

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**“EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UN SISTEMA DE
LAMÉ SEMILINEAL”**

**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO
EN MATEMÁTICA**

AUTORA:

GIANELLA CASTROMONTE DIAZ

ASESOR: PAULO NICANOR SEMINARIO HUERTAS

LINEA DE INVESTIGACION: CIENCIAS NATURALES

Callao,

2023 PERÙ



Gianella Castromonte Diaz

Alumno

Código: 1319220157

DNI: 74912177



Paulo Nicánor Seminario Huertas

Asesor

Código: 6290

DNI: 45480452

Hoja de referencia del Jurado y aprobación

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N° 070-2023-D-FCNM, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por:



Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente



Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
Vocal



Dr. Julio Cesar Nuñez Villa
Secretario



Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor



Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
Suplente



ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: <https://meet.google.com/gsp-kgrz-kio?pli=1&authuser=1> mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 12:00 horas del día sábado 10 de junio del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por la Señorita Bachiller GIANELLA CASTROMONTE DIAZ Titulada "EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UN SISTEMA DE LAMÉ SEMILINEAL" Jurado que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey	Presidente
Dr. Julio Cesar Nuñez Villa	Secretario
Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez	Vocal
Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre	Suplente
Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas	Asesor

Luego de la Instalación, el secretario del Jurado dio lectura a la Resolución Decanal N° 070-2023-D-FCNM, que designa a los miembros del Jurado de Sustentación de la Tesis.

A continuación, se dio inicio a la Exposición del Trabajo de Tesis de Acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30-10-2018.

Culminado el acto de exposición virtual de la tesis, los señores miembros del Jurado procedieron a formular las preguntas, las mismas que fueron absueltas.

Luego de un cuarto intermedio para la deliberación en privado del Jurado, con la participación con voz del asesor, y después de calificar el Trabajo de Tesis, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por la Señorita Bachiller GIANELLA CASTROMONTE DIAZ, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del Citado reglamento, a continuación, se indica.

Calificación cuantitativa	Calificación Cualitativa
19	EXCELENTE

Finalmente, el secretario del Jurado procedió a redactar y dar lectura al acta de sustentación del trabajo de tesis.

Siendo las 12:59 horas del día 10 de junio del año dos mil veintitres, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación virtual de la tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas.

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

Dr. Julio Cesar Nuñez Villa
Secretario

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
Vocal

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor

Dr. Edinson Raúl Montoro Alegre
Suplente

INFORMACIÓN BÁSICA

1. FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Departamento de Matemática
3. TÍTULO: Existencia de un atractor global para un sistema de Lamé semilineal
4. AUTOR: Bach. Castromonte Diaz Gianella
5. ASESOR: Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
6. LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. TIPO DE INVESTIGACIÓN: Proyecto de Tesis
8. UNIDADES DE ANÁLISIS: No aplica

Dedicatoria

A mis padres Onofrio y Alina por todo su amor,
sus consejos y apoyo incondicional,
todo lo que soy hoy en día es gracias a ellos.

Agradecimientos

A Dios, por brindarme oportunidades y fortaleza para seguir creciendo en lo personal y profesional.

A mi familia que siempre estuvieron para mí, en los buenos y malos momentos dandome su apoyo incondicional. Mis padres Onofrio Castromonte Garcia y Alina Diaz Marquina, mis hermanos Arturo e Ian gracias por todo.

A mi asesor el profesor Paulo Nicanor Seminario Huertas por su enseñanza, paciencia, dedicación y apoyo para el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores de pregrado de la Universidad Nacional del Callao, que contribuyeron con mi formación profesional, muchas gracias por su paciencia y sabios consejos.

A la FCNM en general, al personal, a la institución, amigos y compañeros. Muchas gracias.

Y a todos los que me ayudaron de alguna u otra forma en mi formación profesional y siempre estuvieron ahí para mi. Muchas gracias por todo.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	5
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
INTRODUCCIÓN	10
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.1. Descripción de la realidad problemática	11
1.2. Formulación del problema	13
1.2.1. Problema general	13
1.2.2. Problemas específicos	14
1.3. Objetivos	14
1.3.1. Objetivo general	14
1.3.2. Objetivos específicos	14
1.4. Justificación	14
1.5. Delimitantes de la investigación	17
1.5.1. Teórica	17
1.5.2. Temporal	17
1.5.3. Espacial	17
2. MARCO TEÓRICO	18
2.1. Antecedentes	18
2.2. Bases teóricas	19
2.2.1. Aspectos Físicos	19

2.2.2. Aspectos Matemáticos	48
2.3. Marco Conceptual	57
2.4. Definición de términos básicos	57
3. HIPÓTESIS Y VARIABLES	60
3.1. Hipótesis	60
3.1.1. Hipótesis general	60
3.1.2. Hipótesis específica	60
3.2. Definición conceptual de variables	60
3.2.1. Operacionalización de variables	60
4. DISEÑO METODOLÓGICO	62
4.1. Tipo y diseño de investigación.	62
4.1.1. Tipo de investigación	62
4.1.2. Diseño de la investigación	62
4.2. Método de investigación	63
4.3. Población y muestra	63
4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado	63
5. RESULTADOS	64
5.1. Hipótesis	64
5.2. Entorno funcional	65
5.3. Buena colocación y estimación de energía	67
5.4. Resultado principal y pruebas	71
5.4.1. Propiedad de Gradiente	72
5.4.2. Propiedad de Cuasi-estabilidad	73
5.4.3. Conclusión de la prueba del Teorema 15	79
6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	81
6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	81
CONCLUSIONES	83
RECOMENDACIONES	84

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85
ANEXOS	89
ANEXO 1: Matriz de Consistencia	89

LISTA DE FIGURAS

1.1.	En (a) tenemos el cuerpo elástico en una posición de descanso. En (b) tenemos el efecto de propagación en el material de las P-ondas, donde se producen pequeñas contracciones y dilataciones en la misma dirección de propagación de la onda. En (c) ejemplificamos el efecto de las S-ondas transversales en el material, que se genera a partir de las fuerzas de corte y son efectivas en direcciones normales con respecto a la dirección de propagación de la onda.	16
2.1.	V_0 Representa el Volumen inicial, la cual se convierte en V después de la deformación. Donde el R y r representan las posiciones antes y después de la deformación, respectivamente, con el $u(R)$ como el vector desplazamiento dado por la diferencia entre r y R	20
2.2.	La descripción completa requiere de la consideración de los cambios experimentados por el vector dR entre dos puntos adyacentes.	21
2.3.	ΔS es una superficie plana dentro de un cuerpo dividiéndolo en dos medios I y II . ΔF es una fuerza ejercida por el medio I sobre el medio II en el punto P y n es la normal a ΔS ubicada en el medio I	26
2.4.	Un cuerpo en forma de disco. Donde S^+ es la parte superior del disco, S^- es la parte inferior del disco y δS es la superficie lateral.	27
2.5.	P representa la cantidad de movimiento de una partícula de masa m cuya velocidad esta dada por v	27
2.6.	En el tetraedro, la superficie dS_n es la superficie correspondiente a la cara ABC cuya normal es el vector n . dS_i es la superficie normal a x_i con normal $-e_i$ para $i = 1, 2, 3$	29

2.7. Descomposición de cada componente del vector tensión	31
2.8. r representa el momento angular de un partícula de masa m cuya velocidad esta dada por v	34
2.9. τ_{11} es la tensión ejercida sobre el eje de simétria de una barra, en este caso el eje x_1	40
2.10. En (a) tenemos el cuerpo elástico en posición de reposo. En (b) tenemos el efecto de propagación de las P - ondas sobre el material, donde se producen pequeñas contracciones y dilataciones en la misma dirección de la propagación de la onda.	46
2.11. En (a) tenemos el cuerpo elástico en posición de reposo. En (c) tenemos el efecto de las S - ondas transversales en el material, que se generan a partir de las fuerzas cortantes y son efectivas en direcciones normales con respecto a la dirección de propagación de la onda.	47

RESUMEN

EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UN SISTEMA DE LAMÉ SEMILINEAL

Gianella Castromonte Díaz

Mayo 2023

Asesor: Paulo Nicanor Seminario Huertas

Título obtenido: Licenciada en Matemática

El presente trabajo estudia la dinámica a largo plazo de un sistema de ondas sísmicas débilmente amortiguadas expuestas a fuerzas estructurales no conservativas y fuerzas externas a partir de un sistema de Lamé. Adicionalmente se muestra la existencia de una región compacta de estabilidad, es decir, un atractor global.

Palabras claves: Sistema de elasticidad, Atractor global, Sistema gradiente, Cuasi-estabilidad.

ABSTRACT

EXISTENCE OF A GLOBAL ATTRACTOR FOR A SYSTEM OF SEMI-LINEAR LAMÉ

Gianella Castromonte Diaz

Mayo, 2023

Advisor: Paulo Nicanor Seminario Huertas

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

The present work studies the long-term dynamics of a weakly damped seismic wave equation exposed to non-conservative structural forces and external forces from a Lamé system. Additionally, the existence of a compact region of stability is shown, that is, a global attractor.

Keywords Elasticity system, Global attractor, Gradient system, Quasi-stability.

INTRODUCCIÓN

Esta tesis trata sobre la dinámica a largo plazo del sistema de Lamé

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}u + \alpha u_t + f(u) = b$$

Definido en un dominio acotado de \mathbb{R}^3 con condición de contorno de Dirichlet. Se pretende mostrar la existencia de un atractor global con dimensión fractal finita para el sistema, considerando la presencia de fuerzas estructurales $f(u)$ y fuerzas externas b . En este caso, el sistema de Lamé modela el desplazamiento de vibraciones de ondas sobre medios elásticos e isotrópicos, el cual explica el comportamiento de las ondas sísmicas. Además, se brindará una explicación física detallada del modelo considerando las velocidades de las P-ondas y S-ondas.

Es importante rescatar que este sistema es vectorial, lo que causa una complicación no menor al considerar que cada ecuación direccional está acoplada con las otras.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El presente trabajo tiene por finalidad el estudio de la dinámica a largo plazo del sistema de Lamé bajo fuerzas no lineales. Aquí, el sistema lineal

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}u = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

Se convierte en

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}u + \alpha u_t + f(u) = b & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

Donde αu_t ($\alpha > 0$) representa una disipación friccional, $f(u)$ representa una fuerza estructural no lineal, y $b = b(x)$ representa alguna fuerza externa. Hasta donde sabemos, la dinámica a largo plazo de sistemas semilineales de Lamé (1.2) no se han estudiado antes. Presentaremos dos resultados principales. En primer lugar, se mostrara la buena colocación del sistema, es decir, la existencia, unicidad y dependencia continua de las

soluciones débiles.

En segundo lugar, se establecerá la existencia de un atractor global con dimensión fractal finita para el semigrupo de soluciones asociado.

A continuación, resumiremos las principales contribuciones de este trabajo.

(I) A partir de la teoría de semigrupos y de los operadores disipativos, se muestra la existencia de soluciones débiles usando los problemas de Cauchy abstractos. Adicionalmente, se mostraran diferentes resultados con relación al control de la energía, lo que permite demostrar a posteriori la existencia y unicidad de las soluciones débiles. La dependencia continua con relación a los datos iniciales también es un punto que se discutirá en este primer apartado.

(II) Nuestro segundo resultado establecerá la existencia de atractores globales para la dinámica del sistema (1.2) bajo fuerzas no lineales con crecimiento crítico $|f_i(u)| \approx |u|^p + |u_i|^3, p < 3, i = 1, 2, 3$. Bajo cuidadosas estimaciones de energía, se mostrara que el sistema es gradiente y cuasi-estable en el sentido de [10,11].

Los siguientes supuestos se considerarán a lo largo de este trabajo para las funciones definidas en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con borde lo suficientemente suave $\partial\Omega$.

1. El coeficiente del amortiguamiento friccional y los coeficientes de Lamé λ, μ cumplen:

$$\alpha, \mu > 0 \quad y \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \lambda + \mu \geq 0$$

2. La fuerza externa vectorial b satisface

$$b \in (L^2(\Omega))^3$$

3. El campo vectorial no lineal $f = (f_1, f_2, f_3)$ satisface la existencia de un campo vectorial $g = (g_1, g_2, g_3) \in (C^1(\mathbb{R}^3))^3$ y funciones $G \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $h_i \in C^2(\mathbb{R}), i = 1, 2, 3$. Tal que

$$f = (u_1, u_2, u_3) = g_i(u_1, u_2, u_3) + h_i(u_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$f_i(0) = g_i(0) = h_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$g = (g_1, g_2, g_3) = \nabla G.$$

Además, existen constantes $M, m_f \geq 0$. Tal que

$$f(u) \cdot u - G(u) - \sum_{i=1}^3 \int_0^{u_i} h_i(s) ds \geq -M|u|^2 - m_f, \quad \forall u \in \mathbb{R}^3$$

$$G(u) + \sum_{i=1}^3 \int_0^{u_i} h_i(s) ds \geq -M|u|^2 - m_f, \quad \forall u \in \mathbb{R}^3$$

con

$$0 \leq M < \frac{\mu\lambda_1}{2},$$

Donde $\lambda_1 > 0$ denota el primer valor propio del operador laplaciano $-\Delta$. Además, con respecto a las funciones g_i y $h_i, i = 1, 2, 3$, adicionalmente se asumirá que:

- g cumple la restricción de crecimiento subcrítico, es decir, existen $1 \leq p < 3$ y $M_g > 0$, tales que, para $i = 1, 2, 3$

$$|\nabla g_i(u)| \leq M_g(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} + |u_3|^{p-1}), \quad \forall u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

- Para cada $i = 1, 2, 3$, h_i cumple la restricción de crecimiento crítico, es decir, existe una constante $c_h > 0$ tal que

$$|h'_i(x)| \leq c_h(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

- ¿Será posible probar la existencia de un atractor global para un sistema de Lamé semilineal?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Será posible probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para un sistema de Lamé semilineal?
- ¿Será posible probar la estructura gradiente del semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal?
- ¿Será posible probar que el semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasiestable?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Probar la existencia de un atractor global para un sistema de Lamé semilineal.

1.3.2. Objetivos específicos

- Probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para un sistema de Lamé semilineal.
- Probar la estructura gradiente del semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal.
- Probar que el semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasiestable.

1.4. Justificación

En el estudio de las ondas sísmicas, al estar estas desplazándose desde el hipocentro al epicentro, es necesario estudiar el comportamiento vectorial de las ondas cuando afectan a cuerpos elásticos, en particular, cuerpos isotrópicos. En estos casos, la ley de Hook y sus leyes constitutivas muestran que el tensor de tensores está dado por

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

donde τ representa a las tensiones sobre el cuerpo, λ y μ los parámetros de Lamé asociados a la viscosidad y elasticidad del cuerpo y, las dependencias del desplazamiento u , las deformaciones. Es así que, a partir de la segunda ley de Newton, se deriva la ecuación

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u = \rho\mathcal{F} \quad (1.3)$$

Que representa el desplazamiento de partículas vectoriales para un cuerpo elástico, isotrópico y homogéneo sujeto a fuerzas externas \mathcal{F} . En Poisson [29], Timoshenko [33], Hudson [18], entre otros, se ha demostrado que la ecuación (1.3) proporciona información sobre diferentes ondas corporales. En un sentido escalar (P-ondas), donde la notación $\operatorname{div} u$ representa fracciones de los cambios de volumen del tensor de tensiones que explica el comportamiento de compresión y rarefacción en el interior del cuerpo. Desde el punto de vista matemático, puede ser dado por la identidad

$$u_{tt}(\operatorname{div} u) - \alpha^2 \Delta(\operatorname{div} u) = \operatorname{div} \mathcal{F}$$

Donde $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ representa la velocidad de propagación de las P-ondas. Por otro lado, al considerar el caso $\nabla \times u$ se obtiene el comportamiento de una onda vectorial (S-onda) las cuales modelan pequeñas rotaciones de elementos lineales a partir de fuerzas de corte que actúan dentro del cuerpo. De esta manera, surge la siguiente ecuación.

$$u_{tt}(\nabla \times u) - \beta^2 \Delta(\nabla \times u) = \nabla \times \mathcal{F}$$

Donde $\beta = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ significa la velocidad de propagación de las S-ondas.

