

**FORMATO N° 10**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**



**INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**“UN ALGORITMO PROYECTIVO PARA  
PROGRAMACION LINEAL”**

**AUTOR: EDINSON RAUL MONTORO ALEGRE**

PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de agosto del 2022 al 31 de julio del 2023

Resolución de aprobación N° 613-2022-R

Callao – 2023

PERU

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Edinson Raul Montoro Alegre", is written over a light blue rectangular background.



## **REFERENCIA DE APROBACIÓN**

### **I.1 FACULTAD**

CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

### **I.2 UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**

Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

### **I.3 TITULO DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

Un Algoritmo Proyectivo para Programación Lineal

### **I.4 AUTOR**

Edinson Raúl Montoro Alegre

Código Orcid: 0000-0002-8237-9469

DNI: 09627181

### **I.5 LUGAR DE EJECUCIÓN**

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

### **I.6 TIPO**

Investigación Básica. Investigación aplicada, cuantitativa y transversal.

### **I.7 TEMA OCDE**

1.01.02 Matemática Aplicada

DEDICATORIA

A mis hijos

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Oriol Quintana". The signature is written in a cursive style with a large, stylized initial 'O'.

## AGRADECIMIENTOS

A todas aquellas personas que  
luchan por un Perú mejor y no  
desfallecen



## INDICE

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Referencia de Aprobación ..... | 3  |
| Dedicatoria .....              | 4  |
| Agradecimiento .....           | 5  |
| Índice .....                   | 6  |
| Resumen .....                  | 8  |
| Abstract .....                 | 9  |
| Introducción .....             | 10 |

### Capítulo I

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Planteamiento del problema.....</b>        | <b>11</b> |
| 1.1 Descripción de la realidad problemática..... | 11        |
| 1.2 Formulación del problema.....                | 11        |
| 1.3 Objetivos.....                               | 12        |
| 1.4 Justificación.....                           | 12        |
| 1.5 Limitantes de la investigación.....          | 13        |

### Capítulo II

|  |           |
|--|-----------|
| <b>II. Marco Teórico.....</b>            | <b>14</b> |
| 2.1 Antecedentes.....                    | 14        |
| 2.2 Marco: .....                         | 14        |
| 2.2.1 Marco Teórico.....                 | 16        |
| 2.2.2 Marco Conceptual.....              | 16        |
| 2.3 Definición de términos básicos ..... | 16        |

### Capítulo III

|  |           |
|--|-----------|
| <b>III. Hipótesis y Variables.....</b>       | <b>23</b> |
| 3.1 Hipótesis general.....                   | 23        |
| Hipótesis General.....                       | 23        |
| Hipótesis específica.....                    | 23        |
| 3.2 Definición conceptual de variables ..... | 23        |
| 3.3 Operacionalización de las variables..... | 23        |

## Capítulo IV

|  |    |
|--|----|
| <b>IV. Diseño Metodológico</b> .....                           | 24 |
| 4.1 Tipo y diseño de la investigación.....                     | 24 |
| 4.2 Método de investigación.....                               | 24 |
| 4.3 Población y muestra.....                                   | 24 |
| 4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.....               | 25 |
| 4.5 Técnicas e instrumentos de recolección de información..... | 25 |
| 4.6 Análisis y Procesamiento de datos.....                     | 25 |

## Capítulo V

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>V. Resultados</b> ..... | 55 |
| 5.1 .....                  | 55 |
| 5.2 .....                  | 55 |

## Capítulo VI

|   |    |
|---|----|
| <b>VI. Discusión de Resultados</b> .....                                  | 56 |
| 6.1 Contrastación y demostración de la Hipótesis con los resultados ..... | 56 |
| 6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares .....    | 56 |
| 6.2 Responsabilidad Ética .....   | 57 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Conclusiones</b> .....               | 58 |
| <b>Recomendaciones</b> .....            | 59 |
| <b>Referencias Bibliográficas</b> ..... | 60 |

## ANEXO

|                              |    |
|------------------------------|----|
| Matriz de Consistencia ..... | 63 |
|------------------------------|----|

## Resumen

En este trabajo de investigación se describe un Algoritmo Proyectivo que comparte características con el Algoritmo Proyectivo de Karmarkar, sus variantes y los métodos que siguen trayectorias de Gonzaga, Kojima-Mizuno-Yoshise, Monteiro-Adler, Renegar, Vaidya y Ye. El Algoritmo opera en el espacio primal-dual es decir, en las proximidades de la trayectoria central y converge en  $\mathcal{O}(\sqrt{n}L)$  iteraciones, muy semejante a los algoritmos mencionados anteriormente. Aquí  $n$  es el número de variables y  $L$  es el tamaño de la entrada del problema. Se logra la reducción en la función objetivo gracias a la función potencial adecuada utilizada.

## Abstract

This research paper describes a Projective Algorithm that shares characteristics with the Karmarkar Projective Algorithm, its variants and the methods that follow Gonzaga, Kojima-Mizuno-Yoshise, Monteiro-Adler, Renegar, Vaidya and Ye trajectories. The Algorithm operates in primal-dual space, that is, in the vicinity of the central trajectory and converges in  $\mathcal{O}(\sqrt{nL})$  iterations, very similar to the algorithms mentioned above. Here  $n$  is the number of variables and  $L$  is the size of the problem input. The reduction in the objective function is achieved thanks to the appropriate potential function used.

## INTRODUCCION

Los algoritmos para resolver Problemas de Programación Lineal

$$\begin{cases} \text{Min } g^t x \\ \text{s. a} \\ Ax = b, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Pueden ser agrupados en tres grupos:

- i) Los que están relacionados con el método del Elipsoide.
- ii) Los que están relacionados con las funciones potenciales: el método de Karmarkar [14] y sus variantes, asimismo los métodos Escalado-Afín y sus variantes. Y por último
- iii) Los algoritmos que siguen a la Trayectoria Solución, tales como Gonzaga [12], Kojima, Mizuno y Yoshise [15],[16]. Monteiro y Adler [21], [22]. Renegar [23], Vaidya [28] y Ye [30]

Cada uno de estos grupos de algoritmos comparte características que los hace posible agruparlos. Por ejemplo, si asumimos que los datos  $A, b, g$ , son enteros y el tamaño de la entrada es  $L$ , entonces el algoritmo de Karmarkar puede encontrar dentro de  $O(nL)$  iteraciones una apropiada solución aproximada.

Con respecto a los algoritmos que usan función potencial en cada iteración se logra una reducción en dicha función como se puede apreciar en Anstreicher [2] y McDiarmid [17].

Por otro lado, si consideramos la versión infinitesimal de Karmarkar y sus variantes vemos que nos conducen al estudio de trayectorias y caminos en el interior de la región factible. Esas trayectorias han sido estudiadas por Bayer y Lagarias [5], Megido [18] y Megido y Shub [19]. Estos trabajos están muy relacionados al considerar a las trayectorias con el clásico método de la función Barrera Logarítmica de Frisch [11] y Fiacco McCormick [10] y también a la noción de centro analítico dado por Sonnevend [24] y Renegar [23]. Todos estos métodos operan en el espacio factible solamente.

Kojima, Mizuno y Yoshise [15] describen un algoritmo que sigue a la trayectoria dentro del interior de la región factible Primal-Dual. Este método usa  $O(nL)$  iteraciones. Monteiro y Adler [21] exponen un método Primal-Dual que requiere  $O(\sqrt{n}L)$  iteraciones con una complejidad de  $O(n^3L)$ . Una complejidad similar fue establecida por Kojima [16] para un método siguiendo trayectoria para un problema de complementariedad lineal que surge de un Problema Cuadrático Convexo. Por último, Ye [30] proporciona un algoritmo para Programación Cuadrática Convexa que utiliza también  $O(\sqrt{n}L)$  iteraciones.

# I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 Descripción de la realidad problemática

Como se ha mencionado en la introducción existen tres grupos bien marcados de algoritmos para resolver un Problema de Programación Lineal.

- i) Los que están relacionados con el método del Elipsoide.
- ii) Los que están relacionados con las funciones potenciales: el método de Karmarkar [14] y sus variantes, asimismo los métodos Escalado-Afín y sus variantes. Y por último
- iii) Los algoritmos que siguen a la Trayectoria solución, tales como Gonzaga [12], Kojima, Mizuno y Yoshise [15],[16]. Monteiro y Adler [21], [22]. Renegar [23], Vaidya [28] y Ye [30]

Y cada uno de estos grupos de algoritmos comparte características comunes que los hace posible agruparlos. Sin embargo, podríamos plantearnos la siguiente interrogante: ¿Se podrá diseñar un algoritmo que resuelva el Problema de Programación Lineal y que reúna características de los tres grupos? En el presente trabajo de investigación se tendrá como objetivo plantear un algoritmo que reúna características comunes entre estos tres grupos de algoritmos si es posible claro.

Para ello se planteará un algoritmo nuevo del tipo proyectivo y se realizará su análisis.

## 1.2 Formulación del problema

Como se ha mencionado anteriormente, los tres grupos de algoritmos tienen características bien marcadas como, por ejemplo, los algoritmos que usan función potencial en cada iteración se logra una reducción en dicha función como se puede apreciar en Anstreicher [2] y McDiarmid [17].

Por otro lado, si consideramos la versión infinitesimal de Karmarkar y sus variantes vemos que nos conducen al estudio de trayectorias y caminos en el interior de la región factible. Esas trayectorias han sido estudiadas por Bayer y Lagarias [5], Megido [18] y Megido y Shub [19]. Estos trabajos están muy relacionados al considerar a las trayectorias con el clásico método de la función Barrera Logarítmica de Frisch [11] y Fiacco McCormick [10] y también a la noción de centro analítico dado por Sonnevend [24] y Renegar [23]. Todos estos métodos operan en el espacio factible solamente.

Kojima, Mizuno y Yoshise [15] describen un algoritmo que sigue a la trayectoria dentro del interior de la región factible Primal-Dual. Este método usa  $O(nL)$  iteraciones. Monteiro y Adler [21] exponen un método Primal-Dual que requiere  $O(\sqrt{n}L)$  iteraciones con una complejidad de  $O(n^3L)$ . Una complejidad similar fue establecida por Kojima [16] para un método siguiendo trayectoria para un problema de complementariedad lineal que surge de un Problema Cuadrático Convexo. Por último, Ye [30] proporciona un algoritmo para Programación Cuadrática Convexa que utiliza también  $O(\sqrt{n}L)$  iteraciones.

En el presente trabajo de investigación se tiene como objetivo plantear un algoritmo que reúna características comunes entre estos tres grupos de algoritmos si es posible claro. Para ello se planteará un algoritmo nuevo del tipo proyectivo y se realizará su análisis. En tal sentido, podemos definir el siguiente Problema General:

### **1.2.1 Problema General**

¿Se podrá plantear un algoritmo nuevo que reúna características de los tres grupos para resolver un Problema de Programación Lineal?

### **1.2.2 Problema Específico:**

¿Se puede plantear un nuevo Algoritmo del tipo Proyectivo para el Problema de Programación Lineal?

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Plantear un Algoritmo Nuevo para un Problema de Programación Lineal.

### **1.3.2 Objetivo Específico**

Plantear un Algoritmo nuevo del tipo proyectivo para resolver un Problema de Programación Lineal.

## **1.4 Justificación**

La comprensión, identificación y solución de problemas de Programación Lineal resultan ser muy importantes en las diferentes áreas como: Análisis de riesgos, administración de empresas, planeación urbana, contabilidad, ingeniería y banca.

En ese sentido, el desarrollo y ampliación de todo tipo de conocimiento nuevo en el área de la Programación Lineal repercutirá en mejorar las técnicas de aplicación en las diferentes áreas antes mencionadas. El presente trabajo de investigación pretende aportar y explorar nuevas ideas para obtener técnicas y/o métodos nuevos de solución.

## 1.5 Limitantes de la Investigación

### a. Limitante Teórico.

El trabajo de investigación esta circunscrita en la teoría de Métodos de Punto interior, es decir **el limitante teórico** de nuestra investigación está dentro de las fronteras de la aplicación de los métodos de punto interior aplicados a Programación Lineal, funciones barreras y funciones convexas diferenciables. Aún quedan buena parte de problemas que no son considerados como: Programación No Lineal no diferenciable y Programación No Lineal Cuasi-Convexa y que están fuera de las fronteras antes mencionadas.

### b. Limitante Temporal:

El tipo de investigación es básica, también llamada investigación Pura, teórica o dogmática por tal motivo no está sujeto al factor tiempo ni mucho menos pueda éste interferir como variable a la hora de realizar la investigación. **El limitante temporal** no se aplica a este tipo de investigación.

### c. Limitante Espacial:

El tipo de investigación es básica, también llamada investigación Pura, teórica o dogmática por tal motivo no está sujeto al factor espacio o lugar ni mucho menos pueda éste interferir como variable a la hora de realizar la investigación. **El limitante espacial** no se aplica a este tipo de investigación



## II.EL MARCO TEORICO

Esta sección está dedicada a una revisión de algunos conceptos matemáticos en Programación Lineal, Programación No -Lineal, Método de Función Barrera, Teoría de la Dualidad.

