función Lagrangeana $L(x, u, w)$ asociada con el problema (1.1) como:

$$L(x, u, w) = f(x) - \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p w_j h_j(x)$$

Donde x es un vector de dimensión n , $u = (u_1, \dots, u_m)$ y $w = (w_1, \dots, w_p)$.

Sea x^* un punto que satisface las restricciones del problema (1.1) y las funciones de dicho problema diferenciables.

Denotemos a $\nabla f(x^*)$ por ∇f^* y similarmente para las otras funciones.

Definamos ahora los siguientes conjuntos:

$$Z_1^* = \{ z \in \mathbb{R}^n / z' \nabla g_i^*(x) \geq 0 \ (\forall i \in B^*); z' \nabla h_j^*(x) = 0, j = 1, \dots, p \text{ y } z' \nabla f^*(x) \geq 0 \}$$

$$Z_2^* = \{ z \in \mathbb{R}^n / z' \nabla g_i^*(x) \geq 0 \ (\forall i \in B^*); z' \nabla h_j^*(x) = 0, j = 1, \dots, p \text{ y } z' \nabla f^*(x) < 0 \}$$

$$Z_3^* = \{ z \in \mathbb{R}^n / z' \nabla g_i^*(x) \geq 0 \ (\text{para al menos un } i \in B^*); \text{ ó } z' \nabla h_j^*(x) \neq 0 \ (\text{para al menos un } j) \}$$

donde:

$$B^* = \{ i / g_i(x^*) = 0 \}$$

TEOREMA 1.1: (Existencia de Multiplicadores de Lagrange Generalizado)

Si:

- x^* satisface las restricciones del problema (1.1).
- Las funciones $f, \{g_i\}, \{h_j\}$ son diferenciables y
- Para x^* el conjunto Z_2^* es vacío.

Entonces existen vectores $u^* = (u_1, \dots, u_m)$ y $w^* = (w_1, \dots, w_p)$ tal que

(x^*, u^*, w^*) satisfacen lo siguiente:

$$g_i(x^*) \geq 0 \quad , i=1, \dots, m \quad (1.2)$$

$$h_j(x^*) = 0 \quad , j=1, \dots, p \quad (1.3)$$

$$u_i g_i(x^*) = 0 \quad , i=1, \dots, m \quad (1.4)$$

$$u_i \geq 0 \quad , i=1, \dots, m \quad (1.5)$$

$$\nabla L(x^*, u^*, w^*) = 0 \quad (1.6)$$

Definición 1.2. - (Restricciones de Calificación de Primer Orden)

Sea x^0 un punto que satisface las restricciones de (1.1) y asumimos que las funciones son una vez diferenciables. Entonces, diremos que las **Restricciones de Calificación de Primer Orden** valen en x^0 , si para cualquier vector no nulo z , tal que

$$z' \nabla g_i(x^0) \geq 0 \text{ para todo } i \in B^0 = \{j / g_j(x^0) = 0\}$$
$$\wedge z' \nabla h_j(x^0) = 0, j = 1, \dots, p;$$

implica que z es tangente a un arco una vez diferenciable, que nace de x^0 y está contenido en la región factible.

TEOREMA 1.2:(Teorema de Necesidad, Interioridad-Independencia)

Si:

- $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ son funciones diferenciables en x .
- En un punto viable x^* existe un vector "s" tal que $s' \nabla g_i^* > 0$,
 $\forall i \in B^*; s' \nabla h_j^* = 0, j = 1, \dots, p$.
- $\nabla h_1^*, \nabla h_2^*, \dots, \nabla h_p^*$ son vectores linealmente independientes.

Entonces una condición necesaria para que x^* sea un mínimo local de (1.1) es que existan vectores (u^*, w^*) tal que (x^*, u^*, w^*) satisfagan las restricciones (1.2-1.6).

COROLARIO 1.1: (Condición Suficiente para la restricción de Calificación de Primer orden)

Una condición suficiente para la restricción de calificación de primer orden es que tenga un punto x^0 que satisfaga las restricciones del problema (1.1) y que los gradientes $\{\nabla g_i^0\}, \forall i \in B^0; \{\nabla h_j^0\}, j=i, \dots, p$ sean linealmente independientes.

COROLARIO 1.2: (Condición Necesaria de primer orden para un mínimo sin restricciones)

Una condición necesaria para que una función diferenciable tenga un mínimo local sin restricciones en un punto x^* es que:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

1.2 Condiciones Suficientes de Segundo orden

TEOREMA 1.3: (Condiciones Suficientes de Segundo orden)

Las condiciones suficientes para que un punto x^* sea un mínimo local restringido del problema (1.1), donde $f, \{g_i\}, \{h_j\}$ son funciones dos veces diferenciables es que existan vectores (u^*, w^*) tales que (x^*, u^*, w^*) satisfagan (1.2-1.6) y para cada vector no nulo "y" satisfaciendo $y' \nabla g_i^* = 0$ $\forall i \in D^* = \{i / u_i^* > 0\}$, $y' \nabla g_i^* \geq 0$, $i \in B^* - D^*$, y $y' \nabla h_j^* = 0$, $j=1, \dots, p$ se obtenga

$$y' [\nabla^2 L(x, u, w)] y > 0 \tag{1.7}$$

Definición 1.3.-Una matriz simétrica es semidefinida positiva si para cada vector "y" no nulo, $y' Ay \geq 0$ y definida positiva si $y' Ay > 0$.

Así (1.7) es equivalente a decir que $\nabla^2 L(x, u, w)$ es una matriz definida positiva.

1.3 Derivación del Algoritmo por Punto Interior desde las Condiciones de Suficiencia para un problema con restricciones.

Tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) & \qquad \qquad \qquad (I) \\ \text{s.a: } g_i(x) \geq 0 & \qquad , i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Donde f y g_i para $i = 1, 2, \dots, m$; son funciones reales de variable vectorial.

Asumimos que cerca de una vecindad de un mínimo local x^* del problema (I) , las restricciones pueden ser estrictamente satisfechas , es decir , existen puntos $x^0 / g_i(x^0) > 0, i = 1, 2, \dots, m$. Asumimos también que la complementariedad estricta se tiene, es decir $u_i^* > 0$ si $g_i(x^*) = 0$.

Consideremos una perturbación de las condiciones

$$\begin{aligned} g_i(x) &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ u_i g_i(x) &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ u_i &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \nabla L(x, u) &= 0 \\ u &= (u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned}$$

suficientes para que x^* sea un mínimo local .

Supóngase que las siguientes condiciones se tienen en algún punto $[x(r), u(r)]$ cerca de (x^*, u^*) para "r" muy pequeño:

$$g_i(x) > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (1.8)$$

$$u_i g_i(x) = r > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (1.9)$$

$$u_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.10)$$

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x) = 0 \quad (1.11)$$

y para todo y tal que

$$y^t \nabla g_i[x(r)] = 0 \quad \forall i \in B^* = \{i / u_i^* > 0\}$$

se cumple

$$y^t \left[\nabla^2 f - \sum_{i \in B^*} u_i \nabla^2 g_i \right] y > 0 \quad (1.12)$$

De (1.9) $u_i = \frac{r}{g_i(x)}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sustituyendo en (1.11) obtenemos

$$\nabla f(x(r)) - \sum_{i=1}^m \frac{r}{g_i[x(r)]} \cdot \nabla g_i[x(r)] = 0 \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13), dice que el gradiente de la función $P(x, r)$ (llamada función Logarítmica de Penalidad) se anula, $x(r)$, donde

$$P(x, r) = f(x) - r \sum_{i=1}^m \ln g_i(x) \quad (1.14)$$

Es decir, la condición necesaria de primer orden para que $x(r)$ sea un mínimo local sin restricciones de $P(x, r)$ es satisfecha.

La matriz de las segundas derivadas parciales de L es:

$$\nabla^2 L(x, r) = \nabla^2 f - \sum_{i=1}^m \frac{r}{g_i} \nabla^2 g_i + \sum_{i=1}^m \nabla g_i \frac{r}{g_i^2} \nabla^t g_i \quad (1.15)$$

Asumimos que cuando $r \rightarrow 0, x(r) \rightarrow x^*$. Entonces ambos $\frac{r}{g_i[x(r)]} \wedge \frac{r}{g_i^2[x(r)]} \rightarrow 0$, $\forall i \in B^*$ es decir $\forall i$, donde $\lim_{r \rightarrow 0} g_i[x(r)] = g_i(x^*) > 0$. Ignorando estas restricciones que no contribuyen en nada para la cantidad $\nabla^2 L$ cuando $r \rightarrow 0$, la condición de segundo orden perturbada (1.12) aplicada a (1.15) nos da:

$$y' \nabla^2 L[x(r), r] y > 0 \quad \forall y \text{ vector no nulo}$$

tal que

$$y' \nabla g_i[x(r)] = 0 \quad \forall i \in B^*$$

(Notamos que esto también cubre la posibilidad de que B^* sea vacío)

Desde que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{g_i^2[x(r)]} = +\infty \text{ pues } g_i^2[x(r)] \rightarrow 0 \quad \forall i \in B^*.$$

Se concluye de (1.15) que si B^* es diferente del vacío, entonces $y' \nabla^2 L[x(r), r] y > 0$ cuando r es suficientemente pequeño, $\forall y / y' \nabla g_i[x(r)] = 0$. Así $\nabla^2 L[x(r), r]$ es una matriz definida positiva satisfaciendo la condición de suficiencia de segundo orden, y $x(r)$ es un mínimo local sin restricciones de $P(x, r)$.

Notamos que las condiciones de suficiencia de primer y segundo orden para que la función Logarítmica de Penalidad $P(x, r)$ tenga un mínimo local sin restricciones en $x(r)$ está implicado por una perturbación de las condiciones de suficiencia de primer y segundo orden que valen en x^* ; sin embargo En particular no hemos demostrado que un $x(r)$ existe satisfaciendo las condiciones perturbadas de suficiencia dadas por (1.8 – 1.11), pero bajo rigurosa afirmación de este hecho bajo condiciones de continuidad y compacidad que es dada en la sección 1.5, para una clase general de funciones sin restricciones, veremos que existe tal punto.

1.4 Exposición General del Algoritmo de Minimización por punto interior:

Antes de presentar el procedimiento general necesitaremos las siguientes funciones:

- Sea I una función de valor real de x , es decir, $I: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, con las siguientes dos propiedades:

Propiedad 1: Es que $I(x)$ sea continua en la región

$$R^0 = \{x / g_i(x) > 0, i = 1, 2, 3, \dots, m\}$$

Propiedad 2: Establece que si $\{x^k\}$ es cualquier sucesión infinita de puntos en R^0 que converge a x_B tal que $g_i(x_B) = 0$ para al menos un i tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} I(x^k) = +\infty$.

- Sea $S(r)$ una función de valor real de una sola variable " r " con las siguientes propiedades:

Si $r_1 > r_2 > 0$ entonces $S(r_1) > S(r_2) > 0$.

Si $\{r_k\}$ es una sucesión infinita de puntos tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(r_k) = 0.$$

Procedimiento

1. Definimos la función $U(x, r_1) = f(x) + S(r_1)I(x)$ donde r_1 , es un número positivo. Como un punto inicial determinamos un $x^0 \in R^0$. Si tal punto no es aceptable rápidamente, puede ser obtenido por aplicación repetida del método en sí mismo.
2. Procedemos desde x^0 a un punto $x(r_1)$ que es un mínimo local de U en la región viable $R = \{x / g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, m\}$. Probablemente $x(r_1)$ será irrestricto y se situará en R^0 (pues se acercaría del interior a la frontera $g_i(x) = 0$); en otro caso $U = +\infty$, contradiciendo la suposición que $x(r_1)$ fue un mínimo local sin restricciones de U en R .
3. Comenzando desde $x(r_1)$ encontramos un mínimo local sin restricciones de $U(x, r_2)$, donde $r_1 > r_2 > 0$.
4. Continuando de esta manera, encontramos un mínimo local para $U(x, r_k)$ comenzando desde $x(r_{k-1})$ para una sucesión $\{r_k\}$ estrictamente monótona decreciente.

La conjetura es que bajo apropiadas consideraciones la sucesión de mínimo local sin restricciones existe y tiene puntos límites que son soluciones locales del problema (I).

1.5 Pruebas de Convergencia para el algoritmo de Punto Interior:

Para probar la existencia de un mínimo de la función U y que converge a un mínimo local con restricciones del problema (I), necesitaremos las siguientes Lemas y definiciones.

LEMA 1.1:

Si f es una función continua en x sobre un conjunto compacto no vacío V entonces existe un valor finito v^* y un punto $x^* \in V$ donde

$$f(x^*) = v^* = \min_V f(x)$$

Definición 1.4.-

Un punto $x^* \in \mathfrak{R}$ es un mínimo local finito del problema "(I)" si x^* está en el interior de un conjunto compacto V para el cual

$$f(x^*) = v^* = \min_{R \cap V} f(x)$$

Definición 1.5.-

Sea $U(x,r)$ una función de minimización sin restricciones. Entonces un punto $x(r)$ es un mínimo local finito de $U(x,r)$ si allí existe un conjunto compacto V tal que:

$$U[x(r),r] = \min_{V \cap \mathfrak{R}^n} U(x,r)$$

y $x(r)$ está contenida en el interior de V .

