UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR:

JUAN MANUEL RICRA MAYORCA

ASESOR:

MG. EVER FRANKLIN CRUZADO QUISPE

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

ANÁLISIS NUMÉRICO Y MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Callao, 2022

PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD	:	Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN	:	Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
TÍTULO	:	Funciones gap multiparamétricas para la reformulación de problemas de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.
AUTOR	:	Juan Manuel Ricra Mayorca (ORCID: 0000-0001-8789-6572)
ASESOR	:	Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe (ORCID: 0000-0001-8045-6785)
LUGAR DE EJECUCIÓN	:	Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
UNIDAD DE ANÁLISIS	:	Problema de desigualdad variacional
TIPO DE INVESTIGACIÓN	:	Básica
ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN	:	Cuantitativo
DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	:	No experimental
TEMA OCDE	:	Matemáticas Puras (1.01.01) https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 31-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

JUAN MANUEL RICRA MAYORCA

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: **"FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO".**

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 24 de agosto 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/pgh
Exp: 188.08.23
c.c.: Archivo

Document Information

Analyzed document	INFORME FINAL DE TESIS_RICRA_JUAN_ (1).pdf (D173097533)
Submitted	8/24/2023 7:00:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

W URL: http://hdl.handle.net/11441/56353
Fetched: 8/24/2023 7:00:00 PM — 1

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO" TESIS PARA OBTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS AUTOR: JUAN MANUEL RICRA MAYORCA ASESOR: MG. EVER FRANKLIN CRUZADO QUISPE LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: ANÁLISIS NUMÉRICO Y MATEMÁTICA COMPUTACIONAL Callao, 2022 PERÚ

ii

iii INFORMACIÓN BÁSICA FACULTAD : Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC UNIDAD DE INVESTIGACIÓN : Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC TÍTULO : Funciones gap multiparamétricas para la reformulación de problemas de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto. AUTOR : Juan Manuel Ricra Mayorca (ORCID: 0000-0001-8789-6572) ASESOR : Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe (ORCID: 0000-0001-8045-6785) LUGAR DE EJECUCIÓN : Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC UNIDAD DE ANÁLISIS : Problema de desigualdad variacional TIPO DE INVESTIGACIÓN : Básica ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN : Cuantitativo DISEÑO DE INVESTIGACIÓN : No experimental TEMA OCDE : Matemáticas Puras (1.01.01) https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

iv HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO Ricra Mayorca, Juan Manuel Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N°130-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Aprobado por:
______________________________ Dr. Eugenio Cabanillas Lapa Presidente
______________________________ Lic. Absalón Castillo Valdivieso Secretario
______________________________ Dr. Pedro Canales García Vocal
v ______________________________ Dr. Edinson Montoro Alegre Suplente ______
______________________________ Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe Asesor

vi DEDICATORIA Este trabajo de tesis se lo dedico a mis padres Isaac e Hilda quienes me guiaron y aconsejaron durante todos los años de mi formación académica. A mi esposa Lisseth quién me apoyó con sus oraciones y consejos durante todo el tiempo del desarrollo de la tesis y a mi hija Camila por ser mi gran motivación.

vii AGRADECIMIENTOS Quiero agradecer en primer lugar a mi Padre Celestial "Dios" quien me dio las fuerzas y la fe para terminar mi trabajo de tesis. También quiero agradecer a todas aquellas personas que contribuyeron en mi formación profesional, a mis profesores de los cuales aprendí mucho, no solo recibí sus conocimientos, sino también aprendí de sus estilos de enseñanza, valores y virtudes. Finalmente, quiero dar un agradecimiento muy especial a mi Asesor, ya que fue la persona que me apoyó de manera incondicional, me brindó su confianza y su valiosa amistad.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: http://meet.google.com/jni-dvge-hwj mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 12:30 a.m del Jueves veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **RICRA MAYORCA JUAN MANUEL**, titulado: **"FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. CABANILLAS LAPA, Eugenio	: Presidente
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón	: Secretario
Dr. CANALES GARCÍA, Pedro	: Vocal
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl	: Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 166-2022-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 12:30; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **RICRA MAYORCA JUAN MANUEL**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
DIECISIETE	**MUY BUENO**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **13:20** horas del día veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa Presidente	Lic. Absalón Castillo Valdivieso Secretario
Dr. Pedro Canales García Vocal	Dr. Edinson Montoro Alegre Suplente

DEDICATORIA

Este trabajo de tesis se lo dedicó a mis padres Isaac e Hilda quienes me guiaron y aconsejaron durante todos los años de mi formación académica. A mi esposa Lisseth quién me apoyó con sus oraciones y consejos durante todo el tiempo del desarrollo de la tesis y a mi hija Camila por ser mi gran motivación.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mi Padre Celestial "Dios" quien me dio las fuerzas y la fe para terminar mi trabajo de tesis. También quiero agradecer a todas aquellas personas que contribuyeron en mi formación profesional, a mis profesores de los cuales aprendí mucho, no solo recibí sus conocimientos, sino también aprendí de sus estilos de enseñanza, valores y virtudes.

Finalmente, quiero dar un agradecimiento muy especial a mi Asesor, ya que fue la persona que me apoyó de manera incondicional, me brindó su confianza y su valiosa amistad.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

En la presente investigación el objetivo planteado fue: “Demostrar la existencia de una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones”. Para la recolección de datos se utilizó la técnica de análisis de documental y como instrumento una ficha de registro documental, el análisis y procesamiento de datos mediante el trabajo con equipo de investigación. Previa evaluación y análisis de los resultados se evidencia que existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones, se estudiaron varias propiedades de dicha función y las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional y condiciones para que a partir de esta función se pueda obtener una cota de error global para dicho problema. También, se presentó un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.

Palabras clave: Funciones gap, problema de desigualdad variacional, problema de optimización diferenciable.

ABSTRACT

The aim of this study was: "Demonstrate the existence of a multiparametric gap function that allows reformulating the variational inequality problem as a differentiable and unrestricted optimization problem." For the data collection, the documentary analysis technique was carried out and as an instrument a documentary record sheet, the analysis and processing of data through work with a research team. After evaluation and analysis of the results, it is evident that there is a multiparametric gap function that allows reformulating the variational inequality problem as a differentiable and unrestricted optimization problem, various properties of said function and the conditions for a stationary point of the multiparametric gap function is the solution of the variational inequality problem and conditions so that from this function a global error bound can be obtained for said problem. An iterative method based on the multiparametric gap function that allows solving the variational inequality problem was also presented.

Keywords: Gap functions, variational inequality problem, differentiable optimization problem.

INTRODUCCIÓN

La teoría de desigualdades variacionales fue introducida por Hartman y Stampacchia (1966) como una herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con aplicaciones principalmente a la mecánica.

La teoría de desigualdades variacionales de dimensión finita apareció cuando Dafermos (1980) reconoció en las condiciones de equilibrio del tráfico de redes una estructura de una desigualdad variacional. Esto reveló una nueva metodología para el estudio de problemas en economía, ciencias de la gerencia e ingeniería con un enfoque en transporte.

La teoría de desigualdades variacionales proporciona una herramienta para formular una variedad de problemas de equilibrio (tráfico de redes, economía de costos, equilibrio en finanzas, entre otros); analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionando algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

Existen varios métodos para resolver un problema de desigualdad variacional, algunos de ellos se obtienen reformulando el problema principal, generando sistemas de ecuaciones, problemas de complementariedad, problemas de punto fijo y problemas de optimización.

En el trabajo de investigación se estudió el problema de desigualdad variacional y su reformulación como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones mediante una función gap adecuada. Esto permitió que el problema original sea más tratable al poder admitir las diferentes y abundantes técnicas en la teoría de optimización.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

El problema de desigualdad variacional (*PDV)*, consiste en encontrar un vector $x \in K$ tal que

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K$$

donde K es un subconjunto no vacío de R^n, F una función: $F: R^n \rightarrow R^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en R^n(Facchinei & Pang, 2003). Cuando el conjunto K es el ortante no negativo de R^n, este problema se reduce al problema de complementariedad no lineal (*PCN*).

Una función de valores reales definida en R^n o en un subconjunto de este, es llamada una función gap para el *PDV*, si el conjunto de minimizadores globales en un conjunto dado coincide con el conjunto solución del *PDV* (Hu & Song, 2009). Una función gap sirve como una herramienta para desarrollar algoritmos para solucionar el *PDV* y analizar sus propiedades de convergencia.

Auslender (1976) consideró la función gap definida por:

$$f(x) = sup \ \langle F(x), x - y \rangle, \ y \in K$$

No es difícil probar que f es no negativa sobre el conjunto K y que $f(x) = 0$ sí, y sólo si, $x \in K$ y x resuelve el *PDV*. Esta función gap permite reformular el *PDV* como un problema de optimización con restricciones equivalente:

Minimizar $f(x)$

sujeto a $x \in K$,

Esta función gap no es, en general, ni convexa ni diferenciable. Además, cuando el conjunto K es no acotado, f en general, puede tomar valores no finitos.

Fukushima (1992) consideró la función gap regularizada $f_\alpha : R^n \to R$ definida por:

$$f_\alpha(x) = \max\langle F(x), x - y\rangle - \left(\frac{\alpha}{2}\right) \|x - y\|^2, \;\; y \in K$$

Donde α es un parámetro positivo. Esta función gap superó las desventajas presentadas en la función gap de Auslender en el sentido que f_α es diferenciable (de ahí el término de función gap regularizada). Esta función permite reformular el *PDV* como un problema de optimización con restricciones, siendo equivalente a:

Minimizar $f_\alpha(x)$

sujeto a $x \in K$,

No es difícil probar aquí también que x es una solución del *PDV* sí, y solo sí, x minimiza f_α en el conjunto Ky $f_\alpha(x) = 0$

Peng (1997), consideró una función llamada función D-gap $M_\alpha : R^n \to R$ definida por:

$$M_\alpha(x) = f_{1/\alpha}(x) - f_\alpha(x)$$

Donde f_α es la función gap regularizada de Fukushima y α es una constante mayor que uno, la función M_α permite reformular el *PDV* como un problema de optimización diferenciable sin restricciones. Esta función es definida como la diferencia de dos funciones gap, de ahí el nombre de función D-gap. Esta función es la base de la teoría de funciones D-gap. En las funciones gap, gap regularizadas y D-gap, los parámetros que intervienen son fijos.

Dado el análisis expuesto bajo el esquema de problematización orientado a las variables de estudio (*PDV* y función gap), el presente trabajo de investigación tiene como propósito demostrar la existencia de una función gap multiparamétrica generalizando la función M_α que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema general

¿Existe una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones?

1.2.2 Problemas específicos

1. ¿Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional?

2.¿Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional?

3. ¿Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Demostrar la existencia de una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Demostrar la existencia de las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

2. Demostrar la existencia de las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.

3. Demostrar la existencia de un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional.

1.4 Justificación

Desde una perspectiva teórica, el estudio aportó información teórica relevante acerca del problema de desigualdad variacional y de las funciones gap; los cuales permitieron sistematizar y organizar un corpus teórico-conceptual acerca de dichas temáticas, llenando a su vez el vacío de conocimiento existente en nuestro medio.

El aporte metodológico de esta investigación se centró en el análisis del problema de desigualdad variacional, debido a que la teoría de desigualdades variacionales nos proporciona una poderosa metodología para el estudio de los problemas de equilibrio: tráfico de redes, economía de costos, equilibrio en finanzas, entre otros.

En cuanto a la importancia de la investigación, partiendo del entendido que, el problema de desigualdad variacional tiene múltiples implicancias en lo que se refiere a los problemas en economía, ciencias de la gerencia e ingeniería con un enfoque en transporte, se consideró que el estudio a realizado tiene una gran importancia ya que actualmente, la realidad peruana presenta muchos problemas relacionados con las implicancias que tiene el PDV, por ende se requiere conocer nuevas metodologías y herramientas para formular dichos problemas; analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionando algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

1.5 Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

Al realizar una investigación en la literatura con respecto al tema a desarrollar, se ha visto que no se cuenta con trabajos relevantes a nivel nacional, por este motivo, los trabajos teóricos de referencia son de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas. Es así como la principal limitación es el costo de dicho material, ya que la mayoría de las revistas consideran un monto a pagar por sus artículos.

1.5.2 Temporal

Debido a la coyuntura actual de nuestro país por causa de la pandemia generada por el virus SARS-CoV-2, uno de los principales inconvenientes a la hora de desarrollar el proyecto, es el de no poder desplazarse libremente hacia los centros de investigación, bibliotecas especializadas, o bancos de datos presenciales disponibles en la ciudad.

Esto generó principalmente una problemática en el tiempo de la investigación, por más que la mayoría del material disponible sea virtual. Además, esto se refleja en las pocas reuniones presenciales con el asesor, causando también problemáticas temporales.

1.5.3 Espacial

Como se detalló en el inciso anterior y además conforme a los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación y la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU) dictados en el marco de la emergencia sanitaria para prevenir y controlar el COVID-19, la presente investigación se desarrolló de manera virtual.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Internacionales

Blanco Louro et al. (2003) en su artículo titulado: Sobre el uso de las desigualdades variacionales para el cálculo del problema de complementariedad no lineal, propone como objetivo central de su estudio: “Presentar la aplicabilidad de la función D-gap a los problemas de complementariedad no lineal”. En la investigación se muestra la importancia para la resolución de los *PDV*, a partir del uso de funciones D-gap para reformular el PDV como un problema de optimización diferenciable sin restricciones y como una herramienta para formular algoritmos con la finalidad de solucionar el *PDV*.

Portilla (2008) en su tesis titulada: Modelo de asignación de tráfico en redes mediante desigualdades variacionales, propone como objetivo central de su estudio: “Presentar un método para resolver los modelos de asignación de tráfico en redes”. En la investigación se formula modelos estáticos para los casos de demanda fija, mediante desigualdades variacionales y mediante programación matemática. Se expone el método de Douglas Rachford y el de Frank Wolfe para resolver los modelos planteados junto con una aplicación.

Ruiz-Garzón et al. (2015) en su artículo titulado: Convexidad generalizada: Aplicaciones a problemas variacionales, artículo científico publicado en el Boletín de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla, España, propone como objetivo central de su estudio: "Mostrar las aplicaciones de la convexidad generalizada y la monotonicidad generalizada en particular, al estudio de problemas variacionales". En la investigación se muestra algunos resultados recientes sobre los problemas que están relacionados con la búsqueda de condiciones de equilibrio en los entornos físicos y económicos. Asi mismo, se estudia que si la convexidad juega un papel importante en los problemas de programación matemática, la monotonicidad juega también un papel similar en los problemas variacionales.

Es así que al constrastar los resultados expuestos en la literatura sobre el tema se observa la necesidad de generalizar las fucniones gap a partir de dominios multiparamétricos. El presente trabajo pretende responder a esta necesidad.

2.1.2 Nacionales

Baygorrea (2010) en su tesis titulada: Método del punto proximal para desigualdades variacionales en variedades riemannianas, cuyo objetivo central es: "Presentar una extensión del método de punto proximal con distancia de Bregman para resolver el *PDV*". Bajo algunas hipótesis naturales sobre F, obtiene la convergencia de la sucesión generada por el método de punto proximal para una solución del problema planteado.

Paz (2011) en su tesis titulada: Desigualdades variacionales, soluciones y aplicaciones, propone como el objetivo central de su estudio: "Presentar la teoría sobre desigualdades variacionales". En la investigación se muestra una breve reseña de la teoría sobre *PDV* y los casos que se presentan. Se hace referencia a ejemplos que ilustran diversas formulaciones de un *PDV*. Se presentan los resultados más importantes de optimización no diferenciable debido a que en los problemas de aplicación con frecuencia se encuentra funciones con un número finito de puntos de no diferenciabilidad. Y finalmente se presentan los métodos posibles de solución de un *PDV*.

