UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB-SUPERSOLUCIONES"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR:

Luz Sara Mori Trujillo

ASESOR

LIC. César Augusto Ávila Célis

Línea de investigación:

Análisis funcional y Ecuaciones diferenciales Parciales.

Callao, 2022

PERÚ

Ouriginal by Turnitin

Document Information

Analyzed document	"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN.pdf (D177962769)
Submitted	2023-11-06 18:15:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

W URL: https://www.toppr.com/ask/question/sum-k1-2n1-1k1-k2/
Fetched: 2021-05-08 10:35:54 — 1

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB- SUPERSOLUCIONES" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA AUTOR: Luz Sara Mori Trujillo ASESOR LIC. César Augusto Ávila Célis Línea de investigación: Análisis funcional y Ecuaciones diferenciales Parciales. Callao, 2022 PERÚ

Lic. César Augusto Ávila Célis Asesor HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN "EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB- SUPERSOLUCIONES" LUZ SARA MORI TRUJILLO Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N° 129-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por: Dr. CABANILLAS LAPA, Eugenio Presidente Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón Secretario Dr. CANALES GARCÍA, Pedro Vocal Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl Suplente ii

iii INFORMACIÓN BÁSICA 1. Facultad: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 2. Unidad de Investigación: Departamento de Matemática 3. Título: Existencia de Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub - Supersoluciones. 4. Autor: Bach. Luz Sara Mori Trujillo ORCID: 0000-0002-6338-4000 DNI N° 40520210 5. Asesor: Lic. César Augusto Ávila Célis ORCID: 0000-0001-5298-9488 DNI N° 18051124 6. Co Asesor: Mg. Rómulo Díaz Carlos ORCID: 0000-0002-3324-4541 DNI N° 45998292 7. Lugar de ejecución: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 8. Unidades de análisis: Análisis Funcional 9. Tipo de Investigación: Básica 10. Enfoque de Investigación: Cuantitativa 11. Diseño de Investigación: No experimental. 12. Tema OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura)

iv DEDICATORIA A mi madre y mis pequeñas Luz y Andrea, por ponerme el reto de crecer profesionalmente.

v AGRADECIMIENTOS Al Dr. Paulo Seminario, maestro y guía, por el apoyo brindado para culminar la investigación. Al Dr. Absalon Castillo Valdiviezo, por la motivación para cumplir con la meta trazada. A los maestros que me enseñaron a dejar huella en la vida de los estudiantes, Ezequiel Fajardo Campos, César Augusto Ávila Celis, Deonicio Orlando Moreno Vega, los llevo en el mejor recuerdo. .

 TABLA DE GRÁFICOS La presente investigación no contiene tabla de gráficos. TABLA DE IMÁGENES Y OTROS La presente investigación no contiene tabla de imágenes y otros.

ix RESUMEN El presente trabajo está dedicado a mostrar la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico con deformaciones lineales sobre el cuerpo expuesto a fuerzas estructurales con crecimientos multiparamétricos (, p?) sobre un dominio euclidiano bien comportado de N , para esto se usará el método de sub – supersolución. Palabras Claves: Ecuación elíptica, Soluciones débiles, Subsolucion, supersolución.

x ABSTRACT The present work is dedicated to showing the existence of weak positive solutions for an elliptical problem with linear deformations on the body exposed to structural forces with multiparametric growths N on a well-behaved Euclidean domain of, for this the sub-supersolution method will be used. Keywords: Elliptic equation, Weak solutions, Subsolution, supersolution.

xi INTRODUCCIÓN En el presente trabajo se mostrará la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico vía método de sub-supersoluciones, es decir se estudiará el problema: −∆ = (,) | | + (,) | | , = 0 , Definido en una región acotada ⊂ (< 1) con frontera de clase 2 , donde | .| es la norma usual del espacio (Ω), −∆ ≔ − ( ) es el operador , , ≥ 1, , ≥ 0 y , : Ω → son funciones que satisfacen ciertas condiciones, que serán precisadas más adelante. En las últimas décadas surgieron varios trabajos relacionados con el operador Laplaciano, como por ejemplo los encontrados (Acerbi y Mingione,2002),(Fan y Zhao,1999),(Fan,2007) y sus referencias. Las ecuaciones diferenciales parciales que involucran el operador Laplaciano surgen, por ejemplos en fluidos mecánicos, fluidos no Newtonianos, elasticidad no lineal como también la ecuación Carrier's que consiste en estudiar los problemas de tipo ( ) 2 ², 0. A L U a x t u u ? − ? = En (Corra, Figueiredo y Lopes,2008, Vol. 21,p.305-324) los autores utilizaron un argumento de sub- supersolución para estudiar el problema. {−∆ = | | , = 0 , 0 q L u u en u en ? ? −? = ? ? ? = ?? ? ? Mientras que (Chipot y Corra, 2009,p.381-393), los autores utilizaron un teorema abstracto de sub- supersolución cuya prueba se basa principalmente en una versión del Teorema de Minty- Browder para operadores pseudomonotonos de tipo. (?).....

xii ( ) (,) en r a u dx u f x ? ? ? ? = ? ? , u = 0 , Donde 1 2 , , , h h f g obedecen ciertas condiciones. Es así que esta tesis es de alto interés para un sector significativo de la ciencia actualmente, el cual es reflejado en su alto nivel de publicaciones dentro de la comunidad matemática.

1 I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. 1.1. Descripción de la realidad problemática: El presente trabajo tendrá como objetivo principal mostrar la Existencia de Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub-Supersolución" −∆ = (,) | | + (,) | | , = 0 , Donde es una región acotada ⊂ con frontera de clase 2 y con condiciones de Dirichlet, esto es ( ) = 0 para ∈ . Además asumiremos sobre ?,ß, , < 0 y , :Ω → que se satisfacen las siguientes condiciones: ➢ Las constantes obedecen las siguientes desigualdades , ≥ 1 y , ≥ 0. ➢ Si ( ) ,u u es un par de sub-supersolución para (P) con < 0 . . , (,), (,) ≥ 0 Ω [0, | | •] siendo estas funciones continuas Estas hipótesis son las usuales presentes en la bibliografía mencionada en este trabajo. 1.2. Formulación del problema. Teniendo en cuenta lo referido en el apartado anterior, la presente investigación formula la problemática en los siguientes términos: 1.2.1. Problema General. ¿Existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub-Supersoluciones? (?) .....

2 1.2.2. Problemas Específicos. • ¿Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un Problema Elíptico? • ¿Es posible definir el par de Sub – Supersolución para el Problema Elíptico asociado? 1.3. Objetivos. 1.3.1. Objetivo General: Probar que existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub- Supersolución. 1.3.2. Objetivos específicos: • Definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un Problema Elíptico. • Definir el par de Sub – Super Solución para el Problema Elíptico asociado. 1.4. Justificación. Desde una perspectiva teórica el estudio aportará información de alta relevancia acerca de la existencia de soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico mediante el método de Sub y Súper solución las cuales permitirán modelar ciertos fenómenos físicos, como la ecuación de la onda, fenómenos matemáticos, como la ecuación logística, fenómenos sociales como el comportamiento de los ciudadanos ante el covid-19. El aporte metodológico de esta investigación consistirá en presentar un nuevo procedimiento que dará a conocer los pasos, métodos y técnicas a seguir en la determinación de la solución de una clase especifica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas usando el método de Sub- Supersolución. Es así que el presente proyecto formula un tema de actual interés y se espera con esto contribuir en el desenvolvimiento de la teoría matemática de las

3 ecuaciones diferenciales no lineales y contribuir en la construcción de las bases matemáticas para el desarrollo de la tecnología de punta en el País. 1.5. Delimitantes de la investigación. 1.5.1. Teórica. No se aplica en este tipo de proyecto. 1.5.2. Temporal. No se aplica en este tipo de proyecto. 1.5.3. Espacial. No se aplica en este tipo de proyecto.

