UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUEVA CARRANZA YINO BETO

ASESOR: Sotelo Pejerrey Alfredo

ASESOR

CALLAO, 2021

PERÚ

Document Information

Analyzed document	Tesis Yino Cueva (1).pdf (D173042787)
Submitted	8/23/2023 3:30:00 AM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEM ´ ATICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEM ´ ATICA DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FEN ´ OMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO TESIS PARA OPTAR EL T ´ ITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEM ´ ATICA CUEVA CARRANZA YINO BETO CALLAO, 2021 PER ´ U

Yino Beto Cueva Carranza Bachiller Código: 073022E DNI: 44699938 Sotelo Pejerrey Alfredo Asesor Código: 1745 DNI: 45569296

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por: Mg. Wilfredo Mendoza Quispe Presidente Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega Vocal Mg. Jorge Luis Rojas Orbegoso Secretario Lic. Moisés Lázaro Carrión Miembro suplente Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey Asesor

DEDICATORIA A mis padres Manuel Cueva L´opez y Bertila Carranza Tafur, por darme la vi- da, por el inmenso cari˜no, por sus buenos consejos, por haberme inculcado buenos principios y por los ejemplos de perseverancia para hacer este sue˜no realidad. A mis hermanos Lidia, Higor y Sonia por la constante motivaci´on, apoyo y compren- si´on. A mis sobrinos, Jimena, Rosaemilia, Samir, Piero, Keilot y Silvia. A todos mis familiares y amigos por la ayuda que me brindaron. 1

AGRADECIMIENTO En primer lugar quisiera agradecer a mi querido asesor Mg. Sotelo Pejerrey Al- fredo, por sus grandes ense˜nanzas, por su paciencia, amistad, excelente orientaci´on, por la ayuda que me ha brindado para la realizaci´on de este trabajo y por ser un excelente profesional un ejemplo

a seguir. En segundo lugar quisiera agradecer a mi asesor de maestr´ıa Dr. Roberto Almeida Prado, por haber contribuido para la realizaci´on de este trabajo, por los buenos consejos y hacer de mi una mejor persona y un mejor profesional. Quisira agradecer de manera especial a los jurados de lasustentaci´on de la presente tesis conformado por los profesores: Wilfredo Mendoza Quispe, Dionicio Orlando Moreno Vega, Jorge Luis Rojas Orbegoso y Mois´es L´azaro Carri´on, quienes contri- buyeron con sus observaciones y sugerencias. Del mismo modo quisiera agradecer tambi´en a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matem´atica de la UNAC que compartieron sus conocimientos y sus consejos que contribuyeron a mi formaci´on. A todos mis amigos y compa˜neros de la UNAC con quienes compartimos muy bue- nos momentos y me ayudaron durante mi formaci´on. A todo el personal de FCNM que me ayudaron en todo y que hicieron mi estad´ıa en la UNAC sea muy f´acil. Un agradecimiento p´ostumo. A mi profesor de colegio Lic. Julca Melgarejo Hip´olito, por su amistad, por sus consejos y el gran legado que me dej´o como mi profesor de Matem´aticas. A todos ellos muchas gracias. 2

RESUMEN DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FEN ´ OMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO Cueva Carranza Yino Beto Marzo, 2020 Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey T´ıtulo obtenido: Licenciado en Matem´atica El presente trabajo tiene como objetivo principal estudiar la densidad de estados y el fen´omeno Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto multidimensional. Tal modelo constituye una familia de operadores de Schr¨odinger aleatorios y erg´odi- cos. Primeramente estudiamos propiedades espectrales,erg´odicas e determinamos expl´ıcitamente el espectro del modelo de Anderson, el cual es un conjunto no alea- torio P c.t.p.. Abordamos tambi´en condiciones de frontera simples, de Neumann y de Dirichlet para tales operadores actuando sobre el espacio l 2 restringido a cubos finitos. En seguida discutimos la medida densidad de estados con dos enfoques dife- rentes y la conexi´on con el espectro del modelo de Anderson, de manera m´as general con el espectro de un operador erg´odico, finalmente estudiamos el fen´omeno llamado Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, que describe el comportamiento asint´otico de la densidad integrada de estados pr´oximo al ´ınfimo (o supremo) del espectro. Palabras Claves: Modelo de Anderson discreto, Densidad de estados, Ergodicidad, Lifshitz tails. 5

ABSTRACT THE DENSITY OF STATES AND PHENOMENON LIFSHITZ TAIL FOR THE DISCRETE ANDERSON MODEL Cueva Carranza Yino Beto March-2020 Adviser: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey Degree obtained: Licentiate in Mathematics The present work have as main objective to study the density of states and phenomenon Lifshitz tails for the discrete multidimensional Anderson model. Such model constitutes a family of ergodic and random Schr¨odinger operators. First we study ergodic and spectral properties, and explicitly determine the spectrum of the Anderson model, which is a non- random set almost surely. We also deal with simple boundary conditions, Neumann and Dirichlet for such operators acting in the space l 2 restricted to finite cubes. Later we discuss the density of state measure with two different approaches and the connection between the spectrum of an ergodic operator and this measure. Finally, we study the phenomenon called Lifshitz tails for the discrete Anderson model, which describes the asymptotic behavior of the integrated density of states near the infimum (or supreme) of the spectrum. Keywords: Discrete Anderson model, Density of states, Ergodicity, Lifshitz tails. 6

INTRODUCCI ´ ON En las ´ultimas d´ecadas los operadores de Schr¨odinger ha llamado mucho la aten- ci´on a muchos investigadores del ´area de la F´ısica-Matem´atica. Tales operadores son usados para describir la evoluci´on del estado cu´antico de un sistema f´ısico. La ecuaci´on de Schr¨odinger que depende del tiempo dada por $i\partial_t \psi = H\psi$, (1) determina una evoluci´on din´amica del sistema dada por $\psi(t) = e^{itH}\psi(0)$ (es decir, la evoluci´on temporal del vector $\psi(t)$ en el espacio de Hilbert describe el movimiento del electr´on), donde H es el operador de Schr¨odinger sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ o $l^2(\mathbb{Z}^d)$, que es definido como una suma de operadores $H = H_0 + V$, donde H_0 el Laplaciano y V un potencial. Los operadores de Schr¨odinger se clasifican de acuerdo a la naturaleza de su potencial en peri´odicos, casi peri´odicos y aleatorios. Los operadores de Schr¨odinger con potenciales peri´odicos son modelos cu´anticos adecuados para estudiar cristales s´olidos perfectos y con potenciales casi peri´odicos para el estudio de casi cristales. Por otro lado los operadores de Schr¨odinger con potenciales aleatorios son usado como modelos para sistemas mec´anicos cu´anticos desordenados como por ejemplo s´olidos amorfos o l´ıquidos. El problema de localizaci´on de estados cu´anticos est´a siendo muy estudiado en los ´ultimos a˜nos, ese problema intenta explicar las propiedades de