Mandujano (2013) en su tesis titulada: Solución de un problema de desigualdad variacional en R^n usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman, propone como objetivo central de su estudio: "Resolver el problema de desigualdad variacional utilizando el algoritmo de punto proximal generalizado". En la investigación se estudia que bajo ciertas hipótesis este algorítmo genera una sucesión convergente el cual es la solución del problema de desigualdad variacional.

Ramos (2018) en su tesis titulada: Formulación variacional y existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash, propone como objetivo central de su estudio: "Reformular el problema de Equilibrio de Nash como un problema de desigualdad variacional". El trabajo demuestra la existencia de soluciones para un problema de desigualdad variacional mediante dos herramientas matemáticas: el teorema de punto fijo y la teoría de grado topológico.

2.2 Bases teóricas

La presente sección está dedicada a exponer el marco teórico necesario para la concretización de los objetivos referentes al trabajo. Para esto seguiremos los resultados mostrados por Auslender (1976), Dafermos (1980), Fukushima (1992), Peng (1997), Yamashita et al.(1997) y Facchinei y Pang (2003).

2.2.1 Problema de desigualdad variacional

Equilibrio es un concepto central en numerosas disciplinas como son la economía, ciencias de la gerencia, investigación de operaciones e ingeniería.

Las metodologías que han sido aplicadas a la formulación, el análisis cualitativo, y el cómputo de equilibrio han incluido:

- Sistemas de ecuaciones
- Teoría de optimización
- Teoría de complementariedad
- Teoría de punto fijo

La teoría de desigualdades variacionales es una poderosa metodología para el estudio de los problemas de equilibrio.

La teoría de desigualdades variacionales fue introducida por Hartman & Stampacchia (1966) como una herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con aplicaciones principalmente a la mecánica.

La teoría de desigualdades variacionales en dimensión finita ocurrió cuando Dafermos (1980) reconoció en las condiciones de equilibrio del tráfico de redes (el cuál fue iniciado por Smith en 1979) una estructura de una desigualdad variacional.

Esto revela una metodología para el estudio de problemas en economía, ciencias de la gerencia, y también en ingeniería, con un enfoque en transporte.

Hasta el momento muchos problemas han sido formulados y estudiados como problemas de desigualdad variacional, los cuales incluyen:

- Problemas de equilibrio en tráfico de redes
- Problemas de equilibrio en economía de costos
- Problemas de equilibrio en finanzas

2.2.1.1 Teoría de desigualdades variacionales

La teoría de desigualdades variacionales nos proporciona una herramienta para: formular una variedad de problemas de equilibrio; analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionándonos algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

Esta teoría contiene, como casos especiales, los problemas clásicos en programación matemática como: sistemas de ecuaciones no lineales, problemas de optimización, problemas de complementariedad y también los relacionados con problemas de punto fijo.

Definición 2.2.1. Dado un subconjunto K del espacio euclidiano n-dimensional R^n y una aplicación $F: K \to R^n$, el problema de desigualdad variacional $PDV(F, K)$, consiste en encontrar un vector $x^* \in K$ tal que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K \quad \text{(II.1)}$$

El conjunto solución de este problema es denotado por $SOL(F,K)$. En la investigación se considerará al conjunto K convexo, cerrado y no vacío y, la función F es continuamente diferenciable ya que muchos resultados requieren esas condiciones. Matemáticamente algunos resultados no requieren la convexidad de K.

Dado que K es cerrado y F es continua, se sigue que $SOL(F,K)$ es siempre un conjunto cerrado.

Una primera interpretación geométrica del $PDV(F,K)$, específicamente de la desigualdad en (II.1), es que un punto x en el conjunto K es solución del $PDV(F,K)$ sí y solamente sí $F(x)$ forma un ángulo no obtuso con todo vector de la forma $y-x$ para todo y en K. Formalizaremos esta observación usando el concepto de cono normal. Específicamente asociado con el conjunto K y algún vector x' como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{N}(x';K) \equiv \{d \in R^n: \quad d^T(y-x') \leq 0,\ \forall y \in K\} \qquad \text{(II.2)}$$

Vectores en este conjunto son llamados vectores normales al conjunto K en x'. La desigualdad (II.2) claramente dice que un vector $x \in K$ resuelve el $PDV(F,K)$ sí y solamente sí $-F(x)$ es un vector normal a K en x; ó equivalentemente

$$0 \in F(x) + \mathcal{N}(x;K) \qquad \text{(II.3)}$$

El cono normal juega un rol importante en análisis convexo y programación no lineal. Este rol persiste en el estudio del PDV. La inclusión en (II.3) es llamada la ecuación generalizada.

Muchos problemas matemáticos pueden ser formulados como problemas de desigualdad variacional, y varios ejemplos aplicables al análisis de equilibrio siguen.

2.2.1.2 Sistema de ecuaciones

Muchos problemas de equilibrio en economía clásica han sido formulados como sistemas de ecuaciones, desde que condiciones necesarias claras de mercado son comparadas, el total de la oferta con el total de la demanda. En términos de un problema desigualdad variacional, la formulación de un sistema de ecuaciones es como sigue.

Proposición 2.2.2. Sea $K = R^n$ y sea $F: R^n \to R^n$ una función dada. Un vector $x^* \in R^n$ resuelve el $PDV(F, R^n)$ sí y solamente sí $F(x^*) = 0$.

Prueba. Supóngase que $F(x^*) = 0$, entonces la desigualdad (II.1) sostiene una igualdad. Para ver la suficiencia, supóngase que x^* satisface (II.1), sea $x = x^* - F(x^*)$, lo cual implica que

$$F(x^*)^T(-F(x^*)) \geq 0, \qquad \text{ó} \quad -\| F(x) \| \geq 0 \qquad \text{(II.4)}$$

y, por lo tanto, $F(x^*) = 0$

Note que los sistemas de ecuaciones, sin embargo, excluyen la introducción a la desigualdad, lo cual puede ser necesario, por ejemplo, en el caso de asumir nonegatividad en ciertas variables tales como los precios.

2.2.1.3 Problemas de optimización

Un problema de optimización es caracterizado por una específica función objetivo el cual es maximizado ó minimizado dependiendo del problema, en el caso del problema restricto, con un conjunto de restricciones dadas, posiblemente la función objetivo incluye expresiones representando costos, beneficios, mercado de partes, etc. Los problemas de optimización restricto e irrestricto pueden ser formulados como un PDV. Las siguientes proposiciones y teoremas muestran la relación entre un problema de optimización y un problema de desigualdad variacional.

Proposición 2.2.3. Sea x^* una solución del problema de optimización:

$$\min_{x \in K} f(x) \tag{II.5}$$

donde f es continuamente diferenciable y K es cerrado y convexo. Entonces x^* es una solución del problema de desigualdad variacional:

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K. \tag{II.6}$$

Prueba. Sea $\phi(t) = f(x^* + t(x - x^*))$, para $t \in [0,1]$. Desde que $\phi(t)$ alcanza su mínimo en $t = 0$, $0 \leq \phi'(0) = \nabla f(x^*)^T(x - x^*)$, esto es, x^* es una solución de (II.6).

Proposición 2.2.4 Si $f(x)$ es una función convexa y x^* es una solución del $PDV(\nabla f, K)$, entonces x^* es una solución del problema de optimización (II.5).

Prueba. Dado que $f(x)$ es convexa,

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*), \quad \forall x \in K \tag{II.7}$$

pero $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$, desde que x^* es un asolución del $PDV(\nabla f, K)$. Por lo tanto, de (II.7) concluímos que

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in K,$$

esto es, x^* es una punto de mínimo del problema de programación matemática (II.5).

Si el conjunto $K = R^n$, entonces el problema de optimización sin restricciones es también un problema de desigualdad variacional.

El $PDV(\nabla f, K)$ es llamado problema de punto estacionario asociado con el problema de optimización (II.5). Una solución del $PDV(\nabla f, K)$ es llamado un punto estacionario de (II.5). De lo visto en la última proposición si f es convexa, entonces todo punto estacionario de (II.5) es un mínimo global de este problema de optimización. En consecuencia, para un programa convexo, es decir con f convexa y K convexo, el $PDV(\nabla f, K)$ es equivalente al problema de optimización (II.5).

La discusión anterior inicia la siguiente cuestión. Dado un $PDV(F, K)$ con una arbitraria función vectorial F y un conjunto convexo K, ¿es este $PDV(F, K)$ siempre el problema de punto estacionario de algún problema de optimización (II.5) con K como conjunto factible?. La respuesta a ésta cuestión es negativa. Una sustentación a la respuesta está relacionada en términos de la función F, ¿cuando es una función vectorial F una aplicación gradiente?. En general una función vectorial F definida en un abierto de R^n y con valores en R^n es llamada una aplicación gradiente, si existe una función numérica θ tal que $F(x) = \nabla\theta(x)$ para toda x en el dominio de F. Esto completa la respuesta.

Por otro lado, en el caso donde ciertas condiciones de simetría se dan, el problema de desigualdad variacional puede ser reformulado como un problema de optimización. En otras palabras, en el caso que la formulación como un problema de desigualdad variacional de las condiciones de equilibrio, que son la base de un problema específico, es caracterizada por una función con jacobiano simétrico, entonces la solución de las condiciones de equilibrio y la solución de un problema de optimización particular es la misma. Primero introducimos la definición siguiente y luego fijamos esta relación en un teorema.

Definición 2.2.5 Una matriz $M(x)$, de orden n, cuyos elementos $m_{ij}(x);\ i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n$, son funciones definidas en un conjunto $K \subset R^n$, se dice:

Que es semidefinida positiva en K si

$$v^T M(x) v \geq 0, \quad \forall v \in R^n,\ x \in K.$$

Que es definida positiva en K si

$$v^T M(x) v > 0, \quad \forall v \neq 0,\ v \in R^n,\ x \in K.$$

Que es fuertemente definida positiva en K si

$$v^T M(x) v \geq \alpha \parallel v \parallel^2, \quad para algún\ \alpha > 0, \quad \forall v \in R^n,\ x \in K.$$

Note que si $\gamma(x)$ es el valor propio más pequeño, que es necesariamente cierto, de la parte simétrica de $M(x)$, esto es, $(1/2)[M(x) + M(x)^T]$, entonces se sigue,

$M(x)$ es semidefinida positiva en K sí y solamente sí $\gamma(x) \geq 0$, para todo $x \in K$.

$M(x)$ es definida positiva en K sí y solamente sí $\gamma(x) > 0$, para todo $x \in K$.

$M(x)$ es fuertemente definida positiva en K sí y solamente sí $\gamma(x) \geq \alpha \geq 0$, para todo $x \in K$.

Teorema 2.2.6 Supóngase que $F(x)$ es continuamente diferenciable en K y que la matriz jacobiana

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{x_n} \end{bmatrix}$$

es simétrica y definida positiva. Entonces existe una función convexa real valorada $f: K \to R$ satisfaciendo

$$\nabla f(x) = F(x)$$

con x^* la solución del $PDV(F, K)$ también siendo la solución del problema de programación matemática:

$$\min_{x \in K} f(x) \tag{II.8}$$

Prueba. Bajo la suposición de simetría se sigue del Teorema de Green que

$$f(x) = \int F(x)^T dx \tag{II.9}$$

donde $\int$ es una integral de línea. La conclusión se sigue de la Proposición 2.2.4.

De ahí, aunque el problema de desigualdad variacional abarque el problema de optimización, un problema de desigualdad variacional puede ser reformulado como un problema de optimización convexa, únicamente cuando la condición de simetría y la condición de semidefinida positividad se sostengan.

La desigualdad variacional , por lo tanto, es un problema más general en el cual se puede presentar también una función $F(x)$ con un jacobiano asimétrico.

2.2.1.4 Problemas de complementariedad

El problema de desigualdad variacional también contiene al problema de complementariedad como un caso especial. Problemas de complementariedad son definidos en el octante nonegativo.

Si R_+^n denota el octante nonegativo en R^n, y sea $F: R^n \to R^n$. El *problema de complementariedad nolineal* sobre R_+^n es un sistema de ecuaciones y desigualdades indicado como:

Encontrar x^* tal que,

$$F(x) \geq 0 \quad y \quad F(x)^T x^* = 0 \qquad \text{(II.10)}$$

siempre que la aplicación F sea afín, esto es, siempre que $F(x) = Mx + b$, donde M es una matriz de orden n y b un vector $n \times 1$, el problema (II.10) es entonces conocido como el problema de complementariedad lineal.

La relación entre el problema de complementariedad y el problema de desigualdad variacional es como sigue.

Proposición 2.2.7 El $PDV(F, R_+^n)$ y (II.10) tienen precisamente la misma solución, si alguno lo tiene.

Prueba. Primero, establecemos que si x^* satisface el $PDV(F, R_+^n)$, entonces este también satisface el problema de complementariedad (II.10). Sustituyendo $x = x^* + e_i$ en el $PDV(F, R_+^n)$, donde e_i denota el vector n-dimensional con 1 en la i-th ubicación y 0, en la demás ubicaciones, uno concluye que $F_i(x^*) \geq 0$, y $F(x^*) \geq 0$.

Sustituyendo ahora $x = 2x^*$ en la desigualdad variacional, se obtiene

$$F(x^*)^T x^* \geq 0 \qquad \text{(II.11)}$$

sustituyendo entonces $x = 0$ en la desigualdad variacional, se obtiene

$$F(x^*)^T(-x^*) \geq 0 \qquad \text{(II.12)}$$

(II.11) y (II.12) juntos implican que $F(x^*)^T x^* = 0$.

Para ver la sufienciacia, supongamos que x^* satisface el problema de complementariedad, entonces

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$$

desde que $x \in R_+^n$ y $F(x^*) \geq 0$.

2.2.1.5 Problemas de punto fijo

Teoría de punto fijo ha sido usado para formular, analizar, y calcular soluciones de problemas de equilibrio económico. La relación entre el problema de desigualdad variacional y un problema de punto fijo se realiza a través del uso del operador proyección. Primero, definimos el operador proyección.

Lema 2.2.8 Sea K un conjunto convexo cerrado de R^n. Entonces para cada $x \in R^n$, existe un único punto $y \in K$, tal que

$$\| x - y \| \leq \| x - z \|, \quad \forall z \in K \tag{II.13}$$

donde y es llamado la proyección ortogonal de x en el conjunto K con respecto a la norma euclidiana, esto es,

$$y = \Pi_K x = \underset{z \in K}{\operatorname{argmin}} \| x - z \|.$$

Prueba. Sea x fijo y sea $w \in K$. Minimizar $\| x - z \|$ sobre todo $z \in K$ es equivalente a minimizar la misma función sobre todo $z \in K$ tal que $\| x - z \| \leq \| x - w \|$, el cual es un conjunto compacto. La función g definida por $g(z) = \| x - z \|^2$ es continua. La existencia de un minimizador y se sigue a causa de que una función continua en un cojunto compacto siempre alcanza su mínimo. Para provar que y es único, observe que el cuadrado de la norma euclidiana es una función estrictamente convexa. Así, g es estrictamente convexa y su mínimo es único.

Teorema 2.2.9 Sea K un conjunto convexo cerrado. Entonces $y = \Pi_K x$ sí y solamente sí

$$y^T(z - y) \geq x^T(z - y), \quad \forall z \in K$$

ó

$$(y-x)^T(z-y) \geq 0, \quad \forall z \in K \tag{II.14}$$

Prueba. Note que $y = \Pi_K x$ es un minimizador de $g(z)$ sobre todo $z \in K$. Dado que $\nabla g(z) = 2(z-x)$, el resultado se sigue de la condición de optimalidad para problemas de optimización con restricciones.