El análisis de la dinámica para (1.3) ha mostrado grandes aplicaciones en el efecto de las ondas sísmicas en varios materiales (por ejemplo, harzburgita, granate, piroxenita, anfibolitas, granito, gas, arenas, cuarzo, etc.), donde la propagación de las P-ondas representan el cambio de volumen en el interior del cuerpo bajo compresión y dilatación en la dirección de la onda, ver Figura 1.1(b), mientras que las S-ondas son desplazamientos transversales que producen vibraciones en una dirección perpendicular (normal a la onda viajera), ver Figura 1.1 (c).

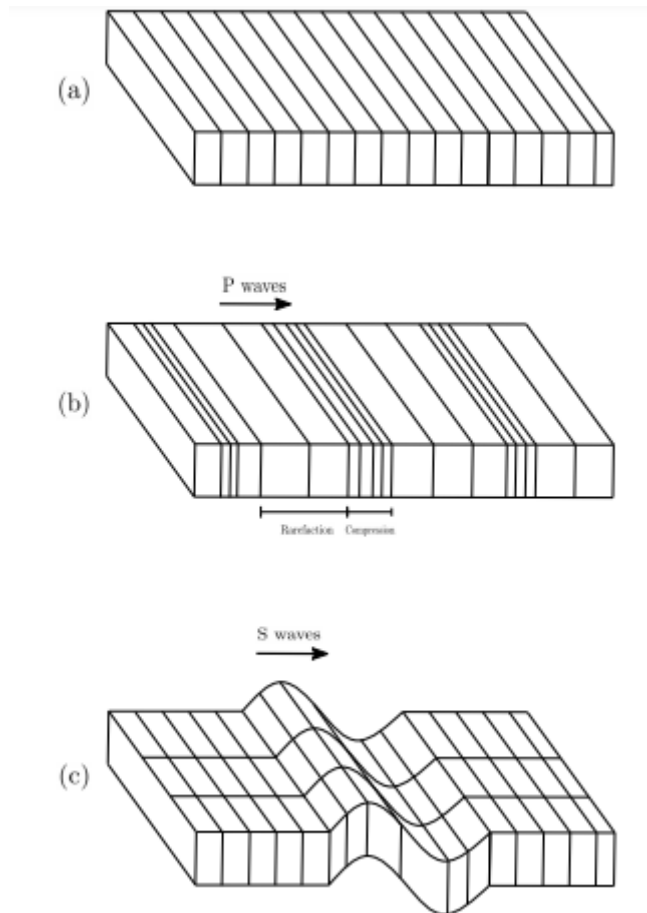


Figura 1.1: En (a) tenemos el cuerpo elástico en una posición de descanso. En (b) tenemos el efecto de propagación en el material de las P-ondas, donde se producen pequeñas contracciones y dilataciones en la misma dirección de propagación de la onda. En (c) ejemplificamos el efecto de las S-ondas transversales en el material, que se genera a partir de las fuerzas de corte y son efectivas en direcciones normales con respecto a la dirección de propagación de la onda.

Un escenario general existente es cuando los terremotos generan ondas de corte, digamos S-ondas, que son más efectivas que las ondas de compresión, digamos P-ondas, y por lo tanto son las más dañinas sobre un cuerpo.

Es así que el presente proyecto es de alto interés en un sector significativo de la ciencia actualmente, sobre todo en regiones altamente sísmicas como lo es nuestro país.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Teórica

Al realizar una investigación en la literatura con respecto al tema a desarrollar, se ha visto que no se cuenta con trabajos relevantes a nivel nacional, por este motivo, los trabajos teóricos de referencia son de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas. Es así que la principal limitación es el acceso a dicho material, ya que la mayoría de revistas consideran un monto a pagar por sus artículos.

1.5.2. Temporal

No aplica.

1.5.3. Espacial

No aplica.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

El sistema de Lamé 3-dimensional está dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}u = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = 0, u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^3 con borde suave $\partial\Omega$, que representa el cuerpo elástico en su configuración de reposo. Aquí, el vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ denota desplazamientos y λ, μ son las constantes de Lamé con $\mu > 0$. En este modelo, el tensor de tensores está dado por

$$\tau_{ij} = \lambda\operatorname{div}u\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Remitimos a [1, 12, 25, 32] para aspectos de modelado y [9, 20, 30] para algunas aplicaciones de ondas vectoriales. Observamos que la energía funcional correspondiente al sistema lineal (2.1) viene dada por

$$E_\ell(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda + \mu)|\operatorname{div}u|^2) dx,$$

Que es conservativa ya que formalmente $\frac{dE_\ell(t)}{dt} = 0$. Esto motivó varios estudios sobre tales sistemas donde la característica principal es encontrar amortiguadores y controladores adecuados para conseguir estabilización y controlabilidad, respectivamente. Recordemos algunos resultados relacionados. La estabilización exponencial de los sistemas de Lamé, definidos en dominios exteriores de \mathbb{R}^3 con condiciones de Dirichlet, fue estudiado por Yamamoto [34] mientras que la estabilización uniforme retroalimentación de contorno no lineal, fue estudiada por Horn [17]. Para el caso del decaimiento polinomial de la energía, Astaburuaga y Charão [4] consideraron un amortiguador localizado en el interior, asumiendo la condición geométrica del control. Al agregar disipación viscoelástica del tipo memoria, Bchatnia y Guesmia [5] establecieron la llamada estabilidad general. Recientemente, Benaissa y Gaouar [6] estudiaron una fuerte estabilidad de los sistemas de Lamé con regularidad fraccional sobre el borde del dominio.

2.2. Bases teóricas

En este capítulo presentaremos resultados elementales tanto físicos como matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

2.2.1. Aspectos Físicos

Descripción del movimiento. Puntos de vista lagrangianos y eulerianos

La tensión y la rotación son dos manifestaciones de deformación. Se dice que cuando un cuerpo sufre deformaciones, la posición relativa de las partículas del cuerpo cambian. Para ver esto consideremos el siguiente experimento:

En la superficie de un globo inflado se marcan cuatro puntos correspondientes a las esquinas de un cuadrado. Luego se aprieta el globo en la proximidad de los puntos. El resultado de este experimento nos muestra el cambio en las posiciones relativas de los cuatro puntos, así como cambios en los ángulos de las esquinas del cuadrado.

Además, si el apretón se realiza lentamente, también se observará que las posiciones de los cuatro puntos cambian continuamente a medida que pasa el tiempo.

Es decir:

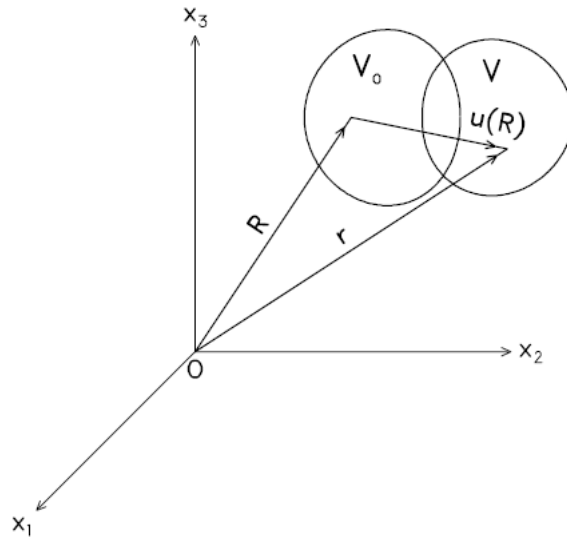


Figura 2.1: V_0 Representa el Volumen inicial, la cual se convierte en V después de la deformación. Donde el R y r representan las posiciones antes y después de la deformación, respectivamente, con el $u(R)$ como el vector desplazamiento dado por la diferencia entre r y R .

Sea $R = (X_1, X_2, X_3)$ la posición del vector correspondiente a una partícula en el cuerpo no deformado y $r = (x_1, x_2, x_3)$ la posición del vector en el cuerpo deformado que corresponde a la partícula que inicialmente estaba en R .

Así,

$$r = r(R, t) \tag{2.2}$$

Se puede escribir:

$$r_i = x_i = x_i(X_1, X_2, X_3), \quad i = 1, 2, 3$$

Además, dado $r = r(R, t)$ y asumiendo que el jacobiano es diferente de cero

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Por el Teorema de la Función Implícita podemos escribir:

$$R = (r, t)$$

En forma de componentes:

$$R_i = X_i = X_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3$$

La ecuación $r = r(R, t)$ corresponde a la descripción lagrangiana del movimiento.

La ecuación $R = R(r, t)$ corresponde a la descripción euleriana del movimiento.

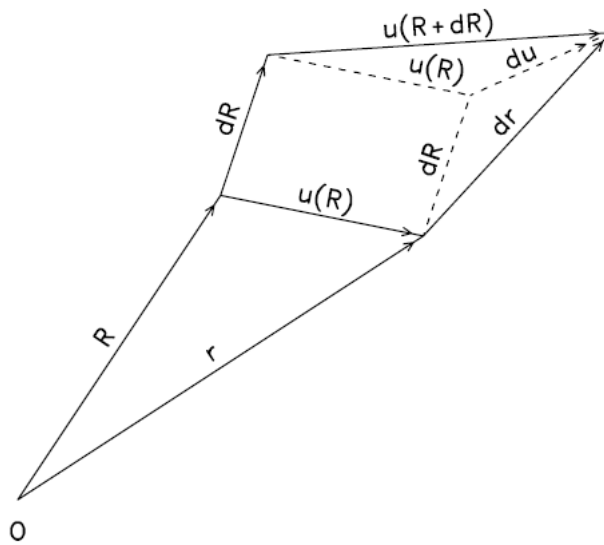


Figura 2.2: La descripción completa requiere de la consideración de los cambios experimentados por el vector dR entre dos puntos adyacentes.

Para un tiempo t_0 , tenemos:

$$r(R, t_0) = R$$

Ahora, consideremos $p(r, t)$ que indica el valor de alguna propiedad del medio (ej.: presión, temperatura, velocidad, ...) en el punto r en tiempo t .

Luego, supongamos una sola partícula R .

Usando

$$r = r(R, t)$$

Tenemos,

$$P(R, t) = p(r(R, t), t)$$

Cuando un cuerpo esta en movimiento la descripción de la tasa de cambio temporal de una propiedad depende de como se describe el movimiento.

Esto motivara las definiciones a continuación. Para lo cual consideremos la siguiente situación.

Supongamos que estamos interesados en medir la tasa de cambio temporal de alguna propiedad (temperatura) de un río en función de la posición y el tiempo.

Veamos dos casos:

Caso 1:

Consideremos un punto fijo respecto a la costa desde la cual se tomaran mediciones.

La posición de este punto estará dada por r en algún sistema coordenado. La tasa de cambio de la hora local obtenida está dada por:

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t}$$

Caso 2:

En este caso las mediciones se realizaran desde una canoa que flota a lo largo del río. Donde la canoa que representa una partícula en un medio será identificada por el vector R , cuyo origen coincide con el origen del vector r del punto fijo antes mencionado. La tasa de cambio temporal determinada a partir de estas mediciones se le conoce como la **DERIVADA MATERIAL** de P . Es decir, es la derivada material de una cantidad P respecto al tiempo t y está dada por:

$$\frac{DP}{Dt}$$

Así la tasa de cambio temporal de P será registrado por un observador moviéndose con la partícula identificada por R .

Escrita como:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P(R, t)}{\partial t} \Big|_{R \text{ fijo}}$$

Donde P es la cantidad de cualquier propiedad escalar, vectorial o tensor del medio.

Ahora, expresando P en términos de r , tenemos:

$$P(R, t) = p(r(R, t), t)$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{DP}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \left. \frac{\partial p(r, t)}{\partial t} \right|_{r \text{ fijo}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p(r, t)}{\partial x_k} \cdot \left. \frac{\partial x_k}{\partial t} \right|_{R \text{ fijo}} \end{aligned}$$

Donde:

- $\frac{\partial p(r, t)}{\partial t}$ es la tasa de cambio de hora local.
- $\frac{\partial p(r, t)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}$ es la tasa de cambio CONVECTIVO que surge del movimiento en el medio.

A la derivada material también se le conoce como la DERIVADA SUSTANCIAL O DERIVADA TOTAL.

Ahora veamos que la velocidad de una partícula se define como la tasa de cambio de tiempo material del vector posición de la partícula.

$$v = \frac{Dr}{Dt} = \left. \frac{\partial r(R, t)}{\partial t} \right|_{R \text{ fijo}}$$

o también:

$$v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

Luego, podemos usar:

$$R = R(r, t)$$

y escribir:

$$v = V(R, t) = V(R(r, t), t) = v(r, t)$$

donde $v(r, t)$ es el campo de velocidades.

La partícula R al estar en un punto r en un momento dado t tendrá velocidad $v(r, t)$.

Por tanto, tenemos:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

Donde:

$$\nabla(p.v) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

pues,

$$\begin{aligned}\nabla(p.v) &= \nabla \left(p \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}\end{aligned}$$

Así

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(p.v)$$

Ahora expresando r en términos de u : *vector desplazamiento*, tenemos:

$$u(R, t) = r - R$$

$$\begin{aligned}v &= \frac{Dr}{Dt} = \frac{D(u + R)}{Dt} = \frac{\partial(u(R, t) + R)}{\partial t} = \frac{\partial u(R, t)}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} \\ v &= \frac{\partial u(R, t)}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t}\end{aligned}$$

Debido a que R no depende del tiempo, $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$

entonces,

$$v = \frac{\partial u(R, t)}{\partial t}$$

Si se da u en la descripción espacial, se obtiene:

$$\begin{aligned}v_k &= \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial t} \\ v_k &= \frac{\partial u_k}{\partial t} + \nabla(u_k.v)\end{aligned}$$

o también:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(u.v)$$

La aceleración es la tasa de cambio temporal material de la velocidad de una partícula.

$$a = \frac{Dv}{Dt}$$

En la descripción euleriana tenemos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_k}{\partial t} + \nabla(v_k \cdot v) \end{aligned}$$

o también:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla(v \cdot v)$$

El Vector Tensión

En la mecánica de un medio continuo se reconocen dos tipos de fuerzas:

Fuerzas Corporales: Las cuales actúan a una distancia dentro del cuerpo o entre cuerpos.

Ej.: Fuerza de gravedad, que pueden ser el resultado de la acción de las partículas dentro de un cuerpo, o puede originarse en otro cuerpo. El efecto de la gravitación generalmente se ignora en los estudios de propagación de ondas que no involucran toda la Tierra.

Fuerzas Superficiales: Aquellas que solo dependen de la superficie del cuerpo como consecuencia del contacto con otros cuerpos.

Ej.: Presión Hidrostática, sobre la superficie de un cuerpo sumergido en un fluido.

Luego:

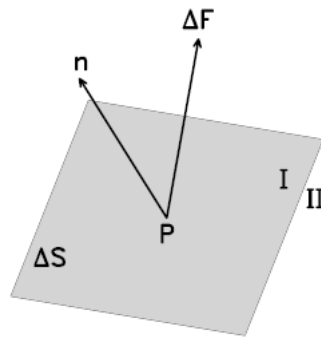


Figura 2.3: ΔS es una superficie plana dentro de un cuerpo dividiéndolo en dos medios I y II. ΔF es una fuerza ejercida por el medio I sobre el medio II en el punto P y n es la normal a ΔS ubicada en el medio I

La fuerza ΔF es ejercida sobre el punto P más un ΔC sobre algún eje.

Supongamos que:

$$\begin{aligned} \Delta F &\rightarrow 0 & \frac{\Delta C}{\Delta S} &\rightarrow 0 \\ \Delta C &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$T(n) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

donde $T(n)$ es el vector tensión en P asociado a la normal n . Para representarlo usaremos T .

