

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA  
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**



**TESIS**

**“ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL ÓPTIMO Y  
PREDICTIVO DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE  
BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO”**

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO  
ELECTRÓNICO**

**AUTOR:**

**Bach. MICHAEL ANTONIO CISNEROS TAFUR**

**ASESOR:**

**Dr. Ing. JACOB ASTOCONDOR VILLAR**

**Callao, 2021**

**PERÚ**



## Document Information

---

<b>Analyzed document</b>	TESIS CISNEROS TAFUR.pdf (D172499512)
<b>Submitted</b>	7/31/2023 10:55:00 PM
<b>Submitted by</b>	JUAN GRADOS GAMARRA
<b>Submitter email</b>	fiee.investigacion@unac.edu.pe
<b>Similarity</b>	0%
<b>Analysis address</b>	fiee.investigacion.unac@analysis.arkund.com

## Sources included in the report

---

### Entire Document

---

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA TESIS “ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL ÓPTIMO Y PREDICTIVO DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO” PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO ELECTRÓNICO AUTOR: Bach. MICHAEL ANTONIO CISNEROS TAFUR ASESOR: Dr. Ing. JACOB ASTOCONDOR VILLAR

Callao, 2021 PERÚ

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA ACTA PARA LA OBTENCIÓN DEL TITULO PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS SIN CICLO DE TESIS A los 24 días del mes de setiembre Del 2021 siendo las 09:00 Horas se reunió el Jurado Examinador de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica conformado por los siguientes Docentes Ordinarios de la Universidad Nacional del Calla, (Res. Resolución N°060-2021-DFIEE) M.Sc. Ing. JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA Presidente M.Sc. Ing. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS Secretario Mg. Ing. JORGE ELÍAS MOSCOSO SÁNCHEZ Vocal Con el fin de dar inicio a la exposición de Tesis de los señores Bachiller CISNEROS TAFUR, MICHAEL ANTONIO. quienes habiendo cumplido con los requisitos para obtener el Título Profesional de Ingeniería Electrónica tal como lo señalan los Arts. N° 12 al 15 del Reglamento de Grados y Títulos, sustentarán la Tesis Titulada “

ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL ÓPTIMO Y PREDICTIVO DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO”,

con el quórum reglamentario de ley, se dio inicio a la exposición, considerando lo establecido en los Art. N° 14 y 17 del Reglamento de Grados y Títulos dado por Resolución N° 047-92-CU, en el Capítulo N° 06, corresponde al otorgamiento del Título Profesional con Tesis, efectuadas las deliberaciones pertinentes se acordó: Dar por Aprobado Calificativo Muy bueno nota: 17 al expositor Bachiller CISNEROS TAFUR, MICHAEL ANTONIO con lo cual se dio por concluida la sesión, siendo las 9.45 horas del día del mes y año en curso. Es copia fiel del folio N°172 Del Libro de Actas de Sustentación de Tesis de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica – UNAC. ....

..... PRESIDENTE SECRETARIO M.Sc. Ing. JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA M.Sc. Ing. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS ..... VOCAL Mg. Ing. JORGE ELÍAS MOSCOSO SÁNCHEZ HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN PRESIDENTE : MSc. Ing. JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA SECRETARIO : MSc. Ing. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS VOCAL : Mg. Ing. JORGE ELIAS MOSCOSO SANCHEZ ASESOR : MSc.

Ing. JACOB ASTOCONDOR VILLAR

A mi familia, por su incalculable apoyo.

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**  
**ACTA PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL POR LA MODALIDAD**  
**DE TESIS SIN CICLO DE TESIS**

A los 24 días del mes de setiembre Del 2021 siendo las 09:00 Horas se reunió el Jurado Examinador de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica conformado por los siguientes Docentes Ordinarios de la Universidad Nacional del Calla, (Res. Resolución N°060-2021-DFIEE)

M.Sc. Ing. JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA	Presidente
M.Sc. Ing. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS	Secretario
Mg. Ing. JORGE ELÍAS MOSCOSO SÁNCHEZ	Vocal

Con el fin de dar inicio a la exposición de Tesis de los señores Bachiller CISNEROS TAFUR, MICHAEL ANTONIO. quienes habiendo cumplido con los requisitos para obtener el Título Profesional de Ingeniería Electrónica tal como lo señalan los Arts. N° 12 al 15 del Reglamento de Grados y Títulos, sustentarán la Tesis Titulada “ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL ÓPTIMO Y PREDICTIVO DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO”, con el quórum reglamentario de ley, se dio inicio a la exposición, considerando lo establecido en los Art. N° 14 y 17 del Reglamento de Grados y Títulos dado por Resolución N° 047-92-CU, en el Capítulo N° 06, corresponde al otorgamiento del Título Profesional con Tesis, efectuadas las deliberaciones pertinentes se acordó:

Dar por Aprobado Calificativo Muy bueno nota: 17 al expositor Bachiller **CISNEROS TAFUR, MICHAEL ANTONIO** con lo cual se dio por concluida la sesión, siendo las 9.45 horas del día del mes y año en curso.

Es copia fiel del folio N°172 Del Libro de Actas de Sustentación de Tesis de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica – UNAC.



.....  
**PRESIDENTE**

M.Sc. Ing. JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA



.....  
**SECRETARIO**

M.Sc. Ing. ABILIO BERNARDINO CUZCANO RIVAS



.....  
**VOCAL**

Mg. Ing. JORGE ELÍAS MOSCOSO SÁNCHEZ

## AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DE TESIS EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

Por medio del presente documento, autorizo la publicación del texto completo de la tesis de pre grado en el Repositorio Institucional de la Universidad Nacional del Callao, de conformidad señalado en el Decreto Legislativo N° 822, sobre la Ley de los Derechos de Autor, Ley N° 30035 del Repositorio Nacional Digital de Ciencia, Tecnología e Innovación de Acceso Abierto, Art. 10° del Reglamento Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales en las universidades - RENATI resolución N° 033-2016-SUNEDU/CD, de fecha 08.09.16; para lo cual especifico la siguiente información:

<b><u>DATOS PERSONALES</u></b>	
<b>APELLIDOS Y NOMBRES</b>	CISNEROS TAFUR, MICHAEL ANTONIO
<b>DNI</b>	72049616
<b>TELÉFONO</b>	938514026
<b>E-MAIL</b>	mcistaf@gmail.com

<b><u>DATOS ACADÉMICOS</u></b>	
<b><u>PREGRADO</u></b>	
<b>FACULTAD</b>	FIEE
<b>ESCUELA PROFESIONAL</b>	INGENIERÍA ELECTRÓNICA
<b>GRADO ACADEMICO</b>	BACHILLER EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
<b>TITULO PROFESIONAL</b>	
<b>OBSERVACIONES/ PRECISIONES</b>	

<b><u>DATOS DE LA TESIS</u></b>	
<b>TÍTULO</b>	"ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL ÓPTIMO Y PREDICTIVO DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO"
<b>AÑO DE PUBLICACIÓN</b>	2021
<b>OBSERVACIONES/ PRECISIONES</b>	

Nota: Todo el dato consignado tiene carácter de Declaración Jurada.

  
 \_\_\_\_\_  
 FIRMA

  
 HUELLA DIGITAL

## **HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN**

**PRESIDENTE** : **MSc. Ing. Julio César Borjas Castañeda**  
**SECRETARIO** : **MSc. Ing. Abilio Bernardino Cuzcano Rivas**  
**VOCAL** : **Mg. Ing. Jorge Elías Moscoso Sánchez**  
  
**ASESOR** : **Dr. Ing. Jacob Astocondor Villar**



A mi familia, por su incalculable apoyo.



## **AGRADECIMIENTO**

Familia, amigos, profesores y personas especiales en mi vida, no son nada más y nada menos que un solo conjunto: seres queridos que suponen benefactores de importancia incalculable en mis circunstancias de humano. No podría sentirme más ameno con la confianza puesta en mi persona, especialmente cuando con su mejor apoyo desde que siquiera tengo memoria. Este nuevo logro es en gran parte gracias a ustedes; he logrado concluir con éxito un proyecto que al principio podría parecer tarea titánica e interminable. Quisiera dedicar mi tesis a ustedes, personas de bien, seres que ofrecen amor, bienestar y los finos deleites de la vida.

# Índice general

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>6</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>7</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>8</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>12</b>
1.1. Descripción de la realidad problemática . . . . .	12
1.2. Formulación del problema . . . . .	17
1.2. 1. Problema general . . . . .	17
1.2. 2. Problema específico . . . . .	17
1.3. Objetivos . . . . .	18
1.3. 1. Objetivo general . . . . .	18
1.3. 2. Objetivos específicos . . . . .	18
1.4. Justificación . . . . .	19
1.4. 1. Teórica . . . . .	19
1.4. 2. Tecnológica . . . . .	19
1.5. Limitantes de la investigación . . . . .	20
1.5. 1. Teórica . . . . .	20

1.5. 2. Temporal . . . . .	20
1.5. 3. Espacial . . . . .	20
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>21</b>
2.1. Antecedentes de estudio . . . . .	21
2.2. Bases teóricas . . . . .	24
2.2. 1. Descripción del sistema . . . . .	24
2.2. 2. Modelo dinámico del sistema de bombeo . . . . .	25
2.3. Marco teórico conceptual . . . . .	30
2.3. 1. La ecuación de estado del sistema . . . . .	30
2.3. 2. Parámetros valorados del sistema . . . . .	37
2.3. 3. Controlabilidad . . . . .	38
2.3. 4. Observabilidad . . . . .	41
2.3. 5. Prueba de controlabilidad y observabilidad . . . . .	44
2.4. Definición de términos básicos . . . . .	45
<b>3. HIPÓTESIS Y VARIABLES</b>	<b>48</b>
3.1. Hipótesis . . . . .	48
3.1. 1. Hipótesis general . . . . .	48
3.1. 2. Hipótesis específica . . . . .	48
3.2. Variables de la investigación . . . . .	49
3.2. 1. Variable dependiente . . . . .	49
3.2. 2. Variable independiente . . . . .	49
3.3. Operacionalización de variables . . . . .	49
<b>4. DISEÑO METODOLÓGICO</b>	<b>51</b>
4.1. Tipo de investigación . . . . .	51
4.2. Diseño de la investigación . . . . .	52
4.2. 1. Obtención del modelo matemático . . . . .	52

4.2. 1.1.	Estudio del modelo matemático . . . . .	52
4.2. 1.2.	Selección del software . . . . .	54
4.2. 1.3.	Simulación del modelo matemático . . . . .	54
4.2. 2.	Diseño y simulación de controladores . . . . .	56
4.2. 3.	Control óptimo . . . . .	56
4.2. 3.1.	Diseño del controlador óptimo discreto . . . . .	57
4.2. 3.2.	Diseño del controlador óptimo Proporcional-Integral	61
4.2. 4.	Control predictivo . . . . .	65
4.2. 4.1.	El modelo CARIMA del sistema de bombeo . . . . .	68
4.2. 4.2.	Diseño del controlador predictivo . . . . .	70
4.3.	Método de investigación . . . . .	76
4.4.	Población y muestra . . . . .	77
4.5.	Lugar del estudio . . . . .	77
4.6.	Técnicas e instrumentos . . . . .	77
4.7.	Análisis y procesamiento de datos . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>78</b>
5.1.	Resultados descriptivos . . . . .	79
5.1. 1.	Simulaciones del control óptimo . . . . .	79
5.1. 1.1.	Caso $R = 0.01$ y $Q = 1000$ . . . . .	79
5.1. 1.2.	Caso $R = 0.001$ y $Q = 1000$ . . . . .	79
5.1. 2.	Simulaciones del control predictivo . . . . .	81
5.1. 2.1.	Caso $\gamma = 0$ y $\alpha = 0.98$ . . . . .	81
5.1. 2.2.	Caso $\gamma = 0$ y $\alpha = 0.1$ . . . . .	82
<b>6.</b>	<b>DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>83</b>
6.0. 1.	Contrastación de la hipótesis con los resultados . . . . .	83
6.0. 2.	Contrastación de la hipótesis con otros estudios similares .	84
6.0. 3.	Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes	85

<b>CONCLUSIONES</b>	<b>86</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>89</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>90</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>92</b>
<b>A. MATRIZ DE CONSISTENCIA</b>	<b>92</b>
<b>B. PROGRAMAS MATLAB</b>	<b>94</b>
<b>C. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES</b>	<b>113</b>
<b>D. PRESUPUESTO</b>	<b>115</b>

# Lista de Figuras

1.	Torre de perforación. . . . .	13
2.	Bombeo por accionamiento mecánico. . . . .	15
3.	Características de la respuesta deseada del sistema. . . . .	16
4.	Torre de extracción para el bombeo de petróleo. . . . .	25
5.	Torre de extracción sin maquinaria impulsora. . . . .	26
6.	Diagramas de cuerpo libre de los componentes de la torre de extracción. (a)Viga; (b) cable; (c) vástago de succión; (d) tramo de tubería debajo del vástago; (e) tramo de tubería encima del vástago.	27
7.	Ley de Darcy en estado estacionario para el flujo radial de petróleo.	32
8.	Modelo en variables espacio estado. . . . .	36
9.	Momento de inercia de la viga. . . . .	39
10.	Estructura de acciones necesarias para la solución del problema. .	52
11.	Respuesta del sistema de bombeo a una entrada escalón. . . . .	55
12.	Respuesta de los estados a un escalón del sistema de bombeo. . .	55
13.	Diagrama de bloques para el sistema de control óptimo. . . . .	59
14.	El regulador proporcional integral. . . . .	61
15.	Estrategia del control predictivo. . . . .	67
16.	Estrategia del control predictivo basado en modelos . . . . .	68
17.	El efecto de las entradas tipo escalón en la salida forzada. . . . .	74

18.	Simulaciones del control óptimo para peso $R = 0.01$ y $Q = 1000$ . . .	80
19.	Simulaciones del control óptimo para peso $R = 0.001$ y $Q = 1000$ . . .	80
20.	Simulaciones del control predictivo para la sintonía $\alpha = 0.98$ . . . .	81
21.	Simulaciones del control predictivo para la sintonía $\alpha = 0.1$ . . . .	82
22.	Sistemas de control de bombeo desarrollados. . . . .	87

# Lista de Tablas

1.	VARIABLES DE ESTADO DEL SISTEMA DE BOMBEO. . . . .	30
2.	PARÁMETROS VALORADOS DEL SISTEMA DE SUCCIÓN DE PETRÓLEO. . . . .	38
3.	OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES. . . . .	50
4.	PRESUPUESTO DE LA INVESTIGACIÓN. . . . .	116



## **RESUMEN**

En el presente trabajo de tesis se desarrolla el modelo matemático del sistema de bombeo mecánico para un pozo subterráneo de petr'oleo, además se presenta el diseño de controladores avanzados discretos aplicados al sistema, con el objetivo de que su respuesta sea suave y mejorar el desempeño en la producción de petróleo crudo. Los controladores presentados son el control óptimo proporcional-integral y predictivo denominado control matricial dinámico, los resultados de las simulaciones son evaluados en un análisis comparativo para mediante criterios de cumplimiento de las condiciones de diseño determinar la mejor técnica de control para el sistema.

## **ABSTRACT**

In this thesis work the mathematical model of the system is developed mechanical pumping system for an underground oil well. The design of advanced discrete controllers applied to the system, with the Aim to make your response smooth and improve production performance of crude oil. The controllers presented are the optimal proportional-integral control and predictive called dynamic matrix control, the results of the simulations are evaluated in a comparative analysis for using criteria compliance with the design conditions and determine the best control for the system.

# INTRODUCCIÓN

El primer pozo perforado en el Perú fue perforado en Noviembre de 1863 en la costa norte del Perú en el cuál se descubrió petróleo a los 24 metros de profundidad, en el yacimiento de Zorritos, en la cuenca Tumbes. Este pozo empezó a producir 60 barriles de petróleo por día, fue el primer pozo perforado en América del Sur (Pérez-Taiman, 2015).

En la actualidad mantener la producción de hidrocarburos en los diferentes campos petroleros, sobre todo en campos maduros con más de 20 años de desarrollo, requiere del empleo de tecnologías novedosas que permitan continuar con la explotación de estos campos. Los sistemas artificiales de producción representan una solución a este problema, y permiten alargar la vida productiva de los pozos. En el mundo se emplean diferentes sistemas artificiales de producción como son el Bombeo Electrocentrífugo Sumergido (BEC), Bombeo Hidráulico tipo Jet (BHJ), Bombeo Hidráulico tipo Pistón (BHP), Bombeo Mecánico (BM), Bombeo de Cavidades Progresivas (BCP), Bombeo Neumático Continuo (BNC), Bombeo Neumático Intermitente (BNI), y Émbolo Viajero (EV).

El bombeo mecánico fue una de las primeras técnicas utilizada a nivel mundial y continúa siendo de los sistemas artificiales de producción más utilizados en la industria petrolera, debido a que es un sistema económico y fácil de mantener, cuando es diseñado y operado apropiadamente.

La principal ventaja del bombeo mecánico al igual que el bombeo de cavidades progresivas consiste en que permite el manejo de aceites con elevada viscosidad. Estas ventajas asegura que el petróleo de los campos maduros, generalmente con alta viscosidad junto a la baja presión de estos, logre ser bombeados a la superficie permitiendo la producción por muchos años más.

En el presente trabajo se desarrolla el modelo matemático del sistema de bombeo mecánico para un pozo subterráneo, este modelo describe la interacción entre la torre de extracción y el pozo. Se consideran componentes como la viga móvil, el cable metálico montado en la viga y el vástago de la bomba; el torque necesario para la operación de la torre es proporcionada por un motor.

Para el modelo matemático desarrollado, en el transcurso de este trabajo, se presenta el diseño de controladores avanzados discretos aplicados al sistema de bombeo mecánico. Los controladores presentados son el control óptimo proporcional-integral (Moreno, 2001) y predictivo denominado control matricial dinámico (Moreno, 2001) cuyos resultados de las simulaciones son evaluados en un análisis comparativo basados en criterios de diseño establecidos, con el objetivo de verificar desempeño en la estabilización del sistema y el sobreimpulso en las respuestas del sistema.

# CAPÍTULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

El petróleo es el fluido más abundante en la corteza terrestre, después del agua. Sin embargo, nadie conoce con exactitud su real naturaleza. La teoría, más aceptada, establece que el petróleo se originó en los restos de miles de millones de diminutos animales que, a medida que morían, se acumulaban en el fondo de los mares, mezclándose con el barro. Allí se sumaban a vegetales de origen marino y a fragmentos de plantas terrestres. El conjunto fue enterrándose cada vez más profundamente, comprimido por el peso de los nuevos sedimentos y suavemente recalentado por el calor de la tierra. Este calor fue transformado a lo largo de los siglos la masa de sedimentos que dió origen a lo que hoy conocemos como petróleo. Empujado por la presión de los estratos rocosos, subiendo desde las profundidades, el petróleo migró hacia rocas menos compactas, hasta toparse con algún estrato totalmente impermeable (Paul R. Robinson, 2017).

No importa cuán fuertes sean los indicios hallados por geólogos y geofísicos; la

única forma de determinar la real existencia de hidrocarburos es realizar la perforación de un pozo, siendo el método más utilizado en la actualidad es el de la perforación rotativa (Fontenot et al., 2005), que emplea una torre de perforación como la mostrada en la Figura 1.



**Figura 1:** Torre de perforación.

**Fuente:** Wikimedia.

Si la búsqueda de petróleo es coronada con éxito, y los volúmenes de hidrocarburos encontrados justifican su explotación económica, es necesario poner el pozo en producción. El petróleo crudo atrapado en el subsuelo (que suele estar mezclado con gas y agua) se mantiene allí bajo presión. Si las presiones son altas, el petróleo es obligado a desplazarse desde el fondo del pozo y fluye hacia arriba. Una vez terminada la perforación, se instala una cañería de producción que posee una serie de válvulas que permiten cerrar y abrir el pozo a voluntad, regulando su surgencia. El petróleo llega a la superficie y luego es bombeado hacia una planta

de procesamiento que separa el gas del petróleo.

El período natural de un pozo es el de menor costo de producción, puesto que toda la energía utilizada es aportada por el mismo yacimiento. Cuando esta energía deja de ser suficiente, es necesario recurrir a métodos artificiales para continuar extrayendo el petróleo. Los métodos artificiales para extraer petróleo son: bombeo por accionamiento mecánico, bombeo con accionamiento hidráulico, extracción con gas, extracción con pistón accionado a gas, y extracción con bomba centrífuga.