v. Demostraci´on. Mostraremos el resultado para la medida ˜v L ; para ˜v N L y ˜v D L son an´alogos. Para mostrar que ˜v L converge para v es suficiente mostrar que Z φ(λ)d˜v L (λ) −−→ Z φ(λ)dv(λ) cuando L −−→ ∞, para toda φ de la forma φ(λ) = r z (λ) = 1 λ − z para z ∈ C \ R, 46
ya que la combinaci´on lineal de esas funciones es una subalgebra involutiva de C ∞ (R) que separa puntos (veja exemplo 1), consecuentemente es densa en C ∞ (R) por el Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 9). Note que Z r z (λ)d˜v L (λ) = 1 (2L + 1) d tr((H Λ L − z) −1) = 1 (2L + 1) d X n∈Λ L (H Λ L − z) −1 (n,n) y Z r z (λ)dv(λ) = 1 (2L + 1) d tr(χ Λ L (H − z) −1) = 1 (2L + 1) d X n∈Λ L (H − z) −1 (n,n). Usando la ecuaci´on del resolvente (16) y la relaci´on (40), tenemos para n ∈ Λ L :
(H Λ L − z) −1 (n,n) − (H − z) −1 (n,n) = (H Λ L − z) −1 (H − H Λ L)(H − z) −1 (n,n) = X (k,k ′)∈∂Λ L k∈Λ L ,k ′ ∈CΛ L (H Λ L − z) −1 (n,k) Γ Λ L (k,k ′) (H − z) −1 (k ′ ,n) con Γ Λ L (k,k ′) = −1, pues (k,k ′) ∈ ∂Λ L . De ah´ı, se sigue que | X n∈Λ L (H Λ L − z) −1 (n,n) − (H − z) −1 (n,n)| = | X n∈Λ L X (k,k ′)∈∂Λ L k∈Λ L ,k ′ ∈CΛ L (H Λ L − z) −1 (n,k) (H − z) −1 (k ′ ,n)| ⩽ X (k,k ′)∈∂Λ L k∈Λ L ,k ′ ∈CΛ L X n |(H Λ L − z) −1 (n,k)| 2 ! 1/2 · X n |(H − z) −1 (k ′
,n)| 2 ! 1/2 = X (k,k ′)∈∂Λ L k∈Λ L ,k ′ ∈CΛ L ‖(H Λ L − z) −1 δ k ‖ · ‖(H − z) −1 δ k ′ ‖ ⩽ cL d−1 ‖(H Λ L − z) −1 ‖ · ‖(H − z) −1 ‖ ⩽ c (Imz) 2 L d−1 , donde usamos la identidad de Parseval (Teorema 6). Por tanto, Z r z (λ)d˜v L (λ) − Z r z (λ)dv(λ)| ⩽ c ′ (Imz) 2 1 L −−→ 0 cuando L −−→ ∞. Como el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto C 0 (R) es denso en C ∞ (R) tenemos el resultado para toda φ ∈ C 0 (R). 47
5.1.5. Lifshitz Tails En este secci´on estudiaremos el fen´omeno llamado Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, el cual establece un decaimiento exponencial para la densidad integrada de estados N(E) cuando la energ´ıa E converge para el ´ınfimo (o supremo) del espectro. Referencias generales para este secci´on son [1,11,20,22,45,46]. Resultados Preliminares para la Densidade Integrada de Estados Comenzaremos enunciando y demostrando algunos resultados que ser´an utiliza- dos en esta secci´on. Teorema 17 Sea H ω una familia de operadores erg´odicos en l 2 (Z d) y (H L) L∈N una secesi´on de operadores tales que para ω P-c.t.p. se tiene 1. χ L H L = H L χ L ; 2. tr|χ L H L − χ L H ω | > = y l´ım L−→∞ 1 |Λ L | tr|χ L H L − χ L H ω | = 0. Entonces existe un conjunto Ω 0 con probabilidad 1 de modo que l´ım L−→∞ 1 |Λ L | tr χ L f(H L) = Z R f(u)dv(u) para toda f ∈ C 0 (R) e ω ∈ Ω 0 , donde v es la medida densidad de estados.
Demostraci´on. Definimos la medida u L por Z R f(u)du L (u) = 1 |Λ L | tr χ L f(H L). Para demostrar el teorema debemos mostrar que la medida u L converge para la medida v. Para eso es suficiente demostrar que Z f(u)du L (u) −−→ Z f(u)dv(u), cuando L −→
∞, para toda funci´on f de la forma f(u) = r z (u) = 1 u − z para z ∈ C \ R, ya que la combinaci´on lineal de esas funciones es una subalgebra involutiva de C ∞ (R) que separa puntos (vea ejemplo 1), consecuentemente es denso en C ∞ (R) por el Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 9). Usando que Z r z (u)du L (u) = 1 |Λ L | tr χ L (r z (H L)) y Z r z (u)dv L (u) = 1 |Λ L | tr χ L (r z (H ω)) 48
tenemos 1 |Λ L | tr χ L (r z (H L)) − 1 |Λ L | tr χ L (r z (H ω)) = 1 |Λ L | |tr χ L [r z (H L) − r z (H ω)]| = 1 |Λ L | |tr χ L [r z (H L)(H ω − H L)r z (H ω)]| ⩽ 1 |Λ L | |Imz| −2 tr|χ L (H ω − H L)| −−→ 0 , cuando L −→ ∞, donde utilizamos la ecuaci´on del resolvente y la desigualdad ‖r z (H)‖ ⩽ 1 |Imz| . As´ı, Z r z (u)du L (u) −
Z r z (u)dv L (u) −−→ 0, cuando L −→ ∞. Pero del Teorema 13 sabemos que existe un conjunto Ω 0 con probabilidad 1 de modo que Z r z (u)dv L (u) −−→ Z r z (u)dv(u) para todo ω ∈ Ω 0 . Luego, usando la desigualdad triangular tenemos Z r z (u)du L (u) − Z r z (u)dv(u) ≤ Z r z (u)du L (u) − Z r z (u)dv L (u) + Z r z (u)dv L (u) − Z r z (u)dv(u) lo que implica Z r z (u)du L (u) − Z r z (u)dv(u) −−→ 0, cuando L −→ ∞. Por tanto, concluimos que u L converge para la medida v P-c.t.p.. Corolario 4 Con las condiciones dadas en el Teorema 17 se tiene N(E) = l´ım L−→∞ u L ((−∞,E]) = l´ım L−→∞ 1 |Λ L | N(H L ,E) para ω P-c.t.p. y para todo E ∈ R. Demostraci´on. Inicialmente mostraremos el resultado para energ´ıas E, donde N(E) es continua. Como N es mon´otona creciente, por el Lema 3 el conjunto de los puntos de discontinuidad de N es como m´aximo numerable; de ah´ı existe un conjunto numerable S de puntos de continuidad de N denso en R. Como Z R f(u)du L (u) = 1 |Λ L | tr χ L f(H L), 49
entonces u L ((−∞,E]) = 1 |Λ L | tr χ L χ (−∞,E] (H L). Por el Teorema 17 existe un conjunto con probabilidad 1 tal que Z χ (−∞,E] (u)du L (u) −→ N(E) para todo E ∈ S. Luego, prosiguiendo de forma an´aloga como en el Corolario 2, cambiando la medida v L por la medida u L y usando la igualdad 1 |Λ L | N(H L
,E) = Z χ (−∞,E] (u)du L (u), se concluye la demostraci´on. Lema 5 Considere el modelo de Anderson H ω = H 0 + V ω . Para todo l < 0 y para cada E ∈ R se tiene 1 |Λ l | E[N(H D Λ l ,E)] ≤ N(E) ≤ 1 |Λ l | E[N(H N Λ l ,E)]. Demostraci´on. Para L < l < 0, consideremos el cubo Λ L grande siendo la uni´on disjunta de cubos peque˜nos Λ l,k con lado lateral l fijo. Por el Corolario 3 y Corolario 1 obtenemos X k N(H D Λ l,k ,E) ≤ N(H D Λ L ,E) ≤ N(H N Λ L ,E) ≤ X k N(H N Λ l,k ,E). Tomando la esperanza matem´atica, E[X k N(H D Λ l,k ,E)] ≤ E[N(H D Λ L ,E)] ≤ E[N(H N Λ L ,E)] ≤ E[X k N(H N Λ l,k ,E)]. Como existen
|Λ L | |Λ l | t´erminos independientes e id´enticamente distribuidos en cada suma, se sigue que |Λ L | |Λ l | E[N(H D Λ l ,E)] ≤ E[N(H D Λ L ,E)] ≤ E[N(H N Λ L ,E)] ≤ |Λ L | |Λ l | E[N(H N Λ l ,E)]. Dividiendo por Λ L , 1 |Λ l | E[N(H D Λ l ,E)] ≤ 1 |Λ L | E[N(H D Λ L ,E)] ≤ 1 |Λ L | E[N(H N Λ L ,E)] ≤ 1 |Λ l | E[N(H N Λ l ,E)]. Tomando el l´ımite cuando L −→ ∞ y aplicando el Corolario 4, se sigue el resultado. 50
Lema 6 Sea H ω = H 0 + V ω el modelo de Anderson. Para todo L < 0 y para cada E ∈ R se tiene 1 |Λ L | E[N(H N Λ L ,E)] ≤ P(E 0 (H N Λ L) > E) y 1 |Λ L | E[N(H D Λ L ,E)] ≥ 1 |Λ L | P(E 0 (H D Λ L) > E). Demostraci´on. Por la definici´on de N(H # Λ L ,E), donde # denota las condiciones de frontera, tenemos E[N(H # Λ L ,E)] = E? ? |Λ L |−1 X i=0 χ (−∞,E] (E i (H # Λ L)) ? ? = |Λ L |−1 X i=0 P(E i (H # Λ L) > E). Como P(E i (H # Λ L) > E) ≥ 0 tenemos E[N(H # Λ L ,E)] ≥ P(E 0 (H # Λ L)
> E). Por otro lado, P(E i (H # Λ L) > E) ≤ P(E 0 (H # Λ L) > E). De ah´ı, E[N(H # Λ L ,E)] ≤ |Λ L |P(E 0 (H # Λ L
) > E). El pr´oximo resultado es la desigualdad de Temple, que ser´a usada m´as adelante para obtener un l´ımite superior para la densidad integrada de estados N(E). Lema 7 (Desigualdade de Temple). Sean A un operador autoadjunto, E 0 = ´ınf σ(A) un valor propio no degenerado y E 1 = ´ınf(σ(A) \
{E 0 }). Se ψ ∈ D(A) con ‖ψ‖ = 1 satisfaciendo (ψ,Aψ) > E 1 entonces E 0 ≥ (ψ,Aψ) − (ψ,A 2 ψ) − (ψ,Aψ) 2 E 1 − (ψ,Aψ) . Demostraci´on. Por el teorema espectral tenemos (A − E 1)(A − E 0) ≥ 0. De ah´ı, para cualquier ψ ∈ D(A) con ‖ψ‖ = 1 se tiene (ψ,A 2 ψ) − E 1 (ψ,Aψ) − E 0 (ψ,Aψ) + E 1 E 0 ≥ 0. 51 Luego, E 1 E 0 − E 0 (ψ,Aψ) ≥ E 1 (ψ,Aψ) − (ψ,Aψ) 2 − ((ψ,A 2 ψ) − (ψ,Aψ) 2). Como E 1 − (ψ,Aψ) < 0, obtenemos E 0 ≥ (ψ,Aψ) − (ψ,A 2 ψ) − (ψ,Aψ) 2 E 1 − (ψ,Aψ) . Ahora pasaremos a demostrar el Teorema 1 (Lifshitz tails) enunciado anterior- mente en la introducci´on y para eso asumiremos las siguientes condiciones: 1. Las variables aleatorias (v ω (n)) n∈Z d son independientes id´enticamente distri- buidas, con distribuci´on com´un P O , cuyo soporte es limitado inferiormente, es decir, a O := ´ınf supp P O < ∞. Por el Teorema 3 tenemos E O := ´ınf σ(H ω) = a O . 2. La distribuci´on P O noes trivial, o sea, para alg´un C,κ < 0 y todo ε < 0 suficientemente peque˜no, P O ([a O ,a O + ε)) ≥ Cε κ . (49) 3. Sin p´erdida de generalidad, supongamos que E O = 0. Entonces, v ω (n) ≥ 0. Caso contrario, basta considerar el operador H ω − a O I en lugar de H ω . Con estas condiciones mostraremos el Teorema 1 en las pr´oximas dos secciones. Primero estableceremos un l´ımite superior para la densidad integrada de estados N(E) y despu´es un l´ımite inferior para N(E). L´ımite Superior En esta parte de la demostraci´on ser´a mostrado la siguiente desigualdad: l´ım sup E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) ≤ − d 2
. (50) Demostraci´on. Por los Lemas 5 y 6 tenemos N(E) ≤ 1 |Λ L | E(N(H N Λ L ,E)) ≤ P(E 0 (H N Λ L) > E). (51) Para estimar el ´ultimo t´ermino de la desigualdad anterior usaremos la desigualdad de Temple (Lema 7) con la funci´on ψ 0 dada por ψ 0 (n) = 1 |Λ L | 1/2 para todo n ∈ Λ L . 52
Note que (H 0) N Λ L ψ 0 = 0. En efecto, como (H 0) N Λ L = n∧ + A∧, tenemos ((H 0) N Λ L ψ 0)(n) = (n∧ ψ 0)(n) + (A∧ ψ 0)(n) = n∧ (n)ψ 0 (n) − X j:‖j−n‖ 1 =1 ψ 0 (j) = 0. Luego, (ψ 0 ,H N Λ L ψ 0) = (ψ 0 ,V ω ψ 0) = 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v ω (i). Por el Teorema erg´odico de Birkhoff (Teorema 4), l
´ım L−→∞ 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v ω (i) = E(v ω (0)) < 0 P − q. t.p.. Para aplicar la desigualdad de Temple necesitamos que 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v ω (i) > E 1 (H N Λ L), lo que no ocurre, pues l´ım L−→∞ E 1 (H N Λ L) = 0. En efecto, por el Corolario 1 y un c´alculo directo (vea [45]) se tiene E 1 (H N Λ L) ≥ E 1 ((H 0) N Λ L) ≥ cL −2 , (52) para alguna constante c < 0. Definimos entonces una nueva sucesi´on de potenciales v (L) ω (i) = m´ın n v ω (i), c 3 L −2 o . Para L fijo, las variables aleatorias v (L) ω (i) son independientes e id´enticamente dis- tribuidas con su distribuci´on dependiendo de L. Adem´as, si H (L) ω = (H 0) N Λ L + V (L) ω , con (V (L) ω u)(i) = v (L) ω (i)u(i), entonces por el Corolario 1, E 0 (H N Λ L) ≥ E 0 (H (L) ω). De la definici´on de V (L) ω se sigue que (ψ 0 ,H (L) ω ψ 0) = 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) ≤ c 3 L −2 . (53) De las relaciones (52) y (53) obtenemos (ψ 0 ,H (L) ω ψ 0) ≤ c 3 L −2 > E 1 ((H 0) N Λ L) ≤ E 1 (H (L) ω). 53
Ahora podemos aplicar la desigualdad de Temple (Lema 7) para ψ 0 y H (L) ω : E 0 (H N Λ L) ≥ E 0 (H (L) ω) ≥ (ψ 0 , H (L) ω ψ 0) − (ψ 0 , H (L) ω 2 ψ 0) cL −2 − (ψ 0 , H (L) ω ψ 0) ≥ 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) − 1 (2L + 1) d X i∈Λ L (v (L) ω (i)) 2 (c − c 3)L −2 ≥ 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) − 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) c 3 L −2 2 3 cL −2 ≥ 1 2 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i). (54) De las relaciones (51) y (54) tenemos N(E) ≤ P(E 0 (H N Λ L) > E) ≤ P 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! .
Usando el Lema 8 abajo tenemos N(E) ≤ P 1 (2L + 1) d X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! ≤ e −γ|Λ L | = e −γ(2[βE − 1 2]+1) d ≤ e
−γ(2[βE − 1 2] d +1) ≤ e −γ ′ E − d 2 , para alg´un γ ′ < 0. Aplicando el logaritmo natural en desigualdad, se tiene lnN(E) ≤ −γ ′ E − d 2 =⇒ ln| lnN(E)| ln(E) ≤ lnγ ′ − d 2 ln(E) ln(E) . Finalmente, tomando el limite superior se obtiene l´ım sup E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) ≤ − d 2 . Ahora vamos mostrar el resultado usado en la demostraci´on anterior. 54
Lema 8 Para L = [βE − 1 2] con β peque˜no y L suficientemente grande, temos P 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! ≤ e −γ|Λ L | (55) para alg´un γ < 0. Demostraci´on. Por hip´otesis L ≤ βE − 1 2 , lo que implica 2E ≤ 2β 2 L −2 . Entonces P 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! ≤ P 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2β 2 L −2 ! ≤ P ♯{i| v (L) ω (i) > c 3 L −2 } ≥ 1 − 6β 2 c |Λ L | , donde c es la constante de la relaci´on (52). En la ´ultima desigualdad usamos que ♯ n i| v (L) ω (i) > c 3 l −2 o > 1
− 6β 2 c |Λ L | =⇒ 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) ≥ 2β 2 L −2 . En efecto, si D := {i | v (L) ω (i) > c 3 L −2 } entonces 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) = 1 |Λ L | X i∈D v (L) ω (i) + 1 |Λ L | X i∈CD v (L) ω (i) ≥ 1 |Λ L | X i∈CD v (L) ω (i) ≥ 1 |Λ L | 6β 2 c |Λ L | c 3 L −2 = 2β 2 L −2 . Como P(v (L) ω (i) < 0) < 0, existe γ < 0 tal que q := P(v (L) ω (i) > γ) > 1. Defina ξ i = (1 si v (L) ω (i) > γ, 0 caso contrario. Las variables aleatorias ξ i son independientes e id´enticamente distribuidas. Adem´as, E(ξ i) = q. Sea r = 1 − 3β 2 c . Tomando β suficientemente peque˜no podemos garantizar que q > r > 1. Entonces, para L suficientemente grande tenemos P 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! ≤ P ♯{i| v (L) ω (i) > c 3 L −2 } ≥ r|Λ L | ≤ P ♯{i| v (L) ω
(i) > γ} ≥ r|Λ L | ≤ P 1 |Λ L | X i ξ i ≥ r ! . (56) 55
Por otro lado, para una variable aleatoria X se tiene P(X < a) ≤ e −ta E(e tX) para t ≥ 0. (57) En efecto, P(X < a) = Z χ {X<a} (ω)dP(ω) ≤ Z e −ta e tX χ {X<a} (ω)dP(ω) ≤ e −ta Z e tX dP. Luego, usando (57) con X = P i ξ i en la estimativa (56), obtenemos P 1 |Λ L | X i∈Λ L v (L) ω (i) > 2E ! ≤ P 1 |Λ L | X i ξ i ≥ r ! ≤ e |Λ L |rt E Y i∈Λ L e tξ i ! ≤ e |Λ L |rt E(e |Λ L |ξ 0) = e |Λ L |(rt−ln E(e tξ 0)) . (58) Sea f(t) = rt − lnE(e tξ 0). Mostremos que existe t < 0 tal que f(t) < 0, de donde se sigue el resultado. En efecto, f ′ (t) = r − E(ξ 0 e tξ 0) E(e tξ 0) . Luego f ′ (0) = r − q < 0 y como f(0) = 0, entonces existe t < 0 tal que f(t) < 0. L´ımite Inferior En esta parte mostraremos la siguiente desigualdad: l´ım inf E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) ≥ − d 2 . (59) Demostraci´on. Por los Lemas 5 y 6 tenemos N(E) ≥ 1 |Λ L | E(N(H D Λ L E)) ≥ 1 |Λ L | P(E 0 (H D Λ L) > E). (60) Por el principio min-max (Teorema 8) E 0 (H D Λ L) ≤ (ψ,H D Λ L ψ) = (ψ, (H 0) D Λ L ψ) + X i∈Λ L v ω (i)|ψ(i)| 2 (61) 56
para cualquier ψ con ‖ψ‖ = 1. Ahora trataremos de minimizar el lado derecho de (61). Comenzaremos por el t´ermino (ψ, (H 0) D Λ L ψ), para el cual tomamos ψ(n) = 1 ‖ψ 1 ‖ ψ 1 (n), con ψ 1 (n) = L − ‖n‖ ∞ , n ∈ Λ L . Para n ∈ Λ L 2 tenemos que L − ‖n‖ ∞ ≥ L 2 . Entonces, X n∈Λ L |ψ 1 (n)| 2 ≥ X n∈Λ L 2 |ψ 1 (n)| 2 ≥ |Λ L 2 | L 2 2 ≥ cL d+2 , (62) para alguna constante c < 0. Por otro lado, usando la forma cuadr´atica de (H 0) Λ L se tiene (ψ 1 , (H 0) D Λ L ψ 1) = (ψ 1 , (H 0) Λ L ψ 1) +
(ψ 1 , (2d − n∧) ψ 1) ≤ X (n,n ′)∈Λ L ‖n−n ′ ‖ 1 =1 |ψ 1 (n) − ψ 1 (n ′) − ψ 1 (n)| 2 ≤ |{(n,n ′) ∈ Λ L × Λ L : ‖n − n ′ ‖ 1 = 1}| ≤ c 1 L d,
(63) donde utilizamos que |ψ 1 (n) − ψ 1 (n ′)| ≤ 1 si ‖n − n ′ ‖ 1 = 1. De las relaciones (62) y (63) obtenemos E 0 ((H 0) D Λ L) ≤ (ψ 1 , (H 0) D Λ L ψ 1) (ψ 1 ,ψ 1) ≤ c 0 L −2 , (64) para la constante c 0 = c 1 c < 0. Usando (60), (61) y (64) se sigue que N(E) ≥ 1 |Λ L | P X i∈Λ L v ω (i)|ψ(i)| 2 > E − c 0 L −2 !
≥ 1 |Λ L | P ? ? ? c 2 |Λ L | X i∈Λ L 2 v ω (i) > E − c 0 L −2 ? ? ? ≥ 1 |Λ L | P para todo i ∈ Λ L 2 , v ω (i) > 1 c 2 (E − c 0 L −2) = 1 |Λ L | P v ω (0) > 1 c 2 (E − c 0 L −2) |Λ L 2 | ≥ 1 |Λ L | P 0 ([0,E/2)) c 3 L d . 57
Ahora usando la hip´otesis (49) con ε = E/2 se tiene N(E) ≥ c 4 L −d E c 3 κL d = c 4 L −d e (ln E)c 3 κL d , (65) para constantes c 3 ,c 4 < 0. Tomando L = r 2c 0 E tenemos N(E) ≥ c ′ 4 E d/2 e c ′ 3 (ln E)E −d/2 , (66) con constantes c ′ 3 ,c ′ 4 < 0. Aplicando el logaritmo natural y usando que 0 > N(E)
≤ 1, se sigue que lnN(E) ≥ lnc ′ 4 + lnE d/2 + c ′ 3 (lnE)E −d/2 =⇒ | lnN(E)| ≤ | lnc ′ 4 | + | lnE d/2 | + |c ′ 3 (lnE)E −d/2 | =⇒ ln| lnN(E)| lnE ≥ ln | lnc ′ 4 | + | lnE d/2 | + |c ′ 3 (lnE)E −d/2 | lnE . Como ln(a + b) ≥ 1 2 (lna + lnb) para todo a,b < 0, entonces ln| lnN(E)| lnE ≥ ln(| lnc ′ 4 | + | lnE d/2 |) + ln(|c ′ 3 (lnE)E
−d/2 |) 2 lnE ≥ ln| lnc ′ 4 | 4 lnE + ln| lnE d/2 | 4 lnE + ln(|c ′ 3 (lnE)E −d/2 |) 2 lnE . Tomando el l´ımite inferior tenemos l´ım inf E↘0 ln| lnN(E)| lnE ≥ l´ım inf E↘0 ln| lnc ′ 4 | 4 lnE + ln| lnE d/2 | 4 lnE + ln(|c ′ 3 (lnE)E −d/2 |) 2 lnE =⇒ l´ım inf E↘0 ln| lnN(E)| lnE ≥ − d 2 . De los l´ımites superior (50) e inferior
(59) obtenidos en las Secciones 6.2 y 6.3 concluimos que − d 2 ≤ l´ım inf E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) ≤ l´ım sup E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) ≤ − d 2 , lo que implica l´ım E↘0 ln| lnN(E)| ln(E) = − d 2 , como quer´ıamos demostrar. 5.2. Resultados inferenciales No aplica ya que el presente trabajo est´a inmerso en la matem´atica abstracta. 5.3. Otro tipo de resultados estad´ısticos No existen resultados con estas caracter´ısticas. 58
VI. DISCUSI ´ ON DE RESULTADOS 6.1. Contrastaci´on y demostraci´on de la hip´otesis con los resultados En la Secci´on 5.1.5, usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet demostramos el Teorema 1 para el modelo de Anderson discreto y en la secci´on 5.1.4, usando resultados dela teor´ıa de probabilidad y de c´alculo espectral estudiamos las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Aplicando los resultados de la teor´ıa de probabilidad y de an´alisis funcional demostramos el Teorema 3, que nos dice que el espectro de modelo de Anderson discreto es un conjunto no aleatorio casi siempre. En la Secci´on 5.1.4, usando el teorema erg´odico de Birkhoff demostramos la existencia de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson dis- creto. Basado en la teor´ıa erg´odica demostramos la Proposici´on 6, dicho resultado muestra que el modelo de Anderson discreto es erg´odico. 6.2. Contrastaci´on de los resultados con otros estudios si- milares Un estudio similar del Teorema 1 fue realizado por Kirsch y Martinelli [21], estos autores realizaron la prueba de dicho teorema para el modelo de Poisson, el cual es un modelo similar al modelo de Anderson discreto. Otro estudio similar fue hecho por Barry Simon [45], dicho autor demuestra el mismo teorema para el modelo de Anderson discreto, pero con un enfoque diferente al realizado en el presente trabajo. Otros estudios similares del fen´omeno Lifshitz tails para diferentes tipos de opera- dores pueden ser encontrados en las siguientes referencias [1], [22], [46], [49]. Por otro lado un estudio similar de la demostraci´on de existencia de la densidad de estados y sus propiedades podemos encontrar en el trabajo hecho por Pastur [37], quien muestra la existencia bas´andose en la transformada de Laplace de la densi- dad integrada de estados y la demostraci´on v´ıa l´ımite termodin´amico fue hecho por Avron y Simon [3] para operadores casi peri´odicos. Un estudio similar del espectro del operador fue hecho por Elgart, Kr¨uger, Tau- tenhahn y Vesel´ıc [50], dichos autores calcularon el espectro para la familia de operadores de Schr¨odinger aleatorios discretos con potencial de tipo aleaci´on, dado por H ω = H 0 + λV ω , donde λ < 0. Esta familia de operadores es llamado tambi´en modelo discreto de tipo aleaci´on. Es interesante observar que el modelo discreto de tipo aleaci´on y como el modelo de Anderson discreto estudiado en el presente trabajo tienen por espectro el mismo conjunto [0, 4d] + supp P 0 , q.t.p. 59
Una prueba alternativa para el Teorema 3, que describe la forma que tiene el espectro del modelo de Anderson discreto es realizado por Staffer y puede ser en- contrado en [46], otra prueba para el mismo teorema lo entramos tambi´en en [10]. Un estudio similar de los resultados de ergodicidad y particularmente que el modelo de Anderson discreto es erg´odico lo podemos encontrar en las siguientes referencias [10,24,29,33]. 6.3. Responsabilidad ´etica de acuerdo a los reglamentos vi- gentes De acuerdo con los principios establecidos en el C´odigo de ´etica de investigaci´on de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resoluci´on del Consejo Univer- sitario N◦ 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigaci´on se respet´o y cumpli´o con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actu´o con todo el rigor cient´ıfico para la validaci´on, fiabilidad y credibilidad de los m´etodos y fuentes de consulta utilizados ejerci´endose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminaci´on. 60
CONCLUSIONES En el presente trabajo estudiamos el modelo de Anderson discreto d-dimensional, el cual es una familia de operadores Schr¨odinger aleatorios que aparecen en determi- nados problemas de la F´ısica-Matem´atica, y mostramos que tales operadores tienen como espectro un conjunto no aleatorio P c. t.p.. Estudiamos tambi´en algunas propie- dades de operadores erg´odicos, la ergodicidad del modelo de Anderson y condiciones de frontera simple, de Neumann y de Dirichlet para tales operadores actuando sobre el espacio l 2 restringido a cubos finitos. Posteriormente estudiamos la medida den- sidad de estados para el modelo de Anderson discreto, donde vimos sus propiedades principales entre ellos destacamos la continuidad de la densidad integrada de estados (Teorema 15). Finalmente establecemos el fen´omeno Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet para obtener limites superior e inferior respectivamente, para la densidad integrada de estados. Por otro lado vale la pena mencionar los siguientes puntos: 1. En el presente trabajo solo hemos demostrado el Teorema 1 cuando la energ´ıa E converge al ´ınfimo del espectro, sin embargo, el resultado es v´alido cuando la energ´ıa E converge al supremo del espectro (v´ease [45]) 2. En este trabajo estudiamos las propiedades principales de la densidad de esta- dos y la densidad integrada de estados, entre ellos estudiamos la continuidad de la densidad integrada de estados (Teorema 15), no obstante, es importante comentar que la densidad integrada de estados es log-H¨older continua (vea [8]). 3. La log-H¨older continuidad de la densidad integrada de estados, son tratados por separado. Primero para el caso unidimensional, para el cual se usa la F´ormula de Thouless, pues es posible definir exponentes de Lyapunov en este caso y para el caso multidimensional el abordaje es diferente (vea [8]). 4. Otra propiedad importante que no fue desarrollado en este trabajo y que va- le la pena mencionar es el hecho que para el modelo de Anderson discreto unidimensional, la densidad integrada de estados es H¨older continua, esto es |N(E 1) − N(E 2)| ≤ C|E 1 − E 2 | α para alg´un α < 0 (vea [30]). 61
RECOMENDACIONES Para el desarrollo de este trabajo se us´o como base la referencia [20], por lo tanto se recomienda al lector interesado en este asunto tal referencia para ampliar los temas tratados en esta tesis. Un libro reciente y muy completo con los temas tratados en el presente trabajo es el libro titulado Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics, de los autores Aizenman y Warzel (vea [1]), con el cual se puede complementar esta tesis. Algunos de los art´ıculos que pueden ser revisados, para profundizar los temas abordados en este trabajo son las siguientes referencias: [22], [32], [44], [45], [46], [49]. Una continuaci´on a este trabajo, para futuros estudiantes que tengan inter´es de continuar esta linea de investigaci´on, puede ser estudiar el modelo de Anderson discreto unidimensional, ya que este modelo tiene mas propiedades y se puede estudiar resultados como la f´ormula de Thoules, que relaciona la densidad integrada de estados con el exponente de Lyapunov. Tales resultados pueden ser encontrados en [10,12,26,27,47]. Como trabajo futuro in´edito podemos extender los resultados estudiados en esta tesis para una clase de operadores de Dirac aleatorios, llamado modelo de Dirac Anderson discreto, estudiada recientemente en [39]. 62
REFERENCIAS BIBLIOGR ´ AFICAS [1] Aizenman, M., and Warzel, S. Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics. American Mathematical Society, 2015. [2] Anderson, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. Physical review 109, 5 (1958), 1492. [3] Avron, J., and Simon, B. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic jacobi matrices. Bulletin of the American Mathematical Society 6, 1 (1982), 81–85. [4] Bauer, H. Measure and Integration Theory, vol. 26. Walter de Gruyter, 2001. [5] Carmona, R., and Lacroix, J. Spectral Theory of Random Schr¨odinger Operators. Springer Science and Business Media, 2012. [6] Cohn, D. L. Measure Theory, vol. 165. Springer, 1980. [7] Conway, J. B. A Course in Functional Analysis, vol. 96. Springer Science and Business Media, 2013. [8] Craig, W., and Simon, B. Log h¨older continuity of the integrated density of states for stochastic jacobi matrices. Communications in Mathematical Physics 90, 2 (1983), 207–218. [9] Craig, W., Simon, B., et al. Subharmonicity of the lyapunov index. Duke Mathematical Journal 50, 2 (1983), 551–560. [10] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W., and Simon, B. Schr¨odinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1987. [11] Cueva Carranza, Yino Beto. Densidade de Estados para o Modelo de Anderson Discreto. Universidade Estadual Paulista (Unesp) (2019). [12] Damanik, D. Lyapunov exponents and spectral analysis of ergodic schr¨odinger operators: A survey of kotani theory and its applications. Spectral Theory and Mathematical Physics (2007). [13] de Oliveira, C. R. Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics. Progress in Mathematical Physics, Birkh¨auser, Basel, 2009.
[14] de Oliveira, C. R. Introdu¸c˜ao `a An´alise Funcional. primeira edi¸c˜ao, IMPA, Rio de Janeiro, 2012. [15] del Rio, R. Spectra of random operators with absolutely continuous integra- ted density of states. Journal of Mathematical Physics 55, 4 (2014), 042105. [16] Donsker, M., and Varadhan, S.
Asymptotics for the wiener sausage. Communications on Pure and Applied Mathematics 28, 4 (1975), 525–565. 63
[17] Heywood, P. Subharmonic functions, vol. 1. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 21, 1 (1978), 91–91. [18] Kaminaga, M., Krishna, M., and Nakamura, S. A note on the analyticity of density of states. Journal of Statistical Physics 149, 3 (2012), 496–504. [19] Kirsch, W. Random schr¨odinger operators : a course. In Schr¨odinger opera- tors. Springer, 1989, pp. 264–370. [20] Kirsch, W. An invitation to random schr¨odinger operators. Panor. Synth`eses Soci´et´e Math´ematique de France 25 (2008), 1–119. [21] Kirsch, W., and Martinelli, F. Large deviations and lifshitz singularity of the integrated density of states of random hamiltonians. Communications in Mathematical Physics 89, 1 (1983), 27–40. [22] Kirsch, W., and Metzger, B. The integrated density of states for random schr¨odinger operators. Spectral Theory and Mathematical Physics (2006). [23] Kowalski, E. Spectral theory in hilbert spaces. ETH Z¨urich (2009). [24] Krengel, U. Ergodic Theorems, vol. 6. Walter de Gruyter, 2011. [25] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, vol. 1. wiley New York, 1978. [26] Kr ¨ uger, H. Multiscale analysis for ergodic schr¨odinger operators and posi- tivity of lyapunov exponents. Journal d'Analyse Math´ematique 115, 1 (2011), 343–387. [27] Kr ¨ uger, H., and Gan, Z. Optimality of log h¨older continuity of the integra- ted density of states. Mathematische Nachrichten 284, 14-15 (2011), 1919–1923. [28] Lamperti, J. Probability. A Survey of the Mathematical Theory. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 1996. [29] Lamperti, J. Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory, vol. 23. Springer Science and Business Media, 2012. [30] LePage, E. Empirical distribution of the eigenvalues of a jacobi matrix. Probability measures on groups, VII, Springer Lecture Notes Series 1064 (1964), 309–367. [31] Levin, B. Y. Lectures on Entire Functions, vol. 150. American Mathematical Soc., 1996. [32] Lifshitz, I. M. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. Physics-Uspekhi 7, 4 (1965), 549–
573. [33] Lindgren, G. Lectures on stationary stochastic processes. PhD course of Lunds University (2006). 64
[34] Nakao, S. On the spectral distribution of the schr¨odinger operator with ran- dom potential. Japanese journal of mathematics. New series 3, 1 (1977), 111–139. [35] Oliveira, K., and Viana, M. Fundamentos da teoria erg´odica. Rio de Janeiro: SBM, Vol. 90 (2014). [36] Pastur, L. Behavior of some wiener integrals as t −→ ∞ and the density of states of schr¨odinger equations with random potential. Theoretical and Mathe- matical Physics 32, 1 (1977), 615–620. [37] Pastur, L. A. Spectra of random self adjoint operators. Russian mathematical surveys 28, 1 (1973), 1. [38] Prado, R. A., and De Oliveira,
C. R. Dynamical lower bounds for 1d dirac operators. Mathematische Zeitschrift 259, 1 (2008), 45–60. [39] Prado, R. A. and de Oliveira, C. R. and Carvalho, S. L .Dynami- cal Localization for Discrete Anderson Dirac Operators Journal of Statistical Physics, 167 (2017), 260–296. [40] Reed, M., and Simon,
B. Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, New York, 1975. [41] Reed, M., and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1978. [42] Reed, M., and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis. Academic Press, New York, 1980. [43] Retherford, J. R. Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem, vol. 27. Cambridge University Press, 1993. [44] Schlag, W. On discrete schr¨odinger operators with stochastic potentials. In XIVth International Congress on Mathematical Physics (2006), World Scienti- fic, pp. 206–215. [45] Simon, B. Lifschitz tails for the anderson model. Journal of Statistical Physics 38, 1-2 (1985), 65–76. [46] Staffler, B. Lifshitz tails for random band matrices. Master's thesis, Ludwig Maximilian University of Munich, Munich, 2013. [47] S ¨ ut ¨ o, A. Schr¨odinger difference equation with deterministic ergodic potentials. In Beyond quasicrystals. Springer, 1995, pp. 481–549. [48] Teschl, G. Mathematical methods in quantum mechanics wuth applications to schr¨odinger operators, 2009. [49] Veselic, I. Integrated density of states and wegner estimates for random schr¨odinger operators. Contemp. Math, Vol.40 pp 97–183 (2003). 65
[50] Elgart, Alexander and Kr ¨ uger, Helge and Tautenhahn, Martin and Veseli ´ c, Ivan Discrete Schr¨odinger operators with random alloy-type potential. Spectral analysis of quantum Hamiltonians, Springer , pp 107–131 (2012). 66 ANEXOS Matriz de consistencia 67
Problema Objetivos Hip´otesis Metodolog´ıa Poblaci´on 1.1. Descripci´on de la realidad problem´atica. El intervalo previsible de los espectros de los operadores con potenciales aleatorios muchas veces no concuerda con el calculado v´ıa m´etodo num´eri- co. La raz´on est´a en el interesante fen
´omeno llamado Lifshitz tails. 1.2. Formulaci´on del problema. 1.2.1 Problema General. ¿Ser´a posible demostrar el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados N(E) cuando la energ´ıa E est´a pr´oximo al ´ınfimo del espectro de H ω y estudiar propiedades princi- pales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discre- to?. 1.2.1 Problemas espec´ıficos. Estudiar propieda- des espectrales pa- ra los operadores de Schr¨odinger aleato- rios discretos. Mostrar la existen- cia de la densidad de estados para el modelo de Ander- son discreto. Mostrar que el mo- delo de Anderson discreto es erg´odi- co. Objetivo Gene- ral. Demostrar el de- caimiento exponen- cial de la densidad integrada de esta- dos N(E) cuando la energ´ıa E est´a pr´oximo al ´ınfimo del espectro de H ω y estudiar las pro- piedades principa- les de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Objetivos es- pec´ıficos. 1. Estudiar propie- dades espectrales para los operadores de Schr¨odinger aleatorios discretos. 2. Mostrar a exis- tencia de la densi- dad de estados pa- ra el modelo de An- derson discreto. 3. Mostrar que el modelo de An- derson discreto es erg
´odico. Hip´otesis gene- ral. Usando las condi- ciones de frontera de Neumann y de Dirichlet demostra- remos el decaimien- to exponencial de la densidad integra- da de estados N(E) cuando la energ´ıa E est´a pr´oximo al´ınfi- mo del espectro de H ω y usando resul- tados de la teor´ıa de probabilidad y de c´alculo espectral es- tudiaremos las pro- piedades principa- les de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Hip´otesis es- pec´ıfica. Aplicando los resul- tados de la teor´ıa de probabilidad y de an´alisis funcio- nal mostraremos que el espectro de modelo de Ander- son discreto es un conjunto no aleato- rio casi siempre. Usando el Teore- ma erg´odico de Birkhoff demostra- remos la existencia de la medida den- sidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Basado en la teor´ıa erg´odica demostra- remos que el mode- lo de Anderson dis- creto es erg´odico. Tipo de la in- vestigaci´on. El ti- po de investigaci´on desarrollado en este trabajo es B´asica. Dise˜no de la investigaci´on. comenzaremos presentando defi- niciones y algunos resultados b´asicos de an´alisis funcio- nal. En segundo lugar, introducire- mos el modelo de Anderson discreto, seguidamente desa- rrollaremos algunas definiciones y resul- tados de la teor´ıa erg´odica, luego pasaremos a estu- diar los conceptos m´as importantes de este trabajo, la medida densidad de estados y la densidad integrada de estados, Final- mente mostraremos el objetivo prin- cipal del presente trabajo el Teorema 1 para el modelo de Anderson discreto. 4.3. Poblaci´on y muestra. No apli- ca para este tipo de investigaci´on. 68

Hit and source - focused comparison, Side by Side

Submitted text	As student entered the text in the submitted document.
Matching text	As the text appears in the source.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el ID https://meet.google.com/xwx-ebph-taf mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 10:05 horas del día Viernes 02 de Julio del año dos mil veintiuno, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **CUEVA CARRANZA YINO BETO,** Titulada "**DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO"** Jurado que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe	Presidente
Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega	Vocal
Mg. Jorge Luis Rojas Orbegoso	Secretario
Lic. Moises Lázaro Carrion	Suplente

Luego de la Instalación, el Secretario del Jurado dio lectura a la Resolución Decanal N° 045-2021-FCNM, que designa a los miembros del Jurado de Sustentación de la Tesis.