Definición 1.6.- Un conjunto no vacío $M^* \subset M$ es llamado un conjunto aislado de M si allí existe un conjunto cerrado $E/M^* \subset E^0$ y tal que si $x \in E - M^* \Rightarrow x \notin M$.

TEOREMA 1.4: (Existencia de Conjunto Compacto Perturbado)

Si un conjunto de mínimo local A^* correspondiente para el valor mínimo local v^* del problema "(I)" es un conjunto compacto aislado diferente del vacío, allí existe un conjunto compacto $S/A^* \subset S^0$, y para cualquier punto $y \in R \cap S$, si $y \notin A^*$ entonces $f(y) > v^*$.

TEOREMA 1.5: Convergencia para conjuntos compactos de mínimo local por el algoritmo de puntos interiores.

Si:

- a) Las funciones $f, g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ son continuas.
- b) La función $U = f(x) + S(r)I(x)$ es una función de minimización irrestricta.
- c) Un conjunto de puntos A^* que son mínimos locales correspondiendo al valor mínimo local v^* es un conjunto compacto aislado diferente del vacío.
- d) Al menos un punto en A^* está en la clausura de R^0 , y
- e) $\{r_k\}$ es una sucesión estrictamente decreciente que converge a cero.

Entonces

- i. Allí existe un conjunto compacto S dado como en el Teorema anterior / $A^* \subset S^0$ y para r_k pequeño, el mínimo irrestricto de U en $R^0 \cap S^0$ existe y todo punto límite de cualquier subsucesión $\{x^k\}$ de la minimización de puntos esta en A^* .
- ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} S(r_k)I[x(r_k)] = 0$.
- iii. $\lim_{k \rightarrow \infty} f[x(r_k)] = v^*$.
- iv. $\lim_{k \rightarrow \infty} U[x(r_k), r_k] = v^*$.
- v. $\{f[x(r_k)]\}$ es una sucesión monóticamente decreciente y
- vi. $\{I[x(r_k)]\}$ es una sucesión monóticamente creciente.

De aquí en adelante

- A la función "I" llamaremos Función Barrera
- La función S se presenta como la función identidad, y
- La función $U(x,r) = f(x) + S(r)I(x)$ es la Barrera asociada a $I(x)$.

La Función Barrera más utilizada para resolver el problema (I) es la Función Barrera Logarítmica :

$$B(x) = -\sum_{i=1}^m \ln g_i(x)$$

Ejemplo 1.1

Min x_2

$$\text{s.a: } x_2 - \text{sen}(x_1) - \frac{x_1}{2} \geq 0$$

Consideremos la función U asociada a la Función Barrera Logarítmica

$$\Rightarrow U(x,r) = x_2 - r \ln(x_2 - \text{sen}(x_1) - \frac{x_1}{2})$$

derivando respecto a x_1 y x_2 e igualando a cero respectivamente para obtener un mínimo

$$\Rightarrow \frac{r \left[\cos(x_1) + \frac{1}{2} \right]}{\left[x_2 - \text{sen}(x_1) - \frac{x_1}{2} \right]} = 0$$

y

$$1 - \frac{r}{\left[x_2 - \text{sen}(x_1) - \frac{x_1}{2} \right]} = 0$$

Entonces hay dos conjuntos de posibles soluciones:

$$x_1(r) = \frac{2\pi}{3} \pm 2n\pi, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$x_2(r) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} \pm 2n\pi\right) + \frac{\pi}{3} \pm n\pi + r, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

y

$$x_1(r) = \frac{4\pi}{3} \pm 2n\pi, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$x_2(r) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} \pm 2n\pi\right) + \frac{2\pi}{3} \pm n\pi + r, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

La matriz de las segundas derivadas parciales de $U(x, r)$ evaluada en $x_1(r)$ y $x_2(r)$ es:

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}[x_1(r)] & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

- Para $x_1(r) = \frac{2\pi}{3} \pm 2n\pi$, la matriz no es semidefinida positiva.
- Para $x_1(r) = \frac{4\pi}{3} \pm 2n\pi$, la matriz es definida positiva y por lo tanto satisface la condición suficiente para que sea un mínimo local.

Así hay un número infinito de funciones trayectorias U , uno para cada mínimo local del problema, es decir, que para cada r hay un $x_1(r)$ y $x_2(r)$ que minimiza a $U(x, r)$.

En este trabajo usaremos una Nueva Barrera que además cumple ciertas condiciones para ser llamada Barrera Autoconcordante.

CAPÍTULO 2

EL CAMINO CENTRAL

2.1 Descripción del Problema:

Consideremos el problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c'x \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq e \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde A es una matriz de orden $m \times n$, e es un vector de dimensión " n " donde todos sus componentes son 1, b y c son vectores de dimensión " m " y " n " respectivamente, el vector x n -dimensional es la variable en la cual la minimización es hecha. Y la relación $0 \leq x \leq e$ es componente a componente.

Denotaremos por:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, 0 \leq x \leq e\} \text{ al conjunto viable del problema (2.1) y por}$$
$$P^0 = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, 0 < x < e\} \text{ a su interior relativo.}$$

Observamos que todos los resultados obtenidos en este trabajo son fácilmente extendibles a Hipercubos generales, dados por $\alpha \leq x \leq \beta$, para vectores cualesquiera de dimensión " n " $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$. Para eso definamos las siguientes funciones para cada x_i ; $i=1, \dots, n$:

$$T_i : [\alpha_i, \beta_i] \rightarrow [0,1] / T_i(x_i) = \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}, \beta_i \neq \alpha_i; \text{ para } i=1, \dots, n. \text{ Y si } \beta_i = \alpha_i,$$

tenemos $x_i = \alpha_i$ y solo tendríamos un problema de $n-1$ variables, al cual le podemos aplicar las funciones T_i para las variables restantes.

Entonces haciendo $y_i = \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i} \in [0,1]$, $\beta_i \neq \alpha_i$; para $i=1, \dots, n$. Tenemos el problema (2.1):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^t y \\ \text{s.a:} \quad & Ay = b_1 \\ & 0 \leq y \leq e \end{aligned}$$

Al resolver este sistema obtenemos las soluciones óptimas (y_1^*, \dots, y_n^*) y como cada $y_i^* = \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}$ para $i=1, \dots, n$. Entonces $x_i^* = (\beta_i - \alpha_i)y_i^* + \alpha_i$ para $i=1, \dots, n$; y así tenemos las soluciones (x_1^*, \dots, x_n^*) .

Se asumen las siguientes consideraciones sobre el problema (2.1):

- 1) El conjunto viable tiene un interior relativo no vacío, es decir, el conjunto $P^0 \neq \emptyset$.
- 2) La matriz A tiene rango completo, esto es, $\text{Rang}(A)=m$.
 - Debemos indicar que la última consideración puede ser descartada en nuestro desarrollo. Sin embargo mantenemos ello debido a que simplificará los argumentos considerablemente.
 - Debido a que la función $c^t x$ es continua sobre el conjunto compacto P , esta función alcanza un punto mínimo, porque el conjunto de la solución óptima del problema (2.1) es diferente del vacío y acotado.

2.2 La formulación dual de (2.1) es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(y, s, w) = b^t y - w^t e \\ \text{s.a:} \quad & A^t y + s - w = c \\ & w, s \geq 0 \\ & y \in \mathcal{R}^m \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde s y w son vectores de dimensión " n ".

Entonces haciendo $y_i = \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i} \in [0,1]$, $\beta_i \neq \alpha_i$; para $i=1, \dots, n$. Tenemos el problema (2.1):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^t y \\ \text{s.a:} \quad & Ay = b_1 \\ & 0 \leq y \leq e \end{aligned}$$

Al resolver este sistema obtenemos las soluciones óptimas (y_1^*, \dots, y_n^*) y como cada $y_i^* = \frac{x_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}$ para $i=1, \dots, n$. Entonces $x_i^* = (\beta_i - \alpha_i)y_i^* + \alpha_i$ para $i=1, \dots, n$; y así tenemos las soluciones (x_1^*, \dots, x_n^*) .

Se asumen las siguientes consideraciones sobre el problema (2.1):

- 1) El conjunto viable tiene un interior relativo no vacío, es decir, el conjunto $P^0 \neq \emptyset$.
- 2) La matriz A tiene rango completo, esto es, $\text{Rang}(A)=m$.
 - Debemos indicar que la última consideración puede ser descartada en nuestro desarrollo. Sin embargo mantenemos ello debido a que simplificará los argumentos considerablemente.
 - Debido a que la función $c^t x$ es continua sobre el conjunto compacto P , esta función alcanza un punto mínimo, porque el conjunto de la solución óptima del problema (2.1) es diferente del vacío y acotado.

2.2 La formulación dual de (2.1) es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(y, s, w) = b^t y - w^t e \\ \text{s.a:} \quad & A^t y + s - w = c \\ & w, s \geq 0 \\ & y \in \mathcal{R}^m \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde s y w son vectores de dimensión "n".

Debido a que del problema primal tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c'x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \\ & -x \geq -e \end{aligned}$$

Entonces su dual es:

$$\text{Max} \quad d(y', t, s', w) = (y', t, s', w) \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \\ -e \end{pmatrix} = b'y' - b't - w'e = b'(y' - t) - w'e$$

$$\text{s.a:} \quad (y', t, s', w) \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix} \leq c$$

$$\Rightarrow A'y' - A't + s' - w \leq c$$

$$A'(y' - t) + s' - w \leq c$$

$$y', t, s', w \geq 0$$

Sumando un $s'' > 0$ a la penúltima desigualdad para llegar a la igualdad y haciendo $y = y' - t \wedge s = s' + s''$, vemos además que $s, w \geq 0$, pero como $y = y' - t$ no podemos afirmar que $y \geq 0$ con lo que obtenemos (2.2).

Definición 2.1.- El Camino Central

Definimos el Camino Central Primal (Dual) como el conjunto de centros $x(u)$, $(y(u), s(u), w(u))$ donde u recorre desde " ∞ " a "0" (cero).

Desde que la función objetivo alcanza el valor óptimo en su dominio (para un parámetro " u " fijo de su respectiva función barrera) en un único punto, este se denota por ejemplo $x(u)$ y es llamado el u -centro.

Definimos para nuestros problemas (2.1) y (2.2) su diferencia como:

$$\begin{aligned}
 \text{Gape} &= c'x - (b'y - w'e) \\
 &= (A'y + s - w)'x - b'y + w'e \\
 &= y'Ax + s'x - w'x - b'y + w'e \\
 &= y'b + s'x - w'x - b'y + w'e \\
 &= s'x - w'x + w'e \\
 &= s_1x_1 + \dots + s_nx_n - w_1x_1 - w_2x_2 - \dots - w_nx_n + w_1 + w_2 + \dots + w_n \\
 &= e'Xs - e'Xw + e'w \\
 \text{Gape} &= e'(Xs + (I - X)w) \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Donde $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, $I - X = \text{diag}(1 - x_1, \dots, 1 - x_n)$, I es la matriz identidad. Se sigue que $c'x \geq z^* \geq d(y, s, w)$ ya que el Gape es positivo ($\text{Gape} \geq 0 \Rightarrow c'x \geq b'y - w'e$), donde z^* denota el valor objetivo óptimo en (2.1). Sabemos que si x^* es óptimo en (2.1) $\Rightarrow \exists n(y^*, s^*, w^*)$ tal que $c'x^* = d(y^*, s^*, w^*) = z^*$. (Estas soluciones están caracterizadas por las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A'y^* + s^* - w^* = c \tag{2.4} \\
 Ax^* = b \tag{2.5} \\
 Xs = 0 \tag{2.6} \\
 (I - X)w = 0 \tag{2.7} \\
 s, w \geq 0 \tag{2.8} \\
 0 \leq x^* \leq e \tag{2.9}
 \end{array} \right.$$

Pues de (2.1) vemos que para nuestro problema:

$$f(x) = c'x$$

$$g_1(x) = X \geq 0$$

$$g_2(x) = I - X \geq 0$$

$$h_1(x) = Ax - b$$

Y hallando el Lagrangeano

$$L(x^*, y^*, s^*, w^*) = f(x^*) - \sum u_i g_i(x^*) + w_1 h_1(x^*) \quad , \text{ donde } u_i \in \mathbb{R}^n \text{ para } i=1,2.$$

$$w_1 \in \mathbb{R}^m.$$

Y su respectivo gradiente

$$\nabla L(x^*, y^*, s^*, w^*) = \nabla f(x^*) - u_1 \nabla g_1(x^*) - u_2 \nabla g_2(x^*) + w_1 \nabla h_1(x^*)$$

Entonces el gradiente del Lagrangeano debe ser cero

$$0 = c - u_1 + u_2 - A' w_1$$

$$c = A' w_1 + u_1 - u_2$$

$$\Rightarrow \exists n \quad u_1, u_2, w_1$$

tomando del problema dual:

$$u_1 = s \geq 0$$

$$u_2 = w \geq 0$$

$$w_1 = y$$

Tenemos dicha caracterización.