El bombeo por accionamiento mecánico (ver Figura 2) es el más utilizado y es el que emplearemos en este estudio. El vástago de la bomba se baja hasta el fondo de la tubería de producción y se acciona por varillas unidas a manera de un cable dinámico, el cual es movido por una viga dinámica que actúa como balancín, imprimiéndosele un movimiento de vaivén.

El bombeo con accionamiento hidráulico es una variante del anterior, en la que la bomba es accionada sin varillas, desde una estación de bombeo hidráulico. La extracción con gas, también llamada surgencia artificial, consiste en inyectar gas a presión dentro de la tubería, para aligerar la columna de petróleo y llevarlo a la superficie. La extracción con pistón accionado a gas, consiste en un pistón viajero empujado por el gas propio del pozo, que lleva a la superficie el petróleo que se acumula entre viajes del pistón. La extracción mediante bomba centrífuga con motor eléctrico sumergible utiliza una bomba de paletas, accionada por un motor eléctrico. El conjunto se baja con una tubería especial, y permite bombear grandes volúmenes.

Este estudio enfrenta el problema del control del flujo de petróleo extraído



**Figura 2:** Bombeo por accionamiento mecánico.

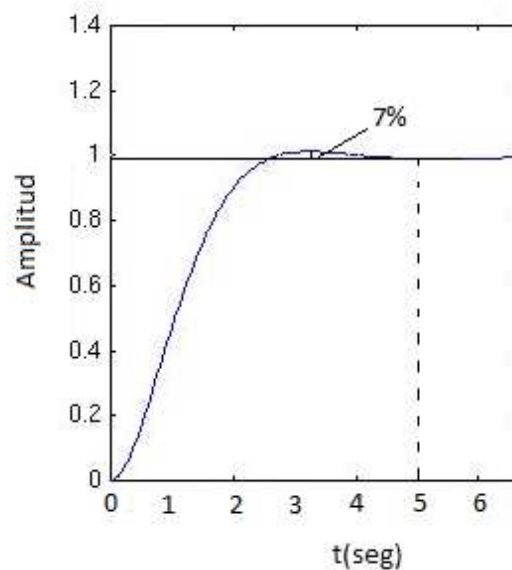
**Fuente:** Google Images

mediante bombeo por accionamiento mecánico, empleando técnicas avanzadas de control digital por realimentación para ser implementadas en el dominio discreto, es decir en forma digital. Las técnicas de control a ser empleadas son: control óptimo proporcional-integral y control predictivo con leyes de control matricial y escalar.

Normalmente los sistemas de control realimentados existentes, emplean controladores convencionales del tipo proporcional-integral que trabajan tanto en el dominio del tiempo continuo como en el discreto. Los sistemas de control a diseñar en este estudio, no pretenden reemplazar a los sistemas existentes, pero sí ser una gran alternativa de solución en los casos que los sistemas controlados convencionalmente no logren satisfacer plenamente las especificaciones de diseño o requieran optimizar la respuesta de los mismos. En estos casos ocurren por



ejemplo, cuando las instalaciones son de naturaleza compleja y requieran para su descripción de un modelo dinámico altamente no lineal; aquí los controladores convencionales son menos eficientes que los controladores digitales a diseñar en el presente estudio (Moreno, 2001).



**Figura 3:** Características de la respuesta deseada del sistema.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

El diseño de un sistema de control realimentado es relativamente simple y es posible realizarlo ya sea en el dominio del tiempo (contínuo o discreto) o en el dominio de la frecuencia, para nuestro caso se toma como referencia la señal de flujo de petróleo y se definen las especificaciones de diseño en el dominio del tiempo, tales como máximo sobre impulso, tiempo de levantamiento y tiempo de asentamiento. Estas especificaciones son únicas para cada requerimiento individual y describen que debe hacer el sistema y como hacerlo (Kuo, 1996). Seguidamente se asignan valores a los parámetros como tiempo de estabilización menor a 5 segundos (s) ya que es importante alcanzar el flujo de petróleo deseado en el menor tiempo posible, la otra consideración de diseño es un sobre impulso menor del

7%, esta consideración se da en virtud que se desea reducir el transitorio que suele ocurrir en la señal de control (Ogata, 1996), por ello, es necesario que la respuesta del sistema sea suave, la respuesta aproximada que se desea se muestra en la Figura 3.

Además, la señal de control, en este caso el torque proporcionado por el sistema de bombeo y necesario para lograr el movimiento del vaivén debe ser menor que 4000 N-m, ya que es importante bombear un pozo a muy baja presión (dependiendo de la profundidad y el caudal). Accionamientos mayores se llegan a lograr lógicamente con bombas más potentes y a un costo muy elevado.

## **1.2. Formulación del problema**

### **1.2. 1. Problema general**

¿Es posible el control del flujo de petróleo extraído mediante bombeo por accionamiento mecánico, empleando técnicas avanzadas de control digital óptimo y predictivo?

### **1.2. 2. Problema específico**

- ¿Cuál es el modelo dinámico del sistema de bombeo por accionamiento mecánico?
- ¿Cuales técnicas de control digital avanzadas óptimo o predictivo satisfacen las condiciones de diseño establecidas, tiempo de estabilización menor que 5 segundos y un sobreimpulso menor que 7%?
- ¿Determinar la mejor técnica de control a aplicar al sistema, para cumplir las condiciones de diseño establecidas?

## **1.3. Objetivos**

### **1.3. 1. Objetivo general**

Diseñar técnicas avanzadas de control digital para el sistema de bombeo por accionamiento mecánico que permitan el control de flujo en el sistema de acuerdo a las consideraciones de diseño que se requieren para lograr una respuesta suave.

### **1.3. 2. Objetivos específicos**

Las técnicas de control avanzado a emplearse para el control del flujo extraído requieren de un modelo matemático, que sea capaz de capturar las características dinámicas del sistema. Además, como tales técnicas se implementan en el dominio discreto, entonces es importante determinar el período de muestreo apropiado, de modo tal que las especificaciones de diseño sean satisfechas.

Por los considerandos anteriores, los objetivos específicos de este estudio son:

1. Deducir el modelo dinámico del sistema de bombeo de petróleo por accionamiento mecánico.
2. Diseñar técnicas de control avanzado, que sean capaces de estabilizar el flujo de petróleo extraído en un tiempo menor que 5 segundos y con un sobre impulso menor que 7%.
3. Realizar una comparativa de respuestas para las técnicas de control diseñadas.

## **1.4. Justificación**

### **1.4. 1. Teórica**

En el presente estudio el flujo de petróleo producido pretende ser controlado a través de técnicas de control que emplean algoritmos lineales invariantes en el tiempo (LTI), la gran dificultad es que, el modelo matemático que describe la dinámica del sistema de bombeo es altamente no lineal, hecho que complica en demasía el diseño de estos sistemas de control. Por tanto este estudio contribuirá al conocimiento teórico sobre esta área.

### **1.4. 2. Tecnológica**

La importancia tecnológica del presente trabajo de investigación radica en el hecho de que petróleo es un recurso no renovable de vital importancia en nuestra sociedad, se usa prácticamente en todas las cosas que usamos a diario. Su extracción es sin lugar a dudas una de las etapas claves en todo el proceso, ya que marca el inicio de toda una cadena de procesos que lleva al petróleo extraído del subsuelo a convertirse en los productos terminados.

Esta elevada importancia hace que se requiera métodos más sofisticados de extracción, que involucren tanto sistemas de bombeo más robustos y eficientes. La estación de bombas produce un torque de entrada, que es capaz de balancear una viga dinámica montada sobre un punto pivote al extremo superior de de la torre de perforación. Esta viga acciona un cable metálico muy largo que está introducido en el pozo de petróleo, el cual posee la forma de tubo cilíndrico muy profundo. En el extremo de dicho cable se encuentra el vástago cilíndrico de la bomba, el mismo que es el agente que hace que el petróleo suba hacia la superficie cada vez que dicho vástago se desplace hacia arriba.

## **1.5. Limitantes de la investigación**

### **1.5. 1. Teórica**

Las limitaciones teóricas de este trabajo son listadas a continuación:

- En estructuras complejas el modelamiento será aproximado a lo ideal.
- Las características de histéresis y viscoelasticidad no serán considerados en el modelo.
- El petróleo será considerado como un líquido incomprensible.
- El flujo del petróleo ascendente es laminar.
- No se medirán otros parámetros para la validación aparte de la respuesta en flujo.

### **1.5. 2. Temporal**

El periodo de tiempo de la investigación es a partir de setiembre de 2018, por un lapso de 16 meses.

### **1.5. 3. Espacial**

La investigación se realiza en las instalaciones del Grupo de investigación en Sistemas de Control Avanzados y Electrónica (ISCA & Electronics).

# CAPÍTULO 2

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes de estudio

No existen antecedentes reportados relacionados con este estudio. Sin embargo, existen numerosas referencias a temas como la optimización del bombeo mecánico (Palma, 2010; Villalobos, 2011), el diseño y optimización de sistemas de bombeo mecánico (Watson et al., 2004). Que por separado nos dan una referencia del tema que concierne a esta tesis el bombeo mecánico y su optimización mediante estrategias avanzadas de control automático.

Específicamente nos avocaremos a tres casos de estudio nacional e internacional, estos son descritos a continuación y nos dan la base teórica para abordar nuestra investigación.

En primer lugar se tiene que, en 2010 fue presentado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, División de ingeniería y ciencias de la tierra el trabajo especial de grado *Aplicación de tecnologías no convencionales de bombeo mecánico en México* por Claudia I. Martello P., como requisito para optar el título de Ingeniero en Petróleo (Palma, 2010).

Esta investigación presenta un estudio sobre la aplicación de una de las técnicas no convencionales del bombeo mecánico, como es la unidad de bombeo mecánico de carrera larga (Unidad Rotaflex) cuya introducción surge en respuesta a la necesidad de buscar nuevas soluciones para la explotación de pozos de fluidos altamente viscosos ( $> 6000cp$ ) y de baja gravedad específica ( $< 10^\circ API$ ). Del mismo modo se describen los fundamentos de diseño y operación del bombeo mecánico de carrera larga, el principio de funcionamiento del equipo, los detalles de sus componentes, así como su rango de aplicación y sus ventajas con respecto a la unidad convencional.

Se analiza un caso práctico de la implementación de la unidad de bombeo mecánico de carrera larga en dos pozos, uno horizontal y otro vertical, de un campo maduro. Se analiza desde el diseño de la unidad y el estado mecánico de los pozos hasta las condiciones de operación del equipo y el comportamiento de los pozos.

Concluyendo que el bombeo mecánico es un sistema artificial de producción que permite la extracción de fluidos de alta viscosidad mediante un movimiento ascendente-descendente, que se transmite por medio de una sarta de varillas a la bomba de fondo, este método de extracción alarga la vida productiva de los pozos petroleros cuya energía ha disminuido. Las unidades de carrera larga logran una mayor versatilidad de operación al manejar fluidos altamente viscosos (hasta  $5.4^\circ API$ ), profundidades de hasta  $3200m$  y bajos gastos de producción, además estas unidades se logran extender a pozos de diversas características, desde pozos someros y de bajo gasto ( $100 bpd$ ), hasta pozos más profundos y de altos gastos.

La segunda investigación que, en el 2013 fue presentada a la Facultad de in-

geniería de petróleo, gas natural y petroquímica de la Universidad Nacional de Ingeniería de Perú, el trabajo *Diseño, optimización y mejora de la extracción de petróleo utilizando un sistema de bombeo mecánico hidráulico aplicándolo en campos maduros* por Miguel Angel Salvador Villalobos, como requisito para optar el título de Ingeniero de Petróleo y Gas Natural (Villalobos, 2011).

En este estudio ofrece una amplia base teórica y conceptual respecto a los tipos de sistemas de extracción de petróleo en campos maduros que se utilizan actualmente en Perú tales como el bombeo mecánico, además plantea una solución técnica y económica de bajo costo basado en un prototipo hidráulico de fabricación nacional y su respectiva aplicación para un pozo específico (SV 1000) en el lote X, un campo maduro ubicado en la cueca de Talara (Piura - Perú), para la observación de las dificultades y bondades que ofrece este sistema. Concluyendo finalmente que el sistema es beneficioso tanto en el aspecto económico como también se experimenta un incremento en la producción aunque el mayor beneficio resulta de que el sistema se adecua a la forma de control que se tiene en los campos con bombeo mecánico lo que representa un ahorro de recursos.

El tercer caso de estudio corresponde a una aplicación de patente que, en 2012 fue presentada en la Oficina de patentes de Australia (Australian patent office) con el título *Reciprocating pump control system* y número de patente 2003240330 (Watson et al., 2004).

El invento presentado corresponde al diseño de un sistema para variar la velocidad rotacional del ciclo interno de un sistema de bombeo mecánico. En términos generales, la invención comprende un sistema de control de velocidad para una bomba de haz oscilante que es accionada por un motor de combustión interno o eléctrico. El sistema permite al usuario controlar la geometría de la



unidad de bombeo. En esencia, la dinámica y el movimiento de la sarta de varillas se desacoplan de la geometría de la unidad de bombeo. El sistema incluye hardware eléctrico y electrónico, métodos numéricos, algoritmos de software y diseño de una interfaz de usuario para permitir el control de la unidad de bombeo y los perfiles de velocidad diseñados para controlar el movimiento y la dinámica de la barra mientras se compensa la geometría específica de la unidad de bombeo utilizada.

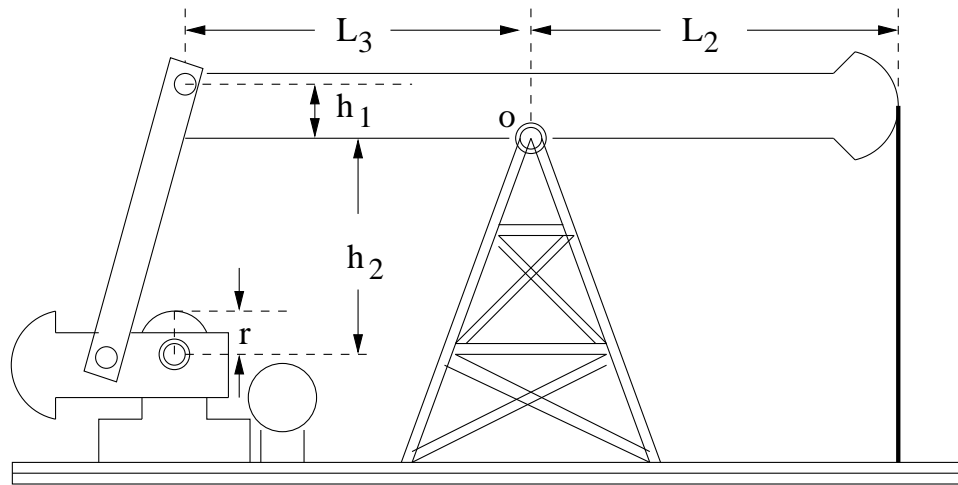
## 2.2. Bases teóricas

### 2.2. 1. Descripción del sistema

El sistema en estudio es la versión simplificada del sistema de elevación en un pozo petrolero, que se logra mediante la torre de extracción (Umez-Eronini, 1999). Dicha torre de extracción (ver Figura 4) se emplea para bombear el petróleo, desde aquellos pozos en los cuales la presión del depósito de petróleo no es la suficiente como para elevar de manera natural el petróleo hasta la superficie. La inversión necesaria para lograr que el petróleo llegue a la superficie en forma normal, resultaría antieconómica e inconveniente. Por ello, a fin de aplicar otro sistema de elevación del petróleo, es que, se requiere modelar el sistema en consideración.

Para propósitos de simplificación, la maquinaria impulsora que aparece en la Figura 4 se reemplaza mediante un par de torsión (o torque) de entrada  $T_{in}$ , tal como se muestra en la Figura 5. Dicho torque actúa sobre una viga móvil de masa  $m_1$  y momento de inercia  $J_1$ , la cual es capaz girar alrededor del punto pivote O, ubicado en la parte superior de la torre de perforación (Inzunza, 2007).

Los diagramas de cuerpo libre (ver Figura 6) de los componentes de la torre



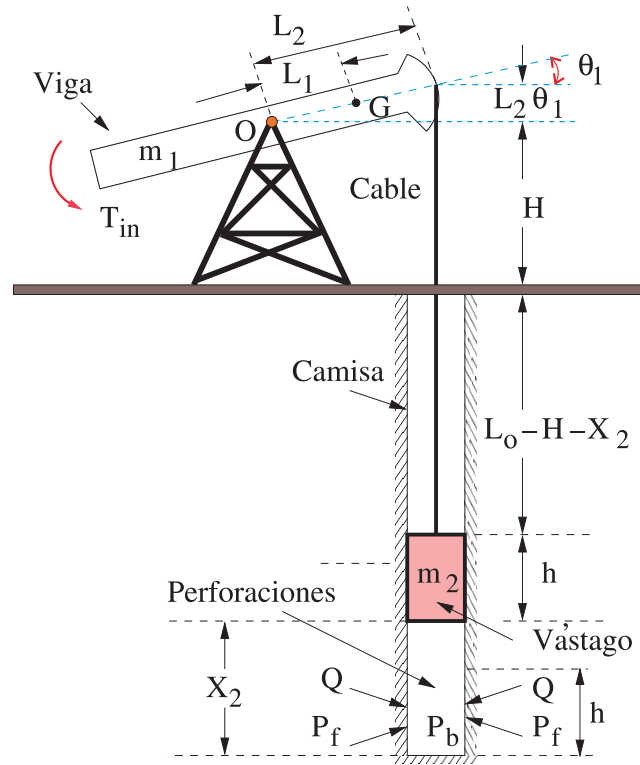
**Figura 4:** Torre de extracción para el bombeo de petróleo.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

de bombeo, a saber:

- La viga móvil de masa,  $m_1$  de la Figura 6(a).
- El cable metálico largo montado en la viga móvil de la Figura 6(b).
- El vástago de la bomba de masa  $m_2$  de la Figura 6(c).
- Los diagramas de cuerpo libre para la parte superior e inferior del vástago de la bomba, se ilustran en las Figuras 6(d), 6(e), respectivamente.

Se debe tener en cuenta, que el pozo ubicado debajo del vástago incluye la formación rocosa perforada que lo rodea. Desde allí fluye el petróleo, a través de la camisa del pozo y hacia arriba, a medida en que el vástago se desplaza hacia arriba. La presión  $P_f$  en la formación rocosa (llamada también depósito de formación), se considera fija.



**Figura 5:** Torre de extracción sin maquinaria impulsora.

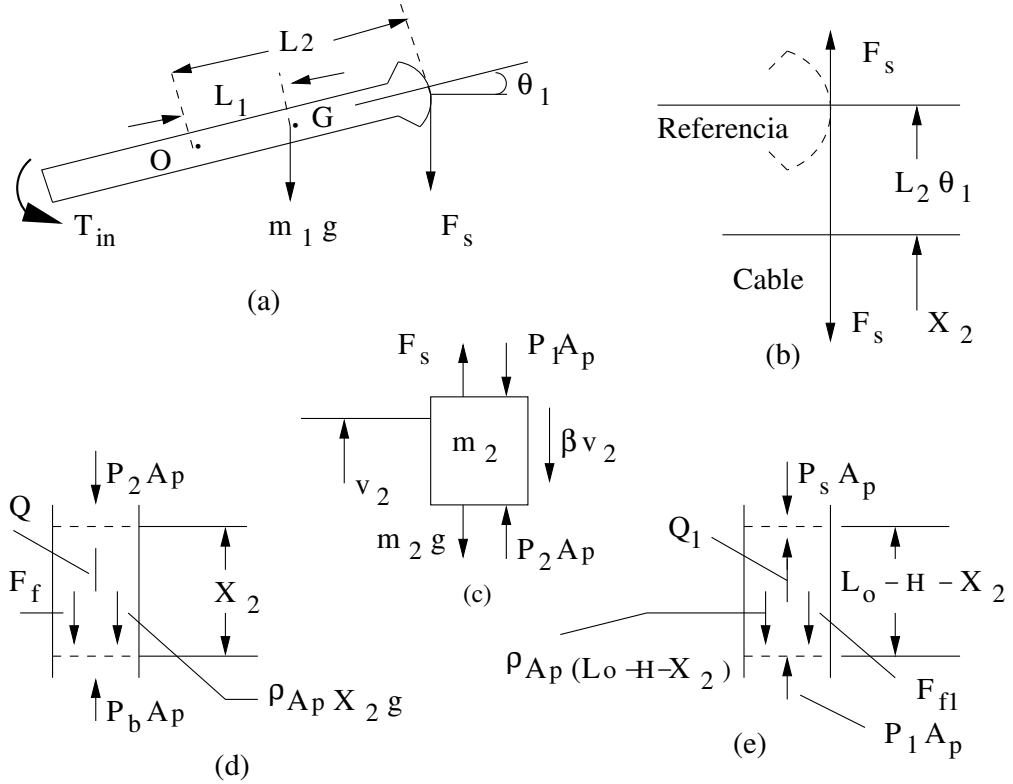
**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

## 2.2. 2. Modelo dinámico del sistema de bombeo

Para formular el modelo dinámico del sistema de bombeo, se asume las consideraciones siguientes: durante el movimiento ascendente del vástago de bombeo los ángulos de desplazamiento de la viga son pequeños, el petróleo es un fluido incomprensible, el flujo de petróleo ascendente por el pozo es laminar y dicho pozo es bastante profundo.