4 II. MARCO TEÓRICO. 2.1 Antecedentes. 2.1.1. Internacionales. • Chipot y Corra (2009) en su artículo On Some Model Diffusion Problems With a Nonlocal Lower Order Term. Los autores consideran una clase de problemas parabólicos no lineales donde el término de orden inferior depende de una integral ponderada de la solución y abordan los problemas de existencia, unicidad, soluciones estacionarias y, en algunos casos, comportamiento asintótico. • Ambrosetti y Brezis (1994) en su artículo Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, Journal of Functionar su muestra . Muestra la existencia de dos soluciones positivas de la ecuación elíptica en Rn con no linealidades cóncavas y convexas. • Dos Santos y Figueiredo (2017) en su trabajo Soluciones positivas para una clase de problemas no locales que involucran espacios generalizados de Lebesgue. En este trabajo probaron la existencia. 2.1.2. Nacionales • MACHADO (2017) en su trabajo Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no lineal vía el teorema de Schauder. Se prueba la existencia de una solución débil para el siguiente problema elíptico no lineal.

5 ((,)) en 0 sobre div a x u u f u − ? = ? ? ? = ?? ? Además, el autor mostró la existencia y unicidad de una solución débil para el problema anisotrópico del siguiente tipo ( ) ( ) ( ) 2 , , en 0 sobre i i i i p x i x x a x u u u b x u f u − ? −? ? ? + = ? ? ? ? = ?? ? Para resolver (1) el autor usó la teoría de las funciones semicontinuas, aplicaremos el teorema de Lax – Milgram y el teorema del punto fijo de Schauder. Para resolver (2) aplicaremos el teorema de Minty – Browder y el Teorema del punto fijo de Schauder. • ACUÑA (2019) en su trabajo Solución débil a una ecuación elíptica con el (P,Q)- laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente .En esta tesis, estudiamos un problema elíptico no lineal con el (p,q)- Laplaciano y que tiene un término convectivo (el término dependiente del gradiente). Probamos que bajo condiciones adecuadas para el término convectivo, el problema posee una solución débil. Además obtenemos un resultado de unicidad y presentamos un algoritmo de aproximación numérica. • SANTARIA (2015) en su trabajo Ecuaciones y Sistemas Elípticos con Crecimiento Superlineal estudiaron ecuaciones elípticas de la forma ( ) 1 0 (,), en ( )...... u u f x u u H ? ? −? + = ? ? ? ? ? ? ? ? Donde ( ) 2 N N ?? ? es un dominio limitado o N ?= y : f x ? ⎯→ es una función continua con condiciones de crecimiento subcrítico y crítico. ....(1) ....(2)

6 También estudiaron sistemas de ecuaciones elípticas de la forma. 1 0 (, ,), en ( )..... (, ,), en , H ( ), u f x u v S v g x u v u v ?−? = ? ? −? = ? ? ? ? ? ? Donde ( ) 2 N N ?? ? , 2 , : f g x? ⎯→ son funciones continuas con condiciones de crecimiento subcrítico. Encontraremos soluciones definidas en ( ) ( ) 1 1 0 0 , H xH ? ? para sistemas elípticos de tipo gradiente y de tipo hamiltoniano. 2.2. Bases Teóricas. ● En esta sección haremos un repaso de los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de la presente tesis, con esta finalidad se usó los trabajos de M. Chipot y N.H.chang para más detalles (cf. [10]) y sus referencias. Proposición (1).- Sea ( ) n n N x ? una sucesión en un espacio de Banach E. Entonces. a. n x x → en , , * n E f x f x f E ? → ? ? b. Si n x x → en E, entonces n x x → en E. c. Si n x x → en E, entonces n x es acotada y liminf . n x n x ? →? d. Si n x x → en E y n f f → en E*, entonces , , n n f x f x → Demostración: Ver ?3?, Pag. 112. Proposición (2).- Sea E un espacio de Banach reflexivo y ( ) n n N x ? una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión ( ) k n x k N? que converge en la topología débil. Demostración: Ver ?4? pág. 22

7 1. Espacios ( ) P L ? Sea ? un abierto de n R y 1 p? ??, definimos ( ) P L ? como el espacio de las funciones medibles :u R ?⎯→ tal que P u es Lebesgue integrable sobre ?. La norma en ( ) P L ? es dado por: ( ) 1 ( ) P p P L u u x dx ? ? ? ? = ? ? ? Para el caso en que p = ? , definimos ( ) P L ? como el espacio de funciones medibles que son esencialmente acotadas y ( ) ? ? inf ; ( ) c.s. en L u c u x c ? ? = ? ? En una norma en ( ) L ? ? Teorema (1).- Si 1 , p? ? ? entonces ( ) P L ? es un espacio de Banach con la norma ( ) 1/ ( ) P P P u u x dx ? = ? Demostración.- Sabemos que ( ) P L ? es un espacio normado. Resta probar que es un espacio completo. Para ello sea ? ? ( ) 1 n n u ? = una sucesión de Cauchy en ( ) P L ? . Entonces, dado 0 ? ? existe M = M ( ) N ? ? tal que p p p n m n m p u u dµ u u ? ? − = − ? ? siempre que m, n M? Sea ( ) 1 k k g ? = una subsucesión de ? ? ( ) 1 n n u ? = tal que 1 2 k k k p g g − + − ? para todo . k N ? Consideremos la función ? ? 1 1 1 : , ( ) ( ) ( ) ( ) k k k g R g x g x g x g x ? + = ? → ? ? = + − ? Sabemos que g es medible y no negativa. Así mismo, 1 1 1 ( ) lim ( ) ( ) ( ) p p k k n k g x g x g x g x ? + →? = ? ? = + − ? ? ? ? ? Por el lema de Fatou, se deduce

8 1 1 1 liminf ( ) ( ) . p p k k n k g dµ g g x g x dµ ? + ? ? →? = ? ? ? + − ? ? ? ? ? ? ? Elevando ambos miembros a 1 P y usando la desigualdad de Minkowski, obtenemos ( ) 1 1 1 1 1 liminf 1. p p k k p p p n k g dµ g g g g ? + ? ? →? = ? ? ? + − ? + ? ? ? ? ? ? ? Entonces, definiendo ? ? : ( ) , A x g x = ?? ?? de (2) podemos concluir que ( ) 0. µ A ?− = Luego, la serie en (1) converge excepto tal vez en un conjunto de media nula ? -A, esto es, una serie µ - casi siempre. Se tiene que la función ( ) : , P A g X L? ? donde A X es la función característica de A. Definimos :f K ?→ por: 1 1 1 ( ) ( ) (( ) , x A0, k k k f x g x g g x si ? + = ? ? = + − ? ? ? ? ? ? si x A ? Como ( ) ( ) ( ) 1 2 1 3 2 1 ..... k k k g g g g g g g g g − = + − + − + + − tenemos 1 1 1 1 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) k k j j j g x g x g x g x g x − + = ? + − ? ? Para todo x y ( ) ( ) k g x f x → para todo x A ? , esto es, una sucesión ( ) 1 k k g ? = converge para f c.s. Por el Teorema de la Convergencia Dominada, se deduce que ( ) P f L ? ? . Proposición 3 (Desigualdades de Yung). Sean 1 > p > q > ? tal que 1 1 1 p q + = y sean , 0. a b? Entonces p q a b ab p q ? + . Demostración : Ver ?4? Pág. 136 Proposición 4 (Desigualdad de Holder) Si ( ) P u L ? ? y ( ) q v L ? ? como 1 p? ?? y 1 1 1. p q + = Entonces se tiene la desigualdad. ( ) ( ) q P L L uv u v ? ? ? ? ?