La proyección de T en n esta dada por $T \cdot n$.

Si

La proyección es positiva = Tensión

La proyección es negativa = Compresión

De $T(n) = \frac{dF}{dS}$, vemos que cuando T se da en función de la posición, entonces las fuerzas a través de cualquier elemento de la superficie infinitesimal dS será igual a TdS .

Veamos:

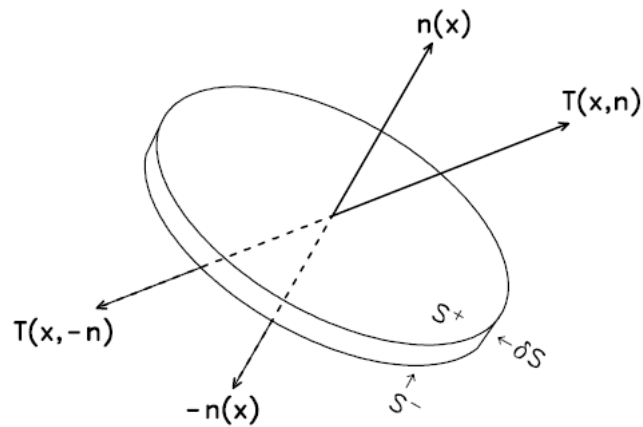


Figura 2.4: Un cuerpo en forma de disco. Donde S^+ es la parte superior del disco, S^- es la parte inferior del disco y δS es la superficie lateral.

Sea S la superficie de un cuerpo con volumen V y sea f una fuerza corporal por unidad de masa, de modo que ρf es una fuerza por unidad de volumen. Por el principio de momento lineal

$$\frac{dP}{dt} = \text{Sumatoria de fuerzas sobre el cuerpo}$$

donde:

$$P = \int_V \rho v \, dV \quad (\text{Momento Lineal})$$

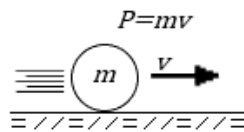


Figura 2.5: P representa la cantidad de movimiento de una partícula de masa m cuya velocidad esta dada por v .

Tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v \, dV = \int_S T \, dS + \int_V \rho f \, dV \quad (2.3)$$

donde T son las fuerzas externas y ρf son las fuerzas corporales.

Además:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV = \int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV \quad (2.4)$$

Como (2.3) y (2.4) se aplican sobre el volumen del disco cuyo espesor se aproxima a cero.

Entonces (2.3) está dada por:

$$\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV = \int_{S^+} T(n) dS^+ + \int_{S^-} T(-n) dS^- + \int_V \rho f dV$$

→

$$\int_{S^+} T(n) dS^+ + \int_{S^-} T(-n) dS^- + \int_V \rho f dV = 0$$

$$\int_{S^-} T(-n) dS^- = - \int_{S^+} T(n) dS^+$$

Como δS se acerca a cero, S^- se acerca a S^+ .

Así:

$$T(-n) = -T(n) \quad (2.5)$$

Siempre que T sea continua en S^+

La ecuación es similar a la ley de acción y reacción de Newton, pues las fuerzas opuestas tienen el mismo módulo pero diferente dirección.

El Tensor de Tensores

Consideremos un tetraedro infinitesimal.

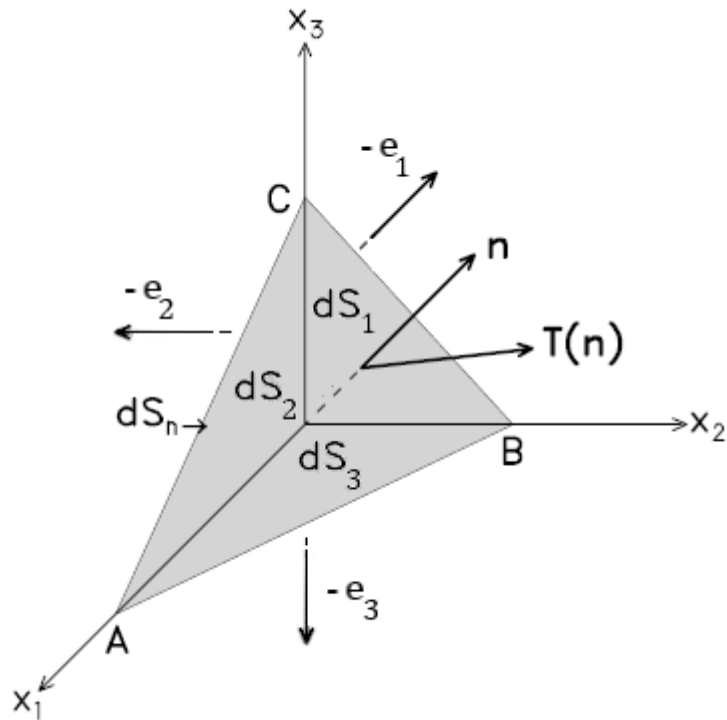


Figura 2.6: En el tetraedro, la superficie dS_n es la superficie correspondiente a la cara ABC cuya normal es el vector n . dS_i es la superficie normal a x_i con normal $-e_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Sea S la superficie del tetraedro, tal que:

$$S = dS_n + dS_1 + dS_2 + dS_3$$

Aplicando (2.3) y (2.4) tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v \, dV = \int_S T \, dS + \int_V \rho f \, dV$$

$$\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} \, dV = \int_S T \, dS + \int_V \rho f \, dV$$

como $\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} \, dV = 0$ y $\int_V \rho f \, dV = 0$

$$0 = \int_S T dS$$

Por tanto:

$$0 = \int_S T dS = T(n)dS_n + T(-e_1)dS_1 + T(-e_2)dS_2 + T(-e_3)dS_3$$

Debido a que son superficies infinitesimales cada integral puede ser remplazada por el producto del tensor de tensores y el área de la superficie.

Luego, usando (2.5) tenemos:

$$T(n)dS_n - T(e_1)dS_1 - T(e_2)dS_2 - T(e_3)dS_3 = 0$$

$$T(n)dS_n = T(e_1)dS_1 + T(e_2)dS_2 + T(e_3)dS_3$$

Además,

$$dS_i = (ne_i)dS_n = n_i dS_n \quad i = 1, 2, 3$$

Por tanto

$$T(n)dS_n = T(e_1)n_1dS_n + T(e_2)n_2dS_n + T(e_3)n_3dS_n$$

$$T(n) = n_1T(e_1) + n_2T(e_2) + n_3T(e_3) = \sum_{i=1}^3 n_i T(e_i)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^3 n_i T(e_i)$$

Los vectores $T(e_i)$ se pueden escribir en términos de los vectores unitarios.

$$T(e_1) = \tau_{11}e_1 + \tau_{12}e_2 + \tau_{13}e_3$$

$$T(e_2) = \tau_{21}e_1 + \tau_{22}e_2 + \tau_{23}e_3$$

$$T(e_3) = \tau_{31}e_1 + \tau_{32}e_2 + \tau_{33}e_3$$

donde τ_{ij} es la x_i componente del vector de tensión correspondiente al plano que tiene e_i como normal. Siendo, además τ_{ij} los elementos del tensor de tensores.

Usando la convención de suma de Einstein, escribimos:

$$T(n) = \sum_{i=1}^3 n_i T(e_i) = n_i T(e_i) \quad (2.6)$$

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} e_j = \tau_{ij} e_j \quad (2.7)$$

El vector $T(n)$ se puede escribir:

$$T(n) = T_1(n)e_1 + T_2(n)e_2 + T_3(n)e_3 = T_j(n)e_j$$

Luego de (2.6) y (2.7) tenemos:

$$T(n) = n_i \tau_{ij} e_j$$

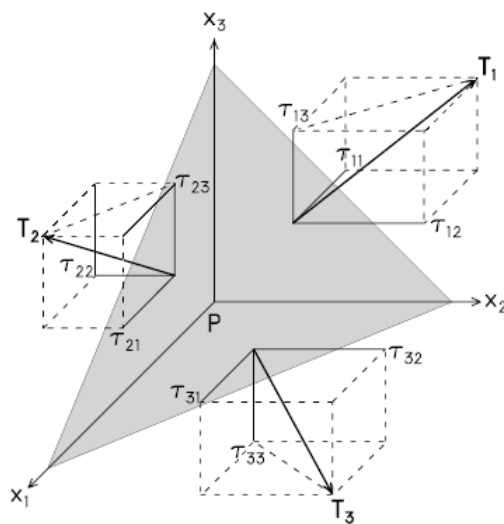


Figura 2.7: Descomposición de cada componente del vector tensión

Entonces

$$T_j(n) = n_i \tau_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Ahora, usando

$$n_i = n \cdot e_i$$

La ecuación (2.6) puede reescribirse como:

$$T(n) = (ne_i)T(e_i) = n \cdot \underbrace{(e_i T(e_i))}_{\text{Tension Diadica}}$$

$$\mathcal{T} = e_i T(e_i)$$

el cual se puede escribir:

$$\mathcal{T} = e_1 T(e_1) + e_2 T(e_2) + e_3 T(e_3)$$

$$= \tau_{11}e_1e_1 + \tau_{12}e_1e_2 + \tau_{13}e_1e_3 + \tau_{21}e_2e_1 + \tau_{22}e_2e_2 + \tau_{23}e_2e_3 + \tau_{31}e_3e_1 + \tau_{32}e_3e_2 + \tau_{33}e_3e_3$$

En términos de la tensión diádica, el vector tensión se puede escribir como:

$$T(n) = n \cdot \mathcal{T}$$

También se puede escribir como:

$$(T_1, T_2, T_3) = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

donde los τ_{ii} son las tensiones normales y los τ_{ij} son las tensiones de corte, para $i \neq j = 1, 2, 3$.

Ecuación de movimiento. Simetría del Tensor de tensores

Teorema de Gauss: Sea $v(x)$ un campo vectorial sobre un volumen V determinado por una superficie cerrada S que tiene normal exterior $n(x)$ y sean v y $div v$ continuos. Entonces el teorema de divergencia establece que:

$$\int_V div v dV = \int_S v \cdot n dS$$

o en forma de componentes:

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i \cdot n_i dS$$

La extensión de este teorema a los tensores es directa.

Si T_{ij} representa un campo tensorial arbitrario, entonces:

$$\int_V T_{ij,k} dV = \int_S T_{ij} \cdot n_k dS$$

Así, de (2.3), (2.4), (2.8) y (2.2.1) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV &= \int_S T_i dS + \int_V \rho f_i dV \\ &= \int_S n_j \tau_{ji} dS + \int_V \rho f_i dV \\ &= \int_V \tau_{ji,j} dV + \int_V \rho f_i dV \\ \implies \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV &= \int_V (\tau_{ji,j} + \rho f_i) dV \\ \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV &= \int_V (\text{div } \tau_{ji} + \rho f_i) dV \\ \implies \int_V (\text{div } \tau_{ji} + \rho f_i - \rho \frac{Dv_i}{Dt}) dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como (2.9) es válido para cualquier volumen arbitrario V dentro del cuerpo y suponiendo la continuidad del integrando, tenemos:

$$\text{div } \tau_{ji} + \rho f_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (2.10)$$

La Ecuación de Movimiento de Euler

En forma diádica

$$\nabla \mathcal{T} + \rho f = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

Luego, por el principio de momento angular se tiene:

$$\frac{dM}{dt} = \text{Sumatoria de torques en el cuerpo}$$

donde $M = \int_V r \times \rho v dV$

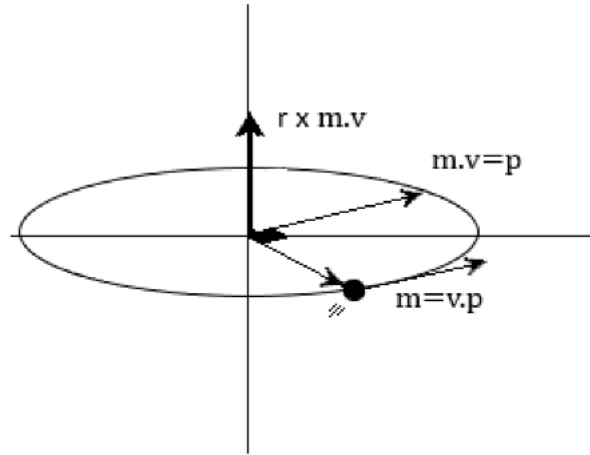


Figura 2.8: r representa el momento angular de un partícula de masa m cuya velocidad esta dada por v

$$\frac{d}{dt} \int_V r \times \rho v dV = \int_S r \times T dS + \int_V r \times \rho f dV$$

Usando (2.4) y (2.2.1), tenemos:

$$\int_V r \times \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_V r \times \text{div} \tau_{ji} dV + \int_V r \times \rho f_i dV$$

$$0 = \int_V (r \times \text{div} \tau_{ji} + r \times \rho f_i - r \times \rho \frac{Dv_i}{Dt}) dV$$

$$0 = \int_V \left(\epsilon_{ijk} (x_j \tau_{rk}) r + \epsilon_{ijk} \rho x_j f_k - \epsilon_{ijk} \rho \frac{D(x_j v_k)}{Dt} \right) dV \quad (2.11)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de permutación, tal que:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0; & \text{si dos índices se repiten} \\ 1; & \text{si } ijk \text{ siguen un orden cíclico} \\ -1; & \text{si } ijk \text{ no siguen un orden cíclico} \end{cases}$$

$$0 = \int_V \left(\epsilon_{ijk} \left[\left(\tau_{rk} \frac{\partial x_j}{\partial x_r} + x_j \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_r} \right) + \rho x_j f_k - \rho \left(\frac{Dx_j}{Dt} v_k + x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) \right] \right) dV$$

$$= \int_V \left[\epsilon_{ijk} (\tau_{jk} + x_j \tau_{rk,r}) + \epsilon_{ijk} \rho x_j f_k - \epsilon_{ijk} \rho v_j v_k - \epsilon_{ijk} \rho x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right] dV$$

$$= \int_V \left(\epsilon_{ijk} \tau_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \operatorname{div} \tau_{rk} + \epsilon_{ijk} \rho x_j f_k - \epsilon_{ijk} \rho v_j v_k - \epsilon_{ijk} \rho x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV$$

donde: $\epsilon_{ijk} v_k v_j = 0$

puesto que,

$$\begin{aligned} \text{Fijando } i &\Rightarrow \epsilon_{i11} v_1 v_1 + \epsilon_{i12} v_2 v_1 + \epsilon_{i13} v_3 v_1 + \epsilon_{i21} v_1 v_2 \\ &+ \epsilon_{i22} v_2 v_2 + \epsilon_{i23} v_3 v_2 + \epsilon_{i31} v_1 v_3 + \epsilon_{i32} v_2 v_3 + \epsilon_{i33} v_3 v_3 \\ &= v_2 v_1 - v_3 v_1 - v_1 v_2 + v_3 v_2 + v_1 v_3 - v_2 v_3 = 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_V \left(\epsilon_{ijk} x_j \operatorname{div} \tau_{rk} + \epsilon_{ijk} \rho x_j f_k - \epsilon_{ijk} \rho x_j \frac{Dv_k}{Dt} + \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \right) dV = 0$$

$$\int_V \left[\epsilon_{ijk} x_j \left(\operatorname{div} \tau_{rk} + \rho f_k - \rho \frac{Dv_k}{Dt} \right) + \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] dV = 0$$

Por (2.9), tenemos:

$$\int_V \epsilon_{ijk} \tau_{jk} dV = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$$

Así

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$$

$$\epsilon_{ikj} \tau_{kj} = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} + \epsilon_{ikj} \tau_{kj} = 0$$

$$\tau_{jk} - \tau_{kj} = 0$$

$$\tau_{jk} = \tau_{kj} \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) se puede usar para reescribir (2.8) como:

$$T_j(n) = \tau_{ji} n_i \quad j = 1, 2, 3$$

Para la ecuación matricial, tenemos:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

En su forma diádica:

$$T(n) = \mathcal{T} \cdot n$$

Ecuación de movimiento bajo la aproximación de una pequeña deformación.