A continuación, se dio inicio a la Exposición del Trabajo de Tesis de Acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30-10-2018.

Culminado el acto de exposición virtual de la tesis, los señores miembros del Jurado procedieron a formular las preguntas, las mismas que fueron absueltas.

Luego de un cuarto intermedio para la deliberación en privado del Jurado, con la participación con voz del asesor, y después de calificar el Trabajo de Tesis, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller CUEVA CARRANZA YINO BETO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del Citado reglamento, a continuación se indica.

Calificación cuantitativa	Calificación Cualitativa
17	Muy buena

Finalmente, el Secretario del Jurado procedió a redactar y dar lectura al acta de sustentación del trabajo de tesis.

Siendo las 11:48 horas del día viernes 02 de julio del año dos mil veintiuno, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación virtual de la tesis.
En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas.

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Vocal

Mg. Jorge Luis Rojas Orbegoso
Secretario

Lic Moises Lázaro Carrion
Miembro Suplente

Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Wilfredo Mendoza Quispe
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Vocal

Mg. Jorge Luis Rojas Orbegoso
Secretario

Lic. Moisés Lázaro Carrión
Miembro suplente

Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor

DEDICATORIA

A mis padres Manuel Cueva López y Bertila Carranza Tafur, por darme la vida, por el inmenso cariño, por sus buenos consejos, por haberme inculcado buenos principios y por los ejemplos de perseverancia para hacer este sueño realidad. A mis hermanos Lidia, Higor y Sonia por la constante motivación, apoyo y comprensión. A mis sobrinos, Jimena, Rosaemilia, Samir, Piero, Keilot y Silvia. A todos mis familiares y amigos por la ayuda que me brindaron.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar quisiera agradecer a mi querido asesor Mg. Sotelo Pejerrey Al- fredo, por sus grandes enseñanzas, por su paciencia, amistad, excelente orientacion, por la ayuda que me ha brindado para la realización de este trabajo y por ser un excelente profesional un ejemplo a seguir.

En segundo lugar quisiera agradecer a mi asesor de maestr´ıa Dr. Roberto Almeida Prado, por haber contribuido para la realización de este trabajo, por los buenos consejos y hacer de mi una mejor persona y un mejor profesional.

Quisira agradecer de manera especial a los jurados de la sustentación de la presente tesis conformado por los profesores: Wilfredo Mendoza Quispe, Dionicio Orlando Moreno Vega, Jorge Luis Rojas Orbegoso y Moisés Lázaro Carrión, quienes contribuyeron con sus observaciones y sugerencias.

Del mismo modo quisiera agradecer también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC que compartieron sus conocimientos y sus consejos que contribuyeron a mi formación.

A todos mis amigos y compañeros de la UNAC con quienes compartimos muy buenos momentos y me ayudaron durante mi formación.

A todo el personal de FCNM que me ayudaron en todo y que hicieron mi estad´ıa en la UNAC sea muy fácil.

Un agradecimiento póstumo. A mi profesor de colegio Lic. Julca Melgarejo Hipólito, por su amistad, por sus consejos y el gran legado que me dejó como mi profesor de Matemáticas.

A todos ellos muchas gracias.

ÍNDICE

RESUMEN

DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO

Cueva Carranza Yino Beto

Marzo, 2020

Asesor: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Título obtenido: Licenciado en Matemática

El presente trabajo tiene como objetivo principal estudiar la densidad de estados y el fenómeno Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto multidimensional. Tal modelo constituye una familia de operadores de Schrödinger aleatorios y ergódicos. Primeramente estudiamos propiedades espectrales,ergódicas e determinamos expl´ıcitamente el espectro del modelo de Anderson, el cual es un conjunto no aleatorio $\mathbb{P}$ c.t.p.. Abordamos también condiciones de frontera simples, de Neumann y de Dirichlet para tales operadores actuando sobre el espacio l^2 restringido a cubos finitos. En seguida discutimos la medida densidad de estados con dos enfoques diferentes y la conexión con el espectro del modelo de Anderson, de manera más general con el espectro de un operador ergódico, finalmente estudiamos el fenómeno llamado Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, que describe el comportamiento asintótico de la densidad integrada de estados próximo al ínfimo (o supremo) del espectro.

Palabras Claves: *Modelo de Anderson discreto, Densidad de estados, Ergodicidad, Lifshitz tails*.

ABSTRACT

THE DENSITY OF STATES AND PHENOMENON LIFSHITZ TAIL FOR THE DISCRETE ANDERSON MODEL

Cueva Carranza Yino Beto

March-2020

Adviser: Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Degree obtained: Licentiate in Mathematics

The present work have as main objective to study the density of states and phenomenon Lifshitz tails for the discrete multidimensional Anderson model. Such model constitutes a family of ergodic and random Schrödinger operators. First we study ergodic and spectral properties, and explicitly determine the spectrum of the Anderson model, which is a non-random set almost surely. We also deal with simple boundary conditions, Neumann and Dirichlet for such operators acting in the space l^2 restricted to finite cubes. Later we discuss the density of state measure with two different approaches and the connection between the spectrum of an ergodic operator and this measure. Finally, we study the phenomenon called Lifshitz tails for the discrete Anderson model, which describes the asymptotic behavior of the integrated density of states near the infimum (or supreme) of the spectrum.

Keywords: *Discrete Anderson model, Density of states, Ergodicity, Lifshitz tails*.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas los operadores de Schrödinger ha llamado mucho la atención a muchos investigadores del área de la Física-Matemática. Tales operadores son usados para describir la evolución del estado cuántico de un sistema físico. La ecuación de Schrödinger que depende del tiempo dada por

$$i\partial_t\psi = H\psi, \tag{1}$$

determina una evolución dinámica del sistema dada por $\psi(t) = e^{itH}\psi(0)$ (es decir, la evolución temporal del vector $\psi(t)$ en el espacio de Hilbert describe el movimiento del electrón), donde H es el operador de Schrödinger sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ o $l^2(\mathbb{Z}^d)$, que es definido como una suma de operadores $H = H_0 + V$, donde H_0 el Laplaciano y V un potencial.

Los operadores de Schrödinger se clasifican de acuerdo a la naturaleza de su potencial en periódicos, casi periódicos y aleatorios. Los operadores de Schrödinger con potenciales periódicos son modelos cuánticos adecuados para estudiar cristales solidos perfectos y con potenciales casi periódicos para el estudio de casi cristales. Por otro lado los operadores de Schrödinger con potenciales aleatorios son usado como modelos para sistemas mecánicos cuánticos desordenados como por ejemplo sólidos amorfos o líquidos.

El problema de localización de estados cuánticos está siendo muy estudiado en los últimos años, ese problema intenta explicar las propiedades de transporte de un electrón en un sólido amorfo. El modelo básico para el estudio de esa propiedad es el modelo propuesto por el físico Anderson en 1958, que describe los efectos de la mecánica cuántica de desorden presentes en las ligas de metales y medios cuya estructura no tiene un orden es decir, no poseen estructuras atomicas definidas, tal modelo es llamado modelo de Anderson que fue presentado por primera vez en [2].

Anderson percibió que el transporte de un electrón era suprimido debido al desorden, y así impurezas aleatorias podían transformar a los conductores en aislantes; en términos matemáticos significa que ciertas partes del espectro del operador energía potencial consiste de de espectro puro punto, ya que el significado físico del espectro es como sigue: Espectro absolutamente continuo (transporte), espectro singular continuo (transporte parcial), espectro puro punto (ausencia de transporte).

En este trabajo estudiaremos una clase de operadores de Schrödinger aleatorios sobre el espacio $l^2(\mathbb{Z}^d)$ denominada modelo de Anderson discreto, donde el espacio $l^2(\mathbb{Z}^d)$ es definido por

$$l^2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Ahora vamos a introducir el modelo de Anderson discreto que será uno de los objetos de estudio de este trabajo (ver [19]).

Definición 1 *Dado el espacio de probabildad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Para* $\omega \in \Omega$, *el modelo de Anderson discreto d-dimensional,* $d \geq 1$, *es la familia de operadores de Schrödinger aleatorios*

$$H_\omega = H_0 + V_\omega, \tag{2}$$

actuando sobre el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$*, siendo* H_0 *el Laplaciano discreto dado por*

$$(H_0u)(n) := -\sum_{m:\|m-n\|_1=1}(u(m)-u(n)), \tag{3}$$

donde $\|.\|_1$ *es la norma de la suma y cada* V_ω *es un potencial aleatorio actuando sobre* $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ *como operador de multiplicación, esto es,* $(V_\omega u)(n) = v_\omega(n)u(n)$*, donde* $\{v_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *es una sucesión de valores reales de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con una medida de probabilidad común* $\mathbb{P}_0$ *definida por*

$$\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(\{\omega : v_\omega(n) \in A\})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^d$ *y para cualquier conjunto de Borel* $A \subset \mathbb{R}$*, donde* $\mathbb{P}$ *es la medida de probabilidad sobre conjuntos borelianos cilíndricos de* $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$*.*

Otro de los temas que estudiaremos como herramienta para desarrollar el pre- sente trabajo será la teoría ergódica, nos enfocaremos principalmente en el Teorema ergódico de Birkhoff [23, 28].

Uno de los puntos más importantes de este trabajo es la medida densidad de estados [14, 17, 18, 21, 48], que es una cantidad de importancia fundamental para ciertos modelos físicos de la materia condensada. La medida densidad de estados $\nu([E_1, E_2])$, nos da el número de niveles de energía por unidad de volumen con energías entre E_1 y E_2.

Como sistemas típicos que surgen en la física de estado sólido tienen potenciales periódicos o ergódicos, entonces el espectro de su correspondiente Hamiltoniano no es discreto, luego no podemos simplemente contar los valores propios dentro de un intervalo $[E_1, E_2]$, o equivalentemente tomar la proyección espectral correspondiente, ya que la dimension de cualquier proyección espectral de H_ω es cero o infinito. Por otro lado el número de electrones en tal sistema tiende al infinito o es infinito por esas dos razones, el principio de Pauli no tiene sentido inmediato. Sin embargo, hay una posibilidad de que el principio de Pauli pueda tener sentido, es cuando restringimos el sistema a un cubo finito Λ_L.

por motivos antes mencionados tomamos la proyección espectral de H_ω en el cubo finito Λ_L, en seguida tomamos la dimensión de $Ran\chi_{\Lambda_L}(H_\omega)$ y dividimos por $|\Lambda_L| = (2L+1)^d$. Finalmente, tomamos el límite cuando $L \longrightarrow \infty$. Este procedimiento es llamado límite termodinámico.

En lo que sigue de este trabajo, toda vez que escribimos ω estaremos haciendo referencia a $\omega \in \Omega$.

Definición 2 *La medida* ν *definida por*

$$\nu(A) = \mathbb{E}(\langle\delta_0, \chi_A(H_\omega)\delta_0\rangle), \qquad \text{para conjuntos de Borel } A \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

es llamada densidad de estados para H_ω*. La función distribución* N *de* ν *dada por*

$$N(E) = \nu((-\infty, E]) \tag{5}$$

es llamada densidad integrada de estados para H_ω*.*

Donde los vectores δ_i forman la base ortonormal canónica del espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$ y $\mathbb{E}(X) := \int X d\mathbb{P}$ denota la esperanza matemática de la variable aleatoria X. Notemos que la medida densidad de estados ν es no aleatoria y es una medida de probabilidad, pues $\nu(\mathbb{R}) = 1$.

Otro tópico que abordamos en este trabajo son las condiciones de frontera para operadores de Schrödinger sobre el espacio l^2 restringido a cubos finitos, el motivo principal de estudiar tales condiciones es porque lo usaremos como herramienta en la demostración del Teorema 1, el cual describe el fenómeno Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto H_ω.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática.

En el presente trabajo denotaremos por $l^2(\mathbb{Z}^d)$ al espacio de Hilbert definido por

$$l^2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Y denotaremos por $a \searrow b$ cuando a tiende a b por la derecha.

El intervalo previsible de los espectros de los operadores con potenciales independientes idénticamente distribuidos muchas veces no concuerda con el calculado vía método numérico. La razón está en el interesante fenómeno llamado Lifshitz tails, que fue descubierto en el año 1964 por el físico I. Lifshitz (ver [31]). Él observó que la densidad integrada de estados $N(E)$ decae exponencialmente cuando la energía E está muy próximo del ínfimo del espectro [1].

Ese fenómeno puede ser descrito matemáticamente de la siguiente forma, para un sistema ordenado (o sea, para el operador de Schrödinger H con potencial periódico):

$$N(E) \sim C(E - E_0)^{-\frac{d}{2}} \quad \text{cuando } E \searrow E_0 \tag{6}$$

donde $E_0 = \inf \sigma(H)$.

Y para un sistema desordenado (o sea, para el operador de Schrödinger H con potencial aleatorio) como

$$N(E) \sim C_1 e^{C(E-E_0)^{-\frac{d}{2}}} \quad \text{cuando } E \searrow E_0. \tag{7}$$

En la ecuación 6 escribimos $N(E) \sim C(E - E_0)^{-\frac{d}{2}}$ cuando $E \searrow E_0$, para indicar que $\lim_{E\searrow E_0} \frac{N(E)}{C(E - E_0)^{-\frac{d}{2}}} = 1$, y análogamente en la ecuación 7.

Una forma más débil de la ecuación (7) para el modelo de Anderson discreto es dada por el siguiente teorema.

Teorema 1 (Lifshitz tails). *Para el modelo de Anderson H_ω con la medida $\mathbb{P}_0$ no trivial y con soporte inferiormente acotado, la densidad integrada de estados $N(E)$*

satisface

$$\lim_{E \searrow E_0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln(E - E_0)} = -\frac{d}{2}. \qquad (8)$$

En este trabajo presentaremos una demostración del teorema 1 para el modelo de Anderson discreto, la demostración se dividirá en dos etapas, primero haremos la acotacion superior usando las condiciones de frontera de Neumann y posteriormente la acotación inferior donde será usado las condiciones de frontera de Dirichlet. La demostración del teorema para otros modelos puede ser encontrado en [1, 21, 45].

El fenómeno Lifshitz tails es una propiedad muy importante de la densidad integrada de estados. Sin embargo, existen otras propiedades, tales como la continuidad de la densidad integrada de estados, la convergencia de la medida densidad de es- tados como convergencia de medidas y la relación que existe entre el soporte de la medida densidad de estados y el espectro del operador ergódico.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Será posible demostrar el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energía E está próximo al ínfimo del espectro de H_ω y estudiar propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto?.

1.2.2. Problemas específicos

1. ¿Es posible estudiar propiedades espectrales para los operadores de Schrödinger aleatorios discretos?.

2. ¿Será posible mostrar la existencia de la densidad de estados para el modelo de Anderson discreto?.

3. ¿El modelo de Anderson discreto es ergódico?.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Demostrar el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energía E está próximo al ínfimo del espectro de H_ω y estudiar las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.

Objetivos específicos

1. Estudiar propiedades espectrales para los operadores de Schrödinger aleatorios discretos.

2. Mostrar la existencia de la densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.

3. Mostrar que el modelo de Anderson discreto es ergódico.

1.4. Limitantes de la investigación

Limitante teórico

El limitante teórico donde se circunscribe nuestro trabajo es el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$, ya que en espacios de Hilbert más generales no esta garantizado la existencia de la densidad de estados.

Limitante temporal

Por ser nuestro trabajo netamente teórico no se presentan limitaciones temporales.

Limitante espacial

Debido a que nuestra investigación es netamente teórica no se presentan limitaciones espaciales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Antecedente internacional

En el año 1964 el físico I. Lifshitz descubrió el famoso fenómeno llamado Lifshitz tails. A base de argumentos físicos él determinó que la densidad integrada de estados se comporta como en la ecuación 6 y 7 para sistemas ordenados y desordenados respectivamente.

El fenómeno Lifshitz tails fue probado matemáticamente por primera vez en el año 1975 por Donsker y Varadhan [15] para el modelo de Poisson, que son una clase de operadores de la forma $H = H_0+V_\omega$, donde $V_\omega = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} q_i(\omega)f(x-(i+x_i(\omega)))$; siendo q_i la carga $x \in \mathbb{R}^d$. En 1977 usando los mismos argumentos de Donsker y Varadhan, Nakao [33] y Pastur [35] independientemente, presentaron una demostración más rigurosa de Lifshitz tails para el mismo modelo, esa prueba consiste en la evaluación asintótica de ciertas integrales de Wiener. Ellos probaron precisamente

$$\lim_{E\searrow E_0} \frac{\ln N(E)}{(E-E_0)^{-\frac{d}{2}}} = -C_2. \tag{9}$$

Años más tarde, exactamente en el año 1983, Kirsch y Martinelli [20] encontraron una prueba alternativa para el modelo de Poisson y otros modelos similares, ellos probaron la forma débil de 7 dada por

$$\lim_{E \searrow E_0} \frac{\ln(-\ln N(E))}{\ln(E - E_0)} = -\frac{d}{2}. \tag{10}$$

En el año 1985, Barry Simon [44] adaptó la prueba hecho por Kirsch y Martinelli para el modelo de Anderson discreto. Posteriormente el fenómeno Lifshitz tails fue probado para diferentes tipos de operadores vea por ejemplo [1], [21], [45], [48].

Por otro lado la primera demostración de existencia de la densidad de estados se remonta al trabajo hecho por Pastur [36], quien mostró la existencia basándose en la transformada de Laplace de la densidad integrada de estados. Y la demostración vía límite termodinámico fue hecho por Avron y Simon [3] para operadores casi periódicos.

Antecedente nacional

No existe antecedentes nacionales.

2.2. Bases teóricas

Las bases teóricas que usaremos en este trabajo serán las siguientes:

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson.

Teorema 2 (Representación de Riesz) *Sea X un espacio compacto de Hausdorff y $C(X)$ el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Para cualquier funcional lineal positivo φ en $C(X)$, existe una única medida μ en X tal que*

$$\varphi(f) = \int_X f(x)d\mu(x). \tag{11}$$

Notación 1 *En lo que sigue de este trabajo denotaremos por $\mathbb{P}$-c.t.p. para indicar que cierto resultado es válido casi siempre con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.*

El teorema que enunciaremos a continuación describe explícitamente el espectro del modelo de Anderson como una suma de conjuntos.

Teorema 3 *El espectro del modelo de Anderson H_ω es $\mathbb{P}$-c.t.p. dado por*

$$\sigma(H_\omega) = [0, 4d] + supp\ \mathbb{P}_0. \tag{12}$$

El Teorema ergódico de Birkhoff es uno de los teoremas más importantes de la teoría ergódica, dicho teorema usaremos para demostrar propiedades de la medida densidad de estados.

Teorema 4 (Teorema ergódico de Birkhoff) *Si* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *es una familia de variables aleatorias ergódicas y* $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$*, entonces*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i\in\Lambda_L} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_0), \qquad \mathbb{P}-c.t.p. \tag{13}$$

donde $\mathbb{E}(X_0) := \int X_0 \, d\mathbb{P}$.

El siguiente resultado establece una relación entre el espectro del operador y el soporte de la medida densidad de estados.

Teorema 5 *Para el modelo de Anderson discreto* H_ω *tenemos que*

$$supp(\nu) = \sigma(H_\omega) \tag{14}$$

donde $supp(\nu)$ *denota el soporte de la medida densidad de estados* ν.

2.3. Conceptual

Los operador de Schrödinger son operadores de la forma $H = H_0 + V$ actuando sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ o $l^2(\mathbb{Z}^d)$, donde H_0 es el Laplaciano que representa la energía cinética del sistema y V la energía potencial.

Este tipo de operadores se dividen en operadores de Schrödinger continuos y discretos, un caso particular de operadores de Schrödinger discretos es el modelo de Anderson discreto dada en la definición 1.

La densidad de estados $\nu([E_1, E_2])$, es la medida que nos permite calcular el número de niveles de energía por unidad de volumen con energías entre E_1 y E_2. Cuya definición Matemática esta dada en la definición 2.

El fenomeno Lifshitz tails es el decaimiento exponencial de la medida densidad integrada de estados cuando la energía E está muy próximo del ínfimo del espectro, matemáticamente este comportamiento esta descrito por las ecuaciones 6 e 7 para sistemas ordenados y desordenados respectivamente.

2.4. Definición de términos básicos

A continuación, daremos algunas definiciones que nos servirán como base para el desarrollo de esta investigación.

Definición 3 **(i)** *Sean* X *y* Y *espacios vectoriales. Un operador lineal es una aplicación* $A : D(A) \subset X \to Y$*, en que su dominio* $D(A)$ *es un subespacio vectorial y* $A(\xi + \alpha\eta) = A(\xi) + \alpha A(\eta)$ *para cualquier* $\xi, \eta \in D(A)$ *y* $\alpha \in \mathbb{F}$.

(ii) *Decimos que un operador lineal A es limitado si existe* $C > 0$ *de modo que* $\|A(\xi)\| \leq C\|\xi\|$ *para todo* $\xi \in D(A)$.

Sea $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador resolvente de A en λ, dado por

$$R_\lambda(A) : \mathcal{H} \longrightarrow D(A)\,, \quad R_\lambda(A) := (A - \lambda \mathbf{1})^{-1},$$

existe y es limitado. Por simplicidad usaremos la notación $A - \lambda\mathbf{1} = A - \lambda$, donde $\mathbf{1}$ denota o operador identidad.

El operador resolvente satisface las siguientes propriedades:

(i) Se $z_1, z_2 \in \rho(A)$ entonces

$$\begin{aligned}(A - z_1)^{-1} - (A - z_2)^{-1} &= (z_1 - z_2)(A - z_1)^{-1}(A - z_2)^{-1} \\ &= (z_1 - z_2)(A - z_2)^{-1}(A - z_1)^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

(ii) Si $D(A) = D(B)$ y $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$, entonces

$$\begin{aligned}(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} &= (A - z)^{-1}(B - A)(B - z)^{-1} \\ &= (B - z)^{-1}(B - A)(A - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Definición 4 *El espectro de un operador lineal A es el conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Para $z \in \mathbb{C}$ y $M \subset \mathbb{C}$, definimos la distancia del punto z al conjunto M como

$$\operatorname{dist}(z, M) := \inf\{|z - \zeta| : \zeta \in M\}.$$

Sea A un operador autoadjunto y $z \in \rho(A)$. Se tiene que

$$\|(A - z)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))}.$$

En particular, para el operador autoadjunto A y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\|(A - z)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Sea P un polinomio complejo en una variable real. Si $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_n \lambda^j$, entonces

$$P(A) = \sum_{j=0}^{n} a_n A^j.$$

Proposición 1 *Sea A un operador autoadjunto. Entonces*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|P(A)\|^2 &= \|P(A)^* P(A)\| \\ &= \|(\overline{P}P)(A)\| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| \end{aligned}$$

$!_2$

$$= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| \quad .$$

$\blacksquare$

Sea A un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Denotemos por $C(\sigma(A))$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ y por $B(\mathcal{H})$ el espacio de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Existe una única aplicación $\varphi : C(\sigma(A)) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ satisfaciendo las siguientes propiedades para $f, g \in C(\sigma(A))$ (vea [41]):

(a) $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$, $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$, $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{I}$, $\varphi(\bar{f}) = (\varphi(f))^*$;

(b) φ es continua, o sea, $\|\varphi(f)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant C\|f\|_\infty$ para alguna constante $0 < C < \infty$;

(c) Si f es la función tal que $f(x) = x$, entonces $\varphi(f) = A$;

(d) Si $A(\psi) = \lambda\psi$, entonces $\varphi(f)\psi = f(\lambda)\psi$;

(e) $\sigma[\varphi(f)] = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$;

(f) Si $f \geq 0$, entonces $\varphi(f) \geq 0$.