9 Demostración : Ver ?3? Pág. 6. Proposición 5.- (Teorema de la Representación de Riesz).- Sean ( ) ( ) 1 , * p p L ? ? ? ? ? ? y 1 1 1. p q + = Entonces existe una única función ( ) u L ? ? ? tal que ( ) 1 , ( ) ( ) , v u x v x dx v L ? ? = ? ? ? ? Además. ( ) ( ) ( ) 1 * L L u ? ? ? ? = Demostración : Ver ?4?. Pág. 184. Proposición 6.- (Desigualdad de Minkousky).- Sea ( ) ( ) 1 * L ?? ? entonces existe una única función ( ) u L ? ? ? tal que Sea 1 0 p? ? y ( ) , p u v L? ? . Entonces ( ) p u v L + ? ? y p p p u v u v + ? + ( ) 1 , ( ) ( ) , v u x v x dx v L ? ? = ? ? ? ? También tenemos la siguiente isometría. ( ) ( ) ( ) 1 * L L u ? ? ? ? = Demostración : Ver ?3?, Pág. 9. Proposición 7.- Sea ( ) n n N f ? una sucesión de funciones acotadas en ( ) P L ? y sea ( ) P f L ? ? tal que ( ) 0 P n L f f ? − ⎯⎯→ . Entonces existe una subsucesión ( ) k n f tal que 1. ( ) ( ) . . k n f x f x c s ⎯⎯→ en ? 2. ( ) ( ), k n f x h x k N ? ? ? y c.s. en ? con ( ) P h L? ? Demostración : Ver ?4?.

10 2. Distribuciones. Denotemos por ( ) D ? al espacio de las funciones de prueba en ?. Se define la distribución sobre ? a toda forma lineal y continua T: D ( ) .R ? → El conjunto de todas las distribuciones sobre ? es un espacio vectorial el cual se representa por D/ (?), llamado espacio de las distribuciones sobre ?. , ( ) ( ) , u T u x x dx ? ? ? = ? ( ) D ?? ? ? , Es una distribución sobre ?. Proposición 8.- (Lema de Du Bois Raymond) Sea ( ) 1 loc u L? ? entonces 0 u T = si y solamente si u = 0 casi siempre en ?. Demostración : Ver ?4?. De esta proposición se tiene que u T queda unívocamente determinada por u casi siempre sobre ?, esto es, si ( ) 1 , loc u v L? ? , entonces u v T T = si y solamente si u v= c.s. sobre ?. Por este motivo se identifica a u T como la distribución que define u. Proposición 9.- Sea ( ) ( ) , P v loc v N u L ? ? ? 1 , p? ? ? tal que v u u ⎯⎯→ en ( ) , P loc L ? entonces v u u → en ( ) *D ? ( ) ( ) ( ) 1 * loc L D ? → ? Demostración : Ver ?4?. Sea , n N ? ? se define la derivada de orden ? de una distribución T sobre ? como sigue. ( ) , (1) , , D T T D D ? ? ? ? ? ? = − ? ? ? Se verifica que D T ? es una distribución. Con esto tenemos que toda distribución sobre ? posee derivada de todas las órdenes, que aún es una distribución sobre ?. Además, el operador derivación : *( ) *( ) k D D D ? → ? tal que T D T ? es lineal y continuo.

11 3. Espacios de Sobolev. Consideremos ? un abierto acotado de n R con frontera ? bien regular. Definamos el espacio de Sobolev como: ( ) ( ) ( ) ? ? , ; , , m p p p W u L D u L m ? ? ? = ? ? ? ? ? ? Donde D ? es el operador de derivación de orden ?, en el sentido de las distribuciones, este espacio dotado de la norma: 1 0 p P p L m u D u ? ?? ? ? ? = ? ? ? ? ? ? ? Proposición 10.- El espacio de Sobolev ( ) ,m p W ? es un espacio de Banach. Demostración : Ver ?4?. Proposición 11.- Es sabido que 0 C ? es den so en ( ) , P L ? más no es verdad que 0 C ? es denso en ( ) ,m p W ? para 1, m? como veremos posteriormente. Motivado por esta razón se define el espacio ( ) ,m p W ? como el cierre de 0 C ? (?) en ( ) ,m p W ? , es decir: ( ) ( ) , , 0 0 m p W m p C W ? ? = ? Demostración : Ver ?15?. Proposición 12.- Sea ( ) , 0 m p u W ? ? y u la extensión de u cero de ?. Se tiene: (a) ( ) ,m p n u W R ? (b) ( ) D u D u ? ? = para todo a m ? (c) ( ) ( ) , , m p m p n W W R u u ? = Demostración : Ver ?3?. Proposición 13.- Si ( ) , 0 m p W ? = ( ) , , m p W ? el complementario de ? en el n R tiene medida de Lebesgue nula. Demostración : Ver ?4?.

12 Teorema 14.- (Inmersión de Sobelev). Sea n R ?? un dominio acotado con frontera . m C i) Si mp > n , entonces ( ) ( ) ,k p q W L ? → ? donde 1 1 m q p n = − ii) si mp = n entonces: ( ) ( ) ,k p q W L ? → ? Para todo 1 q? ?? iii) Si mp < n , entonces ( ) ( ) 1, 0, p cpct W C ? ? → ? Demostración : Ver ?4?. Observación.- En especial, cuando p = 2, el espacio ( ) ,2m W ? es un espacio de Hilbeert que denotamos por ( ) m H ? . Definición 15.- Un operador lineal T: , E F → entre espacios normados, es llamado compacto si ( ) T A F? for compacto en F, donde A es un conjunto acotado en E. Proposición 16.- Sean E, F espacios normales y T: E F → operador lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) T es compacto. b) ( ) T A es compacto en F para todo acotado A en E. c) Para toda sucesión acotada ( ) n n N x ? em E, a sucesión ( ) ( ) n n N T x ? tiene una subsucesión convergente en F. Demostración : Ver ?3?, Pág. 137. Proposición 17.- Sean 0 0 , , , E E F F espacios normados y S: 0 , E F ⎯⎯→ :T E F → y 0 :U F F ⎯⎯→ operadores lineales con S y U continuos y T compacto. Entonces : U T S 0 0 E F → es un operador compacto. Demostración : Ver ?3?, Pág. 139. Proposición 18.- (Desigualdad de Poincaré).- Sea ? un abierto de n R acotado, entonces 0 C? ? tal que ² ² u dx C u dx ? ? ? ? ? ? Donde ( ) , . i proy a b ??