Bajo las consideraciones asumidas, si aplicamos la segunda ley de Newton aplicada a la viga móvil (ver Figura 6(a)), produce la ecuación (2.1).

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{in} - m_1 g L_1 \cos \theta_1 - F_s L_2 \quad (2.1)$$



**Figura 6:** Diagramas de cuerpo libre de los componentes de la torre de extracción. (a) Viga; (b) cable; (c) vástago de succión; (d) tramo de tubería debajo del vástago; (e) tramo de tubería encima del vástago.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Donde  $\omega_1$  es la velocidad angular desarrollada por la viga,  $L_1$  y  $L_2$  son las distancias del punto  $O$  y del punto  $G$  (el centro de gravedad de la viga) al árbol de levas de dicha viga,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\theta_1$  es el desplazamiento angular de la viga y  $F_s$  es la fuerza de tensión ejercida por el cable del perforador.

Como el desplazamiento angular  $\theta_1$  es pequeño, entonces es válido que  $\cos(\theta) \cong \theta$ . Por consiguiente, la ecuación (2.1) resulta:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{in} - m_1 g L_1 \theta_1 - F_s L_2 \quad (2.2)$$

Para el cable dinámico cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en las Figuras

5 y 6(b), se desprenden las relaciones siguientes:

$$F_s = \frac{A_c E \Delta L}{L} \quad \Delta L = L_2 \theta_1 - X_2 \quad L = L_O - X_2$$

Donde  $F_s$  es la fuerza de estiramiento del cable,  $A_c$  es el área de la sección transversal del cable,  $E$  es el módulo de elasticidad para el material de dicho cable,  $L_2 \theta_1$  es la distancia aproximadamente vertical recorrida por el cabezal ubicado al extremo derecho de la viga móvil,  $L_O$  es la distancia entre la línea horizontal trazada a través del punto pivote  $O$  y el fondo del pozo, pero excluyendo la longitud  $h$  del vástago de succión de masa  $m_2$ . Luego:

$$F_s = A_c E \left[ \frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \quad (2.3)$$

La segunda ley de Newton aplicada a la masa  $m_2$  del vástago, cuyo diagrama de cuerpo libre se logra ver en la Figura 6(c), resulta en la ecuación (2.4):

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = P_2 A_p + F_s - P_1 A_p - \beta v_2 - m_2 g \quad (2.4)$$

Donde  $A_p$  es el área de la sección transversal del pozo perforado,  $\beta$  es la constante de amortiguamiento viscoso con relación al vástago de la bomba,  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones ejercidas encima y debajo del vástago, y  $v_2$  es la velocidad de desplazamiento del vástago.

Aplicando la ley de conservación de la materia para el tramo de tubería debajo del vástago, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 6(d), se obtiene la ecuación (2.5):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A_p}{\rho X_2} (P_b - P_2) + \frac{A_p g}{X_2} (0 - X_2) - \frac{F_f}{\rho X_2} \quad (2.5)$$

Donde  $Q$  es el flujo de petróleo circundante,  $\rho$  es la densidad de dicho flujo y  $P_b$  es la presión en el fondo del pozo perforado, el cual posee un diámetro  $d$  y la fuerza de fricción  $F_f$  representa la resistencia al paso del flujo  $Q$  a través de la tubería.

La ecuación de Darcy-Weisbach es una ecuación ampliamente usada en hidráulica (Brown, 2002), permite el cálculo de la pérdida de carga debida a la fricción dentro una tubería donde la fuerza  $F_f$  producida por la fricción de un flujo laminar a través de una tubería circular, como en el caso que nos ocupa, es de la forma:

$$F_f = \frac{32\mu X_2 Q}{d^2}$$

Donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $d$  es el diámetro de la tubería circular.

Por tanto reemplazando  $F_f$  en la ecuación (2.5), toma la forma descrita en la ecuación (2.6):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A_p}{\rho X_2} (P_b - P_2) - A_p g - \frac{32\mu X_2 Q}{d^2} \quad (2.6)$$

Aplicando la ley de la conservación de la materia para el tramo de tubería encima del vástago, cuyo diagrama de cuerpo libre se aprecia en la Figura 6(e), se obtiene la ecuación (2.7):

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{A_p}{\rho[L_O - H - X_2]} (P_1 - P_s) - A_p g - \frac{32\mu Q_1}{\rho d^2} \quad (2.7)$$

Donde  $Q_1$  es el flujo laminar del fluido en el tramo en estudio,  $H$  es la altura de la torre de extracción (ver Figura 5) y  $P_s$  la presión generada en la superficie del vástago de succión, la cual se supone conocida.

## 2.3. Marco teórico conceptual

### 2.3. 1. La ecuación de estado del sistema

Para determinar la ecuación de estado del sistema, debemos de seleccionar convenientemente las variables de estado del mismo. Una asignación adecuada se muestra en la Tabla 1, en esta tabla también se presenta las señales de entrada y salida del sistema. La señal de salida ha sido seleccionada teniendo en cuenta que se desea conocer la cantidad de petróleo que produce el sistema de succión, es decir  $y = Q$ .

**Tabla 1:** Variables de estado del sistema de bombeo.

Variable	Descripción
$u = T_{in}$	Entrada del sistema (torque de succión).
$x_1 = X_2$	Desplazamiento ascendente del vástago de succión.
$x_2 = v_2 = \frac{dX_2}{dt}$	Velocidad ascendente del vástago de succión.
$x_3 = \theta_1$	Desplazamiento angular de la viga.
$x_4 = \omega_1$	Velocidad angular de la viga.
$y = Q = A_p x_2$	Salida del sistema (petróleo en producción).

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Asumiendo que no existen fugas a través del vástago de succión durante la carrera ascendente, y teniendo presente que estamos tratando con un flujo incomprensible, se cumple la relación de la ecuación (2.8):

$$Q = A_p v_2 = Q_1 \quad (2.8)$$

Si ahora asumimos que tanto la roca como la camisa perforada actúan como una especie de resistencia tipo tapón poroso al flujo, entonces podemos escribir la relación de la ecuación (2.9):

$$R_f Q = P_f - P_b \quad P_f : \text{constante} \quad (2.9)$$

Donde  $R_f$  es la resistencia al paso del flujo  $Q$ .

Para el flujo radial de petróleo en la formación rocosa cuya representación gráfica se muestra en la Figura 7, teniendo en cuenta su geometría cilíndrica, entonces podemos formular la conocida ley de Darcy (Brown, 2002), expresada en la ecuación (2.10):

$$\frac{Q_r}{2\pi r h} = - \left( \frac{k}{\mu} \right) \frac{dP}{dr} \quad (2.10)$$

Donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $k$  es una medida de la conductividad del fluido del medio poroso llamada permeabilidad,  $r$  es la distancia radial,  $h$  es la altura (longitud) del cilindro,  $dP/dr$  es el gradiente de presión en la dirección del flujo y  $Q_r$  es un flujo radial, que por convención es positivo en el sentido de adentro hacia afuera.

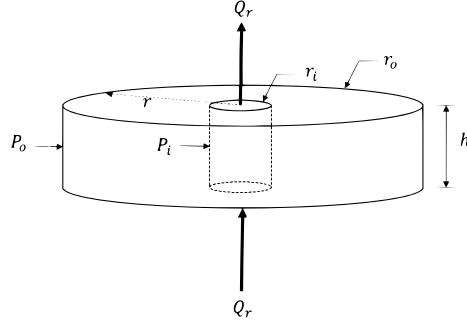
Integrando la ecuación (2.10) entre un radio interno  $r_i$  y un radio externo  $r_o$  resulta en la ecuación (2.11):

$$\frac{\mu \ln(r_o/r_i)}{2\pi k h} Q_r = P_i - P_o \quad (2.11)$$

Comparando las ecuaciones (2.9) y (2.11) nos permite concluir que:

$$R_f = \frac{\mu \ln(r_o/r_i)}{2\pi k h} \quad (2.12)$$





**Figura 7:** Ley de Darcy en estado estacionario para el flujo radial de petróleo.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Para nuestro caso en particular,  $r_i$  constituye el radio del pozo perforado de diámetro  $d = 2r_i$  y  $r_o$  es como suponemos igual al radio  $r_e$  (extensión radial) del depósito de petróleo, además también se cumple la relación  $Q = -Q_r$ , por consiguiente reemplazando términos logramos escribir la ecuación (2.13):

$$\frac{\mu \ln(2r_e/d)}{2\pi k h} Q_r = P_f - P_b \quad (2.13)$$

Entonces la expresión dada en la ecuación (2.13) es posible describirla como (2.14), si consideramos la igualdad establecida en la ecuación (2.9):

$$R_f = \frac{\mu \ln(2r_e/d)}{2\pi k h} \quad (2.14)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7) para  $P_1$  y  $P_2$  obtenemos:

$$P_1 = \frac{\left\{ \frac{A_p}{m_2} (P_f - R_f A_p v_2) + \left( \frac{A_p}{m_2} + \frac{1}{\rho X_2} \right) U P_s + \left( \frac{32\mu}{\rho d^2} - \frac{\beta}{m_2} \right) v_2 + \frac{A_c E}{m_2} \left[ \frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \right\}}{\left\{ \frac{A_p}{m_2} + \left( \frac{A_p}{m_2} + \frac{1}{\rho X_2} \right) U \right\}} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= P_f - R_f A_p v_2 + U(P_s - P_1) \\
U &= \frac{X_2}{L_O - H - X_2}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Podemos observar que las ecuaciones (2.15) y (2.16) son tremendamente no lineales, lo cual complica el diseño de sistemas de control de elevación de petróleo a desarrollar. Con el propósito de encontrar relaciones lineales para  $P_1$  y  $P_2$ , teniendo en cuenta que el pozo perforado es bien profundo, tomaremos las siguientes consideraciones:

$$L_O - X_2 \cong L_O \quad L_O - H - X_2 \cong L_O$$

Además, operaremos algebraicamente en las expresiones de  $P_1$  y  $P_2$  de las ecuaciones (2.15) y (2.16) para simplificarlas, a fin de obtener las expresiones lineales eliminaremos los productos de variables de segundo orden o más. De este modo obtenemos la ecuación (2.17):

$$P_2 - P_1 = \left( \frac{P_f - P_s}{L_O - H} \right) X_2 - R_f A_p v_2 + P_f - \frac{\rho A_p (L_O - H) P_f + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \tag{2.17}$$

De la Tabla 1 se tiene la relación  $x_1 = X_2$  y  $x_2 = v_2 = \frac{dX_2}{dt}$  que al ser reemplazada en la ecuación (2.17) se obtiene (2.18) en función de  $x_1$  y  $x_2$ , variables de estado definidas en la tabla 1.

$$P_2 - P_1 = \left( \frac{P_f - P_s}{L_O - H} \right) x_1 - R_f A_p x_2 + P_f - \frac{\rho A_p (L_O - H) P_f + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \tag{2.18}$$

Empleando la notación  $dx/dt \equiv \dot{x}$ , podemos escribir la relación entre variables de estado definida en la ecuación (2.19), la misma que corresponde a la primera ecuación de estado.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.19)$$

Reemplazando la ecuación (2.3) en (2.4) obtendremos la segunda ecuación de estado.

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_2} \left[ (P_2 - P_1)A_p + (A_c E) \left( \frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right) - \beta v_2 - m_2 g \right] \quad (2.20)$$

En (2.20) reemplazamos los términos  $\theta_1$  y  $X_2$  por los equivalentes según la Tabla 1 obteniéndose la ecuación (2.21).

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_2} \left[ (P_2 - P_1)A_p + (A_c E) \left( \frac{L_2 x_3 - x_1}{L_O - x_1} \right) - \beta x_2 - m_2 g \right] \quad (2.21)$$

Usando luego la ecuación (2.18) en (2.21) se obtiene finalmente la ecuación (2.22).

$$\dot{x}_2 = \left[ \frac{A_p(P_f - P_s)}{m_2(L_O - H)} - \frac{A_c E}{L_O m_2} \right] x_1 - \frac{A_p^2 R_f}{m_2} x_2 + \frac{A_c E L_2}{L_O m_2} x_3 + V \quad (2.22)$$

Donde  $V$  esta representado por:

$$V = \frac{A_p}{m_2} \left( P_f - \frac{\rho A_p P_f (L_O - H) + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \right) - \frac{\beta}{m_2} - g$$

Bajo la misma notación empleada en (2.19), describiremos la tercera ecuación

de estado como sigue:

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.23)$$

Mientras que la cuarta ecuación de estado se deduce reemplazando la ecuación (2.3) en (2.2).

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_1} \left\{ T_i - m_1 g L_1 - (L_2 A_c E) \left[ \frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \right\} \quad (2.24)$$

Con las consideraciones asumidas para encontrar la ecuación (2.17) simplificamos la ecuación (2.24) y obtenemos

$$\dot{x}_4 \cong \frac{1}{J_1} \left\{ T_i - m_1 g L_1 - (L_2 A_c E) \left[ \frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O} \right] \right\} \quad (2.25)$$

Luego ordenando los términos en función de las variables de estado obtenemos la ecuación de estado (2.26).

$$\dot{x}_4 = \frac{L_2 A_c E}{J_1 L_O} x_1 - \frac{L_2^2 A_c E}{J_1 L_O} x_3 + \frac{1}{J_1} u - \frac{m_1 g L_1}{J_1} \quad (2.26)$$

Las formas matriciales de las ecuaciones de entrada y de salida se expresa como sigue (Ogata, 1993):

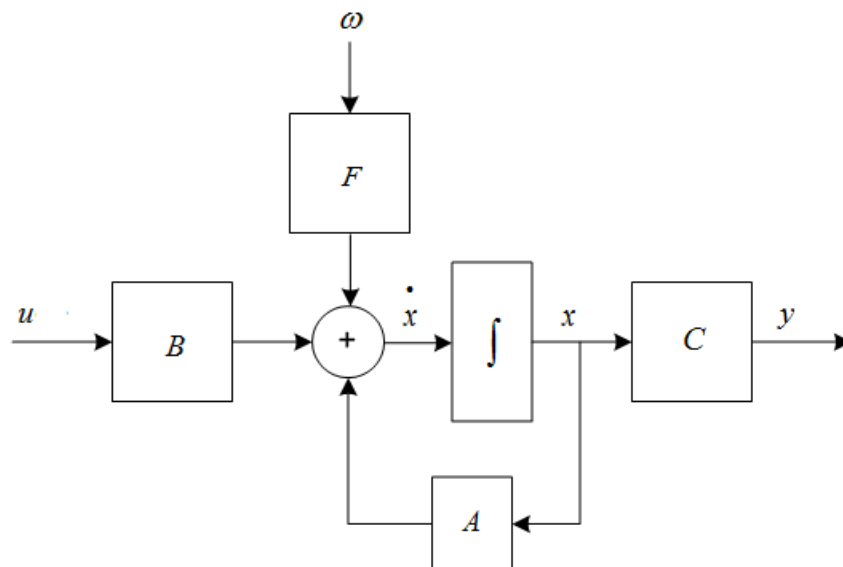
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{F}w \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{C}$  para el sistema de bombeo mecánico se encuentran dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left[ \frac{A_p(P_f - P_s)}{m_2(L_O - H)} - \frac{A_c E}{L_O m_2} \right] & -\frac{A_p^2 R_f}{m_2} & \frac{A_c E L_2}{L_O m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{L_2 A_c E}{J_1 L_O} & 0 & -\frac{L_2^2 A_c E}{J_1 L_O} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ -\frac{m_1 g L_1}{J_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8.64 A_p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El diagrama de bloques del modelo en variables estado es mostrado en la Figura 8.



**Figura 8:** Modelo en variables espacio estado.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Donde  $w$  es un disturbio del tipo escalón unitario.

### 2.3. 2. Parámetros valorados del sistema

Los parámetros valorados del sistema en estudio (ver Tabla 2) nos presentan la densidad  $\rho$  del petróleo varía de 0.92 a 0.87 gr/cm<sup>3</sup> a 15 C; hemos tomado el valor de 0.9, cuyo equivalente en kg/m<sup>3</sup> es  $0.9 \times 10^3$ . Las presiones se dan normalmente en kg-f/cm<sup>2</sup> o bar; por conveniencia las presiones las hemos convertido a N/cm<sup>2</sup>, que se logra multiplicando los kg-f/cm<sup>2</sup> por  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . El valor original de la viscosidad  $\mu$  del petróleo es 6 cp (centipoise), lo cual equivale a  $6 \times 10^{-3} \text{ N-s/m}^2$ . El valor original del módulo de elasticidad  $E$  para el cable de acero es  $20.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ; el valor que aparece en la tabla está en N/cm<sup>2</sup>. Los parámetros presentados en la Tabla 2 para el sistema torre de perforación de petróleo considera valores tomando en cuenta un sistema prototipo. Las unidades de la resistencia  $R_f$  que aparece en la tabla, ha sido determinada de modo tal que, el producto  $R_f A_p x_2$ , resulte en N/cm<sup>2</sup>, que son las unidades de presión que estamos empleando en las ecuaciones (López, 1998).

El momento de inercia  $J_1$  de la viga dinámica se ha calculado aproximadamente con la fórmula, (Inzunza, 2007).

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2) \quad \text{kg-m}^2$$

Assumiendo que  $a = 3 \text{ m}$  es su longitud y  $b = 0.2 \text{ m}$  es su ancho (ver Figura 9). La expresión  $Q = A_p x_2$  define el caudal de petróleo extraído, donde  $A_p$  se expresa en cm<sup>2</sup> y  $x_2$  en m/s. Para obtener caudales en m<sup>3</sup>/día, el proceso de conversión dicta que debemos multiplicar al producto  $A_p x_2$  por el factor 8.64.

**Tabla 2:** Parámetros valorados del sistema de succión de petróleo.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
$\beta$	Amortiguamiento viscoso	100	N-s/m
$\rho$	Densidad del petróleo	$0.9 \times 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$d$	Diámetro del pozo	0.128	m
$\mu$	Viscosidad del petróleo	0.006	N-s/m <sup>2</sup>
$m_2$	Masa del vástago	80	kg
$m_1$	Masa de la viga	200	kg
$L_2$	Longitud pivote-cabezal de la viga	1.5	m
$L_1$	Longitud pivote-C.G. de la viga	1	m
$L_O$	Longitud pivote-fondo del tubo	900	m
$H$	Altura de la torre	5	m
$A_p$	Sección del pozo	128.7	cm <sup>2</sup>
$A_c$	Sección del cable	0.785	m <sup>2</sup>
$E$	Módulo de elasticidad del cable	$20.6 \times 10^6$	N/cm <sup>2</sup>
$J_1$	Momento de inercia de la viga	150.6	kg-m <sup>2</sup>
$P_f$	Presión en formación rocosa	176.6	N/cm <sup>2</sup>
$P_s$	Presión sobre el vástago	100	N/cm <sup>2</sup>
$R_f$	Resistencia al paso del flujo	245	Ns/(cm <sup>4</sup> m)
$Q_{ref}$	Flujo por producir	100	m <sup>3</sup> /dia
$g$	Aceleración de la gravedad	9.81	m/s <sup>2</sup>

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

### 2.3. 3. Controlabilidad

Consideremos al sistema en tiempo continuo cuya dinámica es descrita por:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (2.27)$$

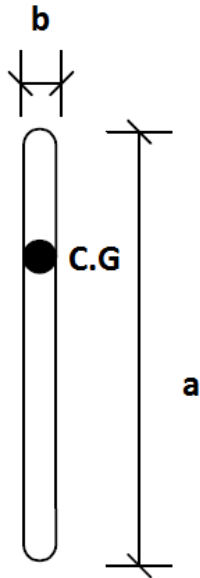
En donde:

$\mathbf{x}$  = vector de estado (vector de orden  $n$ ).

$\mathbf{u}$  = vector de control ( de orden  $r$ ).