Definición 5 *(a) Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una σ-álgebra se satisface:*

1. *Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$;*
2. *Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$.*

(b) Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra. Decimos que la función

$$u : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

es una medida si

1. *$u(\emptyset) = 0$;*
2. *para toda sucesión $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ se tiene*

$$u\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} u(E_i).$$

Para un conjunto de Borel $M \subset \mathbb{R}$, χ_M denota la función característica definida por

$$\chi_M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \in M, \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \notin M. \end{cases}$$

Definición 6 *Sea A un operador autoadjunto acotado y $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel. $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$ es llamado proyección espectral de A, donde $\chi_\Omega(A)$ es la función característica de $\sigma(A)$ en el conjunto Ω.*

La familia $\{P_\Omega\}$ de proyecciones espectrales de un operador autoadjunto limitado A satisface las siguientes propiedades:
(a) Cada P_Ω es una proyección ortogonal;
(b) $P_\emptyset = 0$;
(c) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$;
(d) Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$, entonces

$$P_\Omega = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}.$$

La familia de proyecciones ortogonales satisfaciendo (a)-(d) es llamada medida proyectiva del operador A.

Proposición 2 *$\lambda \in \sigma(A)$ si y solo si $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$.*

La demostración de este resultado puede ser encontrada en [12].
El operador A se llama positivo si $\langle \varphi, A\varphi \rangle \geqslant 0$, $\forall \varphi \in D(A)$, y es dicho limitado inferiormente si $\langle \varphi, A\varphi \rangle \geqslant -M\langle \varphi, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in D(A)$ y para algún $M \in \mathbb{R}$.

Definición 7 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para un operador positivo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se define la traza de A por*

$$trA = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi_n, A\xi_n \rangle.$$

la traza es lineal, o sea, $tr(A + B) = trA + trB$ e $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Ademas $tr(AB) = tr(BA)$ y la traza es independiente de la base ortonormal.

Teorema 6 (Identidade de Parseval) *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene*

$$\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \xi_n, \xi \rangle \xi_n \tag{17}$$

y

$$\|\xi\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \xi_n, \xi \rangle|^2. \tag{18}$$

Si T, S son operadores lineales cerrados en $\mathcal{H}$, se dice que T es S-limitado si $D(S) \subset D(T)$ y existen $a, b \geqslant 0$ de forma que $\|T\xi\| \leqslant a\|S\xi\| + b\|\xi\|$, para todo $\xi \in D(S)$; el ínfimo de los valores de $a \geqslant 0$ que tal relación es válido es llamado S-limite de T.

Teorema 7 (Kato-Rellich) *Sean un $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, T un operador lineal autoadjunto en $D(T) \subset \mathcal{H}$ y B un operador lineal simétrico y cerrado en $D(B) \subset \mathcal{H}$ que es T-limitado con T-límite < 1. Entonces $T + B$ es autoadjunto en $D(T)$ y es esencialmente autoadjunto en todo el núcleo de T.*

La demostración del teorema anterior puede ser encontrada en [39].

Para un operador A sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con dominio $D(A)$, el conjuntode los autovalores de A es dado por

$$\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A\phi = \lambda\phi \text{ para } \phi \in D(A)\setminus\{0\}\}.$$

La multiplicidad de un autovalor λ de A es la dimensión del espacio propio $\phi \in D(A) : A\phi = \lambda\phi\}$ asociado a λ. Si μ es una proyección a valor de medida de operador A, entonces la multiplicidad de λ é igual al tr$\mu(\{\lambda\})$. Un autovalor de A se llama simple o no degenerado si tiene multiplicidad 1 y es finitamente generado si su espacio propio tiene dimensión finita. Un autovalor λ es llamado aislado si existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sigma(A) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = \{\lambda\}.$$

Definición 8 *Sea A un operador autoadjunto.*
(a) El espectro discreto de A es el conjunto $\sigma_{dis}(A)$ de todos los autovalores de multiplicidad finita.
(b) El espectro esencial de A es el conjunto $\sigma_{ess}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{dis}(A)$.

Para un operador A definimos

$$\mu_0(A) = \text{ínf}\{\langle\varphi, A\varphi\rangle : \varphi \in D(A), \|\varphi\| = 1\}$$

y para $k \geqslant 1$,

$$\mu_k(A) = \sup_{\psi_1,\ldots,\psi_k \in \mathcal{H}} \text{ínf}\{\langle\varphi, A\varphi\rangle : \varphi \in D(A), \|\varphi\| = 1, \varphi \perp \psi_1, \ldots, \psi_k\}.$$

El operador A es limitado inferiormente si y solo si $\mu_0(A) > -\infty$ y $\mu_0(A)$ es el ínfimo del espectro de A. Si A es limitado inferiormente y tiene espectro puramente discreto (o sea, $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$), podemos ordenar los autovalores $E_n(A)$ en orden creciente, repitiéndolos de acuerdo con sus multiplicidades, como

$$E_0(A) \leqslant E_1(A) \leqslant E_2(A) \leqslant \ldots.$$

Teorema 8 (Princípio Min-max) *Si el operador autoadjunto A tiene espectro puramente discreto y es limitado inferiormente, entonces*

$$E_k(A) = \mu_k(A), \quad \text{para todo } k \geqslant 0.$$

La prueba de este teorema puede ser encontrada en [40].

Sean A y B dos operadores lineales. La notación $A \leqslant B$ significa que $D(B) \subset D(A)$ y $\langle\varphi, A\varphi\rangle \leqslant \langle\varphi, B\varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in D(B)$.

Corolario 1 *Sean A y B dos operadores autoadjuntos, limitados inferiormente y que tienen espectro puramente discreto. Si $A \leqslant B$, entonces $E_k(A) \leqslant E_k(B)$ para todo $k \geq 0$.*

Sea $C_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \right\}$. Un subconjunto $\mathbb{D}$ es llamado subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ si $f, g \in \mathbb{D}$ entonces $f\, g \in \mathbb{D}$ y $\bar{f} \in \mathbb{D}$. Decimos que $\mathbb{D}$ separa puntos si para $x, y \in \mathbb{R}$ existe una función $f \in \mathbb{D}$ tal que $f(x) \neq f(y)$ y $f(x), f(y) = 0$.

El próximo teorema, cuya demostración puede ser encontrada en [41], es uno de los resultados más importantes para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 9 (Stone-Weierstrass) *Si $\mathbb{D}$ es una subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa puntos, entonces es $\mathbb{D}$ denso en $C_\infty(\mathbb{R})$ con la topología de la convergencia uniforme.*

Ejemplo 1 *El conjunto de las combinaciones lineales de las funciones $f_z(x) = \frac{1}{x-z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ forman una subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa puntos.*

III. VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Hipotesis general e hipótesis específica

Hipótesis general

Usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet demostraremos el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energía E está próximo al ínfimo del espectro de H_ω y usando resultados de la teoría de probabilidad y de cálculo espectral estudiaremos las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.

Hipótesis específica

- Aplicando los resultados de la teoría de probabilidad y de análisis funcional mostraremos que el espectro de modelo de Anderson discreto es un conjunto no aleatorio casi siempre.
- Usando el teorema ergódico de Birkhoff demostraremos la existencia de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.
- Basado en la teoría ergódica demostraremos que el modelo de Anderson discreto es ergódico.

3.2. Definición conceptual de variables

En este trabajo estudiaremos las siguientes variables

- **Variable Independiente:** Conjuntos de Borel $A \subset \mathbb{R}$.
- **Variable Dependiente:** Densidad de estados.

3.2.1. Operacionalización de variables

Variables	Dimensiones	Indicadores	indices	Método	Técnica
Independiente. Conjuntos de Borel $A \subset \mathbb{R}$	• $A \subsetneq \mathbb{R}$ • $A = \mathbb{R}$	• A es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$ • A es igual a $\mathbb{R}$	A	inductivo-deductivo	Analítica
Dependiente Densidad de estados	• si $\lim_{L\to\infty} \frac{1}{\vert \Lambda_L \vert} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L})$ existe • si $\lim_{L\to\infty} \frac{1}{\vert \Lambda_L \vert} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L})$ no existe	• Existe densidad de estados • No existe densidad de estados	$\nu(A)$	inductivo-deductivo	Analítica

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación

Tipo de la investigación

El tipo de investigacion desarrollado en este trabajo es Básica.

Diseño de la investigación

1. Comenzaremos presentando definiciones y algunos resultados básicos de análisis funcional, como herramienta esencial para nuestro estudio, en el cual nos restringiremos a las particularidades necesarias para desenvolver este trabajo. Tales definiciones y resultados se encuentran en las siguientes referen- cias [7, 12, 13, 22, 24, 41, 42, 47].

2. En segundo lugar, introduciremos el modelo de Anderson discreto que será nuestro objeto de estudio en este trabajo, y estudiaremos cada componente de este operador y sus propiedades principales para cada operador, finalmente caracterizaremos el espectro de modelo de Anderson. para esta parte del trabajo usaremos las siguientes referencias bibliográficas [1, 19, 45]

3. Como siguiente tópico desarrollaremos algunas definiciones y resultados de la teoría ergódica que será usado posteriormente y mostraremos que el modelo de Anderson es un operador ergódico. Dichos resultados se encuentran principalmente en las siguientes referencias [10, 23, 28, 32].

4. Con toda la teoría desarrollada hasta esta parte del trabajo, pasaremos a estudiar los conceptos más importantes de este trabajo, la medida densidad de estados y la medida densidad integrada de estados, estudiaremos sus propiedades de estas medidas demostrando cada una de ellas. También estudiaremos las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet. Para más detalles de tales resultados véase [10, 18, 19, 21, 48].

5. Finalmente mostraremos el objetivo principal del presente trabajo el Teorema 1 para el modelo de Anderson discreto. Para dicha prueba usaremos las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet estudiadas anteriormente. para dicha prueba y pruebas alternativas ver [1, 19, 21, 44, 45].

4.2. Método de investigación

Para la realización de la presente investigación, en primer lugar se ha hecho recolección de material bibliográfico especializado. El estudio realizado es de carácter científico- teorico y la metodología usada para el desarrollo de este trabajo es de tipo inductivo-deductivo tratando de dar todos los detalles posibles en cada demostración de los resultados y así facilitar la lectura del trabajo.

4.3. Población y muestra

No aplica para este tipo de investigación.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

4.4.1. Lugar de estudio.

Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

4.4.2. Periodo desarrollado.

El presente trabajo fue desarrollado durante el periodo enero del 2020 a agosto del 2020 con actividades distribuidadas de la siguiente manera:

Actividades a realizar	Primer mes	Segundo mes	Tercer mes	Cuarto mes	Quinto mes	sexto mes	sépti-mo mes	octavo mes
Planteami-ento del problema	X							
Marco teórico		X	X					
Hipótesis y variables Diseño metodoló-gico				X				
Resultados					X	X		
Discusión de re-sultados, Conclu-siones y Recomen-daciones							X	
Digitación del trabajo								X

4.5. Técnicas e instrumentos de recolección de la informa-ción

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía relacionado a los temas tratados en este trabajo y recopilación de información obtenida vía Internet para complementar información y así enriquecer el trabajo.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

No se aplica para este tipo de trabajo.

V. Resultados

5.1. Resultados descriptivos

5.1.1. Espectro del Modelo de Anderson

En esta sección estudiaremos el espectro del Laplaciano discreto, algunas propiedades de potenciales aleatorios, en especial sobre los potenciales del modelo de Anderson, y presentaremos la demostración del Teorema 3 enunciado en la Introducción.

Laplaciano Discreto

En esta parte del trabajo estudiaremos el Laplaciano discreto, que es un operador de Schrödinger libre (modela una partícula libre sin acción de potenciales) actuando sobre el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 1$

Los resultados aquí estudiados pueden ser encontrados en [5, 10, 19, 45].

El espacio $l^2(\mathbb{Z}^d)$ es definido por

$$l^2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty \right\}$$

y la norma de un vector u en ese espacio es dada por

$$\|u\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 \right)^{1/2},$$

la cual es inducida por el producto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{\phi(n)}\psi(n)\,, \quad \text{para } \phi, \psi \in l^2(\mathbb{Z}^d).$$

Dado $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, se define la norma del supremo

$$\|n\|_\infty := \sup_{v=1,\ldots,d} |n_v|$$

y la norma de la suma

$$\|n\|_1 := \sum_{v=1}^{d} |n_v|\,.$$

Definición 9 *El operador $H_0 : l^2(\mathbb{Z}^d) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^d)$ definido por*

$$(H_0u)(n) := - \sum (u(m) - u(n)) \tag{19}$$

es llamado Laplaciano discreto.

$m : \|m - n\|_1 = 1$

El operador H_0 está bien definido pues

$$
\begin{aligned}
\|H_0u\| &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |(H_0u)(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Big|\sum_{\|j\|_1=1} (u(n+j)-u(n))\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sum_{\|j\|_1=1}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |(u(n+j)-u(n))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sum_{\|j\|_1=1}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (|u(n+j)|+|u(n)|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sum_{\|j\|_1=1}\left[\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n+j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\leqslant 4d\|u\|.
\end{aligned}
$$

Así $H_0u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ para todo $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$. Ademas, H_0 es limitado.

La forma cuadrática del operador H_0 es dada por

$$
\langle u, H_0 v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\|j-i\|_1=1} \overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j)). \tag{20}
$$

Mostraremos esto para dimensión $d = 1$; los argumentos pueden ser generalizados para $d > 1$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
2\langle u, H_0 v\rangle &= 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}(H_0v)(i)\\
&= 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}(-v(i-1)-v(i+1)+2v(i))\\
&= -2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i-1) - 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i+1) + 4\sum_{i\in\mathbb{Z}} u(i)\overline{v(i)}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{|j-i|_1=1}\overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j))\\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{(u(i)-u(i-1))}(v(i)-v(i-1)) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{(u(i)-u(i+1))}(v(i)-v(i+1))\\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{u(i)}v(i)-\overline{u(i-1)}v(i)-\overline{u(i)}v(i-1)+\overline{u(i-1)}v(i-1)\\
&\quad+\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{u(i)}v(i)-\overline{u(i+1)}v(i)-\overline{u(i)}v(i+1)+\overline{u(i+1)}v(i+1)\\
&= -2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{u(i)}v(i-1)-2\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{u(i)}v(i+1)+4\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{u(i)}v(i).
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\langle u, H_0 v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{|j-i|_1=1}\overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j)).$$

De este último resultado concluimos que el operador H_0 es autoadjunto. Usando la transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^d)\to L^2([0,2\pi]^d),\qquad (\mathcal{F}u)(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}u(n)e^{-in\cdot k},$$

se muestra que el espectro del operador H_0 es el intervalo $[0,4d]$. En efecto, considerando inicialmente $d=1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(H_0u)(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-u(n-1)-u(n+1)+2u(n))e^{-in\cdot k}\\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n-1)e^{-in\cdot k}-\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n+1)e^{-in\cdot k}+2\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-in\cdot k}\\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-i(n+1)\cdot k}-\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-i(n-1)\cdot k}+2\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-in\cdot k}\\
&= -e^{-ik}\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-in\cdot k}-e^{ik}\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-in\cdot k}+2\sum_{n\in\mathbb{Z}}u(n)e^{-in\cdot k}\\
&= -e^{-ik}\mathcal{F}(u(k))-e^{ik}\mathcal{F}(u(k))+2\mathcal{F}(u(k))\\
&= (-2\cos(k)+2)\mathcal{F}(u(k)).
\end{aligned}$$

Generalizando este resultado para $d\geq 1$ obtenemos que

$$\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\psi\ (k)=(\mathbf{M}_g\psi)(k),$$

donde $\mathbf{M}_g$ denota el operador de multiplicación en $L^2([0,2\pi]^d)$ por la función $g(k)=2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)$ para $k=(k_1,\ldots,k_d)\in[0,2\pi]^d$. Así, H_0 es unitariamente equivalente a $\mathbf{M}_g$, lo que implica que su espectro es dado por

$$\sigma(H_0)=\sigma(\mathbf{M}_g)=\overline{Im(g)}=[0,4d]$$

y que H_0 tiene espectro absolutamente continuo puro.

Sean $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$. Se define la base ortonormal canónica $\{\delta_i\}$ del espacio $l^2(\mathbb{Z}^d)$ por

$$\delta_i(\boldsymbol{j}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, \\ 0 & \text{se} \quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Dado un operador $A : l^2(\mathbb{Z}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$ se define sus elementos de matriz por

$$A(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \langle \delta_{\boldsymbol{i}}, A\delta_{\boldsymbol{j}} \rangle. \tag{21}$$

A partir de los elementos de matriz, se recupera el operador de forma única como

$$(Au)(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A(i, j)u(j). \tag{22}$$

Los elementos de la matriz del Laplaciano discreto son

$$H_0(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \begin{cases} 2d & \text{si} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, \\ -1 & \text{si} \quad \|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\|_1 = 1, \\ 0 & \text{si} \quad \|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\|_1 > 1. \end{cases}$$

Potenciales aleatorios y espectro del modelo

En esta sección presentaremos algunas propiedades importantes de la teoría de probabilidad, las cuales serán usadas en los potenciales del modelo de Anderson y demostraremos el Teorema 3, el cual determina explicitamente el espectro de este modelo. Tales resultados pueden ser encontrados en [4, 18, 27].

Definición 10 *Una variable aleatoria es una función real medible en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria y A un conjunto de Borel, se llama distribución de X a la medida de probabilidad $\mathbb{P}_0$ de A dada por

$$\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(\{w \mid \boldsymbol{X}(w) \in A\}).$$

Sean $\boldsymbol{X}$, Y variables aleatorias. Si la distribución de $\boldsymbol{X}$ y Y son iguales, decimos que ellas son idénticamente distribuidas.

Una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de variables aleatorias es dicha independiente si para cualquier subconjunto finito $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de I,

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \mid \boldsymbol{X}_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1], \boldsymbol{X}_{i_2}(\omega) \in [a_2, b_2], \ldots, \boldsymbol{X}_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}\right)$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \mid \boldsymbol{X}_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1]\}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\{\omega \mid \boldsymbol{X}_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}).$$

Si $\boldsymbol{X}_i$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas con una medida de probabilidad común $\mathbb{P}_0$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \mid \boldsymbol{X}_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1], \boldsymbol{X}_{i_2}(\omega) \in [a_2, b_2], \ldots, \boldsymbol{X}_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}\right)$$
$$= \mathbb{P}_0([a_1, b_1]) \cdot \mathbb{P}_0([a_2, b_2]) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_0([a_n, b_n]).$$

Ahora presentaremos un teorema importante de la teoría de probabilidad, cuya demostración puede ser encontrada en [27].

Teorema 10 (Lema de Borel-Cantelli) *Sean* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de conjuntos en* $\mathbb{F}$*. Denotamos por* A_∞ *el conjunto*

$$A_\infty = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A_n \text{ excepto para un número finito de puntos } n\}.$$

(1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$*, entonces* $\mathbb{P}(A_\infty) = 0$*;*
(2) Si $\{A_n\}$ *son independientes y* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$*, entonces* $\mathbb{P}(A_\infty) = 1$*.*

Consideremos ahora el modelo de Anderson $H_\omega = H_0 + V_\omega$ definido en la Introducción, conforme a la Definición 1.

El soporte de la medida $\mathbb{P}_0$ (medida de probabilidad de la sucesión $\{v_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ de potenciales) es, por definición, el conjunto

$$\text{supp } \mathbb{P}_0 = \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}_0((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0 \quad \forall\varepsilon > 0\}. \tag{23}$$

Si supp $\mathbb{P}_0$ es compacto, entonces cada operador H_ω es limitado ω-$\mathbb{P}$ c.t.p. y autoadjunto en $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Por otro lado, si supp $\mathbb{P}_0$ no es compacto, el operador de multiplicación V_ω es autoadjunto en el dominio $D_\omega = \{\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d) : V_\omega\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)\}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\langle V_\omega\phi, \phi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{v_\omega(n)\phi(n)}\phi(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v_\omega(n)\overline{\phi(n)}\phi(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v_\omega(n)|\phi(n)|^2.\end{aligned}$$

Como la función v_ω asume valores reales, entonces $\langle V_\omega\phi, \phi\rangle \in \mathbb{R}$, luego V_ω es autoadjunto en D_ω. Ademas, H_0 es V_ω-limitado pues

$$\|H_0\phi\| \leqslant a\|V_\omega\phi\| + 4d\|\phi\|, \qquad \text{para todo } 0 \leqslant a < 1. \tag{24}$$

Luego, por el Teorema de Kato-Rellich (Teorema 7), H_ω es autoadjunto en D_ω, y esencialmente autoadjunto sobre el espacio

$$l_0^2(\mathbb{Z}^d) = \{\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d) : \phi(n) = 0 \text{ excepto para un número finito de puntos } n\}.$$

El próximo resultado será usado en la demostración del Teorema 3.

Proposición 3 *Existe un conjunto* Ω_0 *de probabilidad 1 tal que la siguiente afirmación es verdadera: Para cualquier* $\omega \in \Omega_0$*, cualquier conjunto finito* $\Lambda \subset l^2(\mathbb{Z}^d)$*, cualquier sucesión* $\{q_i\}_{i\in\Lambda}$*, con* $q_i \in$ *supp* $\mathbb{P}_0$ *y* $\forall\, \varepsilon > 0$*, existe una sucesión* $\{j_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ *con* $\|j_n\|_\infty \to \infty$ *tal que*

$$\sup_{i\in\Lambda} |q_i - v_\omega(i + j_n)| < \varepsilon.$$

Demostración. Fijemos un conjunto finito Λ, una sucesión $\{q_i\}_{i\in\Lambda}$, con $q_i \in \operatorname{supp} \mathrm{P}_0$ y $\varepsilon > 0$. Defina

$$A = \left\{\omega : \sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i) - q_i| < \varepsilon\right\}.$$

Como $v_\omega(n)$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(\forall i \in \Lambda : |v_\omega(i) - q_i| < \varepsilon) \\ &= (\mathrm{P}(|v_\omega(0) - q_0| < \varepsilon))^{|\Lambda|} \\ &= \mathrm{P}_0((q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)) > 0. \end{aligned}$$

Ahora tomemos la sucesión $\{j_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ tal que la distancia entre cualquier j_n, j_m, con $m \neq n$, sea mayor que el doble del diámetro de Λ. Entonces los eventos

$$A_n = A_n(\Lambda, \{q_i\}_{i\in\Lambda}, \varepsilon) = A = \{\omega | \sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n) - q_i| < \varepsilon\}$$

son independientes y $\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A) > 0$. Además, A_n es invariante por la familia de operadores shift $\{T_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$. En efecto, mostremos que $T_m^{-1}A_n = A_n$.

(i) Sea $\omega \in T_m^{-1}A_n$. Entonces $T_m\omega \in A_n$, donde

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_{T_m\omega}(i + j_n) - q_i| < \varepsilon.$$

Como $v_{T_m\omega}(n) = v_\omega(n - m)$, entonces

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n - m) - q_i| < \varepsilon,$$

luego $\omega \in A_n$. Por tanto, $T_m^{-1}A_n \subset A_n$.