13 Demostración : Ver ?3? Teorema 19.- (De Agmon – Douglis – Nioremberg). Sean N ?? un dominio limitado y ( ) r f L ? ? con r < 1. Si ( ) 1 u H ? ? es |solución débil del problema lineal. ( ) en ; 0 sobre u f x u −? = ? ? ? = ?? ? Entonces ( ) 2r u W ? ? y existe c < 0, independiente de u tal que ( ) 2 ( ) r r W L u C f ? ? ? Además, si ( ) , , K r f W ? ? entonces 2, ( ) k r u W + ? ? Teorema 20.- (De Schauder). Sean n ?? un dominio acotado y ( ) 0, f C ? ? ?. Entonces existe ( ) 2, , u C ? ? ? solución del problema linear. ( ) en ; 0 sobre u f x u −? = ? ? ? = ?? ? Y existe C < 0, independiente de u tal que ( ) 2, 0, ( ) C C u C f ? ? ? ? ? Además, si ( ) , , K r f C ? ? entonces 2, ( ) k r u C + ? ? Teorema (21) Principio de máximo . Sea ? un dominio de n y ( ) ( ) 2 u C C ? ? ? ? con 0, u−? ? supongamos que existe 0 x ?? tal que ( ) 0 inf ( ) x u x u x ?? = . Entonces u es constante. Demostración.- Ver ?15? pág. 284.

14 4. Grado Topológico. Sea ? un dominio acotado de ( ) 1 , , N N R C R ?? ? y ? ? ; ( ) 0 , S x J x ? = ?? = donde J ? representa la matriz jacobiana de ?. Sea N y R ? con ( ) ( ) . y S ? ? ? ?? ? Se ? ? ( ) 1 x y ? − ? tenemos que ( ) ( ) det ' 0, J x x ? ? = ? ? ? ? ? entonces por el Teorema de la Funcao Inversa ? é un difeomorfismo de una vecindada U de x sobre una vecindad V de y, esto es, : ( ) U U V ? ? → = es un difeomorfismo. El conjunto ? ? ( ) 1 y ? − es finito. Sea ( ) 1 , N C R ?? ? e ( ) ( ) . y S ? ? ? ?? Definamos el grado topológico de Brouwer de la aplicación ? en relación a ? en el punto y, como el número entero. ( ) ? ? ? ? ( ) 1 1 sgndet '( ) si ( ) 0 deg , , 0 casi contrario, x y x x y ? ? ? ? − − ? ? ? ? ? = ? ? ? ? Donde sgn es la función signo que es definida por ( ) 1 , si t < 0 deg , , 1, si t > 0. y ? ? ? = ? − ? De la definición del Grado Topológico, tenemos las siguientes propiedades: (1) Normalización. Sea Id la aplicación identidad : N Id R ?→ , entonces, ( ) ? deg , , 1, si y ,0, si y Id y? = ?? ? ? (2) Escisión. Si ( ) deg , , Id y? = 0, entonces existe por lo menos un x?? tal que ( ) . x y ? = (3) Aditividad. Si 1 2 ,? ? ? ? son tales que 1 2 ? ? ?? = e ( ) ( ) 1 2 , y ?? ?− ? ?? entonces ( ) ( ) ( ) 1 2 deg , , deg , , deg , , . y y y ? ? ? ? = ? + ?

15 2.3. Marco Conceptual. Grado Topológico. Sea ? un dominio acotado de ( ) 1 , , N N R C R ?? ? y ? ? ; ( ) 0 , S x J x ? = ?? = donde J ? representa la matriz jacobiana de ?. Sea N y R ? con ( ) ( ) . y S ? ? ? ?? ? Se ? ? ( ) 1 x y ? − ? tenemos que ( ) ( ) det ' 0, J x x ? ? = ? ? ? ? ? entonces por el Teorema de la Función Inversa ? es un difeomorfismo de una vecindada U de x sobre una vecindad V de y, esto es, : ( ) U U V ? ? → = es un difeomorfismo. El conjunto ? ? ( ) 1 y ? − es finito. Sea ( ) 1 , N C R ?? ? e ( ) ( ) . y S ? ? ? ?? Definamos el grado topológico de Brouwer de la aplicación ? en relación a ? en el punto y, como el número entero. ( ) ? ? ? ? ( ) 1 1 sgndet '( ) si ( ) 0 deg , , 0 casi contrario, x y x x y ? ? ? ? − − ? ? ? ? ? = ? ? ? ? Donde deg es la función signo que es definida por ( ) 1 , si t < 0 deg , , 1, si t > 0. y ? ? ? = ? − ? (Zeidler , 1990). Teorema de punto fijo de Shauder. Sea E un espacio de Banach y Q E ? un conjunto convexo, cerrado y acotado. Si :T Q Q ⎯⎯→ es un operador compacto y continuo. Entonces T, tiene un punto fijo (Zeidler, 1990). Definición de Subsolución. Decimos que una función ( ) ( ) ' 0 u H L ? ? ? ? ? es una subsolución si u u? en ? y 0 u u = ? en ?? y ( ) ( ) , , q s ß L L u vdx f x u u g x u u vdx ? ? ? ? ? ? ? ? + ? ? ? ? ( ) ' 0 v H ? ? ? con 0 V ? (Zeidler, 1990).

16 Definición de Supersolución. Decimos que una función ( ) ( ) ' u H L ? ? ? ? ? es una supersolución si u u? en ?, 0 u u = ? en ?? y ( ) ( ) , , q s ß L L u v f x u u g x u v vdx ? ? ? ? ? ? ? ? + ? ? ? ? ( ) ' 0 v H ? ? ? con 0 V ? (Zeidler, 1990). Definición de solución débil. Decimos que ( ) ( ) ' 0 u H L ? ? ? ? ? es una solución débil positivo del problema (P), creando 0 u ? en ? y ( ) ( ) , , q s ß L L u v f x u u g x u u vdx ? ? ? ? ? ? ? ? + ? ? ? ? ( ) ' 0 v H ? ? ? (Zeidler, 1990). 2.4. Definiciones de términos básicos. Espacios ( ) p L ? Sea ? un abierto de n R y 1 , p? ? ? definimos ( ) p L ? como el espacio de las funciones medibles :u R ?⎯→ tal que p u es Lebesgue integrable sobre ?. La norma en ( ) p L ? es dado por: ( ) 1 ( ) p p p L u u x dx ? ? ? ? = ? ? ? ? ? Para el caso en que , p = ? definimos ( ) p L ? como el espacio de funciones medibles que son esencialmente acotadas y ( ) ? ? inf ; ( ) . . en P L u c u x c c s ? = ? ? En una norma en ( ) L ? ? (Zeidler, 1990).

17 Desigualdad de Holder. Si ( ) P u L ? ? y ( ) q v L ? ? como 1 p? ?? y 1 1 1. p q + = Entonces se tiene la desigualdad. ( ) ( ) q P L L uv u v ? ? ? ? ? (Zeidler , 1990). Espacio de Sobolev. Funciones cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones pertenecen a los espacios de Lebesgue: decimos que D f g ? = en sentido débil o en sentido de las distribuciones (Zeidler, 1990). Teorema de la Representación de Riesz. Sean 1 > p > ?, ( ) ( ) * P L ?? ? y 1 1 1 p q + =. Entonces existe una única función ( ) q u L ? ? tal que ( ) , ( ) ( ) , P v u x v x dx v L ? ? = ? ? ? ? Además ( ) ( ) ( ) * q p L L u ? ? ? = (Ambrosetti y Brezis ,1994, No. 2, p.519-543). Distribuciones Denotemos por ( ) D ? al espacio de las funciones de prueba en ?. Se define la distribución sobre ? a toda forma lineal y continua T: D ( ) .R ? → El conjunto de todas las distribuciones sobre ? es un espacio vectorial el cual se representa por D/ (?), llamado espacio de las distribuciones sobre ?. , ( ) ( ) , u T u x x dx ? ? ? = ? ( ) D ?? ? ? , Es una distribución sobre ? (Zeidler, 1990).

