

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



“APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL  
PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA  
MECÁNICO MULTI-ROBOT”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO  
EN MATEMÁTICA

ELVIS FAVIAN CAYCHO VILLEGAS

Asesores :

Dr. JULIO CÉSAR NUÑEZ VILLA

Dr. CESAR AUGUSTO IPANAQUE ZAPATA

Línea de investigación:

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Callao, 2023

PERÚ



.....  
Elvis Favian  
Caycho Villegas  
Bachiller  
Código: 033026j  
DNI: 10709941



.....  
Dr. Julio César  
Nuñez Villa  
Asesor Interno  
Código: 6283  
DNI: 45479946



Dr. Cesar Augusto  
Ipanaque Zapata  
Asesor Externo  
DNI: 45870854



# INFORMACIÓN BÁSICA

**FACULTAD:** Facultad Ciencias Naturales y Matemática.

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN:** Departamento de Matemática.

**TÍTULO:** APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT.

**AUTOR:**

Bach. Elvis Favian Caycho Villegas

ORCID: 0000-0003-4025-1106

**ASESORES:**

Dr. Julio César Nuñez Villa (Asesor Interno).

ORCID: 0000-0002-9190-8676

Dr. Cesar Augusto Ipanaque Zapata (Asesor Externo).

ORCID: 0000-0003-2558-894X

**LUGAR DE EJECUCIÓN:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

**UNIDAD DE ANÁLISIS:** Problema de Planificación de Movimiento de Robots.

**TIPO DE INVESTIGACIÓN:** Básico.

**TEMA OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura).



## CONSTANCIA N° 26-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

### **ELVIS FAVIAN CAYCHO VILLEGAS**

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo titulado: “APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT”.

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 14 de agosto 2023.



## Document Information

---

Analyzed document	informe _ final_ caycho villegas (1).pdf (D173044916)
Submitted	2023-08-23 05:58:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.arkund.com

## Sources included in the report

---

### Entire Document

---

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA ELVIS FAVIAN CAYCHO VILLEGAS Asesores : Dr. JULIO CÉSAR NUÑEZ VILLA Dr. CESAR AUGUSTO IPANAQUE ZAPATA Línea de investigación: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA CALLAO, 2022 PERÚ  
..... Elvis Favian Caycho Villegas Bachiller Código: 033026j DNI: 10709941 ..... Dr. Julio César Nuñez Villa Asesor Interno Código: 6283 DNI: 45479946 ..... Dr. Cesar Augusto Ipanaque Zapata Asesor Externo DNI: 45870854

INFORMACIÓN BÁSICA . FACULTAD: Facultad Ciencias Naturales y Matemática. UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Departamento de Matemática. TÍTULO: APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT. AUTOR: Bach. Elvis Favian Caycho Villegas ORCID: 0000-0003-4025-1106 ASESORES: Dr. Julio César Nuñez Villa (Asesor Interno). ORCID: 0000-0002-9190-8676 Dr. Cesar Augusto Ipanaque Zapata (Asesor Externo). ORCID: 0000-0003-2558-894X LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática UNIDAD DE ANÁLISIS: Problema de Planificación de Movimiento de Robots. TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básico. TEMA OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura).  
HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT ELVIS FAVIAN CAYCHO VILLEGAS Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por Mg. Cruzado Guispe, Ever Franklin Presidente Lic. Avila Celis, César Augusto Secretario Lic. Castillo Valdivieso, Absalón Vocal Lic. Rodríguez Varillas, Gabriel Suplente  
Dr. Julio César Nuñez Villa Asesor interno Dr. Cesar Augusto Ipanaque Zapata Asesor externo 5

DEDICATORIA A mis padres. A mi esposa e hijos, la razón de mi esfuerzo.

AGRADECIMIENTOS Al Rey de los siglos, inmortal, invisible, al único sabio Dios por su amor y grande misericordia que me dio vida eterna en Cristo Jesús, amén. Al Dr. Paulo Nicanor Huertas Seminario, por su dedicación en la mejora continua del desarrollo metodológico del trabajo. Al Dr. Julio César Nuñez Villa, por su apoyo en la estructuración y culminación de este trabajo. Al Dr. César Augusto Ipanaque Zapata, por su apoyo constante en absolver en cada momento mis dudas en la realización y culminación de este trabajo. A los docentes de mi Facultad por impartir sus conocimientos con mucha paciencia y dedicación durante mis años de estudio, muchas gracias a todos.

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS**

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: <http://meet.google.com/vhj-nibi-wdp> mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 17:45 horas del Martes diecisiete de enero del año dos mil veintitrés, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **CAYCHO VILLEGAS ELVIS FAVIAN**, titulado: “**APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO MULTI-ROBOT**” Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Mg. CRUZADO QUISPE, Ever Franklin	: Presidente
Lic. AVILA CELIS, César Augusto	: Secretario
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón	: Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel	: Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 174-2022-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 17:45; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido líneas arriba, se **ACORDÓ CALIFICAR** la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **CAYCHO VILLEGAS ELVIS FAVIAN**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
<b>18</b>	<b>Excelente</b>

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **18:50** horas del día diecisiete de enero del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:



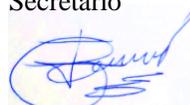
Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe  
Presidente



Lic. César Augusto Ávila Celis  
Secretario



Lic. Absalón Castillo Valdivieso  
Vocal



Lic. Gabriel Rodríguez Varillas  
Suplente

**HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN**  
**APLICACIÓN DE ALGORITMOS CON TEORÍA DE TRENZAS EN EL PROBLEMA**  
**DE PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA MECÁNICO**  
**MULTI-ROBOT**

ELVIS FAVIAN CAYCHO VILLEGAS

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por



---

Mg. Cruzado Quispe, Ever Franklin

Presidente



---

Lic. Avila Celis, César Augusto

Secretario



---

Lic. Castillo Valdivieso, Absalón

Vocal



---

Lic. Rodriguez Varillas, Gabriel

Suplente



---

Dr. Julio César Nuñez Villa

Asesor interno



---

Dr. Cesar Augusto Ipanaque Zapata

Asesor externo

# DEDICATORIA

A mis padres.

A mi esposa e hijos, la razón de mi esfuerzo.

# AGRADECIMIENTOS

Al Rey de los siglos, inmortal, invisible, al único sabio Dios por su amor y grande misericordia que me dio vida eterna en Cristo Jesús, amén.

Al Dr. Paulo Nicanor Huertas Seminario, por su dedicación en la mejora continua del desarrollo metodológico del trabajo.

Al Dr. Julio César Nuñez Villa, por su apoyo en la estructuración y culminación de este trabajo.

Al Dr. César Augusto Ipanqué Zapata, por su apoyo constante en absolver en cada momento mis dudas en la realización y culminación de este trabajo.

A los docentes de mi Facultad por impartir sus conocimientos con mucha paciencia y dedicación durante mis años de estudio, muchas gracias a todos.

# Índice general

INFORMACIÓN BÁSICA . . . . .	3
<b>I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>1</b>
1.1 Descripción de la realidad problemática . . . . .	1
1.2 Formulación del Problema . . . . .	1
1.2.1 Problema General . . . . .	1
1.2.2 Problemas Específicos . . . . .	1
1.3 Objetivos . . . . .	1
1.3.1 Objetivo General . . . . .	1
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	2
1.4 Justificación . . . . .	2
1.5 Delimitantes de la Investigación . . . . .	3
1.5.1 Teórica . . . . .	3
1.5.2 Temporal . . . . .	3
1.5.3 Espacial . . . . .	3
<b>II MARCO TEÓRICO</b>	<b>4</b>
2.1 Antecedentes . . . . .	4
2.1.1 Internacionales . . . . .	4
2.1.2 Nacionales . . . . .	4
2.2 Bases teóricas . . . . .	5
2.2.1 Preliminares Algebraicos . . . . .	7
2.2.2 Preliminares Topológicos . . . . .	7
2.2.3 Preliminares de Topología Algebraica . . . . .	11
2.2.4 Espacio de Configuraciones . . . . .	14
2.2.5 Teoría de trenzas . . . . .	15
2.2.6 Complejidad Topológica . . . . .	18
2.3 Marco Conceptual . . . . .	19
2.4 Definición de términos básicos . . . . .	20
<b>III HIPÓTESIS Y VARIABLES</b>	<b>21</b>
3.1 Hipótesis . . . . .	21
3.1.1 Operacionalización de variable . . . . .	21
<b>IV METODOLOGÍA DEL PROYECTO</b>	<b>23</b>
4.1 Diseño Metodológico . . . . .	23
4.2 Método de investigación . . . . .	24
4.3 Población y muestra . . . . .	24

4.4	Lugar de estudio y periodo desarrollado . . . . .	24
4.5	Técnicas e instrumentos para la recolección de información . . . . .	24
4.6	Análisis y procesamiento de datos . . . . .	24
4.7	Aspectos Éticos en Investigación. . . . .	24
4.8	Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa. . . . .	25
4.9	Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental. . . . .	25
<b>V</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>26</b>
5.1	Resultados descriptivos. . . . .	28
5.2	Resultados inferenciales. . . . .	29
5.3	Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis. . . . .	29
<b>VI</b>	<b>DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>30</b>
6.1	Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados . . . . .	30
6.2	Contrastación de los resultados con otros estudios similares. . . . .	31
6.3	Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes. . . . .	31
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>32</b>
	<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>33</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>37</b>

## TABLA DE CONTENIDOS

Tabla 1. Operacionalización de Variables .....	22
Tabla 2. Matriz de consistencias .....	37

## TABLA DE GRÁFICOS

Figura 1.1. Planificación de Movimiento .....	2
Figura 2.1. Trenzas que se pueden componer .....	17
Figura 2.2. Complejidad topológica. ....	19
Figura 5.1. Configuraciones .....	25
Figura 5.2. Ruta de navegación segura en Configuración .....	26
Figura 5.3. Generador de una tres trenzas. ....	26
Figura 5.4. Elemento del grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado. .....	26
Figura 5.5. Ruta de navegación segura inducida por la trenza. ....	27

## RESUMEN

En este trabajo se aplica los algoritmos con teoría de trenzas en el problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot, es decir, para un sistema mecánico conformado por una cantidad finita de robots móviles (por ejemplo veremos para 3 robots) que navegan en cierto ambiente, dado un punto inicial y un punto final para cada robot. Usamos trenzas para diseñar rutas de tal forma que los robots puedan seguir simultáneamente de forma segura, sin colisionar, desde su punto inicial hasta su posición deseada.

## ABSTRACT

In this work we apply the algorithms together with the theory of braids in the motion planning problem of a multi-robot mechanical system, that is, for a mechanical system consisting of a finite number of mobile robots (for example we will see for 3 robots) that navigate in a certain environment, given an initial and final position for each robot, we use braids to design routes that the robots will follow simultaneously and safely, without collisions, from their initial position to desired position.