De la ecuación (2.10) y la relación de simetría (2.12) para el tensor de tensores, obtenemos:

$$\text{div } \tau_{ij} + \rho f_i = \frac{Dv_i}{Dt}$$

con aceleración

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (2.13)$$

y velocidad

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (2.14)$$

donde u_i es el vector desplazamiento. Por tanto, para pequeñas deformaciones

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Luego,

$$\text{div } \tau_{ij} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

La ecuación de movimiento de Cauchy

En forma diádica

$$\nabla \cdot \mathcal{T} + \rho f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Deformaciones Hiperelásticas y Elásticas

Deformación Hiperelástica: Este tipo de deformación desaparece a lo largo del tiempo. Es decir, si existe una densidad de energía de deformación, la cual representa la cantidad de energía de deformación por unidad de volumen.

Esta densidad es la función $\omega = \omega(\varepsilon_{ij})$ tal que $\tau_{ij} = \frac{\partial \omega(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$

Deformación Elástica: La tensión depende del valor actual de la deformación es decir, la deformación desaparece inmediatamente siguiendo la ley de Hook.

NOTA: Un material hiperelástico también es elástico

La relación entre la tensión y la deformación es una extensión de la ley de Hook de proporcionalidad entre fuerzas y deformaciones.

Cauchy generalizo la ley de Hook para sólidos elásticos al proponer que la tensión y la deformación están linealmente relacionada.

En forma tensorial, la ley toma la forma:

$$\tau_{kl} = C_{klpq} \varepsilon_{pq} \quad (2.15)$$

Ley generalizada de Hook

Sólidos elásticos e isotrópicos

Se dice que un medio es isotrópico cuando las propiedades del medio son las mismas en cualquier dirección. Ej.: Presión.

Caso contrario será llamado anisotrópico. Ej.: Sustancias cristalinas.

Para medios isotrópicos C_{ijkl} también es isotrópico y tiene la forma:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})$$

Es el único tensor de cuarto orden independientemente de la naturaleza de C_{ijkl} .

Donde λ, μ, ν son escalares y δ_{ij} es llamada delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$$

Por ser τ_{ij} simétrico en los primeros índices

$$\delta_{ik}\delta_{jl} = \delta_{jk}\delta_{il} = \delta_{il}\delta_{jk}$$

Así, tenemos:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.16)$$

donde λ y μ son variables independientes conocidas como parámetros de Lamé.

λ : Primer parámetro de Lamé

μ : Segundo parámetro de Lamé

Ahora, usando (2.15) y (2.16), la simetría de ε_{ij} y la relación entre el tensor de fuerza y el desplazamiento, el cual está dado por

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij} \left[\delta_{kl} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right) \right] + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij} \operatorname{div} u + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{ij} \\
&= \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ii} \delta_{jj}) \varepsilon_{ij} \\
\tau_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{ij}
\end{aligned}$$

Tensor de Tensores

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ es el vector desplazamiento

$x = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector posición

Ahora escribiremos ε_{ij} en términos de τ_{ij} , se tiene

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Entonces

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Así

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk})$$

Luego

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2\mu} (\tau_{kk} - \lambda \delta_{kk} \varepsilon_{kk})$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\tau_{kk}}{2\mu + \lambda \delta_{kk}}$$

como $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\tau_{kk}}{2\mu + 3\lambda}$$

Entonces

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\tau_{kk}}{2\mu + 3\lambda} \right) + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda} \tau_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda} \tau_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda} \tau_{kk} \end{pmatrix} + D$$

donde $\tau_{kk} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \text{Traz}(\tau)$

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_{11} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\tau_{kk} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\tau_{kk} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\tau_{kk} \end{pmatrix}}_{2\mu\varepsilon_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\tau_{kk}}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\tau_{kk}I + D$$

$$D = \tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\tau_{kk} \quad \text{Desvio de isotropia}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\text{Traz}(\tau) \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\tau_{kk} \right) \quad (2.17)$$

Tensión Uniaxial: Se considera una barra cilíndrica con eje en la dirección x_1 sujeta a una fuerza de tensión también a lo largo de x_1 aplicada al extremo de la barra.

Donde $\tau_{11} > 0$ y $\tau_{ij} = 0$ para $i = j = 2, 3$



Figura 2.9: τ_{11} es la tensión ejercida sobre el eje de simetría de una barra, en este caso el eje x_1

Luego, de (2.17)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\tau_{11} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\delta_{11}\tau_{kk} \right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\tau_{11}(\mu + \lambda)}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ii} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ii} \tau_{kk} \right) \quad , \quad i = 2, 3$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{\tau_{11}}{2\mu + 3\lambda} \right) \quad , \quad i = 2, 3$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{\tau_{11}}{2\mu + 3\lambda} \right) \quad (2.19)$$

De (2.18) y (2.19) podemos observar que la barra sufre una extensión longitudinal a lo largo del eje x_1 y una contracción en su sección transversal.

Así, tenemos

$$Y = \frac{\tau_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{MÓDULO DE YOUNG} \quad (2.20)$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{COEFICIENTE DE POISSON} \quad (2.21)$$

De (2.20) y (2.21) se obtienen los PARÁMETROS DE LAMÉ

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$$

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}$$

Tensión cortante simple: Se considera una barra con sección transversal rectangular con eje a lo largo de la dirección x_3 que esta sujeta a fuerzas cortantes de igual magnitud en la plano (x_1, x_2) .

Entonces tenemos:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{12} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{12} \tau_{kk} \right)$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{\tau_{12}}{2\mu}$$

Por lo tanto

$$\mu = \frac{\tau_{12}}{2\varepsilon_{12}} \quad \text{MÓDULO DE CORTE} \quad (2.22)$$

Presión Hidrostática: En este caso $\tau_{ij} = -P\delta_{ij}$ con $P > 0$.

Por tanto de (2.17) obtenemos

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(-P\delta_{ij} + \frac{3P\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{P}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij}$$

En consecuencia $\varepsilon_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

Entonces

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{3P}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij}$$

Si V_0 y $V_0 + dV$ son volúmenes de los elementos pequeños antes y después de la deformación.

Entonces

$$\frac{dV}{V_0} = \varepsilon_{ii}$$

Esto permite que

$$K = -\frac{P}{\varepsilon_{kk}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{MÓDULO DE COMPRESIÓN} \quad (2.23)$$

En general, por razones físicas para sólidos.

Los parámetros elásticos:

$$\mu \geq 0, \quad K \geq 0 \quad (2.24)$$

Para materiales sin resistencia al movimiento de corte como gases y fluidos inviscidos (viscosidad nula)

$$\mu = 0$$

De (2.23)

$$K = \lambda$$

Para materiales con presión nula

$$\varepsilon_{kk} = 0 \quad y \quad K = \infty$$

Además, en general μ es un número finito.

De (2.23)

$$\lambda = \infty$$

Luego de (2.20) y (2.21)

$$Y = 3\mu \quad y \quad \sigma = 12$$

De (2.23) y (2.24) encontramos:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad , \quad \lambda \geq -\frac{2}{3}\mu \quad (2.25)$$

Introduciendo (2.25) en (2.20)

$$Y \geq 0$$

Así, podemos escribir:

$$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

De $\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$ como μ e Y son positivos

$$\sigma > -1$$

De $K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$ como K e Y son positivos y K puede ser finito

$$\sigma \leq \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$-1 < \sigma \leq \frac{1}{2}$$

Se puede suponer $\sigma \geq 0$ puesto que se espera que una extensión longitudinal se acompañe de contracción lateral.

Ecuación de onda elástica amortiguada expuesta a fuerzas externas y fuerzas estructurales sobre un medio elástico e isotrópico

Se tiene que el tensor de tensores para un sólido elástico e isotrópico de la forma:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Sea Ω un cuerpo elástico e isotrópico donde τ son las tensiones superficiales sobre el cuerpo. Por el teorema de la divergencia se tiene:

$$\int_{\partial\Omega} \tau \cdot n dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\tau) dx$$

donde $\operatorname{div}(\tau)$ representa las fuerzas en el cuerpo Ω Entonces:

$$F = \operatorname{div}(\tau)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} u + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\operatorname{div} \tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot (\operatorname{div} u) + \mu \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nabla \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\operatorname{div} \tau = \lambda \nabla \cdot (\operatorname{div} u) + \mu (\nabla \cdot (\operatorname{div} u)) \partial x_j + \mu (\nabla \cdot (\nabla u))$$

$$\operatorname{div} \tau = (\lambda + \mu) [\nabla \cdot (\operatorname{div} u)] + \mu (\nabla^2 \cdot u)$$

$$\Delta_l = \mu (\nabla^2 \cdot u) + (\lambda + \mu) [\nabla (\operatorname{div} u)]$$

Operador de Lamé

Luego, como:

$$F = \operatorname{div}(\tau)$$

Entonces

$$F = \text{div}\tau = \mu(\underbrace{\nabla^2 \cdot u}) + (\lambda + \mu) [\nabla(\text{div}u)]$$

$$F = \text{div}\tau = \mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) [\nabla(\text{div}u)]$$

Donde Δ es llamado *Laplaciano*

Por tanto

$$F = \mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) [\nabla(\text{div}u)] + f(u) - b$$

Donde $f(u)$ representan las fuerzas estructurales y $b = b(x)$ las fuerzas externas.

Por la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

Tenemos

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) [\nabla(\text{div}u)] + f(u) - b = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) [\nabla(\text{div}u)] + f(u) - b = \rho u_{tt}$$

El cual, podemos reescribir usando el Laplaciano de un vector dado por:

$$\Delta u = \nabla(\text{div}u) - \nabla \times (\nabla \times u)$$

y dividiendo por ρ , obtenemos

$$\alpha^2 \nabla(\text{div}u) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times u) + \frac{f(u) - b}{\rho} = u_{tt} \quad (2.26)$$

Donde $\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$

Ahora, vemos que (2.26) implica la propagación de dos tipos de ondas

Primero aplicaremos la operación de divergencia a (2.26).

Usaremos:

$$\nabla \cdot [\nabla(\nabla \cdot u)] = \nabla^2(\nabla \cdot u)$$

y

$$\nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times u) = 0$$

La ecuación (2.26) se convierte en:

$$\alpha^2 \nabla^2(\operatorname{div} u) + \nabla \cdot \frac{f(u) - b}{\rho} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot u)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\operatorname{div} u) - \alpha^2 \Delta(\operatorname{div} u) = \operatorname{div} \frac{f(u) - b}{\rho} \quad (2.27)$$

En un sentido escalar, la ecuación (2.27) representa las P - ondas, las cuales se propagan a una velocidad α donde la $\operatorname{div} u$ representa fracciones de cambios de volumen del tensor de tensores, explicando el comportamiento de rarefacción y tensión en el interior del cuerpo.

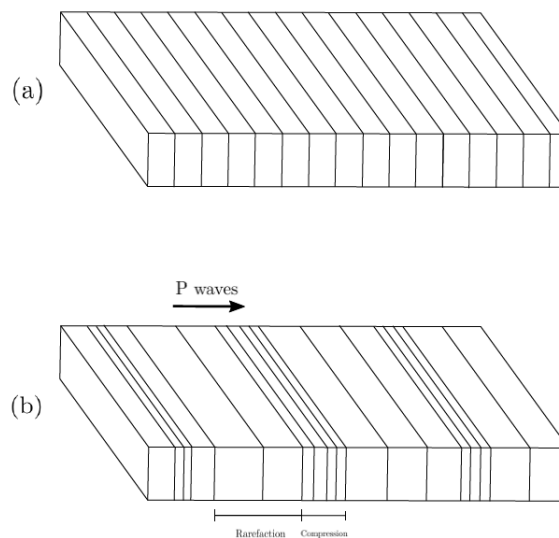


Figura 2.10: En (a) tenemos el cuerpo elástico en posición de reposo. En (b) tenemos el efecto de propagación de las P - ondas sobre el material, donde se producen pequeñas contracciones y dilataciones en la misma dirección de la propagación de la onda.

Ahora aplicaremos la operación rotacional a (2.26).

Usaremos:

$$\nabla \times [\nabla(\nabla \cdot u)] = 0$$

y

$$\nabla \times (\nabla \times \nabla \times u) = -\nabla^2(\nabla \times u)$$

La ecuación (2.26) se convierte en:

$$\beta^2 \nabla^2 (\nabla \times u) + \nabla \times \frac{f(u) - b}{\rho} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times u)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times u) - \beta^2 \Delta (\nabla \times u) = \nabla \times \frac{f(u) - b}{\rho} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) representa las S - ondas que se propagan a una velocidad β donde $\nabla \times u$ representa pequeñas rotaciones de elementos lineales a partir de fuerzas de corte que actúan dentro del cuerpo.

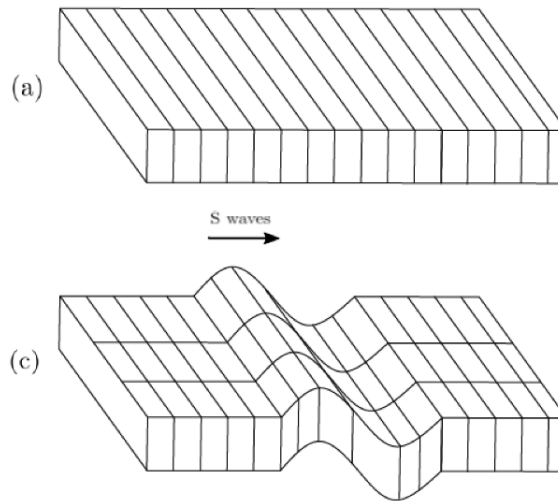


Figura 2.11: En (a) tenemos el cuerpo elástico en posición de reposo. En (c) tenemos el efecto de las S - ondas transversales en el material, que se generan a partir de las fuerzas cortantes y son efectivas en direcciones normales con respecto a la dirección de propagación de la onda.

Finalmente, tenemos que

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + f(u) - b = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$$

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + f(u) - b = \rho u_{tt}$$

Luego, al ser una onda amortiguada presenta fuerzas de amortiguación friccional dadas por $-\alpha u_t$ (α coeficiente de amortiguamiento friccional) y considerando $\rho = 1$

Se obtiene la ecuación de onda sísmica amortiguada expuesta a fuerzas externas sobre un medio elástico e isotrópico dado por:

$$u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha u_t + f(u) = b$$

2.2.2. Aspectos Matemáticos

Definiciones y resultados básicos sobre semigrupos y sus generadores

Recordar que si E_0 y F_0 son espacios de Banach sobre un cuerpo K ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) denotamos por $L(E_0, F_0)$ al espacio de los operadores lineales y continuos $E_0 \rightarrow F_0$ en F_0 con la norma usual; esto es, para $T \in L(E_0, F_0)$,

$$\|T\|_{L(E_0, F_0)} = \sup_{\substack{e \in E_0 \\ e \neq 0}} \frac{\|Te\|_{F_0}}{\|e\|_{E_0}}.$$

En el caso particular $E_0 = F_0$ escribiremos $L(E_0)$ para denotar $L(E_0, E_0)$.

Sea E_0^* un dual topológico de E_0 , esto es $E_0^* = L(E_0, \mathbb{K})$ con la topología dada por la norma anterior. Denotemos el valor de $e^* \in E_0^*$ en $e \in E_0$ por $\langle e^*, e \rangle$ o $\langle e^*, e \rangle$

Definición 1 Una semigrupo de operadores lineales en E_0 y una familia $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que:

(i) $T(0) = I_{E_0}$.

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Adicionalmente

(iii) $\|T(t) - I_{E_0}\|_{L(E_0)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$; decimos que un semigrupo es uniformemente continuo.

(iv) $\|T(t)e - e\|_{E_0} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+ \forall e \in E_0$; decimos que un semigrupo es fuertemente continuo.

Todo semigrupo fuertemente continuo tiene un limitante exponencial que se da en el siguiente teorema.