18 III. HIPÓTESIS Y VARIABLES 3.1. Hipótesis. Hipótesis general. Existen Soluciones Débiles positivas para un problema Elíptico Vía método de Sub- Supersoluciones. Hipótesis especifica. • Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un Problema Elíptico. • Es posible definir el par de Sub- Supersolución para el Problema Elíptico asociado. 3.1.1. Operacionalización de las variables. Definición conceptual de variables. Variable dependiente (D). D = Soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico. A partir de un problema elíptico multiplicando por una función de prueba adecuada e integrando sobre su dominio es posible encontrar su formulación variacional procediendo por un camino de densidad y continuidad aquellas soluciones que satisfagan dicha formulación variacional se definen como soluciones débiles para problemas elípticos asociados al referirse con soluciones débiles positivas hacen referencia a una condición de signo y monotonía sobre estas soluciones. Variable independiente (I). I = Método de Sub-Supersolucion. El método de sub y Súper solución consiste en Mostrar la existencia de algún tipo de solución para un problema variacional a partir de soluciones que aproximan de manera Superior y soluciones que aproximan de manera inferior este método muchas veces se basa en otros métodos de tipo variacional.

19 Tabla 1 Operacionalización de Variables. Variables Dimensiones Indicadores Método Técnica D -Formulación variacional. -Espacio de fase débil. -Condición de signo -Espacio de las funciones de prueba. -Espacio de fase débil. -Condición de monotonía. Método de escritorio o de biblioteca. Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación. I - Sub solución -Súper solución. -El funcional de Euler lagrange. -Límite inferior de soluciones. -Límite superior de soluciones. -Formulación variacional. Método de escritorio o de biblioteca. Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación

20 IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO 4.1. Diseño Metodológico. Tipo de Investigación. Nuestro enfoque de investigación es cuantitativa de acuerdo a mis objetivos. El tipo de investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios en forma inductiva-deductiva tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Nuestro nivel de investigación es descriptivo. Diseño de investigación. Nuestro diseño de investigación es no experimental. Se empezará definiendo los términos básicos que nos ayudaran a demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico especifico tomando como método de resolución el método de sub-supersolucion. 4.2. Método de investigación. Por la naturaleza de la investigación, al ser del tipo teórico – básico, el método empleado es el método de escritorio o biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. 4.3 Población y muestra. Población: No aplica para este tipo de proyecto. Muestra: No aplica para este tipo de proyecto. 4.4. Lugar de estudio y período desarrollado. Debido a la pandemia mundial originado por el COVID – 19 el lugar de estudio será en mi hogar.

21 4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información. No se aplica para este tipo de proyecto. 4.6. Análisis y procesamientos de datos. Con la variable independiente (Método de Sub-Supersolucion) tendremos una mejor visualización del comportamiento de las soluciones de un problema elíptico. La variable dependiente (Soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico) nos dará el conjunto factible. Ambas variables se relacionan ya que el primero buscará la mejor solución (óptimo) de todas las posibles que se encuentran en conjunto factible. 4.7. Aspectos Éticos en Investigación. El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública. 4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa. No se aplica para este tipo de proyecto. 4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental. No se aplica para este tipo de proyecto.

22 V. RESULTADOS En este capítulo probaremos un Teorema de Existencia de Soluciones para algunos Problemas Elípticos usando el método de Sub- Supersolución. Consideremos el problema. ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) 0 q x L L u F x u u F x u u en P u sobre ? ? ? ? −? = + ? = ?? Donde ? es un dominio limitado de N con frontera ?? suave 1, . m L N ? es la norma usual en ( ) m L ? , las funciones 1 2 , : , F F x? ⎯⎯→ , 1 y , 0. q s ? ? ? ? Comenzamos con algunas definiciones para enunciar el teorema de sub - supersolución. Definición 1.- Decimos que una función ( ) ( ) 1 0 u H L ? ? ? ? ? es una solución débil positiva del problema (P) cuando u < 0 en ? y ( ) ( ) ( ) ( ) 1 1 2 0 (,) (,) , H q x L L u F x u u F x u u ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? ? ? ? (*) Definición 2.- Decimos que un par ( ) ,u u es una Subsolución y una Supersolución para el problema (P); respectivamente, cuando u ( ) ( ) ( ) ( ) 1 1 0 0 , H L u H L ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? con a) ( ) ( ) y 0 u u u u ? = ? sobre ?? b) Para cada ( ) 1 0 H ?? ? con 0 ? ? ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) , q x L L u F x u u F x u u ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? (2.1) y ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) q x L L u F x u u F x u u ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? (2.2)

23 Teorema 3.- Supongamos que q, s 1? y 0 ( ) , , ,u u ? ? ? es un par de sub- supersolución para el problema (P) con u < 0 en ?, y ( ) 1 2 , , (,) 0 F x t F x t ? en ( ) x 0, . L u ? ? ? ? ? ? ? Entonces, el problema (P) posee una solución débil positiva u con u u u ? ? . Demostración.- Consideremos el operador truncamiento asociado a , u y u esto es, ( ) ( ) : ² T L L ? ? ⎯⎯→ ? ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) u u x si u x u x T x u x si u x u x u x u x si u x u x ? ? ? = ? ? ? ? ? ? Como ( ) ,u u L ? ? ? y , u Tu u ? ? sigue que el operador T está bien definido. Ahora consideremos el operador. ( ) 2 : , H u u L ⎯⎯→ ? ( )( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 1 2 , ( ) , ( ) q x L L H V x F x V x V F x V x V ? ? ? ? = + Afirmación 1.- H está bien definido y el operador ( ) 2 ( ), u H Tu u L? ? es continuo de ( ) 2 L ? en ( ) 2 L ? . En efecto: dada ( ) 2 , u L ? ? como ? ? ( ) , Tu u u L ? ? ? ? y 0 u ? en ?. ( ) ( ) ( ) , L L u L Tu u ? ? ? ? ? ? ? ? ( ) 2 , 1 u L m ? ? ? ? Además, tenemos ( ) ( ) ( ) , L L L u Tu u ? ? ? ? ? ? ? ? ( ) 2 , 1 u L m ? ? ? ? Por la continuidad de las funciones ( ) ( ) 1 2 , , F x t y F x t en ? x ( ) 0, L u ? ? ? ? ? ? existe 0 0 k ? tal que: ( ) 0 H V k? en ?, ( ) 2 u L ? ? ? (2.3) Ahora, probaremos la continuidad del operador ( ) u H Tu de ( ) 2 L ? en ( ) 2 L ?