# INTRODUCCIÓN

El grupo de trenzas, fue introducido en 1947 por [Artin, 1947], donde hace rigurosamente las primeras ideas intuitivas del tratamiento de las trenzas del plano, definido de la siguiente manera:

$$B_n := \{[X_i(Z)] : X_i(Z) \in \beta_n\} = \frac{\beta_n}{S\text{-isotopía}}$$

Siendo:

$$\beta_n := \{X_i(Z) : X_i(Z) \text{ es una } n\text{-trenza}\}$$

De esta manera  $B_n$  junto con la operación de concatenación de trenzas,  $(B_n, \cdot)$ , se le conoce como el grupo de  $n$ -trenzas de Artin.

El grupo de trenzas de Artin fue objeto de estudio de varios trabajos relevantes en la Topología Algebraica, por ejemplo: [Fadell and Van Buskirk, 1961], [Fox and Neuwirth, 1962], [Van Buskirk, 1966], [Birman, 1969], [Birman, 1974].

En [Fox and Neuwirth, 1962], interpretan la definición del grupo de trenzas de Artin como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado del plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  y además extienden esto para definir el grupo de trenzas  $B_n(X)$  y el grupo de trenzas puras  $P_n(X)$  para cualquier espacio topológico  $X$ :

$$B_n(X) := \pi_1 \left( \frac{F(X, n)}{\Sigma_n} \right)$$
$$P_n(X) := \pi_1(F(X, n))$$

Donde:

$$F(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j\},$$

es el espacio de configuraciones ordenado de  $n$  puntos distintos en el espacio topológico  $X$  y  $\Sigma_n$  es el  $n$ -ésimo grupo simétrico.

La definición general que introduce Fox & Neuwirth, motivó a matemáticos para hacer un estudio de los espacios de configuraciones para variedades topológicas véase, [Cohen, 2010], [Arnol'd, 1969], [Segal, 1973], [McDuff, 1975], y [Cohen and Taylor, 1978].

Recientemente, los espacios de configuraciones ordenados son usados en aplicaciones en el área de la robótica, más precisamente, estos espacios son usados en el problema de planificación de movimiento para un sistema multi-robot sin colisiones de una cierta

cantidad finita de robots que se mueven simultáneamente en un cierto espacio topológico, véase los trabajos: [Farber, 2003], [Farber, 2004], [Farber, 2008], [Ghrist, 2001], [Farber et al., 2007], [Farber and Grant, 2009], [Cohen and Farber, 2011], [González and Grant, 2015], [Mas-Ku and Torres-Giese, 2015], [Farber, 2018] e [Ipanaque Zapata and González, 2020].

Es así que, este trabajo consiste en usar trenzas para diseñar algoritmos óptimos, en particular rutas de navegación, para el problema de planificación de movimiento para un sistema mecánico multi-robot, o sea, para un sistema mecánico conformado por una cantidad finita de robots móviles (por ejemplo veremos para 3 robots) que navegan en cierto ambiente.

# I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1. Descripción de la realidad problemática

En el estudio del problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot se construyen algoritmos que den rutas para que los robots puedan navegar de forma segura, sin colisiones entre ellos, desde una posición inicial hasta una posición final (deseada); sin embargo hasta la fecha no se tiene en cuenta en la literatura que utilicen la teoría de trenzas para construir tales algoritmos.

Es así que, este trabajo pretende usar la teoría de trenzas para diseñar nuevos algoritmos en el problema de planificación de movimiento para un sistema mecánico multi-robot, o sea, para un sistema mecánico conformado por una cantidad finita de robots móviles que navegan en cierto ambiente.

## 1.2. Formulación del Problema

### 1.2.1. Problema General

- ¿De qué manera se puede aplicar los algoritmos con teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?

### 1.2.2. Problemas Específicos

- ¿De qué manera se puede llegar a analizar el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?.
- ¿De qué manera se puede llegar a identificar que una  $k$ -trenza se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot conformado por  $k$  robots?.
- ¿De qué manera se puede llegar a aplicar la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General

- Aplicar los algoritmos con teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

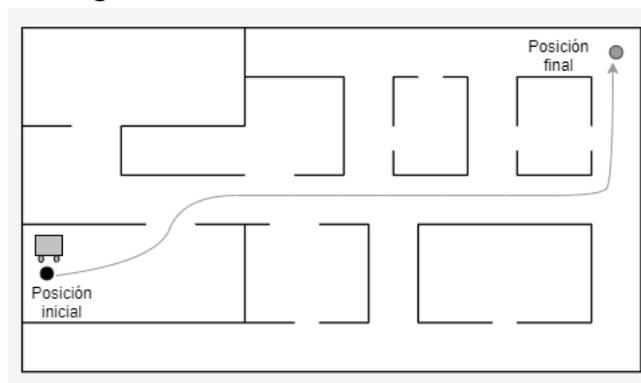
### 1.3.2. Objetivos Específicos

- Analizar el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.
- Identificar que una  $k$ -trenza (en particular para  $k = 3$ ) se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot conformado por  $k$  robots.
- Aplicar la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

## 1.4. Justificación

Sea  $X$  el espacio de estados de un sistema mecánico, por ejemplo un robot que navega en un ambiente (como en la Figura 1.1). En la robótica, el *problema de planificación de movimiento* consiste en encontrar, diseñar un programa computacional (*algoritmo de planificación de movimiento*), el cual planifica el movimiento del robot, o sea, da caminos específicos para que el robot automáticamente pueda navegar desde un estado inicial a cualquier estado deseado (vea Figura 1.1). Naturalmente, la planificación de movimiento depende del espacio topológico  $X$ .

Figura 1.1: Planificación de movimiento



Fuente: Elaboración del Autor

Específicamente, un algoritmo de planificación de movimiento para  $X$  es una aplicación que atribuye a cada par de estados del sistema (estado inicial y estado deseado) un movimiento continuo del sistema empezando en el estado inicial y terminando en el estado deseado. Una condición extra en los algoritmos es que con una pequeña perturbación en el par de estados del sistema resulte en una pequeña perturbación del movimiento del sistema.

El problema de planificación de movimiento tiene muchas aplicaciones industriales, como lo muestra [Farber, 2008], [Desrochers, 2012], [Iagnemma and Dubowsky, 2010], [Ivancevic and Ivancevic, 2005], [Latombe, 2012], en sus trabajos.

Usando herramientas de Topología Algebraica, Michael Farber en su artículo [Farber, 2003] presenta un desenvolvimiento topológico al problema de planificación de movimiento. Desde ese entonces, este problema de planificación de movimiento se torna en una de las áreas más activas de investigación en topología aplicada.

En ese sentido la presente investigación se desarrolla dentro de la topología algebraica, quedando justificado, puesto que podemos observar que una ruta de navegación para un sistema multi-robot conformado por  $k$  robots móviles (por ejemplo veremos para  $k = 3$ ) que navegan en cierto ambiente puede ser visto en particular como una  $k$ -trenza del espacio de estados  $X$ . Resaltamos que en los trabajos [Mas-Ku and Torres-Giese, 2015], [Farber, 2018] y [Ipanaque Zapata and González, 2020] los autores no usan la teoría de trenzas para construir sus algoritmos. De manera que, nuestro trabajo consistirá en usar trenzas para diseñar nuevos algoritmos óptimos, en particular nuevas rutas de navegación, para el problema de planificación de movimiento para un sistema mecánico multi-robot.

## 1.5. Delimitantes de la Investigación

### 1.5.1. Teórica

Debido a la naturaleza del tema no se ha podido encontrar literatura publicada en este enfoque.

### 1.5.2. Temporal

No hay limitación temporal, porque la teoría permanece en el tiempo no se altera.

### 1.5.3. Espacial

No se presentan limitantes espaciales por ser una investigación teórica.

## II. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes

#### 2.1.1. Internacionales

Usando herramientas de Topología Algebraica Farber, M. (2003) [Farber, 2003] menciona: La robótica topológica es una nueva disciplina matemática que estudia problemas topológicos inspirados en la robótica y la ingeniería, así como problemas de robótica que requieren herramientas topológicas. Es parte de una área de investigación más amplia de reciente creación denominada "topología computacional". Este último estudia los problemas topológicos que aparecen en la informática y los problemas algorítmicos en la topología.

Los autores Fox, R. and Neuwirth, L. (1962) [Fox and Neuwirth, 1962] interpretan la definición del grupo de trenzas de Artin como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado del plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  y además extienden esto para definir el grupo de trenzas y el grupo de trenzas puras para cualquier espacio topológico  $X$ .

Los autores Zapata, C. and González, J. (2020) [Ipanaque Zapata and González, 2020] construyen algoritmos para un sistema multi-robot, en particular, dan la ruta que los robots siguen para navegar de forma segura, sin colisiones entre ellos, desde una posición inicial hasta la posición final.

#### 2.1.2. Nacionales

Cerin Soto (2013) [Cerin Soto, 2013]. En su tesis de licenciatura titulada: Representación finita del grupo trenzas puras; señala que el objetivo principal de ésta tesis es presentar el subgrupo de trenzas puras  $P_n$  mediante un número finito de generadores, y asimismo obtener el orden de éste subgrupo y presentar el centro como subgrupo cíclico infinito para  $n > 3$ . En este caso, los grupos de homotopías de los espacios de configuraciones constituyen una herramienta importante para el autor.

Bravo Quispe (2013) [Bravo Quispe, 2013]. En su tesis de licenciatura titulada: Sobre el grupo de trenza para  $RP^2$ . Presentó un estudio básicamente sobre grupos de trenzas de Artin  $B_n$ , además de introducir los espacios de configuraciones  $\mathcal{F}_n(M)$  y  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$  para una variedad topológica  $M$ . En particular para  $M = \mathbb{R}^2$  muestra que los grupos fundamentales de los espacios  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  y  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n$  son isomorfos a los grupos de trenzas puras  $P_n$  y grupos de trenzas de Artin  $B_n$  respectivamente.

## 2.2. Bases teóricas

Con la finalidad de tener una batería amplia de teorías para la resolución de los objetivos en el presente trabajo, se seguirá los siguientes trabajos: [Artin, 1947], [Fox and Neuwirth, 1962], [Kosniowski, 2021], [Farber, 2008], [Farber, 2003], [Ipanaque Zapata and González, 2020], [Zapata and González, 2020] y [Zapata and Pérez, 2021].

**Definición 2.2.1** (Homotopía entre aplicaciones). Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Se dice que  $f$  es *homotópica* a  $g$ , denotado por  $f \simeq g$ , si existe una aplicación continua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ , para cualquier  $x \in X$ .

**Definición 2.2.2** ( $n$ -trenzas). Una  $n$ -trenza o una *trenza con  $n$  cuerdas* es un conjunto de  $n$  cuerdas  $X_i(z) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  sin intersecciones (de ahí,  $X_i(z) \neq X_j(z)$ , con  $i \neq j$ ).