Una propiedad del operador proyección el cual es usado en análisis cualitativo de equilibrio y su cálculo es presentado ahora.

Corolario 2.2.10 Sea K un conjunto convexo cerrado. Entonces el operador proyección Π_K es noexpansivo, esto es

$$\| \Pi_K x - \Pi_K x' \| \leq \| x - x' \|, \quad \forall x, x' \in R^n \tag{II.15}$$

Prueba. Dados $x, x' \in R^n$, sea $y = \Pi_K x$ y $y' = \Pi_K x'$. Entonces del Teorema 1.1.9 note eso

$$para \quad y \in K: y^T(z-y) \geq x^T(z-y), \quad \forall z \in K, \tag{II.16}$$

$$para \quad y' \in K: y'^T(z-y') \geq x'^T(z-y'), \qquad \forall z \in K, \tag{II.17}$$

tomando $z = y'$ en (II.16) y $z = y$ en (II.17) y sumando las desigualdades resultantes, obtenemos:

$$\| y - y' \| = (y-y')^T(y-y')$$

$$\leq (x-x')^T(y-y')$$

$$\leq \| x - x' \| \| y - y' \|$$

por una aplicación de la desigualdad de Schwarz. Por lo tanto,

$$\| y - y' \| \leq \| x - x' \|.$$

La relación entre una desigualdad variacional y un problema de punto fijo es como sigue.

Teorema 2.2.11 Asumimos que K es un conjunto convexo y cerrado. Entonces $x^* \in K$ es una solución del problema de desigualdad variacional $PDV(F, K)$ sí y solamente sí para algún $\gamma > 0$, x^* es un punto fijo de la aplicación

$$\Pi_K(I - \gamma F): K \to K,$$

esto es,

$$x^* = \Pi_K(x^* - \gamma F(x^*)) \tag{II.18}$$

Prueba. Supóngase que x^* es una solución de la desigualdad variacional, i.e.,

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

multiplicando la desigualdad de arriba por $-\gamma < 0$, y sumando $(x^*)^T(x - x^*)$ ha ambos miembros, de la desigualdad resultante uno tiene

$$(x^*)^T(x - x^*) \geq [x^* - \gamma F(x^*)]^T(x - x^*), \forall x \in K \tag{II.19}$$

del Teorema 1.1.9 uno concluye eso

$$x^* = \Pi_K(x^* - \gamma F(x^*)).$$

La suficiencia, si $x^* = \Pi_K(x^* - \gamma F(x^*))$, para $\gamma > 0$, entonces

$$(x^*)^T(x - x^*) \geq (x^* - \gamma F(x^*))^T(x - x^*), \forall x \in K.$$

y por lo tanto,

$$F(x^*)(y - x^*) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

2.2.1.6 Resultados básicos de existencia y unicidad

La teoría de desigualdades variacionales es también una herramienta fuerte en el análisis cualitativo de equilibrio. Ahora proporcionaremos condiciones de existencia y unicidad de $SOL(F, K)$.

Existencia de una solución de una problema de desgualdad variacional se sigue de la continuidad de la función F en la desigualdad variacional, proporcionando que el conjunto factible K sea compacto. De hecho, tenemos lo siguiente:

Teorema 2.2.12 (Existencia bajo compacidad y continuidad)

Si K es un conjunto convexo compacto y $F(x)$ es continua en K, entonces el problema de desigualdad variacional $PDV(F, K)$ admite al menos una solución x^*.

Prueba. De acuerdo con el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, dado una aplicación $P: K \to K$, con P continua, existe al menos un $x^* \in K$, tal que $x^* = Px^*$. Observe eso ya que Π_K y $(I - \gamma F)$ son cada una continuas, $\Pi_K(I - \gamma F)$ es también continua. La conclusión se sigue de la compacidad de K y Teorema 2.2.11.

En el caso de un conjunto factible no acotado, el Teorema de Punto Fijo de Brouwer no es aplicable ha este caso; la existencia de una solución a un problema de desigualdad variacional puede, sin embargo, ser establecido bajo la subsecuente condición.

Si $B_R(0)$ denota bola cerrada con radio R centrada en 0 y sea $K_R = K \cap \ B_R(0)$, K_R es entonces acotado. Sea PDV_R denotando el problema de desigualdad variacional:

Determinar $x_R^* \in K_R$, tal que

$$F(x_R^*)^T(y - x_R^*) \geq 0, \quad \forall y \in K_R \qquad \text{(II.20)}$$

Ahora comenzamos con:

Teorema 2.2.13 El $PDV(F, K)$ admite una solución sí y solamente sí existe una $R > 0$ y una solución del PDV_R, x_R^*, tal que $\| x_R^* \| < R$.

Aunque $\| x_R^* \| < R$ puede ser difícil de comprobar, uno puede identificar un R apropiado basado en una particular aplicación.

Existencia de una solución a una desigualdad variacional puede también ser establecido bajo la condición de coercividad, como en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.14 (Existencia bajo coercividad)

Supóngase que $F(x)$ satisface la condición de coercividad

$$\frac{(F(x) - F(x_0))^T (x - x_0)}{\| x - x_0 \|} \to \infty \qquad \text{(II.21)}$$

cuando $\| x \| \to \infty$ para $x \in K$ y para algún $x_0 \in K$. Entonces $PDV(F, K)$ siempre tiene una solución.

Corolario 2.2.15

Supóngase que x^* es una solución del $PDV(F, K)$ y $x^* \in K^0$, el interior de K. Entonces $F(x^*) = 0$.

Propiedades cualitativas de existencia y unicidad vienen a ser fácilmente obtenidos bajo ciertas condiciones de monotonía. Primero daremos ciertas definiciones y entonces presentamos los resultados aplicables.

Definición 2.2.16 (Monotonía)

$F(x)$ es monótono en K si

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T (x^1 - x^2) \geq 0, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Definición 2.2.17 (Monotonía estricta)

$F(x)$ es estrictamente monótono en K si

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T (x^1 - x^2) > 0, \quad \forall x^1, x^2 \in K, \; x^1 \neq x^2.$$

Definición 2.2.18 (Fuerte monotonía)

$F(x)$ es fuertemente monótono en K si para algún $\alpha > 0$

$$[F(x^1) - F(x^2)]^T(x^1 - x^2) \geq \alpha \parallel x^1 - x^2 \parallel^2, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Definición 2.2.19 (Continuamente Lipschitz)

$F(x)$ es continuamente Lipschitz en K si existe una constante $L > 0$, tal que

$$\parallel F(x^1) - F(x^2) \parallel \geq L \parallel x^1 - x^2 \parallel, \quad \forall x^1, x^2 \in K.$$

Un resultado de unicidad es presentado en el subsecuente teorema.

Teorema 2.2.20 (Unicidad)

Supóngase eso $F(x)$ es estrictamente monótono en K. Entonces la solución es única, si existe una.

Prueba. Supóngase eso x^1 y x^* son ambos soluciones y $x^1 \neq x^*$. Entonces dado que ambos x^1 y x^* son soluciones, ellos satisfacen:

$$F(x^1)^T(x' - x^1) \geq 0, \quad \forall x' \in K \qquad \text{(II.22)}$$

$$F(x^*)^T(x' - x^*) \geq 0, \quad \forall x' \in K \qquad \text{(II.23)}$$

Después sustituyendo x^* por x' en (II.22) y x^1 por x' en (II.23) y adicionando las desigualdades resultantes, obtenemos:

$$(F(x^1) - F(x^*))^T(x^* - x^1) \geq 0 \qquad \text{(II.24)}$$

Pero la desigualdad (II.24) es una contradicción con la definición de estricta monotonía. Por lo tanto, $x^1 = x^*$.

Monotonía se relaciona de cerca con la definida positividad.

Teorema 2.2.21 Supóngase que $F(x)$ es continuamente diferenciable en K y la matriz jacobiana

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{x_n} \end{bmatrix}$$

el cual no necesita ser simétrica, es semidefinida positiva (definida positiva). Entonces $F(x)$ es monótono (estrictamente monótono).

Proposición 2.2.22

Asuma que $F(x)$ es continuamente diferenciable en K y eso $\nabla F(x)$ es fuertemente definida positiva. Entonces $F(x)$ es fuertemente monótono.

Uno puede obtener resultados más fuertes en el caso especial donde $F(x)$ es lineal.

Corolario 2.2.23

Supóngase que $F(x) = Mx + b$, donde M es una matriz $n \times n$ y b es un vector constante en R^n. La función F es monótona sí y solamente sí M es semidefinida positiva. F es fuertemente monótono sí y solamente sí M es definida positiva.

Proposición 2.2.24

Asumiendo que $F: K \to R^n$ es continuamente diferenciable en $\bar{x}$ Entonces $F(x)$ es localmente estrictamente (fuertemente) monótona en $\bar{x}$ si $\nabla F(\bar{x})$ es definida positiva (fuertemente definida positiva), esto es,

$$v^T F(\bar{x}) v > 0, \quad \forall v \in R^n,\ v \neq 0,$$

$$v^T F(\bar{x}) v \geq \alpha \parallel v \parallel^2, \quad para alg\acute{u}n \alpha > 0,\ \forall v \in R^n.$$

El siguiente teorema proporciona una condición bajo el cual ambos existencia y unicidad de la solución al problema de desigualdad variacional son garantizados. Aquí no asumiremos la compacidad del conjunto factible K.

Teorema 2.2.25 (Existencia y unicidad)

Asumiendo que $F(x)$ es fuertemente monótono. Entonces existe precisamente una solución x^* del $PDV(F, K)$.

Prueba. La existencia se sigue del hecho de que la fuerte monotonía implica coercividad, mientras que la unicidad se sigue del hecho de que la fuerte monotonía implica estricta monotonía.

Así, en el caso de una conjunto factible no acotado K, la fuerte monotonía de la función F garantiza ambos existencia y unicidad. Si K es compacto, la existencia es garantizada si F es continua, y únicamente la condición de monotonía estricta es necesaria para garantizar la unicidad.

Asumiendo ahora que $F(x)$ es ambos fuertemente monótono y continuamente Lipchitz. Entonces la proyección $\Pi_K[x - \gamma F(x)]$ es una contracción con respecto a x, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.26

Fijando $0 < \gamma \leq \alpha/L^2$ donde α y L son las constantes que aparecen, en la condiciones de fuerte monotonía y la de continuamente Lipschitz de las definiciones. Entonces

$$\parallel \Pi_K(x - \gamma F(x)) - \Pi_K(y - \gamma F(y)) \parallel \leq \beta \parallel x - y \parallel \qquad \text{(II.25)}$$

para todo $x, y \in K$, donde

$$(1 - \gamma\alpha)^{\frac{1}{2}} \leq \beta < 1.$$

Una inmediata consecuencia del Teorema 1.1.26 y del Teorema de Punto Fijo de Banach es:

Corolario 2.2.27 El operador $\Pi_K(x - \gamma F(x))$ tiene un único punto fijo x^*.

2.2.1.7 Estabilidad y análisis de sensibilidad

Importantes cuestiones en el análisis cualitativo de modelos de equilibrio son la estabilidad y sensatividad de las soluciones cuando el problema está sujeto a perturbaciones en los datos.

Estabilidad

El siguiente problema establece que un cambio pequeño en la función F que entra en la desigualdad variacional induce un cambio pequeño en el modelo de la solución resultante. Denotemos la función original por F con solución x del $PDV(F,K)$ y la función perturbada por F^* con solución x^* del $PDV(F^*,K)$.

Asumiendo la condición de fuerte monotonía en F. Entonces se obtiene:

Teorema 2.2.28 Sea α la constante positiva en la definición de fuerte monotonía. Entonces

$$\| x^* - x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| F^*(x^*) - F(x^*) \| \tag{II.26}$$

Prueba. Los vectores x y x^* deben satisfacer las desigualdades variacionales

$$F(x)^T(x' - x) \geq 0, \quad \forall x' \in K \tag{II.27}$$

$$F^*(x^*)^T(x' - x^*) \geq 0, \quad \forall x' \in K \tag{II.28}$$

reescribiendo (II.27) para $x' = x^*$ y (II.28) para $x' = x$, y entonces sumando las desigualdades resultantes, obtenemos

$$[F^*(x^*) - F(x)]^T(x^* - x) \leq 0 \tag{II.29}$$

o

$$[F^*(x^*) - F(x) + F(x^*) - F(x^*)]^T(x^* - x) \leq 0 \qquad \text{(II.30)}$$

usando entonces la condición de monotonía, (II.30) implica

$$\begin{aligned} [F^*(x^*) - F(x^*)]^T(x - x^*) &\geq [F(x) - F(x^*)]^T(x - x^*) \\ &\geq \alpha \parallel x - x^* \parallel^2 \end{aligned} \qquad \text{(II.31)}$$

En virtud de la desigualdad de Schwarz, de (II.31) resulta

$$\alpha \parallel x^* - x \parallel^2 \leq \parallel F^*(x^*) - F(x^*) \parallel . \parallel x^* - x \parallel, \qquad \text{(II.32)}$$

de donde se obtiene (II.26).

2.2.2 Función gap

Hasta ahora, tenemos presentado varias reformulaciones del PDV y del problema de complementariedad PC como un sistema de (no restringido) ecuaciones. Un acercamiento diferente debe hacerse al PDV/PC como un problema de minimización. Para ilustrar esto comenzaremos con el problema de complementariedad no lineal $PCN(F)$. Es claro que un vector x soluciona este problema sí y solamente sí x es un minimizador global del problema de optimización:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; y^TF(y) \\ &sujeto\,a \quad y \geq 0 \quad \text{y} \quad F(y) \geq 0, \end{aligned} \qquad \text{(II.33)}$$

y el valor objetivo óptimo $x^TF(x)$ es igual a cero. En este sentido, decimos que el problema de optimización (II.33) es equivalente al PCN y llamamos a la función $y^TF(y)$ un función gap para el $PCN(F)$. Generalizando la discusión de arriba damos la siguiente definición de una función gap.

Definición 2.2.29: Una función gap para el $PDV(F, K)$ en un conjunto (cerrado) $K \subseteq X$ es una función no negativa $\theta: X \to R_+$ tal que $x \in SOL(F, K)$ sí y solamente sí $x \in X$ y $\theta(x) = 0$, esto es, sí y solamente sí las soluciones del $PDV(F, K)$ conincide con las soluciones globales del problema

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; \theta(y) \\ &sujeto\ a \quad y \in X \end{aligned}$$

y el valor objetivo óptimo de este problema es cero.

Si $SOL(F, K)$ es vacío, entonces cualquier valor óptimo global de θ sobre X es positivo ó θ no tiene un mínimo global en X. Indicamos que a no ser que F sea afín, el conjunto factible de (II.33) es típicamente no convexo. Además, siempre para un $PCN(q, M)$ donde $F(y) = q + M(y)$, la función objetivo de (II.33) es no convexa a no ser que M sea una matriz semidefinida positiva. Esto nos incrementa el problema ha encontrar una «buena» función gap, donde el significado exacto de «buena» claramente depende del uso que tenemos en mente para la función gap. En lo que sigue primero consideraremos algunos tipos básicos de funciones gap y entonces dos de sus usos.

La reformulacines presentadas arriba conducen a unas funciones gap para solucionar el PDV/PC. Específicamente, supongamos que el sistema

$$H(x) = 0$$

esta es una reformulación del PDV/PC donde H mapea $\mathcal{D} \subseteq R^n$ en R^n. Podemos entonces asociar la siguiente función de valor escalar:

$$\theta(x) \equiv \| H(x) \|^r , \quad x \in \mathcal{D}, \qquad \text{(II.34)}$$

donde r es algún entero positivo, como una función gap para el PDV/PC. Así,

$$\theta_{min}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} min(x_i, F_i(x))^2$$

es una función gap para el $PCN(F)$; más generalmente, si ψ es una C-función, entonces

$$\theta(x) \equiv \| F_{\psi}(x) \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, F(x_i))^2$$

es una función gap para el mismo problema.