Ahora introducimos la función:

$$B(x) = \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$$

Definición 2.2.- Barrera c-Autoconcordante

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, $Q \subset E$ un subespacio abierto convexo y $B: Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función. B es llamado Barrera Autoconcordante sobre \bar{Q} con parámetro $c > 0$ (Barrera c-Autoconcordante) si:

- 1) $B \in C^3$.
- 2) B es una función Convexa sobre Q .
- 3) Para cualquier $x \in Q$ y $h \in E$:

$$|\nabla^3 B(x)[h, h, h]| \leq 2(h^T \nabla^2 B(x) h)^{3/2}$$

4) $\exists c > 0/B$ satisfice :

$$|\nabla B(x)[h]| \leq c^{1/2} (h^t \nabla^2 B(x) h)^{1/2}$$

Donde:

$$\nabla^3 B(x)[h, h, h] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 B(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k$$

denota la tercera diferencial de B en x y h .

Asimismo vemos que la tercera y cuarta condición relacionan a la barrera en sí misma, de allí el nombre.

TEOREMA 2.1:

La función $B(x) = \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$ es barrera

$4n$ -Autoconcordante sobre $\langle 0, 1 \rangle^n$.

Prueba:

Primero consideremos el término general:

$$b(z) = (2z - 1) [\ln z - \ln(1 - z)] \text{ , donde } 0 < z < 1.$$

La primera, segunda y tercera derivada son respectivamente:

$$b'(z) = 2[\ln z - \ln(1 - z)] + (2z - 1) \left[\frac{1}{z(1 - z)} \right]$$

$$b''(z) = \frac{1}{z^2(1 - z)^2}$$

$$b'''(z) = \frac{2(2z - 1)}{z^3(1 - z)^3}$$

- Como $0 < z < 1 \Rightarrow 1 - z > 0 \wedge z > 0$ además $z(1-z) > 0$.

Podemos ver que b, b', b'', b''' son continuas sobre $\langle 0, 1 \rangle$ y así se cumple la primera condición.

Como:

$$b''(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2} > 0 \quad \forall z \in \langle 0, 1 \rangle$$

Entonces la gráfica de $b(z)$ es cóncava hacia arriba, es decir, es una función convexa.

Por lo tanto $b(z)$ es una función convexa sobre $\langle 0, 1 \rangle$.

- Ahora tenemos que $\frac{|b'''(z)|}{2(b''(z))^{3/2}} = |2z - 1|$ y $z \in \langle 0, 1 \rangle$
 - $\Rightarrow 0 < z < 1$
 - $\Rightarrow 0 < 2z < 2$
 - $\Rightarrow -1 < 2z - 1 < 1$
 - $\Rightarrow |2z - 1| < 1$

de lo que llegamos a $\frac{|b'''(z)|}{2(b''(z))^{3/2}} < 1$ con lo que $b(z)$ satisface la tercera condición (algunas veces llamada condición 1-Autoconcordante).

- Para la última condición debemos probar que $c=4$ satisface la desigualdad.

$$|b'(z)| \leq c^{1/2} (b'')^{1/2}$$

Ahora veamos:

$$\frac{|b'(z)|}{c^{1/2} (b''(z))^{1/2}} = \frac{\left| 2 \ln z - 2 \ln(1-z) + \frac{(2z-1)}{z(1-z)} \right|}{c^{1/2} \frac{1}{z(1-z)}}$$

1980

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left| 2 \ln \left(\frac{z}{1-z} \right) + \frac{(2z-1)}{z(1-z)} \right|}{c^{1/2} \frac{1}{z(1-z)}} \\
&= \frac{1}{c^{1/2}} \left| 2z(1-z) \ln \left(\frac{z}{1-z} \right) + 2z-1 \right|
\end{aligned}$$

usando la desigualdad triangular podemos establecer:

$$\begin{aligned}
\frac{|b'(z)|}{c^{1/2} (b''(z))^{1/2}} &\leq \frac{1}{c^{1/2}} \left\{ 2z(1-z) \left| \ln \left(\frac{z}{1-z} \right) \right| + |2z-1| \right\}, \text{ como } |2z-1| < 1 \Rightarrow \\
&\leq \frac{1}{c^{1/2}} \left\{ 2z(1-z) \left| \ln \left(\frac{z}{1-z} \right) \right| + 1 \right\}
\end{aligned}$$

además se cumple que:

$$\begin{aligned}
2z(1-z) \left| \ln \left(\frac{z}{1-z} \right) \right| &\leq 1, \text{ para } 0 < z < 1 \\
\Rightarrow \frac{|b'(z)|}{c^{1/2} (b''(z))^{1/2}} &\leq \frac{1}{c^{1/2}} \{1+1\} = \frac{2}{c^{1/2}} \leq 1 \\
\Rightarrow 2 &\leq c^{1/2} \\
\Rightarrow 4 &\leq c
\end{aligned}$$

La última relación nos dice que la cuarta condición se cumple para cualquier número mayor o igual que 4, entonces tomando $c=4$ se cumple la última condición.

Con lo que se ha probado que $b(z)$ es barrera 4-Autoconcordante sobre $\langle 0,1 \rangle$.

Debido a la propiedad de estabilidad con respecto a la suma, ver la proposición A.1 del apéndice A, se obtiene que la función $B(x)$ es barrera 4n-Autoconcordante sobre $\langle 0,1 \rangle^n$ y por lo tanto se comprueba el Teorema . \square

- Ahora se considera la nueva función barrera asociada al problema primal (2.1) :

$$\phi_B(x, u) = \frac{1}{u} (c^t x) + \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)] \quad (2.10)$$

donde u es un parámetro positivo , las derivadas de primer y segundo orden son :

$$\begin{aligned} g = g(x, u) &= \frac{c}{u} + \left[\sum_{i=1}^n 2[\ln x_i - \ln(1 - x_i)] + (1 - x_i)^{-1} - (x_i)^{-1} \right] \\ &= \frac{c}{u} + \left[2 \sum_{i=1}^n [\ln x_i - \ln(1 - x_i)] + \sum_{i=1}^n (1 - x_i)^{-1} - (x_i)^{-1} \right] \\ &= \frac{c}{u} + 2[\ln X - \ln(I - X)]e - X^{-1}e + (I - X)^{-1}e \\ g = g(x, u) &= \frac{c}{u} + 2[\ln X - \ln(I - X)]e - X^{-1}e + (I - X)^{-1}e \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} H = H(x, u) &= 2 \left[\frac{1}{X} + \frac{1}{I - X} \right] e + X^{-2}e + (I - X^{-2})e \\ &= \frac{2}{X(I - X)} + X^{-2} + (I - X^{-2}) \\ &= \left[\frac{2X(I - X) + (I - X)^2 + X^2}{X^2(I - X)^2} \right] \\ H = H(x, u) &= X^{-2}(I - X)^{-2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\ln X = \text{diag}(\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3, \dots, \ln x_n)$, y

$\ln(I - X) = \text{diag}(\ln(1 - x_1), \dots, \ln(1 - x_n))$.

Podemos demostrar que $\phi_B(x, u)$ es una función Barrera asociada a $B(x)$ como:

$$\phi_B(x, u) = \frac{e^u x}{u} + B(x) \quad , \quad u > 0$$

Para eso $B(x)$ debe satisfacer:

- i. B es continua sobre P^o .
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \infty^+$, es decir, cuando x tiende a su frontera desde la derecha.
- iii. $\lim_{x \rightarrow e^-} B(x) = \infty^+$, es decir, cuando x tiende a su frontera desde la izquierda.

Veamos i :

$$\text{Si } x \in P^o \Rightarrow 0 < x < e$$

$$\Rightarrow x_i \in \langle 0, 1 \rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow 1 - x_i > 0 \quad , \quad 0 < 2x_i < 1 + 1$$

$$\wedge \quad x_i > 0 \quad , \quad -1 < 2x_i - 1 < 1$$

Por lo que $B(x) = \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) [\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$ es continua sobre $\langle 0, 1 \rangle^n$.

Veamos ii :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \ln \left(\frac{x_i}{1 - x_i} \right)$$

$$= \lim_{x_i \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \ln \left(\frac{x_i}{1 - x_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 0^+} (2x_i - 1) \ln \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 0^+} (2x_i - 1) \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{x_i} - 1} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 0^+} (2x_i - 1) \cdot \lim_{x_i \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{x_i} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \infty^+.$$

Veamos iii. :

$$\lim_{x \rightarrow e^-} B(x) = \lim_{x_i \rightarrow 1^-} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \ln \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 1^-} (2x_i - 1) \left[\ln \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 1^-} (2x_i - 1) \cdot \lim_{x_i \rightarrow 1^-} \left[\ln \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \lim_{x_i \rightarrow 1^-} (2x_i - 1) \cdot \lim_{x_i \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{x_i} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e^-} B(x) = \infty^+.$$

$\therefore \phi_B(x, u)$ es una función Barrera asociada a (2.1).

También como $\phi_B(x, u) = \frac{1}{u} c'x + B(x)$

- i. $\frac{1}{u} c'x$ es una función continua pues $u > 0$ entonces en particular en $\langle 0, 1 \rangle^n$ y como $B(x)$ también lo es entonces $\phi_B(x, u)$ es continua en $\langle 0, 1 \rangle^n = P^0$.
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi_B(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c'x}{u} + B(x) = 0 + \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \infty^+$.
- iii. $\lim_{x \rightarrow e^-} \phi_B(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{c'x}{u} + B(x) = \frac{c'e}{u} + \lim_{x \rightarrow e^-} B(x) = \infty^+$.

Desde que $\phi_B(x, u)$ es estrictamente convexo (pues H es definida positiva, ya que $\nabla^2 \phi_B = H > 0$ y $|H| = |X^{-2}(I - X)^{-2}| = \det(X^{-2}) \cdot \det(I - X)^{-2} > 0$) sobre el interior relativo del conjunto viable y toma valores infinitos sobre la frontera P , esta función alcanza el valor mínimo en su dominio (para un "u" fijo) en un único punto que es denotado por $x(u)$ y al cual ya se había definido como u -centro, las condiciones necesarias y suficientes de primer orden de optimalidad (condiciones KKT) para $x(u)$ son:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'y + s - w = c + 2u[\ln X - \ln(I - X)]e \quad (2.13) \\ Ax = b \quad (2.14) \\ Xs = ue \quad (2.15) \\ (I - X)w = ue \quad (2.16) \\ (s, w) \geq 0 \quad (2.17) \\ (0 < x < e) \quad (2.18) \end{array} \right.$$

La única solución de este sistema es otra vez denotado por $(x(u), y(u), s(u), w(u))$.

El Gape de dualidad en esta solución satisface:

$$\begin{aligned}
 \text{Gape} &= c'x(u) - d(x(u), y(u), s(u), w(u)) \\
 &= (A'y + s - w - 2u[\ln X - \ln(I - X)]e)'x(u) - (b'y - w'e) \\
 &= (Ay' + s' - w' - 2ue'[\ln X(u) - \ln(I - X(u))])x(u) - b'y(u) - w'(u)e \\
 &= Ay'x(u) + s'x(u) - w'x(u) - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) - b'y - w'e \\
 &= y'b + e'ue - e'Xw - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) - b'y + e'w \\
 &= e'ue + e'(I - X)w - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) \\
 &= ue'e + e'(I - X)w - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) \\
 &= ue'e + e'ue - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) \\
 &= 2nu - 2ue'[\ln X - \ln(I - X)]x(u) \\
 \text{Gape} &= 2u(n - e'[\ln X - \ln(I - X)]x(u))
 \end{aligned}$$

Debido a que $c'x$ es una función convexa, el conjunto viable del problema (2.1) es acotado (pero el conjunto de puntos que resuelven el problema primal es compacto), el interior relativo P^0 del conjunto viable es diferente del vacío, entonces se obtiene el siguiente resultado probado anteriormente para Funciones Barrera en general:

- $\lim_{u \rightarrow 0} c'x(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (c'x(u) + \sum (2x_i(u) - 1)[\ln x_i(u) - \ln(1 - x_i(u))]) = z^*$
- Sea u_k una sucesión de valores positivos tales que $u_k \rightarrow 0$ entonces todo punto límite de $\{x(u_k)\}$ resuelve el problema lineal (2.1).

El siguiente Lema establece que el objetivo primal decrece por el camino primal y el objetivo dual crece por el camino dual. En la prueba usaremos la función regularización de barrera logarítmica primal-dual para (2.2):

$$\phi_B^d(x, y, w, s, u) = \frac{1}{u}(-y'b + w'e) - \sum_{i=1}^n \ln s_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i) - \sum_{i=1}^n \ln w_i$$

y el problema dual:

$$\text{Min } \phi_B^d(x, y, w, s, u) \quad (2.19)$$

$$\text{s.a. : } A'y + s - w = c + 2u[\ln X - \ln(I - X)]e$$

Observamos que la regularización de Barrera es convexa pues $\frac{1}{u}(-y'b + w'e)$ es convexa y como $-\ln s_i$, $-\ln(1 - x_i)$ y $-\ln w_i$ son funciones convexas, la suma de ellas también será una función convexa.