**Definición 2.2.3** (Trenzas y trenzas puras de Artin). El conjunto cociente, mediante la relación de isotopía de  $n$ -trenzas:

$$B_n := \{[X_i(Z)] : X_i(Z) \in \beta_n\} = \frac{\beta_n}{S\text{-isotopia}},$$

siendo:

$$\beta_n := \{X_i(Z) : X_i(Z) \text{ es una } n\text{-trenza}\},$$

junto con la operación de concatenación de trenzas,  $(B_n, \cdot)$ , se le conoce como el *grupo de  $n$ -trenzas de Artin*. Cada clase  $X = [X_i(Z)]$  tiene una permutación  $\sigma_X$  del grupo simétrico  $\Sigma_n$ .

El conjunto de clases que tienen como permutación el elemento identidad de  $\Sigma_n$  es un subgrupo de  $B_n$ , llamado el *grupo de trenzas puras de Artin* y es denotado por  $P_n$ , o sea,

$$P_n = \{X = [X_i(Z)] \in B_n : \sigma_X = 1\},$$

donde  $1 \in \Sigma_n$  es la permutación identidad.

**Teorema 2.2.4.** [Fox and Neuwirth, 1962]

$$\begin{aligned} B_n &\cong \pi_1\left(\frac{F(\mathbb{R}^2, n)}{\Sigma_n}\right), \\ P_n &\cong \pi_1(F(\mathbb{R}^2, n)). \end{aligned}$$

Donde:

$$F(\mathbb{R}^2, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j\},$$

es el espacio de configuraciones ordenado de  $n$  puntos distintos en el espacio topológico  $\mathbb{R}^2$ .

$\Sigma_n$ : Es el  $n$ -ésimo grupo simétrico.

$B_n$ :  $n$ -ésimo grupo de trenzas de Artin.

$P_n$ :  $n$ -ésimo grupo de trenzas puras de Artin.

El problema de planificación de movimiento puede ser formalizado como sigue (ver [Farber, 2003]). Sea  $PX$  el espacio de todos los caminos continuos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  en  $X$ . Denotaremos por:

$$\pi : PX \rightarrow X \times X$$

la aplicación que lleva cualquier camino  $\gamma \in PX$  al par de sus puntos inicial y final,  $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ , donde el espacio de caminos  $PX$  es dotado de la topología compacto-abierta. El problema de planificación de movimiento en  $X$  consiste en encontrar una aplicación (no necesariamente continua)  $s : X \times X \rightarrow PX$  tal que la composición  $\pi \circ s = 1_{X \times X}$  es la aplicación identidad. En ese caso, se dice que  $s$  es un *algoritmo de planificación de movimiento* en  $X$ . Un tal *algoritmo*  $s$  es llamado *continuo* si la aplicación  $s : X \times X \rightarrow PX$  es continua.

Uno de los resultados principales probado por Farber en [Farber, 2003] afirma que existe un algoritmo de planificación de movimiento continuo solamente cuando el espacio de estados es contráctil.

**Teorema 2.2.5.** [Farber, 2003] Existe un algoritmo de planificación de movimiento continuo

$$s : X \times X \rightarrow PX$$

si, y solamente si,  $X$  es contráctil.

Por el Teorema 2.2.5, obtenemos que en un espacio topológico no contráctil, cualquier algoritmo es discontinuo. Por este hecho, Michael Farber en [Farber, 2003] define la complejidad topológica para  $X$ , el cual es un invariante homotópico que mide la complejidad del problema de planificación de movimiento, específicamente, mide la discontinuidad de los algoritmos.

**Definición 2.2.6** (Complejidad topológica). [Farber, 2003] Para  $X$  un espacio topológico, la *complejidad topológica* de  $X$ ,  $TC(X)$ , es el menor entero positivo  $k$  para lo cual

$$X \times X = \bigcup_{i=1}^k U_i,$$

donde  $U_i$  es abierto y existe una aplicación continua  $s_i : U_i \rightarrow PX$  satisfaciendo  $\pi \circ s_i = \text{incl}_{U_i}$ , donde  $\text{incl}_{U_i} : U_i \rightarrow X \times X$  es la aplicación inclusión,  $1 \leq i \leq k$ . Cada  $s_i$  es llamada un *algoritmo de planificación de movimiento local*. En el caso que exista tal  $k$ , denotaremos  $TC(X) = k$ . Caso contrario  $TC(X) = \infty$ .

Note que, la complejidad topológica para un espacio topológico  $X$  es el menor número de algoritmos locales continuos definidos sobre abiertos que cubren  $X \times X$ .

**Teorema 2.2.7.** [Farber, 2003]  $TC(X)$  depende solamente del tipo de homotopia de  $X$ , o sea, si  $X$  es homotópico a  $Y$ , entonces

$$TC(X) = TC(Y).$$

### 2.2.1. Preliminares Algebraicos

**Definición 2.2.8** (Relación). Una *relación* en un conjunto  $X$  es un subconjunto  $R$  de  $X \times X$ . Diremos  $xRy$  si  $(x, y) \in R$ .

**Definición 2.2.9** (Relación de equivalencia). Una relación  $R$  en  $X$  es una *relación de equivalencia* si cumple las tres condiciones siguientes:

- (i)  $xRx, \forall x \in X$  (Reflexiva);
- (ii) si  $xRy$  entonces  $yRx$  (simétrica);
- (iii) si  $xRw$  y  $wRz$  entonces  $xRz$  (Transitiva).

**Definición 2.2.10** (Clase de equivalencia). Sea  $R$  una relación de equivalencia en el conjunto  $X$ . La *clase de equivalencia* de  $x \in X$  es el conjunto

$$[x] = \{y \in X : yRx\}.$$

**OBS 2.1.** Si  $R$  es una relación de equivalencia en  $X$ , entonces cada elemento de  $X$  pertenece exactamente a una clase de equivalencia.

**Definición 2.2.11** (Operación binaria). Una *operación binaria* en un conjunto  $X$  es una aplicación

$$\cdot : X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

**Definición 2.2.12** (Grupo). Un *grupo*,  $(G, \cdot)$ , es un conjunto  $G$  junto con una operación binaria  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  que satisface las tres condiciones siguientes:

- 1) existe un elemento  $1 \in G$ , tal que:  $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g = g, \forall g \in G$  (Elemento neutro);
- 2) para cada  $g \in G$  existe un elemento  $g^{-1} \in G$ , el inverso de  $g$ , tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$  (Elemento inverso);
- 3)  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$  se cumple  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$  (Asociativa).

### 2.2.2. Preliminares Topológicos

**Definición 2.2.13** (Espacios Topológicos). Sea  $X$  un conjunto y  $\tau$  una colección de subconjuntos de  $X$  que cumpla:

- i)  $\phi \in \tau, X \in \tau$
- ii) la intersección de dos miembros de  $\tau$  es de  $\tau$
- iii) la unión de cualquier colección de miembros de  $\tau$  es de  $\tau$ .

El conjunto  $X$  junto con  $\tau$  se llama un *espacio topológico* y se denota por  $(X, \tau)$ , o simplemente,  $\tau$  o  $X$ . Se dice que  $\tau$  es una *topología* en  $X$ . Los miembros  $U \in \tau$  se llaman los *conjuntos abiertos* de  $\tau$ .

**Definición 2.2.14** (Conjunto interior). Para cualquier subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  podemos considerar el mayor conjunto abierto contenido en  $A$ , lo designaremos por  $\text{int}(A)$  y se llama el *interior* de  $A$ , es decir:

$$\text{int}(A) = \bigcup_{U \subseteq A} U, \text{ con } U \text{ abierto.}$$

Note que,  $x_0 \in \text{int}(A)$  si y solo si existe un conjunto abierto  $U \subseteq A$  tal que  $x_0 \in U$ .

**Definición 2.2.15** (Conjunto cerrado). Un subconjunto  $C$  de un espacio topológico  $X$  se dice que es *cerrado* si y solo si  $X \setminus C$  es abierto.

**Teorema 2.2.16.** i)  $\emptyset$  y  $X$  son cerrados.

ii) la unión de dos conjuntos cerrados es cerrado.

iii) la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

**Definición 2.2.17** (Conjunto clausura). Para cualquier subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  podemos considerar el menor conjunto cerrado que contiene a  $A$ , éste conjunto se denota por  $\bar{A}$  y se llama la *adherencia* o *clausura* de  $A$ . Note que,

$$\bar{A} = \bigcap_F F, \text{ con } F \text{ cerrado.}$$

**Lema 2.2.18.** Tenemos que  $x \in \bar{A}$  si y solo si todo conjunto abierto  $U$  que contenga a  $x$ , se cumple  $U \cap A \neq \emptyset$ .

**Definición 2.2.19** (Vecindad). Sea  $X$  un espacio topológico. Un subconjunto  $V \subseteq X$  con  $x \in V$  se dice que es una *vecindad* de  $x$  si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U \subseteq V$ .

**Definición 2.2.20** (Aplicación continua). Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos se dice que es *continua* si la imagen inversa  $f^{-1}(U)$  de todo conjunto abierto  $U$  de  $Y$  es abierto en  $X$ .

**Teorema 2.2.21.** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es continua si, y solo si, para todo subconjunto cerrado  $C$  de  $Y$ , la imagen inversa  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ .

**Teorema 2.2.22.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas, entonces la composición  $h = g \circ f : X \rightarrow Z$  es también continua.

**Teorema 2.2.23** (Lema de pegamento). Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sean  $A$  y  $B$  cerrados en  $X$ , tales que,  $X = A \cup B$ . Supongamos que  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  son funciones continuas, tales que,  $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$ . Entonces la función  $h : X \rightarrow Y$ , definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A; \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

es continua.

**OBS 2.2.** El Teorema 2.2.23 vale para el caso en que  $A$  y  $B$  son abiertos en  $X$ .

**Definición 2.2.24** (Topología inducida). Sea  $S$  un subconjunto de un espacio topológico  $(X, \tau)$ . La *topología inducida* en  $S$  por la topología de  $X$ , denotada por  $\tau_S$ , es la familia de los conjuntos de la forma  $U \cap S$ , para todo conjunto abierto  $U$  de  $X$ , es decir,

$$\tau_S = \{U \cap S : U \in \tau\}.$$

La topología  $\tau_S$  es llamada también *topología relativa* sobre  $S$ .

**Definición 2.2.25** (Homeomorfismo). Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Decimos que  $X$  e  $Y$  son *homeomorfos* si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g = 1_Y$  y  $g \circ f = 1_X$ .

En ese caso, escribiremos  $X \cong Y$  y diremos que  $f$  y  $g$  son homeomorfismos entre  $X$  e  $Y$ .

**Proposición 2.2.26.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo si y solamente si

- i)  $f$  es biyectiva
- ii)  $f$  es continua
- iii) Su inversa  $f^{-1}$  es también continua.

**Lema 2.2.27.**

- i) Si  $S$  es abierto en  $X$ , todo subconjunto abierto de  $S$  con la topología inducida es abierto en  $X$ .
- ii) Si  $S$  es cerrado en  $X$ , todo subconjunto cerrado de  $S$  con la topología inducida es cerrado en  $X$ .