Teorema 1 Suponga que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ es un semigrupo fuertemente continuo. Entonces, existe $M \geq 1$ y β tales que:

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0$$

Para cualquier $\ell > 0$ podemos elegir $\beta \geq \frac{1}{\ell} \log \|T(\ell)\|_{L(E_0)}$ y luego elegir M

Definición 2 Si $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales, su generador infinitesimal es el operador definido por $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$, donde

$$D(A) = \left\{ e \in E_0 : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t} \text{ existe} \right\}, \quad Ae = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t}.$$

Teorema 2 Suponga que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ es un semigrupo fuertemente continuo.

1. Para cualquier $e \in E_0$, $t \rightarrow T(t)e$ es continuo para $t \geq 0$.
2. $t \rightarrow \|T(t)\|_{L(E_0)}$ es semicontinua inferiormente y por lo tanto medible.
3. Sea A un generador infinitesimal de $T(t)$; entonces, A está densamente definida y cerrada. Para $e \in D(A)$, $t \mapsto T(t)e$ es continuamente diferenciable y

$$\frac{d}{dt} T(t)e = AT(t)e = T(t)Ae, \quad t > 0.$$

4. $\bigcap_{m \geq 1} D(A^m)$ es denso en E_0 .
5. Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ y β dado en el Teorema 1, λ está en la solución $\rho(A)$ de A y

$$(\lambda - A)^{-1}e = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)e dt, \quad \forall e \in E_0.$$

Teorema 3 Suponga que $\{T(t), t \geq 0\}$ y $\{S(t), t \geq 0\}$ semigrupos fuertemente continuos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

Teorema de Hille-Yosida

Teorema 4 (Hille-Yosida) Supongamos que $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ es un operador lineal. Entonces los siguientes datos son equivalentes:

(I) A es un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(II) A es un operador lineal cerrado, densamente definido cuyo conjunto resolvente contiene (ω, ∞) y

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Ambas condiciones (i) y (ii) depende de escoger la norma en E_0 . Daremos una formulación independiente de la norma, pero en la práctica normalmente debemos buscar reglas especiales a las que se aplica este teorema.

Lema 1 Suponga que A es un operador lineal cuyo conjunto solución contiene a $(0, \infty)$ y que satisface

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{L(E_0)} \leq M\lambda^{-n}, \quad n \geq 1, \quad \lambda > 0.$$

Entonces existe una norma $|\cdot|_{E_0}$ en E_0 tal que

$$\|e\|_{E_0} \leq |e|_{E_0} \leq M\|e\|_{E_0}, \quad \forall e \in E_0$$

$$|(\lambda - A)^{-1}e|_{E_0} \leq \lambda^{-1}|e|_{E_0}, \quad \forall e \in E_0, \quad \lambda > 0.$$

Teorema 5 (Forma general del teorema de Hille-Yosida) Sea $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) A es un operador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(II) A es cerrado, densamente definido, el conjunto solución de A contiene a (β, ∞) y

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{L(E_0)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad \forall \lambda > \beta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Teorema de Lumer-Phillips

Definición 3 Sea E_0 un espacio de Banach sobre \mathbb{K} con norma $\|\cdot\|_{E_0}$ y sea $E_0^* = L(E_0, \mathbb{K})$ su dual topológico con la norma usual $\|\cdot\|_{E_0^*}$ ($\|e^*\|_{E_0^*} = \sup\{Re\langle e^*, e \rangle : \|e\|_{E_0} \leq 1\}$). La aplicación de la dualidad $J : E_0 \rightarrow 2^{E_0^*}$ es una función multívoca definida por

$$J(e) = \{e^* \in E_0^* : Re\langle e^*, e \rangle = \|e\|_{E_0}^2, \|e^*\|_{E_0^*} = \|e\|_{E_0}\}.$$

$J(e) \neq \emptyset$, por el teorema de Hahn-Banach.

Un operador lineal $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ es disipativo si para cada $e \in D(A)$ existe $e^* \in J(e)$ tal que $Re\langle e^*, Ae \rangle \leq 0$.

Lema 2 Un operador lineal A es disipativo si y solo si

$$\|(\lambda - A)e\|_{E_0} \geq \lambda\|e\|_{E_0}$$

para todo $e \in D(A)$ y $\lambda > 0$

Teorema 6 (Lumer-Phillips) Supongamos que A es un operador lineal densamente definido en un espacio de Banach E_0 .

(I) Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones, entonces A es disipativo (de hecho, $Re\langle e^*, Ae \rangle \leq 0$ para todo $e^* \in J(e)$) y $R(\lambda - A) = E_0$, para algún $\lambda > 0$,

(II) Si A es disipativo y $R(\lambda_0 - A) = E_0$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces A es un generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

El problema de Cauchy Semilineal para el caso Hiperbólico

El caso Hiperbólico: En esta sección consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e &= Ae + f(t, e) \\ e(t_0) &= e_0 \in E_0.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Donde A es un generador de un semigrupo fuertemente continuo, f es una función continua que está definida en un subconjunto U de $\mathbb{R} \times E_0$ y toma valores en E_0 y $(t_0, e_0) \in U$.

Definición 4

- a) Una solución fuerte de (2.29) en $[t_0, t_1)$ es una función continua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e : (t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es continuamente diferenciable, $e(t_0) = e_0$, $(t, e(t)) \in U$, $e(t) \in D(A)$ y (2.29) es verdadero, $t_0 < t < t_1$.
- b) Una solución débil de (2.29) en $[t_0, t_1)$ es una función continua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e(t_0) = e_0$, $(t, e(t)) \in U$, para todo $e^* \in D(A^*)$, $t \mapsto \langle e^*, e(t) \rangle$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt} \langle e^*, e(t) \rangle = \langle A^* e^*, e(t) \rangle + \langle e^*, f(t, e(t)) \rangle, \quad t_0 < t < t_1.\tag{2.30}$$

Con ello tenemos el siguiente teorema

Teorema 7

1. Si $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ una solución fuerte de (2.29) entonces es una solución débil de (2.29)
2. Una solución débil $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ de (2.29) también es una solución fuerte si y solo si es continuamente diferenciable en (t_0, t_1) si y solamente si $e(t) \in D(A)$ con $t \mapsto Ae(t)$ continua en (t_0, t_1)
3. Si $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es una solución débil de (2.29), entonces

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e(s))ds, \quad t_0 \leq t < t_1.\tag{2.31}$$

4. Si $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es continua con $(t, e(t)) \in U, t_0 \leq t < t_1$ y satisface (2.31), entonces $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es una solución débil de (2.29).

Teorema 8 Supongamos que $\{e^{At}, t \geq 0\}$ es un semigrupo fuertemente continuo, $U \subset \mathbb{R} \times E_0$ un abierto y $f : U \rightarrow E_0$ continua y localmente Lipschitz continua en su segunda variable; esto es, dado un $(t_0, e_0) \in U$ existe $\delta > 0$ y L tal que

$$\|f(t, e_1) - f(t, e_2)\|_{E_0} \leq L\|e_1 - e_2\|_{E_0} \quad (2.32)$$

cuando $|t - t_0| \leq \delta$ y $\|e_i - e_0\|_{E_0} \leq \delta, i = 1, 2$. Entonces dado cualquier $(t_0, e_0) \in U$ existe $t_1 > t_0$ y una solución débil $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ de (2.29). Adicionalmente, cualquier solución débil $\tilde{e} : [t_0, \tilde{t}_1) \rightarrow E_0$ tal que $\tilde{e}(t) = e(t)$ para $t_0 \leq t < \min\{t_1, \tilde{t}_1\}$.

A continuación obtendremos resultados sobre extensión de soluciones de (2.29) y la existencia de intervalos máximos de definición para soluciones de (2.29). Estos resultados son esenciales para el estudio del comportamiento asintótico de soluciones de (2.29) permitiendo, en muchos casos, obtener la existencia de soluciones globales a través de alguna estimación previa.

Teorema 9 Supongamos que A, U y f son como en el Teorema 8. Para $(t_0, e_0) \in U$ existe una única solución débil máxima $e : [t_0, \tau_{max}) \rightarrow E_0$ de (2.29). Para esta solución suponga que $\tau_{max} < \infty$. Entonces existe $e_1 \in E_0$ tal que $(\tau_{max}, e_1) \in \partial U$ y $e(t) \rightarrow e_1$ cuando $t \rightarrow \tau_{max}$ o

$$\limsup_{t \rightarrow \tau_{max}} \frac{\|f(t, e(t))\|_{E_0}}{1 + \|e(t)\|_{E_0}} = \infty.$$

Si $U = \mathbb{R} \times E_0$ y f lleva subconjuntos acotados de $\mathbb{R} \times E_0$ en subconjuntos acotados de E_0 , el segundo caso sólo ocurre si $\limsup_{t \rightarrow \tau_{max}} \|e(t)\|_{E_0} = \infty$.

Teorema 10 Supongamos que A, U y f son como en el Teorema 8 y supongamos que $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ y una solución débil de (2.29). Si $e(t_0) = e_0 \in D(A)$ y $f : U \rightarrow E_0$ y continuamente diferenciable, entonces $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es continuamente diferenciable y por tanto una solución fuerte. Adicionalmente

$$\frac{d^+}{dt}e(t_0) = Ae(t_0) + f(t_0, e(t_0)).$$

Observación 1 Es suficiente que $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, e) \in E_0$ sea continua y que $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, e) \in L(E_0)$ sea fuertemente continua; esto es, $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, e)r \in E_0$ es continua para cada $r \in E_0$.

Teorema 11 Supongamos que A, U y f son como en el Teorema 8 y supongamos que E_0 es reflexivo. Si E_A es $D(A)$ la norma del gráfico $\|e\|_A = \|e\|_{E_0} + \|Ae\|_{E_0}$, f va de $U \cap (\mathbb{R} \times E_A)$ continua a E_A y

$$\|Af(t, e)\|_{E_0} \leq C(t, e)\|e\|_{E_A}$$

en $U \cap (\mathbb{R} \times E_A)$ donde $C : U \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente acotado. Entonces, cualquier solución débil $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ de (2.29) con $e(t_0) \in D(A)$ es una solución fuerte y $\|Ae(t) - Ae(t_0)\|_{E_0} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0^+$.

Teorema 12 Supongamos que A, U y f son como en el Teorema 8 y supongamos que $f_n : U \rightarrow E_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) también satisface las condiciones del Teorema 8. Supongamos que $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ es una solución débil de (2.29) y que $f_n(t, e) \rightarrow f(t, e)$ cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente para (t, e) en una vecindad de cada punto $(\tau, e(\tau)), t_0 \leq \tau < t_1$. Sea $\{e_{n_0}\}$ una sucesión en E_0 convergente para $e_0 \in E_0$ y e_n una solución débil de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_n &= Ae_n + f_n(t, e_n(t)) \\ e_n(t_0) &= e_{n_0} \end{aligned} \tag{2.33}$$

en un intervalo maximal $[t_0, t_n)$. Dado $t_0 < t^* < t_1$, para n grande, e_n está definido en $[t_0, t^*]$; esto es, $t_n > t^*$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq t^*} \|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} = 0$$

Corolario 1 Supongamos que A, U y f son como en el Teorema 8 y que f también es continuamente diferenciable. Dado cualquier solución débil $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ y $t_0 < t^* < t_1$, existen soluciones fuertes $e_n : [t_0, t^*] \rightarrow E_0, n = (1, 2, 3, \dots)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq t^*} \|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} = 0$

Debido a que el presente trabajo se basa en la aplicación del estudio de la dinámica a largo plazo motivada en los sistemas cuasi-estables y gradientes (véase [10,11]), es necesario explorar la teoría de los sistemas dinámicos autónomos vía semigrupos. En este caso, la referencia principal estará dada por Hale [15]. Es así como se mencionaran algunos hechos básicos sobre sistemas dinámicos.

- Un atractor global para un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es un conjunto compacto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ que es completamente invariante y de atracción uniforme, es decir, para cualquier subconjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_{\mathcal{H}}(S(t)B, \mathcal{A}) = 0$$

- La dimensión fractal de un conjunto compacto $B \subset \mathcal{H}$ se define como

$$\dim_f B = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\epsilon}(B)}{\ln(1/\epsilon)},$$

Donde $N_{\epsilon}(B)$ es el número mínimo de bolas cerradas de radio 2ϵ necesarias para cubrir B .

- El conjunto de puntos estacionarios \mathcal{N} de un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ se define como

$$\mathcal{N} = \{V \in \mathcal{H} \mid S(t)V = V, \quad \forall t > 0\}.$$

- Un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es llamado *gradiente* si existe un funcional de Lyapunov estricto Ψ , es decir, para cualquier $z \in \mathcal{H}$, $\Psi(S(t)z)$ es decreciente con respecto a $t \geq 0$ y es constante en el conjunto de puntos estacionarios \mathcal{N} .
- Dado un conjunto $B \subset \mathcal{H}$, su *variedad inestable* $W^u(B)$ es el conjunto de puntos $z \in \mathcal{H}$ que pertenece a alguna trayectoria completa $\{y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ y satisface

$$y(0) = z \quad \text{y} \quad \limsup_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(y(t), B) = 0$$

- *Cuasi-estabilidad.* Sea X, Y espacios reflexivos de Banach con incrustación compacta

$X \xrightarrow{c} Y$ y $\mathcal{H} = X \times Y$. Supongamos que $(\mathcal{H}, S(t))$ está dado por

$$S(t)z = (u(t), u_t(t)), \quad z = (u_0, u_1) \in \mathcal{H},$$

donde

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y),$$

Entonces, $(\mathcal{H}, S(t))$ se llama *cuasi- estable* en un conjunto $B \subset \mathcal{H}$ si existe una semi-norma compacta η_X en X y funciones escalares no negativas $a_1(t)$ y $a_3(t)$ acotadas localmente en \mathbb{R}^+ y $a_2(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con $\lim_{t \rightarrow \infty} a_2(t) = 0$ tal que

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a_1(t)\|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}}^2,$$

y

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a_2(t)\|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}}^2 + a_3(t) \sup_{0 \leq s \leq t} [\eta_X(u^1(s) - u^2(s))]^2,$$

para cualquier $z^1, z^2 \in B$.

Proposición 1 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico de gradiente asintóticamente suave. Además, si su función de Lyapunov $\Psi(x)$ está acotada superiormente en cualquier subconjunto acotado de \mathcal{H} , el conjunto $\Psi_R = \{x \in \mathcal{H} : \Psi(x) \leq R\}$ está acotado para todo R y el conjunto \mathcal{N} de puntos estacionarios de $(\mathcal{H}, S(t))$ está acotado, entonces $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un atractor global compacto caracterizado por $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N})$.

Proposición 2 Supongamos que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es cuasi-estable en cada conjunto invariante directo acotado $B \subset \mathcal{H}$. Entonces, $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintóticamente suave.

Proposición 3 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico cuasi- estable. Si $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un atractor global compacto \mathcal{A} y es cuasi- estable en \mathcal{A} , cuando el atractor \mathcal{A} tiene dimensión fractal finita $\dim_f \mathcal{A} < \infty$.

Teorema 13 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico. Entonces, diremos que dicho sistema dinámico posee atractor global \mathcal{A} si, y solamente si, es asintóticamente compacto y

disipativo. Además, en caso afirmativo, si B denota la colección de todos los subconjuntos acotados no vacíos de \mathcal{H} , entonces el atractor \mathcal{A} viene dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$$

Donde $\omega(B)$ es el conjunto ω - límite de B y es dado por:

$$\omega(B) = \{x \in X : \text{existen soluciones } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}^+ \text{ con}$$

$$t_n \rightarrow \infty \text{ y } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } B \text{ tal que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n\}$$

En particular, si el conjunto de puntos estacionarios \mathcal{N} de $S(t)$ es acotado en \mathcal{H} , y el sistema $(\mathcal{H}, S(t))$ es gradiente, entonces \mathcal{A} esta caracterizado por las variedades inestables $W^u(N)$.