LEMA 2.1:

Si u decrece entonces el objetivo $c'x(u)$ del problema primal (2.1) es monóticamente decreciente y el objetivo $d(x(u), y(u), s(u), w(u))$ del problema dual (2.2) es monóticamente creciente.

Prueba:

Para la primera parte consideremos $\bar{u} < u$

Donde $x(u)$ minimiza a $\phi_B(x, u)$ y $x(\bar{u})$ minimiza a $\phi_B(x, \bar{u})$ (podemos asegurar esto ya que $\phi_B(x, u)$ es estrictamente convexa entonces existe un $x(u)$ que minimiza la función)

$$\Rightarrow \phi_B(x(u), u) \leq \phi_B(x(\bar{u}), u)$$

$$\Rightarrow \phi_B(x(\bar{u}), \bar{u}) \leq \phi_B(x(u), \bar{u})$$

reemplazando sus equivalencias tenemos

$$\frac{1}{u} c'x(u) + B(x(u)) \leq \frac{1}{u} c'x(\bar{u}) + B(x(\bar{u})) \quad (i)$$

$$\frac{1}{\bar{u}} c'x(\bar{u}) + B(x(\bar{u})) \leq \frac{1}{\bar{u}} c'x(u) + B(x(u)) \quad (ii)$$

sumando (i) y (ii) tenemos :

$$\frac{1}{u} c' x(u) + \frac{1}{\bar{u}} c' x(\bar{u}) \leq \frac{1}{u} c' x(\bar{u}) + \frac{1}{\bar{u}} c' x(u)$$

$$\frac{1}{u} c' x(u) - \frac{1}{\bar{u}} c' x(u) \leq \frac{1}{u} c' x(\bar{u}) - \frac{1}{\bar{u}} c' x(\bar{u})$$

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}}\right)(c' x(u) - c' x(\bar{u})) \leq 0 \quad , \quad \text{como} \quad \left(\frac{1}{u} < \frac{1}{\bar{u}}\right) \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}} < 0$$

$$\Rightarrow \quad c' x(u) \geq c' x(\bar{u})$$

\therefore Cuando u decrece entonces $c' x(u)$ es monóticamente decreciente. \square

Para probar la segunda parte primero notamos que $\phi_B^d(x, y, w, s, u)$ es convexa. Las condiciones KKT para un punto mínimo son:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'y + s - w = c + 2u[\ln X - \ln(I - X)]e \quad (2.20) \\ uAS^{-1}e = b \quad (2.21) \\ (I - uS^{-1})e = uW^{-1}e \quad (2.22) \\ 2(I - X)^{-1}e = 2u[X^{-1} + (I - X^{-1})]S^{-1}e \quad (2.23) \end{array} \right.$$

Es fácil ver que el punto $(x(u), y(u), s(u), w(u))$ minimiza a $\phi_B^d(x, y, w, s, u)$ (es decir satisface las condiciones dadas).

Similarmente para la segunda parte.

Consideremos:

$\bar{u} < u$, donde $(x(u), y(u), s(u), w(u))$ minimiza a $\phi_B^d(x, y, w, s, u)$

y $(x(\bar{u}), y(\bar{u}), s(\bar{u}), w(\bar{u}))$ minimiza a $\phi_B^d(x, y, w, s, \bar{u})$

$$\Rightarrow \phi_B^d(x(u), y(u), w(u), s(u), u) \leq \phi_B^d(x(\bar{u}), y(\bar{u}), w(\bar{u}), s(\bar{u}), u)$$

$$\Rightarrow \phi_B^d(x(\bar{u}), y(\bar{u}), w(\bar{u}), s(\bar{u}), \bar{u}) \leq \phi_B^d(x(u), y(u), w(u), s(u), \bar{u})$$

reemplazando sus equivalencias tenemos :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u}(-y'(u)b + w'(u)e) - \sum \ln s_i(u) - \sum \ln w_i(u) - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i(u)) \\ & \leq \frac{1}{u}(-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e) - \sum \ln s_i(\bar{u}) - \sum \ln w_i(\bar{u}) - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i(\bar{u})) \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{u}}(-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e) - \sum \ln s_i(\bar{u}) - \sum \ln w_i(\bar{u}) - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i(\bar{u})) \\ & \leq \frac{1}{\bar{u}}(-y'(u)b + w'(u)e) - \sum \ln s_i(u) - \sum \ln w_i(u) - 2 \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i(u)) \end{aligned} \quad (ii)$$

sumando (i) y (ii)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u}(-y'(u)b + w'(u)e) + \frac{1}{\bar{u}}(-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e) \\ & \leq \frac{1}{u}(-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e) + \frac{1}{\bar{u}}(-y'(u)b + w'(u)e) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}}\right)(-y'(u)b + w'(u)e) + \left(\frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{u}\right)(-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e) \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}}\right)[(-y'(u)b + w'(u)e) - (-y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e)] \leq 0$$

y como $\frac{1}{u} < \frac{1}{\bar{u}} \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}} < 0$

- $\Rightarrow -y'(u)b + w'(u)e \geq -y'(\bar{u})b + w'(\bar{u})e$
- $\Rightarrow y'(u)b - w'(u)e \leq y'(\bar{u})b - w'(\bar{u})e$
- \Rightarrow cuando u decrece $y'b - w'e$ es monótona creciente. \square

En el algoritmo de búsqueda de línea aproximada a lo largo de direcciones proyectadas de Newton se realiza la minimización de ϕ_B para un " u " fijo, es decir, las direcciones corresponden a la minimización exacta de la aproximación cuadrática para ϕ_B sobre el espacio afín $Ax=b$ (ver [14]), es decir:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \phi_B(x, u) + g'p + \frac{1}{2} p'Hp \\ \text{s.a: } & Ap = 0 \end{aligned}$$

Esto hace que la dirección de Newton $p = p(x, u)$ sea determinado resolviendo:

$$\begin{aligned} g + Hp &= A' \lambda \\ Ap &= 0 \end{aligned}$$

como un sistema lineal de ecuaciones en p y λ (este último se obtiene aplicando las condiciones KKT al problema anterior)

Usaremos la medida $\| \cdot \|_H$ para medir la distancia entre puntos, la definición de esta medida es como sigue:

$$\|q\|_H = \sqrt{q' H q} \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

Porque H es definida positiva, $\| \cdot \|_H$ define una norma.

CAI

Veamos:

$$i. \quad \|q\|_H = \sqrt{q' H q} \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

Pues H es definida positiva $\Rightarrow q' H q > 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \neq 0$.

$$\|q\|_H = 0 \Leftrightarrow q = 0 \text{ pues } H \text{ es definida positiva.}$$

En ii. $\|\lambda q\|_H = \sqrt{(\lambda q)' H (\lambda q)} = \sqrt{\lambda^2 q' H q}, \lambda \in \mathbb{R}.$

superior

$$= |\lambda| \sqrt{q' H q}$$

Lemos

$$\|\lambda q\|_H = |\lambda| \|q\|_H.$$

LEMA

iii. $\|q + w\|_H \leq \|q\|_H + \|w\|_H$

Sea $x \in$

Si $M_{\text{...}}$

$$\|q + w\|_H^2 = \|q\|_H^2 + \|w\|_H^2 + q' H w + (q' H w)'$$

$$= \|q\|_H^2 + \|w\|_H^2 + 2q' H w \quad (*)$$

Prueba:

$$\text{como } q, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow w' q = q' w$$

$$\Rightarrow q w' = w q'$$

$$\Rightarrow w q' = q w'$$

$$\Rightarrow q' H w q' H w = q' H q w' H w$$

$$\Rightarrow (q' H w)^2 = \|q\|_H^2 \|w\|_H^2$$

$$\Rightarrow |q' H w| = \|q\|_H \|w\|_H$$

Desde que

brevidad

Sea $0 \leq t \leq 1$

Primero

En (*)

decir:

$$\|q + w\|_H^2 \leq \|q\|_H^2 + \|w\|_H^2 + 2\|q\|_H \|w\|_H = (\|q\|_H + \|w\|_H)^2$$

(1-t)

$$\leq \|q\|_H^2 + \|w\|_H^2 + 2\|q\|_H \|w\|_H$$

Para probar

$$\leq (\|q\|_H + \|w\|_H)^2$$

$\psi(\rho) = \|q\|_H$

$$\|q + w\|_H \leq \|q\|_H + \|w\|_H.$$

$\lambda(\rho) = \|w\|_H$

Así queda probado que $\|\cdot\|_H$ define una norma. \square

CAPÍTULO 3

PROPIEDADES CERCANAS AL CAMINO CENTRAL

En esta sección se tratará algunos Lemas que son necesarios para obtener una cota superior para el número total de iteraciones internas y externas del algoritmo. Los dos Lemas son en esencia debido a Nesterov y Nemirovsky [10].

LEMA 3.1:

Sea $x \in \langle 0,1 \rangle^n$ y $d \in \mathfrak{R}^n$ arbitrario.

Si $\|d\|_{H(x,u)} < 1$ entonces $x+d \in \langle 0,1 \rangle^n$.

Prueba:

Desde que "u" es fijo, escribiremos $H(x)$ en lugar de $H(x,u)$ en ésta prueba por brevedad.

Sea $0 \leq t \leq 1$ / $x+td \in P^0$ y $v \in \mathfrak{R}^n$ arbitrario.

Primero mostraremos que la norma de v respecto a $H(x)$ y $H(x+td)$ son comparables, es decir:

$$(1-t\|d\|_H)\|v\|_H \leq \|v\|_{H(x+td)} \leq \frac{1}{1-t\|d\|_H} \cdot \|v\|_H \quad (3.1)$$

Para probar estas desigualdades, definimos $\rho \in [0,1]$

$$\psi(\rho) = \|d\|_{H(x+\rho d)}^2 = d^T H(x+\rho d) d \quad y$$

$$\Lambda(\rho) = \|v\|_{H(x+\rho d)}^2 = v^T H(x+\rho d) v$$

Ahora queremos evaluar, como estas normas cambian si ρ varia, para esto, calculemos cotas para las derivadas de $\psi \wedge \Lambda$ respecto a ρ :

Donde $\phi_B = \frac{e^x}{u} + \sum_{i=1}^n (2x_i - 1)[\ln x_i - \ln(1 - x_i)]$ entonces $\nabla^3 \phi_B = \nabla^3 B$ y como

$|\nabla^3 B(x)[h, h, h]| \leq 2(h' \nabla^2 B(x) h)^{3/2}$ (condición 1-autoconcordante) y del Lema B.2 se sigue que:

$$\begin{aligned} |\psi'(\rho)| &= |\nabla^3 \phi_B(x + \rho d, u)[d, d, d]| \\ &\leq 2 \|d\|_{H(x+\rho d)}^3 = 2[\psi(\rho)]^{3/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

y

$$\begin{aligned} |\Lambda'(\rho)| &= |\nabla^3 \phi_B(x + \rho d, u)[v, v, d]| \\ &\leq 2 \|v\|_{H(x+\rho d)}^2 \|d\|_{H(x+\rho d)} = 2\Lambda(\rho)[\psi(\rho)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

De (3.2) inmediatamente obtenemos una cota superior para $\psi(\rho)$.

$$\left| \frac{d}{d\rho} [\psi(\rho)^{-1/2}] \right| = \left| \frac{1}{2} \psi(\rho)^{-3/2} \psi'(\rho) \right| \leq 1 \quad (3.4)$$

Según el Teorema del valor medio allí existe un $\xi \in (0, \rho)$ tal que:

$$\psi(\rho)^{-1/2} = \psi(0)^{-1/2} + \rho \frac{d}{ds} [\psi(s)^{-1/2}] \Big|_{s=\xi}$$

usando la cota superior obtenida en (3.4) conseguimos

$$\begin{aligned} \psi(\rho)^{-1/2} &= \psi(0)^{-1/2} + \rho \frac{d}{ds} [\psi(s)^{-1/2}] \Big|_{s=\xi} \\ &\geq \psi(0)^{-1/2} - \rho = \frac{1}{\|d\|_H} - \rho = \frac{1 - \rho \|d\|_H}{\|d\|_H} \end{aligned} \quad (3.5)$$

o equivalentemente

$$\psi(\rho)^{1/2} \leq \frac{\|d\|_H}{1 - \rho\|d\|_H}$$

Sustituyendo esto en (3.3), se obtiene

$$|\Lambda'(\rho)| \leq \frac{2\|d\|_H}{1 - \rho\|d\|_H} \cdot \Lambda(\rho)$$

Desde que

por lo tanto

De otro lado

Ahora se sigue fácilmente que:

consecuentemente

$$|(\ln(\Lambda(\rho)))'| = \frac{|\Lambda'(\rho)|}{|\Lambda(\rho)|} \leq \frac{2\|d\|_H}{1 - \rho\|d\|_H}$$

LEMA 3.2

Sea $x \in \mathbb{R}^n$

Usando esto obtenemos:

$$\left| \ln \left(\frac{\|v\|_{H(x+td)}}{\|v\|_H} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(0)} \right)^{1/2} \right| = \frac{1}{2} |\ln \Lambda(t) - \ln \Lambda(0)|$$

Para $|t| \leq 1$

$$= \frac{1}{2} \left| \int_0^t (\ln \Lambda(\rho))' d\rho \right|$$

método de

$$\leq \int_0^t \frac{\|d\|_H}{1 - \rho\|d\|_H} d\rho = -\ln(1 - \rho\|d\|_H) \Big|_0^t$$

Prueba:

$$\leq \ln \left(\frac{1}{1 - t\|d\|_H} \right)$$

Desde que " t "

Consecuentemente

$$\frac{\|v\|_{H(x+td)}}{\|v\|_H} \leq \frac{1}{1 - t\|d\|_H}$$

Análogamente

$$\frac{\|v\|_H}{\|v\|_{H(x+td)}} \leq \frac{1}{1-t\|d\|_H}$$

Lo que prueba (3.1). \square

Desde que $\|d\|_H < 1$, se tiene de (3.1) que $H(x+td)$ es acotado para todo $0 \leq t \leq 1$, y por lo tanto $\phi_B(x+td, u)$ está acotado.