(ii) Sea $\omega \in A_n$. Entonces

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n) - q_i| < \varepsilon,$$

lo que implica

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_{T_m\omega}(i + j_n + m) - q_i| < \varepsilon.$$

Entonces $T_m\omega \in A_n$. Así, $\omega \in T_m^{-1}A_n$ y por tanto, $A_n \subset T_m^{-1}A_n$.

De (i) y (ii) se obtiene $T_m^{-1}A_n = A_n$. Como A_n es invariante por T_m, entonces $\mathrm{P}(A_n) = 1$, lo que implica $\sum_1^\infty \mathrm{P}(A_n) = \infty$. Por el Lema de Borel-Cantelli (Teorema 10) el conjunto

$$\Omega_{\Lambda,\{q_1\},\varepsilon} = \{\omega \mid \omega \in A_n \text{ excepto para un número finito de puntos } n\}$$

tiene probabilidad 1. El conjunto $\operatorname{supp} \mathrm{P}_0 \subset \mathbb{R}$ es separable, consecuentemente contiene un conjunto denso y numerable R_0. Además, la colección Ξ de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ es numerable. Así, el conjunto

$$\Omega_0 := \bigcap_{\Lambda\in\Xi,\ \{q_i\}\in R_0,\ n\in\mathbb{N}} \Omega_{\Lambda,\{q_i\},\frac{1}{n}}$$

tiene probabilidad 1. Pues es una intersección numerable de conjuntos de probabilidad 1. El conjunto Ω_0 satisface los requisitos de la afirmación de la Proposición.

$\blacksquare$

Finalizamos esta sección demostrando el Teorema 3 enunciado en la Introducción (para informaciones adicionales vea también las referencias [1, 26, 45]).

Demostración. (Teorema 3). El espectro $\sigma(V_\omega)$ del operador de multiplicación V_ω por la función $v_\omega(n)$ es dado por $Im(v_\omega)$, por tanto $\sigma(V_\omega) = \text{supp } \mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}$- c.t.p.. Por otro lado, para los operadores $A, B : D(A) \longrightarrow \mathbb{H}$ sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ se tiene

$$\text{dist}(\sigma(A), \sigma(B)) \leq \|A - B\|. \tag{25}$$

Considere $A = H_\omega$ e $B = V_\omega + 2d$. Entonces $\|A - B\| \leq 2d$ y como $\sigma(B) = \text{supp } \mathbb{P}_0 + 2d$ tenemos

$$\sigma(H_\omega) \subset \text{supp } \mathbb{P}_0 + [0, 4d].$$

Para demonstrar la inclusión contraria usaremos el criterio de Weyl (veja [1]):

$$\lambda \in \sigma(H_\omega) \iff \exists\, \phi_n \in D_0, \|\phi_n\| = 1 \text{ tal que } \|(H_\omega - \lambda)\phi_n\| \longrightarrow 0,$$

donde D_0 es un espacio vectorial en que H_ω es esencialmente autoadjunto. La sucesion ϕ_n es llamada sucesión de Weyl.

Sea $\lambda \in [0, 4d] + \text{supp } \mathbb{P}_0$. Entonces $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ con $\lambda_0 \in \sigma(H_0) = [0, 4d]$ y $\lambda_1 \in \text{supp } \mathbb{P}_0$.

Tomemos una sucesión de Weyl ϕ_n para H_0 y λ_0, esto es, $\|(H_0 - \lambda_0)\phi_n\| \longrightarrow 0$ con $\|\phi_n\| = 1$. Como H_0 es esencialmente autoadjunto sobre el espacio $D_0 = l^2(\mathbb{Z}^d)_0$ podemos suponer que $\phi_n \in D_0$.

Sea $\phi^{(j)}(i) = \phi(i - j)$. Entonces

$$H_0\phi^{(j)} = (H_0\phi)^{(j)}. \tag{26}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} H_0\phi^{(j)}(n) &= -\sum_{\|m-n\|_1=1} (\phi^{(j)}(m) - \phi^{(j)}(n)) \\ &= -\sum_{\|m-n\|_1=1} (\phi(m - j) - \phi(n - j)) \\ &= -\sum_{\|(m-j)-(n-j)\|_1=1} (\phi(m - j) - \phi(n - j)) \\ &= -\sum_{\|i-k\|_1=1} (\phi(i) - \phi(k)) \end{aligned} \tag{27}$$

donde usamos el cambio de variable $i = m - j$ e $k = n - j$. Por otro lado, $(H_0\phi)^{(j)}(n)$

$$\begin{aligned} &= (H_0\phi)(n - j) \\ &= -\sum (\phi(m) - \phi(n - j)) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{\substack{\|m-k\|_1=1 \\ \|m-(n-j)\|_1=1}} (\phi(m) - \phi(k)). \tag{28}$$

De (27) y (28) obtenemos que

$$H_0\phi^{(j)} = (H_0\phi)^{(j)}. \tag{29}$$

Usando la Proposición 3, para $\Lambda = \operatorname{supp}\phi_n$ y $q_i = \lambda_1$ existe una sucesión $\{\boldsymbol{j}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ con $\|\boldsymbol{j}_n\|_\infty \to \infty$ tal que

$$\sup_{i \in \operatorname{supp}\phi_n} \left| v_\omega(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}_n) - \lambda_1 \right| < \frac{1}{n}.$$

Definiendo $\psi_n = \phi_n^{j_n}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|(H_0 - \lambda_0)\psi_n\| &= \|(H_0 - \lambda_0)\phi_n^{j_n}\| \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| (H_0\phi_n^{j_n})(\boldsymbol{i}) - (\lambda_0\phi_n^{j_n})(\boldsymbol{i}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| (H_0\phi_n)(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) - (\lambda_0\phi_n)(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| (H_0 - \lambda_0)\phi_n(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(H_0 - \lambda_0)\phi_n\|.
\end{aligned} \tag{30}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|(V_\omega - \lambda_1)\psi_n\| &= \|V_\omega\phi_n^{j_n} - \lambda_1\phi_n^{j_n}\| \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| v_\omega\phi_n^{j_n}(\boldsymbol{i}) - \lambda_1\phi_n^{j_n}(\boldsymbol{i}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| v_\omega(\boldsymbol{i})\phi_n(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) - \lambda_1\phi_n(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| (v_\omega(\boldsymbol{i}) - \lambda_1)\phi_n(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left| v_\omega(\boldsymbol{i}) - \lambda_1 \right|^2 \left| \phi_n(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{m \in \operatorname{supp}\phi_n} \left| v_\omega(m + \boldsymbol{j}_n) - \lambda_1 \right| \|\phi_n\|
\end{aligned} \tag{31}$$

donde usamos el cambio de variable $m = k - j_n$.

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}\|(H_0 + V_\omega - (\lambda_0 + \lambda_1))\psi_n\| &\leqslant \|(H_0 - \lambda_0)\psi_n\| + \|(V_\omega - \lambda_1)\psi_n\| \\ &\leqslant \|(H_0 - \lambda_0)\phi_n\| + \sup_{i \in \operatorname{supp} \phi_n} |v_\omega(i + j_n) - \lambda_1|. \quad (32)\end{aligned}$$

Usando las relaciones (30) y (31) concluimos que $\|(H_\omega - \lambda)\psi_n\| \to 0$, luego ψ_n una sucesion de Weyl para H_ω. Por tanto, $\lambda \in \sigma(H_\omega)$ y así

$$\text{supp } \mathrm{P}_0 + [0, 4d] \subset \sigma(H_\omega).$$

■

5.1.2. Propiedades ergódicas

La teoría ergódica es una área de la Matemática que estudia sistemas dinámicos provisto de medidas invariantes. En esta parte del trabajo estudiaremos algunos conceptos y resultados importantes para una familia de operadores ergódicos, en particular mostraremos que el modelo de Anderson es ergódico. Usaremos tales resultados en los próximas secciones. Para más detalles vea [10, 23, 28, 32].

5.1.3. Variables Aleatorias Ergódicas

Una familia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aleatorias es llamado proceso estocástico.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Una función medible $T : \Omega \to \Omega$ es dicha una transformación que preserva medida si

$$\mathrm{P}(T^{-1}A) = \mathrm{P}(A), \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}. \tag{33}$$

Dada una familia de transformaciones $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ que preservan medida, un conjunto A es invariante por $\{T_i\}$ si

$$T_i^{-1}A = A, \ \forall\, i \in \mathbb{Z}^d.$$

Definición 11 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Una familia $\{T_i\}$ de transformaciones que preservan medida es llamada ergódica si todo conjunto invariante $A \in \mathcal{F}$ tiene probabilidad $\mathrm{P}(A) = 0$ o $\mathrm{P}(A) = 1$, esto equivale a decir que el sistema es dinamicamente indivisible.*

Definición 12 *Una familia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aleatorias es llamada ergódica si existe una familia ergódica de transformaciones que preservan medida $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ tales que $X_i(T_j\omega) = X_{i-j}(\omega)$.*

Un ejemplo importante de ello es la familia de operadores shift $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ definidos por $(T_i\omega)_j = \omega_{j-i}$. Una variable aleatoria Y se dice invariante por T_i si $Y(T_i\omega) = Y(\omega)$, para todo $i \in \mathbb{Z}^d$.

Proposición 4 *Sea $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ una familia de transformaciones que preservan medida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Si una variable aleatoria $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es invariante por $\{T_i\}$, entonces f es constante P-c.t.p..*

Demostración. Mostraremos que $\mathrm{P}(\{\omega | f(\omega) = M_0\}) = 1$ para alguna constante M_0. Sea

$$\Omega_M = \{\omega | f(\omega) \le M\} = f^{-1}\{(-\infty, M]\}$$

Como f es invariante por $\{T_i\}$, entonces $f(T_i\omega) = f(\omega)$. Veamos que Ω_M es invariante por $\{T_i\}$.

(i) Sea $x \in T_i^{-1}\Omega_M$. Entonces $T_i(x) \in \Omega_M$ luego por la definición de Ω_M tenemos, $f(T_i x) \leq M$.

Como $f(T_i\omega) = f(\omega)$, entonces $f(x) \leq M$, donde $x \in \Omega_M$.Por tanto, $T_i^{-1}\Omega_M \subset \Omega_M$.

(ii) Sea $y \in \Omega_M$. Entonces $f(y) \leq M$ y como $f \circ T_i = f$ se sigue que $f \circ T_i(y) \leq M$. Luego, $T_i y \in \Omega_M$ consecuentemente $y \in T_i^{-1}\Omega_M$ y por tanto, $\Omega_M \subset T_i^{-1}\Omega_M$.

De (i) y (ii) obtenemos que $T_i^{-1}\Omega_M = \Omega_M$. Así, el conjunto Ω_M es invariante por $\{T_i\}$. Luego como los operadores $\{T_i\}$ son ergódicos y Ω_M es invariante, entonces $P(\Omega_M) = 1$ o $P(\Omega_M) = 0$.

Consideremos $M_1 < M_2$, entonces $\{\omega | f(\omega) \leq M_1\} \subset \{\omega | f(\omega) \leq M_2\}$, lo que implica que $\Omega_{M_1} \subset \Omega_{M_2}$.

Ahora veamos que $\cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

(a) Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M \subset \cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$.

(b) Sea $x \in \cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$. Entonces existe un $M' \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \Omega_{M'}$. Luego existe un entero $M'' > M'$ así, $\Omega_{M''} \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$. Como $\Omega_{M'} \subset \Omega_{M''}$, entonces $\Omega_{M'} \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$. Así, $x \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

De (a) y (b) se sigue que $\cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

Análogamente se obtiene $\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cap_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

Mostremos ahora que $P(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = 0$. En efecto, supongamos que $P(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = \alpha \neq 0$. Como $\Omega_M \supset \cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$ para cualquier M, $P(\Omega_M) > P(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M)$, entonces $P(\Omega_M) > \alpha > 0$ para cualquier M. Como $P(\Omega_M) = 1$ o $P(\Omega_M) = 0$, implica que $P(\Omega_M) = 1$ para cualquier M, lo que contradice el hecho que $f(\omega)$ es finito. En efecto, si $P(\Omega_M) = 1$, entonces $P(\{\omega | f(\omega) \leq M\}) = 1$ para cualquier M, lo que implica que $f(\omega) \leq M$ para cualquier M, consecuentemente, $f(\omega) = -\infty$ $P-$ *c.t.p.*. Por tanto, concluimos que $P(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = 0$.

Definamos $M_0 = \inf\limits_{P(\Omega_M)=1} M$. Veamos que M_0 es finito. En efecto, supongamos que M_0 es infinito. Entonces $M_0 = \infty$ o $M_0 = -\infty$. Supongamos que $M_0 = \infty$. Entonces $P(\Omega_M) = 1$ para todo M. Como $P(\Omega_M) = 1$ o $P(\Omega_M) = 0$, implica que $P(\Omega_M) = 0$. para todo M. Entonces $\{\omega | f(\omega) \leq M\}$ tiene medida 0 para todo M, lo cual implica $f = \infty$ P $-$*c.t.p.*, que es una contradicción. Por tanto, $M_0 \neq \infty$. Ahora suponiendo que $M_0 = -\infty$, entonces $P(\Omega_M) = 1$ para todo M, lo que es una contradicción con el hecho que $f(\omega)$ es finito como en el caso anterior. Por tanto, M_0 es finito.

Notemos que

$$\Omega_{M_0} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0+(\frac{1}{n})}.$$

Definimos

$$\tilde{\Omega}_{M_0} = \{\omega | f(\omega) < M_0\}.$$

Notemos también que

$$\tilde{\Omega}_{M_0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0-\frac{1}{n}}.$$

Como $M_0 = \inf_{\mathrm{P}(\Omega_M)=1} M$, tenemos que $\mathrm{P}(\Omega_{M_0+\frac{1}{n}}) = 1$ para todo $n \in \mathrm{N}$, pues $M_0 + \frac{1}{n} > M_0$. Además, $\mathrm{P}(\Omega_{M_0-\frac{1}{n}}) = 0$ pues $\mathrm{P}(\Omega_{M_0-\frac{1}{n}}) \neq 1$. Así,

$$\mathrm{P}(\Omega_{M_0}) = \mathrm{P}(\bigcap_{n\in\mathrm{N}} \Omega_{M_0+(\frac{1}{n})})$$

y

$$\mathrm{P}(\tilde{\Omega}_{M_0}) = \mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathrm{N}} \Omega_{M_0-\frac{1}{n}}).$$

Tenemos $\Omega_{M_0} = \{\omega | f(\omega) \leq M_0\}$ y $\tilde{\Omega}_{M_0} = \{\omega | f(\omega) < M_0\}$. Notamos que $\{\omega | f(\omega) = M_0\} = \Omega_{M_0} \setminus \tilde{\Omega}_{M_0}$ y como $\Omega_{M_0} \supset \tilde{\Omega}_{M_0}$ tenemos

$$\mathrm{P}(\{\omega | f(\omega) = M_0\}) = \mathrm{P}(\Omega_{M_0} \setminus \tilde{\Omega}_{M_0}) = \mathrm{P}(\Omega_{M_0}) - \mathrm{P}(\tilde{\Omega}_{M_0}) = 1 - 0 = 1.$$

Por tanto f es constante $\mathrm{P} - q.t.p.$.

■

Operadores Ergódicos

Sea $\{v_\omega(n)\}_{n\in\mathrm{Z}^d}$ un proceso estocástico ergódico. Entonces existe una transformación que preserva medida $\{T_i\}$ en Ω tal que

$$v_{T_i\omega(n)} = v_\omega(n - i) \tag{34}$$

y cualquier subconjunto A de Ω invariante por $\{T_i\}$ tiene probabilidad $\mathrm{P}(A) = 0$ o $\mathrm{P}(A) = 1$.

La siguiente definición é una noción natural de isomorfismo entre espacios con producto interno

Definición 13 *Un operador lineal $U : (X, \langle .,. \rangle_X) \to (Y, \langle .,. \rangle_Y)$, entre dos espacios con producto interno, es unitario si fuera sobreyectiva en Y y $\langle \xi, \eta \rangle_X = \langle U\xi, U\eta \rangle_Y$ para todos ξ, η X. Si existe tal operador unitario, entonces los espacios X e Y son llamados unitariamente equivalentes.*

Proposición 5 *Si A es un operador positivo y U un operador unitario, entonces*

$$tr(UAU^{-1}) = tr(A). \tag{35}$$

A seguir daremos una importante definición que fue introducida por la primera vez por Pastur.

Definición 14 *Sean $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $\{T_n\}_{n\in I}$ transformaciones que preservan medida. Una familia de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ sobre un espacio de Hilbert H es llamada ergódica si existen operadores unitarios $\{U_n\}_{n\in I}$ sobre H tales que*

$$H_{T_n\omega} = U_n H_\omega U_n^*$$

donde U_n^* denota adjunto de U_n.

El próximo resultado nos dice que el modelo de Anderson discreto H_ω es ergódico.

Proposición 6 *La familia de operadores* $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$*, donde* $H_\omega = H_0 + V_\omega$*, es ergódica.*

Demostración. (i) Para $\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ e $n, m \in \mathbb{Z}^d$, sea $(U_n\phi)(m) = \phi(m+n)$ la sucesión de operadores traslación (unitarios) sobre $l^2(\mathbb{Z}^d)$ con sus correspondientes adjuntos $(U_n^*\phi)(m) = \phi(m-n)$. Tenemos que $V_{T_n\omega} = U_n V_\omega U_n^*$. En efecto, para todo $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\begin{aligned}
(U_n V_\omega U_n^*\varphi)(m) &= U_n V_\omega U_n^*\varphi(m)\\
&= U_n(V_\omega\varphi)(m-n)\\
&= U_n v_\omega(m-n)\varphi(m-n)\\
&= v_\omega(m-n)(U_n\varphi)(m-n)\\
&= v_\omega(m-n)\varphi(m)\\
&= v_{T_n\omega}(m)\varphi(m)\\
&= (V_{T_n\omega}\varphi)(m).
\end{aligned}$$

Luego, por la Definición 14, V_ω es ergódico.
(ii) Notemos que $H_0U_n = U_nH_0$. En efecto, para todo $\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ y $k \in \mathbb{Z}^d$ tenemos

$$(H_0U_n\phi)(k) = \sum_{|m-k|_1=1} (U_n\phi)(m) - (U_n\phi)(k) = \sum_{|m-k|_1=1} (\phi(m-n) - \phi(k-n)).$$

Por otro lado,

$$(U_nH_0\phi)(k) = U_n \sum_{|m-k|_1=1} (\phi(m) - \phi(k)) = \sum_{|m-k|_1=1} (\phi(m-n) - \phi(k-n)).$$

Luego, $H_0U_n = U_nH_0$. Así, por (i) y (ii) tenemos

$$\begin{aligned}
U_nH_\omega U_n^* &= U_nH_0U_n^* + U_nV_\omega U_n^*\\
&= H_0U_nU_n^* + U_nV_\omega U_n^*\\
&= H_0 + V_{T_n\omega}\\
&= H_{T_n\omega}\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Definición 14, H_ω es ergódico.

■

Teorema 11 (Projeção Ortogonal) *Si* E *es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*, entonces*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^\perp.$$

El subespacio $E^{\perp}$ *es llamado complemento ortogonal de E en* $\mathbb{H}$.

La demostración de este resultado puede ser encontrada en [13].

Definición 15 *Sea* $\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}$. *Se define el operador proyección ortogonal* P_E *sobre* E *por*

$$P_E : \mathcal{H} \longrightarrow E$$
$$\xi \longrightarrow P_E\xi = \xi_E,$$

siendo $\xi = \xi_E + \xi_{E^{\perp}}$, *con* $\xi_E \in E$ *e* $\xi_{E^{\perp}} \in E^{\perp}$.

Definición 16 *Decimos que una familia* $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *de operadores limitados sobre un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es débilmente medible si la aplicación* $\omega \longrightarrow \langle\phi, P_\omega\psi\rangle$ *fuera medible para cualquier* $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

Lema 1 *Supongamos que* $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *sea una familia débilmente medible de proyecciones ortogonales satisfaciendo*

$$P_{T_n\omega} = U_n P_\omega U_n^*$$

donde U_n *son operadores unitarios. Entonces* $dimRan(P_\omega) = 0$ $\mathbb{P}-$ *c.t.p. o* $dimRan(P_\omega) = \infty$ $\mathbb{P}-$ *c.t.p.*.

Demostracion. Como $\langle P_\omega\xi, \xi\rangle = \langle P_\omega^2\xi, \xi\rangle = \|P_\omega\xi\|^2 \geq 0$ para todo ξ, los operadores P_ω son positivos; se sigue que trP_ω es únicamente definido (posiblemente como $+\infty$). Fijando ω y escogiendo una base ortonormal $a_1(\omega), a_2(\omega), \ldots$ de Ran(P_ω) y una base ortonormal $b_1(\omega), b_2(\omega), \ldots$ de $(Ran(P_\omega))^{\perp}$, por el Teorema 11 tenemos que $l^2(\mathbb{Z}^d) = Ran(P_\omega) \oplus Ran(P_\omega)^{\perp}$, luego

$$\begin{aligned} tr(P_\omega) &= \sum_i \langle a_i(\omega), P_\omega a_i(\omega)\rangle + \sum_i \langle b_i(\omega), P_\omega b_i(\omega)\rangle \\ &= \sum_i \langle a_i(\omega), P_\omega a_i(\omega)\rangle \\ &= dimRan(P_\omega). \end{aligned}$$

Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ la base ortonormal canónica de $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Como la familia de operadores $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es débilmente medible, entonces $trP_\omega = \sum_i \langle e_i, P_\omega e_i\rangle$ es una variable aleatoria.

Veamos que trP_ω es invariante por T_i. En efecto, usando la Proposición 5 tenemos que

$$tr(P_{T_j\omega}) = tr(U_j P_\omega U_j^*) = tr(U_j P_\omega U_j^{-1}) = tr(P_\omega)$$

o sea, trP_ω es invariante por T_i. Luego, por la Proposición 4, tenemos que

$$dimRan(P_\omega) = tr(P_\omega)$$

es constante $\mathbb{P}-$ *c.t.p.*.

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
trP_\omega &= \mathbb{E}(trP_\omega) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, P_\omega e_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\langle e_i, P_\omega e_i\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_i, P_\omega e_i\rangle) \\
&= \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_i, U_i^* P_{T_i\omega} U_i e_i\rangle) \\
&= \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle U_i e_i, P_{T_i\omega} U_i e_i\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_0, P_{T_i\omega} e_0\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) \\
&= (2N+1)^d \mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) \quad \mathbb{P}-q.t.p..
\end{aligned}
$$

Como N puede ser tomado arbitrariamente, se sigue que $trP_\omega = 0$ si $\mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) = 0$ o $trP_\omega = \infty$ si $\mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) > 0$.

■

El siguiente resultado caracteriza el espectro de operadores ergódicos autoadjuntos (en particular, se aplica para el modelo de Anderson) como un conjunto no aleatorio c.t.p.. Compare con el Teorema 3.