**Definición 2.2.28** (Topología cociente). Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación sobreyectiva de un espacio topológico  $X$  en un conjunto  $Y$ . La *topología cociente* en  $Y$  respecto a  $f$  es la familia

$$\tau_f = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

Note que  $\tau_f$  es la mayor topología en  $Y$  de tal manera que  $f$  sea continua.

**Teorema 2.2.29** (Propiedad del cociente). Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación y supongamos que  $Y$  tiene la topología cociente respecto a  $f$ . Entonces, una aplicación  $g : Y \rightarrow Z$  de  $Y$  en un espacio topológico  $Z$  es continua si y solo si  $g \circ f$  es continua.

**Definición 2.2.30** (Topología producto). Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. El *espacio producto*  $X \times Y$  es el conjunto  $X \times Y$  con la topología

$$\tau_{X \times Y} = \left\{ \bigcup U \times V : U \text{ es abierto en } X \text{ y } V \text{ es abierto en } Y \right\}.$$

**Definición 2.2.31** (Espacio de Hausdorff). Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es de *Hausdorff* si para cualesquier par de puntos  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , existen abiertos  $V_1$  y  $V_2$  de  $X$  tal que  $x_1 \in V_1$ ,  $x_2 \in V_2$  y  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

**Definición 2.2.32** (Cobertura). Una colección  $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$  de subconjuntos de  $X$  es una *cobertura* de  $X$  si

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Una cobertura de  $X$  es llamada *abierta* si los elementos de la cobertura son subconjuntos abiertos de  $X$ .

**Definición 2.2.33** (Espacio compacto). Un espacio topológico  $X$  es *compacto* si, para cualquier  $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$  cobertura abierta de  $X$  existen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in I$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ .

**Definición 2.2.34.** Sea  $Y$  un subespacio del espacio topológico  $X$ . Una colección  $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$  de subespacios de  $X$ , es una *cobertura* de  $Y$  si

$$Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

**Lema 2.2.35.** Sea  $X$  espacio topológico,  $Y \subset X$  subespacio. Tenemos que  $Y$  es compacto si y solo si para cualquier  $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$  cobertura de  $Y$  por abiertos de  $X$ , existen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in I$  tal que  $Y \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ .

**Proposición 2.2.36.** Sea  $X$  un espacio topológico compacto e  $Y$  un subespacio de  $X$ . Si  $Y$  es cerrado, entonces  $Y$  es compacto.

**Proposición 2.2.37.** Sea  $X$  un espacio de Hausdorff. Si  $Y$  es subespacio compacto de  $X$ , entonces  $Y$  es cerrado.

**Ejemplo 2.1.** El intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  es compacto.

**Definición 2.2.38** (Espacio conexo). Un espacio topológico  $X$  es *conexo* si los únicos subconjuntos de  $X$  que son abiertos y cerrados a la vez son  $\emptyset$  y  $X$ .

**Teorema 2.2.39.** Un espacio topológico  $X$  es conexo si y solo si  $X$  no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de  $X$ .

**Definición 2.2.40** (Camino). Un *camino* en  $X$  es una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$ . El punto  $f(0)$  se llama *origen* del camino y el punto  $f(1)$  se llama *final* del camino. Decimos que  $f$  es un camino de  $f(0)$  a  $f(1)$  (algunos autores usan el termino Arco en lugar de camino).

**OBS 2.3.** Camino es la aplicación y no la imagen  $f([0, 1])$ . La imagen se llama *curva* en  $X$ .

**Lema 2.2.41.**

- a) Si  $f$  es un camino en  $X$  y  $\overleftarrow{f}$  está definido por  $\overleftarrow{f}(t) = f(1-t)$  para  $t \in [0, 1]$ , entonces  $\overleftarrow{f}$  es también un camino.
- b) Si  $f$  y  $g$  son dos caminos en  $X$  tales que el punto final de  $f$  coincide con el origen de  $g$ , la función  $f * g : [0, 1] \rightarrow X$  definida por:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es un camino. Tal camino  $f * g$  es conocido como el producto o concatenación de los caminos  $f$  y  $g$ .

**Definición 2.2.42.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es *conexo por caminos* o *arco-conexo* si dados dos puntos cualesquiera  $x_0, x_1 \in X$  existe un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ .

**Ejemplo 2.2.**  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es arco-conexo.

**Teorema 2.2.43.** La imagen de un espacio arco-conexo por una aplicación continua es arco-conexo.

**Corolario 2.2.44.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos homeomorfos. Tenemos que  $X$  es arco-conexo si y solo si  $Y$  es arco-conexo.

### 2.2.3. Preliminares de Topología Algebraica

**Definición 2.2.45.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Se dice que  $f$  es *homotópica* a  $g$ , denotado  $f \simeq g$ , si y solo si existe una aplicación continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in X, \\ H(x, 1) &= g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

A la aplicación  $H$  se le denomina *homotopía* de  $f$  a  $g$ , denotado por  $H : f \simeq g$ .

Sea  $\text{Map}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es una aplicación continua}\}$  el conjunto de todas las aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$ .

**Proposición 2.2.46.** La relación  $\simeq$  es una relación de equivalencia en el conjunto  $\text{Map}(X, Y)$ .

Esta relación de equivalencia  $\simeq$  divide al conjunto  $\text{Map}(X, Y)$  en clases de equivalencia denominadas *clases de homotopía* (de aplicaciones). El conjunto cociente, es denotado por:

$$[X, Y] = \frac{\text{Map}(X, Y)}{\simeq},$$

y conocido como el *conjunto de clases de homotopía*.

**Definición 2.2.47.** Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia homotópica* si existe una aplicación continua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq 1_X$  y  $f \circ g \simeq 1_Y$ . Tal  $g$  es llamada *inversa homotópica* de  $f$ .

Se dice que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son *homotópicos* o *del mismo tipo de homotopía*, denotado  $X \simeq Y$ , si existe una equivalencia homotópica  $f : X \rightarrow Y$ .

**Definición 2.2.48** (Homotopía relativa). Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas y  $A \subset X$ . Se dice que  $f$  es *homotópica a  $g$  relativo a  $A$* , denotado  $f \simeq g \text{ rel } A$ , si existe una aplicación continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in X; \\ H(x, 1) &= g(x), \quad \forall x \in X; \\ H(a, t) &= f(a), \quad \forall a \in A, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tal aplicación  $H$  se denomina *homotopía relativa  $f$  a  $g$  respecto de  $A$* , denotado por  $H : f \simeq g \text{ rel } A$ .

**OBS 2.4.** Si  $f \simeq g \text{ rel } A$  entonces  $f(a) = g(a), \forall a \in A$ .

**Proposición 2.2.49.** La relación  $\simeq \text{ rel } A$  es una relación de equivalencia en el conjunto  $\text{Map}(X, Y)$ .

Esta relación de equivalencia  $\simeq \text{ rel } A$  divide al conjunto  $\text{Map}(X, Y)$  en clases de equivalencia denominadas *clases de homotopía relativa* y el conjunto cociente es denotado por

$$[X, Y]_A = \frac{\text{Map}(X, Y)}{\simeq \text{ rel } A},$$

y conocido como el *conjunto de clases de homotopía relativa*.

**OBS 2.5.** Note que  $[X, Y]_\emptyset = [X, Y]$ .

Recordemos del Lema 2.2.41, que si  $f$  y  $g$  son dos caminos en  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , entonces el producto de  $f$  y  $g$  es el camino  $f * g$  definido por:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Definición 2.2.50.** Un *espacio topológico con punto base* es un par  $(X, x_0)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . En ese caso se dice que  $X$  es un *espacio topológico punteado con punto base  $x_0$* .

**Definición 2.2.51.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico con punto base. El *espacio de lazos* de  $X$  basado en  $x_0$  está dado por:

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in \text{Map}([0, 1], X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

**Definición 2.2.52.** Para  $X$  un espacio punteado con punto base  $x_0$  consideremos el conjunto de clases de homotopía:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega(X, x_0)}{\simeq \text{rel } \{0, 1\}}.$$

Note que la multiplicación de caminos  $*$  en  $\Omega(X, x_0)$  induce una operación binaria en  $\pi_1(X, x_0)$ , osea, induce una aplicación de la forma:

$$\begin{aligned} * : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \Omega(X, x_0) \\ ([\lambda], [\alpha]) &\longmapsto *([\lambda], [\alpha]) = [\lambda * \alpha] \end{aligned}$$

**Teorema 2.2.53.** Para  $(X, x_0)$  un espacio topológico con punto base, tenemos que el par

$$(\pi_1(X, x_0), *)$$

es un grupo, con elemento neutro la clase de homotopía del camino constante  $[\overline{x_0}]$  y para cada clase  $[\alpha]$  su inverso es la clase del camino inverso  $[\overleftarrow{\alpha}]$ .

**Teorema 2.2.54.** Sean  $x_0, x_1 \in X$ . Si existe un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ , entonces los grupos  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_1)$  son isomorfos.

**Definición 2.2.55.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua. Un conjunto abierto  $U$  en  $B$  se dice que está *regularmente cubierto* si su imagen inversa

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i,$$

donde los  $V_i$  son abiertos disjuntos de  $E$  tal que la restricción  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  es un homeomorfismo, para cada  $i \in I$ .

**Definición 2.2.56** (Aplicación cubriente). Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua. Diremos que  $p$  es una *aplicación cubriente* o *de recubrimiento* si para cada  $b \in B$  existe un abierto  $V_b$  de  $b$  en  $B$  que está regularmente cubierto por  $p$ .

**OBS 2.6.** Si  $p : E \rightarrow B$  es un recubrimiento, entonces  $p$  es sobreyectivo. El espacio topológico  $E$  es conocido como *espacio total* y  $B$  es conocido como el *espacio base*. También se dice que  $E$  es un recubrimiento para  $B$ . Al subespacio  $p^{-1}(b)$ , con  $b \in B$ , se denomina la fibra respecto a  $b \in B$ . En el caso que,  $b_0 \in B$  sea el punto base, entonces  $F = p^{-1}(b_0)$  es llamado la *fibra* de  $p$ .

**Definición 2.2.57** ( $G$ -espacio). Sea  $G$  un grupo y  $X$  un espacio topológico, decimos que  $X$  es un  $G$ -espacio si existe una aplicación  $\varphi : G \times X \rightarrow X$  tal que:

- i)  $\varphi(e, x) = x, \forall x \in X$ . Donde  $e$  denota la identidad del grupo  $G$ .
- ii)  $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x), \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ .
- iii) Para cada  $g \in G$  la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\rightarrow X \\ x &\longmapsto \varphi_g(x) = \varphi(g, x) \end{aligned}$$

es continua.

Tal aplicación  $\varphi$  se le llama una *acción* de  $G$  sobre  $X$ . Se dice también que  $G$  *actúa* sobre  $X$ .

**OBS 2.7.** Si  $\varphi : G \times X \rightarrow X$  es una acción de  $G$  sobre  $X$ , para cada  $g \in G$ , la aplicación  $\varphi_g$  es un homeomorfismo con inversa  $\varphi_{g^{-1}}$ .