Definición 2.2.30: Una función $\psi: R^2 \to R$ es llamada una C-función, si para algún par $(a, b) \in R^2$,

$$\psi(a, b) = 0 \Leftrightarrow [(a, b) \geq 0 \;\; y \;\; ab = 0]$$

Esta clase de función gap puede ser muy efectivo en el desarrollo de algoritmos para el PCN y para alguna de sus extensiones, pero es típicamente no viable para un PDV general. En este último caso es usualmente preferible el uso de funciones gap que son obtenidos de diferente manera. Presentaremos aquí una función gap alternativa para el PDV esta es la base de todas las funciones gap discutidas en los subsecuentes análisis y esta no es obtenida de una reformulación (ecuación). Esta función gap, es llamada la *función gap de Auslender*, extiende la reformulación (II.33) del PCN esto es convierte este problema en un problema de optimización restringido.

Específicamente, esta función gap para el $PDV(F, K)$ es definido en el mismo dominio $\mathcal{D}$ de F y es dado por:

$$\theta_{gap}(x) \equiv \sup_{y \in K} F(x)^T (x - y), \qquad x \in \mathcal{D} \supseteq K. \qquad \text{(II.35)}$$

Esta es una función «de valor extendido» en K; $\theta_{gap}(x)$ es nonegativo para todo $x \in K$; sin embargo es posible que $\theta_{gap}(x)$ sea infinito para algún x en K. En particular, cuando K es un cono, tenemos:

$$\theta_{gap}(x) = \begin{cases} F(x)^T x & si \;\; F(x) \in \;\; K^* \\ +\infty & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

En general, vemos que $x \in SOL(F, K)$ sí y solamente sí x es una solución del problema de minimización gap restringido:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; \theta_{gap}(z) \\ &sujeto \, a \quad z \in K, \end{aligned} \tag{II.36}$$

y $\theta_{gap}(x) = 0$. Así $\theta_{gap}(x)$ es una función gap para el $PDV(F, K)$ en K.

Cuando K es un cono, el programa gap toma una forma particular simple:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; x^T F(x) \\ &sujeto \, a \quad x \in K \;\; y \;\; F(x) \in K^* \end{aligned} \tag{II.37}$$

Para $K = R^n_+$, este problema es exactamente (II.33). Un rasgo significativo del problema de optimización (II.37) es que si F es una función suave y K es «agradable» (por ejm. un poliedro), (II.37) es un problema de optimización suave, aunque en general, ninguna función objetivo es convexa ni la región factible es convexa.

Para un $PDV(F, K)$ general, la función gap es definido como la *función valor* de un problema de maximización cóncavo paramétrico con una función objetivo lineal $y \mapsto F(x)^T(x - y)$: más precisamente, $\theta_{gap}(x)$ es igual al valor objetivo optimo del siguiente problema de optimización con variable y y parámetro x:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; F(x)^T(x - y) \\ &sujeto \, a \quad y \in K \end{aligned} \tag{II.38}$$

Para x fijo y arbitrario, este es un problema de optimización cóncavo en y. En el caso de un poliedro K (i.e., para un PDV linealmente restringido), el problema (II.38) es un programa lineal. En este caso, la función gap es siempre no diferenciable.

Si F es monótono afín dada por $F(x) = q + M(x)$ donde q es un n-vector y M es una matriz semidefinida positiva, la función gap $\theta_{gap}(x)$ es un función convexa de valor extendido y el programa gap (II.36) llega a ser un problema de minimización convexa. La clase de PDV_s «monótonos» (incluyendo los problemas no lineales) es muy importante en aplicaciones. Muchos resultados especializados y algoritmos existen para esos PDV_s.

A continuación daremos un ejemplo que refuerza lo estudiado arriba.

Ejemplo 2.2.31: Sea $f: [0,2] \rightarrow R$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si\ \ 0 \leq \ x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & si\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Entonces gracias a f, vamos ha construir una función gap, el cual es, en general, ni convexa, ni diferenciable. En efecto, f es continuamente diferenciable pues,

$$F(x) = f'(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \leq \ x \leq 1 \\ 1 & si\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Sea,

$$\theta_{gap}(x) = \sup_{y \in [0,1]} F(x)^T (x - y)$$

$$= \max_{y \in [0,1]} F(x)^T (x - y)$$

Así,

$$\theta_{gap}(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ 0 \leq \ \ x \leq 1 \\ x & si\ \ 1 < x \ \ \leq 2 \end{cases}$$

Claramente esta función θ_{gap} no es convexa, ni diferenciable en $[0,2]$.

2.2.2.1 Funciones gap y algoritmos de solución

Funciones gap pueden ser usados en el diseño de algoritmos numéricos para solucionar el PDV/PC. En particular, podemos aplicar un algoritmo iterativo que minimize la función gap, con la esperanza de obtener su mínimo global. Sin embargo, excepto en muchos casos raros, las funciones gap son típicamente no convexos en sus argumentos; por lo tanto no podemos garantizar la obtención de su mínimo global. En el mejor caso, podemos calcular únicamente un punto estacionario. Consecuentemente, es importante conocer cuando tal punto será una solución del PDV/PC: de hecho este es una de las cuestiones centrales de la investigación en el estudio de funciones gap. Un resultado clásico de esta clase es disponible para las siguientes (programas cuadráticos PQ) formulaciones del $PCL(q,M)$:

$$\begin{aligned} &minimizar\ \ x^T(q+Mx) \\ &sujetoa\ \ \ x \geq 0\ \ y\, q + Mx \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.39)}$$

Note eso, esto es justo una especialización de (II.33) cuando $F(x) = q + Mx$. Es conocido que las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Para todo $q \in R^n$ para el cual (II.39)**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** es factible, todo punto estacionario de (II.39) soluciona el $PCL(q,M)$, y

(b) M es una matriz «fila»; esto es, la siguiente implicación se da:

$$x \circ M^T x \leq 0 \Rightarrow x \circ M^T x = 0.$$

Podemos fácilmente construir matrices fila que no son semidefinidas positiva. Para tal matriz M, (II.39) es un programa cuadrático no convexo; aún si todos los puntos estacionarios (si existen) para tal programa son soluciones del $PCL(q, M)$.

La discusión de arriba, nos da claramente que en general debe haber condiciones en el PDV/PC para los (posiblemente restringidos) puntos estacionarios de las funciones gap del PDV/PC sean soluciones del problema en cuestion; es más, las funciones gap de tal PDV/PC no necesitan ser convexos.

Para un tal función, puedemos derivar una condición necesaria y suficiente para que un punto estacionario de la función en el dominio de minimización sea un cero de la función, y así una solución del PDV/PC. Esta condición es la abstracción subyacente de toda la condición de «regularidad» que introduciremos subsecuentemente cuando discutimos la convergencia de algoritmos de descenso para solucionar el PDV/PC. Para proporcionar un marco manejable bastante amplio de una familia de (suaves y no suaves) funciones gap, consideramos un problema de optimización de la siguiente clase:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; \theta(x) \\ &sujetoa \quad x \in X, \end{aligned} \tag{II.40}$$

donde la función objetivo $\theta: \mathcal{D} \supseteq X \to R$ es definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ conteniendo a la región factible X, el cual es un subconjunto cerrado de R^n. Desde que estamos interesados en funciones θ que no son diferenciables, no podemos hablar acerca de un punto estacionario de (II.40) en términos de la función gradiente de θ. Para nuestro propósito aquí, asumiremos que θ es direccionalmente diferenciable en X. Un punto estacionario de (II.40) es entonces definido como un vector factible $x \in X$ tal que

$$\theta'(x; d) \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{T}(x; X), \tag{II.41}$$

donde $\theta'(x; d)$ es la derivada direccional de θ en x la dirección d y $\mathcal{T}(x; X)$ es el cono tangente del conjunto X en el punto $x \in X$. Un concepto más general de punto estacionario puede ser definido para funciones θ que son no direccionalmente diferenciables; la definición de arriba usando la derivada direccional es suficiente para la discusión dada aquí.

Bajo el ajuste de arriba y asumiendo que θ es nonegativo (como en todas las funciones gap del PDV/PC que tenemos vistos), el resultado siguiente identifica una condición necesaria y suficiente para un punto estacionario x de (II.40) satisfaciendo $\theta(x) = 0$.

Proposición 2.2.32 Sea X un subconjunto no vacío cerrado de R^n y sea $\theta: \mathcal{D} \supseteq X \to R$ nonegativa y direccionalmente diferenciable en X. Una condición necesaria y suficiente para que un punto estacionario x satisfaga $\theta(x) = 0$ es que exista un vector $d \in \mathcal{T}(x; X)$ tal que

$$\theta(x) + \theta'(x; d) \leq 0 \tag{II.42}$$

Prueba. Si $\theta(x) = 0$, simplemente tome d como el vector cero; (II.42) se da trivialmente. Consecuentemente, si un vector $d \in \mathcal{T}(x; X)$ satisface (II.42) existe, entonces

$$0 \leq \theta(x) \leq \theta(x) + \theta'(x; d) \leq 0, \tag{II.43}$$

donde la segunda desigualdad está previsto de (II.41). La susodicha cadena de desigualdades claramente implica $\theta(x) = 0$ como deseabamos.

Ilustramos el lema de arriba con $X = R^n$ y

$$\theta(x) \equiv \frac{1}{2} H(x)^T H(x),$$

donde H es una función continuamente diferenciable de R^n en sí mismo. La función θ es continuamente diferenciable en este caso y tenemos

$$\theta'(x; d) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x) \nabla H_i(x)^T d.$$

Así,

$$\theta(x) + \theta'(x; d) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x) \left(\frac{1}{2} H_i(x) + \nabla H_i(x)^T d \right).$$

Si la matriz jacobiana $JH(x)$ es no singular, dejando

$$d \equiv -\frac{1}{2} JH(x)^{-1} H(x),$$

claramente tenemos $\theta(x) + \theta'(x; d) = 0$. La no singularidad de $JH(x)$ es una condición bien conocida en análisis numérico clásico; esta es una condición importante requerida para la convergencia de algunos métodos tipo-Newton para solucionar el sistema de ecuaciones suave $H(x) = 0$. Tenemos demostrado aquí que esta condición implica en la Proposición 2.2.32.

La Proposición 2.2.32 es aplicable a una variedad de funciones gap del PDV/PC.

2.2.2.2 Soluciones inexactas y cotas de error

Hay otro mayor rol que las funciones gap juegan en el estudio del PDV/PC. Este rol se deja incrementar de la siguiente consideración práctica de una «inexacta» (ó aproximación) solución del PDV/PC. Supóngase que hay un vector x que no es conocido como una solución del problema. Aún, estamos interesados en determinar cuan cerca esta x de ser una solución; más específicamente estamos interesados en obtener una medida cuantitativa de la violación de x con referencia a las condiciones que definen el PDV/PC. Con una función gap no negativa θ, tal que en medida pueda razonablemente ser prescribido por la cantidad $\theta(x)$. Ya que los ceros de la función gap son las soluciones exactas del problema, en $\theta(x)$ es justificable una medida sana de la inexactitud de x no siendo una solución. La teoría que apoya y clarifica esta interpretación es conocida como «estudio de cota de error».

En lo que sigue, hacemos una incursión muy preliminar en este inmenso tema de cotas de error con una fuerte discusión acerca del concepto de una solución aproximada en términos de algunas funciones gap simples. Comenzamos por responder a la siguiente cuestión. Supóngase que $\| min(x, F(x)) \| \leq \varepsilon$ para algún escalar positivo $\varepsilon > 0$, ¿ podemos decir algo acerca el vector x en términos del $PCN(F)$?. Resulta que uno puede decir bastantes cosas haciendo $r = min(x, F(x))$. Es trivial observar que esto es equivalente a

$$0 = min(x - r, F(x) - r).$$

Ecribiendo esto en términos del las condiciones de complementariedad, obtenemos

$$0 \leq x - r \perp F(x) - r \geq 0,$$

ó equivalentemente,

$$x \geq r, \quad F(x) \geq r,$$

y

$$x^T F(x) = r^T (x + F(x) - r),$$

Ya que r es un vector presumiblemente con una norma muy pequeña, vemos que x satisface aproximadamente las definiciones de las condiciones del $PCN(F)$ por lo precisado en las expresiones de arriba. Alternativamente, podemos decir también que el vector $y \equiv x - r$, el cual es una (pequeña) perturbación de x (con ε siendo pequeño), soluciona el $PCN(G)$ perturbado, donde $G(z) \equiv F(z + r) - r$.

Podemos fácilmente extender la discusión de arriba al $PDV(F, K)$ vía la aplicación natural (ó normal) F_K^{nat}. Como antes, supóngase que $\| F_K^{nat}(x) \| \leq \varepsilon$, dejando

$$r \equiv F_K^{nat}(x) = x - \Pi_K(x - F(x)),$$

deducimos que $x - r$ pertenece a K y

$$(y - x + r)^T(F(x) - r) \geq 0, \quad \forall y \in K;$$

equivalentemente, el vector $y \equiv x - r$ soluciona el $PDV(G, K)$ con la misma G como en el caso del PCN. Como una ilustración, consideramos el caso donde K es un rectángulo compacto dado por

$$K \equiv \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

donde las cotas a_i y b_i son todas finitas. En este caso, la ecuación

$$r = F_K^{nat}(x) = x - mid(a, b; x - F(x))$$

es equivalente a que $x \in r + K$ (i.e., $a_i + r_i \leq x_i \leq b_i + r_i \ \ paratodo \ \ i$) y

$$x_i = a_i + r_i \Rightarrow F_i(x) \geq r_i$$

$$a_i + r_i < x_i < b_i + r_i \Rightarrow F_i(x) = r_i$$

$$x_i = b_i + r_i \Rightarrow F_i(x) \leq r_i.$$

Así, si adicionamos $|r_i| \leq \varepsilon$ para todo i, entonces tenemos $x_i \in [a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]$ y

$|F_i(x)| \leq \varepsilon si x_i \in (a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon)$

$F_i(x) \geq -\varepsilon si |x_i - a_i| \leq \varepsilon$

$F_i(x) \leq \varepsilon si |x_i - b_i| \leq \varepsilon.$

Las funciones min forman la base para extensiones a otras funciones gap para el $PCN(F)$. Este es dotado via comparación de resultados que dan cotas entre el min residual y la función gap en cuestión. Para ilustrar este punto, consideraremos la función gap FB $\| F_{FB} \|$, donde

$$F_{FB}(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_{FB}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \psi_{FB}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix},$$

y supóngase $\| F_{FB} \| \leq \varepsilon$. Por el Lema 9.1.3 de Facchinei y Pang (2003), cuya prueba no es dificultuosa, entonces se sigue que existe una constate $c > 0$, dependiendo únicamente en la dimensión n del problema y la norma vectorial usada, tal que $\| min(x, F(x)) \| \leq c\varepsilon$.

Finalizamos esta discusión preliminar de cota de error para establecer un resultado básico relacionado con varios funciones residuales de un $PDV(F, K)$ general. Pero, nosotros conocemos que hay tres equivalentes caminos que describen una solución del $PDV(F, K)$ con un conjunto convexo cerrado K. Específicamente, cada uno de los siguientes afirmaciones son equivalentes para un vector $x \in R^n$ el cual es un elemento de $SOL(F, K)$:

(a) $F_K^{nat}(x) = 0$

(b) $F_K^{nor}(z) = 0$ y $x \equiv \Pi_K(z)$;

(c) $x \in K$ y $0 \in F(x) + \mathcal{N}(x; X)$.