Teorema 12 (Pastur) *Si H_ω es una familia de operadores ergódicos autoadjuntos, entonces existe un conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que $\sigma(H_\omega) = \Sigma$, para ω $\mathbb{P}$- c.t.p..*

Demostración. Denotemos por $E_\Delta(\omega)$ la proyección espectral de H_ω sobre un conjunto de Borel Δ. Como el operador H_ω es ergódico, entonces

$$H_{T_i\omega} = U_i H_\omega U_i^*.$$

Aplicando la función característica y usando el Lema 2 tenemos

$$\chi_\Delta(H_{T_i\omega}) = U_i \chi_\Delta H_\omega U_i^*.$$

De la definición de proyección espectral se tiene

$$E_\Delta(H_{T_i\omega}) = U_i E_\Delta H_\omega U_i^*.$$

Ahora mostraremos que para un conjunto de Borel Δ fijo, $E_\Delta(\omega)$ es débilmente medible, o sea, la aplicación $\omega \to \langle \phi, E_\Delta \psi\rangle$ es medible para todos $\phi, \psi, \in \mathcal{H}$. En efecto, como $\omega \to \langle \phi, H_\omega \psi\rangle$ es medible para todos $\phi, \psi \in \mathrm{H}$ y por la propriedad de bases ortonormales tenemos que $\langle \phi, H^2_\omega \psi\rangle = \langle H^*_\omega \phi, H_\omega \psi\rangle = \sum_n \langle \phi, H_\omega \delta_n\rangle\langle \delta_n, H_\omega \psi\rangle$, (vea [13]), entonces la aplicación $\omega \to \langle \phi, H^2_\omega \psi\rangle$ es medible para todos $\phi, \psi \in \mathrm{H}$. Luego, por inducción, H^n_ω es débilmente medible para cada $n \in \mathrm{N}$.

Por otro lado, es posible aproximar $E_\Delta(\omega)$ por ω-polinomios independientes en H_ω. Así, $E_\Delta(\omega)$ es débilmente medible, ya que todo polinomio de H_ω lo es. Como la familia $\{E_\Delta(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ satisface las condiciones del Lema 1, entonces $\dim Ran(E_\Delta(\omega)) = 0$ P *c.t.p.* o $\dim Ran(E_\Delta(\omega)) = \infty$ P *c.t.p.*.

Ahora, para cada par (p, q) de números racionales definamos la función η por

$$\eta(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = 0 \quad \mathrm{P} - q.t.p. \\ \infty & \text{si} \quad dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = \infty \quad \mathrm{P} - q.t.p. \end{cases}$$

Note que la función η está bien definida debido al Lema 1.

Definamos los conjuntos

$$\Omega_{p,q} = \{\omega \mid dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = \eta(p, q)\}$$

y

$$\Omega_0 = \bigcap_{p,q\in\mathrm{Q}} \Omega_{p,q}.$$

Como cada $\Omega_{p,q}$ tiene probabilidad 1 y la intersección sobre $p, q \in \mathrm{Q}$ es numerable, tenemos que $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$.

Ahora mostremos que si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$, entonces $\sigma(H_{\omega_1}) = \sigma(H_{\omega_2})$. En efecto, si $\lambda \notin \sigma(H_{\omega_1})$, por la Proposición 2 para todo λ_1, λ_2 con $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ suficientemente próximos de λ, tenemos

$$E_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = 0 \Longrightarrow dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = 0.$$

Como $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$, implica que $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{p,q}$, para todos $p, q \in \mathrm{Q}$. Luego para cada par $p, q \in \mathrm{Q}$,

$$dimRanE_{(p,q)}(\omega_1) = \eta(p, q) = dimRanE_{(p,q)}(\omega_2) \quad \mathrm{P} - c.t.p..$$

En particular, para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Q}$, con $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ suficientemente próximos de λ,

$$dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_2) = 0.$$

Luego

$$E_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_2) = 0.$$

Por la Proposición 2 $\lambda \notin \sigma(H_{\omega_2})$. Por tanto, $\sigma(H_{\omega_2}) \subset \sigma(H_{\omega_1})$. Invirtiendo los roles de ω_1 e ω_2 en el argumento anterior, se muestra que $\sigma(H_{\omega_1}) \subset \sigma(H_{\omega_2})$. Como ω_1, ω_2 son elementos arbitrarios de Ω_0 con $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$, se sigue que $\sigma(H_\omega)$ es constante P-c.t.p., lo que demuestra el teorema.

■

El siguiente resultado, cuya demostración puede ser encontrada en [19], será usado na próxima sección.

Lema 2 *Sean A un operador autoadjunto y U un operador unitario. Para cualquier función medible f se tiene*

$$f(UAU^*) = Uf(A)U^*.$$

5.1.4. La Densidad de Estados

En esta sección estudiamos la medida densidad de estados, introducida en la defición 2. Los conceptos y resultados abordados aquí pueden ser encontrados en las referencias [1, 10, 19, 45].

Existencia y propiedades de la medida Densidad de Estados

Sean $n_0 \in \mathbb{Z}^d$ y $L \in \mathbb{N}$. Se define el cubo de centro n_0 y radio L por $\Lambda_L(n_0)$

$$:= \{n \in \mathbb{Z}^d : \|n - n_0\|_\infty \leqslant L\}$$

y denotamos $\Lambda_L(0) = \Lambda_L$.

Para cualquier función medible limitada ϕ se define la cantidad

$$\xi_L(\phi) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\chi_{\Lambda_L}\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) \qquad (36)$$

donde χ_Λ denota la funcion caracter´ıstica del conjunto Λ y el operador $\phi(H_\omega)$ es definido v´ıa teorema espectral. Como ξ_L es un funcional linear positivo sobre el espacio de las funciones continuas acotadas, por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 2) existe una medida ν_L tal que

$$\xi_L(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\nu_L(\lambda). \qquad (37)$$

Definición 17 *Una sucesión ν_n de medidas de Borel en $\mathbb{R}$ diremos que converge para una medida de Borel ν si*

$$\int \phi(x)d\nu_n(x) \longrightarrow \int \phi(x)d\nu(x) \qquad \text{para toda } \phi \in C_0(\mathbb{R}),$$

donde $C_0(\mathbb{R})$ denota el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto.

Observacion 1 *En lo que sigue de este trabajo, cuando decimos que una sucesión de medidas converge para una medida nos referimos a este tipo de convergencia.*

El teorema a seguir muestra la convergencia de la medida ν_L para la medida densidad de estados ν (veja Definição 2 de la medida ν).

Teorema 13 *La medida ν_L converge para la medida ν $\mathbb{P}$–c.t.p., esto es, existe un conjunto Ω_0 con probabilidad 1 tal que*

$$\int \phi(\lambda)d\nu_L(\lambda) \longrightarrow \int \phi(\lambda)d\nu(\lambda),$$

para toda $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ y para todo $\omega \in \Omega_0$.

Demostración. Tomemos un conjunto numerable y denso $D_0 \subset C_0(\mathbb{R})$ con la topologia de la convergencia uniforme. Sea el conjunto Ω_ϕ con $\mathbb{P}(\Omega_\phi) = 1$ para el cual el teorema anterior es válido. Luego, el conjunto

$$\Omega_0 = \bigcap_{\phi \in D_0} \Omega_\phi$$

tiene probabilidad 1, pues Ω_0 es intersección numerable de conjuntos de probabilidad 1. Como D_0 es denso en $C_0(\mathbb{R})$, si $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ existe $\phi_n \in D_0$ tal que $\phi_n \to \phi$ uniformemente y usando la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int \phi(\lambda)d\nu(\lambda) - \int \phi(\lambda)d\nu_L(\lambda) \right| &\leqslant \left| \int \phi(\lambda)d\nu(\lambda) - \int \phi_n(\lambda)d\nu(\lambda) \right| \\
&+ \left| \int \phi_n(\lambda)d\nu(\lambda) - \int \phi_n(\lambda)d\nu_L(\lambda) \right| \\
&+ \left| \int \phi_n(\lambda)d\nu_L(\lambda) - \int \phi(\lambda)d\nu_L(\lambda) \right| \\
&\leqslant \|\phi - \phi_n\|_\infty \cdot \nu(\mathbb{R}) + \|\phi - \phi_n\|_\infty \cdot \nu_L(\mathbb{R}) \\
&+ \left| \int \phi_n(\lambda)d\nu(\lambda) - \int \phi_n(\lambda)d\nu_L(\lambda) \right| .
\end{aligned}$$

Como $\phi_n \in D_0$ e $\phi_n \longrightarrow \phi$ uniformemente, se sigue que

$$\int \phi(\lambda)d\nu_L(\lambda) \longrightarrow \int \phi(\lambda)d\nu(\lambda),$$

para toda $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ y para todo $\omega \in \Omega_0$.

■

A seguir enunciamos y demostramos un resultado que será usado posteriormente. Tal resultado es usado como motivacion para introducir la medida densidad de estados.

Proposición 7 *Si ϕ es una función medible acotada, entonces para ω $\mathbb{P}$-c.t.p.*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \mathbb{E}(\langle \delta_0, \phi(H_\omega)\delta_0 \rangle).$$

Demostración. Por la definición de la traza de un operador tenemos

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i\in\Lambda_L} \langle \delta_i, \phi(H_\omega \; i$$

$)\delta)$.

Note que la familia de variables aleatorias $X_i(\omega) = \langle\delta_i, \phi(H_\omega)\delta_i\rangle$ es ergódica. En efecto, como los operadores H_ω son ergódicos y usando el Lema 2, se tiene que

$$\begin{aligned} X_i(T_j\omega) &= \langle\delta_i, \phi(H_{T_j\omega})\delta_i\rangle \\ &= \langle\delta_i, \phi(U_j H_\omega U_j^*)\delta_i\rangle \\ &= \langle\delta_i, U_j\phi(H_\omega)U_j^*\delta_i\rangle \\ &= \langle U_j^*\delta_i, \phi(H_\omega)U_j^*\delta_i\rangle \\ &= \langle\delta_{i-j}, \phi(H_\omega)\delta_{i-j}\rangle \\ &= X_{i-j}(\omega), \end{aligned}$$

donde utilizamos la igualdad $U_j^*\delta_i(n) = \delta_i(n+j) = \delta_{i-j}(n)$. Por otro lado, como

$$\begin{aligned} |X_i| &= |\langle\delta_i, \phi(H_\omega)\delta_i\rangle| \\ &= \left|\int_{\sigma(H_\omega)} \phi(\lambda)d\mu_{\delta_i,\delta_i}(\lambda)\right| \\ &\leqslant \text{máx}\,|\phi(\lambda)| \left|\int_{\sigma(H_\omega)} d\mu_{\delta_i,\delta_i}(\lambda)\right| \\ &\leqslant \|\phi\|_\infty, \end{aligned}$$

las variables aleatorias X_i son integrables (con respecto a la medida $\mathbb{P}$). Aplicando el Teorema de Birkhoff (Teorema 4) tenemos

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\phi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} X_i \to \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(\langle\delta_0, \phi(H_\omega)\delta_0\rangle),$$

cuando $L \to \infty$.

■

Lema 3 *Si una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, entonces F tiene una cantidad numerable de puntos de discontinuidad.*

Demostración. Como F es monótona existen $F(t_-) = \text{lím}_{s\nearrow t} F(s)$ e $F(t_+) = \text{lím}_{s\searrow t} F(s)$. Si F es descontinua en $t \in \mathbb{R}$, entonces $F(t_+) - F(t_-) > 0$. Sea el conjunto

$$D_n = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; F(t_+) - F(t_-) > \frac{1}{n} \right\}.$$

El conjunto D de los puntos de discontinuidad de F es dado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Supongamos que D no es numerable. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que D_n no es numerable. Como la función F es monótona y definida en todo $\mathbb{R}$, ella será acotada en cualquier intervalo. Luego, $D_n \bigcap [-M, M]$ es finito para cualquier $M \in \mathbb{R}$. De ahí se sigue que $D_n = \bigcup_{M\in\mathbb{N}}(D_n \bigcap [-M, M])$ es numerable, lo que es una contradicción.

■

Sea $N(E) = \nu((-\infty, E])$ la densidad integrada de estados para H_ω (vea Definición 2).

Corolario 2 *Para ω P− c.t.p., el siguiente resultado es valido: Para todo $E \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$N(E) = \lim_{L\to\infty} \nu_L((-\infty, E]).$$

Demostración. Inicialmente mostraremos el resultado para energías E en que N es continua. Sea D el conjunto de los puntos de discontinuidad de N, como N es monótona creciente por el Lema 3, D es como máximo numerable, luego D es magro en $\mathbb{R}$ consecuentemente $\mathbb{R}\backslash D$ es denso en $\mathbb{R}$, ya que el complemento de todo subconjunto magro en $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ (veja [13]). Como $\mathbb{R}$ es separable $\mathbb{R}\backslash D$ es separable, luego existe un conjunto numerable S de puntos de continuidad de N denso en $\mathbb{R}$. Por la Proposicion 7 existe un conjunto con probabilidad 1 tal que

$$\int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) \longrightarrow N(E) \qquad \text{cuando } L \longrightarrow \infty,$$

para todo $E \in S$. Donde usamos la ecuación 37

Tome $\varepsilon > 0$. Sea E un punto de continuidad arbitrario de N. Por la densidad de S en $\mathbb{R}$ y continuidad de N, existen $E_-, E_+ \in S$ con $E_- \leq E \leq E_+$ tales que$N(E_+) - N(E_-) < \varepsilon/2$. Y como N es creciente tenemos

$$\begin{aligned} N(E) - \int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) &\leqslant N(E_+) - \int \chi_{(-\infty,E_-]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) \\ &\leqslant N(E_+) - N(E_-) + N(E_-) - \int \chi_{(-\infty,E_-]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} N(E) - \int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) &\geqslant N(E_-) - \int \chi_{(-\infty,E_+]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) \\ &\geqslant N(E_-) - N(E_+) - N(E_+) - \int \chi_{(-\infty,E_+]}(\lambda)d\nu_L(\lambda) \\ &\geqslant -\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego el resultado es válido para todo E perteneciente al conjunto de puntos de continuidad de N. Como los puntos de discontinuidad de N son numerables, porla Proposición 7 se tiene el resultado para estos puntos, por tanto para todos los puntos E.

■

El siguiente resultado establece una relación entre el espectro del operador y el soporte de la medida densidad de estados.

Teorema 14 *Para el modelo de Anderson discreto H_ω tenemos que*

$$supp(\nu) = \sigma(H_\omega) \tag{38}$$

donde $supp(\nu)$ denota el soporte de la medida densidad de estados ν.

Demostración. (i) Sea $\lambda \notin \sigma(H_\omega)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega) = 0$ $\mathbb{P}$-c.t.p.. Como $\nu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) = \mathbb{E}[\langle\delta_0, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_0\rangle] = 0$, se sigue de la definición de supp(ν) que supp(ν) $\subset \sigma(H_\omega)$.
(ii) Sea $\lambda \in \sigma(H_\omega)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega) \neq 0$ $\mathbb{P}$−c.t.p.. Como $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)$ es una proyección, existe $n \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\mathbb{E}[\langle\delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_n\rangle] \neq 0.$$

Por otro lado, como H_ω es ergódico tenemos

$$H_{T_n\omega} = U_n H_\omega U_n^*$$

Además, $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$ es medible. Entonces, por el Lema 2

$$\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_{T_n\omega}) = U_n\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)U_n^*$$

De ahí,

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathbb{E}[\langle\delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_n\rangle] \\ &= \mathbb{E}[\langle\delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}U_n^*(H_{T_n\omega})U_n\delta_n\rangle] \\ &= \mathbb{E}[\langle\delta_0, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_0\rangle] \\ &= \nu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)). \end{aligned}$$

De la definición de soporte obtenemos $\sigma(H_\omega) \subset$ supp(ν). el resultado se sigue de (i) y (ii).

■

El siguiente lema, cuya demostración puede ser encontrada en [19], será fundamental en la demostración del Teorema 15.

Lema 4 *Si $\mathbb{V}_\lambda$ es el espacio propio para H_ω asociado al valor propio λ, entonces*

$$dim(\chi_{\Lambda_L}(\mathbb{V}_\lambda)) \leq CL^{d-1}$$

para alguna constante $0 < C < \infty$.

No es difícil ver que a densidad integrada de estados $N(\lambda)$ es una función continua, lo que es equivalente a la afirmación que ν não tiene átomos, o sea, $\nu(\{\lambda\}) = 0$ para todo λ (vea [10]). Esto es el resultado del próximo teorema.

Teorema 15 *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu(\{\lambda\}) = 0$.*

Demostración. Aplicando la Proposición 7 tenemos

$$\nu(\{\lambda\}) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L+1)^d}\ tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)).$$

Si f_i es una base ortonormal de $\chi_{\Lambda_L}(\mathbb{V}_\lambda)$ y g_i una base ortonormal de $\chi_{\Lambda_L}(\mathbb{V}_\lambda)^{\perp}$, tenemos

$$\begin{aligned} tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)) &= \sum_i \langle f_i, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) f_i\rangle + \sum_j \langle g_j, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) g_j\rangle \\ &= \sum_i \langle f_i, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) f_i\rangle \\ &\leqslant \dim(\chi_{\Lambda_L}(\mathbb{V}_\lambda)) \leq CL^{d-1}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos el Lema 4. De ahí,

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L+1)^d} tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)) \leq C \lim_{L\to\infty} \frac{L^{d-1}}{(2L+1)^d} = 0.$$

Por tanto, $\nu(\{\lambda\}) = 0$.

■

Condicioneses de Frontera

Condiciones de frontera son usadas para definir operadores diferenciales sobre conjuntos M con frontera. Denotamos por $-\Delta^N_M$ e $-\Delta^D_M$ el Laplaciano en $L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$, con condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet respectivamente.

Para nuestro propósito el punto más importante de las condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet es el llamado bracketing Dirichlet-Neumann, que es el siguiente: Si M_1, M_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^d$ y $M = \text{int}(\overline{M_1 \cup M_2})$, entonces

$$-\Delta^N_{M_1} \oplus -\Delta^N_{M_2} \leqslant -\Delta^N_M \leqslant -\Delta^D_M \leqslant -\Delta^D_{M_1} \oplus -\Delta^D_{M_2}. \tag{39}$$

Nuestro objetivo en esta sección es obtener relaciones análogas a la ecuación (39) para el Laplaciano discreto H_0, las cuales serán usadas en el próximo capítulo en la demostración de Lifshitz tails.

Definición 18 *El Laplaciano discreto con condiciones de frontera simples sobre el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ es el operador H_0 sobre el espacio $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)_\Lambda(n,m) = \langle \delta_n, H_0\delta_m\rangle,$$

donde $n, m \in \Lambda$.

Dado el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $H = H_0 + V$, se define el operador $H_\Lambda = (H_0)_\Lambda + V$, donde V es el operador de multiplicación por la función v restrito a Λ.

La frontera de Λ es el conjunto $\partial\Lambda$ definido por

$$\partial\Lambda = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \ : \ \|n-m\|_1 = 1 \ \text{e} \ n \in \Lambda, m \notin \Lambda \ \text{o} \ n \notin \Lambda, m \in \Lambda\}.$$ Además,

se define la frontera interior de Λ por

$$\partial^{-}\Lambda = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid n \in \Lambda, \ \exists \ m \notin \Lambda \ \text{ con } (n, m) \in \partial\Lambda\}$$

y la frontera exterior de Λ por

$$\partial^+\Lambda = \{m \in \mathbb{Z}^d \mid m \notin \Lambda,\ \exists\, n \in \Lambda \text{ con } (n,m) \in \partial\Lambda\}.$$

De las definiciones anteriores note que $\partial^+\Lambda = \partial^-(\complement\Lambda)$.

Para un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ se define el operador de frontera Γ_Λ por

$$\Gamma_\Lambda(n,m) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad (n,m) \in \partial\Lambda, \\ 0 & \text{si} \quad (n,m) \notin \partial\Lambda. \end{cases}$$

Así, el operador de Schrödinger discreto $H = H_0 + V$ puede ser escrito como

$$H = H_\Lambda \oplus H_{\complement\Lambda} + \Gamma_\Lambda, \tag{40}$$

con $l^2(\mathbb{Z}^d) = l^2(\Lambda) \oplus l^2(\complement\Lambda)$ y

$$(H_\Lambda \oplus H_{\complement\Lambda})(n,m) = \begin{cases} H_\Lambda(n,m) & \text{si} \quad n,m \in \Lambda, \\ H_{\complement\Lambda}(n,m) & \text{si} \quad n,m \notin \Lambda, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El número de puntos adyacentes a $i \in \Lambda$ es dado por

$$n_\Lambda(i) = \left|\{j \in \Lambda \ : \ \|j - i\|_1 = 1\}\right| \tag{41}$$

donde $|B|$ denota el número de elementos del conjunto B.

Se define la matriz adyacencia restringido al conjunto Λ por

$$A_\Lambda(n,m) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad n,m \in \Lambda,\ \|n-m\|_1 = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De la matriz adyacencia, usando la relación (22), tenemos el operador A_Λ dado por

$$(A_\Lambda u)(i) = -\sum_{j:\|j-i\|_1=1} u(j) \quad \text{para todos } i,j \in \Lambda$$

y de ahí el operador $(H_0)_\Lambda$ sobre $l^2(\Lambda)$ puede ser escrito como

$$(H_0)_\Lambda = 2d + A_\Lambda.$$

Definición 19 *El Laplaciano discreto con condiciones de frontera de Neumann sobre el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ es el operador $(H_0)^N_\Lambda$ sobre $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)^N_\Lambda = n_\Lambda + A_\Lambda,$$

donde n_Λ es el operador de multiplicación por la función $n_\Lambda(i)$.

Definición 20 *El Laplaciano discreto con condiciones de frontera de Dirichlet sobre el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ es el operador $(H_0)^D_\Lambda$ sobre $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)^D_\wedge = 2d + (2d - n_\wedge) + A_\wedge.$$

La definición anterior del Laplaciano discreto de Dirichlet garantiza un análogo discreto de la desigualdad (39).

A seguir presentaremos algunos resultados sobre los tres tipos de Laplaciano. Dado el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$(H_0)^N_\Lambda \leq (H_0)_\Lambda \leq (H_0)^D_\Lambda$$

y

$$\begin{aligned} H_0 &= (H_0)^N_\Lambda \oplus (H_0)^N_{C\Lambda} + \Gamma^N_\Lambda \\ &= (H_0)^D_\Lambda \oplus (H_0)^D_{C\Lambda} + \Gamma^D_\Lambda \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma^N_\Lambda(i,j) = \begin{cases} 2d - n_\Lambda(i) & \text{si } i = j,\ i \in \Lambda, \\ 2d - n_{C\Lambda}(i) & \text{si } i = j,\ i \in C\Lambda, \\ -1 & \text{si } (i,j) \in \partial\Lambda, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y

$$\Gamma^D_\Lambda(i,j) = \begin{cases} 2d - n_\Lambda(i) & \text{se } i = j,\ i \in \Lambda, \\ n_{C\Lambda}(i) - 2d & \text{si } i = j,\ i \in C\Lambda, \\ -1 & \text{si } (i,j) \in \partial\Lambda, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La forma cuadrática del operador Γ^N_Λ es dada por

$$\langle u, \Gamma^N_\Lambda v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\partial\Lambda} \overline{(u(i) - u(j))}(v(i) - v(j))$$

y del operador Γ^D_Λ por

$$\langle u, \Gamma^D_\Lambda v\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\partial\Lambda} \overline{(u(i) + u(j))}(v(i) + v(j)).$$

Note que el operador Γ^N_Λ es definido positivo y Γ^D_Λ es definido negativo. Como consecuencia inmediata de este hecho tenemos el siguiente resultado (análogo discreto de la ecuación (39)):

Para un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$(H_0)^N_\Lambda \oplus (H_0)^N_{C\Lambda} \leq H_0 \leq (H_0)^D_\Lambda \oplus (H_0)^D_{C\Lambda}.$$

Dado el conjunto Λ y el operador $H = H_0 + V$, definimos los operadores

$$H^N_\Lambda = (H_0)^N_\Lambda + V$$

y

$$H^D_\wedge = (H_0)^D_\wedge + V.$$

Estos operadores satisfacen

$$H_\Lambda^N \oplus H_{C\Lambda}^N \le H \le H_\Lambda^D \oplus H_{C\Lambda}^D.$$

Sean los conjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$ con $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Definimos la frontera relativa $\partial_{\Lambda_2}\Lambda_1$ de Λ_1 en Λ_2 por

$$\begin{aligned}\partial_{\Lambda_2}\Lambda_1 &= \partial\Lambda_1 \cap (\Lambda_2 \times \Lambda_2)\\ &= \{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \;:\; \|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\|_1 = 1 \text{ e } \boldsymbol{i} \in \Lambda_1, \boldsymbol{j} \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \text{ ou } \boldsymbol{i} \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \boldsymbol{j} \in \Lambda_1\}.\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$H_{\Lambda_2} = H_{\Lambda_1} \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1} + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}, \tag{42}$$

$$H_{\Lambda_2}^N = H_{\Lambda_1}^N \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}^N + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2 N}, \tag{43}$$

$$H_{\Lambda_2}^D = H_{\Lambda_1}^D \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}^D + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2 D}, \tag{44}$$

donde

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_1,\\ 0 & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1,\\ -1 & \text{si } (i,j) \in \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1,\\ 0 & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2 N}(i,j) = \begin{cases} n_{\Lambda_2}(i) - n_{\Lambda_1}(i) & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_1,\\ n_{\Lambda_2}(i) - n_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(i) & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1,\\ -1 & \text{si } (i,j) \in \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1,\\ 0 & \text{caso contrario,}\end{cases}$$

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2 D}(i,j) = \begin{cases} n_{\Lambda_1}(i) - n_{\Lambda_2}(i) & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_1,\\ n_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(i) - n_{\Lambda_2}(i) & \text{si } i=j,\ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1,\\ -1 & \text{si } (i,j) \in \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1,\\ 0 & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

En particular, para $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ con Λ_1 y Λ_2 disjuntos, tenemos

$$H_{\Lambda_1}^N \oplus H_{\Lambda_2}^N \leqslant H_\Lambda^N \leqslant H_\Lambda^D \leqslant H_{\Lambda_1}^D \oplus H_{\Lambda_2}^D \tag{45}$$

pues $\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda\, N} \ge 0$ e $\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda\, D} \le 0$.