**OBS 2.8.** Toda acción  $\varphi : G \times X \rightarrow X$  induce una relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$  de la siguiente manera: Para  $x, y \in X$ ,  $x \sim y$  si existe  $g \in G$  tal que  $y = \varphi(g, x)$ . El conjunto cociente es denotado por  $\frac{X}{G}$  y es conocido como el *espacio de órbitas*. Cada clase de equivalencia  $[x]$  es llamada la *órbita* de  $x \in X$ .

La aplicación al cociente  $q : X \rightarrow \frac{X}{G}$ ,  $q(x) = [x]$ , induce la topología cociente  $\tau_q$  sobre  $\frac{X}{G}$ . Recordemos que  $\tau_q = \{U \subset \frac{X}{G} : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ .

**Proposición 2.2.58.** Sea  $X$  un  $G$ -espacio. La proyección al cociente  $q : X \rightarrow \frac{X}{G}$  es una aplicación abierta, o sea,  $q(V)$  es abierto en  $\frac{X}{G}$  para cada abierto  $V$  en  $X$ .

**Definición 2.2.59.** Decimos que una acción  $\varphi$  de  $G$  sobre  $X$  es *propiamente discontinua* si, para cada  $x \in X$ , existe un abierto  $V_x$  de  $x$  en  $X$  tal que  $\varphi_g(V_x) \cap \varphi_h(V_x) = \emptyset$ ,  $\forall g, h \in G$ , con  $g \neq h$ .

**OBS 2.9.** La condición  $\varphi_g(V_x) \cap \varphi_h(V_x) = \emptyset$ ,  $\forall g, h \in G$ , con  $g \neq h$  es equivalente a  $\varphi_g(V_x) \cap V_x = \emptyset$ ,  $\forall g \in G$ , con  $g \neq e$ .

**Proposición 2.2.60.** Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Si la acción de  $G$  sobre  $X$  es *propiamente discontinua*, entonces la aplicación proyección al cociente  $q : X \rightarrow \frac{X}{G}$  es una aplicación de recubrimiento.

## 2.2.4. Espacio de Configuraciones

Sea  $M$  un conjunto no vacío. Para  $k \geq 1$  se define el siguiente conjunto,

$$\text{Conf}(M, k) = \{(m_1, \dots, m_k) \in M^k : m_i \neq m_j, \forall i \neq j\} \subseteq M^k.$$

Donde  $M^k = M \times \dots \times M$  ( $k$ -veces) es el  $k$ -ésimo producto cartesiano de  $M$ .

**Definición 2.2.61** (Espacio de configuraciones ordenado). Sea  $M$  un espacio topológico y  $k \geq 1$ . El conjunto  $\text{Conf}(M, k)$  es un subespacio (con la topología relativa) de  $M^k$ . El cual es denominado *el espacio de configuraciones ordenado* de  $k$ -puntos distintos en  $M$ .

**Ejemplo 2.3.**

- $\text{Conf}(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

- $\text{Conf}(S^n, 2) \simeq S^n$ , para cada  $n \geq 1$ .
- $\text{Conf}(G, k+1) \cong G \times \text{Conf}(G - \{e\}, k)$ , para cualquier grupo topológico  $G$ .

**Proposición 2.2.62.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Si  $X \cong Y$ , entonces

$$\text{Conf}(X, k) \cong \text{Conf}(Y, k),$$

para cada  $k \geq 1$ .

Sea  $\Sigma_k$  el grupo de permutaciones de  $\{1, \dots, k\}$ . Tenemos que  $\Sigma_k$  actúa sobre  $\text{Conf}(M, k)$  mediante la acción  $\varphi : \Sigma_k \times \text{Conf}(M, k) \rightarrow \text{Conf}(M, k)$  dada por

$$\varphi(\sigma, (m_1, \dots, m_k)) = (m_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, m_{\sigma^{-1}(k)}).$$

**Definición 2.2.63** (Espacios de configuraciones no ordenados). El espacio de configuraciones no ordenado de  $k$  puntos distintos en  $M$ , denotado por  $\text{UConf}(M, k)$ , está dado por el espacio cociente

$$\text{UConf}(M, k) = \frac{\text{Conf}(M, k)}{\Sigma_k}.$$

## 2.2.5. Teoría de trenzas

En esta sección usaremos la notación de [Zapata, 2014].

**Definición 2.2.64** (Cuerda). Una *cuerda* es el subconjunto  $\{(X(z), z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$  donde  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una aplicación continua tal que existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con

$$\begin{aligned} X(z) &= X^+, \forall z \geq b; \\ X(z) &= X^-, \forall z \leq a. \end{aligned}$$

En ese caso, se dice que  $X$  es una cuerda y  $X^+, X^-$  son llamados los *extremos de la cuerda*.

**Definición 2.2.65** ( $n$ -trenza). Una  $n$ -trenza es un conjunto de  $n$  cuerdas  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sin intersecciones, osea,  $X_i(z) \neq X_j(z)$ , con  $i \neq j$ , para cada  $z \in \mathbb{R}$ .

**Definición 2.2.66** ( $S$ -isotopía). Dos  $n$ -trenzas  $X_i, Y_i$ , son llamados *fuertemente isotópicas* o  $S$ -isotópicas si existen  $n$  funciones continuas  $H_i : \mathbb{R} \times [c_i, d_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con las siguientes propiedades:

1. La colección  $\{H_i(-, t)\}_{i=1}^n$  es una  $n$ -trenza, para cada  $t \in [c_i, d_i]$ .
2.  $H_i(z, c_i) = X_i(z)$  y  $H_i(z, d_i) = Y_i(z)$ , para cada  $z \in \mathbb{R}$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Denotemos por

$$\beta_n = \{X = \{X_i\}_{i=1}^n : \text{donde } X \text{ es una } n\text{-trenza}\}.$$

**Teorema 2.2.67.** *La relación  $S$ -isotopía es una relación de equivalencia en el conjunto  $\beta_n$ .*

**Teorema 2.2.68.** *Sea  $g : \mathbb{R} \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua tal que*

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g_s(z) = +\infty$$

y

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} g_s(z) = -\infty,$$

para cada  $s \in [c, d]$ . Donde,  $g_s(z) = g(z, s)$ , para cada  $z \in \mathbb{R}$ .

Si  $X \in \beta_n$  entonces  $X \circ g(-, s) \in \beta_n$ , para cada  $s \in [c, d]$  y son todas  $S$ -isotópicas a  $X$ .

**Corolario 2.2.69.** *Sea  $X$  una  $n$ -trenza y  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua tal que*

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} H(z) = +\infty$$

y

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} H(z) = -\infty.$$

Entonces, las  $n$ -trenzas  $X$  y  $X \circ H$  son  $S$ -isotópicas.

**Corolario 2.2.70.** *Una  $n$ -trenza  $X$  es  $S$ -isotópica a  $X \circ T_a$ , para cualquier  $a \in \mathbb{R}$ . Donde  $T_a(z) = z + a, \forall z \in \mathbb{R}$ .*

**Corolario 2.2.71.** *Una  $n$ -trenza  $X$  es  $S$ -isotópica a  $X \circ T_a^*$ , para cualquier  $a \in \mathbb{R}$ . Donde  $T_a^*(z) = |z| + a, \forall z \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 2.2.72.** Se dice que dos  $n$ -trenzas  $X = \{X_i\}_{i=1}^n$  y  $Y = \{Y_i\}_{i=1}^n$  se pueden componer si  $\{Y_i^+\}_{i=1}^n = \{X_i^-\}_{i=1}^n$ .

Sean  $X = \{X_i\}_{i=1}^n$  y  $Y = \{Y_i\}_{i=1}^n$  dos  $n$ -trenzas que se pueden componer. Considere  $a$  y  $b$  tales que

$$\begin{aligned} X_i(z+a) &= X^-, \forall z \geq 0; \\ Y_i(z+a) &= Y^+, \forall z \leq 0. \end{aligned}$$

Definamos la  $n$ -trenza producto  $X * Y = \{(X * Y)_i\}_{i=1}^n$ , donde,

$$(X * Y)_i(z) = \begin{cases} X_i(z+a), & z \geq 0; \\ Y_i(z+a), & z \leq 0. \end{cases}$$

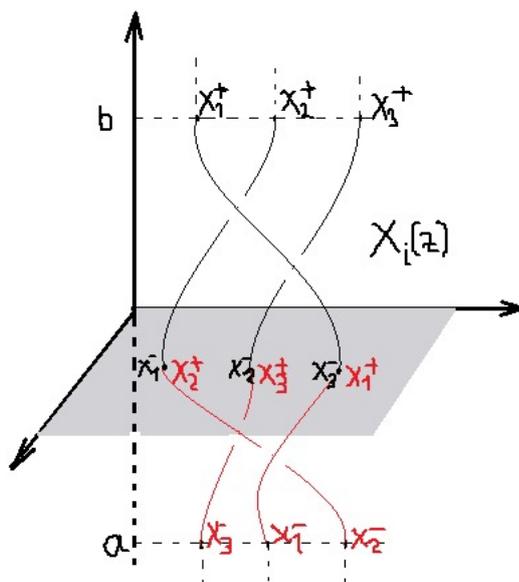
Sea  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \text{Conf}(\mathbb{R}^2, n)$  y consideremos  $\beta_n^p = \{X = \{X_i\}_{i=1}^n \in \beta_n : \{X_i^+\}_{i=1}^n = \{X_i^-\}_{i=1}^n = \{p_i\}_{i=1}^n\}$ . Note que cualesquier  $X, Y \in \beta_n^p$  se pueden componer. Consideremos también el conjunto cociente

$$B_n = \frac{\beta_n^p}{S\text{-isotopía}}.$$

Tenemos que el producto  $*$  induce una operación binaria en  $B_n$ :

$$\begin{aligned} * : B_n \times B_n &\rightarrow B_n \\ ([X], [Y]) &\mapsto *([X], [Y]) = [X * Y]. \end{aligned}$$

Figura 2.1: Trenzas que se pueden componer.



Fuente: Elaborado por el autor

**Proposición 2.2.73.** El par  $(B_n, *)$  es un Grupo.

El grupo  $(B_n, *)$  es conocido como el  $n$ -ésimo grupo de trenzas de Artin. A cuyos elementos se le denomina trenzas. Esto es, trenzas es una clase de  $n$ -trenzas.

**OBS 2.10.** Note que, si  $[X] \in B_n$ , entonces existe una única permutación  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que

$$\begin{aligned} X_i(z) &= p_i, & \forall z \geq b; \\ X_i(z) &= p_{\sigma(i)}, & \forall z \leq a. \end{aligned}$$

$\sigma$  es llamado la *permutación* de la trenza  $[X] \in B_n$ . Denotada también por  $\sigma = \sigma_X = \sigma_{[X]}$ .

Definamos la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi : B_n &\rightarrow \Sigma_n \\ [X] &\mapsto \psi[X] = \sigma_X. \end{aligned}$$

**Proposición 2.2.74.** Tenemos que  $\psi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  es un epimorfismo de grupos.