### 2.1 Antecedentes

#### 2.1.1 Internacionales

A nivel internacional tenemos los siguientes datos: Fiacco (1968) fue el primero en derivar la teoría relacionada a los métodos de punto interior. Greenberg et al (1972) trabajo las trayectorias solución relacionadas a Problemas de Programación No Lineal y posteriormente García et al (1981) analizaron las trayectorias solución de optimización relacionadas a ecuaciones de Punto Fijo y Problema de Equilibrio. Después Nazareth (1986) interpreta el algoritmo de Karmarkar [12] como un método de homotopía con reinicio, análogamente, Smale (1986) muestra que la trayectoria generada por el algoritmo Simplex Auto-Dual [4] puede ser aproximado por el Método de Newton-trayectoria resolviendo un cierto sistema de ecuaciones no lineales.

#### 2.1.2 Nacionales

A nivel nacional tenemos los siguientes trabajos: Quijano (2019) presenta un método que sigue la trayectoria central para resolver un problema de programación lineal, el método le permite deducir un algoritmo primal-dual de pasos cortos utilizando una apropiada medida de proximidad. En cambio, Luna (2020) desarrolla y describe un método de punto interior primal-dual para resolver el problema de programación lineal el cual utiliza una matriz de escalamiento para deducir dos direcciones de descenso.

### 2.2 Marco

#### 2.2.1 Marco Teórico

Un modo de resolver problemas de optimización con restricciones en forma de desigualdad

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{s. a} \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{cases}$$



Es mediante la aproximación a este problema a través de una familia de problemas de minimización irrestricta Fiacco (1968)

$$(P') \{ \text{Min } F(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}^n$$

Donde la función objetivo  $F(x)$  del problema irrestricto es construido a partir de la función objetivo  $f(x)$  y de las restricciones del problema restringido de tal modo que:

- $F(x)$  incluye un término de penalidad el cual incrementa el valor de  $F(x)$  mientras que la restricción  $g_i(x) \leq 0$  es violada. Es decir, violaciones grandes resultan en incrementos grandes.
- El mínimo  $x_F^*$  del problema  $(P')$  este próxima a la región factible y  $x_F^*$  está próxima al mínimo del problema  $(P)$ .

Usando esta aproximación, se espera que, como el tamaño del término penalidad en  $F(x)$  aumenta, el mínimo  $x_F^*$  de  $F(x)$  se aproximará al mínimo del problema  $(P)$ .

Por otro lado, un Programa Convexo es un problema de optimización de la forma

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{s. a} \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_i(x) \leq 0 \end{cases}$$

En la cual todas las funciones involucradas son funciones convexas y la clave para resolver dicho problema es la aplicación de las famosas condiciones o teorema de Karush-Khun-Tucker (Gill). Este resultado asocia un programa convexo con un sistema de ecuaciones algebraicas y desigualdades que con frecuencia pueden ser usadas para desarrollar procedimientos efectivos para calcular mínimos, y también pueden ser usados para obtener información adicional acerca de la sensibilidad del valor mínimo del programa convexo a cambios en las restricciones.

En nuestro caso, vamos a considerar el siguiente Problema de Programación Lineal en forma Estándar

$$(P) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x \\ \text{s. a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$

La función barrera logarítmica, generalmente usado en optimización con restricciones no lineales, puede ser aplicada al problema de Programación Lineal Estándar, dando lugar al siguiente problema.

$$(P_u) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x + u \sum_i \ln x_i \\ \text{s. a} \\ Ax = b \\ x > 0 \end{cases}$$

Donde  $u > 0$  suele ser pequeño. El enfoque de la función barrera es válido si existe un  $x > 0$  sujeto a  $Ax = b$

A partir de estos problemas y aplicando las condiciones de Karush-Khunn-Tucker se pretende obtener un sistema de ecuaciones no lineales que permita caracterizar a las trayectorias solución. Así mismo se deberá imponer ciertas condiciones o hipótesis para asegurar la solución del sistema obtenido.

Se debe entender que las trayectorias solución son esenciales para el diseño y análisis de algoritmos para optimización y describir trayectorias para problemas de Programación Lineal en forma Estándar nos permitirá idear e imaginar nuevas formas de solución.

### 2.2.2 Marco Conceptual

Esperamos encontrar las condiciones necesarias para caracterizar a las trayectorias solución a través del sistema no lineal que surge al aplicar las condiciones de Karush-Khunn-Tucker. Asimismo, esperamos deducir alguna técnica adecuada para resolver dicho sistema no lineal.

### 2.3 Definición de términos básicos

Comenzamos revisando las direcciones de búsqueda de los tres importantes algoritmos punto – interior. De acuerdo a Shanno y Bagchi [14], todos aquellos métodos pueden ser clasificados como métodos de función barrera porque sus direcciones de búsqueda pueden ser obtenidas de una aproximación Newton (linealización) de las condiciones Karush – Kuhn – Tucken(K-K-T) de un problema de programación lineal aumentado con un término **barrera logarítmica** en la función objetivo.

#### Definición 1. (Frish [7])

El problema primal aumentado es:



$$(P_\mu) \begin{cases} \min c^t x - \mu \sum_{i=1}^n L_n x_i \\ \text{s. a } Ak = b \\ k > 0 \end{cases}$$

y el problema dual aumentado es:

$$(D_\mu) \begin{cases} \max b^t y + \mu \sum_{i=1}^n L_n (C_i - A_i^t y) \\ \text{s. a } A^t y < c \end{cases}$$

Es necesario revisar algunas teorías de optimización que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de la investigación.

### 1. Método de Barrera (Gill [3])

Los métodos de barrera se pueden aplicar a problemas del tipo

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s. a } g(x) \leq 0; x \in D \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $D \subseteq \mathbb{R}^n$   $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $g = (g_1, g_2 \dots g_m)$ ,  $g_i \in C^0(D)$

Si hacemos

$$\Omega = \{x \in D / g(x) \leq 0\} \quad (2)$$

y asumimos que el interior del conjunto viable (que lo denotamos por  $\Omega^0$ ) es no vacío es decir

$$\Omega^0 = \{x \in D / g(x) < 0\} \neq \emptyset \quad (3)$$

Así mismo supongamos que:

$$\inf_{x \in \Omega^0} f(x) = \inf_{x \in \Omega} f(x) = v > -\infty \quad (4)$$

Con esta hipótesis podemos eliminar ciertos casos patológicos, donde la solución no puede ser aproximada por puntos del interior del conjunto viable.

Supongamos que (1) tiene minimizador global, entonces podemos transformar (1) en un problema irrestricto con función objetivo  $f(x) + tB(x)$ ,  $t > 0$  donde  $B$  es la función barrera.

**Definición 2. (Fiacco [6])**

Una función  $B: \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  es llamada Barrera para el problema (1) si satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $B(x)$  está definida y es continua para todo  $x \in \Omega^0$
- (ii)  $B(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega^0$
- (iii) Si  $\{x_k\} \subset \Omega^0$ ,  $g(x_k) < 0 \forall_k$  y  $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_i(x_k) = 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$

Entonces  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B(x_k) = +\infty$

Ejemplo:

$$B(x) = -\sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)); x \in \Omega^0 \text{ (La barrera logaritmica)} \quad (5)$$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}; x \in \Omega^0 \text{ (La barrera inversa)}$$

La función dada en (5) puede asumir valores negativos y por tanto no cumple la condición (ii). Pero para el caso en que  $\Omega$  sea limitado podremos que trabajar con otra función que si satisface (ii). En efecto:

Sea  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $B(x) > M$  para todo  $x \in \Omega^0$  y consideremos

$$\tilde{B}(x) = -\sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)) - M$$



Esta función satisface:

(i) Obvio

(ii) Obvio

(iii) Sea  $i \in \{1, \dots, m\}$  /  $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_i(x_k) = 0$  y  $j \in \{1, \dots, m\} - \{i\}$  con  $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_j(x_k) = b_j < 0$

$$\Rightarrow \tilde{B}(x) = -\log(-g_1(x)) \dots -\log(-g_i(x)) \dots - M$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{B}(x) = -\log(-b_1) \dots + \infty \dots - M = +\infty$$

Ahora, el problema en barrera asociado a  $\tilde{B}$  será

$$\begin{cases} \min f(x) + t \tilde{B}(x) \\ \text{s. a } x \in \Omega^0 \end{cases} \quad \text{para } t > 0$$

que coincide con

$$\begin{cases} \min f(x) + tB(x) - tM \\ \text{s. a } x \in \Omega^0 \end{cases} \quad \text{para } t > 0$$

y que es equivalente a

$$\begin{cases} \min f(x) + tB(x) \\ \text{s. a } x \in \Omega^0 \end{cases} \quad \text{para } t > 0$$

Así la función logarítmica puede ser usada como barrera sin ningún perjuicio

### ALGORITMO:

Escoger  $t_0 > 0$  y tomar  $k := 0$

1. Calcular  $x_k \equiv x(t_k)$  solución global de

$$\begin{cases} \min f(x) + t_k B(x) \\ \text{s. a } x \in \Omega^0 \end{cases} \quad (6)$$

2. Escoger  $t_{k+1}$  tal que  $0 < t_{k+1} < t_k$  y tomar  $k := k + 1$  y volver al paso (1)

Definimos la siguiente función  $Q(x, t) = f(x) + tB(x)$  y vamos a probar las propiedades fundamentales del algoritmo.

Los siguientes lemas y teoremas, pueden ser hallados en Megido [16]

### Lema 1

Sea  $\{x_k\}$  una sucesión generada por el algoritmo entonces

(a)  $Q(x_{k+1}, t_{k+1}) \leq Q(x_k, t_k)$

(b)  $B(x_k) \leq B(x_{k+1})$

(c)  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$

### Demostración

(a) 
$$\begin{aligned} Q(x_{k+1}, t_{k+1}) &= f(x_{k+1}) + t_{k+1}B(x_{k+1}) \\ &\leq f(x_k) + t_{k+1}B(x_k) \quad \text{Por defin. } x_{k+1} \\ &\leq f(x_k) + t_k B(x_k) \quad \text{por el paso (2) del algoritmo} \\ &= Q(x_k, t_k) \end{aligned}$$

(b)  $Q(x_{k+1}, t_{k+1}) = f(x_{k+1}) + t_{k+1}B(x_{k+1}) \leq f(x_k) + t_{k+1}B(x_k)$

y por otro lado

$$Q(x_k, t_k) = f(x_k) + t_k B(x_k) \leq f(x_{k+1}) + t_k B(x_{k+1})$$

Sumando ambas desigualdades

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) + f(x_k) + t_{k+1}B(x_{k+1}) + t_k B(x_k) \\ \leq f(x_{k+1}) + f(x_k) + t_{k+1}B(x_k) + t_k B(x_{k+1}) \\ (t_{k+1} - t_k)B(x_{k+1}) \leq (t_{k+1} - t_k)B(x_k) \end{aligned}$$

Pero  $t_{k+1} - t_k \leq 0$ , entonces

$$B(t_{k+1}) \geq B(x_k)$$

$$(c) \quad f(x_{k+1}) + t_{k+1}B(x_{k+1}) \leq f(x_k) + t_{k+1}B(x_k)$$

$$\leq f(x_k) + t_{k+1}B(x_{k+1}) \text{ por (b)}$$

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

## TEOREMA 2

Sean  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones continuas en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que el conjunto  $\Omega$  definido en (2) satisface (3) y (4). Entonces, todo punto de acumulación de la sucesión  $\{x_k\}$  generada por el algoritmo donde  $x_k$  es una solución global del problema (6) con  $t = t_k$  y  $t_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ), es una solución global del problema (1).

### *Demostración*

Sea  $\bar{x}$  un punto de acumulación de la sucesión  $\{x_k\}$  y sea  $\{x_{k_j}\} \rightarrow \bar{x}$  ( $j \rightarrow +\infty$ ).