Supóngase ahora que $x \in K$ es una solución inexacta del $PDV(F, K)$. Estamos interesados en establecer algunas relaciones cuantitativas entre las siguientes tres cantidades (positivas), todas las medidas se hacen usando la norma euclideana: (a) $\| F_K^{nat}(x) \|$, la cual es el residual de una ecuación natural evaluada en x, (b) $\| F_K^{nor}(z) \|$, la cual es el residual de una ecuación normal evaluada en el vector z tal que $\Pi_K(z) = x$ (ó equivalentemente, $z =\in \Pi_K^{-1}(x)$), (c) $dis(-F(x), \mathcal{N}(x;X))$, la cual es la distancia de $-F(x)$ al cono normal $\mathcal{N}(x;X)$); esta distancia es por definición igual a:

$$dis(-F(x), \mathcal{N}(x;X)) \equiv \inf\{\| F(x) + v \| : v \in \mathcal{N}(x;X)\}.$$

desde que

$$z = \Pi_{\mathcal{T}(x;K)}(z) + \Pi_{\mathcal{N}(x;K)}(z), \ \forall z \in R^n,$$

se sigue que

$$-F(x) - \Pi_{\mathcal{N}(x;K)}(-F(x)) = \Pi_{\mathcal{T}(x;K)}(-F(x)).$$

de ahí

$$dis(-F(x), \mathcal{N}(x;K)) = \| \Pi_{\mathcal{T}(x;K)}(-F(x)) \|.$$

Si $F(x) \equiv \nabla\theta(x)$ para una función real valorada θ, el vector $\Pi_{\mathcal{T}(x;K)}(-\nabla\theta(x))$ es tradicionalmente llamado el *gradiente proyectivo* del problema de optimización:

$$\begin{aligned} & minimizar \ \ \theta(y) \\ & sujetoa \quad y \in K \end{aligned}$$

en un vector factible $x \in K$. En general, tenemos el siguiente resultado que conecta las tres medidas (a), (b), (c) de una solución inexacta del PDV.

Proposición 2.2.33 Sea K un subconjunto convexo cerrado de R^n y F una aplicación de R^n en sí mismo. Para algún vector $x \in K$,

$$\| F_K^{nat}(x) \| \leq dis(-F(x)), \mathcal{N}(x;K)) = \inf\{\| F_K^{nor}(z) \| : z \in \Pi_K^{-1}(x)\}$$

Prueba. Escribimos $r \equiv F_K^{nat}(x)$. Tenemos $x - r = \Pi_K(x - F(x))$. Así $x - r$ pertenece a K y

$$(y - x + r)^T(F(x) - r) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

En particular, desde que $x \in K$, deducimos

$$r^T F(x) \geq r^T r.$$

Sea $v \equiv \Pi_{\mathcal{T}(x;K)}(-F(x))$. Se sigue que

$$(y - x)^T v \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

En particular, con $y = x - r$, obtenemos

$$0 \leq r^T v = r^T(v + F(x)) - r^T F(x);$$

así $r^T F(x) \leq r^T(v + F(x))$. Consecuentemente,

$$r^T r \leq r^T(v + F(x)),$$

lo cual implica $\| r \| \leq \| v + F(x) \|$; i.e.,

$$\| F_K^{nat}(x) \| \leq dis(-F(x), \mathcal{N}(x;K)).$$

desde que

$$z \in \Pi_K^{-1}(x) \Leftrightarrow \Pi_K(z) = x \Leftrightarrow z - x \in \mathcal{N}(x;K),$$

se sigue que

$$dis(-F(x), \mathcal{N}(x;K)) = \inf\{\| F_K^{nor}(z) \| : z \in \Pi_K^{-1}(x)\},$$

lo cual es una relación reclamada entre el residuo normal y la distancia de $-F(x)$ al cono normal $\mathcal{N}(x;K)$.

En general la desigualdad $\| F_K^{nat}(x) \| \leq dis(-F(x)), \mathcal{N}(x;K))$ puede ser estricta.

2.3 Marco conceptual

Debido a la naturaleza del trabajo, el marco conceptual no aplica.

2.4 Definiciones de términos básicos

Las siguientes definiciones fueron extraídas de Facchinei y Pang (2003):

Optimización: Consiste en la selección de una alternativa mejor, en algún sentido, que las demás alternativas posibles.

Problema de optimización: Consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función. Se componen generalmente de tres elementos: función objetivo, variables y restricciones.

Función objetivo: Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar).

Variables: Representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo.

Restricciones: Representan el conjunto de relaciones (expresadas mediante ecuaciones e inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer.

Resolver un problema de optimización: Consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones.

Sistemas de ecuaciones lineales – no lineales: No existe una función objetivo como tal. Únicamente interesa encontrar una solución factible a un problema con un conjunto de restricciones.

Optimización sin restricciones: Se trata de encontrar el conjunto de valores de las variables que determinan el mínimo/máximo de una función.

Algunas de las técnicas que se verán en programación no lineal son para optimización sin restricciones.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis general

H_i: Existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones.

Hipótesis específicas

H_1: Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

H_2: Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.

H_3: Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.

3.1.1 Operacionalización de variables

Definición conceptual de variables

Para este trabajo se considerarán las siguientes variables:

Variable 1: Problema de desigualdad variacional

Variable 2: Función gap

Para facilidad del lector, brindaremos un pequeño concepto con respecto a cada una:

Problema de desigualdad variacional. El problema de desigualdad variacional (PDV), consiste en encontrar un vector $x \in K$ tal que $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0$, $\forall y \in K$ donde K es un subconjunto no vacío de R^n y F una función: $F : R^n \to R^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en R^n.

Función gap. Una función de valores reales definida en R^n o en un subconjunto de este, es llamada una función gap para el PDV, si el conjunto de minimizadores globales en un conjunto dado coincide con el conjunto solución del PDV.

Tabla 1

Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
V1: Problema de desigualdad variacional	Formulaciones del *PDV.*	Sistema de ecuaciones, problemas de optimización, problemas de complementariedad y problemas de punto fijo.	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación
	Resultados básicos de existencia y unicidad de la solución.	Condiciones de existencia y unicidad de la solución.		
	Estabilidad y análisis de sensibilidad de las soluciones.	Análisis cualitativo de modelos de equilibrio		

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
V2: Función gap	Funciones gap y algoritmos de solución	Condiciones para que un punto estacionario de la función gap sea solución del PDV.	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación
	Soluciones inexactas y cotas de error.	Condiciones para que a partir de la función gap se pueda obtener una cota de error global para el PDV.		

IV. METODOLÓGÍA DEL PROYECTO

4.1 Diseño metodológico

El tipo de investigación es básica ya que se busca incrementar los conocimientos existentes, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico. El diseño de la investigación es no experimental ya que no se manipulan ninguna de las variables de estudio. La investigación corresponde a un nivel descriptivo ya que se describirán cada una de las variables y sus dimensiones. El estudio tiene un enfoque cuantitativo, ya que se presentan los resultados mediante valores números. La investigación es tipo documental ya que se procura obtener, seleccionar, compilar, organizar, interpretar y analizar información sobre las variables de estudio a partir de fuentes documentales, tales como libros, documentos de archivo, hemerografía, registros audiovisuales, entre otros (Arias Gonzales, 2020).

Teniendo en cuenta el tipo y diseño de la investigación, el plan para poder responder a las preguntas de investigación se hizo a través de tres etapas:

La primera etapa consistió en la consulta documental teniendo en cuenta el contexto general y realización de una revisión específica en base a las palabras claves.

En la segunda etapa se realizó un contraste de la información, validando el material, aclarando dudas, accediendo a nuevos materiales y la retroalimentación por parte del asesor y de un equipo de investigación (expertos en el tema).

En la tercera etapa se hizo un análisis histórico, donde estudiaremos la evolución de los conocimientos sobre el tema.

4.2 Método de investigación

En la investigación se empleó el método inductivo – deductivo, el método de análisis y síntesis y el método de escritorio o biblioteca.

Con respecto al método inductivo – deductivo, se empleó en el procesamiento de la información obtenida con el objetivo de establecer regularidades o de inferir a partir de conocimientos, o regularidades de carácter general y su manifestación en un fenómeno o situación particular.

El método de análisis y síntesis se aplicó durante todo el proceso de la investigación a partir de la bibliografía consultada.

Finalmente, en el método de escritorio o de biblioteca se revisaron y analizaron los datos obtenidos previamente obtenidos a través de la Internet y revisión bibliográfica (Supo & Zacarías, 2020).

4.3 Población y muestra

Por la naturaleza de la investigación, tratándose de un estudio documental, la población y muestra no aplica.

4.4 Lugar de estudio

El lugar donde se realizó la investigación fue en los ambientes de la biblioteca y sala de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, los cuales cuentan con buena iluminación, ventilación y ofrecen un ambiente silencioso, además, de contar con artículos de escritorio, pc y conexión a internet.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

La investigación se realizó teniendo en cuenta la técnica del análisis documental, por cuanto se basa en el análisis de documentos existentes en archivos y artículos de internet, repositorios nacionales como Renati-Sunedu, Alicia-Concytec, repositorios internacionales como Google Académico, Springer Link, entre otros. Debido a la naturaleza del trabajo se empleó como instrumento para la recolección de la información una ficha de registro documental, pero hay que tener en cuenta que los trabajos, la bibliografía o la literatura que se exploró es de alta relevancia para un sector significativo de la comunidad matemáticas (Supo & Zacarías, 2020).

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Para el análisis y procesamiento de la información se organizaron, analizaron e interpretaron las teorías y conceptos, teniendo en cuenta los criterios de validez que tienen que ver con:

A) Coherencia argumentativa

B) Nivel interpretativo

C) La consistencia de las conclusiones

Para ello es importante el contraste de la información, validar el material y recibir retroalimentación del asesor y el trabajo con equipos de investigación, el cual nos brindó información proporcionada por expertos en los temas de estudio.

4.7 Aspectos éticos en investigación

En este estudio se respetaron los derechos de autor, para ello se citaron y referenciaron las fuentes consultadas empleando las Normas APA séptima edición. Asimismo, se aplicó un programa antiplagio, Turnitin para evaluar el porcentaje de similitud.

V. RESULTADOS

5.1 Resultados iniciales

Como se definió en el Capítulo II, el problema de desigualdad variacional $PDV(F,K)$ consiste en encontrar un vector x en $K \subset R^n$ tal que

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall \ y \in K$$

donde para nuestro interés, F será una función continuamente diferenciable de R^n en sí mismo, K es un subconjunto convexo cerrado no vacío de R^n, y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno en R^n. Cuando K es el octante nonegativo de R^n, este problema se reduce al problema de complementariedad nolineal (PCN).

Una función real valorada definida en R^n ó en un subespacio de éste, es llamada una función gap para el PDV, si el conjunto de minimizadores globales en un conjunto dado coincide con el conjunto solución del PDV el cual denotaremos por $SOL(F,K)$. Una función gap sirve como una herramienta para desarrollar algoritmos para solucionar el PDV y analizar sus propiedades de convergencia. Algunas funciones gap para PDV conocidas son por ejemplo la función gap de Auslender (1976), el cual constituye un problema de optimización con restricciones equivalente al PDV. Esta función es en general no diferenciable y de valor infinito. Después Auchrnuty (1989) y Fukushima (1992) independientemente y simultáneamente presentaron unas funciones gap diferenciables para PDV. Específicamente Fukushima (1992) consideró la función gap regularizada $f_\alpha : R^n \to R$ definifa por:

$$f_\alpha(x) = \max_{y \in K} \langle F(x), x - y \rangle - \left(\frac{\alpha}{2}\right) \| x - y \|^2 \qquad \text{(V.1)}$$

donde α es un párametro positivo. La norma euclideana puede ser reemplazada por alguna norma inducida por una matriz simétrica definida positiva. La función f_α también constituye una reformulación equivalente del PDV como un problema de optimización con restricciones, esto es, x resuelve el PDV sí y solamente sí x minimiza f_α en K y $f_\alpha(x) = 0$. La función gap regularizada fue extendida por Wu et al. (1993). Recientemente Yamashita & Fukushima (1997) estudiaron la regularización Moreau-Yosida para la existencia de algunas funciones gap incluyendo la función f_α, los cuales constutían problemas de optimización diferenciables sin restricciones equivalentes al PDV. Tales funciones tienen favorables propiedades teóricas pero no necesariamente de fácil evaluación en la práctica. Más recientemente, Peng (1997) consideró la función $M_\alpha : R \to R$ definida por:

$$M_\alpha = f_{1/\alpha}(x) - f_\alpha(x) \qquad \text{(V.2)}$$

donde f_α es la función gap definida por (V.1) y α es una constante mayor que uno, la función M_α constituye una reformulación del PDV como un problema de optimización diferenciable sin restricciones. Esta función es definida como la diferencia de dos funciones gap regularizadas, de ahí que le llamaremos la función D-gap, donde D abrevia la palabra "diferencia". Peng & Yuan (1997) mostraron que cuando el PDV es especializado a PCN, ésta función se reduce a Lagrangiano implícito propuesto por Mangasarian & Solodov (1993). Así la función M_α definida por (V.2) puede ser considerado como una extensión del Lagrangiano implícito PCN a PDV; aquí la función M_α adquiere algunas propiedades del Lagrangiano implícito para PCN.

El propósito de este trabajo es generalizar la función D-gap M_α y estudiar varias propiedades de la función D-gap generalizada. La generalización es de la siguiente manera. Primero, usamos dos arbitrarios parámetros α y β tales que $\alpha < \beta$ para definir la función D-gap. Segundo adoptamos la función distancia generalizada, como en Wu et al. (1993), en la definición de la función gap regularizada. Estas extensiones incrementan la flexibilidad del diseño de la función gap en la práctica. Damos condiciones bajo las cuales algún punto estacionario de la función D-gap es una solución del PDV y condiciones bajo las cuales ésta nos provee una cota de error global para PDV. Finalmente se presenta un método de descenso para solucionar el PDV basado en la función D-gap, el cual es una extensión del método de descenso para PCN propuesto por Yamashita & Fukushima (1995).

5.2 Generalización de la función gap regularizada

En esta sección revisaremos algunas propiedades básicas de la generalización de la función gap regularizada f_α, el cual fue introducido por Wu et al. (1993). Primero recalcamos que la función gap regularizada f_α definida por (V.1) tiene las siguientes buenas propiedades:

- f_α es no negativa en K;
- $f_\alpha(x) = 0$ y $x \in K$ sí y solamente sí x es una solución del PDV;

• f_α es continuamente diferenciable;

• $\sqrt{f_\alpha}$ provee una cota de error global en K, si F es fuertemente monótono.

Wu et al. (1993) consideró la siguiente función $\hat{f}_\alpha: R^n \to R$, el cual generaliza la función f_α:

$$\hat{f}_\alpha(x) = \max_{y \in K} \quad \Psi_\alpha(x, y) \tag{V.3}$$

donde

$$\Psi_\alpha(x, y) = \langle F(x), x - y \rangle - \alpha\phi(x, y) \tag{V.4}$$

donde α es una constante positiva y $\phi: R^{2n} \to R$ una función que satisface las siguientes condiciones:

(C1) ϕ es continuamente diferenciable en R^{2n};

(C2) ϕ es nonegativa en R^{2n};

(C3) $\phi(x,\cdot)$ es uniformemente fuertemente convexa en x, es decir, existe una constante $\lambda > 0$ tal que, para algún $x \in R^n$,

$\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)$

$\geq \langle \nabla_y \phi(x, y_2), y_1 - y_2 \rangle + \lambda \parallel y_1 - y_2 \parallel^2$, para todo $y_1, y_2 \in R^n$

(C4) $\phi(x, y) = 0$ sí y solamente sí $x = y$.