**Definición 2.2.75.** Se define el *grupo de  $n$ -trenzas puras* de Artin, denotado por  $P_n$ , como el núcleo del epimorfismo  $\psi : B_n \rightarrow \Sigma_n$ , o sea,

$$P_n = \text{Ker}(\psi).$$

Note que,  $\text{Ker}(\psi) = \{[X] \in B_n : \sigma_X = 1\}$ , donde  $1 \in \Sigma_n$  es la permutación identidad.

**Teorema 2.2.76** (Isomorfismo de Fox-Neuwirth). Para  $k \geq 1$ , existen los siguientes isomorfismos de grupos:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{R}^2, k)) &\rightarrow P_k \\ [\gamma] &\mapsto \varphi[\gamma] = [X_i] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(U\text{Conf}(\mathbb{R}^2, k)) &\rightarrow B_k \\ [\gamma] &\mapsto \psi[\gamma] = [X_i] \end{aligned}$$

## 2.2.6. Complejidad Topológica

En esta sección vamos usar el trabajo [Zapata and Pérez, 2021].

**Definición 2.2.77** (Sección transversal). Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Llamamos una *sección transversal local* de  $f$  sobre  $U \subset Y$  a una aplicación  $s : U \rightarrow X$  de modo que  $f \circ s = \text{incl}_U$ , donde  $\text{incl}_U : U \rightarrow Y$  denota la aplicación inclusión. Si  $U = Y$  entonces se dirá simplemente una *sección transversal* en lugar de sección transversal local sobre  $Y$ .

Para  $X$  un espacio topológico, consideremos la aplicación  $e : \text{Map}([0, 1], X) \rightarrow X \times X$  dada por:

$$e(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)).$$

**Definición 2.2.78.** Un *algoritmo de planificación* de movimiento en  $X$  es una sección transversal de la aplicación  $e$ .

Un espacio topológico  $X$  es llamado *contráctil* si la aplicación identidad  $1_X$  es homotópica a una aplicación constante  $\bar{x}_0 : X \rightarrow X$ ,  $\bar{x}_0(x) = x_0, \forall x \in X$ .

**Lema 2.2.79.** Un algoritmo de planificación de movimiento continuo en  $X$  existe si y solo si el espacio topológico  $X$  es contráctil.

**Definición 2.2.80.** La *complejidad topológica* de un espacio topológico  $X$ , denotado por  $\text{TC}(X)$ , es el menor entero positivo  $n$  tal que el producto cartesiano  $X \times X$  puede ser cubierto por  $n$  subconjuntos abiertos:

$$X \times X = U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

de modo que, para cada  $i = 1, \dots, n$ , existe un algoritmo local continuo  $s_i : U_i \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)$ , osea,  $e \circ s_i = \text{incl}_{U_i}$ . Si tal  $n$  no existe entonces escribiremos  $\text{TC}(X) = \infty$ .

Note que toda colección  $\{s_i : U_i \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)\}_{i=1}^k$ , donde cada  $U_i \subset X \times X$  es subconjunto abierto y  $e \circ s_i = \text{incl}_{U_i}$  y  $X \times X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ , induce un algoritmo de planificación de movimiento en  $X$ , dado por  $s : X \times X \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)$ , con  $s(x, y) = s_i(x, y)$ , donde  $i$  es el menor índice de los abiertos  $U_i$  tal que  $(x, y) \in U_i$ . En ese caso escribiremos  $s = \{s_i : U_i \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)\}_{i=1}^k$ .

Se dice que un algoritmo  $s = \{s_i : U_i \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)\}_{i=1}^k$  es *óptimo* si  $k = \text{TC}(X)$ .

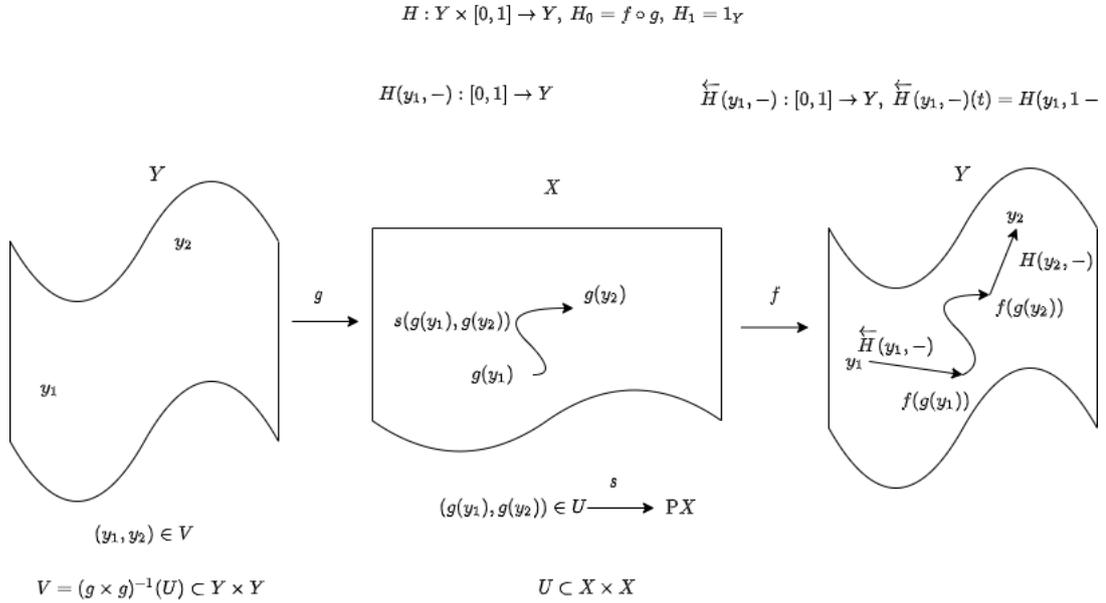
**Proposición 2.2.81.** Si existen aplicaciones continuas  $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$  tal que  $f \circ g \simeq 1_Y$ , entonces las complejidades topológicas satisfacen la siguiente desigualdad,

$$\text{TC}(X) \geq \text{TC}(Y).$$

En particular, si  $X$  y  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, entonces  $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$ .

**Prueba.** Ver el esquema de la Figura 2.2

Figura 2.2: Complejidad topológica.



Fuente: Elaborado por el autor



**Proposición 2.2.82.** [González and Grant, 2015] Para  $d \geq 2$  y  $k \geq 2$ , tenemos:

$$TC(\text{Conf}(\mathbb{R}^d, k)) = \begin{cases} 2k - 1, & \text{si } d \text{ es impar;} \\ 2k - 2, & \text{si } d \text{ es par.} \end{cases}$$

## 2.3. Marco Conceptual

Denotaremos por:

$$e : \text{Map}([0, 1], X) \rightarrow X \times X$$

la aplicación que lleva cualquier camino  $\gamma \in \text{Map}([0, 1], X)$  al par de sus puntos inicial y final,  $e(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ , donde el espacio de caminos  $\text{Map}([0, 1], X)$  es dotado de la topología compacto-abierta. El problema de planificación de movimiento en  $X$  consiste en encontrar una aplicación (no necesariamente continua)  $s : X \times X \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)$  tal que la composición  $e \circ s = 1_{X \times X}$  es la aplicación identidad. En ese caso, se dice que  $s$  es un *algoritmo de planificación de movimiento* en  $X$ . Un tal *algoritmo*  $s$  es llamado *continuo* si la aplicación  $s : X \times X \rightarrow \text{Map}([0, 1], X)$  es continua.

Este  $\text{Map}([0, 1], \text{Conf}(\mathbb{R}^2, n))$  será identificado por las trenzas, para lo cual se aplicará

el resultado del teorema de [Fox and Neuwirth, 1962],

$$\begin{aligned} B_n &\cong \pi_1 \left( \frac{F(\mathbb{R}^2, n)}{\Sigma_n} \right), \\ P_n &\cong \pi_1 (F(\mathbb{R}^2, n)). \end{aligned}$$

## 2.4. Definición de términos básicos

A continuación, daremos algunas definiciones que nos servirán como base para el desarrollo de esta investigación.

**Definición 2.4.1** (Homotopía entre lazos). Sean  $\lambda, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  lazos basados en  $x_0$ , o sea,  $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$  y  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . Se dice que  $\lambda$  es *homotópico* a  $\gamma$  relativo  $\{0, 1\}$ , denotado  $f \simeq g \text{ rel } \{0, 1\}$ , si y solo si, existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  aplicación continua tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x), & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x), & \forall x \in X \\ H(0, t) &= H(1, t) = x_0, & \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

A la aplicación  $H$  se denomina *homotopía* de  $\lambda$  a  $\gamma$  relativo  $\{0, 1\}$ , denotado  $H : f \simeq g \text{ rel } \{0, 1\}$ .

Para  $(X, x_0)$  un espacio punteado. Su *espacio de lazos* punteado es el conjunto

$$\Omega(X, x_0) = \{\lambda : [0, 1] \rightarrow X \mid \lambda \text{ continua tal que } \lambda(0) = \lambda(1) = x_0\}.$$

La relación de homotopía  $\simeq \text{ rel } \{0, 1\}$  es una relación de equivalencia en el espacio de lazos  $\Omega(X, x_0)$ .

**Definición 2.4.2** (Grupo fundamental). Sea  $X$  un espacio punteado con punto base  $x_0$ . Se define el *grupo fundamental* para  $(X, x_0)$ , denotado  $\pi_1(X, x_0)$ , dado por el conjunto cociente:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\Omega(X, x_0)}{\simeq \text{ rel } \{0, 1\}}.$$

**Definición 2.4.3** (Espacios de configuraciones ordenados). Sea  $X$  un espacio topológico. Para  $k \geq 1$ , el *espacio de configuraciones ordenado* de  $k$  puntos en  $X$  es el subespacio  $\text{Conf}(X, k)$  del producto  $X^k$ , dado por:

$$\text{Conf}(X, k) =: \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k : x_i \neq x_j, \forall i \neq j\} \subseteq X^k,$$

donde  $X^k = X \times \dots \times X$  ( $k$ -veces) es el  $k$ -ésimo producto cartesiano de  $X$ .

## III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

### 3.1. Hipótesis

#### Hipótesis General

- Si se aplica los algoritmos con teoría de Trenzas entonces se obtendrán nuevas rutas de navegación para el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

#### Hipótesis Específicas

- Si se estudia la teoría de trenzas desde un punto de vista geométrico entonces se analiza el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.
- Si se estudia el isomorfismo de Fox-Neuwirth entonces se identifica que una  $k$ -trenza se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.
- Si se diseña una ruta de navegación usando una trenza entonces se aplica la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

#### 3.1.1. Operacionalización de variable

##### Definición conceptual de variables

##### Variable dependiente(D)

- Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot: Problema de la Robótica que consiste en planificar el movimiento simultáneo y sin colisiones para una cantidad finita de robots.

##### Variable independiente(I)

- Teoría de Trenzas: Es una rama de la topología algebraica que estudia la estructura algebraica de dos o mas cuerdas que se entrecruzan pero sin intersecciones a menos de isotopia.