De otro lado ϕ_B , toma valores infinitos en la frontera del conjunto viable consecuentemente $x+d \in P^0 = \langle 0, 1 \rangle^n$ (haciendo $t=1$).

LEMA 3.2:

Sea $x \in P^0$, p la dirección proyectada de Newton y $x^+ = x + p$. Si $\|p\|_H < 1$ entonces $x^+ \in P^0$ y

$$\|p(x^+, u)\|_{H(x^+, u)} = \|p\|_{H(x^+, u)} \leq \frac{1}{(1-\|p\|_H)^2} \cdot \|p\|_H^2.$$

Para $\|p\|_H < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ esto implica que $\|p(x^+, u)\| < \|p\|_H$ y de aquí la convergencia del

método de Newton. Para $\|p\|_H < \frac{1}{3}$ el Lema da:

$$\|p\|_{H(x^+, u)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_H^2.$$

Prueba:

Desde que "u" es fijo, escribiremos por brevedad $g(x), H(x) \wedge p(x)$ en lugar de $g(x, u), H(x, u) \wedge p(x, u)$ en esta prueba.

Donde la última designa

Debido a que $\|p\|_H < 1$, tenemos debido al Lema 3.1 que $x+tp \in P^0 \quad \forall \quad 0 \leq t \leq 1$ y según (3.1).

$$(1-t\|d\|_H)\|v\|_H \leq \|v\|_{H(x+td)} \leq \frac{1}{1-t\|d\|_H} \cdot \|v\|_H$$

$$\Rightarrow -\|v\|_{H(x+tp)}^2 \geq \frac{-\|v\|_H^2}{(1-t\|p\|_H)^2}, \text{ haciendo } d=p$$

Ahora sumamos $\|v\|_H^2$ a ambos lados

$$\|v\|_H^2 - \|v\|_{H(x+tp)}^2 \geq \|v\|_H^2 \left(1 - \frac{1}{(1-t\|p\|_H)^2}\right)$$

$$-(\|v\|_H^2 - \|v\|_{H(x+tp)}^2) \leq \|v\|_H^2 \left(\frac{1}{(1-t\|p\|_H)^2} - 1\right)$$

$$|v^t [H(x) - H(x+tp)] v| = \left| \|v\|_H^2 - \|v\|_{H(x+tp)}^2 \right| \leq \|v\|_H^2 \left(\frac{1}{(1-t\|p\|_H)^2} - 1\right) \quad (3.6)$$

Para un $v \in \mathfrak{R}^n$ arbitrario. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz generalizada del Lema B.1 tenemos:

$$\left| \frac{d}{dt} g(x+tp)^t v - p^t H(x) v \right| = |p^t [H(x+tp) - H(x)] v|$$

$$\leq \sqrt{p^t [H(x+tp) - H(x)] p} \cdot \sqrt{v^t [H(x+tp) - H(x)] v}$$

$$\leq \left(\frac{1}{(1-t\|p\|_H)^2} - 1 \right) \|v\|_H \|p\|_H \quad (3.7)$$

Donde la última desigualdad se sigue de (3.6).

Notamos que el lado izquierdo de (3.7) es el valor absoluto de la derivada $\varphi'(t)$ donde:

$$\varphi(t) = g'(x + tp)v - (1-t)g'(x)v \quad (3.8)$$

Mediante integración obtenemos una cota superior para $|\varphi(t)|$:

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \int_0^t \varphi(s) ds \right| \text{ y por (3.7) y (3.8)} \\ &\leq \|v\|_H \|p\|_H \int_0^t \left(\frac{1}{(1-s\|p\|_H)^2} - 1 \right) ds = \|v\|_H \|p\|_H \left[\frac{1}{\|p\|_H} \left(\frac{1}{1-s\|p\|_H} \right) - s \right]_0^t \\ &= \|v\|_H \|p\|_H \left[\frac{1}{\|p\|_H (1-t\|p\|_H)} - t - \frac{1}{\|p\|_H} \right] \\ &= \|v\|_H \|p\|_H \left[\frac{1-t\|p\|_H + t^2\|p\|_H^2 - 1 + t\|p\|_H}{\|p\|_H (1-t\|p\|_H)} \right] \\ &= \|v\|_H \|p\|_H \left[\frac{t^2\|p\|_H}{1-t\|p\|_H} \right] \\ &= \|v\|_H \|p\|_H^2 \cdot \frac{t^2}{1-t\|p\|_H} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Para $t=1$, $x^+ = x + p$, implica:

$$|\varphi(1)| = |g'(x^+)v| \leq \|v\|_H \|p\|_H^2 \cdot \frac{1}{(1-\|p\|_H)} \quad (3.10)$$

Ahora eligiendo $v = p(x^+)$ y como $g + Hp = A'\lambda$ con $Ap = 0 \Rightarrow p = H^{-1}(A'\lambda - g)$ y así $v = H^{-1}(x^+)(A'\lambda - g(x^+))$.

Finalmente obtenemos:

$$\|p(x^+)\|_{H(x^+)}^2 = |p'(x^+)H(x^+)p(x^+)| = |H^{-1}(\lambda' A - g')Hp| = |H^{-1}\lambda' AHp - H^{-1}g'Hp|$$

$$= \left| H^{-1}\lambda' H \underbrace{Ap}_0 - H^{-1}g'Hp \right| = |g'H^{-1}Hp|$$

$$= |g'(x^+)p(x^+)|$$

$$\leq \frac{\|p(x^+)\|_H \|p\|_H^2}{1 - \|p\|_H}, \quad \text{por (3.10)}$$

$$\|p(x^+)\|_{H(x^+)}^2 \leq \frac{\|p(x^+)\|_{H(x^+)} \|p\|_H^2}{(1 - \|p\|_H)^2}, \quad \text{por (3.1)}$$

Pues:

Para

$$\|v\|_H \leq \frac{1}{1 - t\|d\|_H} \cdot \|v\|_{H(x+td)}$$

$$\Rightarrow \|p(x^+)\|_H \leq \frac{\|p(x^+)\|_{H(x^+)}}{1 - \|p\|_H}$$

Y finalmente

$$\|p(x^+)\|_{H(x^+)} \leq \frac{1}{(1 - \|p\|_H)^2} \cdot \|p\|_H^2$$

Esto prueba la primera parte del Lema.

Para

y de aquí

$$\|p\|_H < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$1 - \|p\|_H > 1 - \frac{(3 - \sqrt{5})}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(1 - \|p\|_H)^2 > \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

El siguiente Lema da

un punto casi central

$$\frac{1}{(1 - \|p\|_H)^2} < \frac{2}{3 - \sqrt{5}} < \frac{1}{\|p\|_H}$$

$$\Rightarrow \frac{\|p\|_H^2}{(1 - \|p\|_H)^2} < \|p\|_H.$$

Y como en la primera parte se demostró que:

$$\|p(x^+, u)\|_{H(x^+, u)} = \|p(x^+)\|_{H(x^+)} \leq \frac{1}{(1 - \|p\|_H)^2} \cdot \|p\|_H^2$$

entonces

$$\|p(x^+)\|_{H(x^+)} < \|p(x)\|_H$$

y de aquí la convergencia de Newton.

Para

$$\|p(x)\|_H < \frac{1}{3}$$

$$1 - \|p(x)\|_H \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(1 - \|p\|_H)^2 > \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 - \|p\|_H)^2} < \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\|p\|_H^2}{(1 - \|p\|_H)^2} \leq \frac{9}{4} \|p\|_H^2$$

y de aquí

$$\|p(x^+, u)\|_{H(x^+, u)} = \|p(x)\|_{H(x^+)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_H^2 \quad \square$$

El siguiente Lema da una cota superior para la diferencia en valor barrera asociada en un punto casi centrado x y el centro $x(u)$.

LEMA 3.3:

Si la dirección proyectada de Newton "p" satisface $\|p\|_H < \frac{1}{3}$

entonces
$$\phi_B(x, u) - \phi_B(x(u), u) \leq \frac{\|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4}\right) \|p\|_H^2}$$

Prueba:

Como la función $B(x)$ es convexa en x y $\frac{c'x}{u}$ es lineal, entonces es convexa, luego la

suma $\frac{c'x}{u} + B(x)$ es convexa de donde:

Sabemos que si una función f es convexa entonces

$$f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)' \nabla f(x_1)$$

para todo x_1, x_2 que pertenecen a S un conjunto convexo diferente del vacío,

entonces aplicando esto a ϕ_B para $S = \langle 0, 1 \rangle^n$ y como

$x, x+p \in P^0 = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, 0 < x < e\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_B(x+p, u) &\geq \phi_B(x, u) + (x+p-x)' \nabla \phi_B(x, u) \\ &= \phi_B(x, u) + p' \nabla \phi_B(x, u) \end{aligned}$$

$$\phi_B(x+p, u) \geq \phi_B(x, u) + p' g$$

$$p' g + \phi_B(x, u) \leq \phi_B(x+p, u) \tag{3.11}$$

Ahora usando $g = A' \lambda - Hp \wedge Ap = 0$ tenemos:

Así usando (3.11)

$$p' g = p' (A' \lambda - Hp) = p' A' \lambda - p' Hp$$

$$= (Ap)' \lambda - \|p\|_H^2$$

$$p' g = -\|p\|_H^2$$

Sustituyendo en (3.11) obtenemos:

$$\phi_B(x, u) - \phi_B(x + p, u) \leq -p'g = \|p\|_H^2 \quad (3.12)$$

Ahora sea $x^0 = x$, $p^0 = p$ y sea x^1, x^2, x^3, \dots , la sucesión de puntos obtenidos por pasos consecutivos de Newton $x^k = x^{k-1} + p^{k-1}$, comenzando en x^0 , con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, por el Lema 3.2 tenemos:

$$\|p(x^+, u)\|_{H(x^+, u)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_H^2, \text{ entonces:}$$

$$\|p(x^1, u)\|_{H(x^1, u)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_{H(x^0, u)}^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^{2^1-1} \|p(x^0, u)\|_{H(x^0, u)}^{2^1}$$

$$\|p(x^2, u)\|_{H(x^2, u)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_{H(x^1, u)}^2 \leq \left(\frac{9}{4}\right)^3 \|p(x^0, u)\|_{H(x^0, u)}^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^{2^2-1} \|p\|_H^{2^2}$$

$$\|p(x^3, u)\|_{H(x^3, u)} \leq \frac{9}{4} \|p\|_{H(x^2, u)}^2 \leq \left(\frac{9}{4}\right)^7 \|p\|_{H(x^0, u)}^8 = \left(\frac{9}{4}\right)^{2^3-1} \|p\|_{H(x^0, u)}^{2^3}$$

y así sucesivamente llegamos a que :

$$\|p(x^k, u)\|_{H(x^k, u)} \leq \left(\frac{9}{4}\right)^{2^k-1} \|p(x^0, u)\|_{H(x^0, u)}^{2^k} = \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4}\right)^{2^k} \|p\|_H^{2^k}$$

$$\Rightarrow \|p^k\|_{H(x^k)} \leq \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4} \|p\|_H\right)^{2^k}$$

LEMA 3.4:

Así usando (3.12) podemos escribir

$$\begin{aligned} \phi_B(x, u) - \phi_B(x(u), u) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_B(x^k, u) - \phi_B(x^{k+1}, u)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|p^k\|_{H(x^k)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(4 \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^{2k} \right)^2 = \left(\frac{4}{9} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^{2k+1} \\
&= \left(\frac{4}{9} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2 \right)^{2k} \\
&= \left(\frac{4}{9} \right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2}{1 - \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{9} \right)^2 \left(\frac{9}{4} \right)^2 \|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2} \\
&= \frac{\|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\phi_B(x, u) - \phi_B(x(u), u) \leq \frac{\|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^2} \quad \square$$

El siguiente Lema da una cota superior para la diferencia en el valor de la función objetivo en un punto casi centrado x y $x(u)$.