Como  $\{x_k\} \subset \Omega^0$  es decir  $g(x_k) < 0 \forall k$  y  $g$  continua  $\Rightarrow g(\bar{x}) \leq 0$  luego  $\bar{x} \in \Omega$

Ahora, debemos probar que

$$f(\bar{x}) = \bar{v}; \quad \bar{v} = \min\{f(x) / x \in \Omega\}$$

Supongamos  $f(\bar{x}) > \bar{v}$  definimos  $\delta = (f(\bar{x}) - \bar{v}) / 2 > 0$  y por la definición de infimum

$$\exists x_{k_l} \in \Omega^0 \text{ tal que } f(x_{k_l}) < \bar{v} + \delta$$

la sucesión  $\{f(x_k)\}$  es no-creciente por tanto,  $\{f(x_{k_j})\}$  también es no-creciente y tenemos que

$$f(x_{k_j}) \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_{k_j}) = f(\bar{x}) = 2\delta + \bar{v}$$

$$f(x_{k_j}) - f(x_{k_l}) \geq \bar{v} + 2\delta - f(x_{k_l}) > \delta \quad (7)$$

Entonces tenemos que para  $j$  suficientemente grande ( $j \gg 1$ )

$$\begin{aligned}
0 &\geq Q(x_{k_j}, t_{k_j}) - Q(x_{k_l}, t_{k_j}) \\
&= f(x_{k_j}) + t_{k_j}B(x_{k_j}) - f(x_{k_l}) - t_{k_j}B(x_{k_l})
\end{aligned}$$

y debido a (7)

$$\begin{aligned}
&> \delta + \underbrace{t_{k_j}}_{>0} \underbrace{(B(x_{k_j}) - B(x_{k_l}))}_{>0} > \delta \\
&\geq \delta \text{ pues } B(x_{k_j}) \geq B(x_{k_0}) \\
&\geq \delta > 0
\end{aligned}$$

esto conduce a una contradicción, luego

como  $t_k \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty) \Rightarrow t_{k_j} \rightarrow 0 (j \rightarrow +\infty)$

$$\therefore f(\bar{x}) = \bar{v}$$

### III. HIPOTESIS Y VARIABLES

#### 3.1. Hipótesis

##### 3.1.1 Hipotesis general

Dado el Problema de Programación Lineal

$$(P) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x \\ \text{s. a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Existe un algoritmo que lo resuelve y que posee características de comunes de los tres grupos.

##### 3.1.2 Hipótesis específica

Dado el Problema de Programación Lineal (P),

$$(P) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x \\ \text{s. a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Existe un Algoritmo Proyectivo que resuelve el Problema de Programación Lineal con características comunes de los tres grupos.

#### 3.2. Definición conceptual de las variables

Las variables identificadas en la hipótesis, se pueden definir como:

**VARIABLE DEPENDIENTE:** El Algoritmo Proyectivo de Programación Lineal

**VARIABLE INDEPENDIENTE:** El Problema de Programación Lineal

#### 3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES.

| VARIABLE   | DIMENSIONES   | INDICADORES  | INDICE                    | Métodos y Técnicas | TÉCNICA      |
|--|---------------|--|---------------------------|--------------------|--------------|
| <b>Variable Independiente:</b><br>El Problema de Programación Lineal | Espacio $R^n$ | Comportamiento o variación de los parámetros del Problema de Programación Lineal | Función Objetivo          | Análisis           | Constructiva |
| <b>Variable Dependiente:</b><br>El Algoritmo Proyectivo              | Espacio $R^n$ | Comportamiento o variación de los parámetros del Algoritmo Proyectivo.           | Transformación Proyectiva | Análisis           | Constructiva |

## IV.DISEÑO METODOLÓGICO

### 4.1. Tipo y diseño de la investigación

La investigación es del tipo básica, según Alva Lucía Marín Villada (2008). “También llamada investigación pura, teórica o dogmática. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, en incrementar los conocimientos científicos o filosóficos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico”

Es un estudio básico porque se buscará aportar conocimientos que permitan mejorar algunos detalles del marco teórico. El diseño es no experimental.

### 4.2. Método de Investigación

Los métodos utilizados en la investigación serán de:

**Análisis y síntesis**, pues se analizarán los elementos del problema en estudio para encontrar su relación entre sí. A su vez, la síntesis se producirá sobre la base de los resultados dados por el análisis. En este contexto Analizamos el conjunto de ecuaciones que definen a la trayectoria solución para establecer características de la misma en el espacio  $R_n$ .

**Inductivo-Deductivo**, pues utilizaremos la inducción como una forma de razonamiento por medio de la cual se pasa del conocimiento de casos particulares a un conocimiento más general. Asimismo, usaremos la deducción otra forma de razonamiento, mediante el cual pasamos de un conocimiento general a otro de menor nivel o particular. En el trabajo de investigación estamos constantemente utilizando este método a la hora de plantear y desarrollar los teoremas y lemas correspondientes.

### 4.3. Población y muestra

Por el tipo de investigación no utilizamos ninguna técnica de recolección de datos como la observación, experimentación o encuesta. Por lo tanto, no recolectamos datos de una muestra o población.

Población: No Aplica

Muestra: No Aplica

#### **4.4. Lugar de Estudio.**

Los ambientes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, precisando que gran parte del trabajo se desarrollará en el domicilio por la situación sanitaria que atraviesa el país.

#### **4.5. Técnicas e instrumentos de Recolección de la Información**

Por el tipo de investigación no utilizamos ninguna técnica de recolección de datos como la observación, experimentación o encuesta.

Por ser un trabajo netamente “matemático” (Teórico – abstracto); no se requiere procedimientos especiales para la recolección de la información. Lo que se realiza es una búsqueda y revisión bibliográfica: (libros de especialidad, páginas web, artículos, revistas especializadas, etc.), asimismo, a través de la utilización de técnicas de análisis – síntesis, inductivo-deductivo nos conducirán progresivamente a la resolución del problema planteado.

#### **4.6. Análisis y procesamiento de datos.**

Los análisis de la información sobre el problema de programación lineal determinaran las necesidades de conseguir información para su respectivo análisis y su incorporación en el estudio para la solución del problema barrera a través de la aplicación de la función barrera apropiada. Asimismo, se podrá resolver el sistema de ecuaciones no lineales asociada al problema en estudio.

#### **Aspecto Etico de Investigación**

De acuerdo al Código de Ética de investigación de la UNAC en esta investigación se ha cumplido con la normativa de la Universidad. Es decir no se ha falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se ha plagiado datos, resultados, tablas cuadros de otros autores o investigadores

A continuación presentamos, observaciones, conceptos, proposiciones entre otros que nos permitirá establecer y obtener nuestros resultados



## 2. UN ESQUEMA PROYECTIVO Y MÉTODOS DE SEGUIMIENTOS DE CAMINOS

Nuestro problema es:

$$(P_1) \quad \begin{array}{l} \text{mín } g^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Donde  $A$  es  $m \times n$ ,  $b$  un  $n$ -vector,  $g \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

Supongamos que en todo

(A<sub>1</sub>)  $(P_1)$  tiene solución factible estrictamente positiva.

(A<sub>2</sub>) El conjunto de soluciones óptimas de  $(P_1)$  es no vacío y acotado; y

(A<sub>3</sub>) La matriz  $A$  tiene rango completo fila  $m$ .

Para describir la variante de la forma estándar de Karmarkar's (algoritmo proyectivo), hacemos una suposición adicional.

(A<sub>4</sub>) El valor óptimo de  $(P_1)$  es cero y su región factible contiene el vector estrictamente positivo  $x^0 = e$ , donde  $e \in \mathbb{R}^n$  y es un vector de unos, con el valor objetivo  $g^t e > 0$ .

Entonces se puede demostrar que  $(P_1)$  es equivalente al problema homogéneo.

$$(HP_1) \quad \begin{array}{l} \text{mín } g^t x \\ [A, -b] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = 0 \\ x \geq 0, \xi \geq 0, (x, \xi) \neq 0 \end{array}$$

Puesto  $\text{mín } g^t x = \text{mín } g^t x + 0 \xi$  y además la matriz  $[A, -b]$  tiene rango completo  $n$ , obviamente  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  condiciona la equivalencia de  $(P_1)$  a  $(HP_1)$ .

Para cualquier problema  $(P)$ , denotamos como  $F(P)$  a la región factible de  $(P)$  y  $F_+(P)$  el conjunto de soluciones factibles estrictamente positivos. Podemos evaluar cualquier punto  $(x, \xi) \in F_+(HP_1)$  a través de una función potencial de Karmarkar's.

$$\begin{aligned} \phi_1(x, \xi) &= (n+1) \text{Ln } g^t x - \sum_j^n \text{Ln } x_j - \text{Ln } \xi \\ &= n \text{Ln } g^t x + \text{Ln } g^t x - \sum_j^n \text{Ln } x_j - \text{Ln } \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\text{Ln} g^t x + \cdots + \text{Ln} g^t x}_{n\text{-veces}} + \text{Ln} g^t x - \sum_j^n \text{Ln} x_j - \text{Ln} \xi \\
&= (-\text{Ln} x_1 + \text{Ln} g^t x) + (-\text{Ln} x_2 + \text{Ln} g^t x) + \cdots + (-\text{Ln} x_n + \text{Ln} g^t x) + \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{\xi} \right) \\
&= \sum_j^n (-\text{Ln} x_j + \text{Ln} g^t x) + \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{\xi} \right) \\
&= \sum_j^n \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{x_j} \right) + \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{\xi} \right)
\end{aligned}$$

Claramente  $\phi_1$  es homogénea de grado cero, pues:

$$\phi_1(\lambda k, \lambda \xi) = \sum_j^n \text{Ln} \left( \frac{g^t \lambda x}{\lambda x_j} \right) + \text{Ln} \left( \frac{g^t \lambda x}{\lambda \xi} \right)$$

$$\text{Pues } \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

$$= \sum_j^n \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{x_j} \right) + \text{Ln} \left( \frac{g^t x}{\xi} \right) = \phi_1(x_1 \xi) = 1 \times \phi_1(x_1 \xi)$$

$$\phi_1(\lambda k, \lambda \xi) = \lambda^0 \phi_1(x_1 \xi)$$

Entonces se puede ver como se define en rayos positivos, es decir en ciertos puntos en el espacio inyectivo.

El algoritmo de Karmarkar's genera una sucesión  $\{(x^k, \xi^k)\}$  en  $F_+(HP_1)$  partiendo de  $(x^0, \xi^0) = (e, 1)$  con

$$(2.2) \quad \phi_1(x^{k+1}, \xi^{k+1}) \leq \phi(x^k, \xi^k) - \varepsilon$$

Para algunos  $\varepsilon$  fijos y positivos y para todo  $k$ , sin pérdida de generalidad, podemos tomar  $\xi^k = 1$  y luego  $\{x^k\}$  es una sucesión en  $F_+(P_1)$ , entonces podemos deducir de (2.2) que:

$$(2.3) \quad g^t x^k \leq \left( \frac{e^t x^k}{n} \right) \exp \left( \frac{-k\varepsilon}{n+1} \right) g^t x^0$$

En efecto, veamos:



Como  $\phi_1(x^{k+1}, \xi^{k+1}) \leq \phi(x^k, \xi^k) - \varepsilon$

entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x^{k+1}, \xi^{k+1}) &\leq \phi(x^k, \xi^k) - \varepsilon \leq (\phi_1(x^{k-1}, \xi^{k-1}) - \varepsilon) - \varepsilon \\ \phi_1(x^k, \xi^k) - \varepsilon &\leq \phi_1(x^{k-1}, \xi^{k-1}) - 2\varepsilon \\ \phi_1(x^k, \xi^k) &\leq \phi_1(x^{k-k}, \xi^{k-k}) - k\varepsilon \\ \phi_1(x^k, \xi^k) &\leq \phi_1(x^0, \xi^0) - k\varepsilon \dots\dots (*)\end{aligned}$$

De la conclusión de (\*) podemos demostrar (2.3).

De (\*)

$$\phi_1(x^k, \xi^k) \leq \phi_1(x^0, \xi^0) - k\varepsilon \text{ como } \xi^k \equiv 1$$

Tenemos

$$\phi_1(x^k, 1) \leq \phi_1(\varepsilon, 1) - k\varepsilon$$

$$(n+1) \text{Ln } g^t x^k - \sum_j^n \text{Ln } x_j^k - \text{Ln } 1 \leq (n+1) \text{Ln } g^t \varepsilon - \sum_j^n \text{Ln } \varepsilon_j - \text{Ln } 1 - k\varepsilon$$

$$(n+1) \text{Ln } g^t x^k \leq \sum_j^n \text{Ln } x_j^k + (n+1) \text{Ln } g^t \varepsilon - k\varepsilon$$

$$\text{Ln } g^t x^k \leq \frac{\sum_j^n \text{Ln } x_j^k}{(n+1)} + \text{Ln } g^t \varepsilon - \frac{k\varepsilon}{(n+1)}$$

$$e^{\text{Ln } g^t x^k} \leq \underbrace{e^{\frac{\sum_j \text{Ln } x_j^k}{(n+1)}}}_{(**)} \cdot e^{\text{Ln } g^t \varepsilon} \cdot e^{\frac{-k\varepsilon}{(n+1)}}$$

$$g^t x^k \leq \cdot g^t x^0 \cdot \text{Exp}\left(\frac{-k\varepsilon}{n+1}\right)$$

En (\*\*)

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{\sum_j \text{Ln } x_j^k}{(n+1)}} &= e^{\frac{\text{Ln } x_1^k + \text{Ln } x_2^k + \dots + \text{Ln } x_n^k}{(n+1)}} = e^{\text{Ln } \sqrt[n+1]{x_1^k \cdot x_2^k \cdot \dots \cdot x_n^k}} \\
 &= \sqrt[n+1]{x_1^k \cdot x_2^k \cdot \dots \cdot x_n^k} \leq \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n+1} \leq \\
 &\leq \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n} = \frac{\varepsilon^t x^k}{n} \\
 \therefore g^t x^k &\leq \left(\frac{e^t x^k}{n}\right) \cdot \text{Exp}\left(\frac{-k\varepsilon}{n+1}\right) \cdot g^t x^0
 \end{aligned}$$

Si  $F(P_1)$  es acotada, podemos fácilmente ver que  $g^t x^k$  converge linealmente hasta el valor óptimo de cero. Por otro lado, utilizando  $(A_2)$  se puede demostrar que también es válido si  $F(P_1)$  no está acotado.