Wu et al. (1993) demostró que la función $\hat{f}_\alpha$ hereda muchas de las propiedades favorables de f_α:

$\hat{f}_\alpha$ es no negativa en K;

$\hat{f}_\alpha(x) = 0$ y $x \in K$ sí y solamente sí x es una solución del PDV;

$\hat{f}_\alpha$ es continuamente diferenciable y

$$\nabla \hat{f}_\alpha(x) = F(x) + \nabla F(x)(x - y_\alpha(x)) - \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x)) \tag{V.5}$$

donde $y_\alpha(x)$ denota el único minimizador de $-\Psi_\alpha(x,\cdot)$ en K;

$\sqrt{\hat{f}_\alpha}$ provee una cota de error global en K, si F es fuertemente monótona, continuamente Lipschitz y $\nabla\phi_y(x,\cdot)$ es uniformemente continua Lipschitz en x.

La clase de funciones satisfaciendo (C1)-(C4) incluyen las siguientes funciones:

$\phi_1(x,y) = \psi_1(x-y)$, donde $\psi_1: R^n \to R$ es nonegativo, continuamente diferenciable, fuertemente convexa en R^n y $\psi_1(0) = 0$;

$\phi_2(x,y) = \psi_2(y) - \psi_2(x) - \langle \nabla\psi_2(x), y-x \rangle$, donde $\psi_2: R^n \to R$ es dos veces continuamente diferenciable y fuertemente convexa,

$\phi_3(x,y) = \langle x-y, B(x)(x-y) \rangle$, donde $B(x)$ es una matriz continuamente diferenciable, simétrica, y uniformemente definida positiva $n \times n$.

El siguiente lema será usado en la subsecuente discusión.

Lema 5.2.1 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4). Entonces, $\nabla_y\phi(x,y) = 0$ sí y solamente sí $x = y$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Supóngase que $\nabla_y\phi(x,y) = 0$. Entonces, la uniformemente fuertemente convexidad de $\phi(x,\cdot)$ implica que y es un único minimizador de $\phi(x,\cdot)$. En efecto, por (C3):

$\phi(x,\cdot)$ es uniformemente fuertemente convexa en x, es decir, existe una constante $\lambda > 0$ tal que, para algún $x \in R^n$,

$$\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2)$$
$$\geq \langle \nabla_y\phi(x,y_2), y_1 - y_2 \rangle + \lambda \parallel y_1 - y_2 \parallel^2 \quad \forall\, y_1, y_2 \in R^n$$

Como la desigualdad anterior se da para todo $y_1, y_2 \in R^n$, tomando $y_2 = y$ se obtiene:

$$\phi(x, y_1) - \phi(x, y)$$

$\geq \langle \nabla_y \phi(x, y), y_1 - y \rangle + \lambda \parallel y_1 - y \parallel^2$ para todo $y_1 \in R^n$

Y como por hipótesis $\nabla_y \phi(x, y) = 0$, se sigue que,

$\phi(x, y_1) - \phi(x, y) \geq \lambda \parallel y_1 - y \parallel^2$ para todo $y_1 \in R^n$

El cual es equivalente ha,

$\phi(x, y_1) \geq \phi(x, y) + \lambda \parallel y_1 - y \parallel^2$

$$\geq \phi(x, y) \quad \forall\, y_1 \in R^n$$

ésta última desigualdad nos dice que y es un minimizador de $\phi(x,\cdot)$ en R^n.

Ahora veamos la unicidad del vector y, para ello supóngase que existe otro vector y' tal que,

$\phi(x, y_1) \geq \phi(x, y')$ para todo $y_1 \in R^n$

De la ecuación anterior teníamos que,

$\phi(x, y_1) \geq \phi(x, y) + \lambda \parallel y_1 - y \parallel^2$ para todo $y_1 \in R^n$

Tomando $y_1 = y'$ obtenemos:

$$\phi(x, y') \geq \phi(x, y) + \lambda \parallel y' - y \parallel^2$$

El cual es equivalente ha,

$$0 \leq \lambda \parallel y' - y \parallel^2 \leq \phi(x, y') - \phi(x, y) \qquad \text{(V.6)}$$

pero como hemos supuesto que y' es también un minimizador de $\phi(x,\cdot)$ en R^n, se tiene que para $y \in R^n$:

$$\phi(x, y) \geq \phi(x, y')$$

Lo que es lo mismo,

$$\phi(x, y') - \phi(x, y) \leq 0$$

Así ésta última desigualdad conjuntamente con la desigualdad (V.6), implican que:

$$0 \leq \lambda \parallel y' - y \parallel^2 \leq \phi(x, y') - \phi(x, y) \leq 0$$

Se sigue que,

$$\lambda \parallel y' - y \parallel^2 = 0$$

Como el parámetro λ es no nulo y no negativo, se tiene:

$$\parallel y' - y \parallel^2 = 0 \rightarrow \parallel y' - y \parallel = 0 \rightarrow y' = y$$

Prosiguiendo con la prueba del lema,

Ya que $\phi(x,\cdot)$ siempre tiene un único minimizador para cada x,

Entonces, el problema de optimización:

$$\min_{y_1 \in R^n} \phi(x, y_1)$$

tiene un único minimizador el cual es y, luego (C2) no dice que $\phi(x, y) = 0$, y por (C4) tenemos que $x = y$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $x = y$, entonces por (C4) tenemos que $\phi(x, y) = 0$

Se sigue de (C2) que y es un minimizador global de $\phi(x,\cdot)$

Así, por la condición de optimalidad, $\nabla_y \phi(x, y) = 0$

5.3 Reformulación como un problema de optimización sin restricciones

Consideremos la función $g_{\alpha\beta}: R^n \rightarrow R$ definida por:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \hat{f}_\alpha(x) - \hat{f}_\beta(x)$$

$$= \max_{y \in K} \Psi_\alpha(x, y) - \max_{y \in K} \Psi_\beta(x, y)$$

$$= \langle F(x), y_\beta(x) - y_\alpha(x) \rangle + \beta\phi(x, y_\alpha(x)) - \alpha\phi(x, y_\alpha(x)), \qquad \text{(V.7)}$$

donde α y β son parámetros arbitrarios tal que $0 < \alpha < \beta, \hat{f}_\alpha$ y Ψ_α son las funciones definidas por (V.3) y (V.4), respectivamente, y $y_\alpha(x)$ denota el único minmizador de $-\widehat{\Psi}_\alpha(x,\cdot)$ en K. En ésta sección daremos varios propiedades de la función $g_{\alpha\beta}$. En particular estableceremos la equivalencia entre el PDV y la minimización no restringida de $g_{\alpha\beta}$, y damos condiciones bajo las cuales algún punto estacionario de $g_{\alpha\beta}$ es una solución del PDV.

Asumiremos que la función ϕ en (2.4) satisface las condiciones (C1)-(C4). Note que algunos de los resultados obtenidos en este trabajo pueden darse también siempre en cuando (C2)-(C4) son reemplazadas por dondiciones más débiles tales como que $\phi(x, y)$ tiene un mínimo global sí y solamente sí $x = y$. Observar que si cogemos,

$$\phi(x, y) = (1/2) \parallel x - y \parallel^2 , \quad \beta > 1, \ \alpha = \frac{1}{\beta},$$

entonces $g_{\alpha\beta}$ se reduce a la función D-gap M_β considerado por Peng (1997).

La diferenciabilidad de la función $g_{\alpha\beta}$ se obtiene directamente de la diferenciabilidad de las funciones $\hat{f}_\alpha(x)$ y $\hat{f}_\beta(x)$.

Teorema 5.3.1 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4). Entonces, $g_{\alpha\beta}$ es diferenciable y

$$\nabla g_{\alpha\beta}(x) = \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x))$$

$$+\beta \nabla_x \phi(x, y_\beta(x)) - \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x))$$

Prueba. La prueba es inmediata, la diferenciabilidad se sigue de la diferenciabilidad de las funciones $\hat{f}_\alpha$ y $\hat{f}_\beta$, mientras que la otra parte se sigue de (V.5) pues como:

$$\nabla g_{\alpha\beta}(x) = \nabla\hat{f}_\alpha(x) - \nabla\hat{f}_\beta(x)$$

$$= F(x) + \nabla F(x)(x - y_\alpha(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$-\{F(x) + \nabla F(x)(x - y_\beta(x)) - \beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x))\}$$

$$= \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x))$$

$$+\beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x)).$$

La siguiente proposición es fundamental para el análisis subsecuente.

Proposición 5.3.2 Sea la función ϕ satisfaciendo (C3). Entonces, tenemos:

$$(\beta - \alpha)\phi(x, y_\beta(x)) \leq g_{\alpha\beta}(x)$$

$$\leq (\beta - \alpha)\phi(x, y_\alpha(x)), \quad \forall\, x \in R^n$$

Prueba. Por definición, tenemos:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \max_{y\in K}\Psi_\alpha(x, y) - \max_{y\in K}\Psi_\beta(x, y)$$

$$= \langle F(x), x - y_\alpha(x)\rangle - \alpha\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$-\langle F(x), x - y_\beta(x)\rangle + \beta\phi(x, y_\beta(x))$$

$$\geq \langle F(x), x - y_\beta(x)\rangle - \alpha\phi(x, y_\beta(x))$$

$$-\langle F(x), x - y_\beta(x)\rangle + \beta\phi(x, y_\beta(x))$$

$$= (\beta - \alpha)\phi(x, y_\beta(x)).$$

Veamos la otra desigualdad,

$$g_{\alpha\beta}(x) = \max_{y\in K}\Psi_\alpha(x, y) - \max_{y\in K}\Psi_\beta(x, y)$$

$$= \langle F(x), x - y_\alpha(x)\rangle - \alpha\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$-\langle F(x), x - y_\beta(x)\rangle + \beta\phi(x, y_\beta(x))$$

$$\leq \langle F(x), x - y_\alpha(x)\rangle - \alpha\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$-\langle F(x), x - y_\alpha(x)\rangle + \beta\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$= (\beta - \alpha)\phi(x, y_\alpha(x)).$$

de éstas dos desigualdades se obtiene el resultado.

El siguiente lema se da en Wu et al. (1993), Proposicíón 3.3, donde la prueba es atribuída ha Dafermos (1980) en el Lema 1. La última prueba se consigue asumiendo que la función ϕ es cuadrática, también por complititud damos la prueba para el caso general.

Lema 5.3.3 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4). Entonces, para algún $\alpha > 0$, $x = y_\alpha(x)$ sí y solamente sí x es una solución del PDV.

Prueba.

(⇐)Supóngase que x es una solución del PDV. Entonces, x satisface la desigualdad

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall\ y \in K \tag{V.8}$$

dado que $y_\alpha(x)$ minimiza $-\Psi_\alpha(x,\cdot)$ en K, entonces se sigue de la condición de optimalidad de primer orden:

$$\langle -\nabla_y \Psi_\alpha(x, y_\alpha(x)), u - y_\alpha(x) \rangle$$

$$= \langle F(x) + \alpha \nabla_y \phi(x, y_\alpha(x)), u - y_\alpha(x) \rangle \geq 0, \quad \forall u \in K \tag{V.9}$$

dado que $x \in K$, (V.9) implica que

$\langle F(x) + \alpha \nabla_y \phi(x, y_\alpha(x)), x - y_\alpha(x) \rangle \geq 0$

Por otro lado, ya que $y_\alpha(x) \in K$, se sigue de (V.8) que

$$\langle F(x), y_\alpha(x) - x \rangle \geq 0$$

Sumando las últimas dos desigualdades, tenemos

$$\langle \alpha \nabla_y \phi(x, y_\alpha(x)), x - y_\alpha(x) \rangle \geq 0 \tag{V.10}$$

Es más, de la convexidad fuerte de $\phi(x,\cdot)$ implica que

$\langle \nabla_y \phi(x, y_\alpha(x)), x - y_\alpha(x) \rangle + \lambda \parallel x - y_\alpha(x) \parallel^2$

$\leq \phi(x, x) - \phi(x, y_\alpha(x))$

≤ 0

donde la última desigualdad se sigue a partir de (C2)-(C4). Esta desigualdad y (V.10) implican

$$\parallel x - y_\alpha(x) \parallel = 0$$

esto es,

$$x = y_\alpha(x)$$

($\Rightarrow$) Supóngase que $x = y_\alpha(x)$. Entonces, se tiene de (V.9) y Lema 5.2.1 que

$\langle F(x), u - x \rangle \geq 0$, para todo $u \in K$,

lo cual implica que x es una solución del PDV.

Ahora, estableceremos la equivalencia entre el PDV y la minimización no restringida de $g_{\alpha\beta}$.

Teorema 5.3.4 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4). Entonces, $g_{\alpha\beta}$ es no negativa en R^n. Es más, $g_{\alpha\beta}(x) = 0$ sí y solamente sí x es una solución del PDV.

Prueba.

Por la Proposición 5.3.2,

$$g_{\alpha\beta}(x) \geq (\beta - \alpha)\phi(x, y_\beta(x)), \qquad \forall\, x \in R^n \qquad \text{(V.11)}$$

Entonces se sigue de (C2) que $g_{\alpha\beta}$ es no negativa en R^n. Ahora se dará la prueba de la última parte del teorema.

Primero, supóngase que $g_{\alpha\beta}(x) = 0$. Entonces, (V.11), (C2) y (C4) implican que $x = y_{\beta}(x)$. Así, por el Lema 5.3.3, x es una solución del PDV.

Para la prueba de la suficiencia, supóngase que x es una solución del PDV. Entonces, por Lema 5.3.3, tenemos que $x = y_{\alpha}(x)$. Se sigue de (C4) que $\phi(x, y_{\alpha}(x)) = 0$. Entonces, dado que $g_{\alpha\beta}$ es no negativa, tenemos que $g_{\alpha\beta}(x) = 0$ por Proposición 5.3.2

Este teorema nos dice que el problema de minimización global no restringida:

$$\min_{x \in R^n} g_{\alpha\beta}(x)$$

es equivalente al PDV siempre y cuando el PDV tenga solución. En particular, la minimización no restringida de $g_{\alpha\beta}$ con $g_{\alpha\beta}(x) = 0$ estará contenida en K automáticamente.

Observar que la equivalencia dada en el Teorema 5.3.4 no específica alguna suposición en F. Para una función general F, sin embargo, $g_{\alpha\beta}$ puede tener puntos estacionarios los cuales no resuelven el PDV. Porque muchos métodos de minimización no restringida únicamente encuentran un punto estacionario (ó un mínimo local en el mejor caso) de la función objetivo, en ese sentido es importante saber las condiciones bajo las cuales algún punto estacionario del $g_{\alpha\beta}$ es actualmente una solución del PDV. Para este propósito necesitamos una condición más en ϕ:

(C5) Para algunos $x, y \in R^n$,$\nabla_x \phi(x, y) = -\nabla_y \phi(x, y)$.

Uno de los especialistas indicó que, si esta condición, $\phi(x, y) = \psi(x - y)$ se daba para alguna función $\psi: R^n \to R$. Entonces, tal función reduce a la función ϕ_1 presentada en la sección previa.

Bajo éstas condiciones en ϕ, se presenta el siguiente lema.

Lema 5.3.5 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C5). Entonces, para algún $x \in R^n$, se tiene que

$$\langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x))\rangle \geq 0$$

Prueba.