LEMA 3.4:

Si la dirección proyectada de Newton " p " satisface $\|p\|_H < \frac{1}{3}$ entonces

$$|c'x - c'x(u)| \leq \frac{\left(1 + \frac{9}{4} \|p\|_H \right) 2\mu\sqrt{n}\|p\|_H}{\left(1 - \frac{9}{4} \|p\|_H \right)}$$

Prueba:

Debido a que

$$g = \frac{c}{u} + \nabla B(x)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} c'(x+p) - c'x &= (ug - u\nabla B(x))' p = u(g' p - \nabla' B(x)p) \\ &= u(-\|p\|_H^2 - \nabla' B(x)p) \end{aligned}$$

Tomando el valor absoluto y usando la desigualdad triangular obtenemos:

$$|c'(x+p) - c'x| \leq u(\|p\|_H^2 + |\nabla' B(x)p|) \quad (3.13)$$

Usando la cuarta propiedad de la Barrera Autoconcordante $B(x)$, que establece la siguiente desigualdad

$$|\nabla B(x)h| \leq c^{1/2} (h' \nabla^2 B(x) h)^{1/2}$$

y como B es $4n$ -Autoconcordante entonces $c = 4n$ y para $h = p$ tenemos:

$$|\nabla B(x)p| \leq \sqrt{4n} (p' \underbrace{\nabla^2 B(x)p}_H)^{1/2}$$

además sabemos que $H = \nabla^2 B(x)$, entonces

$$|\nabla B(x)p| \leq 2\sqrt{n} \|p\|_H$$

Obtenemos en (3.13)

$$|c'(x+p) - c'x| \leq u(\|p\|_H^2 + 2\sqrt{n} \|p\|_H)$$

En caso

$$\leq 2u\sqrt{n}(\|p\|_H + \frac{1}{2\sqrt{n}}\|p\|_H^2)$$

Se cumple

$$\leq 2u\sqrt{n}(\|p\|_H + \|p\|_H^2), \text{ debido a que } \frac{1}{2\sqrt{n}} < 1$$

$$\leq 2u\sqrt{n}\|p\|_H(1 + \|p\|_H)$$

$$\therefore |c'(x+p) - c'x| \leq 2u\sqrt{n}\|p\|_H(1 + \|p\|_H)$$

Nuevamente, sea $x = x^0$, $p = p^0$ y $x^1, x^2, x^3, \dots, x^k$ la sucesión de puntos obtenidos repitiendo los pasos de Newton, comenzando en x^0 , entonces se tendrá:

Supongamos

$$\begin{aligned} |c'(x+p) - c'x| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |c'x^k - c'x^{k+1}| \\ &\leq 2u\sqrt{n} \sum_{k=0}^{\infty} \|p^k\|_H (1 + \|p^k\|_H) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego debemos probar

El siguiente resultado:

$$\|p^k\|_H \leq \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^{2^k} < \frac{9}{4} \|p\|_H$$

puede ser probado usando el Lema 3.2 (para la primera desigualdad) y para la segunda, será suficiente probar que:

Con lo que se completa la prueba

$$\left(\frac{9}{4} \|p\|_H \right)^{2^k} < \left(\frac{9}{4} \right)^2 \|p\|_H \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Así desde que

En efecto: Apliquemos inducción

Se cumple para $h=1$ pues

$$\|p\|_H < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{4}\|p\|_H < \frac{3}{4}$$

luego

$$\left(\frac{9}{4}\|p\|_H\right)^{2^1} < \frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}\right)\|p\|_H < \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\|p\|_H < \left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H$$

Supongamos que se cumple para $k=h$, es decir es válido

$$\left(\frac{9}{4}\|p\|_H\right)^{2^h} < \left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H$$

Luego debemos probar que se cumple para $k=h+1$

$$\left(\frac{9}{4}\|p\|_H\right)^{2^{h+1}} = \left[\left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H\right]^{2^h} \quad \text{y como } \left(\frac{9}{4}\|p\|_H\right)^{2^1} < \left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H \text{ se tiene}$$

$$< \left[\left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H\right]^{2^h} \quad \text{y por hipótesis inductiva llegamos a que}$$

$$< \left(\frac{9}{4}\right)^2\|p\|_H$$

Con lo que se completa la segunda desigualdad.

Así desde que

$$\|p^k\| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{9}{4}\|p\|_H\right)^{2^k}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|p^k\| &\leq \frac{4}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{4} \|p\|_H\right)^{2^k} \\ &\leq \frac{\left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{9}{4} \|p\|_H\right)}{1 - \frac{9}{4} \|p\|_H} \\ \therefore \sum_{k=0}^{\infty} \|p^k\| &\leq \frac{\left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{9}{4} \|p\|_H\right)}{1 - \frac{9}{4} \|p\|_H} \end{aligned}$$

luego reemplazando en (3.14) se obtiene :

$$\|c'x(u) - c'x\| \leq 2u\sqrt{n} \left(1 + \frac{9}{4} \|p\|_H\right) \sum_{k=0}^{\infty} \|p^k\|_H \leq 2u\sqrt{n} \left(1 + \frac{9}{4} \|p\|_H\right) \frac{\left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{9}{4} \|p\|_H\right)}{1 - \frac{9}{4} \|p\|_H}$$

$$\leq \frac{\left(1 + \frac{9}{4} \|p\|_H\right) 2u\sqrt{n} \|p\|_H}{\left(1 - \frac{9}{4} \|p\|_H\right)} \quad \square$$

Notemos que si $\|p\|_H = 0$, según el Lema (3.3) y (3.4) se tendrá:

$$\phi_B(x, u) = \phi(x(u), u) \quad , \quad y$$

$$c'x = c'x(u).$$

CAPÍTULO 4

ALGORITMO SIGUIENDO EL CAMINO DE PASO LARGO

Presentamos aquí el algoritmo siguiendo el camino de paso largo, el cual analizaremos en la próxima sección. Las cantidades escalares τ, ε y θ son parámetros del algoritmo que deben ser especificados. En este caso usaremos $\tau = \frac{1}{3}$. El algoritmo requiere de x^0 , una solución inicial interior de (2.1) y de u_0 un valor inicial del parámetro barrera. Ahora describimos el algoritmo para encontrar una solución ε -óptima.

4.1 ALGORITMO

ENTRADA

ε es el parámetro de precisión;

$\tau = \frac{1}{3}$ es el parámetro de proximidad;

θ es el parámetro de reducción, $0 < \theta < 1$;

u_0 es el valor inicial de barrera;

x^0 es un punto interior viable dado, tal que $\|p(x^0, u_0)\|_{H(x^0, u_0)} < \tau$.

inicio

$$x := x^0 \quad ; \quad u := u_0$$

mientras $u > \frac{\varepsilon}{16n}$ **hacer**

inicio (Paso externo)

$$u := (1 - \theta)u;$$

mientras $\|p\|_H \geq \tau$ **hacer**

inicio (Paso interno)

$$\alpha := \arg \min_{\alpha > 0} \{ \phi_B(x + \alpha p, u) : x + \alpha p \in P^0 \}$$

$$x := x + \bar{\alpha} p$$

fin (Paso interno)

fin (Paso externo)

fin.

4.2 DEFINICIONES.-

Llamamos al Algoritmo un:

- ALGORITMO DE PASO LARGO, si θ es una constante ($0 < \theta < 1$) independiente de $n \in \mathbb{Z}^+$ y ε .
- ALGORITMO DE PASO MEDIO, si $\theta = \frac{\nu}{\sqrt{n}}$ donde $\nu > 0$ es una constante arbitraria, posiblemente grande, e independiente de n y ε .
- ALGORITMO DE PASO CORTO, si $\theta = \frac{\nu}{\sqrt{n}}$, y ν es tan pequeño (por ejemplo $\frac{1}{9}$) que después de una reducción de u paso Newton es suficiente para alcanzar la vecindad del nuevo u -centro.

La longitud de paso α usado en las iteraciones internas puede ser cualquier valor tal que $x + \alpha p$ es una solución interior de (2.1), y el decrecimiento en $\phi_B(x, u)$ es al menos garantizado por la longitud de paso α en un próximo Lema (5.3). También asumimos que los valores iniciales (x^0, u_0) satisfacen el criterio de proximidad $\|p\| < \tau$. Para encontrar un punto inicial que satisface estas suposiciones del algoritmo podemos revisar Renegar [13], Monteiro y Adler [8] y Güler et al. [6].

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD

En este capítulo obtenemos una cota de complejidad para nuestro algoritmo siguiendo el camino de paso largo mencionado. En el nuevo algoritmo Barrera usaremos $\tau = \frac{1}{3}$.

Empezamos con una propiedad general de Barrera Autoconcordante.

LEMA 5.1:

Sea $F(x)$ una Barrera ν -Autoconcordante, entonces para cualquier $y, x \in \text{dom}F$ tenemos:

$$(y - x)' \nabla F(x) \leq \nu$$

Prueba:

Ver Nesterov [9].

LEMA 5.2:

Para cualquier $u > 0$, nosotros establecemos:

$$c' x(u) - z^* \leq 4nu$$

donde z^* denota el valor óptimo.

Prueba:

Debido a que

$$g = g(x, u) = \frac{c}{u} + \nabla B(x)$$

entonces evaluando en $x(u)$ obtenemos:

$$\nabla B(x(u)) = g(x(u), u) - \frac{c}{u}$$

y como $x(u)$ minimiza a la función barrera asociada $\phi_B(x(u), u)$, entonces el

$$g(x(u), u) = 0$$

y de allí tenemos que

$$\nabla B(x(u), u) = \frac{-c}{u}$$

ahora aplicando el Lema anterior a los puntos x^* y $x(u)$, donde x^* es el punto óptimo.

$$\nabla' B(x(u), u)(x^* - x(u)) \leq 4n$$

$$\frac{-c'}{u}(x^* - x(u)) \leq 4n$$

Con lo que llegamos a:

$$c'(x(u)) - z^* \leq 4nu, \quad \text{donde } z^* = c'x^* \quad \square$$

El siguiente Teorema da una cota superior para el número de iteraciones externas.

TEOREMA 5.1:

Después de a lo más

$$\frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{16nu_0}{\varepsilon}\right)$$

iteraciones externas, el nuevo algoritmo barrera termina con una solución primal tal que

$$c'x - z^* \leq \varepsilon.$$

Prueba:

El algoritmo termina cuando $u_k = (1-\theta)^k u_0 \leq \frac{\varepsilon}{16n}$

tomando logaritmo tenemos:

$$k \ln(1-\theta) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{16nu_0}\right) = -\ln\left(\frac{16nu_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{luego } -k \ln(1-\theta) \geq \ln\left(\frac{16nu_0}{\varepsilon}\right) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \theta \leq -\ln(1-\theta), \quad \text{pues } e^\theta &= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!} + \dots \\ &\leq 1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n + \dots = \frac{1}{1-\theta} \end{aligned}$$

$$\theta \leq -\ln(1-\theta)$$

De aquí es fácil notar que para θ pequeño ($\theta \gg 1$)

$$\theta \approx -\ln(1-\theta).$$

Finalmente reemplazando en (*)

$$k \geq \frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{16nu_0}{\varepsilon}\right)$$

Ahora probaremos que la diferencia entre $c^t x$ y z^* es menor o igual que ε .

Por el Lema 3.4 y el Lema 5.2 se tiene

$$\begin{aligned} c^t x - z^* &\leq (c^t x - c^t x(u_k)) + (c^t x(u_k) - z^*) \\ c^t x - z^* &\leq \left[\frac{1 + \frac{9}{4} \|p\|_H}{1 - \frac{9}{4} \|p\|_H} \right] (2u_k \sqrt{n} \|p\|_H) + 4nu_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

esto es debido a que

$$\|p\|_H < \frac{1}{3}$$

luego

$$1 - \frac{9}{4} \|p\|_H > \frac{1}{4}$$

además

$$\frac{2\left(\frac{9}{4}\right)\|P\|_H}{1 - \frac{9}{4}\|P\|_H} < 6$$

con lo que

$$\frac{1 + \frac{9}{4}\|P\|_H}{1 - \frac{9}{4}\|P\|_H} = 1 + \frac{2\left(\frac{9}{4}\right)\|P\|_H}{1 - \frac{9}{4}\|P\|_H} < 7$$

Entonces reemplazando en (5.1)

$$\begin{aligned} 7(2)u_k\sqrt{n}\left(\frac{1}{3}\right) + 4nu_k &= \frac{7}{3}(2u_k\sqrt{n}) + 4nu_k \\ &\leq \frac{7}{3}(4u_k\sqrt{n}) + 4nu_k = 4u_k\left(\frac{7}{3}\sqrt{n} + n\right) \end{aligned}$$

Con esto, se obtiene

$$c^T x - z^* \leq 4u_k\left(\frac{7}{3}\sqrt{n} + n\right)$$

ahora como

$$u_k \leq \frac{\varepsilon}{16n} \Rightarrow 4u_k \leq \frac{\varepsilon}{4n}$$

entonces

$$c^T x - z^* \leq \frac{\varepsilon}{4n}\left(\frac{7}{3}\sqrt{n} + n\right)$$

y como

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}\sqrt{n} + n &\leq \frac{7}{3}n + n = \frac{10n}{3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4n}\left(\frac{10n}{3}\right) = \frac{5\varepsilon}{6} \end{aligned}$$

con lo que finalmente llegamos a que

$$c^T x - z^* \leq \varepsilon \quad \square$$

El siguiente Lema es necesario para derivar una cota superior para el número de iteraciones internas en cada iteración externa.