##### Definición operacional de variables

**Tabla 1.** Operacionalización de Variables.

<b>VARIABLES</b>	<b>DIMENSIONES</b>	<b>INDICADORES</b>	<b>MÉTODO</b>	<b>TÉCNICA</b>
<b>D</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sección transversal.</li> <li>Soluciones débiles</li> <li>2. Función algorítmica.</li> <li>3. El espacio de los caminos continuos.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Inversa a derecha.</li> <li>2. La función evaluación.</li> <li>3. Espacios de funciones.</li> </ol>	Método de síntesis bibliográfica	<p>Sistematización bibliográfica, se priorizaron en la elaboración de este trabajo la realización de documentos cualitativos, la revisión de bibliografía especializada y el trabajo con equipos de investigación, esto permitió de buena manera aplicar métodos relacionados a los criterios establecidos en cuestión de análisis de las variables y la realización de los objetivos.</p>
<b>I</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trenzas geométricas.</li> <li>2. Espacios de configuración.</li> <li>3. Teorema de isomorfismo de R.Fox and Neuwirth.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>n</math> Cuerdas.</li> <li>2. Espacios de configuraciones ordenado y no ordenado.</li> <li>3. Grupo fundamental.</li> </ol>		

*Fuente:* Elaboración Propia del Autor

## IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

### 4.1. Diseño Metodológico

#### Tipo de investigación

El presente trabajo de investigación es de tipo básica, pura o fundamental.

Según el problema propuesto y los objetivos planteados en nuestro proyecto; nuestro enfoque de investigación sera cuantitativo. Según, [Hernández-Sampieri and Torres, 2018]:

El enfoque cuantitativo (que representa, como dijimos, un conjunto de procesos) es secuencial y probatorio. Cada etapa precede a la siguiente y no podemos “brincar” o eludir pasos.<sup>3</sup> El orden es riguroso, aunque desde luego, podemos redefinir alguna fase. Parte de una idea que va acotándose y, una vez delimitada, se derivan objetivos y preguntas de investigación, se revisa la literatura y se construye un marco o una perspectiva teórica. De las preguntas se establecen hipótesis y determinan variables; se traza un plan para probarlas (diseño); se miden las variables en un determinado contexto; se analizan las mediciones obtenidas utilizando métodos estadísticos, y se extrae una serie de conclusiones.(p.4)

#### Diseño de investigación

No experimental.

- Daremos inicio presentando definiciones y algunos resultados elementales de topología algebraica tales como, homotopía de caminos, grupo fundamental, etc. Así mismo mostraremos la definición y resultados básicos de los espacios de configuraciones: ordenados y no ordenados.
- En segundo lugar, introduciremos las ideas intuitivas de la teoría de trenzas y sus resultados principales desde el enfoque geométrico: grupo de trenzas y trenzas puras.
- En tercer lugar, mostraremos el resultado importante de la relación de las trenzas, espacios de configuraciones y el grupo fundamental en el teorema de Fox and Neuwirth.
- En cuarto lugar revisaremos los resultados con respecto a los algoritmos para el problema de planificación de movimiento un sistema multi-robot: inversa a derecha y sección transversal; espacio de funciones, espacios de caminos continuos y función evaluación.
- Seguidamente presentamos los resultados que los autores muestran con respecto a los algoritmos para el problema de planificación de movimiento de un sistema multi-robot de robots móviles que navegan en un espacio euclidiano: La existencia de una ruta de navegación segura en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$ .
- Finalmente aplicaremos todo lo anterior para los resultados de nuestro objetivo principal, aplicar algoritmos con teoría de trenzas para el problema de planificación

de movimiento de un sistema mecánico multi-robot llegando al resultado siguiente: Usando teoría de trenzas podemos diseñar una ruta de navegación segura en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$ .

## 4.2. Método de investigación

El método de investigación es básico teórico

## 4.3. Población y muestra

No se aplica para este tipo de proyecto

## 4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

El lugar de estudio es entendido como todo espacio físico, exento de ruidos y otras distracciones, que aporte en la realización de un trabajo, en este caso la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca especializada.

## 4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de información

No se aplica para este tipo de proyecto

## 4.6. Análisis y procesamiento de datos

Debido que la investigación es teórica, no se aplica el análisis y procesamiento de datos.

## 4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

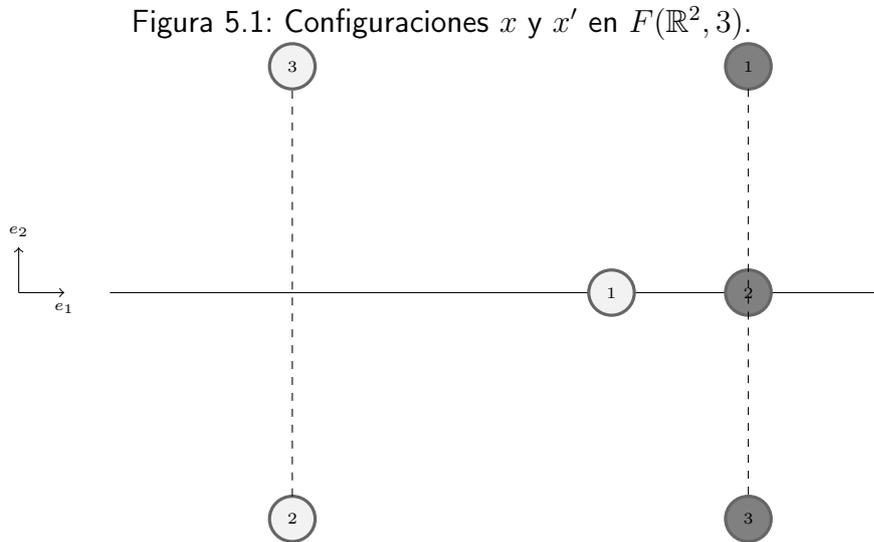
## V. RESULTADOS

Antes de iniciar con el Teorema Principal, veamos los siguientes resultados:

**Teorema 5.0.1.** [Ipanaque Zapata and González, 2020] *Se pueden construir algoritmos óptimos explícitos en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^d, k)$ .*

En particular del Teorema 5.0.1 tenemos el siguiente enunciado.

**Proposición 5.0.2.** *Dado dos configuraciones  $x = (x_1, x_2, x_3), x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  como muestra la Figura 5.1, donde  $x_i$  representa la esfera  $i$  de color claro y  $x'_i$  representa la esfera  $i$  de color oscuro. Entonces existe una ruta de navegación segura en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$ .*



Fuente: Elaborado por el autor, adaptado de [Ipanaque Zapata and González, 2020].

**Prueba.** De [Ipanaque Zapata and González, 2020] tenemos la ruta de navegación presentada en la Figura 5.2. ■

A continuación presentamos el resultado buscado:

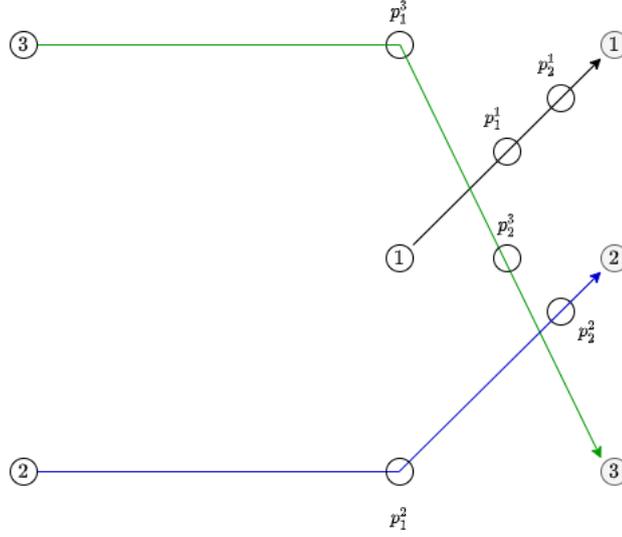
**Teorema 5.0.3 (Teorema Principal).** *Dado dos configuraciones  $x = (x_1, x_2, x_3), x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  como muestra la Figura 5.1, donde  $x_i$  representa la esfera  $i$  de color claro y  $x'_i$  representa la esfera  $i$  de color oscuro. Entonces usando teoría de trenzas podemos diseñar una ruta de navegación segura en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$ .*

**Prueba.** Consideremos la trenza  $\sigma_1\sigma_2 \in B_3$ , como muestra la Figura 5.3. Note que, por el Teorema de Fox and Neuwirth, la trenza  $\sigma_1\sigma_2$  equivale a un elemento en  $\pi_1(\text{UConf}(\mathbb{R}^2, 3))$ , como muestra la Figura 5.4.

La trenza  $\sigma_1\sigma_2$  induce una ruta de navegación segura  $\Gamma$  en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$ . Como muestra la Figura 5.5. Donde,  $p_i^j$  con  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2, 3$ , denota un  $i$  punto fijado



Figura 5.5: Ruta de navegación segura inducida por la trenza  $\sigma_1\sigma_2$ .



Fuente: Elaboración propia del autor.

sobre la ruta del  $j$ -ésimo robot. Aquí  $i$  va desde 1 hasta el número de generadores que forman la trenza  $\sigma_1\sigma_2$ , que en este caso tenemos dos generados  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Estos  $p_i^j$  son fijados de acuerdo a los generadores  $\sigma_i$  de tal manera que los robots puedan navegar sin colisiones entre ellos de forma lineal por partes (vea la Figura 5.5).

Consideremos la ruta de navegación  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  como la concatenación de los caminos  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ , donde  $\Gamma_i : [0, 1] \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  está dado por:

$$\Gamma_i(t) = ((1-t)p_i^1 + tp_{i-1}^1, (1-t)p_i^2 + tp_{i-1}^2, (1-t)p_i^3 + tp_{i-1}^3).$$

Note que, aquí estamos considerando  $p_0^j = x_j$  y  $p_3^j = x'_j$ , para cada  $j = 1, 2, 3$ . Por lo tanto, la ruta de navegación deseada en  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2, 3)$  de  $x$  en  $x'$  está dada por:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_1(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3; \\ \Gamma_2(3t - 1), & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ \Gamma_3(3t - 2), & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

■

## 5.1. Resultados descriptivos.

Siendo esta una investigación teórica y que no requiere de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados descriptivos.

## **5.2. Resultados inferenciales.**

Siendo esta una investigación teórica que no requiere de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados inferenciales.

## **5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.**

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

## VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Mostraremos en ésta Sección que las hipótesis planteadas en Capítulo 3 se verifican, siendo así que, en la Sección 3.1.1 se planteó la siguiente Hipótesis General:

HG: Si se aplica los algoritmos con teoría de Trenzas entonces se obtendrán nuevas rutas de navegación para el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

Este hecho se puede verificar en el Capítulo anterior con el resultado del Teorema 5.0.3(Teorema Principal), la cual garantiza la aplicación.

Por otro lado, en la Sección 3.1.2 se plantaron las siguientes Hipótesis Específicas:

HE1: Si se estudia la teoría de trenzas desde un punto de vista geométrico entonces se analiza el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. de comprender su similitud.