$\mathbf{A}$  = matriz de estado de orden  $n \times n$ .

$\mathbf{B}$  = matriz de entrada de orden  $n \times r$ .



**Figura 9:** Momento de inercia de la viga.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Se dice que el sistema descrito por la ecuación (2.27) es de estado controlable en  $t = t_0$  si es posible construir  $r$  señales de control sin restricción alguna que transfieran un estado inicial a cualquier otro estado finito en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

Ahora obtendremos la condición para una controlabilidad completa del estado, sin perder la generalidad, suponemos que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, o  $t_0 = 0$ .

La solución de la ecuación (2.27) es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

Aplicando la controlabilidad completa, tenemos.



$$\mathbf{x}(t_1) = 0 = e^{\mathbf{A}t_1} + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

O bien.

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

Refiriéndonos al teorema de Cayley-Hamilton, podemos escribir  $e^{-\mathbf{A}t}$  como en (2.31).

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{A}^k \quad (2.31)$$

Sustituimos  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  de (2.31) en (2.30).

$$\mathbf{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

Definamos  $\mathbf{U}_k$  con sigue:

$$\mathbf{U}_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Donde cada  $U_k$  es un vector columna de orden  $r$ . Así, la ecuación (2.32) se convierte en (2.33):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{U}_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces desde cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ , la ecuación (2.33) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz de  $n$  filas y  $nr$  columnas.

$$\left[ \mathbf{B}: \mathbf{AB}: \dots: \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]$$

Sea de rango  $n$ , o que contenga  $n$  vectores columna linealmente independientes. La matriz  $\mathbf{M}$  recibe el nombre de *matriz de controlabilidad*.

$$\mathbf{M} = \left[ \mathbf{B}: \mathbf{AB}: \dots: \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]$$

Probaremos el concepto expuesto en esta sección usando el programa MATLAB del Anexo (B) en 2.3. 5.

### 2.3. 4. Observabilidad

Analizaremos ahora la observabilidad del sistema de bombeo.

Consideremos un sistema lineal sin excitación descrito por las ecuaciones siguientes (2.34):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} \\ y &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \tag{2.34}$$

En donde:

$\mathbf{x}$  = vector de estado (vector de orden  $n$ ).

$\mathbf{y}$  = vector de salida ( de orden  $m$ ).

$\mathbf{A}$  = matriz del sistema de orden  $n \times n$ .

$\mathbf{C}$  = matriz de salida de orden  $n \times r$ .

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado  $x(t)$  se determina a partir de la medición de  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por tanto el sistema es completamente observable si todas las transiciones de estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida.

El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir señales o variables de estado no medibles a partir de variables que si son medibles en un tiempo lo menor posible. En estas notas trataremos con sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI); por lo que sin perder generalidad supondremos que  $t_0$  es 0.

El concepto de observabilidad es muy importante porque, en el terreno práctico, la dificultad que se encuentra con el control mediante retroalimentación del estado es que algunas variables de estado no son asequibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para formar las señales de control. Más adelante se demostrará que tales estimaciones de las variables de estado son posibles si y solo si el sistema es completamente observable.

Al estudiar las condiciones de observabilidad consideramos el sistema sin excitación como el que se obtiene mediante la ecuación (2.34). La razón de esto es la siguiente:

Si el sistema se describe mediante (2.35):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.35}$$

entonces  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  es.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Considerando que las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  se conocen al igual que  $u(t)$ , los dos últimos términos del segundo miembro de la ecuación anterior son cantidades conocidas. Por tanto es posible restar del valor observado  $y(t)$ . Así, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito por la ecuación (2.34). (Ogata, 1993)

La Observabilidad Completa de sistemas en tiempo continuo, analizamos la ecuación (2.34), el vector de salida viene representado por:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Refiriéndonos a la ecuación (2.31) tenemos que:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$$

o bien

$$y(t) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{CA}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0) \quad (2.36)$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $\mathbf{x}(0)$  se determina únicamente a partir de la ecuación (2.36). Se demuestra que esto requiere que el rango de la matriz de  $nm$  filas y  $n$  columnas. La matriz  $N$  recibe el nombre de *matriz de observabilidad*.

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Probaremos el concepto expuesto en esta sección usando el programa MATLAB del Anexo (B) en [2.3. 5].

### 2.3. 5. Prueba de controlabilidad y observabilidad

Probaremos la controlabilidad y la observabilidad del sistema de bombeo de petróleo usando el software de simulación de MATLAB y el programa del Anexo B(a), cuyo resultado se presenta en a continuación:

Controlabilidad:  $\text{Ran}[\mathbf{C}] = 4$

Observabilidad:  $\text{Ran}[\mathbf{O}] = 2$

El resultado nos demuestra que el sistema es completamente controlable y es solamente observable en dos de sus estados, lo que implica que al sistema es posible aplicarle técnicas de control moderno.

## 2.4. Definición de términos básicos

**Pozo petrolero:** Refiere a cualquier perforación del suelo diseñada con el objetivo de hallar y extraer fluido combustible, ya sea petróleo o hidrocarburos gaseosos.

**Torre de perforación:** Son utilizadas para realizar perforaciones de entre 800 y 6000 metros de profundidad en el subsuelo, tanto de pozos de gas, agua o petróleo, así como sondeos de exploración para analizar la geología y buscar nuevos yacimientos.

**Modelo matemático:** Es la descripción de un sistema usando conceptos matemáticos y verbales.

**Petróleo crudo:** Es un combustible fósil compuesto principalmente por hidrocarburos, que también es posible que contenga pequeñas cantidades de azufre, nitrógeno y oxígeno.

**API:** Siglas en inglés del Instituto Americano del Petróleo. Una institución compuesta por las empresas petroleras privadas estadounidenses.

**Barriles por día (BDP):** En términos de producción, es el número de barriles de aceite que produce un pozo petrolero en un período de 24 horas, normalmente se toma una cifra promedio de un período de tiempo largo.

**Campo maduro:** Es aquel que ha alcanzado el pico de su producción y comienza su etapa de declinación.

**Torque:** Fuerza de rotación que se aplica a un eje u otro mecanismo rotatorio para hacer que gire o tienda a hacerlo.

**Lazo abierto:** Cuando la salida para ser controlada, no se compara con el valor de la señal de entrada o señal de referencia.

**Lazo cerrado:** Son los sistemas en los que la acción de control está en función de la señal de salida.

**Sobreimpulso:** En inglés *overshoot*, cantidad máxima en la cual esta respuesta transitoria excede de la respuesta del estado uniforme.

**Sistema no lineal:** Son todos aquellos sistemas donde no se cumple el principio de superposición, es decir no es posible expresar como la suma de sus componentes.

**Algoritmos:** Conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas.

**MATLAB:** (abreviatura de MATrix LABoratory, «laboratorio de matrices») es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M).

**Ecuación de Darcy-Weisbach:** es una ecuación empírica que relaciona la pérdida de carga hidráulica (o pérdida de presión) debido a la fricción a lo largo de una tubería dada con la velocidad media del flujo del fluido.

**Flujo laminar:** movimiento de un fluido cuando este es ordenado, estratificado, suave.

**Ley de Darcy:** describe de forma empírica las características del movimiento del agua a través de un medio poroso.

**Teorema Cayley-Hamilton:** asegura que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo cualquiera anula su propio polinomio característico.

**Modelo CARIMA:** del inglés *Controlled Autoregressive Integrated Moving Average*, es un modelo lineal básico y bastante extendido en su aplicación en los sistemas de control avanzados.

**DSP:** Procesador de Señales Digitales del inglés *digital signal processor*, es un sistema basado en un procesador o microprocesador que posee un conjunto de instrucciones en tiempo real.

**LTI:** Del inglés *Linear Time-Invariant* es aquel sistema que, como su propio nombre indica, cumple las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo y satisface el principio de superposición, que engloba las propiedades de proporcionalidad o escalado y aditividad.

**MPC:** Del inglés *Model Predictive Control* es un método avanzado de control de procesos que dependen de modelos dinámicos del proceso en cuestión, más a menudo modelos lineales empíricos obtenidos por identificación de sistemas.



# CAPÍTULO 3

## HIPÓTESIS Y VARIABLES

### 3.1. Hipótesis

Considerando que es posible controlar el el torque de ingreso al sistema de bombeo mecánico para lograr variar el flujo de bombeo del sistema según se requiera, se plantean las siguientes hipótesis.

#### 3.1. 1. Hipótesis general

Es posible el diseño de controladores digitales avanzados (óptimo y predictivo) que sean capaces de estabilizar el fujo de bombeo cumpliendo los criterios de diseño establecidos en [1.1] en base al control del torque de entrada al sistema de bombeo mecánico.

#### 3.1. 2. Hipótesis específica

Por los considerandos anteriores, las hipótesis específicas de este estudio son:

1. Es posible definir un modelo matemático dinámico que describa el sistema de bombeo mecánico.

2. Es posible el diseño de técnicas de control avanzado para el modelo del sistema de bombeo mecánico.
3. Existe una técnica de control diseñada que sobresalga respecto a otras en mejorar el desempeño del sistema, que sea más robusta y que sea factible su implementación en la realidad.

## **3.2. Variables de la investigación**

Se describe el modelo matemático del sistema de bombeo mecánico y las técnicas de control de este estudio nos permite obtener las variables dependientes e independientes del sistema de control a implementar. Mediante las curvas de simulación se logra observar la influencia de las señales de salida en función de la variación de los estímulos de entrada.

### **3.2. 1. Variable dependiente**

Es el flujo que desarrolla el sistema de bombeo.

### **3.2. 2. Variable independiente**

El torque de succión generado por la movimentación de la viga (ver Figura 6(a)).

## **3.3. Operacionalización de variables**

De acuerdo al desarrollo del presente trabajo se indentificó las variables que se emplean para el control del bombeo por accionamiento mecánico son:

**Tabla 3:** Operacionalización de Variables.

<b>Variab</b> les	<b>Dimensión</b>	<b>Indicadores</b>	<b>Instrumento</b>	<b>Escala de Medición</b>
<i><b>Independiente:</b></i> Torque de succión.	N-m	Torque medido en el motor que mueve la viga.	MATLAB.	Cuantitativo
<i><b>Dependiente:</b></i> Flujo de petróleo.	m <sup>3</sup> /día	Cantidad de petróleo producido en un día.	MATLAB.	Cuantitativo

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

# CAPÍTULO 4

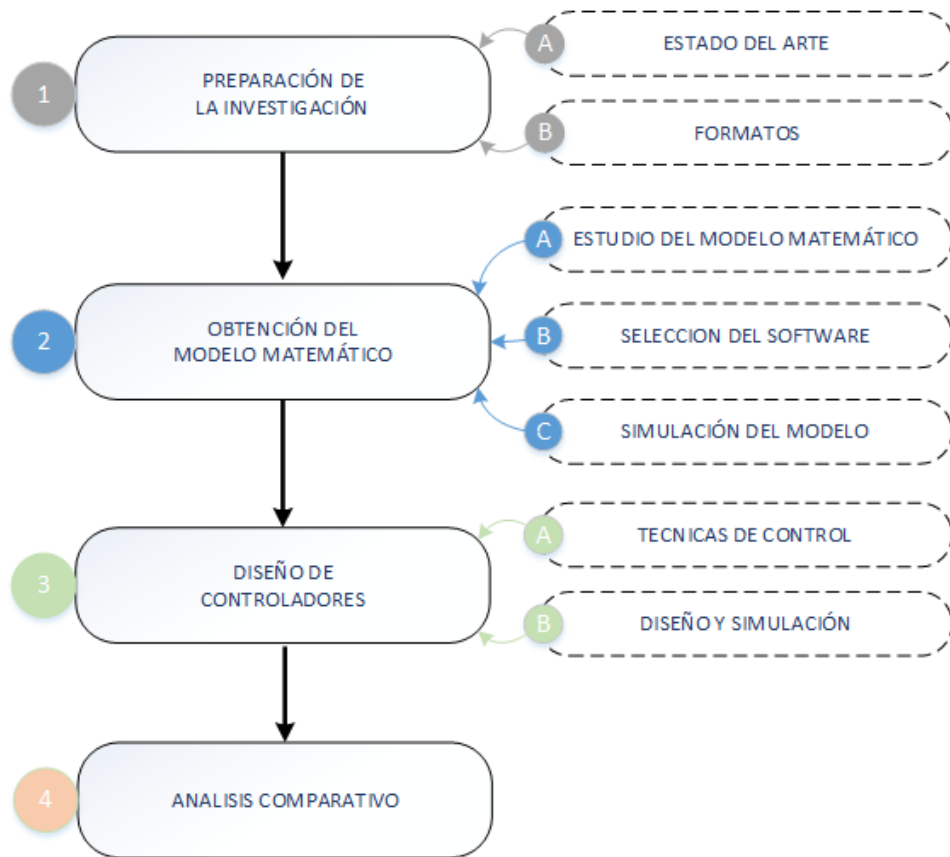
## DISEÑO METODOLÓGICO

### 4.1. Tipo de investigación

La investigación es hipotética porque parte de una hipótesis para demostrar la solución de un problema de investigación planteado.

Las investigación realizada es de tipo transversal ya que se realiza en un solo momento temporal y no hay continuidad en el tiempo ya que se inicia la investigación en setiembre del 2018 y se termina en diciembre del 2020.

Para el diseño del presente trabajo, se cuenta con todos los implementos necesarios tanto de software como de bibliografía, por tanto se espera que las simulaciones en el software MATLAB nos brinden resultados consistentes que permitan llegar a las conclusiones previstas en la hipótesis. La estructura del correlato de acciones que fueron necesarias para la solución del problema se muestra en la Figura 10.



**Figura 10:** Estructura de acciones necesarias para la solución del problema.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

## 4.2. Diseño de la investigación

### 4.2. 1. Obtención del modelo matemático

#### 4.2. 1.1. Estudio del modelo matemático

En el desarrollo del presente estudio se plantea el modelo dinámico desde la formulación matemática por el análisis del diagrama de cuerpo libre y las leyes de Newton que intervienen en el sistema [2.2. 2], se evalúan parámetros del modelo [2.3. 2] respecto a controlabilidad [2.3. 3] y observabilidad [2.3. 4]. Así mismo se realizaron las consideraciones teóricas correspondientes y se procedió con el planteamiento de las ecuaciones que resúmen la dinámica del bombeo mecánico

en ecuaciones de estado de tiempo continuo [2.3. 1].

En el dominio discreto, para sistemas lineales las ecuaciones de estado y la ecuación de salida toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{E}w \\y(k) &= \mathbf{C}x(k)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde  $k$  es el tiempo discreto definido como  $k = t/T$  donde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , siendo  $T$  el periodo de muestreo.

Con fines prácticos no desarrollaremos el procedimiento matemático de discretización y obtención de las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{C}$  de las ecuaciones en el espacio de estado discreto, para ello usaremos el software MATLAB y sus herramientas de control (MathWorks, 2016) que nos permite pasar fácilmente de una representación a la otra usando el programa del Anexo B(b), a continuación se detallan las matrices calculadas con el software MATLAB para un periodo de muestreo  $T = 0.01\text{s}$ .

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0 & 0.0001 & 0.0 \\ -0.0064 & 0.0 & 0.0069 & 0.0001 \\ 0.0080 & 0.0 & 0.9879 & 0.01 \\ 1.6041 & 0.0 & -2.4062 & 0.9879 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0033 \\ 0.6613 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1112.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En adelante usaremos las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{C}$  para en análisis y desarrollo de controladores digitales del presente trabajo de investigación.

De la simulación detallada en [4.2. 1.3] cuyo resultado podemos observar en la Figura 12, se desprende que el sistema de bombeo de petróleo es muy oscilatorio (inestable), en razón de que posee un *eigenvalue* (valor propio) en el origen y dos ( $\pm 16i$ ) en el eje imaginario. Según la teoría de sistemas de control, un sistema continuo es estable cuando todos sus eigenvalores posean parte real negativa (Moreno, 2001); además, la estabilidad asintótica de un estado de equilibrio de un sistema en tiempo discreto obtenido al discretizar un sistema en tiempo continuo, equivale a la del sistema en tiempo continuo original (Ogata, 1996).

$$eig[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -62114.0 \\ 16i \\ -16i \\ 0 \end{bmatrix}$$

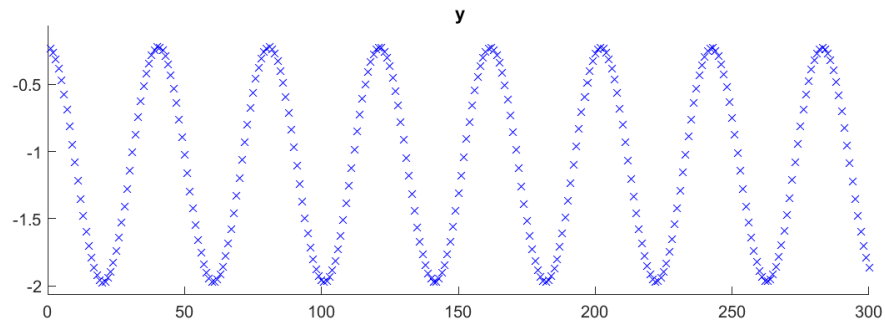
#### 4.2. 1.2. Selección del software

De acuerdo a las ecuaciones que se obtiene, se observa que se necesita simular el modelo mediante un software científico, se seleccionó MATLAB por ser un software robusto que posee muchas librerías para la simulación de modelos matemáticos de sistemas lineales y no lineales. Además MATLAB cuenta con SIMULINK que permite la realización de modelos mediante diagramas de bloques.

#### 4.2. 1.3. Simulación del modelo matemático

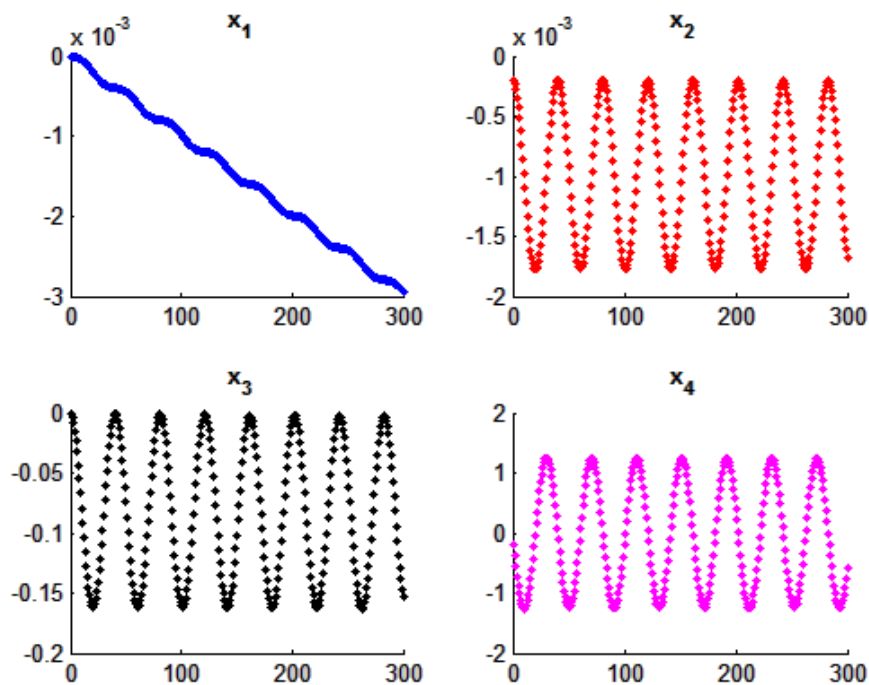
Se procedió con la simulación del modelo del sistema de bombeo mecánico y se observó que la dinámica del sistema se comporta de acuerdo a lo planteado en

la formulación del modelo matemático, en la Figura 12 se muestra la gráfica de la respuesta durante la simulación recursiva para un escalón unitario, se observa el comportamiento oscilatorio de todas las variables de estado del sistema definidas en la Tabla 1.



**Figura 11:** Respuesta del sistema de bombeo a una entrada escalón.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.



**Figura 12:** Respuesta de los estados a un escalón del sistema de bombeo.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.



## 4.2. 2. Diseño y simulación de controladores

De la teoría de control se desprenden una cantidad considerable de técnicas que es posible considerar aplicar al presente estudio; sin embargo, se seleccionan dos de ellas por su *robustés y desempeño* en sistemas con alta oscilación y que serán evaluadas de forma independiente. Las técnicas que se eligieron son control óptimo y control predictivo.