Si los datos  $A$ ,  $B$ , y  $g$  son números enteros y el tamaño total de la entrada local es  $L$ , entonces (2,3) puede ser utilizado para mostrar que  $\mathcal{O}(nL)$  iteraciones son suficientes para dar una solución aproximada de la que una solución exacta. Y estas soluciones aproximadas se pueden obtener mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. En general  $\mathcal{O}(nq)$  iteraciones reduce a la función objetivo por factor de  $2^q$ .

Ahora describamos como se logra la reducción de la función potencial dada por (2.2).

Sea  $\hat{x} \in F_+(P_1)$  dado y sea

$\hat{X} : \text{diag}(\hat{x})$  la matriz diagonal cuyos elementos son los componentes de  $\hat{x}$

Sea  $\bar{g} = \hat{X} g$  y  $\bar{A} = A \hat{X}$

y consideremos el problema reescalado

$$\begin{aligned}
 &\text{mín } \bar{g}^t x \\
 &[\bar{A}, -b] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} = 0 \\
 &\bar{x} \geq 0, \quad \bar{\xi} \geq 0, \quad (\bar{x}, \bar{\xi}) \neq 0
 \end{aligned}$$

en términos de variables reajustadas

$\bar{x} = \hat{X}^{-1}x$  y  $\bar{\xi} = \xi$ . Es fácil ver que si  $(x, \xi)$  y  $(\bar{x}, \bar{\xi})$  corresponde como anteriormente, entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x, \xi) - Ln \det \hat{X} &= \bar{\phi}_1(\bar{x}, \bar{\xi}) \\ &:= (n+1)Ln \bar{g}^t \bar{x} - \sum_j Ln \bar{x}_j - Ln \bar{\xi}\end{aligned}$$

y que  $(\hat{x}, 1)$  corresponde al vector transformado  $(e, 1)$ . Desde (2.4) es suficiente para obtener una reducción constante en  $\bar{\phi}_1$  de solución  $(e, 1)$ .

Logramos la reducción haciendo un paso en la dirección negativa del gradiente proyectado de  $\bar{\phi}_1$ .

Hallamos

$$(2.5) \quad \nabla \bar{\phi}_1 = \nabla \bar{\phi}_1(e, 1) = \begin{bmatrix} \frac{n+1}{g^t e} \bar{g} - e \\ -1 \end{bmatrix}$$

(véase al final)

Si  $P_M$  denota la proyección en el espacio nulo de una matriz  $M$ , entonces nuestra dirección es:

$$\begin{aligned}\bar{d} &:= -P_{[\bar{A} \ b]} \nabla \bar{\phi}_1 \\ &= -P_{[\bar{A}, -b]} P_{[e^t, 1]} \begin{bmatrix} \frac{n+1}{g^t e} \bar{g} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{n+1}{g^t e} P_{\begin{bmatrix} \bar{A} & -b \\ e^t & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Si pasamos de  $(e, 1)$  a  $(e, 1) + \beta \bar{d} / \|\bar{d}\|$ , encontramos

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(e, 1) + \beta \bar{d} / \|\bar{d}\| &= \bar{\phi}_1(e, 1) + \beta \bar{d}^t \nabla \bar{\phi}_1 / \|\bar{d}\| + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= \bar{\phi}_1(e, 1) + \beta \|\bar{d}\| + \mathcal{O}(\beta^2)\end{aligned}$$

Está claro que se puede elegir un tamaño de paso constante  $\beta$  sin violar la positividad. Por tanto, como los términos de mayor orden pueden ser controlados la reducción en  $\bar{\phi}_1$  será de la misma orden como la norma Euclidiana de  $\bar{d}$ . En la prueba de su lema 3.1 Todd y

Borrell [27] muestran que  $\|\bar{d}\| > 1$ . Esto produce una disminución constante en  $\bar{\phi}_1$  por iteración y por lo tanto la convergencia en  $\mathcal{O}(nL)$  iteraciones.

Una mayor reducción en  $\bar{\phi}_1$  y por tanto más rápida convergencia se conseguirá si  $\|\bar{d}\|$  aumenta con  $n$ . volveremos a este asunto en la sección § 4.

Después de dar un paso en el espacio Proyectivo para obtener un nuevo  $(\bar{x}, \bar{\xi})$ , normalizamos a  $(\frac{\bar{x}}{\bar{\xi}}, 1)$  ( Note que  $\bar{\phi}_1$  esta sin cambios), y luego reescalamos para obtener nuestra nueva solución factible  $\hat{X} \frac{\bar{x}}{\bar{\xi}}$  para  $(P_1)$ . El algoritmo de Karmarkar itera con este procedimiento.

Un método alternativo, el así llamado variante-afín (primero propuesto por Dikin [6] en 1967, Véase también Barnes [7], [3] y Tow, Meketon y Freedman [29]) trabaja directamente en el espacio afín original. La variable reescalada  $\bar{x} = \hat{X}^{-1}x$  se mueve de  $e$  en la dirección:

$$(2.8) \quad \bar{d}_x = -P_{\bar{A}}\bar{g}$$

Una vez más, podemos utilizar un tamaño de paso constante  $\beta$  en la actualización

$$\bar{x} \rightarrow e + \beta d_x / \|\bar{d}_x\|$$

siendo este punto quién produce una disminución proporcional a  $\|\bar{d}_x\|$  en el valor de la función objetivo.

Sin embargo, los límites no inferiores en  $\|\bar{d}_x\|$  se han establecido y la convergencia no se ha demostrado para esta variante (y se cree poco probable; ver Meguido y Shub [19] ) Veremos en la ecuación (3.8) que la situación es mejorada con el tema Primal-Dual.

Antes de retornar a los métodos Siguiendo-Trayectorias, remarcamos en un inconveniente de la función potencial  $\phi_1$ . Supongamos que  $x$  esta convergiendo a la única solución óptima  $x^*$  a  $(P_1)$  y supongamos que esta última es una solución factible básica no degenerada. Entonces, Sea  $\beta$  ( $\bar{\beta}$ ) el conjunto de índices de las componentes básicas (No básicas) de  $x^*$ .

Sea  $\hat{g}$  los costos reducidos correspondientes a la base óptima, entonces se cumple que  $\hat{g}_j$  es positiva para  $j \notin \bar{\beta}$ , entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x, 1) &= (n + 1) \text{Ln } g^t x - \sum_j \text{Ln } x_j \\ &= (n + 1) \text{Ln } g^t x + \sum_{j \in \beta} \text{Ln} \left( \frac{\hat{g}^t x}{x_j} \right) - \sum_{j \in \beta} \text{Ln } x_j\end{aligned}$$

(existirá  $m$  índices básicos), a medida que  $x \rightarrow x^*$  cada término

$$\text{Ln} \left( \frac{\hat{g}^t x}{x_j} \right) \geq \text{Ln } \hat{g}_j \quad (j \in \beta)$$

será limitada inferiormente y cada término

$$\text{Ln } x_j \quad (j \in \beta)$$

será convergente a

$$\text{Ln } x_j^* > -\infty .$$

Por lo tanto, una deducción constante en  $\phi_1$  implica reducción media asintótica por un factor  $(1 - \gamma/m + 1)$  para alguna constante  $\gamma$  en la función objetivo.

Sin embargo, este resultado es muy dependiente de la no degeneración Primal y Dual.

No está claro que el factor  $n + 1$  multiplicando  $\text{Ln } g^t x$  nos da el equilibrio óptimo en lo que respecta a la complejidad entre reducir la función objetivo y mantenerse alejado de la restricción de frontera y encontrar el equilibrio correcto podría requerir conocer el grado de degeneración primaria y dual en la solución. Veremos que esta desventaja se desvanece para nuestro método; el  $p$  en la ecuación (4,2) controla con precisión este equilibrio.

Pasamos ahora a una descripción de métodos de métodos que siguen a las trayectorias. Discutimos una simetría Primal - Dual de la variante [21]. Asociados a  $(P_1)$  consideramos a la función barrera para el parámetro  $\mu$ .

$$\begin{aligned}(BP_1) \quad & \min g^t u - \mu \sum_j \text{Ln } x_j \\ & Ax = b \\ & x > 0\end{aligned}$$

Bajo nuestras suposiciones, eso tendría una única solución  $x(u)$  para cada  $u > 0$  y  $x(u)$

converge para la solución óptima  $(P_1)$  como  $u \rightarrow 0^+$  las condiciones de optimalidad para  $(BP_1)$  y multiplicadores de lagrange puede escribirse como

$$\begin{aligned} g - \mu x^{-1}e - A^t y &= 0 \\ Ax &= b \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Donde  $x$  denota  $diag(x)$ ,  $S$  abajo denota igualmente  $diag(S)$ .

$S := \mu x^{-1}e$  podemos escribir estas condiciones como

$$(2.9a) \quad XSe - \mu e = 0$$

$$(2.9b) \quad Ax = b$$

$$(2.9c) \quad A^t X + S = g$$

$$(2.9d) \quad X > 0, S > 0$$

De este modo y con holgura asociado al vector  $S$ , es una solución interior del problema Dual

$$\begin{aligned} &\text{máx } b^t y \\ (D_1) \quad &A^t X + S = g \\ &S \geq 0 \end{aligned}$$

Y por otra parte la brecha de la dualidad es

$$g^t x - b^t y = x^t S = e^t x S e = \eta \mu$$

las ecuaciones de (2,9), entonces demostramos las igualdades  $g^t x - b^t y - x^t S$  donde  $g^t x$  es una función objetivo de miprimal y  $b^t y$  función objetivo de midual.

Sea

$$A^t y + S = g \quad \text{multiplicamos } \times X^t$$

$$X^t (A^t y + S) = X^t g$$

$$X^t A^t y + X^t S = X^t g \quad \rightarrow X^t S = e^t X S e$$

$$X^t S = X^t g - X^t A^t y \quad \text{Trivial}$$

$$X^t S = g^t X - (AX)^t y \quad \text{Por (2.9b)}$$

$$X^t S = g^t X - b^t y$$

$$\rightarrow e^t X S e = \eta \mu \quad \text{de (2.9a)}$$

$$\rightarrow XSe - \mu e = 0 \quad \text{multiplicamos } \times e^t$$

$$\rightarrow e^t(XSe - \mu e) = 0$$

$$e^t XSe - e^t \mu e = 0$$

$$e^t XSe - e^t e \mu = 0 \quad (e^t e = \eta)$$

$$e^t XSe - \eta \mu = 0$$

$$e^t XSe = \eta \mu$$

$$g - \mu x^{-1} e - A^t y = 0$$

$$S := \mu x^{-1} e$$

Reemplazando tenemos (2.9c)

Las ecuaciones (2,9) son también las condiciones de optimización para el problema de la función barrera

$$(BD_1) \quad \begin{aligned} & \text{máx } b^t y + \mu \sum \text{Ln } S_j \\ & A^t y + S = g \\ & x > 0 \end{aligned}$$

Con la solución óptima única  $(y_{(0)}, S_{(0)})$ . Por tanto, la solución de (2.9) para una secuencia de parámetros de "μ" cercanos a cero produce puntos de la curva  $\{x_{(0)}\}$  en espacio primario y en la curva  $(y_{(0)}, S_{(0)})$  en el espacio Dual. Estas son las vías centrales Meguido [18] y las trayectorias centrales de Bayer y Legarias [5]. Llamamos a  $(x, y, S)$  o  $(x, S)$  centrados si (2,9) se cumple para un poco de "μ".

La ecuación (2.9a) no es lineal, por lo que debemos concentrarnos con las soluciones aproximadas.