24 . Sea ( ) ( ) 2 n n u L ? ? ? una sucesión y ( ) 2 u L ? ? tal que n u u ⎯⎯→ en ( ) 2 L ? , entonces a menos de subsucesión. ( ) ( ) n u x u x ⎯⎯→ q.t.p. en ? Luego ( ) ( ) n Tu x Tu x ⎯⎯→ q.t.p. en ? Así, dado 1, m? tenemos ( ) ( ) 0 m n Tu x Tu x − ⎯⎯→ q.t.p. en ? y ( ) ( ) ( ) 2 m m n L Tu x Tu x u ? ? − ? q.t.p. en ? Como ( ) 2 m L u ? ? ? y ? es un dominio limitado, sigue de la convergencia dominada de lebesgue que 0 m n Tu Tu ? − ⎯⎯→ ? Por la continuidad de las funciones ( ) ( ) 1 2 , , , F x t F x t tenemos ( ) ( ) ( ) ( ) n H Tu x H Tu x q.t.p. en ? Usando (2.3) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos ( ) ( ) n H Tu H Tu ⎯⎯→ q.t.p. en ( ) 2 L ? Ahora dada ( ) 2 v L? ? , como ( ) ( ) 2 H Tv L? ? sigue el problema lineal. ( ) ( ) 0 L u H Tv en P u sobre −? = ? ? ? = ?? ? Posee una única solución débil ( ) 1 0 u H ? ? . Así mismo está bien definido el operador. ( ) ( ) 2 2 : ( ) S L L v S v u ? ⎯⎯→ ? = Donde ( ) 1 0 u H ? ? es solución débil de ( ) L P . Ahora mostraremos que el operador S definido arriba es

25 (i) S es compacto : Sean ( ) ( ) 2 n n v L ? ? ? acotada y ( ) . n n u v = Por la definición del operador S. ( ) 1 0 ( ) , H n n u H Tv ? ? ? ? ? ? ? = ? ? ? ? ? Haciendo n u ? = y usando (2.3.) tenemos que: * 0 ( ) , n n L u k u n ? ? ? ? Lo que muestra que ( ) ( ) 1 0 n n u H ? ? ? es acotado, luego, a menos de subsucesión n u u ⎯⎯→ en ( ) 1 0 H ? Por las inmersiones compactas de los espacios de Sobolev, a menos de subsucesión. ( ) n n u S v u = ⎯⎯→ en ( ) 2 L ? Lo que muestra que S es compacto. (ii) S es continuo: Sean ( ) 2 en , n v v L ⎯⎯→ ? ( ) n n u S v = y ( ) . S v u= Por la definición del operador S. ( ) 1 0 ( ) , H n n u H Tv ? ? ? ? ? ? ? = ? ? ? ? ? y ( ) 1 0 ( ) , H u H Tv ? ? ? ? ? ? ? = ? ? ? ? ? Haciendo n u ? = en ambas ecuaciones y usando la desigualdad de Holder tenemos que ( ) ( ) ( ) 2 2 = ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

100%	MATCHING BLOCK 1/1	W
n n n n n n n n n n n n		

L L u u u u u u u H Tv u H Tv u H Tv H Tv u H Tv H Tv u ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? − = ? ? − ? ? − ? − ? − ? ? ? ? ? ?

26 Como en el caso anterior ( ) n n u ? es limitada en ( ) 1 0 H ? , luego, también es limitada en ( ) 2 L ? . Usando la continuidad del operador ( ) u u H T y el hecho de n v v ⎯⎯→ en ( ) 2 L ? , tenemos que ( ) 0 n n u u u ? ? ? − ⎯⎯→ ? De la misma forma, haciendo u ? = obtenemos que ² n u u u ? ? ? ? ⎯⎯→ ? ? ? Como ( ) ² n n n n n n u u u u u u u u ? ? ? = ? ? = ? ? − + ? ? ? ? ? Obtenemos de las dos últimas convergencias desde que 2 2 n u u → Desde que ² ² 2 ² n n n n u u u u u u ? ? ? − = ? − ? ? + ? ? ? ? Tenemos que: ( ) ( ) n n S v u u S v = ⎯⎯→ = en 1 0 ( ). H ? Luego ( ) ( ) n S v S v ⎯⎯→ en ( ) 2 L ? lo que demuestra que S es continuo. (iii) Existe R < 0 tal que si u = ?S(u), con ? ? 0,1 , ? ? tenemos que ( ) 2 . L u R ? ? En efecto: • Si ? = 0, tenemos que u = 0 • Si ? ? 0, tenemos que ( ) u S u ? = Por la definición del operador S.

27 ( ) ( ) 1 0 , H u T Tv ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? = ? ? ? ? ? ? ? ? ? Haciendo ? = u y usando (2.3), tenemos que : ( ) 0 r n L u k u ? ? ? Por la desigualdad de Poincaré y la inmersión continua de ( ) 2 L ? en ( ) 'L ? , existe R < 0 tal que: ( ) ' n L u R ? ? Por tanto, por el teorema del Punto fijo de Scheafer, existe ( ) 2 u L ? ? con ( ). u S u = ( ) , u H Tv ? ? ? ? ? ? = ? ? ( ) 1 0 H ?? ? ? O sea ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) , q L L u F x Tu Tu F x Tu Tu ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? + ? ? ( ) 1 0 H ?? ? ? Haciendo u ? = y usando (2.3), tenemos que ( ) 0 ' n L u k u ? ? ? Por la desigualdad de poincaré y la inmersión continua de ( ) 2 L ? en ( ) 'L ? , existe R < 0 tal que: ( ) ' n L u R ? ? Por tanto, por el teorema del Punto fijo de Scheafer, existe ( ) 2 u L ? ? con ( ). u S u =

28 ( ) , u H Tv ? ? ? ? ? ? = ? ? ( ) 1 0 H ?? ? ? O sea ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) , q L L u F x Tu Tu F x Tu Tu ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? + ? ? ( ) 1 0 H ?? ? ? (2.4) Afirmación (2) . u u u ? ? En efecto: como ? ? Tu u u u ? ? ? usando la definición de la subsolución u (Ver (2.1)) y sustrayendo de (2.4), tenemos que para cada ( ) 1 0 H ?? ? con 0. ? ? ( ) ( ) ( ) 1 1 2 2 (, ( ) (, ( )) + (, ( ) (, ( )) q q q q L L L L u u F x u x Tu F x Tu x Tu F x u x Tu F x Tu x Tu ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? − ? ? − − ? ? ? Como , u u ( ) 1 0 H? ? , tenemos ( ) ( ) ? ? ( ) 1 0 max ,0 u u u u H + − = − ? ? Tomando ( ) u u ? + = − y recordando que (,) 0 i F x t ? en 0, , L u Tu u ? ? ? = ? ? en ? ? : (x) ( ) x u u x ?? ? y ? ? , Tu u u ? tenemos que : ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 1 1 , ( ) , ( ) q q L L u u u u F x u x u F x Tu x Tu u u ? ? + + ? ? ? ? ? − ? − ? − − ? ? ? ? ( ) ( ) ( ) 2 2 , ( ) , ( ) q q L L F x u x u F x Tu x Tu u u ? ?+ ? ? ? + − − ? ? ? ( ) ( ) ? ? 1 : ( ) ( ) , ( ) q q L L x u x u x F x u x u Tu u u ? ? ?? ? ? ? = − − ? ? ? ( ) ( ) ? ? * * 2 : ( ) ( ) , ( ) L L x u x u x F x u x u Tu u u ? ? + ?? ? ? ? = − − ? ? ? 0? Luego, ( ) 0 u u + − = y así mismo . u u?