LEMA 5.3:

Sea $\bar{\alpha} = (1 + \|p\|_H)^{-1}$ entonces:

$$\Delta\phi_B(\bar{\alpha}) = \phi_B(x, u) - \phi_B(x + \bar{\alpha}p, u) \geq \|p\|_H - \ln(1 + \|p\|_H) > 0$$

Prueba:

Sea

$$\Delta\phi_B(\alpha) = \phi_B(x, u) - \phi_B(x + \alpha p, u)$$

y la función dada en (3.8) con $v=p$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= g'(x + tp)p - (1-t)(g'(x) - A'\lambda)p \\ &= g'(x + tp)p - (1-t)(g'(x)p - \lambda'Ap) \\ &= g'(x + tp)p - (1-t)(g'(x)p)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{d}{d\alpha} \Delta\phi_B(\alpha) = -g'(x + \alpha p, u)p = -\varphi(\alpha) - (1-\alpha)g'(x)p$$

y como $g'(x)p = -\|p\|^2$

debido a (3.9), se tiene

$$\frac{d}{d\alpha} \Delta\phi_B(\alpha) = -\varphi(\alpha) + (1-\alpha)\|p\|^2 \geq (1-\alpha)\|p\|_H^2 - \|p\|_H^3 \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha\|p\|_H} \quad (5.2)$$

Por otro lado

$$\Delta\phi_B(\alpha) = \Delta\phi_B(\alpha) - \Delta\phi_B(0)$$

$$\Delta\phi_B(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d}{ds} (\Delta\phi_B(s)) ds$$

Por (5.2)

$$\Delta\phi_B(\alpha) \geq \int_0^\alpha \left[(1-s)\|p\|_H^2 - \|p\|_H^3 \cdot \frac{s^2}{1-s\|p\|_H} \right] ds$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_B(\alpha) &\geq \int_0^\alpha \|p_H\|^2 \left[\frac{1-s(\|p_H\|+1)}{1-s\|p_H\|} \right] ds \\
\Delta\phi_B(\alpha) &\geq \|p_H\|^2 \int_0^\alpha \left(1 - \frac{s}{1-s\|p_H\|} \right) ds = \|p_H\|^2 \left[s + \frac{1}{\|p_H\|^2} [\ln(1-s\|p_H\|) - (1-s\|p_H\|)] \right]_0^\alpha \\
&= \|p_H\|^2 \left[\alpha + \frac{1}{\|p_H\|^2} [\ln(1-\alpha\|p_H\|) - (1-\alpha\|p_H\|) + 1] \right] \\
&= \alpha\|p_H\|^2 + \ln(1-\alpha\|p_H\|) - 1 + \alpha\|p_H\| + 1 \\
\Delta\phi_B(\alpha) &\geq \alpha\|p_H\|^2 + \ln(1-\alpha\|p_H\|) + \alpha\|p_H\| \quad (5.3)
\end{aligned}$$

El lado derecho es máximo para $\alpha = \frac{1}{1+\|p_H\|}$, pues tomando

$$f(\alpha) = \alpha\|p_H\|^2 + (\ln(1-\alpha\|p_H\|)) + \alpha\|p_H\| \quad \text{y}$$

haciendo $f'(\alpha) = 0$ tenemos:

$$\|p_H\|^2 - \frac{\|p_H\|}{1-\alpha\|p_H\|} + \|p_H\| = 0$$

Como $\|p_H\| \neq 0$, ya que si no tendríamos que $p=0$ y no tendría sentido,

$$\|p_H\| - \frac{1}{1-\alpha\|p_H\|} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\|p_H\| - \alpha\|p_H\|^2 - 1 + 1 - \alpha\|p_H\|}{1-\alpha\|p_H\|} = 0 \quad \text{y esto sucede}$$

sí y sólo sí

$$\|p_H\|[1-\alpha\|p_H\| - \alpha] = 0 \Leftrightarrow 1-\alpha\|p_H\| - \alpha = 0$$

$$\text{luego} \quad 1-\alpha[\|p_H\| + 1] = 0$$

$$\text{implicando} \quad \frac{1}{\|p_H\| + 1} = \alpha$$

Tomando $\frac{1}{\|p\|_H + 1} = \bar{\alpha}$, tenemos un máximo para $f(\alpha)$ debido a que

$$f''(\alpha) = -\|p\|_H^2 (1 - \alpha\|p\|_H)^{-2} < 0$$

Substituyendo $\bar{\alpha}$ en (5.3), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_B(\alpha) &\geq \frac{\|p\|_H^2}{1 + \|p\|_H} + \ln\left(1 - \frac{\|p\|_H}{1 + \|p\|_H}\right) + \frac{\|p\|_H}{1 + \|p\|_H} \\ &= \frac{\|p\|_H(1 + \|p\|_H)}{1 + \|p\|_H} + \ln\left(\frac{1}{1 + \|p\|_H}\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta\phi_B(\alpha) \geq \|p\|_H - \ln(1 + \|p\|_H) > 0$$

En efecto $\|p\|_H - \ln(1 + \|p\|_H)$ es positivo

pues

$$e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow x > \ln(1 + x) \text{ y así } x - \ln(1 + x) > 0 \quad \text{, y haciendo } x = \|p\|_H.$$

Con lo que se completa la prueba. \square

El siguiente Teorema da una cota superior para el número total de iteraciones internas en cada iteración externa.

TEOREMA 5.2:

Cada iteración externa requiere a lo más

$$\frac{44\theta}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n+2n} \right) + \frac{22}{3}$$

iteraciones internas.

Prueba:

Denotando al valor del parámetro barrera en una arbitraria iteración externa por \bar{u} , mientras al valor del parámetro en la previa iteración externa es denotado por \bar{u} . El iterado en el comienzo de la iteración externa es denotado por x . De aquí x es centrado con respecto a $x(\bar{u})$ y $u = (1-\theta)u$. Por el Lema 5.3 durante cada iteración interna el decrecimiento en el valor de la Función Barrera es al menos:

$$\Delta\phi_B(\alpha) \geq \|p\|_H - \ln(1 + \|p\|_H) > \frac{1}{3} - \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) > \frac{1}{22}$$

Sea N el número de iteraciones internas durante una iteración externa, como la diferencia entre el valor de la Función Barrera en el iterado actual x y el centro próximo $x(\bar{u})$ es igual a $\phi_B(x, \bar{u}) - \phi_B(x(\bar{u}), \bar{u})$ entonces tenemos:

$$\phi_B(x, \bar{u}) - \phi_B(x^1, \bar{u}) \geq \Delta$$

$$\phi_B(x^1, \bar{u}) - \phi_B(x^2, \bar{u}) \geq \Delta$$

⋮

$$\phi_B(x^{N-1}, \bar{u}) - \phi_B(x^N, \bar{u}) \geq \Delta$$

Por lo tanto:

$$\frac{N}{22} < N\Delta \leq \phi_B(x, \bar{u}) - \phi_B(x(\bar{u}), \bar{u}) \tag{5.4}$$

Por otro lado, sea la función

$$\psi_B(x, \bar{u}) = \phi_B(x, \bar{u}) - \phi_B(x(\bar{u}), \bar{u})$$

Por el Teorema del valor medio, existe un $\bar{u} \in (\underline{u}, \bar{u})$ tal que:

$$\psi_B(x, \bar{u}) = \psi_B(x, \underline{u}) - \frac{d}{du} \psi_B(x, u) \Big|_{u=\bar{u}} \cdot (\bar{u} - \underline{u}) \quad (5.5)$$

Recordando que:

$$\phi_B(x, u) = \frac{c'x}{u} + B(x) \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d}{du} \phi_B(x, u) = \frac{-c'x}{u^2}$$

y denotando la derivada de $x(u)$ respecto a u por x' , es decir

$$\frac{dx(u)}{du} = x'$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \phi_B(x(u), u) &= \frac{c'ux' - c'x(u)}{u^2} + \nabla B(x(u)) \\ &= \frac{c'x'}{u} - \frac{c'x(u)}{u^2} - \frac{c'x'}{u} \\ &= \frac{-c'x(u)}{u^2} \end{aligned}$$

y como

$$\psi_B(x, u) = \phi_B(x, u) - \phi_B(x(u), u)$$

entonces derivando, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \psi_B(x, u) &= \frac{d}{du} \phi_B(x, u) - \frac{d}{du} \phi_B(x(u), u) \\ &= \frac{-c'x}{u^2} + \frac{c'x(u)}{u^2} \end{aligned}$$

luego

$$-\frac{d}{du} \psi_B(x, u) = \frac{c'x - c'x(u)}{u^2}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{du}\psi_B(x,u)\Big|_{u=\bar{u}} &= \left(\frac{c^t x - c^t x(u)}{u^2} \right)\Big|_{u=\bar{u}} \\
 &\leq \left| \frac{c^t x - c^t x(\bar{u})}{\bar{u}^2} \right|
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\bar{u} < \bar{u} \Rightarrow \frac{1}{\bar{u}^2} < \frac{1}{\bar{u}^2}$ y de que $c^t x(\bar{u}) \leq c^t x(\bar{u})$.

Por lo tanto $-c^t x(\bar{u}) \geq -c^t x(\bar{u})$

Sumando a ambos lados $c^t x$, tendríamos $c^t x - c^t x(\bar{u}) \geq c^t x - c^t x(\bar{u})$

luego
$$\frac{c^t x - c^t x(\bar{u})}{\bar{u}^2} \leq \frac{c^t x - c^t x(\bar{u})}{\bar{u}^2}$$

Sustituyendo (5.6) en (5.5) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \psi_B(x, \bar{u}) &\leq \psi_B(x, u) + \frac{|c^t x - c^t x(\bar{u})|}{\bar{u}^2} \cdot (\bar{u} - \bar{u}) \\
 &\leq \psi_B(x, \bar{u}) + \left(\frac{|c^t x - c^t x(\bar{u})|}{\bar{u}} + \frac{c^t x(\bar{u}) - c^t x(\bar{u})}{\bar{u}} \right) \cdot \frac{(\bar{u} - \bar{u})}{\bar{u}}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Observamos que se puede sacar el valor absoluto a $c^t x(u) - c^t x(u)$ pues $\bar{u} < \bar{u} < \bar{u}$ entonces $c^t x(\bar{u}) < c^t x(\bar{u})$.

Desde que $\|p(x, \bar{u})\|_{H(x, \bar{u})} < \frac{1}{3}$, para que se detenga el Paso Interno, tenemos debido al

Lema 3.3 que:

$$\psi_B(x, \bar{u}) = \phi_B(x, \bar{u}) - \phi_B(x(\bar{u}), \bar{u}) \leq \frac{\|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 \|p\|_H^2} < \frac{1}{3}.$$

Pues:

$$\|p\|_H^2 < \frac{1}{9}$$

lo que implica

$$1 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 \|p\|_H^2 > \frac{7}{16}$$

y así

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 \|p\|_H^2} < \frac{16}{7} < 3$$

entonces

$$\frac{\|p\|_H^2}{1 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 \|p\|_H^2} < 3 \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$

luego

$$\psi_B(x, \bar{u}) < \frac{1}{3}$$

Ahora notamos que debido al Lema 3.4 ya que $\|p\|_H < \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} |c'x - c'x(\bar{u})| &\leq \left(\frac{1 + \frac{9}{4}\|p\|_H}{1 - \frac{9}{4}\|p\|_H} \right) 2\bar{u}\sqrt{n}\|p\|_H \\ &\leq 7(2)\bar{u}\sqrt{n}\|p\|_H \\ &< 7\left(\frac{2}{3}\right)\bar{u}\sqrt{n}. \end{aligned}$$

También tenemos:

$$\frac{c'x(\bar{u}) - c'x(\bar{u})}{\bar{u}} \leq \frac{c'x(\bar{u}) - z^*}{\bar{u}} \leq \frac{4n\bar{u}}{\bar{u}}$$

La desigualdad del lado derecho se sigue del Lema 5.2 y la del lado izquierdo debido a que:

$$z^* \leq c'x(\bar{u})$$

lo que implica

$$-c'x(\bar{u}) \leq -z^*$$

y así

$$\frac{c'x(\bar{u}) - c'x(\bar{u})}{\bar{u}} \leq \frac{c'x(\bar{u}) - z^*}{\bar{u}}$$

Poniendo todas estas cotas superiores en (5.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}\psi_B(x, \bar{u}) &\leq \frac{1}{3} + \left[2\left(\frac{7}{3}\right)\bar{u}\sqrt{n} + 4n\bar{u} \right] \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}}{\bar{u}^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \left[2\left(\frac{7}{3}\right)\sqrt{n} + 4n \right] \left(\frac{\bar{u}(\bar{u} - \bar{u})}{\bar{u}^2} \right)\end{aligned}$$

Desde que $\bar{u} = (1 - \theta)\bar{u}$ obtenemos

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3} + \left[2\left(\frac{7}{3}\right)\sqrt{n} + 4n \right] \frac{\bar{u}[\bar{u} - (1 - \theta)\bar{u}]}{(1 - \theta)^2 \bar{u}^2} \\ &= \frac{1}{3} + \left[2\left(\frac{7}{3}\right)\sqrt{n} + 4n \right] \frac{\theta(\bar{u})^2}{(1 - \theta)^2 \bar{u}^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi_B(x, \bar{u}) \leq \frac{1}{3} + \left[2\left(\frac{7}{3}\right)\sqrt{n} + 4n \right] \frac{\theta}{(1 - \theta)^2}$$

Sustituyendo esto en (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned}N &\leq 22 \left[\frac{1}{3} + \left(2\left(\frac{7}{3}\right)\sqrt{n} + 4n \right) \frac{\theta}{(1 - \theta)^2} \right] \\ &= \frac{44\theta}{(1 - \theta)^2} \left(\frac{7}{3}\sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3}.\end{aligned}$$

Es decir cada iteración externa requiere a lo más

$$\frac{44\theta}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3}$$

iteraciones internas. \square

Combinando los Teoremas 5.1 y 5.2, el número total de iteraciones Newton requeridas por el algoritmo es dado por el siguiente Teorema.