### 3 PROBLEMAS SIMÉTRICOS: DUAL Y PRIMAL

En esta sección reformularemos  $(P_1)$  y  $(D_1)$  en formas simétricas y definir una asimetría combinada problema Dual y Primal

$$(P_1) \quad \begin{aligned} & \text{mín } g^t x \\ & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Satisfacer  $(A_1) - (A_3)$ . Puesto que suponemos  $(P_1)$  factible  $b$  se encuentra en el rango de  $A$ , de modo que podemos escribir:

$$(3.1) \quad b = Ah$$

$h$  adecuado, entonces podemos escribir el Dual

$$(D_1) \quad \begin{array}{l} \text{mín } h^t A^t y \\ A^t y + S = g \\ S \geq 0 \end{array}$$

Preferimos escribirlos en términos de  $S$ , así sea  $B$  que una matriz cuyas filas abarcan el espacio nulo de  $A$  por la elección de una base para este periodo podemos suponer que  $B$  es  $P \times n$  el rango de una fila completo  $P$ , con  $m + P = n$  entonces

$$A^t y + S = g \Leftrightarrow BS = Bg$$

Tenemos que  $B$  matriz fila del espacio nulo de  $A$

$$\Leftrightarrow A^t y + S = g \text{ multiplicamos } \times B$$

$$\Leftrightarrow B(A^t y + S) = Bg$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{BA^t y}_0 + BS = Bg$$

$$\Leftrightarrow BS = Bg$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\}$$

y además la función objetivo de  $(D_1)$  puede escribirse en términos de  $S$  solo desde

$$h^t A^t y = g^t h - h^t S$$

veamos

$$\text{Como } A^t y + S = g$$

$$A^t y = g - S \text{ multiplicando } h^t$$

$$h^t A^t y = h^t (g - S)$$

$$h^t A^t y = h^t g - h^t S$$

$$h^t A^t y = g^t h - h^t S$$

Por lo tanto, podemos escribir  $(P_1)$  y  $(D_1)$  como

$$(P) \begin{array}{l} \text{mín } g^t x \\ Ax = Ah \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$(D) \begin{array}{l} \text{mín } h^t S \\ B_S = B_g \\ S \geq 0 \end{array}$$

dónde las filas  $A$  y  $B$  abarcan subespacios ortogonales complementarios de  $\mathbb{R}^n$  que denotamos como

$$A \perp B$$

$$(3.2) \quad A \perp B \Leftrightarrow AB^\perp = 0 \quad \text{Pues } B \text{ es la matriz fila del espacio nulo de } A.$$

La Relación entre la dualidad  $(P)$  y  $(D)$  se deduce fácilmente a partir del resultado estándar soluciones factibles  $x$  y  $S$  tienen valores objetivos que cumplan

$$(3.2) \quad g^t x + h^t S - g^t h \geq x^t S$$

Sea  $g^t x \geq h^t S$

$$g^t x \geq g^t h - h^t S \quad \text{por } (P_1 \text{ y Primal})$$

$$\Rightarrow g^t x \geq g^t h - h^t S \quad \text{por } (D_1 \text{ y Dual})$$

$$\Rightarrow g^t x + h^t S \geq g^t h$$

Y son óptimas si y solo si se tiene la igualdad.

De hecho,  $x - h$  y  $s - g$  en los espacios nulos de  $A$  y  $B$  respectivamente y por lo tanto son ortogonales, así que

$$(3.4) \quad g^t x + h^t S - g^t h = x^t S$$

Que es factible  $x, S$  o no negativo. Los problemas de programación lineal de desigualdad forma simétrica estándar son naturales, incluido en nuestro formato  $t$  anterior. Se escriben como

$$\max \bar{C}^t \bar{x}, \quad \bar{A} \bar{x} \leq \bar{b}, \quad \bar{x} \geq 0 \quad \text{y} \quad \min \bar{b}^t \bar{y}; \quad \bar{A}^t \bar{y} \geq \bar{C}$$

establecemos

$$(3.4) \quad A = (\bar{A}; I) \quad B = (I - \bar{A}^t)$$

$$g = \begin{pmatrix} -\bar{C} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{pmatrix}$$

Podemos combinar (P) y (D) para resolver el problema primal Dual

$$(PD) \quad \begin{aligned} \min \quad & g^t x + h^t S - g^t h = x^t S \\ & Ax - Ah = 0 \\ & B_S - B_g = 0 \\ & x \geq 0, \quad S \geq 0 \end{aligned}$$

El cual tiene un valor óptimo  $\mathcal{O}$  cuando sea factible. Como se ha indicado, este problema es separable, pero que puede reemplazar la función objetivo  $x^t S$  utilizando (3.4) de esta forma, es evidente que (PD) no se ve afectada si reemplazamos  $g$  por  $\tilde{g}$  y  $h$  por  $\tilde{h}$  donde

$$A\tilde{h} = Ah \quad \text{y} \quad B_{\tilde{g}} = B_g$$

De hecho, tenemos el siguiente lema útil.

### LEMA 1:

Sea  $(\tilde{P})$  y  $(\tilde{D})$  denotan  $(\tilde{P})$  y  $(\tilde{D})$  define utilizando  $\tilde{g}$  y  $\tilde{h}$  en lugar de  $g$  y  $h$  donde (3.6) se cumple entonces  $(\tilde{P})$  y  $(\tilde{D})$  son equivalentes a (P) y (D) en el sentido de que sus regiones son factibles sin cambios y sus funciones objetivas son la misma salvo una constante aditiva.

### PRUEBA

Está claro que las regiones factibles son invariantes.

Ahora (3.6) implica que  $\tilde{g} = g + A^t \mu$  y  $\tilde{h} = h + B^t \gamma$  para algún  $U, V$ . Por lo tanto, para cualquier  $x$  factible

$$\tilde{g}^t x = g^t x + \mu^t Ax = g^t x + U^t Ah = g^t x + (\tilde{g}^t h - g^t h)$$

$$\tilde{g}^t x = (g + A^t \mu)^t x$$

$$\begin{aligned}
&= (g^t + (A^t U)^t)x \\
&= (g^t + U^t A)x \\
&= g^t x + U^t Ax \\
&= g^t x + U^t Ah = g^t x + (\tilde{g}^t h - \bar{g}^t h)
\end{aligned}$$

Se diferencia por una constante a partir de  $g^t x$

De manera similar  $\tilde{h}^t S$  difiere por una constante de para  $S$  factibles.

Vamos a utilizar el Lema 1 uno de la siguiente manera:

Dado  $(\hat{x}, \hat{s}) \in F(P_D)$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $g = \hat{s}$  y  $h = \hat{x}$ .

Observamos inmediatamente una consecuencia de esto.

Supongamos que  $x = S = e$  es factible ( $P_D$ ). Esta solución también está centrada desde (2.9a) sostiene con  $\mu = 1$  entonces podemos tomar  $g = h = e$  también. Entonces en la dirección elegida por el algoritmo afín. (Véase (2.8)).

$$(3.7) \quad d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_A e \\ -P_B e \end{bmatrix}$$

Por (2,3) sabemos que  $d = -\rho_A q$   $g = h = e$

Recordemos que la dificultad con la variante afín estaba por debajo de la norma de  $\|d_x\|$  incluso si  $-\tilde{g}$  es grande (por ejemplo  $\tilde{g} = e$ ), su proyección ( $d$ ), en el espacio nulo de  $A$  podría ser pequeño.

Aquí este problema desaparece, desde que  $A \perp B$  ,y  $d_x + d_S = -e$  , se puede concluir que

$$(3.8) \quad \|d\| = \sqrt{n}$$

Tenga en cuenta que solo el centrado no es suficiente en este análisis, se necesita también la formulación Primal-Dual.

A nivel computacional, el  $d$  dada en (3,7), y la creciente dimensión no implica ningún aumento en el trabajo; En efecto, dada  $d_x = -P_A e$  encontramos  $d_S = -P_B e = -e - d_x$ , ya que

$$(3.8) \quad P_A + P_B = I$$

Tenemos que  $d_x = -\rho_A e$  .  $d_S = -\rho_B e$  ;  $d_x + d_S = -e$

$$\underbrace{d_x + d_S}_{-e} = -P_A e - P_B e$$

$$= -\rho_A e - \rho_B e$$

$$0 = -\rho_A e - \rho_B e - e$$

$$0 = \underbrace{(P_A + P_B - I)}_0 e$$

$$\Rightarrow P_A + P_B = I$$

La importancia de centrar en la variante afín ha demostrado también en Barnes, Chopra y Jensen [4] ( $P_D$ ) tiene valor óptimo 0, es natural considerar su homogenización.

$$(HPD) \quad \begin{aligned} & \min g^t x + h^t S - g^t h J \\ & Ax - AhJ = 0 \\ & B_S - B_g J = 0 \\ & x \geq 0 \quad , \quad S \geq 0 \quad , \quad J \geq 0 \quad ; \quad (x, S, J) \neq 0 \end{aligned}$$

En cuanto a (HP1), podemos ver las soluciones factibles de (HPD) en forma de rayos, es decir, como puntos en el espacio proyectivo. La relación equivalente a (3.4) para  $(x, S, J) \in F(HPD)$  con  $J > 0$  es

$$(3.10) \quad g^t S + h^t S - g^t h J = x^t S / J$$

Para concluir esta sección, observamos que nuestros supuestos ( $A_1$ ) y ( $A_2$ ) implican fácilmente ( $B_1$ ) y ( $B_2$ ) a continuación, y ( $B_3$ ) es igual que ( $A_3$ ) sin pérdida de generalidad.

( $B_1$ ) ( $D$ ) Tiene una solución factible estrictamente positivo,

( $B_2$ ) El conjunto de soluciones óptimas de ( $D$ ) es no vacío y acotado y ( $B_3$ ) la matriz  $B$  tiene rango completo fila  $P$ .

Por lo tanto ( $PD$ ) tiene una solución factible estrictamente positivo, es decir  $F_+(PD) \neq 0$  y  $F_+(HPD) \neq \phi$ .

Ahora trataremos las funciones potenciales y su reajuste.

#### 4.- FUNCIONES POTENCIALES Y REAJUSTE

Nos asociamos con la función potencial de lo homogéneo primal Dual.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \phi(x, S, J) &= \phi_\rho(x, S, J, g, h) \\ &= (n + p) \text{Ln}(g^t x + h^t S - g^t h J) - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - (\rho - \eta) \text{Ln } J \end{aligned}$$

Veamos, sabemos que

$$g^t x + h^t S - g^t h J = \frac{x^t S}{\tau}, \quad (\text{Por 2.10})$$

Reemplazando en (4.1)

$$\begin{aligned} \phi_\rho(x, S, J, g, h) &= (n + p) \text{Ln} \left( \frac{x^t S}{J} \right) - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - (\rho - \eta) \text{Ln } J \\ &= (n + \rho) (\text{Ln } x^t S - \text{Ln } J) - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - (\rho - \eta) \text{Ln } J \\ &= (n + \rho) \text{Ln} (x^t S) - (n + p) \text{Ln } J - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - (\rho - \eta) \text{Ln } J \\ &= (n + \rho) \text{Ln} (x^t S) - n \text{Ln } J - \rho \text{Ln } J - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - \rho \text{Ln } J + \eta \text{Ln } J \\ &= (n + \rho) \text{Ln} (x^t S) - \sum \text{Ln } x_j - \sum \text{Ln } S_j - 2\rho \text{Ln } J \\ &= n \text{Ln} (x^t S) + \rho \text{Ln} (x^t S) - \sum \text{Ln } x_j S_j - \rho \text{Ln } J^2 \\ &= (\rho \text{Ln} (x^t S) - \rho \text{Ln } J^2) - \left( \sum \text{Ln } x_j S_j - n \text{Ln} (x^t S) \right) \\ &= \rho \text{Ln} \left( \frac{x^t S}{J^2} \right) - \sum \text{Ln} \left( \frac{x_j S_j}{x^t S} \right) \end{aligned}$$

Esto demuestra que para cualquier  $\rho > 0$  es razonable y ofrece una interpretación, incluido el papel de la  $\rho$ , de hecho  $\frac{x^t S}{J^2}$  es la función objetivo de la solución sin escala  $(x/J, S/J)$  en  $F_+(PD)$ .

Mientras que  $(x_j S_j / x^t S)$  es un vector positivo puesto en la unidad simplex. Por lo tanto,  $P$  equilibra un término que mide la función objetivo con la función de barrera que busca mantener  $(x/J, S/J)$  centrado en  $F_+(PD)$ .

Nuestro objetivo es asegurar una disminución correspondiente en  $\phi$  en cada iteración. Para ellos se trabajará con problemas reajustables.