29 Ahora, usando la definición de supersolución u (Ver 2.2) y combinando con (2.4), para cada ( ) 1 0 H ?? ? con 0, ? ? tenemos: ( ) ( ) ( ) 1 1 , ( ) , ( ) q q L L u u F x Tu x Tu F x u x u ? ? ? ? ? ? ? ? ? − ? ? − ? ? ? ? ( ) ( ) 2 2 , ( ) , ( ) q q L L F x Tu x Tu F x u x u ? ? ? ? ? ? + − ? ? ? Como 0 u ? en ( ) ? y ( ) 1 0 H? ? , inferimos que ( ) ( ) ? ? ( ) 1 0 ,0 u u máx u u H + − = − − ? ? . Tomando ( ) u u ? + = − y recordando que (,) 0 i F x t ? en 0, , L u Tu u ? ? ? = ? ? en ? ? : ( ) ( ) x u x u x ?? ? y ? ? , Tu u u ? tenemos que ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 1 1 , ( ) , ( ) q q L L u u u u F x Tu x Tu F x u x u u u ? ? + + ? ? ? ? ? − ? − ? − − ? ? ? ? ( ) ( ) ( ) 2 2 , ( ) , ( ) q q L L F x Tu x Tu F x u x u u u ? ? + ? ? ? + − − ? ? ? ( ) ( ) ? ? 1 : ( ) ( ) , ( ) q q L L x u x u x F x u x u Tu u u ? ? ?? ? ? ? = − − ? ? ? ( ) ( ) ? ? * * 2 : ( ) ( ) , ( ) L L x u x u x F x u x u Tu u u ? ? + ?? ? ? ? = − − ? ? ? 0? Luego, ( ) 0 u u + − = , de donde concluimos que . u u? Por tanto, por la definición del operador T, tenemos Tu = u. Como u satisfice (2.4), concluimos que u es una solución débil positiva del problema (P).

30 Observación 2.4 La Asunción débil positiva ( ) 1 0 u H ? ? ? del problema (P) encontrada en el teorema inmediato anterior es una solución fuerte. Además de eso, 1, 1( ), ß u C ? ? 0 1. ß? ? En efecto: por (2.3) tenemos ( ) ( ) . H Tu L ? ? ? Desde que Tu = u sigue que H (u) ( ) L ? ? ? y u es solución débil de ( ) en , 0 sobre u H u u −? = ? ? ? ? ? = ?? ? Por el teorema de Agmon - Douglas – Ninenver (ver apéndice) ( ) 2 , 1. p u W ? ? ? ?? Considerando p < N, tenemos ( ) ( ) 2, 1, p ß W C ? → ? 0 > ß > 1, luego ( ) 1, . ß u C ? ? Usando la fórmula de green (ver apéndice). ? ? ( ) 0, u H u ? ? −? − = ? ( ) 1 0 H ?? ? ? Por el Teorema de Du Bois Raymond, encontramos ( ) u H u −? = q.t.p. en ? O sea, ( ) 1 2, 0 ( ) , 1 p u H W p ? ? ? ? ? ? y u satisface 1 2 (,) (,) en , 0 en 0 sobre q q L L u F x u u F x u u u u ? ? ? −? = + ? ? ? ? ? ? ? ? ? = ?? ? ? De esta forma concluimos la demostración del teorema.

31 5.1. Resultados Descriptiva. Debido a la naturaleza del trabajo no aplica. 5.2. Resultados Inferenciales. Debido a la naturaleza del trabajo no aplica. 5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis. Debido a la naturaleza del trabajo no aplica.

32 VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. 6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados. u u u ? ? ( ) ,u u Esta sección está dedicada a mostrar que las hipótesis planteadas en el capítulo 3 son verdaderas. Con respecto a la Hipótesis General, la cual es: Existen Soluciones Débiles Positivas para un problema Elíptico Vía Método de Sub- Supersoluciones. Esto se muestra en detalle en el Teorema 3 del Capitulo V, el cual prueba la existencia de una Solución débil positiva con su siendo un par de Sub – Supersoluciones para el problema (2). Con respecto a las hipótesis Específicas, las cuales son: HE1.Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un Problema Elíptico. H.E.2 .Es posible definir el par de Sub- Supersolución para el Problema Elíptico Asociado. Notase que la definición 1 del Capítulo V, dice que una solución débil del problema (2) esta dada por: ( ) ( ) ( ) 1 1 2 0 (,) (,) , u F x u u F x u u H ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? Lo que muestra la veracidad de la HE1. Por otro lado, la definición 2 del Capítulo V, dice un par ( ) ,u u es un par de sub-supersoluciones para el problema (P) si satisface:

33 a) ( ) ( ) , y 0 sobre u u u u = ? ?? b) Para cada ( ) 1 0 H ?? ? con 0 ? ? ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) q q y L L u F x u u F x u u ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? (2.1) y ( ) ( ) ( ) 1 2 (,) (,) q q y L L u F x u u F x u u ? ? ? ? ? ? ? ? ? = + ? ? (2.2) Así por lo expuesto, todas las hipótesis planteadas en este trabajo son verdaderas. 6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares. Como es de vuestro conocimiento, este trabajo esta enmarcado en la parte de ecuaciones diferenciales parciales elípticos no variacionales, la cual es una rama de la matemática donde se estudia la existencia y no existencia de ciertas ecuaciones en un espacio de Sobolev adecuado. En este caso motivados en el artículo de o Gelsopn C.G. dos Santos, Giovany M. Figueiredo y Leandro da S. Tavares cuyo articulo es titulado "A Sub- super solution method for a class of nonlocal problems involving the p(x)-Laplacian operator and applications" establecen resultados la existencia de soluciones para problemas no locales y aplicaciones, usaron el argumento de Sub y supersolución teniendo como base el Teorema del Punto Fijo de Shauder, en el espacio de Sobolev con exponentes variables. En este trabajo se particularizon dicha ecuación, considerando p(x) = 2. De este forma entender mejor dichas ecuaciones en espacios de Sobolev clásicos y mostrar la existencia de dicha solución. Así mismo se estableció y entendió lo siguientes: 1. La existencia de una solución débil acotado por el par de sub y supersolución. 2. La Positividad de la solución.

34 6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes. Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

35 VII. CONCLUSIONES. La presente tesis, ha sido desarrollado con la finalidad de encontrar la existencia de una Solución Débil del Problema (P), como también la positividad de dicha solución • Se presentó un teorema, el cual presenta una relación de orden entre la sub solución y supersolución, en la cual se encontró la solución procurada. Para la demostración de dicho teorema se hizo uso de propiedades importantes y necesarias, las cuales hicieron posible su rápida demostración. • El Problema de Sub y Supersolución analítica y abstracta, que fue generalizado para problemas no lineales por Giovany de Jesus Malcher Figuereido, tiene numerosas aplicaciones en el problemas no variacionales.

36 VIII. RECOMENDACIONES. En el presente trabajo, se presentó de manera teórica y abstracta de la definición de Sub y Supersolución , así como la demostración de un teorema que relaciona la Sub y Supersolución. Se recomienda el estudio de métodos no variacionales, de una manera más detallada y exacta. • Se recomienda el uso de la aplicación del teorema a problemas que envuelven bifurcación local, bifurcación global y problemas relacionados a la ecología. • Se recomienda el estudio más profundo, minucioso de los métodos de sub y supersolución, ya que su aplicación es de gran ayuda para la investigación en el campo de la matemática, ingeniería y la física.