Por (C5), se tiene que

$$\langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x))\rangle$$

$$= \langle F(x) + \beta\nabla_y\phi(x, y_\beta(x)), y_\alpha(x) - y_\beta(x)\rangle$$

$$+\langle F(x) + \alpha\nabla_y\phi(x, y_\alpha(x)), y_\beta(x) - y_\alpha(x)\rangle \qquad \text{(V.12)}$$

Dado que $y_\beta(x)$ minimiza $-\Psi_\beta(x,\cdot)$ en K, la condición de optimalidad de primer orden (V.9) es satisfecha. Así, haciendo $u = y_\alpha(x)$ en (V.9), se observa que el primer término de lado derecho de (V.12) es no negativo. Similarmente, el segundo término es también no negativo. En consecuencia, se tiene la desigualdad deseada.

Ahora, se puede responder a la cuestión de cuando un punto estacionario de $g_{\alpha\beta}$ es una solución del PDV.

Teorema 5.3.6 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C5). Supóngase que $\nabla g_{\alpha\beta}(x) = 0$. Sí $\nabla F(x)$ es definida positiva, entonces x es una solución del PDV.

Prueba.

Por Teorema 5.3.1, tenemos

$$0 = \nabla g_{\alpha\beta}(x)$$

$$= \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x))$$

$$+\beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x)) \qquad \text{(V.13)}$$

Multiplicando (V.13) por $y_\beta(x) - y_\alpha(x)$, tenemos

$$0 = \langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x))\rangle$$

$$+\langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x))\rangle. \qquad \text{(V.14)}$$

Por Lema 5.3.5, el segundo término en el lado derecho de la ecuación (V.14) es no negativa. Se sigue de (V.14) y el hecho de que $\nabla F(x)$ es definida positiva,

$$y_\beta(x) - y_\alpha(x) = 0.$$

Así, por (V.13), se tiene que

$$0 = \beta\nabla_x\phi(x, y_\beta(x)) - \alpha\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x))$$

$$= (\beta - \alpha)\nabla_x\phi(x, y_\alpha(x)).$$

Entonces se sigue de (C5) que

$$\nabla_y\phi(x, y_\alpha(x)) = 0.$$

Por Lema 5.2.1, tenemos $x = y_\alpha(x)$. Consecuentemente, por Lema 5.3.3, x es una solución del PDV.

La definida positividad de $\nabla F(x)$ impuesta en el Teorema 5.3.6 no puede ser reemplazada por la suposición de estricta monotonía en F. Para probar esto, se muestra un ejemplo propuesto por Yamashita & Fukushima (1995) con $n = 1$ tal que

$$F(x) = (x - 3)^3 + 1, \quad K = [0, +\infty], \quad \phi(x, y) = (1/2) \parallel x - y \parallel^2.$$

Note eso F es estrictamente monótono, pero $\nabla F(x)$ no es definida positiva en $x = 3$. Este PDV tiene una única solución en $x = 2$. Pero, para $\alpha = (1/2)$ y $\beta = 2$, $\nabla g_{\alpha\beta}(x) = 0$ es también satisfecha por $x = 3$, el cual no es una solución del PDV.

5.4 Cota de error global

En esta sección, se investiga las condiciones bajo las cuales $g_{\alpha\beta}$ provee una cota de error global para el PDV. En todas las partes de esta sección, asumiremos que la función ϕ satisface la siguiente condición:

(C6) $\nabla_y \phi(x,\cdot)$ es uniformemente continua Lipschitz, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que para algún $x \in R^n$,

$$\| \nabla_y \phi(x, y_1) - \nabla_y \phi(x, y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|, \quad \forall\, y_1, y_2 \in R^n$$

Recalcamos que la condición (C5) no será necesario en ésta sección.

Para establecer los resultados sobre la cota de error, necesitamos los siguientes dos lemas. El primer lema da condiciones bajo las cuales el residuo natural proporciona una cota de error global en el espacio entero. Para garantizar ésta última propiedad, en el caso general, requiere la fuerte monotonía y continuidad Lipschitz de F, como en Wu et al. (1993) y Pang (1987), el cual parece ser muy restrictivo en la práctica. En el mismo lema, sin embargo, demostraremos que la continuidad Lipschitz de F puede ser quitado cuando el conjunto K es compacto, podemos asumir la compacidad de K, el cual puede ser justificado cuando F es fuertemente monótono. En efecto, cuando F es fuertemente monótono, el PDV tiene una única solución x^*; así, en la práctica, el problema puede ser equivalentemente planteado sustituyendo el conjunto K por su intersección con una esfera bastante grande de tal manera que contenga a la solución x^*.

Lema 5.4.1 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4) y (C6). Supóngase que F es fuertemente monótono en R^n. Sí F es continua Lipschitz en R^n ó si K es compacto, entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\| x - x^* \| \leq c \| y_\beta(x) - x \|, \quad \forall \ x \in R^n,$$

donde x^* es la única solución del PDV.

Prueba. Para el caso donde F es continuamente Lipschitz en R^n, considera una derivación de (27) en la prueba de Wu et al. (1993), Proposición 3.5. Note que en dicha prueba se asume que $x \in K$, ésto también será verdadero cuando $x \notin K$.

Provaremos el caso cuando K es compacto. Dado que K es compacto, existe un número positivo $b > 0$ tal que

$$K \subset \{x / \| x \| \leq b\}.$$

Sea B la esfera cerrada centrada en el origen con radio $3b$, esto es,

$$B = \{x / \| x \| \leq 3b\}.$$

Dado que F es continuamente diferenciable, F es continua Lipschitz en B. Entonces, nosotros podemos modificar la prueba para el caso donde F es continua Lipschitz en R^n para demostrar eso, existe un número positivo $c' > 0$ tal que

$$\| x - x^* \| \leq c' \| x - y_\beta(x) \|, \quad \forall \ x \in B \tag{V.15}$$

Ahora, sea x un punto arbitrario tal que $x \notin B$, esto es, $\| x \| > 3b$. Entonces, se sigue de la desigualdad triangular

$$\| x - x^* \| \leq \| x - y_\beta(x) \| + \| y_\beta(x) \| + \| x^* \|$$

$$\leq \| x - y_\beta(x) \| + 2b, \qquad \text{(V.16)}$$

donde la última desigualdad se sigue de que $x^* \in K$ y $y_\beta(x) \in K$, eso es,

$\| x^* \| \leq b, \quad \| y_\beta(x) \| \leq b.$

También, de la desigualdad triangular, tenemos

$$\| x - y_\beta(x) \| \geq \| x \| - \| y_\beta(x) \|$$

$$\geq 3b - b$$

$$= 2b \qquad \text{(V.17)}$$

Así, se sigue de (V.16) y (V.17) que

$$\| x - x^* \| \leq 2 \| x - y_\beta(x) \|, \quad \forall x \notin B \qquad \text{(V.18)}$$

Sea $c = max\{c', 2\}$, tenemos de (V.15) y (V.18)

$$\| x - x^* \| \leq c \| x - y_\beta(x) \|, \quad \forall x \in R^n.$$

Lema 5.4.2 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4) y (C6). Entonces se tiene que

$$\lambda \| x - y_\alpha(x) \|^2 \leq \phi(x, y_\alpha(x))$$

$$\leq (L/2) \| x - y_\alpha(x) \|^2, \quad \forall \; x \in R^n \qquad \text{(V.19)}$$

donde $\lambda > 0$ y $L > 0$ son los parámetros en (C3) y (C6), respectivamente.

Es más, se tiene que

$$\lambda(\beta - \alpha) \| x - y_\beta(x) \|^2 \leq g_{\alpha\beta}(x)$$

$$\leq [L(\beta - \alpha)/2] \| x - y_\alpha(x) \|^2, \qquad \forall x \in R^n \qquad \text{(V.20)}$$

Prueba. Primero, se demuestra la desigualdad del lado izquierdo en (V.19). Se observa que

$$\phi(x, y_\alpha(x)) = \phi(x, y_\alpha(x)) - \phi(x, x)$$

$$\geq \langle \nabla_y \phi(x,x), y_\alpha(x) - x \rangle + \lambda \parallel x - y_\alpha \parallel^2 \tag{V.21}$$

donde la igualdad se sigue de (C4) y la desigualdad se sigue de (C3).

Dado que (C2) y (C4) implican

$$0 = \phi(x,x) = \min_{y \in R^n} \phi(x,y),$$

tenemos

$$\nabla_y \phi(x,x) = 0 \tag{V.22}$$

Así, sustituyendo (V.22) en (V.21), se obiene

$$\phi(x, y_\alpha(x)) \geq \lambda \parallel x - y_\alpha(x) \parallel^2$$

Prosiguiendo, demostraremos la desigualdad del lado derecho en (V.19). Por $\phi(x,x) = 0$ y (V.22), se tiene que

$$\phi(x, y_\alpha(x)) = \phi(x, y_\alpha(x)) - \phi(x,x)$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla_y \phi(x, x + t(y_\alpha(x) - x)), y_\alpha(x) - x \rangle dt$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla_y \phi(x, x + t(y_\alpha(x) - x)) - \nabla_y \phi(x,x), y_\alpha(x) - x \rangle dt$$

$$\leq \int_0^1 L \parallel y_\alpha(x) - x \parallel^2 tdt$$

$$= (L/2) \parallel y_\alpha(x) - x \parallel^2,$$

donde la última desigualdad es sigue de (C6). Finalmente, la Proposición 5.3.2 y (V.19) implican que:

$$\lambda(\beta - \alpha) \parallel x - y_\beta(x) \parallel^2 \leq g_{\alpha\beta}(x)$$

$$\leq \left[\frac{L(\beta - \alpha)}{2}\right] \parallel x - y_\alpha(x) \parallel^2, \quad \forall\, x \in R^n$$

De los dos lemas anteriores, se obtiene la siguiente cota de error global para el PDV.

Teorema 5.4.3 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4) y (C6). Supóngase que F es fuertemente monótono en R^n. Sí F es continua Lipschitz en R^n ó si K es compacto, $\sqrt{g_{\alpha\beta}}$ proporciona una cota de error global para el PDV.

Prueba. Por Lema 5.4.1 y (V.20) en Lema 5.4.2, tenemos

$$\| x - x^* \| \leq \left[c/\sqrt{\lambda(\beta-\alpha)}\right]\sqrt{g_{\alpha\beta}}, \qquad \forall \;\; x \in R^n, \tag{V.23}$$

donde x^* es la única solución del PDV.

Corolario 5.4.4 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C4) y (C6). Supóngase que F es fuertemente monótono en R^n. Sí F es continua Lipchitz en R^n ó si K e compacto, entonces tenemos

$$\lim_{\|x\|\to\infty} g_{\alpha\beta}(x) = +\infty;$$

así, los conjuntos de nivel de $g_{\alpha\beta}$ son compactos.

Prueba. Tomando límite en (V.23) cuando $\| x \| \to \infty$ uno tiene,

$$+\infty \leq \lim_{\|x\|\to\infty} g_{\alpha\beta}(x) \leq +\infty.$$

5.5 Método de descenso

En ésta sección, discutiremos un método iterativo para solucionar PDV. En toda ésta sección, asumiremos que la función ϕ satisface (C1)-(C6).

Por ejemplo,

$$\phi(x,y) = (1/2) \| x - y \|^2$$

satisface (C1)-(C6).

Del Teorema 5.3.1 y Lema 5.3.5 se sigue que, cuando $\nabla F(x)$ es definida positiva, el vector

$$d = y_\alpha(x) - y_\beta(x) \tag{V.24}$$

es una dirección de descenso de $g_{\alpha\beta}$ en x, es decir, $d \neq 0$ y $\nabla g_{\alpha\beta}(x) \neq 0$ implican

$$\langle \nabla g_{\alpha\beta}(x), d \rangle = -\langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x)) \rangle$$

$$-\langle y_\beta(x) - y_\alpha(x), \beta \nabla_x \phi(x, y_\beta(x)) - \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x)) \rangle$$

$$< 0$$

También, puede parecer viable considerar un método de descenso la cual emplea el vector d definido por (V.24) como una dirección de búsqueda. Tal método generaría una sucesión que converge a un punto x tal que

$$d = y_\alpha(x) - y_\beta(x) = 0$$

Sin embargo, $y_\alpha(x) = y_\beta(x)$ no nos asegura que x sea una solución del PDV. Observe, de la prueba del Teorema 5.3.6, es visto que, si $y_\alpha(x) = y_\beta(x)$ y x es una punto estacionario de $g_{\alpha\beta}$, entonces x es una solución del PDV. Por lo tanto, como en el método descenso propuesto en Yamashita & Fukushima (1995), adoptaremos al vector

$$d = r(x) + \rho s(x)$$

como una dirección de búsqueda, donde ρ es una constante suficientemente pequeña y

$$r(x) = y_\alpha(x) - y_\beta(x),$$

$$s(x) = \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x)) - \beta \nabla_x \phi(x, y_\beta(x))$$

Ya que el vector d no depende de la matriz jacobiana $\nabla F(x)$, d es por lo general mucho más fácil para evaluar que el gradiente $\nabla g_{\alpha\beta}$. El siguiente lema demuestra que, bajo la suposición de fuerte monoticidad en F, el vector d es actualmente una dirección de descenso de la función $g_{\alpha\beta}$ en x. En la prueba de dicho lema se usa la misma técnica como en Yamashita & Fukushima (1995), Lema 3.1.

Lema 5.5.1 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C6). Supóngase que F es fuertemente monótono con módulo μ en R^n y que F es continua Lipschitz ó K es compacto. Sea x^0 un punto arbitrario de R^n. Entonces, existe una constante positiva ρ tal que, para cada x en el conjunto de nivel $T(x^0) = \{x / g_{\alpha\beta}(x) \leq g_{\alpha\beta}(x^0)\}$, el vector $d = r(x) + \rho s(x)$ satisface

$$\langle d, \nabla g_{\alpha\beta}(x) \rangle \leq -(\mu/2)(\| r(x) \| + \rho \| s(x) \|)^2$$

Prueba. Del Teorema 5.3.1, tenemos

$$\langle d, \nabla g_{\alpha\beta}(x) \rangle = \langle d, \nabla F(x)(y_\beta(x) - y_\alpha(x)) \rangle$$

$$+\langle d, \beta \nabla_x \phi(x, y_\beta(x)) - \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x)) \rangle$$

$$= -\langle d, \nabla F(x) r(x) \rangle - \langle d, s(x) \rangle$$

$$= -\langle r(x), \nabla F(x) r(x) \rangle - \rho \langle s(x), \nabla F(x) r(x) \rangle$$

$$-\langle r(x), s(x) \rangle - \rho \| s(x) \|^2 \qquad \text{(V.25)}$$

Note que, por el Corolario 5.4.4, el conjunto de nivel $T(x^0)$ es acotado y así compacto. Ya que $\nabla F(x)$ es continua, existe una constante $\tau > 0$ tal que

$$\| \nabla F(x) \| \leq \tau, \quad \forall \ x \in T(x^0)$$

También, tenemos

$$-\langle s(x), \nabla F(x) r(x) \rangle \leq \tau \| r(x) \| \| s(x) \|, \qquad \forall x \in T(x^0). \qquad \text{(V.26)}$$

Dado que F es fuertemente monótono con módulo μ, tenemos

$$\langle r(x), \nabla F(x) r(x) \rangle \geq \mu \| r(x) \|^2. \qquad \text{(V.27)}$$

Por Lema 5.3.5, tenemos

$$\langle r(x), s(x)\rangle \geq 0 \tag{V.28}$$

Así, se sigue de (V.25)-(V.28) que

$$\langle d, \nabla g_{\alpha\beta}(x)\rangle$$

$$\leq -\mu \parallel r(x) \parallel^2 + \tau\rho \parallel r(x) \parallel\parallel s(x) \parallel -\rho \parallel s(x) \parallel^2 \tag{V.29}$$

Se observa que el lado derecho de (V.29) puede ser reescrito como:

$$-\mu \parallel r(x) \parallel^2 + \tau\rho \parallel r(x) \parallel\parallel s(x) \parallel -\rho \parallel s(x) \parallel^2$$

$$= -(\mu/2)(\parallel r(x) \parallel +\rho \parallel s(x) \parallel)^2 - (1/2)(\sqrt{\mu} \parallel r(x) \parallel -\sqrt{\rho} \parallel s(x) \parallel)^2$$

$$+(1/2)(\mu\rho - 1)\rho \parallel s(x) \parallel^2$$

$$+\sqrt{\rho}(\mu\sqrt{\rho} + \tau\sqrt{\rho} - \sqrt{\mu}) \parallel r(x) \parallel\parallel s(x) \parallel. \tag{V.30}$$

Entonces, cogiendo ρ satisfaciendo

$\rho \leq min\{1/\mu, \mu/(\mu + r)^2\}$,

tenemos

$$\mu\rho - 1 \leq 0, \quad \mu\sqrt{\rho} + \tau\sqrt{\rho} - \sqrt{\mu} \leq 0. \tag{V.31}$$

Se sigue de (V.29), (V.30) y (V.31) que

$$\langle d, \nabla g_{\alpha\beta}(x)\rangle \leq -(\mu/2)(\parallel r(x) \parallel +\rho \parallel s(x) \parallel)^2.$$

Esto completa la prueba.