Se realizan simulaciones de las técnicas empleadas en este proyecto, se consideran dos etapas de simulación: la primera presenta las simulaciones considerando la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario para cada técnica de control expuesta. La segunda parte presenta simulaciones considerando la señal de control del sistema según las técnicas de control expuestas en el proyecto.

## 4.2. 3. Control óptimo

Sabemos que el control óptimo se ocupa de determinar el mejor sistema de control, empleando una técnica óptima de diseño. El procedimiento de diseño del sistema de control óptimo consiste en encontrar un extremo (un mínimo o un máximo, cual sea el caso) de una función de costo, con el propósito de determinar los parámetros óptimos de una ley de control; de allí la denominación óptimo.

Para sistemas de control discretos, la función de costo generalmente posee la forma siguiente:

$$J = \sum_{k=0}^N L(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (4.2)$$

Donde  $k$  es el tiempo discreto,  $N$  es el tiempo discreto final,  $\mathbf{x}(k)$  es el vector

de estado,  $\mathbf{r}(k)$  es el vector de referencia (entrada al sistema de control) y  $\mathbf{u}(k)$  es el vector de control óptimo. Esta ley de control (denominada también fuerza o señal de control) constituye la entrada al proceso a controlar.

#### 4.2. 3.1. Diseño del controlador óptimo discreto

En esta sección se desarrolla el procedimiento para diseñar el sistema de control óptimo, usando una ley de control óptima cuadrática discreta, que emplea las señales del proceso medidas directamente. La configuración usada para el diseño del sistema de control de bombeo de petróleo es la del regulador óptimo proporcional–integral esta configuración añade un integrador al controlador, con el propósito de reducir el error en estado estable. El resultado del diseño proporciona una matriz de ganancia, que multiplicada por el vector de estado (real o estimado) del proceso, resulta en una ley de control óptima cuadrática, (Ogata, 1993).

El problema del control óptimo cuadrático discreto, consiste en encontrar una adecuada ley de control óptima que sea capaz de trasladar la dinámica del proceso desde un estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ , hacia un estado final deseado  $\mathbf{x}(N)$ . Sin embargo, cuando la dinámica del sistema de control evoluciona hasta un tiempo  $N$  infinito, la solución de control óptimo cuadrático pasa a ser una solución de estado estacionario.

La fuerza de control óptima  $\mathbf{u}(k)$  se determina a partir de la minimización de una función de costo cuadrática discreta. Esta fuerza de control aplicada al proceso a controlar, provoca que dicho proceso responda en forma óptima (o lo más cercano al óptimo). El control óptimo cuadrático discreto estacionario, se basa en la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k)Q\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)R\mathbf{u}(k)] \quad (4.3)$$

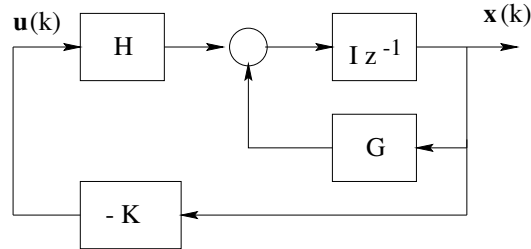
Donde  $\mathbf{x}(k)$  es el vector de estado de dimensión  $n$  y  $\mathbf{u}(k)$  es el vector de control de dimensión  $r$ . La matriz simétrica semidefinida positiva  $Q$  (de dimensión  $n \times n$ ) pondera la importancia del vector de estado  $\mathbf{x}(k)$ , y la matriz simétrica definida positiva  $R$  (de dimensión  $r \times r$ ) pondera la importancia de la señal de control  $\mathbf{u}(k)$ . Una matriz es definida positiva cuando todos sus *eigenvalores* (valores propios) son positivos, mientras que una matriz es semidefinida positiva cuando sus *eigenvalores* son positivos o nulos.

La ley del control óptima a usar emplea la realimentación del vector de estado  $\mathbf{x}(k)$  en su formulación y posee la forma siguiente:

$$\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k) \quad (4.4)$$

Donde  $K$  (de dimensión  $r \times n$ ) es la matriz de ganancia del controlador, denominada también matriz de realimentación de estados. Una condición necesaria para poder aplicar el control por realimentación de estados es que el proceso sea completamente controlable. Por consiguiente, será necesario verificar dicha condición en el proceso antes de iniciar el procedimiento de diseño, esto previamente fue detallado en [2.3. 5].

La realimentación de estados requiere además, que todos los estados sean disponibles y medibles. Si en el sistema a controlar existieran estados que no pudieran ser medidos directamente, será necesario estimarlos. Esta estimación se realiza empleando la técnica de observación de estados, el requerimiento en esta parte es que el proceso sea completamente observable lo que en [2.3. 5] vimos que es observable en dos de sus estados.



**Figura 13:** Diagrama de bloques para el sistema de control óptimo.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Sabemos por la ecuación (4.1) que el proceso permite ser modelado mediante la siguiente ecuación de estado discreta:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k)$$

Donde  $G$  es la matriz de estado de dimensión  $n \times n$  y  $H$  es la matriz de control de dimensión  $n \times r$ . El proceso debe ser de estado completamente controlable; es decir, que en un tiempo finito, sus estados son transferidos desde un estado inicial arbitrario a cualquier otro estado deseado. La condición necesaria y suficiente para que el proceso sea completamente controlable es que la siguiente matriz de controlabilidad  $M$  :

$$M = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Posea rango completo, es decir, el rango de  $M$  debe ser igual al orden  $n$  del sistema. Del mismo modo, un proceso es completamente observable, cuando sus estados se logran reconstruir completamente usando las observaciones (mediciones del proceso), lo que matemáticamente implica que la siguiente matriz  $N$  de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} C & CG & \dots & CG^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La matriz de observabilidad,  $N$ , también debe poseer un rango completo.

La solución al problema del control óptimo cuadrático estacionario está dada por la siguiente matriz de ganancia del controlador:

$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (4.7)$$

Donde  $P$  es una matriz simétrica definida positiva de dimensión  $n \times n$ . Dicha matriz es solución de la siguiente ecuación matricial de Riccati:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (4.8)$$

Una forma de obtener la matriz  $P$  de la ecuación matricial anterior es mediante la siguiente fórmula recursiva:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G \quad (4.9)$$

El diagrama de bloques del control óptimo de estado estacionario se representa en la Figura 13, en donde se asume que todos los estados se encuentran disponibles. Para operación satisfactoria del sistema de lazo cerrado mostrada en dicha figura, todos los eigenvalores de su ecuación característica deben posicionarse dentro del círculo unitario.

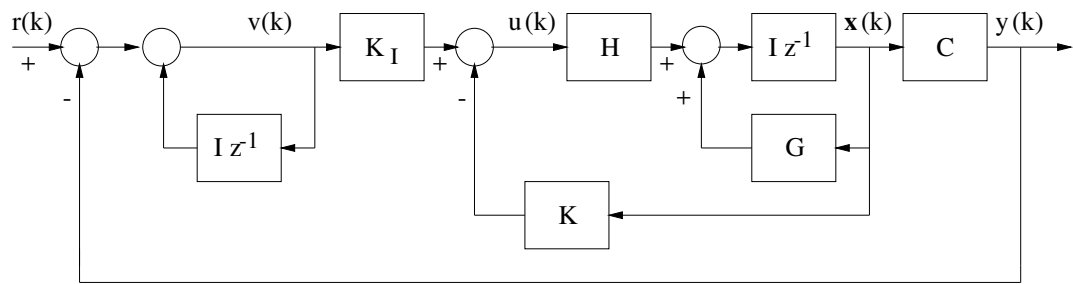
$$\det[zI - G + HK] = 0 \quad (4.10)$$

Observar que en el diagrama de bloques de la Figura 13, no aparece

explícitamente la señal de referencia. Es por ello que, en aplicaciones prácticas, se prefiere usar la configuración del regulador óptimo Proporcional-Integral (o sistema de control óptimo Proporcional-Integral) que describiremos en la siguiente sección de este trabajo [4.2. 3.2].

#### 4.2. 3.2. Diseño del controlador óptimo Proporcional-Integral

La configuración del regulador óptimo Proporcional-Integral (ver Figura 14) que incluye acción integral en el sistema de control mediante un integrador con señal de salida  $v(k)$  y una ganancia integral  $K_I$  asociada, (Ogata, 1993), (Moreno, 2001).



**Figura 14:** El regulador proporcional integral.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

Siendo la señal de referencia  $r(k)$  un escalón unitario, de la Figura 14 podemos deducir que las ecuaciones de estado y de salida del proceso son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + Hu(k) \\ y(k) &= C\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La señal de control  $u(k)$  tiene la forma:

$$u(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \quad (4.12)$$

Donde la matriz de ganancia del controlador viene dada por:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Podemos observar que la ecuación para el integrador resulta:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (4.14)$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[G\mathbf{x}(k) + Hu(k)] \\ &= (1 - CHK_I)v(k) + (-CG + CHK)\mathbf{x}(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Empleando las ecuaciones (4.11) y (4.12) deducimos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H[-K\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\ &= (G - HK)\mathbf{x}(k) + H K_I v(k) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Y de las ecuaciones (4.15) y (4.16) determinamos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (4.17)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

En el estado de equilibrio, es decir, cuando  $k \rightarrow \infty$ , las variables  $\mathbf{x}(k)$ ,  $u(k)$  y  $v(k)$  toman valores estacionarios  $\mathbf{x}(\infty)$ ,  $u(\infty)$  y  $v(\infty)$ . Así la ecuación (4.17) toma la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Definimos:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(k) \quad (4.20)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (4.21)$$

Y restando ahora la ecuación (4.19) de (4.17), y luego usando las relaciones (4.20) y (4.21) podemos obtener:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + CHK & 1 - CHK_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Notar que la ecuación (4.22) es posible escribirla como:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}w(k) \\ w(k) &= -\tilde{K}\xi(k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Donde:



$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad \tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad \tilde{K}(k) = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Observar que la inclusión de un integrador en el sistema de control, aumenta en uno el orden del sistema; es decir, si  $n$  es el orden del sistema original, el nuevo orden del sistema con un integrador es  $(n + 1)$ . En otras palabras, el vector de estado  $x(k)$  del sistema original posee dimensión  $n$ , mientras que el vector de estado  $\xi(k)$  del regulador proporcional integral posee dimensión  $(n + 1)$ .

Las relaciones anteriores requieren que se formule la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \xi(k)^T \tilde{Q} \xi(k) + w^2(k) \tilde{R} \right] \quad (4.26)$$

Debemos entonces, calcular una matriz  $\tilde{K}$  adecuada de forma tal que minimice la función de costo dada en la ecuación (4.26). La ecuación de Riccati y la ecuación de ganancia del controlador  $\tilde{K}$  se formulan como sigue sigue:

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (4.27)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (4.28)$$

El algoritmo de control óptimo presentado en el Anexo B(c) resuelve el problema del control óptimo Proporcional Integral del sistema de bombeo de petróleo por accionamiento mecánico. Este programa emplea las ecuaciones deducidas líneas arriba para el caso específico de la dinámica correspondiente al

sistema de succión. A continuación se presentan las matrices calculadas mediante el uso del software MATLAB, aunque las matrices  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{C}$  se calcularon en [4.2. 1.1], se detallan a continuación para tener las matrices del modelo mostrado en la Figura 14.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0 & 0.0001 & 0.0 \\ -0.0064 & 0.0 & 0.0069 & 0.0001 \\ 0.0080 & 0.0 & 0.9879 & 0.01 \\ 1.6041 & 0.0 & -2.4062 & 0.9879 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0033 \\ 0.6613 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1112.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además las matrices de ganancia  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}_I$  del controlador óptimo son:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -255.3517 & -0.0041 & 391.8059 & 558.2551 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 76.2536 \end{bmatrix}$$

#### 4.2. 4. Control predictivo

En esta sección se continua con el desarrollo de diseñar el control de un sistema de bombeo por accionamiento mecánico que ya hemos venido desarrollando a lo largo de este estudio, empleando la técnica de control predictivo basado en modelos. El algoritmo de control predictivo empleado, es el denominado control matricial dinámico, cuya versión más simple es una ley de control escalar.

El Control Predictivo Basado en Modelos es una técnica de control que usa el modelo del sistema para calcular y optimizar las predicciones de las acciones de control y de la salida controlada. Los diferentes tipos de control predictivo basados en modelos, difieren principalmente en el modelo usado para representar

el proceso con sus perturbaciones y en las funciones de costo a ser minimizadas (con o sin restricciones), (Keyser, 1998).

Debemos indicar que el control predictivo ya cuenta con muchas contribuciones, tanto en lo académico como también en el mundo industrial. Muchas aplicaciones del control predictivo son usadas hoy en todos los campos de la actividad industrial. El buen rendimiento de tales aplicaciones es muy apreciada; por ello, actualmente existe un creciente interés en esta metodología, a pesar que el trabajo pionero se inició hace dos décadas y media.

El control predictivo pronostica la salida de la planta en un horizonte de tiempo de duración  $N_2$ . Dicha predicción depende de las salidas y entradas pasadas, pero también del escenario del control futuro. La deducción de un modelo dinámico que capture lo más fielmente posible la dinámica del sistema, es de vital importancia para tener éxito en las aplicaciones, (Camacho et al., 2004).

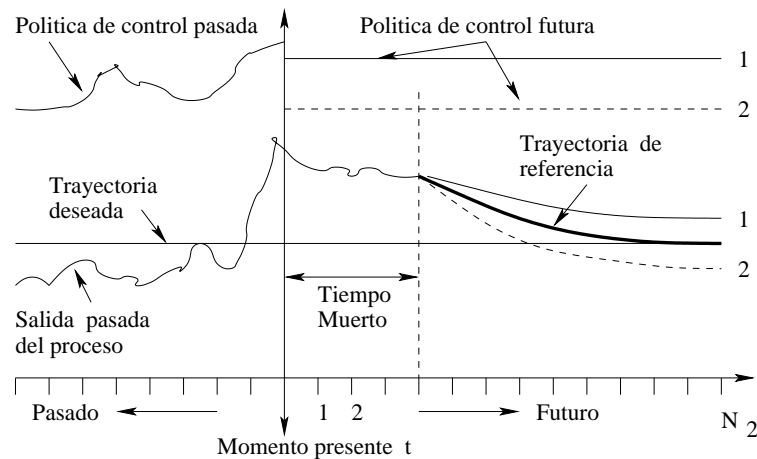
La notación usada en el control predictivo es como sigue:  $t$  es el tiempo discreto ( $t = 0, 1, 2, \dots$ );  $u(t)$  es la entrada al proceso y constituye la señal de control;  $y(t)$  es la salida del proceso y constituye la variable controlada;  $w(t)$  es la trayectoria deseada (o “set point”);  $r(t)$  denota la trayectoria referencial;  $u(t+k/t)$  son los valores futuros de la entrada en el tiempo  $t+k$  postulados en el tiempo  $t$ ;  $y(t+k/t)$ , son los valores futuros de la salida basado en las mediciones disponibles en el tiempo  $t$ :

$$\{y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots\}$$

Y en los valores futuros de la entrada postulados en el tiempo  $t$ :

$$\{u(t/t), u(t + 1/t), \dots\}$$

La estrategia del control predictivo es posible caracterizarla en base a la Figura 15, como sigue:



**Figura 15:** Estrategia del control predictivo.

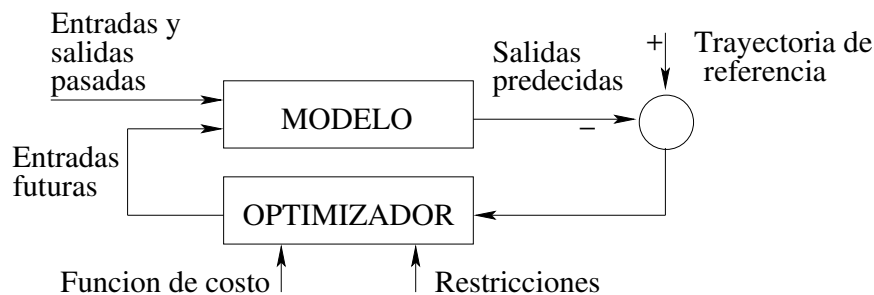
**Fuente:** Del libro (Moreno, 2001), página 285

1. En cada tiempo  $t$ , la salida del proceso  $y(t + k)$  se pronostica sobre un horizonte  $k = 1 \dots N_2$ . Los valores pronosticados se denominan  $y(t + k/t)$  y  $N_2$  es el horizonte de predicción. La predicción se realiza usando el modelo del sistema. Dicho pronóstico depende de las entradas y salidas pasadas, pero también del escenario del control futuro  $\mathbf{u}(t + k/t)$ ,  $k = 0, \dots, N_2 - 1$ ; es decir, de las acciones de control que a aplicar a partir del tiempo  $t$ .
2. Una trayectoria de referencia  $r(t + k/t)$ ,  $k = 1, \dots, N_2$ , que se inicia en  $r(t/t) = y(t)$  y se define sobre el horizonte de predicción. Esta trayectoria sirve para guiar la salida del proceso desde su valor actual  $y(t)$  hasta la trayectoria deseada  $w(t)$ .
3. El vector de control  $\mathbf{u}(t + k/t)$ ,  $k = 0, \dots, N_2 - 1$ , el cual se calcula para

minimizar una función de costo específica que depende del error del control predictivo  $r(t + k/t) - y(t + k/t)$ ,  $k = 1, \dots, N_2$ .

4. Al proceso actual sólo se le aplica el primer elemento del vector de control calculado  $\mathbf{u}(t + k/t)$ ,  $k = 0, \dots, N_2 - 1$ , mientras que los demás elementos se dejan de lado. En el próximo instante de muestreo, todas las secuencias temporales se desplazan para dar cabida a las nuevas mediciones de la salida  $y(t + 1)$  y a las del vector de control  $\mathbf{u}(t + k + 1/t + 1)$ , cuyo primer elemento es generalmente diferente al primer elemento del vector  $\mathbf{u}(t + k/t)$ , previamente calculado. Este principio se denomina estrategia del “horizonte retroactivo”.

Concluyendo, la estrategia del control predictivo comprende: el proceso de predicción a través del modelo del proceso, la especificación de una trayectoria de referencia, la estructuración de la futura ley de control, la definición de la función de costo (y sus restricciones) y el cálculo del escenario de control óptimo tal como se muestra en la Figura 16.



**Figura 16:** Estrategia del control predictivo basado en modelos

**Fuente:** Del libro Moreno (2001), página 286

#### 4.2. 4.1. El modelo CARIMA del sistema de bombeo

Un sistema de una entrada y una salida, probablemente no lineal, logra modelarse como:

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (4.29)$$

La señal de disturbio  $n(t)$  a veces logra incluir todos los efectos no deseados en la salida  $y(t)$ . Esta señal representa el efecto conjunto de todos los disturbios sobre el proceso, otras entradas no medibles, ruido de medición, errores de modelado, incertidumbres, etc. En nuestro caso, esta señal es parte del modelo y es de tipo determinístico.

El modelo CARIMA, del inglés *Controlled Autoregressive Integrated Moving Average*, es un modelo lineal básico y es el que emplearemos en este estudio. El modelo CARIMA del sistema es representado por:

$$A(z^{-1})y(t) = \frac{B(z^{-1})}{P(z^{-1})}u(t) + \frac{D(z^{-1})}{Q(z^{-1})}e(t) \quad (4.30)$$

Donde:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a} \quad B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}$$

$$Q(z^{-1}) = 1 + q_1z^{-1} + \dots + q_{n_d}z^{-n_d} \quad D(z^{-1}) = 1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{n_d}z^{-n_d}$$

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + \dots + p_{n_d}z^{-n_d}$$

Para el sistema de bombeo mecánico de petróleo en [2.3. 1] se determinó que sus ecuaciones de estado y de salida desde la ecuación [2.27] son:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B u + F n \\ y &= C\mathbf{x} \end{aligned}$$

Y su correspondiente representación discreta se describe en la ecuación (4.1)

como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H u(k) + E n \\ y(k) &= C\mathbf{x}\end{aligned}$$

La representación CARIMA para este sistema toma la forma:

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) + n(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}n(t) \\ &= \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}u(t) + \dots \\ &\quad \frac{d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3} + d_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}n(t)\end{aligned}\quad (4.31)$$

Donde  $z$  es el operador de desplazamiento (transformada  $z$ ). La relación anterior conduce a la ecuación de diferencias:

$$\begin{aligned}y(t) &= -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - a_3y(t-3) - a_4y(t-4) + \dots \\ &\quad b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + b_3u(t-3) + b_4u(t-4) + \dots \\ &\quad + d_1n(t-1) + d_2n(t-2) + d_3n(t-3) + d_4n(t-4)n\end{aligned}\quad (4.32)$$

#### 4.2. 4.2. Diseño del controlador predictivo

El controlador predictivo tiene como finalidad determinar el vector de control  $\mathbf{u}(t+k/t)$ ,  $k=0, \dots, N_2-1$ , que minimice la siguiente función de costo:

$$J = \sum_{k=N_1}^{N_2} [r(t+k/t) - y(t+k/t)]^2 + \lambda \sum_{k=0}^{N_u-1} [\Delta u(t+k/t)]^2 \quad (4.33)$$

Donde por definición:

$$\Delta u(t + k/t) = u(t + k/t) - u(t + k - 1/t) \quad (4.34)$$

Siendo  $\Delta u(t + k/t) = 0$  para  $k \geq N_u$ . La trayectoria de referencia está representada por la relación:

$$r(t + k/t) = \alpha r(t + k - 1/t) + (1 - \alpha)w(t + k/t) \quad (4.35)$$

Será evaluada para  $k = 1, \dots, N_2$ , con  $r(t/t) = y(t)$ . Los parámetros de diseño son los siguientes:  $N_1$ : horizonte de predicción mínimo;  $N_2$ : horizonte de predicción máximo (por defecto:  $N_2 = N_1 + 1, \dots, N_1 + 10$ );  $N_u$  horizonte de control (por defecto:  $N_u = 1$ );  $N_1, \dots, N_2$  horizonte de coincidencia (por defecto: el tiempo muerto  $N_1$ );  $\lambda$  parámetro de sintonización (por defecto:  $\lambda = 0$ ); y  $\alpha$ : parámetro de filtraje (por defecto:  $\alpha = 0$ ).