Deja que  $\Omega$  sea una matriz  $n \times n$  diagonal definida positiva  $X$  y  $\delta$  un escalar positivo. Definir los datos a escala

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \delta A \Omega & , & & \bar{B} &= \delta B \Omega^{-1} \\ \bar{g} &= \delta \Omega g & , & & \bar{h} &= \delta \Omega^{-1} h \end{aligned}$$

Entonces, en término de las variables reescaladas

$$(4.4) \quad \bar{x} = \delta \Omega^{-1} x \quad , \quad \bar{S} = \delta \Omega S \quad , \quad \bar{J} = J$$

Tenemos el problema equivalente

$$\begin{aligned} & \min \bar{g}^t \bar{x} + \bar{h}^t \bar{S} - \bar{g}^t \bar{h} \bar{J} \\ & \quad \bar{A} \bar{x} - \bar{A} \bar{h} \bar{J} = 0 \\ & \quad \bar{B} \bar{S} - \bar{B} \bar{g} \bar{J} = 0 \\ & \quad \bar{x} \geq 0 \quad , \quad \bar{S} \geq 0 \quad , \quad \bar{J} \geq 0 \quad ; \quad (\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) \neq 0 \end{aligned}$$

(HPD)

Dejamos  $(\bar{PD})$  que denotan el problema no homogéneo correspondiente, obtenido mediante la sustitución de  $\bar{J}$  por  $\perp$  en  $(\bar{HPD})$ . De la definición (4.3) se deduce que

$$(4.5) \quad \bar{A} \perp \bar{B}$$

Para demostrar la ortogonalidad debemos probar que  $\bar{A} \bar{B}^t = 0$ , pero sabemos por (3.2) y reemplazando las variables reajustadas tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{A} \bar{B}^t &= (\delta A \Omega)(\delta B \Omega^{-1})^t \\ &= \delta^2 (A \Omega)(B \Omega^{-1})^t \\ &= \delta^2 (A \Omega)(\Omega^{-1})^t B^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^2(A\Omega)(\Omega^{-1})B^t \\
&= \delta^2 AIB^t \\
&= \delta^2 \underbrace{AB^t}_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{A}B^t = 0$$

$\therefore A \perp B$  pues  $\Omega$  es una matriz diagonal positiva

$$(\Omega^{-1})^t = (\Omega^t)^{-1} \quad ; \quad \Omega = \Omega^t$$

Tambi3n la funci3n objetivo de (HPD) es  $\delta^2$  veces mayor que la de (HPD) para los puntos correspondientes si establecemos

$$\text{O sea } \overline{HPD} = \delta^2 HPD$$

Veamos

$$\bar{g}^t \bar{x} + \bar{h}^t \bar{S} - \bar{g}^t \bar{h} \bar{J} = \delta^2 (g^t x + h^t S - g^t h J)$$

$$\text{Como } g^t x + h^t S - g^t h J = \frac{x^t S}{J}$$

$$\Rightarrow \bar{g}^t \bar{x} + \bar{h}^t \bar{S} - \bar{g}^t \bar{h} \bar{J} = \frac{\bar{x}^t \bar{S}}{\bar{J}}, \text{ utilizando (4.4)}$$

Por demostrar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{x}^t \bar{S}}{\bar{J}} &= \delta^2 \left( \frac{x^t S}{J} \right) \\
\frac{\bar{x}^t \bar{S}}{\bar{J}} &= \frac{(\delta \Omega^{-1} x)^t (\delta \Omega S)}{\tau} = \frac{\delta^2 (x^t) (\Omega^t)^{-1} (\Omega S)}{J} \\
&= \frac{\delta^2 (x^t) (\Omega^{-1} \Omega) S}{J} \\
&= \delta^2 \left( \frac{x^t S}{J} \right)
\end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) := \phi_p(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}, \bar{g}, \bar{h})$$

Entonces nos encontramos con

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) = \phi(x, S, J) + \rho \text{Ln } \delta^2$$

Veamos

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) = \rho \text{Ln} \left( \frac{\bar{x}^t \bar{S}}{\bar{J}} \right) - \sum_j \text{Ln} \left( \frac{\bar{x}_j \bar{S}_j}{\bar{x}^t \bar{S}} \right)$$

$$\text{Tomando } \bar{x}_j = \delta \Omega_j x_j$$

$$S_j = \delta \Omega_j S_j$$

$$= \rho \text{Ln} \left( \frac{(\delta \Omega^{-1} x)(\delta \Omega S)}{J} \right) - \sum_j \text{Ln} \left( \frac{(\delta \Omega_j^{-1} x_j)(\delta \Omega_j S_j)}{(\delta \Omega^{-1} x)^t (\delta \Omega S)} \right)$$

$$= \rho \text{Ln} \delta^2 \left( \frac{x^t \Omega^{-1} \Omega S}{J} \right) - \sum_j \text{Ln} \left( \frac{\delta^2 x_j (\Omega_j^{-1} \Omega_j) S_j}{\delta^2 x^t (\Omega^{-1} \Omega) S} \right)$$

$$= \rho \text{Ln} \delta^2 + \rho \text{Ln} \left( \frac{x^t S}{J} \right) - \sum_j \text{Ln} \left( \frac{x_j S_j}{x^t S} \right)$$

$$= \rho \text{Ln} \delta^2 + \phi(x, S, J)$$

Siempre que los argumentos corresponden como en (4.4). Por lo tanto, para reducir la función potencial original, es suficiente para reducir  $\phi$  suficientemente por algún problema con escala apropiada.

Ahora describir un cambio de escala particularmente útil. Supongamos que tenemos  $(\hat{x}, \hat{S}) \in F_+(PD)$  para que  $(\hat{x}, \hat{S}, 1) \in F_+(HPD)$  con  $\hat{x}^t \hat{S}$  valor objetivo de:

$$(4.7) \quad \hat{\xi} := \hat{x}^t \hat{S} / \eta$$

De acuerdo al Lema 1, podemos tomar  $g = \hat{S}$  ,  $h = \hat{x}$  sin cambiar problemas.

También suponemos  $(\hat{x}, \hat{S})$  aproximadamente centrada en su  $F_+(PD)$  de manera que

$$(4.8) \quad \|\hat{x} \hat{S} e - \hat{\xi} e\| \leq \alpha \hat{\xi}$$

Probado en (2.10)  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$

$$(4.9) \quad \delta = \xi^{-1/2} \quad y \quad \Omega = (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2}$$

Luego, con  $g = \hat{S}$ ,  $h = \hat{x}$  encontramos que  $\bar{g} = \bar{h}$

Veamos:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \delta \Omega g = \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} \hat{S} \quad \text{pues } \hat{S} = \hat{S} e \\ &= \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} (\hat{S} e) \\ &= \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x}^{1/2} \hat{S}^{-1/2} \hat{S} e) \\ &= \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x}^{1/2} \hat{S}) e \\ &= \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S})^{1/2} \end{aligned}$$

$$\bar{h} = \delta \Omega^{-1} h = \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} \hat{x} e \quad \text{pues } \hat{x} = \hat{x} e$$

$$\bar{h} = \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S})^{1/2} e$$

$$(4.10) \quad \therefore \bar{g} = \bar{h} = \xi^{-\frac{1}{2}} (\hat{x} \hat{S})^{1/2} e := \bar{e}$$

$$\bar{g}^t \bar{h} = \xi^{-1} e^t \hat{x} \hat{S} e = \eta$$

Dado que  $\bar{e}$  esta de  $e$ , y nuestro actual punto  $(\hat{x}, \hat{S}, 1)$  ha sido reajustado a  $(\bar{e}, e, 1)$ , se ha escalado al mismo tiempo los problemas Dual y Primal. Razonablemente bien al mismo tiempo mediante el empleo de una escala simétrica para el Primal y Dual, garantizamos la condición (4.5) que como veremos más adelante es crucial.

## 5.- LAS PROYECCIONES Y LA DIRECCIÓN DE BUSQUEDA

Estaremos trabajando con el problema a escala  $(\overline{HPD})$  y la función potencial  $\bar{\phi}$  asociada. La escala va generalmente que al final de §4, de modo que  $\bar{g} = \bar{h}$ , pero primero calculamos la dirección en general.

Suponiendo que solo

$$(5.1) \quad g^t \bar{h} = \eta \quad \text{a partir de (4.11)}$$

Por simplicidad de notación, esto siempre se puede lograr mediante un parámetro escalar.

También suponemos que  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$  se han ajustado si en necesario para que nuestra solución actual es:

$$(5.2) \quad \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{solución}$$

Primero evaluamos el gradiente de la función potencial en el punto actual para un vector  $\mu = (\mu_j) \in \mathbb{R}$  es conveniente para denotar

$$(5.3) \quad \mu^{-1} := (\mu_j^{-1})$$

$$\text{De (5.2) , (5.4) } \nabla \phi = \nabla \phi(\bar{h}, \bar{g}, 1) = \frac{n+\rho}{n} \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h^{-1} \\ g^{-1} \\ 2\rho \end{pmatrix}$$

$$\phi = (n + \rho) \text{Ln} x^t S - \sum \text{Ln} x_j - \sum \text{Ln} S_j - 2\rho \text{Ln} J$$

Aplicamos la gradiente, veamos

Matriz de proyección: se llama  $P_{\bar{A}}$  ,  $P_{\bar{B}}$

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) = (n + \rho) \text{Ln} \bar{x}^t \bar{S} - \sum \text{Ln} \bar{x}_j - \sum \text{Ln} \bar{S}_j - 2\rho \text{Ln} \bar{J} + \rho \text{Ln} \delta^2$$

$$\nabla \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J}) = \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{S}}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{J}} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_1} &= \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}^t x} - \frac{1}{\bar{x}_1} \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_2} &= \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}^t x} - \frac{1}{\bar{x}_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_n} &= \frac{\bar{S}_n}{\bar{S}^t x} - \frac{1}{\bar{x}_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} &= (n + \rho) - \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}^t x \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}^t x \\ \vdots \\ \bar{S}_n \\ \bar{S}^t x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ 1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ 1 \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{(n + \rho)\bar{S}}{S^t \bar{x}} - (x_j^{-1}) \\ &= \frac{(n + \rho)\bar{S}}{S^t \bar{x}} - (x^{-1}) \end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{S}} = \frac{(n + \rho)\bar{x}}{S^t \bar{x}} - \bar{S}^{-1} \quad \wedge \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{J}} = -\frac{2\rho}{\bar{J}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(n + \rho)}{S^t \bar{x}} \bar{S} - x^{-1} \\ \frac{(n + \rho)\bar{x}}{S^t \bar{x}} - S^{-1} \\ -\frac{2\rho}{\bar{J}} \end{bmatrix} = \nabla \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{S}, \bar{J})$$

$$= \frac{(n + \rho)}{S^t \bar{x}} \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \bar{x} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{-1} \\ S^{-1} \\ -\frac{2\rho}{\bar{J}} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \bar{\phi}(\bar{h}, \bar{g}, 1) = \frac{(n + \rho)}{n} \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{h}^{-1} \\ \bar{g}^{-1} \\ -2\rho \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}^t \bar{h} = \eta$$

La dirección de búsqueda que vamos a emplear es, como en los métodos para proyectivas ( $P_1$ ), la proyección de  $-\nabla \bar{\phi}$  para el espacio tangente de la región factible, por tanto, con

$$(5.5) \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & -\bar{A}\bar{h} \\ 0 & \bar{B} & -\bar{B}\bar{g} \end{bmatrix}$$

buscamos

$$(5.6) \quad \bar{d}' := P_{\bar{c}} \nabla \phi$$

Una consecuencia importante de la creación Primal - Dual es que con la ampliación se dan al final de §4  $\bar{d}'$  (para  $i$  modificado por  $a$ )

Antes de calcular  $i'$  remarcamos que si el punto actual  $\bar{g} = \bar{h} = e$ ,  $J = 1$ , entonces la homogeneidad de  $\phi$  implica  $(e^t, e^t, 1) \nabla \phi = 0$ . Por lo tanto,  $\bar{d}'$  es también la proyección de  $-\nabla \phi$  en el espacio nulo de

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & -Ah \\ 0 & \bar{B} & -\bar{B}\bar{g} \\ e^t & e^t & 1 \end{bmatrix}$$

Y esta dirección también es adecuada si la restricción simple  $e^t x + e^t \bar{S} + \bar{J} = 2n + 1$  se añade a  $(\overline{HPD})$  se obtiene un múltiplo escalar de  $\bar{d}'$  si proyectamos el gradiente negativo de la función objetivo en este mismo espacio nulo. Sin embargo, si trabajamos con  $\nabla \bar{\phi}$  la fila adjunta extra no es necesario. La omisión de la restricción simple conserva la homogeneidad de  $(\overline{HPD})$  y se ha propuesto fuertemente por Ghellinck y Vial [8] y [9]. En Nuestro contexto, la adición de una fila de los cambios de la dirección ya que la solución actual no suele ser  $\bar{x} = \bar{S} = e$ ,  $J = 1$ .