2.3. Marco Conceptual

Debido a la naturaleza formal del estudio, basaremos el trabajo en Definiciones y Teoremas formales que admiten una demostración o descripción exhaustiva con relación a la línea de investigación.

2.4. Definición de términos básicos

Definición 5 Una familia de operadores no necesariamente lineales $S(t)_{t \geq 0}$, fuertemente continua en \mathcal{H} es llamado C_0 -semigrupo si:

- $S(0) = I$ (Operador identidad de \mathcal{H})
- $S(t + s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$
- La aplicación $[0, \infty) \times \mathcal{H} \ni (t, x) \rightarrow S(t)(x) \in \mathcal{H}$ es continua para cada $x \in \mathcal{H}$ dado.

El par $(\mathcal{H}, S(t))$ también es llamado sistema dinámico, definido por el semigrupo $S(t)$.

Definición 6 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico y A un subconjunto de X .

- Diremos que A es positivamente invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)A \subset A$ para todo $t \geq 0$.
- Diremos que A es invariante por la acción del semigrupo $S(t)$, cuando $S(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.

Definición 7 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico. Diremos que un subconjunto $A \subset X$ es un atractor global de $(\mathcal{H}, S(t))$ cuando:

- A es un conjunto cerrado y acotado.
- A es un conjunto invariante por $S(t)$.
- A atrae cualquier subconjunto acotado de \mathcal{H} por la acción del semigrupo $S(t)$, esto es, para todo conjunto acotado $B \subset X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dist_H(S(t)B, A) = 0$$

Donde $dist_H(A, B)$ es la semi-distancia de Hausdorff entre los subconjuntos $A, B \subset \mathcal{H}$ y es dada por

$$dist_H(A, B) = \sup_{x \in A} d_{\mathcal{H}}(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Definición 8 Sea $(\mathcal{H}, S(t))$ un sistema dinámico. Un conjunto $B \subset \mathcal{H}$ es llamado Conjunto Absorbente de $(\mathcal{H}, S(t))$ si, para cualquier subconjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$, existe $\tau_0 = \tau_0(B) \geq 0$ tal que

$$S(t)B \subset B, \quad \forall t \geq \tau_0.$$

Cuando un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un conjunto absorbente acotado, diremos que $(\mathcal{H}, S(t))$ es un sistema dinámico disipativo.

Definición 9 La función $L \in C(\mathcal{H}, R)$ es llamada funcional de Lyapunov si

- $L(\zeta) \rightarrow \infty$ si y solo si $\|\zeta\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$
- $t \rightarrow L(S(t)z)$ es no- creciente para todo $z \in \mathcal{H}$.

- Si $L(S(t)z) = L(z)$ para todo $t > 0$ entonces z es un punto estacionario para $S(t)$.
- Un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es llamado de sistema gradiente si posee un funcional de Lyapunov.

Definición 10 Un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es llamado asintóticamente compacto si existe un conjunto $K \subset \mathcal{H}$ compacto tal que para cada conjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(S(t)B, K) = 0$$

Capítulo 3

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

(*HG*) El semigrupo de soluciones asociado a un sistema de Lamé semilineal posee un atractor global.

3.1.2. Hipótesis específica

(*H1*) El sistema de Lamé semilineal está bien colocado en el sentido de Hadamard.

(*H2*) El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal posee estructura gradiente.

(*H3*) El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasiestable.

3.2. Definición conceptual de variables

3.2.1. Operacionalización de variables

- Variable dependiente (D)
Existencia de un atractor global
- Variable independiente (I)
Sistema de Lamé semilineal

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
<i>D</i>	Existencia de un semigrupo de soluciones Estructura gradiente Semigrupo cuasiestable	El sistema está bien colocado en el sentido de Hadamard. Existe un funcional Lyapunov para el semigrupo asociado de soluciones. El sistema es cuasiestable y satisface la desigualdad (1.2)	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación
<i>I</i>	Modelo físico-matemático. Soluciones débiles. Problema de Cauchy abstracto.	El sistema planteado responde a una problemática física a partir de una interpretación matemática. Existe un espacio de fase adecuado para el tipo de soluciones que se quieren estudiar. El modelo responde a un problema de Cauchy abstracto sobre espacios de dimensión infinita.	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación

Capítulo 4

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación.

4.1.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2. Diseño de la investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del modelaje físico del tensor de tensiones superficiales para cuerpos elásticos e isotrópicos generando, a partir del Teorema de la divergencia, al operador de Lamé, lo que permitirá entender la construcción de sistema hiperbólico semilineal para cuerpos elásticos isotrópicos a partir de un modelo de Lamé semilineal. Es importante recordar que este sistema modela las vibraciones de las ondas generadas en la sismología y que viajan por medios elásticos. Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve a los espacios de Sobolev con el fin de poder probar la buena colocación (i.e. existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales) para el problema de Lamé semilineal.

Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis funcional, de tal manera que se pueda probar la existencia de soluciones en el espacio de fase débil.

4.2. Método de investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser esta el tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación

4.3. Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, la estación de trabajo remoto con la que cuento, en mi hogar, etc. El periodo desarrollado para este trabajo fue durante la pandemia del COVID-19 con una duración de 12 meses entre los meses de Agosto del 2020 y Agosto del 2021.

Capítulo 5

RESULTADOS

5.1. Hipótesis

Las siguientes hipótesis se considerarán a lo largo de este trabajo para las funciones definidas en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con borde suave $\partial\Omega$.

(I) El coeficiente de amortiguamiento α y los coeficientes de Lamé λ , μ ; cumplen

$$\alpha, \mu > 0 \quad y \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad con \quad \mu + \lambda \geq 0. \quad (5.1)$$

(II) La fuerza vectorial externa b satisface

$$b \in (L^2(\Omega))^3. \quad (5.2)$$

(III) El campo vectorial no lineal $f = (f_1, f_2, f_3)$ satisface que existe un campo vectorial $g = (g_1, g_2, g_3) \in (C^1(\mathbb{R}^3))^3$ y funciones $G \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $h_i \in C^2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$. Tal que

$$f = (u_1, u_2, u_3) = g_i(u_1, u_2, u_3) + h_i(u_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$f_i(0) = g_i(0) = h_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$g = (g_1, g_2, g_3) = \nabla G.$$

Además, existen constantes $M, m_f \geq 0$. Tal que

$$f(u) \cdot u - G(u) - \sum_{i=1}^3 \int_0^{u_i} h_i(s) ds \geq -M|u|^2 - m_f, \forall u \in \mathbb{R}^3 \quad (5.3)$$

$$G(u) + \sum_{i=1}^3 \int_0^{u_i} h_i(s) ds \geq -M|u|^2 - m_f, \forall u \in \mathbb{R}^3 \quad (5.4)$$

con

$$0 \leq M < \frac{\mu \lambda_1}{2}, \quad (5.5)$$

Donde $\lambda_1 > 0$ denota el primer valor propio del operador laplaciano $-\Delta$. Además, con respecto a las funciones g_i y $h_i, i = 1, 2, 3$, adicionalmente se asumirá que:

- g cumple la restricción de crecimiento subcrítico, es decir, existen $1 \leq p < 3$ y $M_g > 0$, tales que, para $i = 1, 2, 3$

$$|\nabla g_i(u)| \leq M_g(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} + |u_3|^{p-1}), \forall u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (5.6)$$

- Para cada $i = 1, 2, 3$, h_i cumple la restricción de crecimiento crítico, es decir, existe una constante $c_h > 0$ tal que

$$|h'_i(x)| \leq c_h(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

5.2. Entorno funcional

Ahora denotamos el producto interno en $L^2(\Omega)$ por $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv dx$ para $u, v \in L^2(\Omega)$. Por simplicidad, utilizamos la misma notación para el producto interno en $(L^2(\Omega))^3$,

es decir, dado $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in (L^2(\Omega))^3$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle u_i, v_i \rangle.$$

De manera similar, $\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle$ representa el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ así como el producto interno en $(H_0^1(\Omega))^3$. Por lo tanto, dado $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in (L^2(\Omega))^3$.

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \nabla u_i, \nabla v_i \rangle.$$

Adicionalmente, para $p > 0$, denotamos las normas en los espacios $L^p(\Omega)$ y $(L^p(\Omega))^3$ por $|\cdot|_p$ y $\|\cdot\|_p$, respectivamente, es decir,

$$|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in L^p(\Omega),$$

$$\|u\|_p^p = \sum_{i=1}^3 |u_i|_p^p, \quad u = (u_1, u_2, u_3) \in (L^p(\Omega))^3.$$

En particular, para $p = 2$, se lee

$$\|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle \text{ para } u \in (L^2(\Omega))^3 \text{ y } |u|_2^2 = \langle u, u \rangle \text{ para } u \in L^2(\Omega).$$

El operador de elasticidad \mathcal{E} , con dominio $D(\mathcal{E}) := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$, esta dada por

$$\mathcal{E}u = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u). \quad (5.8)$$

Consideramos el espacio de Hilbert $((H_0^1(\Omega))^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$, donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ esta dado por

$$\langle v, w \rangle_e = \mu \langle \nabla v, \nabla w \rangle + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} v, \operatorname{div} w).$$

Observación 2 *Bajo las notaciones anteriores, es fácil verificar que las normas $\|\cdot\|_e^2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_e}$ y $\|\nabla \cdot\|_2^2 = \sqrt{\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle_2}$ son equivalentes en $((H_0^1(\Omega))^3)$. Con más precisión, se tiene*

$$\mu \|\nabla u\|_2^2 \leq \|u\|_e^2 \leq a_0 \|\nabla u\|_2^2, \quad \forall u = (u_1, u_2, u_3) \in (H_0^1(\Omega))^3. \quad (5.9)$$

donde $a_0 = \text{máx} \{ \mu + 3(\lambda + \mu) \}$.

Además, si $u \in D(\mathcal{E})$ y $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, entonces es fácil verificar que

$$\langle \mathcal{E}u, v \rangle = \langle u, v \rangle_e \quad (5.10)$$

De (5.10), Observación 2 y la incrustación compacta de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ se puede ver que \mathcal{E} es un operador autoadjunto positivo. Denotamos la potencia fraccionaria asociada a \mathcal{E} por \mathcal{E}^r con dominio $X^r := D(\mathcal{E}^r)$, que está dotado del producto interno natural $\langle \cdot, \cdot \rangle_r = \langle \mathcal{E}^r \cdot, \mathcal{E}^r \cdot \rangle_e$. En particular,

$$X^0 = ((L_2(\Omega))^3; \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

$$X^{1/2} = ((H_0^1(\Omega))^3; \langle \mathcal{E}^{1/2} \cdot, \mathcal{E}^{1/2} \cdot \rangle),$$

$$X^1 = (D(\mathcal{E}); \langle \mathcal{E} \cdot, \mathcal{E} \cdot \rangle).$$

Observación 3 Del teorema de Riesz junto con los argumentos de densidad y continuidad, tenemos

$$\langle u, v \rangle_{1/2} = \langle u, v \rangle_e, \quad \forall u, v \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Finalmente, definimos el espacio de fase débil (Hilbert) $\mathcal{H} := X^{1/2} \times X^0$ con el producto interno usual y norma inducida $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$; y el espacio de fase fuerte (Hilbert) $\mathcal{H}^1 := X^1 \times X^{1/2}$.

5.3. Buena colocación y estimación de energía

Bajo las hipótesis y anotaciones anteriores, podemos establecer la buena colocación en el sentido de Hadamard de (1.2). Empezamos por denotar

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{E} & \alpha \end{bmatrix}, \mathbb{F}(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(u) \end{bmatrix}, \mathbb{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

Entonces, el problema (1.2) es equivalente al problema de Cauchy

$$U_t + \mathbb{E}U + \mathbb{F}U = \mathbb{B}, \quad U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde $\mathbb{E} : D(\mathbb{E}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ con dominio

$$D(\mathbb{E}) = \{(u, v) \in \mathcal{H} \mid \mathcal{E}u + \alpha v \in X^0, v \in X^{1/2}\} = \mathcal{H}^1.$$

Teorema 14 (Buena colocación). *Supongamos que (5.1)- (5.7) se cumple.*

(i) *Para $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, entonces existe un tiempo $T_{\text{máx}} > 0$ tal que el sistema (5.12) posee una solución única suave*

$$U \in C([0, T_{\text{máx}}]; \mathcal{H}).$$

Adicionalmente, se tiene que $T_{\text{máx}} = +\infty$.

(ii) *Para $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^1$, entonces existe un tiempo $T_{\text{máx}} > 0$ tal que el sistema (5.12) posee una solución única regular*

$$U \in C([0, T_{\text{máx}}]; \mathcal{H}^1).$$

Adicionalmente, se tiene que $T_{\text{máx}} = +\infty$.

(iii) *Para cualquier $T > 0$ y cualquier conjunto acotado $B \in \mathcal{H}$, existe una constante $C_{BT} > 0$ tal que para dos soluciones cualesquiera $z^i = (u^i, u_t^i)$ de (5.12) con dato inicial $z_0^i \in B, i = 1, 2$, tenemos*

$$\|z^1(t) - z^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{BT} \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

Prueba. Es fácil comprobar que el operador \mathbb{E} dado en (5.12) es un operador monótono máximo, puesto que si $z = (u, v) \in D(\mathbb{E})$, entonces de (5.10) se tiene que

$$\langle \mathbb{E}z, z \rangle = -\alpha \|v\|_2^2 \leq 0,$$

mostrando que el operador es disipativo.

Ahora, si $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{H}$ entonces se prueba que existe $z = (u, v) \in D(\mathbb{E})$ satisfaciendo que

$$(I - \mathbb{E})z = \tilde{z}$$

o equivalentemente

$$u - v = \tilde{u},$$

$$\mathcal{E} + (\alpha + 1)v = \tilde{v},$$

puesto que si se considera una función $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^3$ y se integra sobre Ω , entonces

$$(\alpha + 1) \langle u, \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle_e = \langle \tilde{v} + (\alpha + 1)\tilde{u}, \varphi \rangle.$$

Es decir bastaría mostrar que la formulación variacional

$$B(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

donde

$$B(u, \varphi) = (\alpha + 1) \langle u, \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle_e,$$

$$L(\varphi) = \langle \tilde{v} + (\alpha + 1)\tilde{u}, \varphi \rangle.$$

Esto es claro debido a que B es una forma bilineal y coerciva, luego por Lax-Milgran se tiene la sobreyectividad deseada. Por tanto, aplicando la teoría clásica de semigrupos lineales, en particular el Teorema de Lummer-Phillips se concluyen los puntos (i) - (ii) para $T_{\text{máx}} > 0$.

Para mostrar que $T_{\text{máx}} = +\infty$, veamos la siguiente proposición.

En lo que sigue damos algunas desigualdades útiles que involucran la energía funcional. La energía funcional total asociada al problema (5.11) está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} G(u) dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_0^{u_i} h_i(s) ds dx - \langle b(x), u \rangle. \quad (5.13)$$

Proposición 4 *Bajo la hipótesis (5.1)-(5.7), tenemos:*

(i) La energía $E(t)$ no aumenta con $E(t) \leq E(0)$ para todo $t \geq 0$;

(ii) Existe una constante positivas K_1, K_2 y K_3 tal que

$$K_2\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - K_3 \leq E(t) \leq K_1\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^4 + K_3, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.14)$$

Prueba.

(i) Tomando el multiplicador u_t en el problema (1.2), luego un cálculo directo nos lleva a

$$E'(t) = -\alpha\|u_t\|_2^2 \leq 0, \quad \forall t > 0, \quad (5.15)$$

de donde se sigue fácilmente lo establecido en el punto (i).