Ahora, se propone un algoritmo el cual emplea la dirección de búsqueda d.

Algoritmo 5.5.2

: Seleccionamos un punto inicial $x^0 \in R^n$ y parámetros $\rho > 0$, $\gamma \in (0,1)$, y "k" > 0. Sea $k := 0$.

: Si $g_{\alpha\beta}(x^k) = 0$, entonces detenerse. En otro caso, ir al paso 3.

: Sea $d^k := r(x^k) + \rho s(x^k)$.

: Sea m un entero nonegativo pequeño tal que

$g_{\alpha\beta}(x^k + \gamma^m d^k) - g_{\alpha\beta}(x^k) \leq -\gamma^m "k"(\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \|$, y sea

$x^{k+1} := x^k + t_k d^k, \quad donde \;\; t_k := \gamma^m.$

Retornar al paso 2 con k reemplazado por $k+1$.

Observar que, por Lema 5.5.1, la búqueda lineal de tipo Armijo puede siempre encontrar un tamaño de paso $t_k > 0$ para cada K, a condición de que el parámetro "k" es escogido más pequeño que $\mu/2$. En la práctica, sin embargo, el valor exacto de μ es por lo general desconocido. También, necesitamos recurrir ha alguna estrategia secreta para encontrar un adecuado valor del parámetro "k".

Ahora se establece un teorema de convergencia para el algoritmo.

Teorema 5.5.3 Sea la función ϕ satisfaciendo (C1)-(C6). Supóngase que F es fuertemente monótono con módulo μ en R^n y que F es continua Lipchitz ó K es compacto. Supóngase también que ρ es bastante pequeño para garantizar la condición de descenso dado en el Lema 5.4.4 y que "k" es menor que $\mu/2$). Entonces, la sucesión $\{x^k\}$ generada por el algoritmo converge a una única solución del PDV.

Prueba. Por la propiedad de descenso del algoritmo, la sucesión generada $\{x^k\}$ está contenida en el conjunto de nivel

$$T(x^0) = \{x / g_{\alpha\beta}(x) \leq g_{\alpha\beta}(x^0)\}.$$

Por Corolario 5.4.4, el conjunto de nivel $T(x^0)$ es compacto, lo cual implica que existe al menos un punto de acumulación de $\{x^k\}$. Ya que la sucesión $\{g_{\alpha\beta}(x^k)\}$ es nonegativa y monótona decreciente, ésta converge ha algún $g^*_{\alpha\beta} \geq 0$.

Se asume que $g_{\alpha\beta}^* > 0$. Sea x^* algún punto de acumulación de $\{x^k\}$, y sea $\{x^k\}_{k\in"k"}$ una subsucesión el cual converge a x^*. Note que, dado que, $y_\alpha(\cdot)$ y $y_\beta(\cdot)$ son continuas, el acotamiento de $\{k^k\}$ implica el acotamiento de $\{r(x^k)\}$ y $\{s(x^k)\}$, lo cual a su turno implica el acotamiento de $\{d^k\}$. Cogiendo una adecuada subsucesión si es necesario, podemos asumir sin perdida de generalidad que $d^k \to d^*$. Note que

$d^* = r(x^*) + \rho s(x^*)$,

dado que r y s son continuas. Por la regla de la búsqueda lineal del algoritmo, tenemos

$$g_{\alpha\beta}(x^k + t_k d^k) - g_{\alpha\beta}(x^k) \leq -t_k"k"(\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \|)^2,$$

lo cual implica que $\{t_k(\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \|)^2\}$ converge a 0. Si $\{t_k\}$ es acotado lejos de 0, entonces tenemos

$$\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \| \to 0;$$

es decir,

$$\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \| = 0$$

Ahora, supóngase que existe una subsucesión tal que $t_k \to 0$. La regla de la búsqueda lineal indica que

$$\frac{\left[g_{\alpha\beta}(x^k + t'_k d^k) - g_{\alpha\beta}(x^k)\right]}{t'_k}$$

$$> -"k"(\| r(x^k) \| + \rho \| s(x^k) \|)^2, \qquad \text{(V.32)}$$

donde $t'_k = t_k/\gamma$. Dado que $t'_k \to 0$, tomando límite en ambos lados de (V.32) se obtiene

$$\langle \nabla g_{\alpha\beta}(x^*), d^* \rangle \geq -"k"(\| r(x^*) \| + \rho \| s(x^*) \|)^2 \qquad \text{(V.33)}$$

Dado que

$$d^* = r(x^*) + \rho s(x^*),$$

como lo mencionado arriba, el Lema 5.5.1 y (V.33) implican que

$$-\text{“}k\text{”}(\| r(x^*) \| + \rho \| s(x^*) \|)^2$$

$$\leq -(\mu/2)(\| r(x^*) \| + \rho \| s(x^*) \|)^2 \tag{V.34}$$

dado que "k" $< \mu/2$ por suposición, (V.34) implica que

$$\| r(x^*) \| + \rho \| s(x^*) \| = 0$$

Consecuentemente, se tiene

$r(x^*) = 0, s(x^*) = 0.$

Dado que

$r(x^*) = y_\alpha(x^*) - y_\beta(x^*),$

$$s(x^*) = \alpha \nabla_x \phi(x, y_\alpha(x^*)) - \beta \nabla_x \phi(x, y_\beta(x^*)),$$

El Teorema 5.3.1 indica que $\nabla g_{\alpha\beta}(x^*) = 0$. Así, se sigue del Teorema 5.3.6 que el punto de acumulación x^* de $\{x^k\}$ resuelve el PDV; luego por Teorema 5.3.4, $g_{\alpha\beta}(x^*) = 0$. Esto es una contradicción con nuestra hipótesis $g_{\alpha\beta}(x^*) = g^*_{\alpha\beta} > 0$. Por lo tanto, se debe tener que $g_{\alpha\beta}(x^*) \to 0$, lo cual implica que algún punto de acumulación x^* de $\{x^k\}$ satisface $g_{\alpha\beta}(x^*) = 0$, y así resuelve el PDV. Desde que la fuerte monotonía de F garantiza que la solución del PDV es única, podemos concluir que la sucesión entera $\{x^k\}$ converge a la solución del PDV.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Esta sección está dedicada a demostrar que las hipótesis planteadas en el Capítulo III, se verifican.

Con respecto a la hipótesis H_i, planteada en la Sección 3.1.1, la cual es:

H_i: Existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones.

La función gap multiparamétrica está definida en (V.7) en la Sección 5.3. Esta función diferenciable $g_{\alpha\beta}$ permite, por medio del Teorema 5.3.4, reformular el *PDV* como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones a partir de la igualdad $g_{\alpha\beta} = 0$. Esto muestra que H_i se verifica.

Por otro lado, en relación con las hipótesis especificas:

H_1: Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

H_2: Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.

H_3: Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.

Todas ellas fueron probadas en los Teoremas 5.3.6, Teorema 5.4.3 y Teorema 5.5.3 respectivamente.

Con respecto a H_3, el Algoritmo 5.5.2 muestra un método iterativo que permite solucionar el problema de desigualdad variacional por medio del Teorema 5.5.3. Esto verifica directamente H_3.

Por lo tanto, se logró demostrar las hipótesis propuestas.

6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Los resultados del estudio coindicen con los resultados de Blanco Louro et al.(2003) ya que empleó una función D-gap para reformular el PDV como un problema de optimización diferenciable, pero enfocándose en los problemas de complementariedad no lineal.

Los resultados del estudio coinciden con algunos resultados obtenidos por Paz (2011) en cuanto a la presentación de la teoría de desigualdades variacionales y metodologías para resolver un PDV.

6.3 Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes

En el estudio se respetaron los derechos de autor, para ello se citaron y referenciaron las fuentes consultadas haciendo uso de las Normas APA séptima edición.

VII. CONCLUSIONES

1. En el trabajo de investigación, se generalizó la función D-gap propuesta por Peng (1997) para el PDV y se demostró que la función generalizada, denominada función gap multiparamétrica, goza de varias propiedades importantes.
2. Se estableció las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.
3. Se demostró que existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el PDV.
4. Se presentó un método de descenso basada en ésta función gap multiparamétrica y se estableció un Teorema de convergencia global.
5. Los resultados obtenidos en este trabajo sugieren que la función gap multiparamétrica puede servir como una herramienta muy útil en el estudio del PDV.

VIII. RECOMENDACIONES

1. En el Teorema 5.4.3, se asumió la continuidad Lipschitz de F así como la fuerte monotonía para mostrar que la $\sqrt{g_{\alpha\beta}}$ proporciona una cota de error global, cuando ninguna suposición especial sobre K es hecha. Sin embargo, tenemos demostrado que, en el caso especial donde K es compacto, $\sqrt{g_{\alpha\beta}}$ proporciona una cota de error global sin la condición de Lipschitz en F. Entonces, nos preguntamos lo siguiente, ¿será cierto que $\sqrt{g_{\alpha\beta}}$ proporciona una cota de error global solamente bajo la fuerte monotonía de F, incluso si K es un conjunto convexo general? Se recomienda explorar esta interrogante para futuros trabajos.
2. Para futuros trabajos de investigación se recomienda estudiar el caso de funciones gap regularizadas, pero para desigualdades variacionales no monótonas, es decir, cuando F no es monótono.
3. Se recomienda estudiar, a las funciones gap multiparamétricas en problemas de equilibrio, establecer condiciones para que un punto estacionario de estas funciones sea solución del problema de equilibrio, así como encontrar una cota de error para este problema y establecer un método de descenso basado esta función que permita resolver el problema de equilibrio.
4. Finalmente, se recomienda estudiar, como problema de aplicación, el problema de la asignación de flujos de tránsito a redes de transporte urbano, donde el problema del usuario se aborde mediante una desigualdad variacional y plantear un tipo de función gap que permita resolver dicho problema.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias Gonzales, J. L. (2020). *Proyecto de tesis Guía para la elaboración*. Editorial Arias. https://repositorio.concytec.gob.pe/handle/20.500.12390/2236

Auchrnuty, G. (1989). Variational Principles for Variational Inequalities. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *10*(9–10), 863–874. https://doi.org/10.1080/01630568908816335

Auslender, A. (1976). *Optimisation: Méthodes Numériques*. Masson.

Baygorrea, N. (2010). *Método del punto proximal para desigualdades variacionales en variedades riemannianas* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/108

Blanco Louro, A., Lema Fernández, C., & Pedrerira Andrade, L. (2003). Sobre el uso de las desigualdades variacionales para el cálculo del problema de complementariedad no lineal. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, *11*(1), 27–40. https://www.researchgate.net/publication/26428332_Sobre_el_uso_de_las_desigualdades_variacionales_para_el_calculo_del_problema_de_complementariedad_no_lineal

Dafermos, S. (1980). Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. *Transportation Science*, *14*(1), 1–105. https://doi.org/10.1287/trsc.14.1.42

Facchinei, F., & Pang, J. S. (2003). *Finite Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Vol. 1*. Springer-Verlag.

Fukushima, M. (1992). Equivalent Differentiate Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Mathematical Programming*, *53*, 99–110.

Hartman, P., & Stampacchia, G. (1966). On some non-linear elliptic differential-functional equations. *Acta Mathematica*, *115*(1), 271–310. https://doi.org/10.1007/BF02392210

Hu, Y. H., & Song, W. (2009). Generalized gap functions and error bounds for generalized variational inequalities. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, *30*(3), 313–321. https://doi.org/10.1007/s10483-009-0305-x

Mandujano, J. (2013). *Solución de un problema de desigualdad variacional en Rn usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/118

Mangasarian, O. L., & Solodov, M. V. (1993). Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization. *Mathematical Programming*, *62*(1–3), 277–297. https://doi.org/10.1007/BF01585171

Pang, J.-S. (1987). A Posteriori Error Bounds for the Linearly-Constrained Variational Inequality Problem. *Mathematics of Operations Research*, *12*(3), 474–484. https://doi.org/10.1287/moor.12.3.474

Paz, M. (2011). *Desigualdades variacionales, soluciones y aplicaciones* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/560

Peng, J. M. (1997). Equivalence of Variational Inequality Problems to Unconstrained Optimization,. *Mathematical Programming*, *78*(3), 347–355.

Peng, J. M., & Yuan, Y. (1997). Unconstrained methods for generalized complementarity problems. *Journal of Computational Mathematics*, *15*(3), 253–264.

Portilla, I. (2008). *Modelo de asignación de tráfico en redes mediante desigualdades variacionales* [Tesis de pregrado, Universidad De Los Andes]. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/25532/u336610.pdf?sequence=1

Ramos, W. (2018). *Formulación variacional y existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/4532

Ruiz-Garzón, G., Hernández-Jiménez, B., Osuna-Gómez, R., & Rufián-Lizana, A. (2015). Convexidad generalizada: Aplicaciones a problemas variacionales. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *31*(2), 137–149. http://hdl.handle.net/11441/56353

Supo, J., & Zacarías, H. (2020). *Metodología de la investigación científica* (3rd ed.). Sincie.

Wu, J. H., Florian, M., & Marcotte, P. (1993). A general descent framework for the monotone variational inequality problem. *Mathematical Programming*, *61*(1–3), 281–300. https://doi.org/10.1007/BF01582152

Yamashita, N., & Fukushima, M. (1995). On stationary points of the implicit Lagrangian for nonlinear complementarity problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *84*(3), 653–663. https://doi.org/10.1007/BF02191990

Yamashita, N., & Fukushima, M. (1997). Equivalent unconstrained minimization and global error bounds for variational inequality problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *35*(1), 273–284. https://doi.org/10.1137/S0363012994277645

Yamashita, N., Taji, K., & Fukushima, M. (1997). Unconstrained Optimization Reformulations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *92*(3), 439–456.

ANEXOS

Anexo1: Matriz de consistencia

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN Y MUESTRA	VARIABLES
General	**General**	**General**	**Tipo y diseño de investigación**		
¿Es posible determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto?	Determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.	Existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.	Tipo de estudio básica Diseño de investigación no experimental		
Específicos	**Específicos**	**Específicos**	**Método de investigación**	Por la naturaleza de la investigación, tratándose de un estudio cualitativo documental, la población y muestra no aplica.	Variable 1: Problema de desigualdad variacional Variable 2: Función gap
1. ¿Cuáles son las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional?	1.Establecer las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.	1.Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.	Método inductivo – deductivo Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca		
2. ¿Cuáles son las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional?	2. Determinar las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.	2.Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.			
3. ¿Se puede establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional?	3. Establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional.	3.Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.			