Ahora tenemos que calcular  $P_{\bar{c}}$  un hecho importante que se desprende de (4.5) es que

$$(5.7) \quad P_{\bar{A}} + P_{\bar{B}} = I \quad (\text{Demostrado en 3.9})$$

Usamos esto en varias ocasiones

$$T := \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{B} \end{bmatrix}, \quad \mu := \begin{bmatrix} -\bar{h} \\ -\bar{g} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [T, T_\mu]$$

Entonces

$$P_T = \begin{bmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & P_{\bar{B}} \end{bmatrix}; \quad I - P_T = \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} & 0 \\ 0 & P_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

$$\gamma := |I - P_T| \mu = \begin{bmatrix} -P_{\bar{B}} \bar{h} \\ -P_{\bar{A}} \bar{g} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$(5.8) \quad \omega := (1 + \gamma^t \gamma)^{-1} = (1 + \bar{h}^t P_{\bar{B}} \bar{h} + \bar{g}^t P_{\bar{A}} \bar{g})^{-1}$$

Ahora desde el §4.2 de [26] obtenemos el Lema 2

## LEMA 2

$$P_{\bar{C}} = \begin{bmatrix} P_{\bar{A}} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\bar{B}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

donde  $\varpi$  esta dado por (5.8)

Para calcular  $d'$  en (5.6) primero calculamos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{h}^{-1} \\ \bar{g}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} &= [P_{\bar{B}} \bar{h} \quad P_{\bar{A}} \bar{g} \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{g} \\ h \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \bar{g}^t P_{\bar{B}} \bar{h} + \bar{g}^t P_{\bar{A}} \bar{h} \\ &= \bar{g}^t \underbrace{(P_{\bar{B}} + P_{\bar{A}})}_I \bar{h} = \bar{g}^t \bar{h} = \eta \quad \text{por (4.11)} \end{aligned}$$

usando (5.7)

$$\begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{h}^{-1} \\ \bar{g}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{h}^t P_{\bar{B}} \bar{h} + \bar{g}^t P_{\bar{A}} \bar{g} + 2\rho$$

$$(5.10) \quad S = \rho + \bar{g}^t P_{\bar{A}} \bar{g} + \bar{h}^t P_{\bar{B}} \bar{h} - \eta$$

De 5.4 y el anterior, nos encontramos con

$$(5.10) \quad \bar{d} = -P_{\bar{C}} \nabla \bar{\phi} = \frac{-n+\rho}{n} \begin{bmatrix} P_{\bar{A}} \bar{g} \\ P_{\bar{B}} \bar{h} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_n \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h}^{-1} \\ P_{\bar{A}} \bar{g}^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\bar{A}} \bar{h}^{-1} \\ P_{\bar{B}} \bar{g}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega(\eta + \rho + \delta) \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d}' = -\rho C \nabla \phi$$

$$-\begin{bmatrix} P_{\bar{A}} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\bar{B}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\bar{B}} \bar{h} \\ P_{\bar{A}} \bar{g} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{n+\rho}{n} \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{h}^{-1} \\ \bar{g}^{-1} \\ 2\rho \end{bmatrix}$$

De  $(\beta)$  y  $(\theta)$  como esta en el PPP

$$d' = \frac{-n + \rho}{n} \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{g} \\ P_{\bar{B}}\bar{h} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{h}^{-1} \\ P_{\bar{B}}g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega\delta \begin{bmatrix} P_{\bar{B}}\bar{h} \\ P_{\bar{A}}\bar{g} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La dirección  $d'$  es apropiado para el espacio proyectivo, el dominio de la (HPD). Es conveniente para transformar esta dirección de nuevo a una dirección apropiada para el problema no homogéneo (PD). Si pasamos cuarto punto al actual  $\beta$  tamaño de paso en la dirección  $d' = (d'_x, d'_y, d'_z)$  se llega

$$\begin{bmatrix} \bar{h} + \beta' \bar{d}'_x \\ \bar{g} + \beta' \bar{d}'_s \\ 1 + \beta' d'_j \end{bmatrix} = (1 + \beta' d'_j) \begin{bmatrix} \bar{h} + \beta \bar{d}_x \\ \bar{g} + \beta \bar{d}_s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde  $B := \beta' / (1 + \beta' d'_j)$  y  $\bar{d}_x = \bar{d}'_x - \bar{d}'_j \bar{h}$ ,  $\bar{d}_s = \bar{d}'_s - \bar{d}'_j \bar{g}$

Dada la homogeneidad de  $\phi$ , por lo tanto, es equivalente a mover una  $\beta$  tamaño de paso en la dirección

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{d}_x \\ \bar{d}_s \\ \bar{d}_y \end{bmatrix} := \frac{-n + p}{n} \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{g} \\ P_{\bar{B}}\bar{h} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{h}^{-1} \\ P_{\bar{B}}g^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega\delta \begin{bmatrix} -P_{\bar{A}}\bar{h} \\ -P_{\bar{B}}\bar{g} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observamos ahora las simplificaciones que se producen cuando, como en (4.10)  $g = h = e$  entonces a partir de (5.1),  $\bar{e}^t \bar{e} = n$  y claramente  $\bar{e}^t \bar{e} = n$ . Por lo tanto, a partir de (5.8)

$$(5.12) \quad \omega = (1 + \bar{e}^t P_{\bar{A}} \bar{e} + \bar{e}^t P_{\bar{B}} \bar{e})^{-1} = (1 + \bar{e}^t \bar{e})^{-1} = (n + 1)^{-1}$$

Y a partir de (5.10)

$$\delta = \rho + \bar{e}^{-t} P_{\bar{A}} \bar{e} + \bar{e}^{-t} P_{\bar{B}} \bar{e} - \eta = \rho + \bar{e}^{-t} \bar{e} - \eta = \rho$$

en donde

$$(5.13) \quad \bar{d} = -(1 + \psi) \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{e} \\ P_{\bar{B}}\bar{e} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{\bar{A}}\bar{e}^{-1} \\ P_{\bar{B}}\bar{e}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ para}$$

$$(5.14) \quad \psi = \frac{2n+1}{n(n+1)} \rho$$

De nuevo, si  $\bar{e}$  esta cerca de  $e$  y se elige un valor adecuado de  $\psi$ , nuestro medio Primal-Dual nos asegura que  $\bar{d}$  no puede ser demasiado pequeño. Además, no hay coste de cálculo de esta mayor dimensionalidad si

$$(5.15) \quad f := -(1 + \psi)\bar{e} + \bar{e}^{-1}$$

entonces

$$(5.16) \quad \bar{d}_x = P_{\bar{A}}f \quad \text{y} \quad \bar{d}_S = f - \bar{d}_x$$

Para concluir esta sección, relacionamos nuestra dirección  $\bar{d}$  en (5.13) a los generados por los métodos de seguimiento de camino.

Considere la ecuación (2.11). Si la escala es al final de §4, podemos reescribir estas ecuaciones en términos de  $\bar{d}_x = \delta\Omega^{-1}d_x$ ,  $\bar{d}_S = \delta\Omega^{-1}d_S$  la última ecuación de (2.11) es equivalente a  $Bd_S = 0$  obtenemos así

$$(\hat{x}\hat{S})^{1/2}(\bar{d}_x + \bar{d}_S) = -\delta(\hat{x}\hat{S}e - \mu e)$$

$$\bar{A}\bar{d}_x = 0$$

$$\bar{B}\bar{d}_S = 0$$

La primera ecuación se puede escribir

$$\bar{d}_x + \bar{d}_S = -\bar{e} + (\mu/\bar{\xi})e^{-1}$$

y entonces

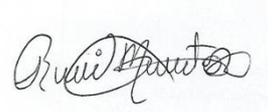
$$(5.17) \quad \bar{d}_x = P_{\bar{A}}f' \quad , \quad \bar{d}_S = P_{\bar{B}}f' \quad \text{con}$$

$$(5.18) \quad f' = -\bar{e} + (\mu/\bar{\xi})e^{-1}$$

La similitud con (5.15), (5.16) que llama la atención de hecho si se elige de manera que  $\psi$ ,  $1 + \psi = \hat{\xi}/\mu$  entonces las dos direcciones coinciden. Si  $\mu = \hat{\xi}(1 - \gamma/\sqrt{n})$  para alguna  $\gamma$  constante, sugiere esto  $\psi = \gamma'/\sqrt{n}$  para alguna constante  $\gamma'$ . Nuestra elección de  $\psi$  sera a llegar esta forma, pero está motivada por la obtención de reducciones adecuadas en la función potencial  $\bar{\phi}$ .

## 6.- EL ALGORITMO

Ahora tenemos todos los ingredientes para nuestro algoritmo.



Paso 1: Suponemos que tenemos disponibles un punto  $(x^\circ, y^\circ) \in F_+(P_D)$  el cual aproximadamente se centra, luego se cumple:

$$(6.1) \quad \|x^\circ S^\circ e - \xi^\circ e\| \leq \alpha \xi^\circ$$

Donde  $\xi^\circ = e^t x^\circ S^\circ e / n$  para  $0 < \alpha < 1$

Esto ha sido bien discutido en [12], [15], [21]-[23], [28]

Paso 2: Luego, generamos una sucesión de la siguiente manera:

Dada  $(x^k, S^k)$ , hacemos  $\hat{x} = x^k$ ,  $\hat{S} = S^k$  y definimos los datos reajustados por (4.3) con  $\delta$  y  $\Omega$  dada por (4.9).

Paso 3: A continuación  $(x^k, S^k)$  se transforma en  $(\bar{e}, \bar{e})$  y luego nosotros elegimos  $\bar{d}$  por (5.13) y establecemos

$$(6.2) \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{S} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{e} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \bar{d}_x \\ \bar{d}_S \end{bmatrix}$$

Para  $\beta > 0$  (de hecho, se analiza el caso  $\beta$  fijo.)

Paso 4: Se emplea una búsqueda lineal para minimizar aproximadamente la función potencial  $\phi(x, s, 1)$  (Se podría ser utilizado siempre que se incluya “una salvaguarda” para mantener las iteraciones aproximadamente centradas, sin embargo los Algoritmos de Ye  $\in$  [31] no requieren tal salvaguarda).

Paso 5: Si

$$(6.3a) \quad \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ S^{k+1} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \delta^{-1} \Omega \bar{x} \\ \delta^{-1} \Omega^{-1} \bar{S} \end{bmatrix}$$

Entonces, se retorna al Paso 3

Paso 6: Caso contrario

Este es el punto buscado.

$$(6.3b) \quad \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ S^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{-1} \Omega \bar{x} \\ \delta^{-1} \Omega^{-1} \bar{S} \end{bmatrix}$$

Paso 6: Fin

Nuestro objetivo es demostrar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ S^{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta^{-1} \Omega \bar{x} \\ \delta^{-1} \Omega^{-1} \bar{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{-1} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} \delta \Omega^{-1} \bar{x} \\ \delta^{-1} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{-1/2} \delta \Omega \bar{S} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta^{-1} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} \delta (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{-1/2} x \\ \delta^{-1} (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{1/2} \delta (\hat{x} \hat{S}^{-1})^{-1/2} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ S^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### TEOREMA 1

Sea  $\rho = \frac{2n+2}{2n+1} \sqrt{n}$  y  $\psi = \frac{2}{\sqrt{n}}$

Sea  $\alpha = 1/3$  y  $\beta = 1/15$  entonces si  $(x^0, S^0)$  satisface (6.1) el algoritmo anterior esta bien definido y genera una sucesión de puntos que satisfacen

$$(6.4) \quad \|x^k S^k e - \xi^k e\| \leq \alpha \xi^k$$

donde  $\xi^k = e^t x^k S^k e / n$  y

$$(6.5) \quad \phi(x^{k+1}, S^{k+1}, 1) \leq \phi(x^k, S^k, 1) - \eta$$

Donde  $\eta = 1/9$

La desigualdad dada en (6.5) implica la complejidad deseada para el algoritmo. En verdad de (4.2)

$$\phi(x, s, 1) = \rho \text{Ln}(x^t s) - \sum_j \text{Ln}\left(\frac{x_j s_j}{x^t s}\right)$$

Y de (6.1) se muestra que el último término esta acotado por  $(x^0, s^0)$  y por (6.4) para todo  $(x^k, s^k)$ . Por tanto, con  $\rho \sim \sqrt{n}$ , (6.5) nos brinda

### Corolario

En  $O(\sqrt{n} L)$  pasos, el algoritmo alcanza

$$(6.6) \quad e^t X^k S^k e \leq 2^{-L} e^t X^0 S^0 e$$

Este corolario nos indica que el modelo, con una elección apropiada de  $(x^0, s^0)$  se podrá alcanzar con  $O(\sqrt{n} L)$  pasos las soluciones y a partir de estas las soluciones optimales para (P) y (D) pueden ser recuperadas con  $O(n^3)$  operaciones aritméticas.

**LEMA 3:**

Sea  $\rho, \psi, \alpha, \beta$  y  $\eta$  dados por el teorema y que se cumple que

$$(6.7) \quad \|\bar{e}^2 - e\| \leq \alpha$$

Si

$$(6.8) \quad d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_S \\ d_\tau \end{bmatrix} = -(1 + \psi) \begin{bmatrix} P_A \bar{e} \\ P_B \bar{e} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_A \bar{e}^{-1} \\ P_B \bar{e}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e} \\ \bar{e} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} d_x \\ d_S \end{bmatrix}$$

Entonces

$$(6.9) \quad \|xSe - \xi e\| \leq \alpha \xi$$

Con  $\xi = x^t s / n$ , y

$$(6.10) \quad \phi(x^{k+1}, S^{k+1}, 1) \leq \phi(x^k, S^k, 1) - \eta$$

Demostración

Tomando el supuesto

$$\begin{aligned} \|\bar{e}^2 - e\| &= \|\bar{e}\bar{e} - e\| \text{ utilizando la transformación} \\ &= \|x^k S^k - e\| \\ &= \|x^k S^k e - e\| \leq \alpha \leq \alpha \xi^k \end{aligned}$$

$$\|x^k S^k e - \xi^k e\| \leq \|x^k S^k e - e\| \leq \alpha \leq \alpha \xi^k$$

Luego

$$\|x^k S^k e - \xi^k e\| = \alpha \xi^k \text{ pero por (6.3) se tiene}$$

$$\|xSe - \xi e\| = \alpha \xi$$

Demostración (2.5)

Sea

$$\nabla \phi_1 = \nabla \phi_1(e, 1) = \begin{bmatrix} n+1 \\ g^t e \\ -1 \end{bmatrix} \bar{g} - e$$

en efecto

$$\begin{aligned} \nabla \bar{\phi}_1 &= \nabla \left[ (n+1) \text{Ln } \bar{\xi}^t x - \sum_{j=1}^n \text{Ln } \bar{x}_j - \text{Ln } \bar{\xi} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{\bar{g}^t \bar{x}} (\bar{g}^t \bar{x})' - \left( \sum_{j=1}^n \text{Ln } \bar{x}_j \right)' \\ (\text{Ln } \bar{\xi})' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La notación ( )' implica la derivación con respecto a  $x$  e  $y$  el segundo con respecto a  $\xi$ .