(ii) Para las condiciones (5.1) - (5.7) y la desigualdad de Young con $\epsilon > 0$, la expresión

$$I = \int_{\Omega} G(u)dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_0^{u_i} h_i(s)dsdx - \langle b(x), u \rangle$$

se puede estimar desde abajo y desde arriba de la siguiente manera

$$I \geq -m_f|\Omega| - \frac{\epsilon}{4}\|b\|_2^2 - \left(\frac{M}{\lambda_1\mu} + \frac{1}{\lambda_1\mu\epsilon} \right) \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$$\begin{aligned} I &\leq C_f|\Omega| + \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + \frac{C_g}{\mu^{\frac{p+1}{2}}}\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1} \\ &\quad + \frac{C_h}{\mu^2}\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^4 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\mu}}\|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

donde las constantes genéricas positivas dependen de su índice y algunas incrustaciones con $H_0^1(\Omega)$, por ejemplo, C_h depende de la constante c_h en (5.7) y la incrustación compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. De esto y de la definición de $E(t)$ en (5.13), inferimos

$$E(t) \leq C_f|\Omega| + \frac{1}{2}\|b\|_2^2 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\mu}} + \frac{C_g}{\mu^{\frac{p+1}{2}}}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{C_g}{\mu^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{C_h}{\mu^2} \right) \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^4$$

$$E(t) \geq -m_f |\Omega| - \frac{\epsilon}{4} \|b\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{M}{\lambda_1 \mu} - \frac{1}{\lambda_1 \mu \epsilon} \right) \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por lo tanto, a partir de una elección adecuada de $\epsilon > 0$ y utilizando la condición (5.5), se puede concluir la existencia de constantes positivas K_1 , K_2 y K_3 que satisfacen (5.14).

□

Observación 4 Hacemos hincapié en que las constantes anteriores K_1 , K_2 y K_3 en (5.14) no dependen del parámetro λ .

5.4. Resultado principal y pruebas

Ahora estamos en condiciones de afirmar y demostrar el principal resultado en relación con los atractores globales asociados con el problema (1.2).

Dice lo siguiente.

Teorema 15 *Bajo los supuestos (5.1) - (5.7), tenemos:*

- (I) *El sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondiente al problema (1.2) tiene un único atractor \mathcal{A} con dimensión fractal finita $\dim_f \mathcal{A} < \infty$, y se caracteriza por la variedad inestable $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N})$ que emana del conjunto de puntos estacionarios \mathcal{N} de $(\mathcal{H}, S(t))$.*
- (II) *Además, si $h_i = 0, i = 1, 2, 3$, entonces \mathcal{A} está acotado en el espacio de fase fuerte \mathcal{H}^1 . En particular, cualquier trayectoria completa $\{(u(t), u_t(t)), t \in \mathbb{R}\}$ que pertenezca a \mathcal{A} tiene las siguientes propiedades de regularidad*

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}; (H_0^1(\Omega))^3) \cap C(\mathbb{R}; (L^2(\Omega))^3), u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}; (L^2(\Omega))^3), \quad (5.16)$$

y existe $R > 0$ tal que

$$\|(u_t(t), u_{tt}(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R^2, \quad (5.17)$$

donde R no depende de λ

La demostración del Teorema 15 se concluirá al final de esta sección como consecuencia de algunos resultados técnicos proporcionados a continuación.

5.4.1. Propiedad de Gradiente

Lema 3 *Bajo los supuestos del Teorema 15, definamos el funcional*

$$\begin{aligned}\Psi &: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto \Psi(z) := \Psi(u, v)\end{aligned}$$

Dada por

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} G(u) dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_0^{u_i} h_i(s) ds dx - \langle b(x), u \rangle. \quad (5.18)$$

Luego

1. Ψ es un funcional de Lyapunov estricto ;
2. $\Psi(z) \rightarrow \infty$ si y solo si $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$;
3. \mathcal{N} está acotado en \mathcal{H}

Como consecuencia, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado con el problema (1.2) es un sistema gradiente.

Prueba. Fijemos $z_0 \in \mathcal{H}$ y recuerde que \mathcal{N} es el conjunto de puntos estacionarios de $\langle (\mathcal{H}, S(t)) \rangle$. Además, de (5.13) se ve que $\Psi(u(t), u_t(t)) = E(u(t), u_t(t)) := E(t)$. Entonces, inferimos:

- De (5.15), es claro que $\Psi(S(t)z_0)$ es decreciente con respecto al tiempo y de (5.14), $\Psi(z) = \Psi(S(0)z) \rightarrow \infty$ si y solo si $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$.
- Consideremos el problema estacionario:

$$\begin{cases} \mathcal{E}u + f(u) = b(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.19)$$

Por lo tanto, un cálculo simple muestra que \mathcal{N} está dado por

$$\mathcal{N} = \{(u, 0) \in \mathcal{H} \mid u \text{ es la solución de (5.19)}\}$$

Además, a partir de (5.15) es fácil probar que Ψ es constante en \mathcal{N} . Finalmente, multiplicar (5.19) por u , integrando en Ω y usando (5.3) y (5.4), obtenemos que para cualquier $\epsilon > 0$

$$\left(1 - \frac{2M}{\lambda_1 \mu} - \frac{1}{4\lambda_1 \mu \epsilon}\right) \|u\|_e^2 \leq 2m_f |\Omega| + \epsilon \|b\|_2^2, \quad (5.20)$$

de donde (junto con (5.5)) concluimos que \mathcal{N} está acotado en \mathcal{H} , para $\epsilon > 0$ propiamente elegido.

Por lo tanto, se prueban los ítems 1-3. □

5.4.2. Propiedad de Cuasi-estabilidad

Proposición 5 (*Estimación de estabilidad*) *Bajo los supuestos del Teorema 15, consideremos un subconjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$ y dos soluciones débiles $z^1 = (u^1, u_t^1)$ y $z^2 = (u^2, u_t^2)$ del problema (1.2) con datos iniciales $z_0^1 = (u_0^1, u_1^1), z_0^2 = (u_0^2, u_1^2) \in B$. Luego,*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a_2(t) \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{0 \leq s \leq t} \|u^1(s) - u^2(s)\|_{p_0}^2, \quad (5.21)$$

Entonces $p_0 = \max\{4, \frac{6}{4-p}\} < 6, a_2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con $\lim_{t \rightarrow \infty} a_2(t) = 0$ y $c(t)$ es una función localmente acotada.

Prueba. La estimación (5.21) es uno de los núcleos principales del presente trabajo. Su prueba es bastante técnico y extenso, por lo que vamos a proceder en varios pasos de la siguiente manera.

Paso 1. Definición del problema de diferencia y funcionales.

Denotemos $w = u^1 - u^2$ con $u^i = (u_1^i, u_2^i, u_3^i), i = 1, 2$. Entonces, un cálculo simple muestra que w es una solución (en el sentido débil y fuerte) del siguiente problema

$$\begin{cases} w_{tt} + \mathcal{E}w + \alpha w_t + f(u^1) - f(u^2) = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(x, 0) = u_0^1(x) - u_0^2(x), & x \in \Omega, \\ w_t(x, 0) = u_1^1(x) - u_1^2(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.22)$$

La energía asociada con el sistema (5.22) está dada por

$$\Xi(t) := \frac{1}{2} \|(w, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad t \geq 0. \quad (5.23)$$

También configuramos el funcional

$$\chi(t) = \langle w, w_t \rangle,$$

y el funcional de energía perturbada

$$\Upsilon(t) = \epsilon_1 \Xi(t) + \epsilon_2 \chi(t),$$

donde las constantes $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ se elegirán más tarde.

Paso 2. Equivalencia. Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \Xi(t) \leq \Upsilon(t) \leq C_2 \Xi(t). \quad (5.24)$$

De hecho, las desigualdades en (5.24) siguen tomando $K' = \max\{\frac{c^2 p}{\mu}, 1\}$, con $c_p > 0$ procedente de la desigualdad de Poincaré y μ de (5.9), $\epsilon_1 > \epsilon_2 K'$, $C_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 K'$.

Paso 3. Estimación de Ξ' . Dado $\xi > 0$, existe una constante $C(\xi, B) > 0$, que depende de ξ y B , de modo que

$$\Xi' \leq -\alpha \|w_t\|_2^2 + C(\xi, B) \|w\|_{\frac{6}{4-p}}^2 + \xi \|w_t\|_2^2 + I, \quad (5.25)$$

donde establecemos

$$I := \sum_{i=1}^3 \langle h_i(u_i^2) - h_i(u_i^1), \partial_t w_i \rangle. \quad (5.26)$$

De hecho, primero observamos que al derivar (5.22) y usar (5.22), obtenemos

$$\Xi'(t) = -\alpha \|w_t\|_2^2 - \langle g(u^1) - g(u^2), w_t \rangle + I.$$

desde

$$|\langle g(u^1) - g(u^2), w_t \rangle| \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} M_g \left\{ 1 + \sum_{i=1}^3 |u_i^1|^{p-1} + \sum_{i=1}^3 |u_i^2|^{p-1} \right\} |w| |\partial_t w_i| dx,$$

luego aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$|\langle g(u^1) - g(u^2), w_t \rangle| \leq \sum_{i=1}^3 \tilde{C}_f \|w\|_{\frac{6}{4-p}}^2 \|\partial_t w_i\|_2, \quad (5.27)$$

donde

$$\tilde{C}_f = M_f \left\{ |\Omega|^{\frac{p-1}{6}} + \sum_{i=1}^3 \|u_i^1\|_6^{p-1} + \sum_{i=1}^3 \|u_i^2\|_6^{p-1} \right\} \leq C(B) < \infty,$$

es una constante que depende de B . Por lo tanto, la estimación (5.25) se deriva de la desigualdad de Young con $\xi > 0$.

Paso 4: Estimación de χ' . Existe una constante $C(B) > 0$ dependiendo de B tal que

$$\chi'(t) \leq -\Xi(t) - \frac{1}{2} \|w\|_e^2 + \frac{\alpha}{2} \|w\|_2^2 + C(B) \|w\|_4^2 + \frac{\alpha + 3}{2} \|w_t\|_2^2. \quad (5.28)$$

De hecho, multiplicando (5.22)₁ por w e integrando en Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} \chi'(t) &= -\Xi(t) - \frac{1}{2} \|w\|_e^2 + \frac{\alpha}{2} \|w\|_2^2 + \frac{\alpha + 3}{2} \|w_t\|_2^2 \\ &\quad - \langle g(u^1) - g(u^2), w \rangle - \sum_{i=1}^3 \langle h_i(u_i^1) - h_i(u_i^2), w_i \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, notando que

$$|\langle g(u^1) - g(u^2), w \rangle| \leq \left\{ |\Omega|^{p-1} + \sum_{i=1}^3 \|u_i^1\|_{p+1}^{p-1} + \sum_{i=1}^3 \|u_i^2\|_{p+1}^{p-1} \right\} \|w\|_{p+1}^2 \leq \tilde{C}_B \|w\|_{p+1}^2,$$

y

$$\left| \sum_{i=1}^3 \langle h_i(u_i^1) - h_i(u_i^2), w_i \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^3 (|\Omega|^2 + \|u_i^1\|_4^2 + \|u_i^2\|_4^2) \|w_i\|_4^2 \leq C_B \|w\|_4^2,$$

donde las constantes $\tilde{C}_B, C_B > 0$ dependen solo de B , entonces sigue la estimación (5.28).

Paso 5. Estimación para Υ . Existe una constante $C_3 > 0$ dependiendo de B tal que

$$\Upsilon(t) \leq e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}} \Upsilon(0) + C_3 \int_0^t e^{-\frac{\epsilon_2}{C_1}(t-s)} \|w(s)\|_{p_0}^2 ds + \epsilon_1 e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}} J, \quad (5.29)$$

donde $C_1 > 0$ proviene de (5.24) y establecemos

$$J := \int_0^t e^{\frac{\epsilon_2 s}{C_1}} I ds = \sum_{i=1}^3 \int_0^t e^{\frac{\epsilon_2 s}{C_1}} \langle h_i(u_i^2(x, s)) - h_i(u_i^1(x, s)), \partial_t w_i(x, s) \rangle ds. \quad (5.30)$$

Primero, observamos que de (5.25) y (5.28), uno tiene

$$\begin{aligned} \Upsilon' &\leq -\epsilon_2 \Xi(t) + \frac{\alpha \epsilon_2}{2} \|w\|_2^2 + \epsilon_2 C(B) \|w\|_4^2 + \epsilon_1 C(\xi, B) \|w\|_{\frac{6}{4-p}}^2 \\ &\quad + \epsilon_1 I + \left(\frac{3\epsilon_2 + \alpha \epsilon_2}{2} + \epsilon_1 \xi - \alpha \epsilon_1 \right) \|w_t\|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora elegimos $\epsilon_1, \epsilon_2, \xi > 0$ lo suficientemente pequeño como para que

$$\epsilon_2 K' < \epsilon_1 \text{ y } \frac{3\epsilon_2 + \alpha \epsilon_2}{2} + \epsilon_1 \xi < \alpha \epsilon_1.$$

Cabe mencionar que $\epsilon_1, \epsilon_2, \xi > 0$ no dependen de λ . Por lo tanto, a partir de esta elección, se establece $p_0 = \max \left\{ \frac{6}{4-p}, 4 \right\}$ y usando (5.24), existe una constante $C_3 = C(B) > 0$ tal que

$$\Upsilon' \leq -\frac{\epsilon_2}{C_1} \Upsilon(t) + C_3 \|w\|_{p_0}^2 + \epsilon_1 I,$$

de donde se sigue la estimación (5.29) con J dado en (5.30).

Observación 5 Dado que las opciones para ϵ_1, ϵ_2 no dependen de λ , entonces $C_3 > 0$ es una constante que tampoco depende de λ .

Paso 6. Estimación de J . Existen constantes $\gamma_0 > 0$ y $C_4 > 0$ dependiendo de B tales que

$$J \leq C_4 e^{\gamma_0 t} \sup_{0 < s < t} \|w\|_4^2 + C_4 \int_0^t (\|u_t^1(s)\|_2 + \|u_t^2(s)\|_2) e^{\gamma_0 s} \Upsilon(s) ds. \quad (5.31)$$

En primer lugar, en vista del supuesto (5.7), para cualquier constante $\gamma > 0$ y cada $i = 1, 2, 3$, existe una constante $K'_i > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{\gamma s} \langle h_i(u_i^2(s)) - h_i(u_i^1(s)), \partial_t w_i(s) \rangle ds \\ & \leq K'_i e^{\gamma t} \sup_{0 < s < t} \|w_i(s)\|_4^2 + K'_i \int_0^t (\|\partial_t u_i^1(s)\|_2 + \|\partial_t u_i^2(s)\|_2) e^{\gamma s} \|\nabla w_i(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (5.32)$$

De hecho, la justificación de (5.32) sigue tomando argumentos similares a los de [8, Lema 4.9].

En aras de la exhaustividad, presentamos una breve prueba de tal desigualdad. Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{\gamma s} \langle h_i(u_i^2(s)) - h_i(u_i^1(s)), \partial_t w_i(s) \rangle ds \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\gamma s} \int_{\Omega} \frac{d}{ds} |w_i|^2 \int_0^1 h'_i(u_i^2 + \lambda(u_i^1 - u_i^2)) d\lambda dx ds \\ & = \frac{e^{\gamma s}}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 h'_i(u_i^2(s) + \lambda(u_i^1(s) - u_i^2(s))) d\lambda |w_i(s)|^2 dx \Big|_0^t \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{ds} \left(e^{\gamma s} \int_0^1 h'_i(u_i^2(s) + \lambda(u_i^1(s) - u_i^2(s))) d\lambda \right) |w_i(s)|^2 dx ds \\ & \leq K'_i e^{\gamma s} \sup_{0 < s < t} \|w_i(s)\|_4^2 \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t e^{\gamma s} \int_{\Omega} \int_0^1 h''_i(u_i^2 + \lambda(u_i^1 - u_i^2)) (\partial_t u_i^2 + \lambda(\partial_t u_i^1 - \partial_t u_i^2)) d\lambda |w_i(s)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Para el último término usamos el hecho de que $h_i \in C^2(\mathbb{R})$, condición (5.7), desigualdad

de Hölder y la incrustación $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Por lo tanto, de (5.30) y (5.32) se sigue

$$J \leq \sum_{i=1}^3 K'_i \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_4^2 + \max\{K'_i\} \int_0^t e^{\gamma_0 s} (\|u_t^1(s)\|_2 + \|u_t^2(s)\|_2) \|\nabla w(s)\|_2^2 ds.$$

Para $\gamma_0 = \frac{\epsilon_2}{C_1} > 0$. Adicionalmente, tomemos $C_4 = \max\{K'_1 + K'_2 + K'_3, \frac{2\max\{K'_i\}}{\mu C_2}\} > 0$ y notando que

$$\|\nabla w(s)\|_e^2 \leq \frac{1}{\mu} \|w\|_2^2 \leq \frac{2}{\mu} \Xi(s) \leq \frac{2}{\mu C_2} \Upsilon(s),$$

luego, la estimación (5.31) sigue como se desea.