Pero antes debemos conocer las siguientes notaciones:

- $v(n) = O(w(n))$, quiere decir que existe una constante $c > 0$ tal que, para un "n" suficientemente grande, $v(n) \leq cw(n)$.
- $v(n) = \mathcal{G}(w(n))$, quiere decir que existen constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que, para un "n" suficientemente grande, $c_1 w(n) \leq v(n) \leq c_2 w(n)$.

TEOREMA 5.3:

Una cota superior para el número total de iteraciones Newton es dado por:

$$\left[\frac{44\theta}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3} \right] \text{Ln} \left(\frac{16nu_0}{\varepsilon} \right)$$

Prueba:

Como el algoritmo termina con una solución ε -óptima después de a lo más

$\frac{1}{\theta} \text{Ln} \left(\frac{16nu_0}{\varepsilon} \right)$ iteraciones externas y cada iteración externa requiere a lo más

$\frac{44\theta}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3}$ iteraciones internas.

Entonces una Cota Superior para el número total de iteraciones Newton es dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta} \operatorname{Ln} \left(\frac{16nu_0}{\varepsilon} \right) \left[\frac{44\theta}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3} \right] \\ &= \left[\frac{44}{(1-\theta)^2} \left(\frac{7}{3} \sqrt{n} + 2n \right) + \frac{22}{3\theta} \right] \operatorname{Ln} \left(\frac{16nu_0}{\varepsilon} \right) \quad \square \end{aligned}$$

Esto hace claro que para obtener una solución ε -óptima el algoritmo necesita iteraciones Newton de $O \left(n \operatorname{Ln} \left(\frac{nu_0}{\varepsilon} \right) \right)$ para la variante de Paso Largo ($0 < \theta < 1$).

Para obtener una Solución Óptima tenemos que tomar $\varepsilon = 2^{-2L}$, donde L es el tamaño del problema (es decir el número de bits necesarios para registrar la entrada del problema), aproximadamente $L = \mathcal{G}(mn + \lceil \log_2 |P| \rceil)$, donde P es el producto de todos los coeficientes no nulos de A , b y c , ver Khachian [15]. Para este valor de ε los límites de iteración son de $O(nL)$, asumiendo que $u_0 \leq 2^{O(L)}$.

Esto es debido a que:

$$\begin{aligned} n \operatorname{Ln} \left(\frac{nu_0}{2^{-2L}} \right) &= n \operatorname{Ln}(nu_0 \cdot 2^{2L}) \quad , \quad u_0 \leq 2^{LK} \quad \text{con } K > 0 \\ &\leq n \operatorname{Ln}(n 2^{Lk} \cdot 2^{2L}) \\ &= n \operatorname{Ln}(n) + n \operatorname{Ln}(2^{L(K+2)}) \\ &= n \operatorname{Ln}(n) + nL(K+2) \operatorname{Ln}(2) \\ &= n \operatorname{Ln}(n) + nL(K+2) \operatorname{Ln}(2) \\ &= n \operatorname{Ln}(n) + nLK_1 \quad \quad \quad \text{con } K_1 = (K+2) \operatorname{Ln}(2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$n \operatorname{Ln} \left(\frac{nu_0}{2^{-2L}} \right) = O(nL).$$

RESULTADOS

Se obtuvo los siguientes resultados en la presente investigación:

1. Introducimos una nueva función Barrera $B(x)$ para nuestro problema lineal la cual cumple las condiciones de Autoconcordancia , por las cuales se nos facilita los cálculos .
2. Probamos algunas propiedades importantes para la nueva función Barrera asociada a $B(x)$; es decir $\varphi_B(x, u)$, aplicada a programación lineal usando la convergencia cuadrática del proceso de Newton en una vecindad bien definida del u -centro.
3. Obtenemos propiedades relacionadas al Camino Central asociado a nuestro Problema de Programación Lineal usando la norma $\|\cdot\|_H$.
4. Presentamos un algoritmo siguiendo el camino de paso largo para minimizar $\varphi_B(x + \alpha p)$, en el que analizamos su complejidad.
5. Finalmente se llego a obtener una complejidad de $O\left(n \ln\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$ para obtener una solución ε -óptima.

DISCUSIÓN

1. La necesidad de desarrollar esta nueva función Barrera Autoconcordante vino de la observación de que la mayoría de los métodos de Punto Interior utilizan la función Barrera logarítmica para garantizar la polinomialidad de sus algoritmos.
2. La mayoría de los trabajos sobre Métodos que siguen un camino son concernientes con Métodos de paso corto. Sin embargo estos métodos son poco atractivos en la práctica desde que el punto fijo corto y las pequeñas actualizaciones en el parámetro requieren muchas iteraciones. Por otro lado el método siguiendo el camino de paso largo es mucho más flexible, debido a que permite hacer grandes actualizaciones en el parámetro y se comporta mejor en la práctica.
3. Por otra parte esta función Barrera también puede ser usada para resolver problemas de Programación Cuadrática Convexa.

CONCLUSIONES

Del trabajo realizado obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Este trabajo une el Problema Primal con el Dual y a ambos con las condiciones Karush-Kunh-Tucker, para luego utilizar la nueva Función Barrera 4n-Autoconcordante.
2. La nueva Función Barrera 4n-Autoconcordante $B(x)$ para resolver el problema de Programación Lineal, por su estructura posee propiedades importantes para los resultados.
3. Usando un algoritmo adecuado de paso largo y gracias al método de Newton que posee la cualidad de tener convergencia cuadrática, se elige un paso Newton p , luego analizando su complejidad llegamos a obtener la polinomialidad de este algoritmo (lo cual siempre se garantizaba utilizando la Función Barrera Logarítmica), en este sentido obtenemos la cota de $O\left(n \ln\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$ para encontrar una solución ε -óptima.

APÉNDICE A

Estabilidad de Barreras Autoconcordantes

PROPOSICIÓN A.1

i. Estabilidad con respecto a sustituciones afines del argumento

Sea F una Barrera ν -Autoconcordante para $G \subset \mathfrak{R}^n$ y sea $x = Ay + b$ la función afín que va de \mathfrak{R}^k a \mathfrak{R}^n con la imagen intersectando al $\text{int}(G)$. Entonces la imagen inversa de G , es decir, el conjunto

$$G^+ = \{y \in \mathfrak{R}^k / Ay + b \in G\}$$

es un dominio convexo cerrado en \mathfrak{R}^k , y la función compuesta

$$F^+(y) = F(Ay + b) : \text{int}(G^+) \rightarrow \mathfrak{R}$$

es una Barrera ν -Autoconcordante para G^+ .

ii. Estabilidad con respecto a la Suma y Multiplicación de reales mayores o iguales que uno (≥ 1).

Sea F_i Barreras ν_i -Autoconcordante para los dominios convexos cerrados $G_i \subset \mathfrak{R}^n$ y $\alpha_i \geq 1$ reales, $i=1, \dots, m$. Asumimos que el $G = \bigcap_{i=1}^m G_i$ tiene un interior no vacío. Entonces la función

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \dots + \alpha_m F_m(x) : \text{int}(G) \rightarrow \mathfrak{R}$$

es una Barrera $\sum_{i=1}^m \alpha_i \nu_i$ -Autoconcordante para G .

iii. Estabilidad con respecto a la Suma Directa

Sea F_i Barreras ν_i -Autoconcordante para los dominios convexos cerrados $G_i \subset \mathbb{R}^n$ y $G = G_1 \times \dots \times G_m$. Entonces la función

$$F(x_1, \dots, x_m) = F_1(x_1) + \dots + F_m(x_m) : \text{int}(G) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$G = G_1 \times \dots \times G_m,$$

es una Barrera $\sum_{i=1}^m \nu_i$ -Autoconcordante para G .

Prueba:

Ver Nesterov, Y.E., Nemirovsky [10]

APÉNDICE B

LEMAS GENERALES

LEMA B.1.-

Si G_1, G_2 , son matrices simétricas con $|h'G_1h| \leq h'G_2h$, $\forall h \in \mathfrak{R}^n$ entonces

$$(h_1'G_1h_1)^2 \leq h_1'G_2h_1h_2'G_2h_2, \\ \forall h_1, h_2 \in \mathfrak{R}^n.$$

Prueba:

Ver Jarre [7].

LEMA B.2.-

Si $F \in \mathfrak{R}^{n \times n \times n}$ es una forma simétrica trilineal, y $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ una forma simétrica bilineal y $\varepsilon > 0$ es tal que $\forall h \in \mathfrak{R}^n$,

$$F[h, h, h]^2 \leq \varepsilon G[h, h]^3 \\ \Rightarrow F[h_1, h_2, h_3]^2 \leq \varepsilon G[h_1, h_1]G[h_2, h_2]G[h_3, h_3] \quad \forall h_1, h_2, h_3 \in \mathfrak{R}^n$$

Prueba:

Ver Nesterov y Nemirovsky [10].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Den HERTOOG., “*Interior Point Approach to Linear; Quadratic and Convex Programming*”, 1 ed. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] Den HERTOOG, D., ROOS, C. and TERLAKY, T., “*Inverse Barrier Methods for Linear Programming*”, Report 91-27, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delf University of Technology, The Netherlands, 1991.
- [3] ERIKSSON, J.R. , “*An iterative Primal-Dual Algorithm for Linear Programming*”, Report LITH-MAT-1985-10 ,Departament of Mathematics, Linköping University, Linköping , Sweden, 1985.
- [4] FIACCO, A.V., McCORMICK, G.P., “*Non Linear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*”, 1 ed. New York, Wiley, 1968, Reprinted by SIAM Publication.
- [5] FRISCH, K.R., “*The Logarithm Potential Method of Convex Programming*”, Technical Report, University Institute of economics, Oslo, Norway, 1955.
- [6] GÜLER, O., ROOS, C., TERLAKY, T., and VIAL J-Ph., “*Interior Point Approach to the Theory of Linear Programming*”, Technical Report 1992.3, Université de Genève, Departament d’Economie Commerciale et Industrielle, Genève, Switzerland, 1992.
- [7] JARRE, F.(1992), “*Interior -point Methods for Convex Programming*” , Applied Mathematics y Optimization 26,287-311.

- [8] MONTEIRO, R.D.C, and ADLER, I., "*Interior path Following Primal-Dual Algorithms*", Part I: Linear Programming, *Mathematical Programming* 44, 43-66.
- [9] NESTEROV Y., "*Introductory Lectures on Convex Programming*", Volume I: Basic Course, July 2 ,1998 (Published by Kluwer in 2001).
- [10] NESTEROV , Y.E., NEMIROVSKY, A.N., "*Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*", Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [11] NESTEROV , Y.E., NEMIROVSKY A.S.(1989), "*Self -Concordant Functions and Polynomial Time Methods in Convex Programming*", Report , Central Economical and Mathematical Institute , USSR Academy of Science, Moscow, USSR.
- [12] POLYAK, R.A., "*Modified Barrier Function*", Mathematical Sciences Department , IBM Research Division , T. J.Watson Research Center. Yorktown Heights , New York , 1989.
- [13] RENEGAR, J., "*A Polynomial-Time Algorithm, Based on Newton's Method, for Linear programming*", *Mathematical Programming*, v.40, pp.59-93, 1988.
- [14] GILL, P.E., MURRAY, W., SAUNDERS, M.A., TOMLIN, "*On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to the Karmarkar's Projected Methods*", *Mathematical Programming* , v.36, pp. 183-209,1986.
- [15] KHACHIAN, L.G., "*A Polynomial Algorithm in Linear Programming*", *Doklady Akademii Nauk SSSR* 244 , pp. 1093-1096. Translated into English in *Soviet Mathematics Doklady* 20, 191- 194.