El siguiente corolario generaliza la relación (45).

Corolario 3 *Sea $\Lambda_L \subset \mathbb{Z}^d$ la unión disjunta de conjuntos Λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Entonces*

$$\bigoplus H \leqslant \bigoplus H . \tag{46}$$

$$\mathop{}_{k=1}^{m} \; {}^{N}_{\Lambda_k} \leqslant H^{N}_{\Lambda_L} \leqslant H^{D}_{\Lambda_L} \; \mathop{}_{k=1}^{m} \; {}^{D}_{\Lambda_k}$$

Enfoque Alternativo para la Densidad de Estados

En la presente sección damos una definición alternativa para la medida densidad de estados.

En la primera parte de este trabajo definimos la densidad de estados iniciando con una función ϕ del operador H_ω, tomando su traza restringido a un cubo Λ_L y normalizando esa traza. En este segundo abordaje, primero restringimos el operador a Λ_L con condiciones de contorno apropiadas, aplicamos la función ϕ al operador H_ω restringido y después tomamos la traza normalizado.

Para un conjunto Λ denotemos por H_Λ^X cualquiera de los siguientes operadores: H_Λ, H_Λ^N o H_Λ^D. Se define la medida $\tilde{\nu}_L^X$ (esto es, $\tilde{\nu}_L$, $\tilde{\nu}_L^N$, $\tilde{\nu}_L^D$) por

$$\int \phi(\lambda)d\tilde{\nu}_L^X(\lambda) = \frac{1}{|\Lambda_L|}\, tr\phi(H_{\Lambda_L}^X). \tag{47}$$

Note que el operador $H_{\Lambda_L}^X$ actúa sobre el espacio de Hilbert $l^2(\Lambda_L)$ de dimensión finita, luego el espectro de $H_{\Lambda_L}^X$ esta formado por sus valores propios que pueden ser enumerados en orden creciente

$$E_0(H_{\Lambda_L}^X) \leqslant E_1(H_{\Lambda_L}^X) \leqslant \dots .$$

Usando esta notación en la relación(47) tenemos

$$\int \phi(\lambda)d\tilde{\nu}_L^X(\lambda) = \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_n \phi(E_n(H_{\Lambda_L}^X)). \tag{48}$$

Definimos la función que cuenta los valores propios para el operador $H_{\Lambda_L}^X$ por

$$N(H_{\Lambda_L}^X, E) = |\{n : E_n(H_{\Lambda_L}^X) < E\}|,$$

donde $|M|$ denota el número de elementos de M. Entonces, $\frac{1}{|\Lambda_L|}N(H_{\Lambda_L}^X, E)$ es la función distribución de la medida $\tilde{\nu}_L^X$, o sea,

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\, N(H_{\Lambda_L}^X, E) = \int \chi_{(-\infty,E)}(\lambda)d\tilde{\nu}_L^X(\lambda).$$

Teorema 16 *Las medidas $\tilde{\nu}_L$, $\tilde{\nu}_L^N$ y $\tilde{\nu}_L^D$ convergen $\mathbb{P}$-c.t.p. para la medida densidad de estados ν.*

Demostración.

Mostraremos el resultado para la medida $\tilde{\nu}_L$; para $\tilde{\nu}_L^N$ y $\tilde{\nu}_L^D$ son análogos. Para mostrar que $\tilde{\nu}_L$ converge para ν es suficiente mostrar que

$$\int \phi(\lambda)d\tilde{\nu}_L(\lambda) \to \int \phi(\lambda)d\nu(\lambda) \qquad \text{cuando } L \to \infty,$$

para toda ϕ de la forma

$$\phi(\lambda) = r_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

ya que la combinación lineal de esas funciones es una subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa puntos (veja exemplo 1), consecuentemente es densa en $C_\infty(\mathbb{R})$ por el Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 9). Note que

$$\int r_z(\lambda)\,d\tilde{\nu}_L(\lambda) = \frac{1}{(2L+1)^d}\, tr((H_{\Lambda_L} - z)^{-1}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{n\in\Lambda_L} (H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,n)$$

y

$$\int r_z(\lambda)\,d\nu(\lambda) = \frac{1}{(2L+1)^d}\, tr(\chi_{\Lambda_L}(H-z)^{-1}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{n\in\Lambda_L} (H-z)^{-1}(n,n).$$

Usando la ecuación del resolvente (16) y la relación (40), tenemos para $n \in \Lambda_L$:

$$\begin{aligned}
&(H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,n) - (H-z)^{-1}(n,n)\\
&= \left((H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(H - H_{\Lambda_L})(H-z)^{-1}\right)(n,n)\\
&= \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,\,k'\in C\Lambda_L}} (H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,k)\ \Gamma_{\Lambda_L}(k,k')\ (H-z)^{-1}(k',n)
\end{aligned}$$

con $\Gamma_{\Lambda_L}(k,k') = -1$, pues $(k,k') \in \partial\Lambda_L$. De ahí, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n\in\Lambda_L} (H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,n) - (H-z)^{-1}(n,n)\Big|\\
&= \Big|\sum_{n\in\Lambda_L} \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,\,k'\in C\Lambda_L}} (H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,k)\ (H-z)^{-1}(k',n)\Big|\\
&\leqslant \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,\,k'\in C\Lambda_L}} \left(\sum_n \big|(H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,k)\big|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_n \big|(H-z)^{-1}(k',n)\big|^2\right)^{1/2}\\
&= \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,\,k'\in C\Lambda_L}} \|(H_{\Lambda_L} - z)^{-1}\delta_k\| \cdot \|(H-z)^{-1}\delta_{k'}\|\\
&\leqslant cL^{d-1}\|(H_{\Lambda_L} - z)^{-1}\| \cdot \|(H-z)^{-1}\|\\
&\leqslant \frac{c}{(Im\, z)^2} L^{d-1},
\end{aligned}$$

donde usamos la identidad de Parseval (Teorema 6). Por tanto,

$$\left|\int r_z(\lambda)\,d\tilde{v}_L(\lambda) - \int r_z(\lambda)\,dv(\lambda)\right| \leqslant \frac{c'}{(Im\, z)^2}\frac{1}{L} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } L \longrightarrow \infty.$$

Como el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto $C_0(\mathrm{R})$ es denso en $C_\infty(\mathrm{R})$ tenemos el resultado para toda $\phi \in C_0(\mathrm{R})$.

■

5.1.5. Lifshitz Tails

En este sección estudiaremos el fenómeno llamado Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, el cual establece un decaimiento exponencial para la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energía E converge para el ínfimo (o supremo) del espectro. Referencias generales para este sección son [1, 19, 21, 44, 45].

Resultados Preliminares para la Densidade Integrada de Estados

Comenzaremos enunciando y demostrando algunos resultados que serán utilizados en esta sección.

Teorema 17 *Sea H_ω una familia de operadores ergódicos en $l^2(\mathbb{Z}^d)$ y $(H_L)_{L\in\mathbb{N}}$ una secesión de operadores tales que para ω $\mathbb{P}$-c.t.p. se tiene*

1. $\chi_L H_L = H_L \chi_L$;
2. $tr|\chi_L H_L - \chi_L H_\omega| < \infty$ y $\quad \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} tr|\chi_L H_L - \chi_L H_\omega| = 0.$

Entonces existe un conjunto Ω_0 con probabilidad 1 de modo que

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L f(H_L) = \int_{\mathbb{R}} f(u)dv(u)$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$ e $\omega \in \Omega_0$, donde v es la medida densidad de estados.

Demostración. Definimos la medida u_L por

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)du_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L f(H_L).$$

Para demostrar el teorema debemos mostrar que la medida u_L converge para la medida v.

Para eso es suficiente demostrar que

$$\int f(u)du_L(u) \longrightarrow \int f(u)dv(u), \qquad \text{cuando } L \to \infty,$$

para toda función f de la forma

$$f(u) = r_z(u) = \frac{1}{u-z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

ya que la combinación lineal de esas funciones es una subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa puntos (vea ejemplo 1), consecuentemente es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$ por el Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 9). Usando que

$$\int r_z(u)du_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L(r_z(H_L))$$

y

$$\int r_z(u)\,d\nu_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|}\, tr\chi_L(r_z(H_\omega))$$

$|\Lambda_L|$ L z L

tenemos

$$\left|\frac{1}{|\Lambda_L|}tr\chi_L(r_z(H_L)) - \frac{1}{|\Lambda_L|}tr\chi_L(r_z(H_\omega))\right|$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_L|}\left|tr\chi_L[r_z(H_L) - r_z(H_\omega)]\right|$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_L|}\left|tr\chi_L[r_z(H_L)(H_\omega - H_L)r_z(H_\omega)]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Lambda_L|}|Imz|^{-2}tr\left|\chi_L(H_\omega - H_L)\right| \longrightarrow 0, \qquad \text{quando } L \to \infty,$$

donde utilizamos la ecuación del resolvente y la desigualdad $\|r_z(H)\| \leqslant \frac{1}{|Imz|}$. Así,

$$\left|\int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)dv_L(u)\right| \longrightarrow 0, \text{ cuando } L \to \infty.$$

Pero del Teorema 13 sabemos que existe un conjunto Ω_0 con probabilidad 1 de modo que

$$\int r_z(u)dv_L(u) \longrightarrow \int r_z(u)dv(u)$$

para todo $\omega \in \Omega_0$. Luego, usando la desigualdad triangular tenemos

$$\left|\int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)dv(u)\right|$$

$$\leq \left|\int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)dv_L(u)\right| + \left|\int r_z(u)dv_L(u) - \int r_z(u)dv(u)\right|$$

que implica

$$\left|\int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)dv(u)\right| \longrightarrow 0, \text{ cuando } L \to \infty.$$

Por tanto, concluimos que u_L converge para la medida v P-c.t.p..

■

Corolario 4 *Con las condiciones dadas en el Teorema 17 se tiene*

$$N(E) = \lim_{L\to\infty} u_L((-\infty, E]) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|}N(H_L, E)$$

para ω P-c.t.p. y para todo $E \in \mathbb{R}$.

Demostración. Inicialmente mostraremos el resultado para energías E, donde $N(E)$ es continua. Como N es monótona creciente, por el Lema 3 el conjunto de los puntos de discontinuidad de N es como máximo numerable; de ahí existe un conjunto numerable S de puntos de continuidad de N denso en $\mathbb{R}$. Como

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\,d\mu_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \operatorname{tr} \chi_L f(H_L),$$

entonces

$$u_L((-\infty, E]) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L\chi_{(-\infty,E]}(H_L).$$

Por el Teorema 17 existe un conjunto con probabilidad 1 tal que

$$\int \chi_{(-\infty,E]}(u)du_L(u) \longrightarrow N(E)$$

para todo $E \in S$. Luego, prosiguiendo de forma análoga como en el Corolario 2, cambiando la medida v_L por la medida u_L y usando la igualdad

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}N(H_L, E) = \int \chi_{(-\infty,E]}(u)du_L(u),$$

se concluye la demostración.

■

Lema 5 *Considere el modelo de Anderson $H_\omega = H_0 + V_\omega$. Para todo $l > 0$ y para cada $E \in \mathrm{R}$ se tiene*

$$\frac{1}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \leq N(E) \leq \frac{1}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Demostración. Para $L > l > 0$, consideremos el cubo Λ_L grande siendo la unión disjunta de cubos pequeños $\Lambda_{l,k}$ con lado lateral l fijo. Por el Corolario 3 y Corolario 1 obtenemos

$$\sum_k N(H^D_{\Lambda_{l,k}}, E) \leq N(H^D_{\Lambda_L}, E) \leq N(H^N_{\Lambda_L}, E) \leq \sum_k N(H^N_{\Lambda_{l,k}}, E).$$

Tomando la esperanza matemática,

$$\mathrm{E}[\sum_k N(H^D_{\Lambda_{l,k}}, E)] \leq \mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathrm{E}[\sum_k N(H^N_{\Lambda_{l,k}}, E)].$$

Como existen $\frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}$ términos independientes e idénticamente distribuidos en cada suma, se sigue que

$$\frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \leq \mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Dividiendo por Λ_L,

$$\frac{1}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathrm{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_l|}\mathrm{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Tomando el limite cuando $L \longrightarrow \infty$ y aplicando el Corolario 4, se sigue el resultado.

■

Lema 6 *Sea $H_\omega = H_0 + V_\omega$ el modelo de Anderson. Para todo $L > 0$ y para cada $E \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \le \mathbb{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L}) < E)$$

y

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \ge \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{P}(E_0(H^D_{\Lambda_L}) < E).$$

Demostración. Por la definición de $N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)$, donde $\#$ denota las condiciones de frontera, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{|\Lambda_L|-1} \chi_{(-\infty,E)}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{|\Lambda_L|-1} \mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E) \ge 0$ tenemos

$$\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] \ge \mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E) \le \mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

De ahí,

$$\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] \le |\Lambda_L|\,\mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

■

El próximo resultado es la desigualdad de Temple, que será usada más adelante para obtener un limite superior para la densidad integrada de estados $N(E)$.

Lema 7 (Desigualdade de Temple). *Sean A un operador autoadjunto, $E_0 = \inf \sigma(A)$ un valor propio no degenerado y $E_1 = \inf(\sigma(A) \setminus \{E_0\})$. Se $\psi \in D(A)$ con $\|\psi\| = 1$ satisfaciendo*

$$\langle\psi, A\psi\rangle < E_1$$

entonces

$$E_0 \ge \langle\psi, A\psi\rangle - \frac{\langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2}{E_1 - \langle\psi, A\psi\rangle}.$$

Demostración. Por el teorema espectral tenemos

$$(A - E_1)(A - E_0) \ge 0.$$

De ahí, para cualquier $\psi \in D(A)$ con $\|\psi\| = 1$ se tiene

$$\langle\psi, A^2\psi\rangle - E_1\langle\psi, A\psi\rangle - E_0\langle\psi, A\psi\rangle + E_1E_0 \ge 0.$$

Luego,

$$E_1 E_0 - E_0\langle\psi, A\psi\rangle \geq E_1\langle\psi, A\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2 - (\langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2).$$

Como $E_1 - \langle\psi, A\psi\rangle > 0$, obtenemos

$$E_0 \geq \langle\psi, A\psi\rangle - \frac{\langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2}{E_1 - \langle\psi, A\psi\rangle}.$$

■

Ahora pasaremos a demostrar el Teorema 1 (Lifshitz tails) enunciado anteriormente en la introducción y para eso asumiremos las siguientes condiciones:

1. Las variables aleatorias $(v_\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}^d}$ son independientes idénticamente distribuidas, con distribución común P_0, cuyo soporte es limitado inferiormente, es decir, $a_0 := \inf \operatorname{supp} \mathrm{P}_0 > -\infty$. Por el Teorema 3 tenemos $E_0 := \inf \sigma(H_\omega) = a_0$.

2. La distribución P_0 no es trivial, o sea, para algún $C, \kappa > 0$ y todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathrm{P}_0([a_0, a_0 + \varepsilon)) \geq C\varepsilon^\kappa. \tag{49}$$

3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $E_0 = 0$. Entonces, $v_\omega(n) \geq 0$. Caso contrario, basta considerar el operador $H_\omega - a_0 I$ en lugar de H_ω.

Con estas condiciones mostraremos el Teorema 1 en las próximas dos secciones. Primero estableceremos un límite superior para la densidad integrada de estados $N(E)$ y después un límite inferior para $N(E)$.

Límite Superior

En esta parte de la demostración será mostrado la siguiente desigualdad:

$$\limsup_{E\searrow 0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2}. \tag{50}$$

Demostración. Por los Lemas 5 y 6 tenemos

$$\begin{aligned} N(E) &\leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathrm{E}(N(H^N_{\Lambda_L}, E)) \\ &\leq \mathrm{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L}) < E). \end{aligned} \tag{51}$$

Para estimar el último término de la desigualdad anterior usaremos la desigualdad de Temple (Lema 7) con la función ψ_0 dada por

$$\psi_0(n) = \frac{1}{|\Lambda_L|^{1/2}} \quad \text{para todo } n \in \Lambda_L.$$

Note que $(H_0)^N_{\Lambda_L}\psi_0 = 0$. En efecto, como $(H_0)^N_{\Lambda_L} = n_\Lambda + A_\Lambda$, tenemos

$$
\begin{aligned}
((H_0)^N_{\Lambda_L}\psi_0)(n) &= (n_\Lambda\psi_0)(n) + (A_\Lambda\psi_0)(n) \\
&= n_\Lambda(n)\psi_0(n) - \sum_{j:|j-n|_1=1}\psi_0(j) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_0, H^N_{\Lambda_L}\psi_0\rangle &= \langle\psi_0, V_\omega\psi_0\rangle \\
&= \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i).
\end{aligned}
$$

Por el Teorema ergódico de Birkhoff (Teorema 4) ,

$$
\lim_{L\to\infty}\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i) = \mathbb{E}(v_\omega(0)) > 0 \quad \mathbb{P} - q.t.p..
$$

Para aplicar la desigualdad de Temple necesitamos que

$$
\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i) < E_1(H^N_{\Lambda_L}),
$$

lo que no ocurre, pues $\lim_{L\to\infty} E_1(H^N_{\Lambda_L}) = 0$. En efecto, por el Corolario 1 y un cálculo directo (vea [44]) se tiene

$$
E_1(H^N_{\Lambda_L}) \geq E_1((H_0)^N_{\Lambda_L}) \geq cL^{-2}, \tag{52}
$$

para alguna constante $c > 0$.

Definimos entonces una nueva sucesión de potenciales

$$
v^{(L)}_\omega(i) = \min\left\{v_\omega(i), \frac{c}{3}L^{-2}\right\}.
$$

Para L fijo, las variables aleatorias $v^{(L)}_\omega(i)$ son independientes e idénticamente distribuidas con su distribución dependiendo de L.

Además, si

$$
H^{(L)}_\omega = (H_0)^N_{\Lambda_L} + V^{(L)}_\omega,
$$

con $(V^{(L)}_\omega u)(i) = v^{(L)}_\omega(i)u(i)$, entonces por el Corolario 1, $E_0(H^N_{\Lambda_L}) \geq E_0(H^{(L)}_\omega)$. De la definición de $V^{(L)}_\omega$ se sigue que

$$\langle \psi_0, H_\omega^{(L)} \psi_0 \rangle = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) \le \frac{c}{3} L^{-2}. \qquad (53)$$

De las relaciones (52) y (53) obtenemos

$$\langle \psi_0, H_\omega^{(L)} \psi_0 \rangle \le \frac{c}{3} L^{-2} < E_1((H_0)^N_{\Lambda_L}) \le E_1(H_\omega^{(L)}).$$

Ahora podemos aplicar la desigualdad de Temple (Lema 7) para ψ_0 y $H^{(L)}_\omega$:

$$
\begin{aligned}
E_0(H^N_{\Lambda_L}) &\geq E_0(H^{(L)}_\omega) \\
&\geq \langle \psi_0, H^{(L)}_\omega \psi_0 \rangle - \frac{\langle \psi_0, (H^{(L)}_\omega)^2 \psi_0 \rangle}{cL^{-2} - \langle \psi_0, H^{(L)}_\omega \psi_0 \rangle} \\
&\geq \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i) - \frac{\frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} (v^{(L)}_\omega(i))^2}{(c - \frac{c}{3})L^{-2}} \\
&\geq \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i) - \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i) \, \frac{\frac{c}{3} L^{-2}}{\frac{2}{3} cL^{-2}} \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i).
\end{aligned}
\tag{54}
$$

De las relaciones (51) y (54) tenemos

$$
N(E) \leq \mathbb{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L}) < E) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i) < 2E \right).
$$

Usando el Lema 8 abajo tenemos

$$
\begin{aligned}
N(E) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} v^{(L)}_\omega(i) < 2E \right) \\
&\leq e^{-\gamma |\Lambda_L|} \\
&= e^{-\gamma (2\lfloor \beta E^{-\frac{1}{2}} \rfloor + 1)^d} \\
&\leq e^{-\gamma (2\lfloor \beta E^{-\frac{1}{2}} \rfloor + 1)^d} \\
&\leq e^{-\gamma' E^{-\frac{d}{2}}},
\end{aligned}
$$

para algún $\gamma' > 0$. Aplicando el logaritmo natural en desigualdad, se tiene

$$
\begin{aligned}
\ln N(E) &\leq -\gamma' E^{-\frac{d}{2}} \\
\Longrightarrow \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} &\leq \frac{\ln \gamma' - \frac{d}{2} \ln(E)}{\ln(E)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomando el limite superior se obtiene

$$
\limsup_{E \searrow 0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2}.
$$

■

Ahora vamos mostrar el resultado usado en la demostración anterior.

Lema 8 *Para $L = [\beta E^{-\frac{1}{2}}]$ con β pequeño y L suficientemente grande, temos*

$$P\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) \le e^{-\gamma|\Lambda_L|} \tag{55}$$

para algún $\gamma > 0$.

Demostracion. Por hipótesis $L \le \beta E^{-\frac{1}{2}}$, lo que implica $2E \le 2\beta^2 L^{-2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\le P\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2\beta^2 L^{-2}\right)\\
&\le P\left(\sharp\{i \,|\, v_\omega^{(L)}(i) < \tfrac{c}{3}L^{-2}\} \ge \left(1-\frac{6\beta^2}{c}\right)|\Lambda_L|\right),
\end{aligned}$$

donde c es la constante de la relación (52). En la última desigualdad usamos que

$$\sharp\left\{i \,|\, v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}L^{-2}\right\} < \left(1-\frac{6\beta^2}{c}\right)|\Lambda_L| \implies \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) \ge 2\beta^2 L^{-2}.$$

En efecto, si $D := \{i \mid v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}L^{-2}\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) &= \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in D} v_\omega^{(L)}(i) + \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\complement D} v_\omega^{(L)}(i)\\
&\ge \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\complement D} v_\omega^{(L)}(i)\\
&\ge \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\frac{6\beta^2}{c}\,|\Lambda_L|\,\frac{c}{3}L^{-2}\\
&= 2\beta^2 L^{-2}.
\end{aligned}$$

Como $P(v_\omega^{(L)}(i) > 0) > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $q := P(v_\omega^{(L)}(i) < \gamma) < 1$. Defina

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } v_\omega^{(L)}(i) < \gamma,\\ 0 & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

Las variables aleatorias ξ_i son independientes e idénticamente distribuidas. Ademas, $E(\xi_i) = q$.