Observación 6 Destacamos que las constantes γ_0 y C_4 no dependen de λ

Paso 7. Conclusión de la prueba. Finalmente estamos en posición de completar la demostración de (5.21).

De hecho, de (5.29) y (5.31), existe una constante $C_5 > 0$ dependiendo de B , pero independientemente de λ , tal que

$$\begin{aligned} e^{\gamma_0 t} \Upsilon(t) &\leq C_5 \Upsilon(0) + C_5 e^{\gamma_0 t} \sup_{0 < s < t} \|w\|_{p_0}^2 \\ &+ C_5 \int_0^t (\|u_t^1(s)\|_2 + \|u_t^2(s)\|_2) e^{\gamma_0 s} \Upsilon(s) ds, \end{aligned}$$

y aplicando la inecuación de Gronwall, se obtiene

$$\Upsilon(t) \leq C_5 \left\{ e^{-\gamma_0 t} \Upsilon(0) + \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{p_0}^2 \right\} e^{(C_5 e^{-\gamma_0 t} \int_0^t (\|u_t^1(s)\|_2 + \|u_t^2(s)\|_2) e^{\gamma_0 s} ds)}. \quad (5.33)$$

Ahora, de (5.14) y (5.15), y también en vista de la Observación 4, tenemos

$$\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds = -\frac{1}{\alpha} \int_0^t E'(s) ds \leq \frac{2|E(0)|}{\alpha} \leq Q, \quad u := u^1, u^2,$$

donde $Q > 0$ es una constante que depende de B y f , pero es independiente de λ . Por lo tanto, usando Hölder y las desigualdades de Young, obtenemos

$$e^{-\gamma_0 t} \int_0^t (\|u_t^1(s)\|_2 + \|u_t^2(s)\|_2) e^{\gamma_0 s} ds \leq 2\sqrt{Q}\sqrt{t} \leq \epsilon t + \frac{2Q}{\epsilon},$$

para cualquier $t > 0$ y $\epsilon > 0$. Reemplazando la última estimación en (5.33), llegamos a

$$\Upsilon(t) \leq C_5 e^{(\epsilon C_5 t + \frac{2C_5 Q}{\epsilon})} \left\{ e^{-\gamma_0 t} \Upsilon(0) + \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{p_0}^2 \right\}.$$

Tomando $\epsilon = \frac{\gamma_0}{2C_4}$ usando (5.24), tenemos

$$\Xi \leq \frac{C_1 C_4 e^{\frac{Q}{\gamma_0}}}{C_2} e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} \Xi(0) + \frac{C_4 e^{\frac{Q}{\gamma_0}}}{C_2} e^{\frac{\gamma_0}{2} t} \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{p_0}^2. \quad (5.34)$$

Finalmente, con respecto a la definición de $\Xi(t)$, $t \geq 0$, en (5.23) y el entorno

$$a_2(t) := \frac{C_1 C_4 e^{\frac{Q}{\gamma_0}}}{C_2} e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} \quad y \quad a_3(t) := \frac{2C_4 e^{\frac{Q}{\gamma_0}}}{C_2} e^{\frac{\gamma_0}{2} t}, \quad (5.35)$$

luego (5.34) conduce a (5.21) como se desea.

Por tanto, se concluye la prueba de la Proposición 5. \square

Corolario 2 (*Cuasi-estabilidad*) *Bajo los supuestos del Teorema 15, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado con el problema (1.2) es cuasi-estable en cualquier conjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$.*

Prueba. Es una consecuencia directa del Teorema 14 - (iii) y la Proposición 5 al notar la semi-norma dada por $n_{H_0^1}(u^1 - u^2) = \|u^1 - u^2\|_{p_0}$ es compacto. \square

5.4.3. Conclusión de la prueba del Teorema 15

- (i) De la Proposición 2 y el Corolario 2, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ relacionado con el problema (1.2) es asintóticamente suave. Por lo tanto, usando el Lema 3 y las Proposiciones 1 y 3, la conclusión del Teorema 15 - (i) está completa.
- (ii) En el caso de $h_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, luego volviendo a (5.26), se ve que $I = 0$ y, en consecuencia, de (5.30) se obtiene $J = 0$. Por lo tanto, (5.29) se reduce a

$$\Upsilon(t) \leq e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}} \Upsilon(0) + \frac{C_3 C_1}{\epsilon_2} \sup_{0 \leq s \leq t} \|w(s)\|_{p_0}^2 (1 - e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}}),$$

$p'_0 = \max \left\{ \frac{6}{4-p}, p+1 \right\}$. De esta forma se llega a (5.34) (respec. (5.21)) con

$$a_3 := \frac{C_3 C_1}{\epsilon_2} (1 - e^{-\frac{\epsilon_2 t}{C_1}}),$$

en lugar de $a_3(t)$ dado en (5.35). Por lo tanto, $c_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} +a_3(t) < \infty$, y de [11, Teorema 7.9.8], las propiedades de regularidad (5.16) - (5.17) están aseguradas, es decir, la conclusión del Teorema 15 - (ii) está completo. Por lo tanto, se termina la demostración del Teorema 15.

Capítulo 6

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Como se pudo observar en el Capítulo 3, el presente trabajo presenta como hipótesis general lo siguiente:

(*HG*) El semigrupo de soluciones asociado un sistema de Lamé semilineal posee un atractor global.

Adicionalmente se plantearon las siguientes hipótesis específicas:

(*H1*) El sistema de Lamé semilineal está bien colocado en el sentido de Hadamard.

(*H2*) El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal posee estructura gradiente.

(*H3*) El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasi- estable.

Con relación a esto, el Capítulo 5 estuvo destinado a mostrar la VERACIDAD de cada una de estas hipótesis como sigue:

- La (*H1*) fue demostrada en la Sección 5.3, mediante el Teorema 14. Para esto se usó la teoría relacionada a los problemas de Cauchy no lineales y la teoría de semigrupos.

- La $(H2)$ fue demostrada en la Sección 5.4.1 mediante el Lema 3. Para esto se probó que la energía relacionada al sistema genera un funcional de Lyapunov estricto, lo que muestra la estructura de gradiente del sistema.
- La $(H3)$ fue demostrada en la Sección 5.4.2 mediante la Proposición 5, para esto fue necesario comparar dos trayectorias y construir diferentes funcionales de energía aproximada.

Finalmente, con relación al (HG) , esta hipótesis fue detallada en el Teorema 15 y demostrada posteriormente en la Sección 5.4.3, ya que la estructura de gradiente del sistema, la cuasi-estabilidad del semigrupo de soluciones y las propiedades agradables sobre el funcional de Lyapunov y el conjunto de puntos estacionarios \mathcal{N} , permite concluir con la existencia de un atractor global para el sistema.

CONCLUSIONES

De acuerdo a lo desarrollado podemos concluir lo siguiente:

- Los sistemas de Lamé reflejan de buena manera el comportamiento de las ondas sísmicas cuando estas se propagan sobre un medio elástico isotrópico. Este análisis permite describir el comportamiento de las P-ondas y las S-ondas teniendo en cuenta la velocidad de propagación de cada una de ellas. Por ejemplo, como consecuencia de los parámetros de Lamé, se puede concluir que las P-ondas viajan mas rápido que las S-ondas.
- En la demostración de la buena colocación del sistema (véase Sección 5.3, Teorema 14) se pudo observar que el generador infinitesimal asociado al problema de Cauchy es disipativo, esto es debido a las propiedades del operador de Lamé y a la presencia del amortiguador friccional sobre el sistema. Este hecho permite realmente la existencia de soluciones.
- En el análisis sobre la existencia de un atractor global, se usó la propiedad de cuasi-estabilidad para el semigrupo. Con esto se concluyó que es posible comparar dos trayectorias las cuales convergen a la misma región compacta de estabilización si los datos iniciales que las generan son muy próximas.

RECOMENDACIONES

De acuerdo a lo desarrollado, se recomienda lo siguiente:

- En este trabajo se consideró la presencia de un amortiguador friccional para el sistema, se recomienda para próximas investigaciones considerar otro tipo de amortiguamiento, ya sea estructural o por medio de una memoria viscoelástica en el sistema.
- Las fuerzas estructurales que se consideraron fueron de orden crítico desacoplado para que la metodología en la cuasiestabilidad del sistema sea satisfactoria. Se recomienda considerar fuerzas críticas acopladas para futuros trabajos.
- Al considerar el amortiguador friccional, este se tomó sobre todo el dominio espacial, es decir, el parámetro $\alpha > 0$ como coeficiente del amortiguador, es constante sobre todo Ω . Se recomienda considerar para futuras investigaciones la dependencia de α con relación al espacio, obteniendo así una localización de la región de amortiguamiento.

REFERNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Achenbach, J. D.(1973) Wave propagation in elastic solids. North-Holland, Amsterdam.
- [2] Alabau, F., & Komornik, V. (1999). Boundary observability, controllability, and stabilization of linear elastodynamic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(2), 521-542.
- [3] Arrieta, J., Carvalho, A. N., & Hale, J. K. (1992). A damped hyperbolic equation with critical exponent, *Comm. Partial Differential Equations*, 17(5-6), 841-866.
- [4] Astaburuaga, M. A., & Charão, R.C. (2002). Stabilization of the total energy for a system of elasticity with localized dissipation, *Differential Integral Equation*, 15, 1357-1376.
- [5] Bchatnia, A., & Guesmia, A. (2014). Well-posedness and asymptotic stability for the Lamé system with infinite memories in a bounded domain, *Mathematical Control and Relat. Fields* ,4(4), 4451-463.
- [6] Benaissa, A., & Gaouar, S. (2019). Asymptotic stability for the Lamé system with fractional boundary damping. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(5), 1331-1346.
- [7] Belishev, M. I., & Lasiecka, I. (2002). The dynamical Lamé system: Regularity of solutions, boundary controllability and boundary data continuation. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18, 143-167.
- [8] Cavalcanti, M. M., Fatori, L. H., & Ma, T. F. (2016). Attractors for wave equations with degenerate memory. *Journal of Differential Equations*, 260(1), 56-83.

- [9] Cerveny, V. (2001). *Seismic ray theory* (Vol. 110). Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Chueshov, I. (2015). *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems* (Vol. 18). Universitext. Springer.
- [11] Chueshov, I., & Lasiecka, I. (2010). Von Karman evolution equations: well-posedness and long-time dynamics. In: *Springer Monographs in Mathematics*. Springer, New York.
- [12] Ciarlet, P. G. (1988). *Mathematical elasticity: Three-dimensional elasticity*. (Vol. 1). North-Holland, Amsterdam
- [13] Geredeli, P.G., & Lasiecka, I. (2013). Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to vonKarman plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 91, 72–92.
- [14] Goodway, B. (2001). AVO and Lamé constants for rock parameterization and fluid detection. *CSEG Recorder*. 26(6), 30–60.
- [15] Hale, J. K. (2010). *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. American Mathematical Society, Providence.
- [16] Hale, J.K., & Raugel, G. (1988). Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation. *Journal of Differential Equations*, 73(2), 197–214.
- [17] Horn, M.A. (1999). Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback. In: Hoffmann, K.-H., Leugering, G., Troltsch, F. (eds.) *Optimal Control of Partial Differential Equations, International Conference in Chemnitz, Germany, April 20–25*. Springer, Basel.
- [18] Hudson, J. (1984). *The Excitation and Propagation of Elastic Waves*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [19] Ji, S., Sun, S., Wang, Q., & Marcotte, D. (2010). Lamé parameters of common rocks in the Earth's crust and upper mantle. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115(B6).
- [20] Kline, M., & Kay, I. W. (1965). *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*. Interscience, New York.
- [21] Lagnese, J. (1983). Boundary stabilization of linear elastodynamic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21(6), 968-984.
- [22] Lakes, R., & Wojciechowski, K. W. (2008). Negative compressibility, negative Poisson's ratio, and stability. *Physica Status Solidi (B)*, 245(3), 545-551.
- [23] Lions, J. L. (1988). *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilization de Systèmes Distribués, Tome 1*. Masson, Paris.
- [24] Liu, W.-J., Krstić, M. (2000). Strong stabilization of the system of linear elasticity by a Dirichlet boundary feedback. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 65(2), 109-121.
- [25] Love, A. E. H. (1892). *A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge.
- [26] Ma, T.F., & Monteiro, R.N. (2017). Singular limit and long-time dynamics of Bresse systems. *SIAM SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(4), 2468-2495.
- [27] Moore, B., Jaglinski, T., Stone, D.S., & Lakes, R.S. (2006). Negative incremental bulk modulus in foams. *Philosophical magazine letters*, 86(10), 651-659.
- [28] Pazy, A. (2012). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, (Vol. 44). Springer, Berlin
- [29] Poisson, S.D. (1829). Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France VII(I)*, 357-570.
- [30] Pujol, J. (2003). *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [31] Simon, J. (1986). Compact sets in the space $L^p (O, T; B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146, 65-96.
- [32] Teodorescu, P.P. (2013). *Treatise on Classical Elasticity, Theory and Related Problems*. Springer, Dordrecht.
- [33] Timoshenko, S.P. (1953). *History of the Strength of Materials*. McGraw-Hill, New York.
- [34] Yamamoto, K. (1989). Exponential energy decay of solutions of elastic wave equations with the Dirichlet condition. *Mathematica Scandinavica*. 65, 206–220

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de Consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p>Problema general. ¿Será posible probar la existencia de un atractor global para un sistema de Lamé semilineal?</p>	<p>Objetivo general Probar la existencia de un atractor global para un sistema de Lamé semilineal</p>	<p>Hipótesis general El sistema $u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha u_t + f(u) = b$ $u = 0$ en $\partial\Omega$ (sistema de Lamé semilineal) posee un atractor global</p>	<p>Tipo La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. Método La metodología usada es de tipo inductivo -deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p>	<p>Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.</p>

<p>Problemas específicos. ¿Será posible probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para un sistema de Lamé semilineal?</p> <p>¿Será posible probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a un sistema de Lamé semilineal?</p> <p>¿Será posible probar que el semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasi- estable?</p>	<p>Objetivos específicos Probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para un sistema de Lamé semilineal.</p> <p>Probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a un sistema de Lamé semilineal.</p> <p>Probar que el semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasi- estable</p>	<p>Hipótesis específicas El sistema de Lamé semilineal está bien colocado en el sentido de Hadamard.</p> <p>El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal posee estructura gradiente.</p> <p>El semigrupo asociado al sistema de Lamé semilineal es cuasi- estable</p>	<p>Diseño de la investigación. La investigación que se desarrolla presenta el diseño científico- teórico, mostrando la siguiente estructura: La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del modelaje físico de las ecuaciones de la Onda, lo que permitirá entender la construcción de dicho modelo expuesto a fuerzas</p>	
---	--	--	--	--

			<p>estructurales. Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve a los espacios de Sobolev con el fin de poder probar la buena colocación (i.e. existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales) para el problema de la ecuación de la onda expuesta a fuerzas estructurales. Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis funcional, de tal manera que se pueda probar la existencia de soluciones en el espacio de fase $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.</p>	
--	--	--	--	--