Es importante observar que la trayectoria de referencia dada en la ecuación (4.35) es un filtro de primer orden para  $w(t)$ , de la forma:

$$\frac{r(z)}{w(z)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z(1 - \alpha)}{z - \alpha} \quad (4.36)$$

La ley de control predictiva requiere en su formulación de las denominadas respuestas libre  $y_{libre}(t + k/t)$  y forzada  $y_{forz}(t + k/t)$ . Dichas respuestas constituyen los componentes de respuesta futura  $y(t + k/t)$ :

$$y(t + k/t) = y_{libre}(t + k/t) + y_{forz}(t + k/t) \quad (4.37)$$

La respuesta libre  $y_{libre}(t + k/t)$  tiene que ser calculada bajo la premisa que es la respuesta del sistema asumiendo que las señales de control futuras igualan al control previo  $u(t - 1)$ ; es decir:



$$u(t/t) = u(t-1), \quad u(t+1/t) = u(t-1), \quad u(t+2/t) = u(t-1), \dots$$

Y que sólo los incrementos antes del instante  $t$ , es decir,  $\Delta u(t-1), \Delta u(t-2), \dots$ , aparecen en dicha respuesta. Esto significa que:

$$\Delta u(t/t) = \Delta u(t+1/t) = \dots = \Delta u(t+N_u-1/t) = 0$$

Como ejemplo, planteamos un modelo CARIMA proveniente de un sistema de cuarto orden. La respuesta libre del sistema de succión de petróleo se obtiene partiendo de la ecuación (4.32) sin considerar perturbaciones:

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) + \dots \\ &\quad b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) \\ y(t+1) &= -a_1 y(t) - a_2 y(t-1) - a_3 y(t-2) - a_4 y(t-3) + \dots \\ &\quad b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + b_3 u(t-2) + b_4 u(t-3) \\ y(t+1) - y(t-1) &= -a_1 y(t) - (a_2 - a_1)y(t-1) - (a_3 - a_2)y(t-2) - \dots \\ &\quad (a_4 - a_3)y(t-3) + a_4 y(t-4) + \dots \\ &\quad b_1 u(t) + (b_2 - b_1)u(t-1) + (b_3 - b_2)u(t-2) + \dots \\ &\quad (b_4 - b_3)u(t-3) - b_4 u(t-4) \\ y(t+1) &= (1 - a_1)y(t) - (a_2 - a_1)y(t-1) - (a_3 - a_2)y(t-2) - \dots \\ &\quad -(a_4 - a_3)y(t-3) + a_4 y(t-4) + \dots \\ &\quad + b_1 \Delta u(t) + b_2 \Delta u(t-1) + b_3 \Delta u(t-3) + b_4 \Delta u(t-4) \end{aligned}$$

En la última ecuación podemos eliminar el término donde aparece  $\Delta u(t)$ . Ope-

rando en forma similar, en la ecuación correspondiente a  $y(t + 2)$  eliminaremos los términos donde aparecen  $\Delta u(t)$  y  $\Delta u(t + 1)$ , y así sucesivamente, tal como lo demuestran las simulaciones.

La componente forzada  $y_{forz}(t + k/t)$  aparece debido al resultado de dos efectos. El primero, causado por la acción del control futuro; es decir, causado por las señales  $\Delta u(t/t)$ ,  $\Delta u(t + 1/t)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta u(t + N_u - 1/t)$ . El segundo efecto se debe a las respuestas del proceso a una secuencia de entradas escalón. Así, un escalón con amplitud  $\Delta u(t/t)$  aplicado al proceso en el tiempo  $t$ , resulta en una contribución  $g_k \Delta u(t/t)$  en la salida del proceso en el tiempo  $t + k$  (ver Figura 17(a)); un escalón con amplitud  $\Delta u(t + 1/t)$  aplicado al proceso en el tiempo  $t + 1$ , resulta en una contribución  $g_k \Delta u(t + 1/t)$  para la salida del proceso en el tiempo  $t + k - 1$  tal como se muestra en la Figura 17(b), (Keyser, 1998).

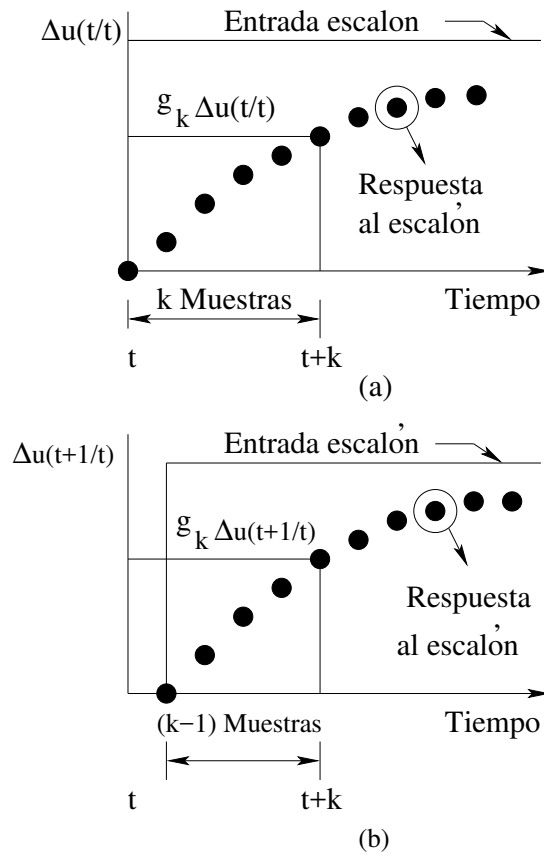
Por consiguiente, el efecto acumulativo de todos los escalones es:

$$y_{forz}(t+k/t) = g_k \Delta u(t/t) + g_{k-1} \Delta u(t+1/t) + \dots + g_{k-N_u+1} \Delta u(t+N_u-1/t) \quad (4.38)$$

Donde los parámetros  $g_1, \dots, g_{N_2}$  son los coeficientes de la respuesta del sistema al escalón unitario.

Para el sistema de succión, su respuesta forzada se determina como sigue. Partiendo de la ecuación (4.32) sin considerar perturbaciones:

$$\begin{aligned} y(t) = & -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) + \dots \\ & b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) \end{aligned}$$



**Figura 17:** El efecto de las entradas tipo escalón en la salida forzada.

**Fuente:** Del libro Moreno (2001), página 299

Por definición, la entrada escalón  $u(t) = 1$  para  $t \geq 0$  y  $u(t) = 0$  para  $t < 0$ . Por tanto, la ecuación que determina la respuesta al escalón correspondiente a  $y(t)$  resulta:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) = 0 = g_0$$

Puesto que  $y(t-1) = y(t-2) = y(t-3) = y(t-4) = 0$ . Para el caso  $y(t+1)$ , con  $u(t) = 1$  tenemos:

$$y(t+1) = -a_1 y(t) - a_2 y(t-1) - a_3 y(t-2) - a_4 y(t-3) + \dots$$

$$b_1u(t) + b_2u(t - 1) + b_3u(t - 2) + b_4u(t - 3) = b_1 = g_1$$

Expandiendo la ecuación (4.38) se obtiene la siguiente expresión para la componente forzada:

$$\mathbf{Y}_{forz} = G\mathbf{U} \quad (4.39)$$

Donde:

$$\mathbf{Y}_{forz} = \left[ y_{forz}(t + N_1/t) \quad y_{forz}(t + N_1 + 1/t) \quad \cdots \quad y_{forz}(t + N_2/t) \right]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & \cdots & \cdots \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \cdots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \left[ \Delta u(t/t) \quad \Delta u(t + 1/t) \quad \cdots \quad \Delta u(t + N_u - 1/t) \right]^T$$

Empleando la ecuación (4.37), se consigue escribir:

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + G\mathbf{U} \quad (4.40)$$

Donde:

$$\mathbf{Y} = [y(t + N_1/t) \dots y(t + N_2/t)]^T; \quad \mathbf{U} = [\Delta u(t/t) \dots \Delta u(t + N_u - 1/t)]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [y_{libre}(t + N_1/t) \dots y_{libre}(t + N_2/t)]^T$$

También:

$$\mathbf{R} = [r(t + N_1/t) \dots r(t + N_2/t)]^T$$

Empleando la notación anterior, la función de costo (ecuación (4.33)) resulta:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{R} - \mathbf{Y}) + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} = [(\mathbf{R} - \bar{\mathbf{Y}}) - G\mathbf{U}]^T [(\mathbf{R} - \bar{\mathbf{Y}}) - G\mathbf{U}] + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (4.41)$$

La cual es cuadrática en  $\mathbf{U}$ , y cuya minimización por diferenciación resulta en:

$$\mathbf{U}^* = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (\mathbf{R} - \mathbf{Y}) \quad (4.42)$$

Es importante indicar que solamente el primer elemento  $\Delta u(t/t)$  de  $\mathbf{U}^*$  es necesario para computar la entrada de control actual  $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t/t)$ . El mismo procedimiento se repite para la nueva medición  $y(t+1)$  en el próximo instante de tiempo  $t+1$ . Este procedimiento se denomina el principio del *horizonte retroactivo*.

Por otra parte, la matriz  $[G^T G + \lambda I]$  a ser invertida tiene dimensión  $N_u \times N_u$ . Para el caso por defecto, es decir, para  $N_u = 1$ , se obtiene una ley de control escalar (con muy buenos resultados en muchos casos prácticos) de la forma:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t + k/t) - y_{libre}(t + k/t)]}{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k^2 + \lambda} \quad (4.43)$$

### 4.3. Método de investigación

En la investigación se usa el método deductivo, porque se parte de algo particular y se van integrando los recursos de la investigación para lograr

finalmente la deducción de la solución del problema planteado.

#### **4.4. Población y muestra**

Por el tipo de investigación teórica no corresponde determinar el tamaño de muestra.

#### **4.5. Lugar del estudio**

El estudio de investigación se realizó en las instalaciones del grupo de investigación en sistemas de control avanzados y electrónica (ISCA & Electronics).

#### **4.6. Técnicas e instrumentos**

Debido a que no se ha determinado el tamaño de la muestra, no corresponde utilizar las técnicas e instrumentos para la recolección de datos.

#### **4.7. Análisis y procesamiento de datos**

No es necesario utilizar procedimientos y análisis de datos.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS

Como mencionamos anteriormente, las técnicas de control avanzado a emplearse para el control del flujo extraído requieren de un modelo matemático, que sea capaz de capturar las características dinámicas del sistema. Además, como tales técnicas se implementan en el dominio discreto, entonces es importante determinar el período de muestreo apropiado, de modo tal que las especificaciones de diseño sean satisfechas. De ese modo fue necesario deducir el modelo dinámico del sistema de succión de petróleo. Así mismo, realizar el diseño del sistemas de control de bombeo, que sean capaces de estabilizar el flujo de petróleo extraído en un tiempo de estabilización menor que 5 segundos y con un sobre impulso menor que 7%, empleando las técnicas de control avanzado. En esta sección propondremos las simulaciones de las técnicas empleadas en este informe como son:

1. Técnica de control optimo
2. Técnica de control predictivo

Los programas correspondientes a las simulaciones emplean el programa MATLAB y se encuentran en el Anexo B. El desarrollo de las simulaciones se ha dividido en dos partes: la primera parte presenta las simulaciones considerando la

respuesta del sistema debido a una entrada escalón unitario para cada técnica de control expuesta. La segunda parte presenta simulaciones considerando la señal de control del sistema según las técnicas de control expuestas en la presente investigación.

## 5.1. Resultados descriptivos

### 5.1. 1. Simulaciones del control óptimo

La técnica de control optimo considera modificación de los pesos  $(q, r)$  para encontrar la performance, es decir las matrices de ponderación serán modificadas para encontrar respuestas que muestren evolución de las señales encontrando los resultados según las consideraciones de diseño impuestas.

$$Q = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q];$$

$$R = [r];$$

#### 5.1. 1.1. Caso $R = 0.01$ y $Q = 1000$

Para la simulación de este caso vamos a considerar dos cambios en la matriz de pesos a valores  $R = 0.01$  y  $Q = 1000$ , los resultados son mostrados en la Figura 18.

#### 5.1. 1.2. Caso $R = 0.001$ y $Q = 1000$

En forma análoga, la simulación de este caso vamos a considerar dos cambios en la matriz de pesos a valores  $R = 0.001$  y  $Q = 1000$ , los resultados son mostrados en la Figura 19. Podemos concluir que la performance en relación al cambio de ponderación de pesos hace que la respuesta varíe significativamente en relación a las consideraciones de diseño como lo demuestran las simulaciones.



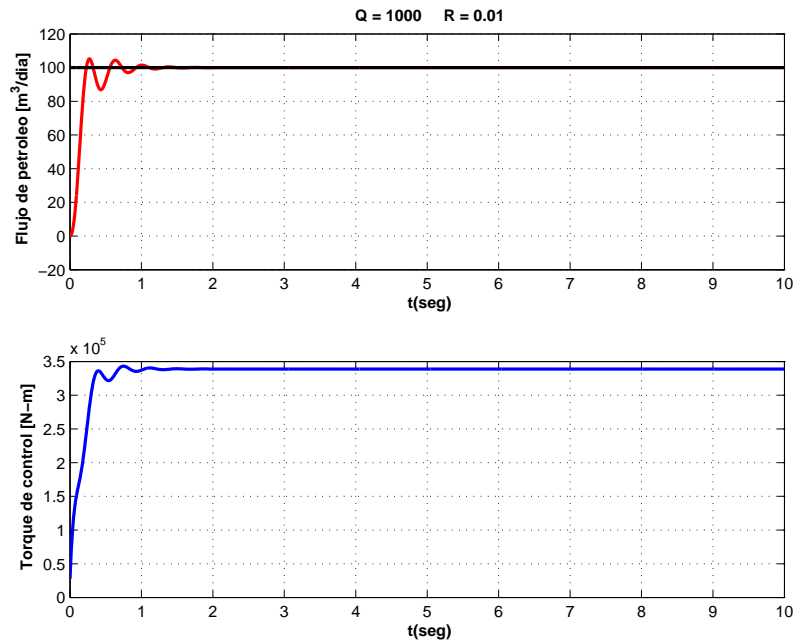


Figura 18: Simulaciones del control óptimo para peso  $R = 0.01$  y  $Q = 1000$ .

Fuente: (UNAC-2021) Autoría propia.

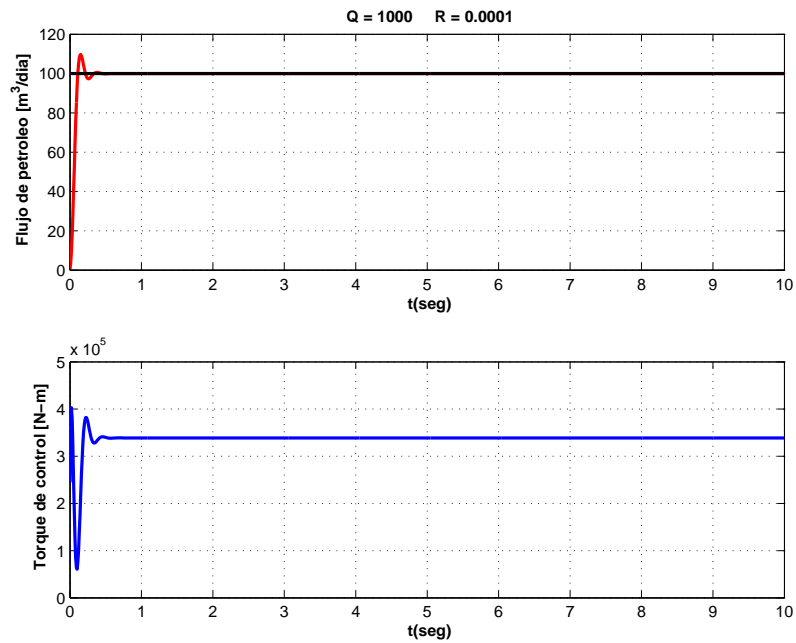


Figura 19: Simulaciones del control óptimo para peso  $R = 0.001$  y  $Q = 1000$ .

Fuente: (UNAC-2021) Autoría propia.

## 5.1. 2. Simulaciones del control predictivo

La técnica de control predictivo trae consigo los parámetros de sintonía  $\gamma = 0$  (valor considerado por defecto) y el parámetro  $\alpha$  que es el que vamos a modificar para encontrar la performance de las respuestas que muestren evolución de las señales encontrando los resultados según las consideraciones de diseño impuestas.

### 5.1. 2.1. Caso $\gamma = 0$ y $\alpha = 0.98$

El parámetro de sintonía a elegir esta considerado dentro del rango  $0 < \alpha < 1$ , en este caso escogemos un valor en la vecindad de valor  $\alpha = 0.98$ . Los resultados de la simulación muestran un mínimo sobre impulso y un esfuerzo de control moderado según se muestra en la Figura 20.

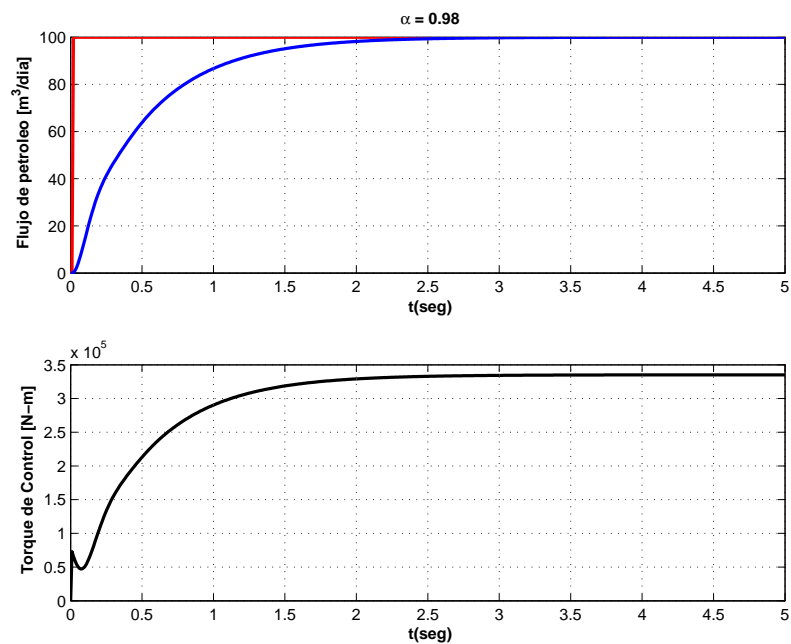
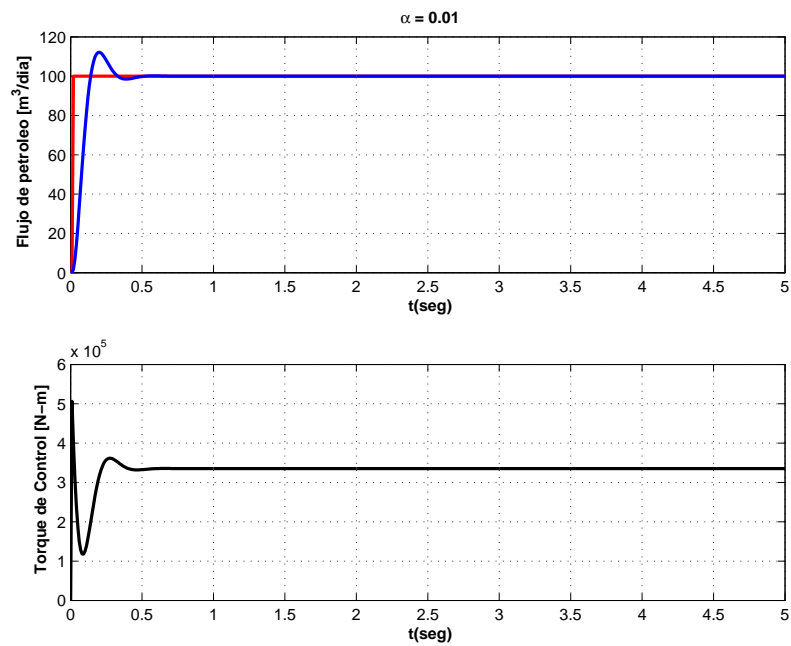


Figura 20: Simulaciones del control predictivo para la sintonía  $\alpha = 0.98$ .