Sea $r = 1 - \frac{3\beta^2}{c}$. Tomando β suficientemente pequeño podemos garantizar que $q < r < 1$. Entonces, para L suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\le P\left(\sharp\{i \,|\, v_\omega^{(L)}(i) < \tfrac{c}{3}L^{-2}\} \ge r|\Lambda_L|\right)\\
&\le P\left(\sharp\{i \,|\, v_\omega^{(L)}(i) < \gamma\} \ge r|\Lambda_L|\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_i \xi_i \geq r\right). \tag{56}$$

Por otro lado, para una variable aleatoria X se tiene

$$\mathrm{P}(X > a) \leq e^{-ta}\ \mathrm{E}(e^{tX}) \quad \text{para } t \geq 0. \tag{57}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > a) &= \int \chi_{\{X>a\}}(\omega)\,d\mathrm{P}(\omega) \\
&\leq \int e^{-ta}e^{tX}\chi_{\{X>a\}}(\omega)\,d\mathrm{P}(\omega) \\
&\leq e^{-ta}\int e^{tX}\,d\mathrm{P}.
\end{aligned}$$

Luego, usando (57) con $X = \sum_i \xi_i$ en la estimativa (56), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\leq \mathrm{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_i \xi_i \geq r\right) \\
&\leq e^{-|\Lambda_L|rt}\,\mathrm{E}\left(\prod_{i\in\Lambda_L} e^{t\xi_i}\right) \\
&\leq e^{-|\Lambda_L|rt}\,\mathrm{E}(e^{t\xi_0})^{|\Lambda_L|} \\
&= e^{-|\Lambda_L|(rt-\ln \mathrm{E}(e^{t\xi_0}))}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Sea $f(t) = rt - \ln \mathrm{E}(e^{t\xi_0})$. Mostremos que existe $t > 0$ tal que $f(t) > 0$, de donde se sigue el resultado. En efecto,

$$f'(t) = r - \frac{\mathrm{E}(\xi_0 e^{t\xi_0})}{\mathrm{E}(e^{t\xi_0})}.$$

Luego $f'(0) = r - q > 0$ y como $f(0) = 0$, entonces existe $t > 0$ tal que $f(t) > 0$.

■

Límite Inferior

En esta parte mostraremos la siguiente desigualdad:

$$\liminf_{E\searrow 0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln E} \geq -\frac{d}{2}. \tag{59}$$

Demostración. Por los Lemas 5 y 6 tenemos

$$\begin{aligned}
N(E) &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathrm{E}(N(H^D_{\Lambda_L}, E)) \\
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathrm{P}(E_0(H^D_{\Lambda_L}) < E).
\end{aligned} \tag{60}$$

Por el principio min-max (Teorema 8)

$$\begin{aligned}
E_0(H^D_{\Lambda_L}) &\leq \langle\psi, H^D_{\Lambda_L}\psi\rangle \\
&= \langle\psi, (H_0)^D_{\Lambda_L}\psi\rangle + \sum v_\omega(i)|\psi(i)|^2
\end{aligned} \tag{61}$$

$i \in \Lambda_L$

para cualquier ψ con $\|\psi\| = 1$. Ahora trataremos de minimizar el lado derecho de (61). Comenzaremos por el término

$$\langle \psi, (H_0)^D_{\Lambda_L} \psi \rangle,$$

para el cual tomamos

$$\psi(n) = \frac{1}{\|\psi_1\|}\psi_1(n), \qquad \text{con} \quad \psi_1(n) = L - \|n\|_\infty, \quad n \in \Lambda_L.$$

Para $n \in \Lambda_{\frac{L}{2}}$ tenemos que $L - \|n\|_\infty \geq \frac{L}{2}$. Entonces,

$$\sum_{n \in \Lambda_L} |\psi_1(n)|^2 \geq \sum_{n \in \Lambda_{\frac{L}{2}}} |\psi_1(n)|^2 \geq |\Lambda_{\frac{L}{2}}| \left(\frac{L}{2}\right)^2 \geq cL^{d+2}, \tag{62}$$

para alguna constante $c > 0$.

Por otro lado, usando la forma cuadrática de $(H_0)_{\Lambda_L}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1, (H_0)^D_{\Lambda_L} \psi_1 \rangle &= \langle \psi_1, (H_0)_{\Lambda_L} \psi_1 \rangle + \langle \psi_1, (2d - n_\Lambda)\psi_1 \rangle \\
&\leq \sum_{\substack{(n,n') \in \Lambda_L \\ \|n-n'\|_1 = 1}} |\psi_1(n') - \psi_1(n)|^2 \\
&\leq |\{(n, n') \in \Lambda_L \times \Lambda_L : \|n - n'\|_1 = 1\}| \\
&\leq c_1 L^d,
\end{aligned} \tag{63}$$

donde utilizamos que $|\psi_1(n) - \psi_1(n')| \leq 1$ si $\|n - n'\|_1 = 1$.

De las relaciones (62) y (63) obtenemos

$$\begin{aligned}
E_0((H_0)^D_{\Lambda_L}) &\leq \frac{\langle \psi_1, (H_0)^D_{\Lambda_L} \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle} \\
&\leq c_0 L^{-2},
\end{aligned} \tag{64}$$

para la constante $c_0 = \frac{c_1}{c} > 0$. Usando (60), (61) y (64) se sigue que

$$\begin{aligned}
N(E) &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|} \mathbb{P}\left(\sum_{i \in \Lambda_L} v_\omega(i) |\psi(i)|^2 < E - c_0 L^{-2} \right) \\
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|} \mathbb{P}\left(\frac{c_2}{|\Lambda_L|} \sum_{i \in \Lambda_{\frac{L}{2}}} v_\omega(i) < E - c_0 L^{-2} \right)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $^{-2}$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(\text{para todo } i \in \Lambda_{\frac{L}{2}},\ \ v_\omega(i) < \frac{1}{c_2}(E - c_0 L^{-2})\right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(v_\omega(0) < \frac{1}{c_2}(E - c_0 L^{-2})\right)^{|\Lambda_{\frac{L}{2}}|} \\
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}_0\left([0, E/2)\right)^{c_3 L^d}.
\end{aligned}
$$

Ahora usando la hipótesis (49) con $\epsilon = E/2$ se tiene

$$N(E) \geq c_4 L^{-d} E^{c_3 \kappa L^d} = c_4 L^{-d} e^{(\ln E) c_3 \kappa L^d}, \tag{65}$$

para constantes $c_3, c_4 > 0$. Tomando $L = \sqrt{\frac{2c_0}{E}}$ tenemos

$$N(E) \geq c_4' E^{d/2} e^{c_3' (\ln E) E^{-d/2}}, \tag{66}$$

con constantes $c_3', c_4' > 0$. Aplicando el logaritmo natural y usando que $0 < N(E) \leq 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\ln N(E) &\geq \ln c_4' + \ln E^{d/2} + c_3'(\ln E)E^{-d/2} \\
\Longrightarrow \left|\ln N(E)\right| &\leq \left|\ln c_4'\right| + \left|\ln E^{d/2}\right| + \left|c_3'(\ln E)E^{-d/2}\right| \\
\Longrightarrow \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln E} &\geq \frac{\ln\left(\left|\ln c_4'\right| + \left|\ln E^{d/2}\right| + \left|c_3'(\ln E)E^{-d/2}\right|\right)}{\ln E}.
\end{aligned}$$

Como $\ln(a+b) \geq \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ para todo $a, b > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln E} &\geq \frac{\ln\left(\left|\ln c_4'\right| + \left|\ln E^{d/2}\right|\right) + \ln\left(\left|c_3'(\ln E)E^{-d/2}\right|\right)}{2\ln E} \\
&\geq \frac{\ln\left|\ln c_4'\right|}{4\ln E} + \frac{\ln\left|\ln E^{d/2}\right|}{4\ln E} + \frac{\ln\left(\left|c_3'(\ln E)E^{-d/2}\right|\right)}{2\ln E}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite inferior tenemos

$$\liminf_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln E} \geq \liminf_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln c_4'\right|}{4\ln E} + \frac{\ln\left|\ln E^{d/2}\right|}{4\ln E} + \frac{\ln\left(\left|c_3'(\ln E)E^{-d/2}\right|\right)}{2\ln E}$$

$$\Longrightarrow \liminf_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln E} \geq -\frac{d}{2}.$$

De los límites superior (50) e inferior (59) obtenidos en las Secciones 6.2 y 6.3 concluimos que

$$-\frac{d}{2} \leq \liminf_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln(E)} \leq \limsup_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2},$$

lo que implica

$$\lim_{E\searrow 0} \frac{\ln\left|\ln N(E)\right|}{\ln(E)} = -\frac{d}{2},$$

como queríamos demostrar.

■

5.2. Resultados inferenciales

No aplica ya que el presente trabajo está inmerso en la matemática abstracta.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos

No existen resultados con estas caracter´ısticas.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

- En la Sección 5.1.5, usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet demostramos el Teorema 1 para el modelo de Anderson discreto y en la sección 5.1.4, usando resultados de la teoría de probabilidad y de cálculo espectral estudiamos las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.

- Aplicando los resultados de la teoría de probabilidad y de análisis funcional demostramos el Teorema 3, que nos dice que el espectro de modelo de Anderson discreto es un conjunto no aleatorio casi siempre.

- En la Sección 5.1.4, usando el teorema ergódico de Birkhoff demostramos la existencia de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto.

- Basado en la teoría ergódica demostramos la Proposición 6, dicho resultado muestra que el modelo de Anderson discreto es ergódico.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Un estudio similar del Teorema 1 fue realizado por Kirsch y Martinelli [20], estos autores realizaron la prueba de dicho teorema para el modelo de Poisson, el cual es un modelo similar al modelo de Anderson discreto. Otro estudio similar fue hecho por Barry Simon [44], dicho autor demuestra el mismo teorema para el modelo de Anderson discreto, pero con un enfoque diferente al realizado en el presente trabajo. Otros estudios similares del fenómeno Lifshitz tails para diferentes tipos de operadores pueden ser encontrados en las siguientes referencias [1], [21], [45], [48].

Por otro lado un estudio similar de la demostración de existencia de la densidad de estados y sus propiedades podemos encontrar en el trabajo hecho por Pastur [36], quien muestra la existencia basándose en la transformada de Laplace de la densidad integrada de estados y la demostración vía límite termodinámico fue hecho por Avron y Simon [3] para operadores casi periódicos.

Un estudio similar del espectro del operador fue hecho por Elgart, Krüger, Tautenhahn y Vesel´ıc [49], dichos autores calcularon el espectro para la familia de operadores de Schrödinger aleatorios discretos con potencial de tipo aleación, dado por $H_\omega = H_0 + \lambda V_\omega$, donde $\lambda > 0$. Esta familia de operadores es llamado también modelo discreto de tipo aleación. Es interesante observar que el modelo discreto de tipo aleación y como el modelo de Anderson discreto estudiado en el presente trabajo tienen por espectro el mismo conjunto $[0, 4d] + \operatorname{supp} \mathbb{P}_0$, q.t.p.

Una prueba alternativa para el Teorema 3, que describe la forma que tiene el espectro del modelo de Anderson discreto es realizado por Staffler y puede ser encontrado en [45], otra prueba para el mismo teorema lo entramos también en [10].

Un estudio similar de los resultados de ergodicidad y particularmente que el modelo de Anderson discreto es ergódico lo podemos encontrar en las siguientes referencias [10, 23, 28, 32].

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo estudiamos el modelo de Anderson discreto d-dimensional, el cual es una familia de operadores Schrödinger aleatorios que aparecen en determinados problemas de la Física-Matemática, y mostramos que tales operadores tienen como espectro un conjunto no aleatorio $\mathbb{P}$ c.t.p.. Estudiamos también algunas propiedades de operadores ergódicos, la ergodicidad del modelo de Anderson y condiciones de frontera simple, de Neumann y de Dirichlet para tales operadores actuando sobre el espacio l^2 restringido a cubos finitos. Posteriormente estudiamos la medida den- sidad de estados para el modelo de Anderson discreto, donde vimos sus propiedades principales entre ellos destacamos la continuidad de la densidad integrada de estados (Teorema 15). Finalmente establecemos el fenómeno Lifshitz tails para el modelo de Anderson discreto, usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet para obtener limites superior e inferior respectivamente, para la densidad integrada de estados.

Por otro lado vale la pena mencionar los siguientes puntos:

1. En el presente trabajo solo hemos demostrado el Teorema 1 cuando la energ´ıa E converge al ínfimo del espectro, sin embargo, el resultado es válido cuando la energía E converge al supremo del espectro (véase [44])

2. En este trabajo estudiamos las propiedades principales de la densidad de esta- dos y la densidad integrada de estados, entre ellos estudiamos la continuidadde la densidad integrada de estados (Teorema 15), no obstante, es importante comentar que la densidad integrada de estados es log-Hölder continua (vea [8]).

3. La log-Hölder continuidad de la densidad integrada de estados, son tratados por separado. Primero para el caso unidimensional, para el cual se usa la Fórmula de Thouless, pues es posible definir exponentes de Lyapunov en este caso y para el caso multidimensional el abordaje es diferente (vea [8]).

4. Otra propiedad importante que no fue desarrollado en este trabajo y que vale la pena mencionar es el hecho que para el modelo de Anderson discreto unidimensional, la densidad integrada de estados es Hölder continua, esto es

$$|N(E_1) - N(E_2)| \leq C|E_1 - E_2|^{\alpha}$$

para algún $\alpha > 0$ (vea [29]).

RECOMENDACIONES

- Para el desarrollo de este trabajo se usó como base la referencia [19], por lo tanto se recomienda al lector interesado en este asunto tal referencia paraampliar los temas tratados en esta tesis.

- Un libro reciente y muy completo con los temas tratados en el presente trabajo es el libro titulado Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectraand Dynamics, de los autores Aizenman y Warzel (vea [1]), con el cual se puede complementar esta tesis.

- Algunos de los art´ıculos que pueden ser revisados, para profundizar los temas abordados en este trabajo son las siguientes referencias: [21], [31], [43], [44], [45], [48].

- Una continuación a este trabajo, para futuros estudiantes que tengan interés de continuar esta linea de investigación, puede ser estudiar el modelo de Anderson discreto unidimensional, ya que este modelo tiene mas propiedades y se puede estudiar resultados como la fórmula de Thoules, que relaciona la densidad integrada de estados con el exponente de Lyapunov. Tales resultados pueden ser encontrados en [10, 11, 25, 26, 46].

- Como trabajo futuro inédito podemos extender los resultados estudiados en esta tesis para una clase de operadores de Dirac aleatorios, llamado modelo de Dirac Anderson discreto, estudiada recientemente en [38].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AIZENMAN, M., AND WARZEL, S. *Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics*. American Mathematical Society, 2015.

[2] ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review 109*, 5 (1958), 1492.

[3] AVRON, J., AND SIMON, B. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic jacobi matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society 6*, 1 (1982), 81–85.

[4] BAUER, H. *Measure and Integration Theory*, vol. 26. Walter de Gruyter, 2001.

[5] CARMONA, R., AND LACROIX, J. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Springer Science and Business Media, 2012.

[6] COHN, D. L. *Measure Theory*, vol. 165. Springer, 1980.

[7] CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis*, vol. 96. Springer Science and Business Media, 2013.

[8] CRAIG, W., AND SIMON, B. Log hölder continuity of the integrated density of states for stochastic jacobi matrices. *Communications in Mathematical Physics 90*, 2 (1983), 207–218.

[9] CRAIG, W., SIMON, B., ET AL. Subharmonicity of the lyapunov index. *Duke Mathematical Journal 50*, 2 (1983), 551–560.

[10] CYCON, H. L., FROESE, R. G., KIRSCH, W., AND SIMON, B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1987.

[11] DAMANIK, D. Lyapunov exponents and spectral analysis of ergodic schrödinger operators: A survey of kotani theory and its applications. *Spectral Theory and Mathematical Physics* (2007).

[12] DE OLIVEIRA, C. R. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser, Basel, 2009.

[13] DE OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. primeira edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[14] DEL RIO, R. Spectra of random operators with absolutely continuous integrated density of states. *Journal of Mathematical Physics 55*, 4 (2014), 042105.

[15] DONSKER, M., AND VARADHAN, S. Asymptotics for the wiener sausage.

Communications on Pure and Applied Mathematics 28, 4 (1975), 525–565.

[16] HEYWOOD, P. Subharmonic functions, vol. 1. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 21*, 1 (1978), 91–91.

[17] KAMINAGA, M., KRISHNA, M., AND NAKAMURA, S. A note on the analyticity of density of states. *Journal of Statistical Physics 149*, 3 (2012), 496–504.

[18] KIRSCH, W. Random schrödinger operators : a course. In *Schrödinger operators*. Springer, 1989, pp. 264–370.

[19] KIRSCH, W. An invitation to random schrödinger operators. *Panor. Synthèses Société Mathématique de France 25* (2008), 1–119.

[20] KIRSCH, W., AND MARTINELLI, F. Large deviations and lifshitz singularityof the integrated density of states of random hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics 89*, 1 (1983), 27–40.

[21] KIRSCH, W., AND METZGER, B. The integrated density of states for random schrödinger operators. *Spectral Theory and Mathematical Physics* (2006).

[22] KOWALSKI, E. Spectral theory in hilbert spaces. *ETH Zürich* (2009).

[23] KRENGEL, U. *Ergodic Theorems*, vol. 6. Walter de Gruyter, 2011.

[24] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, vol. 1. wiley New York, 1978.

[25] KRÜGER, H. Multiscale analysis for ergodic schrödinger operators and positivity of lyapunov exponents. *Journal d'Analyse Mathématique 115*, 1 (2011), 343–387.

[26] KRÜGER, H., AND GAN, Z. Optimality of log hölder continuity of the integrated density of states. *Mathematische Nachrichten 284*, 14-15 (2011), 1919–1923.

[27] LAMPERTI, J. *Probability. A Survey of the Mathematical Theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 1996.

[28] LAMPERTI, J. *Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory*, vol. 23. Springer Science and Business Media, 2012.

[29] LEPAGE, E. Empirical distribution of the eigenvalues of a jacobi matrix. *Probability measures on groups, VII, Springer Lecture Notes Series 1064* (1964), 309–367.

[30] LEVIN, B. Y. *Lectures on Entire Functions*, vol. 150. American Mathematical Soc., 1996.

[31] LIFSHITZ, I. M. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Physics-Uspekhi 7*, 4 (1965), 549–573.

[32] LINDGREN, G. Lectures on stationary stochastic processes. *PhD course of Lunds University* (2006).

[33] NAKAO, S. On the spectral distribution of the schrödinger operator with ran-

dom potential. *Japanese journal of mathematics. New series 3*, 1 (1977), 111–139.

[34] Oliveira, K., and Viana, M. Fundamentos da teoria ergódica. *Rio de Janeiro: SBM, Vol. 90* (2014).

[35] Pastur, L. Behavior of some wiener integrals as $t \to \infty$ and the density of states of schrödinger equations with random potential. *Theoretical and Mathematical Physics 32*, 1 (1977), 615–620.

[36] Pastur, L. A. Spectra of random self adjoint operators. *Russian mathematical surveys 28*, 1 (1973), 1.

[37] Prado, R. A., and De Oliveira, C. R. Dynamical lower bounds for 1d dirac operators. *Mathematische Zeitschrift 259*, 1 (2008), 45–60.

[38] Prado, R. A. and de Oliveira, C. R. and Carvalho, S. L .Dynamical Localization for Discrete Anderson Dirac Operators *Journal of Statistical Physics*, 167 (2017), 260–296.

[39] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, New York, 1975.

[40] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978.

[41] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1980.

[42] Retherford, J. R. *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, vol. 27. Cambridge University Press, 1993.

[43] Schlag, W. On discrete schrödinger operators with stochastic potentials. In *XIVth International Congress on Mathematical Physics* (2006), World Scientific, pp. 206–215.

[44] Simon, B. Lifschitz tails for the anderson model. *Journal of Statistical Physics 38*, 1-2 (1985), 65–76.

[45] Staffler, B. Lifshitz tails for random band matrices. Master's thesis, Ludwig Maximilian University of Munich, Munich, 2013.

[46] Sütö, A. Schrödinger difference equation with deterministic ergodic potentials. In *Beyond quasicrystals*. Springer, 1995, pp. 481–549.

[47] Teschl, G. Mathematical methods in quantum mechanics wuth applications to schrödinger operators, 2009.

[48] Veselic, I. Integrated density of states and wegner estimates for random

schrödinger operators. *Contemp. Math, Vol.40 pp 97–183* (2003).

[49] Elgart, Alexander and Krüger, Helge and Tautenhahn, Martin and Veselić, Ivan Discrete Schrödinger operators with random alloy-type potential. *Spectral analysis of quantum Hamiltonians, Springer , pp 107–131* (2012).

ANEXOS

Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
1.1. Descripción de la realidad problemática. El intervalo previsible de los espectros de los operadores con potenciales aleatorios muchas veces no concuerda con el calculado vía método numérico. La razón está en el interesante fenómeno llamado Lifshitz tails. **1.2. Formulación del problema.** **1.2.1 Problema General.** ¿Será posible demostrar el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energ´ıa E está próximo al ´ınfimo del espectro de H_ω y estudiar propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto?. **1.2.1 Problemas específicos.** Estudiar propiedades espectrales para los operadores de Schrödinger aleatorios discretos. Mostrar la existencia de la densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Mostrar que el modelo de Anderson discreto es ergódico.	**Objetivo General.** Demostrar el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energía E está próximo al ínfimo del espectro de H_ω y estudiar las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. **Objetivos específicos.** 1. Estudiar propiedades espectrales para los operadores de Schrödinger aleatorios discretos. 2. Mostrar a existencia de la densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. 3. Mostrar que el modelo de Anderson discreto es ergódico.	**Hipótesis general.** Usando las condiciones de frontera de Neumann y de Dirichlet demostraremos el decaimiento exponencial de la densidad integrada de estados $N(E)$ cuando la energ´ıa E está próximo al ínfimo del espectro de H_ω y usando resultados de la teor´ıa de probabilidad y de cálculo espectral estudiaremos las propiedades principales de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. **Hipótesis específica.** Aplicando los resultados de la teor´ıa de probabilidad y de análisis funcional mostraremos que el espectro de modelo de Anderson discreto es un conjunto no aleatorio casi siempre. Usando el Teorema ergódico de Birkhoff demostraremos la existencia de la medida densidad de estados para el modelo de Anderson discreto. Basado en la teor´ıa ergódica demostraremos que el modelo de Anderson discreto es ergódico.	**Tipo de la investigación.** El tipo de investigación desarrollado en este trabajo es Básica. **Diseño de la investigación.** comenzaremos presentando definiciones y algunos resultados básicos de análisis funcional. En segundo lugar, introduciremos el modelo de Anderson discreto, seguidamente desarrollaremos algunas definiciones y resultados de la teor´ıa ergódica, luego pasaremos a estudiar los conceptos más importantes de este trabajo, la medida densidad de estados y la medida densidad integrada de estados, Finalmente mostraremos el objetivo principal del presente trabajo el Teorema 1 para el modelo de Anderson discreto.	**4.3. Población y muestra.** No aplica para este tipo de investigación.