HE2: Si se estudia el isomorfismo de Fox-Neuwirth entonces se identifica que una  $k$ -trenza se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

HE3: Si se diseña una ruta de navegación usando una trenza entonces se aplica la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.

Con respecto a la  $HE1$  y  $HE2$ , en la demostración del Teorema 5.0.3(Teorema Principal), donde,  $p_i^j$  con  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2, 3$ , denota un  $i$  punto fijado sobre la ruta del  $j$ -ésimo robot, se tiene que  $i$  va desde 1 hasta el número de generadores que forman la trenza  $\sigma_1\sigma_2$ , que en este caso tenemos dos generados  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Estos  $p_i^j$  son fijados de acuerdo a los generadores  $\sigma_i$  de tal manera que los robots puedan navegar sin colisiones entre ellos de forma lineal por partes, verificando así la  $HE1$  y  $HE2$ .

Por otro lado con respecto a la Hipótesis  $HE3$ , la misma demostración del resultado principal en su proceso constructivo provee la descripción e identificación de la trenza, como se observa en la Figura 5.5 y su respectiva ruta de navegación

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_1(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3; \\ \Gamma_2(3t - 1), & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ \Gamma_3(3t - 2), & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

mostrando así la veracidad de la hipótesis.

## 6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

A partir de los resultados en la presente investigación podemos ver que, guardan relación con las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco Téorico:

En la investigación de [Farber, 2003] no se presentan rutas de navegación para un sistema multi-robot. En nuestro trabajo presentamos rutas de navegación para 3 robots.

En la investigación de [Fox and Neuwirth, 1962] interpretan la definición del grupo de trenzas de Artin como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado del plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . En nuestro trabajo interpretamos una trenza como una ruta de navegación para un sistema multi-robot.

En la investigación los autores [Ipanaque Zapata and González, 2020] construyen algoritmos para un sistema multi-robot, en particular, dan la ruta que los robots siguen para navegar de forma segura, sin colisiones entre ellos, desde una posición inicial hasta la posición final. La ruta de navegación obtenida en la Figura 5.5 de nuestra investigación es dada por trenzas la cual es completamente diferente a la ruta de navegación de la Figura 5.2 dada por los espacios de configuración.

## 6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

## CONCLUSIONES

- En esta tesis se aplicó los algoritmos con Teoría de Trenzas en el problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot. Éste nuevo enfoque permite aplicar las trenzas en algoritmos establecidos, lo cual impacta en las teorías pre-existentes.
- En esta tesis se identificó que una  $k$ -trenza se relaciona con una ruta de navegación en el problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot, lo que permitió abordar un problema en robótica en un problema en topología algebraica.
- El Teorema 5.0.3 del Capítulo V, muestra que es posible diseñar rutas de navegación seguras para los robots dada por la función  $\Gamma_i(t)$  la cual se define de manera explícita descrito en la forma de la trenza  $B_3$ .

## RECOMENDACIONES

- Debido a lo mostrado en el Teorema 5.0.3 del Capítulo V, se observó que es posible diseñar rutas de navegación en el sistema multi-robot. Se recomienda para futuros trabajos, se estudie una implementación computacional teniendo en cuenta dichas construcciones.
- Debido a la dificultad del tema se optó por la identificación del problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot a partir de trenzas determinadas. Se recomienda generalizar este resultado a partir del estudio para un caso en que las trenzas sean aleatorias. Cabe destacar que este análisis no fue hecho en la literatura del tema.
- Note que el presente trabajo abarca el caso en que se tiene tres robots trabajando al mismo tiempo lo que generó un estudio para trenzas  $B_3$ . Se recomienda generalizar este trabajo para cuando se considere  $k$  robots, para  $k > 3$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Arnol'd, 1969] Arnol'd, V. I. (1969). The cohomology ring of the colored braid group. *Mathematical Notes*, 5(2):138–140.
- [Artin, 1947] Artin, E. (1947). Theory of braids. *Annals of Mathematics*, pages 101–126.
- [Birman, 1969] Birman, J. S. (1969). On braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(1):41–72.
- [Birman, 1974] Birman, J. S. (1974). Braids, links and mapping class groups.
- [Bravo Quispe, 2013] Bravo Quispe, M. R. (2013). Sobre el grupo de trenza para  $rp^2$ .
- [Cerin Soto, 2013] Cerin Soto, L. M. (2013). Representación finita del grupo trenzas puras.
- [Cohen and Farber, 2011] Cohen, D. C. and Farber, M. (2011). Topological complexity of collision-free motion planning on surfaces. *Compositio Mathematica*, 147(02):649–660.
- [Cohen, 2010] Cohen, F. R. (2010). Introduction to configuration spaces and their applications. In *Braids*, pages 183–261. World Scientific.
- [Cohen and Taylor, 1978] Cohen, F. R. and Taylor, L. R. (1978). Computations of gelfand-fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces. In *Geometric applications of homotopy theory I*, pages 106–143. Springer.
- [Desrochers, 2012] Desrochers, A. A. (2012). *Intelligent robotic systems for space exploration*, volume 168. Springer Science & Business Media.
- [Fadell and Van Buskirk, 1961] Fadell, E. and Van Buskirk, J. (1961). On the braid groups of  $\mathbb{E}^2$  and  $\mathbb{S}^2$ . *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67(2):211–213.
- [Farber, 2003] Farber, M. (2003). Topological complexity of motion planning. *Discrete and Computational Geometry*, 29(2):211–221.
- [Farber, 2004] Farber, M. (2004). Collision free motion planning on graphs. In *Algorithmic Foundations of Robotics VI*, pages 123–138. Springer.
- [Farber, 2008] Farber, M. (2008). *Invitation to topological robotics*. European Mathematical Society.
- [Farber, 2018] Farber, M. (2018). Configuration spaces and robot motion planning algorithms. In *Combinatorial And Toric Homotopy: Introductory Lectures*, pages 263–303. World Scientific.
- [Farber and Grant, 2009] Farber, M. and Grant, M. (2009). Topological complexity of configuration spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(5):1841–1847.

- [Farber et al., 2007] Farber, M., Grant, M., and Yuzvinsky, S. (2007). Topological complexity of collision free motion planning algorithms in the presence of multiple moving obstacles. *Contemporary Mathematics*, 438:75–84.
- [Fox and Neuwirth, 1962] Fox, R. and Neuwirth, L. (1962). The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, 10:119–126.
- [Ghrist, 2001] Ghrist, R. (2001). Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics. *AMS IP studies in advanced Mathematics*, 24:29–40.
- [González and Grant, 2015] González, J. and Grant, M. (2015). Sequential motion planning of non-colliding particles in euclidean spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(10):4503–4512.
- [Hernández-Sampieri and Torres, 2018] Hernández-Sampieri, R. and Torres, C. P. M. (2018). *Metodología de la investigación*, volume 4. McGraw-Hill Interamericana México eD. F DF.
- [Iagnemma and Dubowsky, 2010] Iagnemma, K. and Dubowsky, S. (2010). *Mobile Robots in Rough Terrain: Estimation, Motion Planning, and Control with Application to Planetary Rovers*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- [Ipanaque Zapata and González, 2020] Ipanaque Zapata, C. A. and González, J. (2020). Multitasking collision-free optimal motion planning algorithms in euclidean spaces. *Discrete Mathematics Algorithms and Applications*, 12(3).
- [Ivancevic and Ivancevic, 2005] Ivancevic, V. G. and Ivancevic, T. T. (2005). *Natural biodynamics*, volume 27. World Scientific.
- [Kosniowski, 2021] Kosniowski, C. (2021). *Topología algebraica*. Reverté.
- [Latombe, 2012] Latombe, J.-C. (2012). *Robot motion planning*, volume 124. Springer Science & Business Media.
- [Mas-Ku and Torres-Giese, 2015] Mas-Ku, H. and Torres-Giese, E. (2015). Motion planning algorithms for configuration spaces. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 21(2):265–274.
- [McDuff, 1975] McDuff, D. (1975). Configuration spaces of positive and negative particles. *Topology*, 14(1):91–107.
- [Segal, 1973] Segal, G. (1973). Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones Mathematicae*, 21(3):213–221.
- [Van Buskirk, 1966] Van Buskirk, J. (1966). Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order. *Transactions of the American Mathematical Society*, 122(1):81–97.
- [Zapata, 2014] Zapata, C. A. I. (2014). Homología del espacio de configuraciones del espacio proyectivo complejo. *Tesis, Licenciatura, FCM-UNMSM*.

- [Zapata and González, 2020] Zapata, C. A. I. and González, J. (2020). Sequential collision-free optimal motion planning algorithms in punctured euclidean spaces. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 102(3):506–516.
- [Zapata and Pérez, 2021] Zapata, C. A. I. and Pérez, R. J. G. (2021). Introducción a la teoría de complejidad topológica. *arXiv preprint arXiv:2105.07980*.

# ANEXOS

## MATRIZ DE CONSISTENCIA

Tabla 2. Matriz de Consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p><b>Problema general:</b> ¿De qué manera se puede aplicar los algoritmos con teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?.</p>	<p><b>Objetivo general:</b> Aplicar los algoritmos con teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.</p>	<p><b>Hipótesis general:</b> Si se aplica los algoritmos con teoría de Trenzas entonces se obtendrán nuevas rutas de navegación para el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. multi-robot.</p>	<p><b>Tipo:</b> La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. <b>Método:</b> Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. <b>Diseño de la investigación:</b> iniciamos con resultados básicos de: topología algebraica y los espacios de configuraciones. continuando las ideas intuitivas de la teoría de trenzas introducido en 1947 por E. Artin. y los resultados de las trenzas geométricas, espacios de configuraciones y el grupo fundamental. Seguidamente los algoritmos para el problema de planificación de movimiento de un sistema multi-robot que navegan en un espacio euclidiano. Finalmente los resultados para nuestro objetivo principal, diseñar algoritmos con trenzas para el problema de planificación de movimiento de un sistema mecánico multi-robot.</p>	<p>No se aplica para este tipo de proyecto.</p>
<p><b>Problema específico:</b> 1. ¿De qué manera se puede llegar a analizar el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?. 2. ¿De qué manera se puede llegar a identificar que una k-trenzas se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?. 3.¿De qué manera se puede llegar a aplicar la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot?.</p>	<p><b>Objetivo específico:</b> 1. Analizar el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. 2. Identificar que una k-trenzas se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. 3. Aplicar la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.</p>	<p><b>Hipótesis específica:</b> 1. Si se estudia la teoría de trenzas desde un punto de vista geométrico entonces se analiza el fundamento de la teoría de Trenzas y el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. 2. Si se estudia el isomorfismo de Fox-Neuwirth entonces se identifica que una k-trenza se relaciona con una ruta de navegación en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot. 3. Si se diseña una ruta de navegación usando una trenza entonces se aplica la teoría de Trenzas en el Problema de Planificación de Movimiento de un sistema mecánico multi-robot.</p>		

Fuente: Elaboración Propia del Autor