Luego:

$$\begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{\bar{g}^t \bar{x}} g_1 - \frac{1}{x_1} \\ \frac{(n+1)}{\bar{g}^t \bar{x}} g_2 - \frac{1}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{(n+1)}{\bar{g}^t \bar{x}} g_n - \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{\bar{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{\bar{g}^t \bar{x}} g - \frac{1}{x_j} \\ -\frac{1}{\bar{\xi}} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \bar{\phi}_1(e, 1) = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)}{\bar{g}^t e} g - e \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pues  $\frac{1}{x_j} = 1$  ; para  $x_j = 1$  ;  $1 \leq j \leq n$



## V. RESULTADOS

### 5.1 Resultados Descriptivos

Hemos arribado a los siguientes resultados:

1. Se presenta un Algoritmo Proyectivo para el Problema de Programación Lineal
2. La complejidad del Algoritmo presentado es de  $O(\sqrt{n} L)$  pasos.
3. Las soluciones óptimas para (P) y (D) pueden ser recuperadas con  $O(n^3)$  operaciones aritméticas

### 5.2 Resultados Inferenciales

Hemos arribado a los siguientes resultados:

1. Con la apropiada elección del tamaño de paso  $\beta$  se consigue un decrecimiento en la función  $\bar{\phi}_1$  proporcional a  $\bar{d}$ . Ver (2.7)
2. Claramente los algoritmos Proyectivos definen direcciones de búsqueda que siempre consiguen una reducción constante en la función objetivo

## VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 6.1 Contrastación y demostración de la Hipótesis con los resultados

En el proyecto de investigación se formuló la hipótesis general de que, dado un Problema de Programación Lineal Estándar ( $P_1$ ) y una apropiada función barrera, entonces del Problema Barrera ( $BP_1$ ) se puede deducir el sistema de ecuaciones no lineales (2.9) que definen a las Trayectorias Solución del problema. Asimismo, al trabajar con el problema Dual ( $D_1$ ) y generar su respectivo problema barrera ( $BD_1$ ) se verifica que el sistema de ecuaciones no lineales deducido anteriormente, también caracteriza a las soluciones óptimas del problema dual.

Por otro lado, con las hipótesis A1-A3 se pudo reformular los problemas ( $P_1$ ) y ( $D_1$ ) generando los problemas ( $P$ ) y ( $D$ ) respectivamente y a partir de estos se generó el Problema Combinado Primal-Dual (PD). Luego a partir de (PD) se genera el llamado Problema Homogenizado (HPD) al cual le asociamos una apropiada Función Potencial  $\phi$  y con esta función se discute el reescalado de las variables primal y dual. El reescalado permite generar el problema ( $\overline{HPD}$ ) que es la versión homogenizada de (HPD).

Luego, al problema ( $\overline{HPD}$ ) se le asocia su Función Potencial  $\bar{\phi}$  la cual esta definida en función de  $\phi$ , con la cual se podrán calcular las matrices proyección necesarias y las direcciones de búsqueda en el espacio reescalado. Finalmente, todo esto permite plantear el algoritmo.

### 6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Kojima, Mizuno y Yoshise [15] describen un algoritmo interior primal-dual que sigue la trayectoria central en ambas regiones factibles primal y dual y alcanza  $O(nL)$  iteraciones. Monteiro y Adler [21] proponen un método que requiere solamente  $O(\sqrt{n}L)$  iteraciones y tiene una complejidad de  $O(n^3L)$ . Una similar complejidad fue establecida por Kojima [16] para un método siguiendo trayectoria y que resuelve un cierto problema de complementariedad lineal. Monteiro y Adler también extienden su método para programación cuadrática convexa con una complejidad  $O(n^3L)$  [22]. Finalmente, Ye [30] propone un algoritmo primal para programación cuadrática que requiere solamente  $O(\sqrt{n}L)$ .

## 6.2 Responsabilidad Ética

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por Consejo Universitario N° 210-2017-CU, en nuestra investigación se verificó su cumplimiento con la normativa institucional que regulan su proceso. Se procedió con el rigor científico para su validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Arui Quinto', is located in the bottom right corner of the page.

## CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos se ha podido establecer las siguientes conclusiones:

3. Con la apropiada elección del tamaño de paso  $\beta$  se consigue un decrecimiento en la función  $\bar{\phi}_1$  proporcional a  $\bar{d}$ . Ver (2.7)
4. Con las hipótesis B1 – B3 se garantiza que el problema (PD) posee solución factible estrictamente positiva y también su problema homogenizado (HPD).
5. Se concluye que la función objetivo del problema  $(\overline{HPD})$  es  $\delta^2$  veces la función objetivo del problema (HPD)



## RECOMENDACIONES

Se recomienda

1. Continuar con estas ideas para aplicarlas al Problema original, pero con otro tipo de función potencial.
2. Continuar con estas ideas para aplicarlas al problema original, pero usando nuevas formas de reescalamiento.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Gruin" followed by a stylized flourish.

## IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adler, I., Karmarkar, N., Resende, M. and Veiga, G. (1986). An implementation of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming. Report ORC86-8. Operations Research Center, University of California, Berkeley, to appear in Math. Programming
- [2] Anstreicher, K. (1989). The Worst-Case Step in Karmarkar's Algorithm. Math. Oper. Res. 14 294—302.
- [3] Barnes, E. R. (1936). A Variation on Karmarkar's Algorithm for Solving Linear Programming Problems. Math. Programming 36 174—182.
- [4] \_\_\_\_, Chopra, S. and Jensen, D. L, (1988). A Polynomial- Time Version of the Affine-Scaling Algorithm. IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY.
- [5] Bayer, D. and Lagarias, J. C. (1989). The Nonlinear Geometry of Linear Programming. I. Affine and Projective Scaling Trajectories. II. Legendre Transform Coordinates and Central Trajectories. Trans. Amer. Math. Soc. 314 499-526, 527—561.
- [6] Dikin, I. I. (1967). Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming. Soviet Math Dokl. 8 674—675.
- [7] \_\_\_\_, (1974). On the Speed of an Iterative Process. Upravlyaemye Sistemi 12 54—60 (in Russian).
- [8] de Ghellinck, O. and Vial, J..P. (1987). An Extension of Karmarkar's Algorithm, for Solving a System of Linear 1-Nonlinear Equations on the Simplex. Math. Programming 39 79—92.
- [9] \_\_\_\_ and \_\_\_\_\_. (1986). A Polynomial Newton Method for Linear Programming. Algorithmica 1 425-453.—U
- [10] Fiacco, A. V. and McCormick, G. P. (1968). Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained, Minimization Techniques. John Wiley and Sons, New York.
- [11] Frisch, K. R. (1955). The Logarithmic Potential Method of Convex Programming. Unpublished manuscript, University Institute of Economics, Oslo Norway.
- [12] Gonzaga, C. C. (1989). An Algorithms for Solving Linear Programming Problems in  $O(n^3L)$  Operations. in: Progress in Mathematica Programming. N Megiddo (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1-28,
- [13] \_\_\_\_\_. (1987). Search Directions for Interior Linear Programming Methods. Memorandum No. UCB/ERL M87/44, Electronics Research. Laboratory, University of CALIFORNIA, Berkeley.

- [14] Karmarkar. N. (1984). A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica* 4 373—395.
- [15] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1939). A Primal Dual Interior Point Method for Linear Programming. in: *Progress in Mathematical Programming*. N. Megiddo, (Ed), Springer-Verlag, Berlin, 29—47.
- [16] \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_. (1989). A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems. in: *Math Programming* 44 1—26.
- [17] McDiarmid. C J. H. (1986). On the Improvement per Iteration in Karmarkar’s Algorithm for Linear Programming. Manuscript, Institute of Economics and Statistics, Oxford University, Oxford, U.K., to appear in *Math. Programming*.
- [18] Megiddo, N. (1989) Pathways to the Optima Set in Linear Programming. In: *Progress in Mathematical Programming* N. Megiddo (Ed.) Springer-Verlag, Berlin, 131-158.
- [19] Megiddo, N. and Shub, M. (1986). Boundary Behaviour of Interior Point Algorithms in Linear Programming. Research report RJ 5319, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY.
- [20] Mitchell, J. E. and Todd, M. J. (1986). On the relationship between the search directions in the affine and projective variants of Karmarkar’s linear programming algorithm. Technical Report no. 725, School of Operations Research, Cornell University, (Ithaca, NY,
- [21] Monteiro, R. C. and Adler, I (1989). Interior Path Following Primal-Dual Algorithms. Part I: Linear Programming, *Math. Programming* 44 27-41.
- [22] \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_. (1989). Interior Path Following Primal-Dual Algorithms. Part II: Convex Quadratic Programming. *Math. Programming* 44 43-66.
- [23] Renegar. J. (1988). A Polynomial-Time Algorithm Based on Newton’s Method for Linear Programming. *Math. Programming* 40 59—93.
- [24] Sonnevend, G. (1986). An Analytic Center’ for Polyhedrons and New Classes of Global Algorithms for Linear Smooth, Convex) Programming. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 84, Springer-Verlag, New York, 866-876.
- [25] Tanabe, K. (1987). Complementarity-Enforcing Centered Newton Method for Mathematical Programming. *New Methods for Linear Programming*. The Institute of Statistical Mathematics, Minatoku, Tokyo, 118-144.
- [26] Todd, M. J, (1988). Exploiting Special Structure in Karmarkar’s Linear Programming Algorithm. *Math. Programming* 41 97-113.

[27] \_\_\_ and Burrell, B. P. (1986). An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables. *Algorithmica* 1 409-424.

[28] Vaidya, P. M. (1987). An Algorithm for Linear Programming Which Requires  $O(((m+n)n^2 + (m+n)^{1.5})L)$  Arithmetic Operations preprint, AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ.

[29] Vanderbei, R. J., Meketon, M. S. and Freedman, B. A. (1986). A Modification of Karmarkar's Linear Programming Algorithm. *Algorithmica* 1 395-407.

[30] Ye, Y. (1987). Interior Algorithms for Linear, Quadratic, and Linearly Constrained Convex Programming. Ph.D. dissertation, Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Stanford, CA.

[31] \_\_\_\_\_.(1986). An  $O(n^3L)$  Potential Reduction Algorithm for Linear Programming manuscript, Department of Management Sciences, The University of Iowa City, to appear in *Math. Programming*.

[32] \_\_\_\_ and Todd, M. J. (1987). Containing and Shrinking Ellipsoids in the Path-Following Algorithm manuscript, Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Stanford, CA, to appear in *Math. Programming*.



## ANEXOS

### Matriz de consistencia

| PROBLEMA   | OBJETIVOS   | HIPOTESIS  | VARIABLES  | METODOLOGÍA  |
|--|---|--|--|--|
| <p><b>Problema General</b></p> <p>¿Se podrá plantear un algoritmo nuevo que reúna características de los tres grupos para resolver un Problema de Programación Lineal?</p> <p><b>Problema Específico</b></p> <p>¿Se puede plantear un nuevo Algoritmo del tipo Proyectivo para el Problema de Programación Lineal?</p> | <p><b>Objetivo general:</b></p> <p>Plantear un Algoritmo Nuevo para un Problema de Programación Lineal.</p> <p><b>Objetivo específico:</b></p> <p>Plantear un Algoritmo nuevo del tipo proyectivo para resolver un Problema de Programación Lineal.</p> | <p><b>Hipótesis general:</b></p> <p>Dado el Problema de Programación Lineal</p> $(P) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x \\ \text{s.a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ <p>Existe un algoritmo que lo resuelve y que posee características de comunes de los tres grupos.</p> <p><b>Hipótesis específicas:</b></p> <p>Dado el Problema de Programación Lineal (P),</p> $(P) \begin{cases} \text{maximizar } c^t x \\ \text{s.a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ <p>Existe un Algoritmo Proyectivo que resuelve el Problema de Programación Lineal con características comunes de los tres grupos.</p> | <p><b>Variable Independiente:</b></p> <p>El Problema de Programación Lineal</p> <p><b>Variable Dependiente:</b></p> <p>El Algoritmo Proyectivo</p> | <p><b>Nivel de Investigación</b></p> <p>Investigación científica aplicada</p> <p><b>Tipo de Investigación:</b></p> <p>Investigación aplicada, cuantitativa y transversal.</p> <p><b>Diseño de la Investigación:</b></p> <p>El proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica. El diseño de la investigación a desarrollar es teórico y consiste en obtener un esquema iterativo que nos permita caracterizar a las Trayectorias Solución de un Problema de Programación Lineal</p> |