Fuente: (UNAC-2021) Autoría propia.

### 5.1. 2.2. Caso $\gamma = 0$ y $\alpha = 0.1$

En forma análoga, la simulación de este caso vamos a considerar dos cambios en el parámetros de sintonía  $\alpha = 0.1$ , los resultados son mostrados en la Figura 21. Podemos concluir que la performance en relación al cambio de parámetro de sintonía hace que la respuesta varíe significativamente en relación a las consideraciones de diseño como lo demuestran las simulaciones.



**Figura 21:** Simulaciones del control predictivo para la sintonía  $\alpha = 0.1$ .

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

# CAPÍTULO 6

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 6.0. 1. Contrastación de la hipótesis con los resultados

Se satisface la hipótesis 1 planteada en [3.1. 2] ya que se pudo formular el modelo matemático en [2.2. 2] capturando las principales características dinámicas del sistema. Se verifica en [4.2. 1.3] que es posible la simulación verificando el comportamiento del sistema en la Figura 11.

Se satisface la hipótesis 2 planteada en [3.1. 2] ya que los dos tipos de control planteados en el presente estudio cumplen con la estabilización del flujo de bombeo bajo los criterios de diseño establecidos.

Del mismo modo se cumple con la hipótesis 3 planteada en [3.1. 2] ya que de los resultados expuestos en [5] nos muestra que la técnica de control predictivo tiene mejores prestaciones respecto de los criterios de diseño establecidos en [1.1] y por tanto es la técnica de control que sobresale respecto de las demás.

## **6.0. 2. Contrastación de la hipótesis con otros estudios similares**

En vista de que el presente estudio corresponde al análisis teórico de las técnicas aquí planteadas, para contrastar con datos reales que se presentan en los estudios referidos en la presente tesis es necesario poder implementar los algoritmos para las pruebas respectivas en campo.

Existen varias configuraciones para la implementación en tiempo real del control del sistema de bombeo o extracción estudiado presentado en este estudio. Todas las configuraciones requieren del desarrollo de software de control ad-hoc para la aplicación, debido a que los algoritmos de control estudiados, aún no están comercializados en masa o que dispositivos vengan configurados con estos (este no es el caso de los controladores tipo PID, en contraposición).

Una solución económica y robusta sería usar una tarjeta de desarrollo DSP (Digital Signal Processor) que trabaje en conjunto con la parte de electrónica de potencia para la amplificación de la señal de control. Esta tarjeta, mediante software, también permitirá hacer el acondicionamiento de las señales medidas.

Sin embargo, se espera que las técnicas planteadas presenten mejores resultados que las anteriormente estudiadas y presentadas como referencias a este estudio (Palma, 2010; Villalobos, 2011; Watson et al., 2004) ya que las técnicas ensayadas en estos no tienen la robustés necesaria para esta tarea.

### **6.0. 3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes**

El autor de la investigación se responsabiliza por la información emitida en el informe. La presente investigación se ha realizado de acuerdo a las normas y procedimiento establecidos.

# CONCLUSIONES

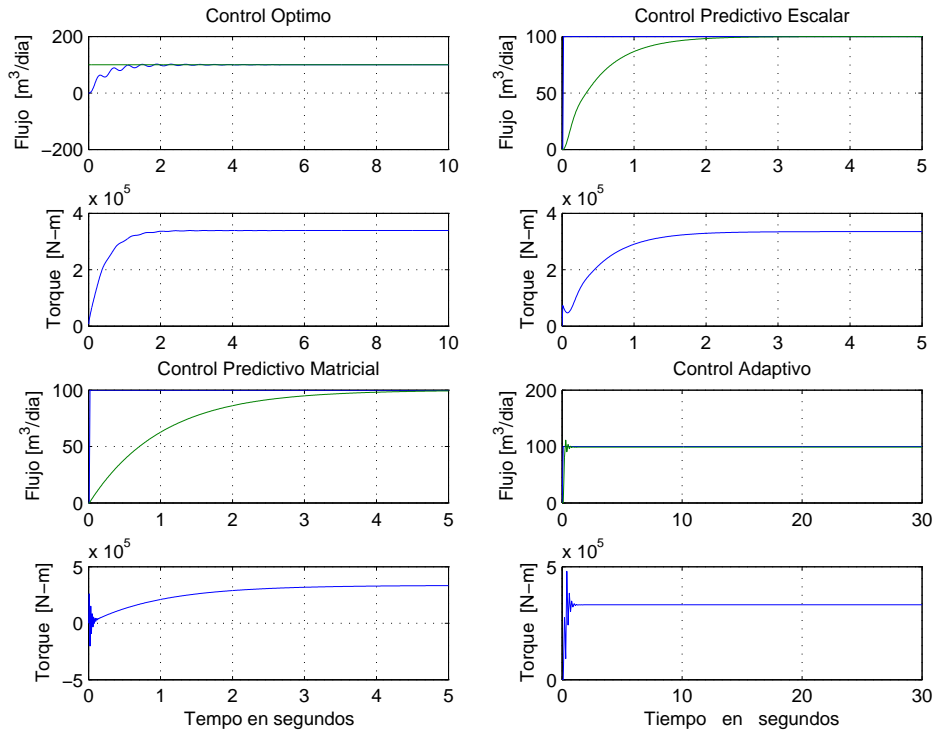
Concluimos esta tesis con un resumen corto de las contribuciones y algunas recomendaciones para investigaciones a futuro que son principalmente los problemas que no han sido resueltos en esta tesis.

Sobre el modelo matemático, concluimos que el modelo desarrollado en el presente estudio captura las principales características dinámicas del sistema y es posible utilizarlo para el diseño de controladores.

En relación al diseño de controladores discretos avanzados, concluimos que los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo con relación al control flujo de petróleo extraído o producido tal como se observa en la Figura 22, todos los casos cumplen las especificaciones de diseño: la señal del flujo producido no posee sobreimpulso y se estabiliza en menos de 5 segundos.

Además sobre el diseño de controladores, se debe considerar el período de muestreo para las técnicas de control óptimo y predictivo  $T = 0.01$  s, exigido por el propio algoritmo de discretización. Este tiempo de muestreo, es adecuado para futuras implementaciones en tiempo real de los algoritmos de control estudiados puesto que la mayoría de DSP (*Digital Signal Processor*) soportan estos periodos de muestreo.

Con respecto al desempeño de los controladores diseñados, una variable im-



**Figura 22:** Sistemas de control de bombeo desarrollados.

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.

portante a analizar es el torque de entrada que está intrínsecamente relacionado a la implementación física ya que muy altos torques son prácticamente imposibles de implementar en la vida real o su costo es elevado ya que se requiere motores de mucha potencia, las técnicas de control óptimo y predictivo escalar son las menos exigentes, por consiguiente, las más económicas debido a que el sistema de bombeo para estas situaciones es más pequeño comparado con el sistema de bombeo requerido por otras técnicas de control como el adaptivo y predictivo vectorial.

Sin embargo, tenemos que mencionar que la respuesta controlada obtenida con la técnica de control predictivo escalar es más manipulable que la respuesta controlada obtenida con la técnica de control óptimo. En otras palabras, es



mucho más fácil sintonizar la respuesta deseada empleando la técnica de control predictivo. Por las razones expuestas y para este caso en particular, es que este estudio concluye recomendando el uso de la técnica de control predictivo con ley de control escalar, para resolver el problema del control de la producción de petróleo mediante bombeo mecánico.

# RECOMENDACIONES

1. En el capítulo 2 determinamos la naturaleza no lineal de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema de bombeo. Un trabajo a corto plazo consistiría en estudiar la introducción de algoritmos de control no lineales para resolver el problema del control del flujo producido, tales como control adaptivo no lineal, control con modo deslizante, control predictivo no lineal, entre otros.
2. Se recomienda la implementación real del sistema que permita la toma de datos con mayor precisión y la contrastación con controladores que actualmente se usan en los sistemas existentes. El costo de implementación del sistema de control, sin incluir la maquinaria pesada (por ejemplo, actuadores rotativos) sería:
  1. Tarjeta DSP (\$ 2,500.00).
  2. Dos sensores industriales de posición (\$ 3,800.00).
  3. Etapa de electrónica de potencia (\$ 5,000.00).
  4. Desarrollo y puesta en operación del software de control (\$ 4,000.00).

# REFERENCIAS

# BIBLIOGRÁFICAS

Brown, G. (2002). The history of the darcy-weisbach equation for pipe flow resistance. *Proc. Environ. Water Resour. Hist.*, 38.

Camacho, E., Bordons, C., and Alba, C. (2004). *Model Predictive Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London.

Fontenot, K. R., Lesso, B., Strickler, B., and Warren, T. M. (2005). TESCO perforación de pozos direccionales con tubería de revestimiento. *Oilfield Review*, pages 46–65.

Inzunza, J. C. (2007). Introducción a la mecánica. Publicación Independiente.

Keyser, R. D. (1998). A gentle introduction to model based predictive control. *IPADI2 International Conference on Control Engineering and Signal Processing*.

Kuo, B. C. (1996). *Sistemas de Control Automático*. Prentice-Hall, México, séptima edition.

López, A. E. (1998). *Project a Perforation Tower with Pultrusion Profiles of GFRP*.

MathWorks (2016). *MATLAB Reference Guide*. MathWorks Inc.

- Moreno, A. R. (2001). *Control Avanzado Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Arturo Rojas Moreno, Lima, Perú.
- Ogata, K. (1993). *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall, México, segunda edición.
- Ogata, K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice-Hall, México, segunda edición.
- Palma, C. I. M. (2010). Aplicación de tecnologías no convencionales de bombeo mecánico en México. Tesis para obtener el título de ingeniero petrolero, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Paul R. Robinson, C. S. H. (2017). *Springer Handbook of Petroleum Technology*. Springer Handbooks. Springer International Publishing, second edition. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49347-3>.
- Pérez-Taiman, J. (2015). Breve reseña de la exploración y explotación de petróleo en el Perú desde el punto de vista legal. pages 209–219.
- Umez-Eronini, E. I. (1999). *System Dynamics and Control*. PWS Publishing Company, New York, first edition.
- Villalobos, M. A. S. (2011). Diseño, optimización y mejora de la extracción de petróleo utilizando un sistema de bombeo mecánico hidráulico aplicándolo en campos maduros. Tesis para obtener el título de ingeniero de petróleo y gas natural, Universidad Nacional de Ingeniería.
- Watson, J., Upadhyay, H., and Aggarwal, R. (2004). Reciprocating pump control system. Application number au 2003240330 c1, Australian Patent Office.

## **Anexo A**

# **MATRIZ DE CONSISTENCIA**

Se presenta la matriz de consistencia donde se presenta y resume en forma adecuada, general y sucinta los elementos básicos del plan del proyecto de investigación, que posibilita el análisis en interpretación de la operatividad teórica del Proyecto de Investigación.

ANEXO A: Matriz de Consistencia.

“ESTRATEGIAS AVANZADAS DE CONTROL DISCRETO APLICADAS AL SISTEMA DE BOMBEO DE PETRÓLEO POR ACCIONAMIENTO MECÁNICO”					
PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	INDICADORES	METODOLOGIA
<p><b>Problema General:</b> ¿Es posible el control del flujo de petróleo extraído mediante bombeo por accionamiento mecánico, empleando técnicas de control digital por realimentación?</p>	<p><b>Objetivo General:</b> Diseñar y simular controladores digitales que permitan el control de flujo en el sistema de bombeo mecánico.</p>	<p><b>Hipótesis general:</b> Es posible el diseño de uno o varios controladores que sean capaces de estabilizar el flujo de bombeo cumpliendo los criterios de diseño establecidos en 1.2 en base al control del torque de entrada al sistema de bombeo mecánico.</p>	<p><b>Variable Independiente:</b> X: El torque de succión generado por el movimiento de la viga.</p>	<p>Par generado por el mecanismo. Velocidad angular de la viga. Desplazamiento lineal del Ivástago.</p>	<p><b>Tipo de Investigación:</b> La investigación es hipotética y transversal. <b>Método de la Investigación:</b> Durante este proceso de investigación para demostrar y comprobar la hipótesis, se aplicarán el método Hipotético-deductivo.</p>
<p><b>Problema específico:</b> 1. ¿Cuál es el modelo dinámico del sistema de bombeo por accionamiento mecánico? 2. ¿Cuáles técnicas de control digital avanzadas satisfacen las condiciones de diseño establecidas? 3. ¿Determinar la mejor técnica de control a aplicarse bajo las condiciones de diseño establecidas?</p>	<p><b>Objetivos específicos:</b> 1. Definir el modelo dinámico del sistema de bombeo por accionamiento mecánico. 2. Diseñar técnicas de control avanzado, que sean capaces de estabilizar el flujo de petróleo extraído en un tiempo menor que 5 segundos y con un sobre impulso menor que 7 %. 3. Realizar una comparativa de respuestas para las técnicas de control diseñadas.</p>	<p><b>Hipótesis específicas:</b> 1. Es posible definir un modelo matemático dinámico que describa el sistema de bombeo mecánico. 2. Es posible el diseño de técnicas de control avanzado para el modelo del sistema de bombeo mecánico. 3. Existe una técnica de control que sobresalga respecto a otras en mejorar el desempeño del sistema, que sea más robusta y que sea factible su implementación en la realidad.</p>	<p><b>Variable Dependiente:</b> Y: Es el flujo que desarrolla el sistema de bombeo.</p>	<p>Volumen total de petróleo succionado. Flujo de petróleo en m<sup>3</sup>/día.</p>	<p><b>Esquema del Proyecto:</b> De acuerdo con el presentado en la Figura 19. <b>Técnicas a utilizar:</b> ■ Obtención del modelo matemático, selección del software de simulación y la simulación del modelo. ■ Diseño y simulación de controladores. ■ Análisis comparativo.</p>

Fuente: (UNAC-2021) Autoría propia.

## Anexo B

# PROGRAMAS MATLAB

### (a) Script: Modelamiento del sistema de bombeo

```
% Pum Control System Parameters
```

```
beta = 100;
```

```
rho = 900;
```

```
d = 0.128;
```

```
mu = 10.5e-3;
```

```
m2 = 40;
```

```
m1 = 300;
```

```
L2 = 1.5;
```

```
L1 = 1; Lo = 1000;
```

```
H = 6; Ac = 0.785;
```

```
Ap = 128.7;
```

```
E = 20.6e6;
```

```
J1 = 150.6 ;
```

```
Pf = 176.6;
```

```

Ps = 100;
Rf = 150;
g = 9.81;

V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))-
beta/m2 - g;
Amp = 1;

% Linear Model
% x* = Ax + B
% y = Cx + D

A = [0 1 0 0
      (Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2) -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
      0 0 0 1
      L2*Ac*E/J1/Lo 0 -L2^2*Ac*E/J1/Lo 0];

B = [0;0;0;Amp/J1];

F = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];

C = [0 8.64*Ap 0 0];

D = [0];

Co = ctrb(A,B);
Rango_Co=rank(Co);

```



```

Ob = obsv(A,C);
Rango_Ob=rank(Ob);

disp(['Controlabilidad: Ran[C] = ', num2str(Rango_Co)])
disp(['Observabilidad: Ran[O] = ', num2str(Rango_Ob)])

```

## (b) Script: Conversión al sistema discreto

```

%% Conversion de tiempo continuo a tiempo discreto
T = 0.01;
[G,H,C,D] = c2dm(A,B,C,D,T,'zoh');
[G,EE,C,D] = c2dm(A,F,C,D,T,'zoh');

%% Simulacion de respuesta al escalon
x=[0;0;0;0]; M = 1000;

figure
for k = 1:M
    u = 1;
    x = G*x + H*u + EE;
    y(k) = C*x;

    subplot(2,2,1), hold on
    plot(k,x(1),'b. ')
    title('\bf x_1')

    subplot(2,2,2), hold on
    plot(k,x(2),'b. ')
    plot(k,x(2),'r. ')
    title('\bf x_2')

```

```

subplot(2,2,3), hold on
plot(k,x(3))
plot(k,x(3),'k. ')
title('\bf x_3')

subplot(2,2,4), hold on
plot(k,x(4))
plot(k,x(4),'m. ')
title('\bf x_4')

end

```

### (c) Script: Diseño del control óptimo Proporcional-Integral

```

%% Adicionando la accion integral
G1 = [G zeros(4,1);-C*G 1];
H1 = [H;-C*H];

%% Creando las matrices de ponderacion (Q, R)
Q = [1 0 0 0 0
     0 1 0 0 0
     0 0 1 0 0
     0 0 0 1 0
     0 0 0 0 100];

R = [0.01]; %

%% Solucion a la Ecuacion de Riccati

```

```

P = diag(0,4);
for i = 1:40
    P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end

%% Calculo de la ganancia K
KK = inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4)];
KI = -KK(5);

%% Simulacion del lazo de control
x=[0;0;0;0]; v=0; Y=0; % Condiciones iniciales
N = 1000;
for k=1:N
    r(k)=100;
    Ref=r(k);
    v = v + Ref - Y;
    U = - K*x + KI*v;
    x = G*x + H*U + EE;
    Y = C*x;
    y(k) = Y; u(k) = U;
end

% Graficamos los resultados
t=linspace(0,N*T,N);
figure
subplot(2,1,1)
plot(t,y(1:N),t,r), grid

```

```

title('Control Optimo')
ylabel('Flujo [m^3/dia]')
xlabel('t(seg)')

subplot(2,1,2)
plot(t,u(1:N)), grid
xlabel('t(seg)')
ylabel('Torque [N-m]')

```

### (d) Script: Diseño del control adaptativo

```

%% Parametros generales
nn = 4; % orden del proceso
r = 1; % numero de salidas
NN = 8; % Orden del vector estimado de parametros

%% Matrices de ponderacion Observador (Ko)
Qo = [1 0 0 0
      0 1 0 0
      0 0 1 0
      0 0 0 1];

Ro = [1];

%% Matrices de ponderacion Controlador (Ke)
Qa = [1 0 0 0 0
      0 1 0 0 0
      0 0 1 0 0
      0 0 0 1 0

```

```

0 0 0 0 1000000000];

Ra = [1];

%% Parametros iniciales del controlador
Ref = 100; % Referencia m3/dia
thi = [-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4]'; % Parametros iniciales
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % Matriz P inicial
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % Factor de memoria de la recursividad
Y(1) = 0; Y(2) = 0; Y(3) = 0; Y(4) = 0;
U(1) = 0; U(2) = 0; U(3) = 0; U(4) = 0;
x = [0;0;0;0]; % Vector de estado inicial
z = 0;

%% Parametros iniciales del controlador
Ref = 100; % Referencia m3/dia
thi = [-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4]'; % Parametros iniciales
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % Matriz P inicial
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % Factor de memoria de la recursividad
Y(1) = 0; Y(2) = 0; Y(3) = 0; Y(4) = 0;
U(1) = 0; U(2) = 0; U(3) = 0; U(4) = 0;
x = [0;0;0;0]; % Vector de estado inicial
z = 0;

%% Diseno del Control adaptativo
MM = 1000;
for t = 1:MM
    g(t+4) = Ref; % referencia m3/dia

```

```

% Modelando el proceso
Y(t+4)=[Y(t+3) Y(t+2) Y(t+1) Y(t) ...
U(t+3) U(t+2) U(t+1) U(t) 1 1 1 1]*...
[-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4 d1 d2 d3 d4]';

% Estimacion de parametros recursivo (Metodo MCRM)
psi = [Y(t+3) Y(t+2) Y(t+1) Y(t) U(t+3) U(t+2) U(t+1) U(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi' Cholesky factorization
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;
lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = Y(t+4)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps))) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps' Cholesky factorization
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;

```

```

    Pi = Psnew; thi = th;
end

% Forma canonica controlable
ae1 =-th(1); ae2 =-th(2); ae3=-th(3); ae4 =-th(4);
be1 = th(5); be2 = th(6); be3= th(7); be4 = th(8);
nume = [0 be1 be2 be3 be4];
dene = [1 ae1 ae2 ae3 ae4];
[GE,HE,CE,DE] = tf2ss(nume,dene);

% Ganancia Observador Ko
Po = diag(0,3);
for i = 1:20
    Po = Qo + GE*Po*GE' - ...
        GE'*Po*CE'*inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE'; % Riccati
end
Ko = inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE';

% Estimacion de estados
x = GE*x + HE*U(t+3) + Ko'*(Y(t+4)-CE*x);

% Ganancia Controlador Ke
Ga = [GE zeros(nn,r);-CE*GE eye(r,r)];
Ha = [HE;-CE*HE];

Pa = diag(0,4);
for i = 1:20
    Pa = Qa + Ga'*Pa*Ga - ...

```

```

        Ga'*Pa*Ha*inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga; % Riccati

    end

    Ka = inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga;
    K = [Ka(1) Ka(2) Ka(3) Ka(4)];
    KI = -Ka(5);

    % Ley de control

    z = z + g(t+4) - Y(t+4);          % Integral
    U(t+4) = - K*x + KI*z;

end

%% Graficamos los resultados

ejex = linspace(0,MM*T,MM);

figure

subplot(2,1,1)

plot(ejex,g(4:MM+3),ejex,Y(4:MM+3)), grid
title('Control Adaptivo')
ylabel('Flujo [m^3/dia]')
xlabel('t(seg)')

subplot(2,1,2), grid
plot(ejex,U(3:MM+2)), grid
ylabel('Torque [N-m]')
xlabel('t(seg)')

```

#### (d) Script: Diseño del control predictivo escalar

```

%% Control predictivo con fuerza de control escalar

```



```

% Horizontes de control
N1 =1; N2 =10; Nu =1;

% Ganancia de respuesta al escalon
g(1) = b1; g(2) = -a1*b1 + b1 + b2;
g(3) = - a1*g(2) - a2*g(1) + b1 +b2+b3;
g(4) = - a1*g(3) - a2*g(2)-a3*g(1) + b1+b2+b3+b4;
for k=5:N2
    g(k) = -a1*g(k-1)-a2*g(k-2)-a3*g(k-3)-a4*g(k-4)+b1+b2+b3+b4;
end

% Condiciones iniciales
for k=1:6
    yf(k)=0; y(k)=0; r(k)=0; u(k)=0; du(k)=0;
end
alf =0.98;    lambda = 0.00;

%% Diseno del control predictivo
MM=1000;
for t =6:MM+5;
    for k=1:N2
        W(t+k)=100; % Referencia deseada
    end

    % Caculo de la referencia
    r(t+0) = alf*r(t-1) + (1-alf)*W(t+0);
    r(t+1) = alf*r(t+0) + (1-alf)*W(t+1);

```

```

r(t+2) = alf*r(t+1) + (1-alf)*W(t+2);
r(t+3) = alf*r(t+2) + (1-alf)*W(t+3);
r(t+4) = alf*r(t+3) + (1-alf)*W(t+4);
r(t+5) = alf*r(t+4) + (1-alf)*W(t+5);
r(t+6) = alf*r(t+5) + (1-alf)*W(t+6);
r(t+7) = alf*r(t+6) + (1-alf)*W(t+7);
r(t+8) = alf*r(t+7) + (1-alf)*W(t+8);
r(t+9) = alf*r(t+8) + (1-alf)*W(t+9);
r(t+10) = alf*r(t+9) + (1-alf)*W(t+10);

```

```

R=[r(t+1) r(t+2) r(t+3) r(t+4) r(t+5) r(t+6)...
   r(t+7) r(t+8) r(t+9) r(t+10)]';

```

```

% Respuesta del sistema abierto

```

```

yf(t) =(1-a1)*yf(t-1)-(a2-a1)*yf(t-2)-(a3-a2)*yf(t-3)...
        -(a4-a3)*yf(t-4)+a4*yf(t-5)+b1*du(t-1)+b2*du(t-2)+b3*du(t-3)...
        +b4*du(t-4);

```

```

yf(t+1)=(1-a1)*yf(t)-(a2-a1)*yf(t-1)-(a3-a2)*yf(t-2)...
        -(a4-a3)*yf(t-3)+a4*yf(t-4)+b2*du(t-1)+b3*du(t-2)...
        +b4*du(t-3);

```

```

yf(t+2)=(1-a1)*yf(t+1)-(a2-a1)*yf(t)-(a3-a2)*yf(t-1)...
        -(a4-a3)*yf(t-2)+a4*yf(t-3)+b3*du(t-1)...
        +b4*du(t-2);

```

```

yf(t+3)=(1-a1)*yf(t+2)-(a2-a1)*yf(t+1)-(a3-a2)*yf(t)...
        -(a4-a3)*yf(t-1)+a4*yf(t-2)...

```

```

+b4*du(t-1);

yf(t+4)=(1-a1)*yf(t+3)-(a2-a1)*yf(t+2)-(a3-a2)*yf(t+1)...
-(a4-a3)*yf(t)+a4*yf(t-1);

yf(t+5)=(1-a1)*yf(t+4)-(a2-a1)*yf(t+3)-(a3-a2)*yf(t+2)...
-(a4-a3)*yf(t+1)+a4*yf(t);

yf(t+6)=(1-a1)*yf(t+5)-(a2-a1)*yf(t+4)-(a3-a2)*yf(t+3)...
-(a4-a3)*yf(t+2)+a4*yf(t+1);

yf(t+7)=(1-a1)*yf(t+6)-(a2-a1)*yf(t+5)-(a3-a2)*yf(t+4)...
-(a4-a3)*yf(t+3)+a4*yf(t+2);

yf(t+8)=(1-a1)*yf(t+7)-(a2-a1)*yf(t+6)-(a3-a2)*yf(t+5)...
-(a4-a3)*yf(t+4)+a4*yf(t+3);

yf(t+9)=(1-a1)*yf(t+8)-(a2-a1)*yf(t+7)-(a3-a2)*yf(t+6)...
-(a4-a3)*yf(t+5)+a4*yf(t+4);

yf(t+10)=(1-a1)*yf(t+9)-(a2-a1)*yf(t+8)-(a3-a2)*yf(t+7)...
-(a4-a3)*yf(t+6)+a4*yf(t+5);

YF=[yf(t+1) yf(t+2) yf(t+3) yf(t+4) yf(t+5) ...
yf(t+6) yf(t+7) yf(t+8) yf(t+9) yf(t+10)]';

% Ley de control
du(t)=(g(1)*(r(t+1)-yf(t+1))+g(6)*(r(t+6)-yf(t+6))+ ...

```

```

g(2)*(r(t+2) - yf(t+2)) + g(7)*(r(t+7) - yf(t+7)) + ...
g(3)*(r(t+3) - yf(t+3)) + g(8)*(r(t+8) - yf(t+8)) + ...
g(4)*(r(t+4) - yf(t+4)) + g(9)*(r(t+9) - yf(t+9)) + ...
g(5)*(r(t+5) - yf(t+5)) +g(10)*(r(t+10)- yf(t+10)))/...
(g(1)^2 + g(2)^2 + g(3)^2 + g(4)^2 + g(5)^2 + g(6)^2 + ...
g(7)^2 + g(8)^2 + g(9)^2 + g(10)^2 + lambda);

u(t) = u(t-1) + du(t);

    % Salida final del proceso
y(t+1)=-a1*y(t)-a2*y(t-1)-a3*y(t-2)-a4*y(t-3)...
    +b1*u(t)+b2*u(t-1)+b3*u(t-2)+b4*u(t-3)...%;
    +d1 +d2 +d3 +d4;

end

%% Graficamos los resultados
ejex = linspace(0,MM*T,MM-4);
figure

subplot(2,1,1)
plot(ejex,W(5:MM),ejex,y(5:MM)), grid
title('Control Predictivo Escalar')
ylabel('Flujo [m^3/dia]')
xlabel('t(seg)')

subplot(2,1,2),
plot(ejex,u(5:MM)), grid
ylabel('Torque [N-m]')

```

```
xlabel('t(seg)')
```

## (d) Script: Diseño del control predictivo matricial

```
%% Control predictivo con fuerza de control matricial
```

```
% Horizontes de control
```

```
N1 =1; N2 =10; Nu =5;
```

```
% Ganancia de respuesta al escalon
```

```
g1 = b1;      g2 = -a1*b1 + b1 + b2;
```

```
g3 = - a1*g2 - a2*g1 + b1 +b2+b3;
```

```
g4 = - a1*g3 - a2*g2-a3*g1 + b1 +b2+b3+b4;
```

```
g5=-a1*g4-a2*g3-a3*g2-a4*g1+b1+b2+b3+b4;
```

```
g6=-a1*g5-a2*g4-a3*g3-a4*g2+b1+b2+b3+b4;
```

```
g7=-a1*g6-a2*g5-a3*g4-a4*g3+b1+b2+b3+b4;
```

```
g8=-a1*g7-a2*g6-a3*g5-a4*g4+b1+b2+b3+b4;
```

```
g9=-a1*g8-a2*g7-a3*g6-a4*g5+b1+b2+b3+b4;
```

```
g10=-a1*g9-a2*g8-a3*g7-a4*g6+b1+b2+b3+b4;
```

```
% Matriz de ganancia
```

```
GG=[g1  0  0  0  0
```

```
      g2  g1  0  0  0
```

```
      g3  g2  g1  0  0
```

```
      g4  g3  g2  g1  0
```

```
      g5  g4  g3  g2  g1
```

```
      g6  g5  g4  g3  g2
```

```
      g7  g6  g5  g4  g3
```

```
      g8  g7  g6  g5  g4
```

```

g9 g8 g7 g6 g5
g10 g9 g8 g7 g6];

%% Condiciones iniciales del sistema
yf(1)=0; yf(2)=0; yf(3)=0; yf(4)=0; yf(5)=0;
y(1)=0; y(2)=0; y(3) = 0; y(4)=0; y(5)=0; y(6)=0;
r(1) =0; r(2) =0; r(3)=0; r(4)=0; r(5)=0;
u(1) =0; u(2) =0; u(3)=0; u(4)=0; u(5)=0;
du(1) =0; du(2) =0; du(3)=0; du(4)=0; du(5)=0;
alf =0.99; lambda =0.0; I=eye(5,5);
MM=1000;

%% Diseno del control
for t =6:MM+5;
    for k=1:N2
        W(t+k)=100; % Referencia deseada
    end

    % Referencia del control
r(t+0) = alf*r(t-1) + (1-alf)*W(t+0);
r(t+1) = alf*r(t+0) + (1-alf)*W(t+1);
r(t+2) = alf*r(t+1) + (1-alf)*W(t+2);
r(t+3) = alf*r(t+2) + (1-alf)*W(t+3);
r(t+4) = alf*r(t+3) + (1-alf)*W(t+4);
r(t+5) = alf*r(t+4) + (1-alf)*W(t+5);
r(t+6) = alf*r(t+5) + (1-alf)*W(t+6);
r(t+7) = alf*r(t+6) + (1-alf)*W(t+7);
r(t+8) = alf*r(t+7) + (1-alf)*W(t+8);
r(t+9) = alf*r(t+8) + (1-alf)*W(t+9);

```

$$r(t+10) = \text{alf} * r(t+9) + (1-\text{alf}) * W(t+10);$$

$$R = [r(t+1) \ r(t+2) \ r(t+3) \ r(t+4) \ r(t+5) \ r(t+6) \dots \\ r(t+7) \ r(t+8) \ r(t+9) \ r(t+10)]';$$

% Respuesta del sistema abierto

$$y_f(t) = (1-a_1) * y_f(t-1) - (a_2-a_1) * y_f(t-2) - (a_3-a_2) * y_f(t-3) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t-4) + a_4 * y_f(t-5) + b_1 * du(t-1) + b_2 * du(t-2) + b_3 * du(t-3) \dots \\ + b_4 * du(t-4);$$

$$y_f(t+1) = (1-a_1) * y_f(t) - (a_2-a_1) * y_f(t-1) - (a_3-a_2) * y_f(t-2) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t-3) + a_4 * y_f(t-4) + b_2 * du(t-1) + b_3 * du(t-2) \dots \\ + b_4 * du(t-3);$$

$$y_f(t+2) = (1-a_1) * y_f(t+1) - (a_2-a_1) * y_f(t) - (a_3-a_2) * y_f(t-1) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t-2) + a_4 * y_f(t-3) + b_3 * du(t-1) \dots \\ + b_4 * du(t-2);$$

$$y_f(t+3) = (1-a_1) * y_f(t+2) - (a_2-a_1) * y_f(t+1) - (a_3-a_2) * y_f(t) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t-1) + a_4 * y_f(t-2) \dots \\ + b_4 * du(t-1);$$

$$y_f(t+4) = (1-a_1) * y_f(t+3) - (a_2-a_1) * y_f(t+2) - (a_3-a_2) * y_f(t+1) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t) + a_4 * y_f(t-1);$$

$$y_f(t+5) = (1-a_1) * y_f(t+4) - (a_2-a_1) * y_f(t+3) - (a_3-a_2) * y_f(t+2) \dots \\ - (a_4-a_3) * y_f(t+1) + a_4 * y_f(t);$$

$$y_f(t+6) = (1-a_1)*y_f(t+5) - (a_2-a_1)*y_f(t+4) - (a_3-a_2)*y_f(t+3) \dots$$

$$-(a_4-a_3)*y_f(t+2) + a_4*y_f(t+1);$$

$$y_f(t+7) = (1-a_1)*y_f(t+6) - (a_2-a_1)*y_f(t+5) - (a_3-a_2)*y_f(t+4) \dots$$

$$-(a_4-a_3)*y_f(t+3) + a_4*y_f(t+2);$$

$$y_f(t+8) = (1-a_1)*y_f(t+7) - (a_2-a_1)*y_f(t+6) - (a_3-a_2)*y_f(t+5) \dots$$

$$-(a_4-a_3)*y_f(t+4) + a_4*y_f(t+3);$$

$$y_f(t+9) = (1-a_1)*y_f(t+8) - (a_2-a_1)*y_f(t+7) - (a_3-a_2)*y_f(t+6) \dots$$

$$-(a_4-a_3)*y_f(t+5) + a_4*y_f(t+4);$$

$$y_f(t+10) = (1-a_1)*y_f(t+9) - (a_2-a_1)*y_f(t+8) - (a_3-a_2)*y_f(t+7) \dots$$

$$-(a_4-a_3)*y_f(t+6) + a_4*y_f(t+5);$$

$$YF = [y_f(t+1) \ y_f(t+2) \ y_f(t+3) \ y_f(t+4) \ y_f(t+5) \ \dots$$

$$y_f(t+6) \ y_f(t+7) \ y_f(t+8) \ y_f(t+9) \ y_f(t+10)]';$$

% Ley de control

$$U = \text{inv}(GG' * GG + \text{lambda} * I) * GG' * (R - YF);$$

$$du(t) = U(1);$$

$$u(t) = u(t-1) + du(t);$$

% Respuesta final del proceso

$$y(t+1) = -a_1*y(t) - a_2*y(t-1) - a_3*y(t-2) - a_4*y(t-3) + \dots$$

$$b_1*u(t) + b_2*u(t-1) + b_3*u(t-2) + b_4*u(t-3) + \dots$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4;$$

end



```

%% Graficamos los resultados
ejex = linspace(0,MM*T,MM-4);
figure

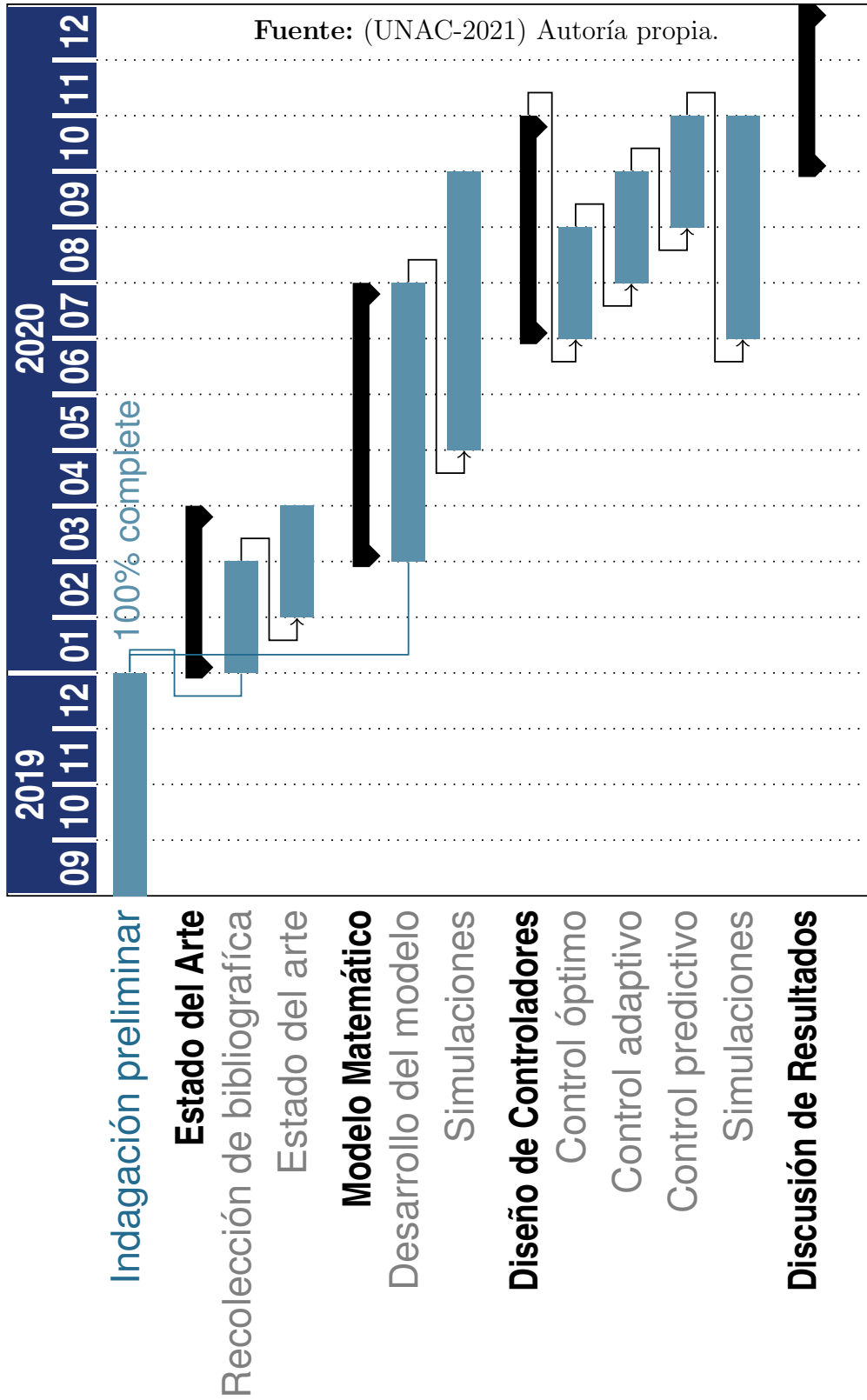
subplot(2,1,1)
plot(ejex,W(5:MM),ejex,y(5:MM)), grid
title('Control Predictivo Matricial')
ylabel('Flujo [m^3/dia]')
xlabel('t(seg)')

subplot(2,1,2),
plot(ejex,u(5:MM)), grid
ylabel('Torque [N-m]')
xlabel('t(seg)')

```

## Anexo C

# **CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES**



**Anexo D**

**PRESUPUESTO**

**Tabla 4:** Presupuesto de la investigación.

Nombre	Cantidad	Código	Costo (\$)
Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities	1	ISBN: 978-0-471-15654-3	US\$ 185.0
IEEE Professional Membership	2 year	2017 - 2018	US\$ 89.50
Materiales varios	1	-	US\$ 80.0
Otros	1	-	US\$ 100.0
<b>TOTAL:</b>			<b>US\$ 544.0</b>

**Fuente:** (UNAC-2021) Autoría propia.