37 IX. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS. 1. Acerbi E. & Mingione, G. (2002). Regularity results for stationary electro- rheological fluids, Arch. Ration. Mech. Anal. Paris. 2. Adams R. A. . (2003). Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), (Second Edition ed). Elsevier/Academic Press. (Second edition ed.). 3. Ambrosetti A., Brezis B. & G. (1994). Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, Journal of Functional Anal. (519-543). https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1078 4. Brézis H. (1983). Théorie et Applications, Paris, Masson. https://perso.telecom-paristech.fr/decreuse/_downloads/48a1133976bc77eb6bb6de23e345b71 1/analyse-fonctionnelle.pdf 5. Carrier, G. F. (1945.). On the Nonlinear Vibration Problema of the Elastic String, Quart. Appl. Math., (Vol. 3, 157-165.). https://doi.org/10.1090/qam/12351 6. Chen Y. , Levine S. & Rao M. (2006,). Variable exponent, linear growth functionals in image restora-tion, SIAM J. Appl. Math. DOI:10.1137/050624522 7. Chipot M. & Lovat, B. (1997.). Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Analysis, T.M.A., (Vol. 30, No. 7),. 8. Chipot M. & Chang, N.H. . (2003,). On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term. Chin. Ann. Math.,. 9. Chipot,M, & Correa,F.J.S.A. (2009). Boundary layer solutions to functional, Bull. Braz. Math. Soc., New Series . . https://doi.org/10.5167/uzh-29069 10. Corra, F.J.S.A., Figueiredo G.M. & Lopes, F.P.M. (2008). On the Existence of Positive Solutions for a Nonlocal Elliptic Problem Involving the p-Laplacian Differential and Integral Equations. (Vol. 21, 305-324). Universidad Federal de Campiña Grande. file:///C:/Users/USER/Downloads/1356038782.pdf.

38 11. Fan X.L. & Zhao D. (1999). A class of De Giorgi type and Holder continuity, Nonlinear Anal. Cornell University. https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.11229 12. Fan, X.L. (2007). Regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form, J. Differ. Equations. GlobalC1. 13. Folland, G.B. (1999). Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition, Jhon Wiley & Sons. Canada. https://books.google.com.pe/books?id=N8jVDwAAQBAJ&printsec=frontc over&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false 14. Yan, B. & Wang, D. (2016). The multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problem. University of Szeged.https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.100 15. Zeidler E. (1990). Functional Analysis and its Applications. (Part II-B). New York. https://link.springer.com/journal/10688/volumes-and-issues

39 ANEXOS:

Tabla 2 Matriz de Consistencia Título: EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB- SUPERSOLUCIONES. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. OBJETIVOS DEL PROBLEMA. HIPÓTESIS VARIABLES METODOLOGÍA POBLACIÓN PROBLEMA GENERAL ¿Existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método De Sub- Supersoluciones? OBJETIVOS GENERALES Probar que existen Soluciones Débiles Positivas para un problema Elíptico Vía Método de sub- supersolución HIPÓTESIS GENERAL Existen soluciones débiles positivas para un problema Elíptico vía método de sub- supersoluciones. VARIABLE DEPENDIENTE D = Soluciones débiles positivas para un problema elíptico. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN El método científico usada es de enfoque cuantitativo. El tipo de investigación es básica, pura o fundamental. No aplica para este tipo de proyecto. PROBLEMAS ESPECIFICOS • ¿Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un problema elíptico? • ¿Es posible definir el par de sub – supersolución para el problema elíptico asociado? OBJETIVOS ESPECÍFICOS • Definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un problema elíptico. • Definir el par de sub – super solución para el problema elíptico asociado. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS • Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un problema elíptico. • Es posible definir el par de sub- supersolución para el problema elíptico asociado. VARIABLE INDEPENDIENTE I = El método de Sub- Supersoluciones. El diseño es no experimental de tipo longitudinal. Muestra: No aplica para este tipo de proyecto.

Hit and source - focused comparison, Side by Side

Submitted text	As student entered the text in the submitted document.
Matching text	As the text appears in the source.

1/1	SUBMITTED TEXT	9 WORDS	100% MATCHING TEXT	9 WORDS
	n n n n n n n n n n n n		n+1)−2(22)[12+22+.....+n2] =6(2n+1)(2n+2)(4n+3)−68n(n+1)(2n+1) =62(2n+1)(n+1)(4n+3)−68n(	

W https://www.toppr.com/ask/question/sum-k1-2n1-1k1-k2/

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** Existencia de Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub - Supersoluciones.
4. **Autor:** Bach. Luz Sara Mori Trujillo

   ORCID: 0000-0002-6338-4000

   DNI N° 40520210
5. **Asesor:** Lic. César Augusto Ávila Célis

   ORCID: 0000-0001-5298-9488

   DNI N° 18051124
6. **Co Asesor:** Mg. Rómulo Díaz Carlos

   ORCID: 0000-0002-3324-4541

   DNI N° 45998292
7. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
8. **Unidades de análisis**: Análisis Funcional
9. **Tipo de Investigación:** Básica
10. **Enfoque de Investigación:** Cuantitativa
11. **Diseño de Investigación:** No experimental.
12. **Tema OCDE**: 1.01.01 (Matemática Pura)

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: http://meet.google.com/jni-dvge-hwj mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 11:40 a.m del Jueves veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por la Señorita Bachiller **MORI TRUJILLO LUZ SARA**, titulado: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELÍPTICO VÍA MÉTODO DE SUB-SUPERSOLUCIONES"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. CABANILLAS LAPA, Eugenio : Presidente
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón : Secretario
Dr. CANALES GARCÍA, Pedro : Vocal
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 172-2022-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 11:40; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por la Señorita Bachiller **MORI TRUJILLO LUZ SARA**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
DIECIOCHO	**EXCELENTE**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **12:35** horas del día veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

Dr. Pedro Canales García
Vocal

Dr. Edinson Montoro Alegre
Suplente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Jurado Evaluador del Informe de Trabajo con Ciclo de Tesis

Informe

Para: Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez

Decano de la Facultad de Ciencias naturales y Matemática

De: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Presidente del Jurado Evaluador del Informe de trabajo con Ciclo de tesis

Asunto: Exposición del Informe final de trabajo con Ciclo de tesis de

Bachiller: MORI TRUJILLO, Luz Sara

Fecha: Bellavista, 20 de Febrero de 2022

El Presidente del Jurado Evaluador del Informe de trabajo con Ciclo de tesis designado mediante Resolución Decanal N° **N.o 172-2022-D-FCNM del 15 de Diciembre de 2022,** manifiesta a Usted que el Informe final titulado EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELÍPTICO VÍA MÉTODO DE SUB-SUPERSOLUCIONES , sustentado por la Señorita Bachiller en matemática MORI TRUJILLO, Luz Sara, **no** presentó observaciones durante el acto de sustentación realizado de manera virtual a través del enlace : http://meet.google.com/jni-dvge-hwj , el Jueves 29 de Diciembre de 2022 a las 11.50am.

Sin otro particular, quedo de Usted.

Atentamente

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Presidente

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

“EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB- SUPERSOLUCIONES”

LUZ SARA MORI TRUJILLO

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N° 129-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. CABANILLAS LAPA, Eugenio
Presidente

Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón
Secretario

Dr. CANALES GARCÍA, Pedro
Vocal

Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl
Suplente

Lic. César Augusto Ávila Célis

Asesor

DEDICATORIA

A mi madre y mis pequeñas Luz y Andrea, por ponerme el reto de crecer profesionalmente.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Paulo Seminario, maestro
y guía, por el apoyo brindado
para culminar la investigación.
Al Dr. Absalon Castillo Valdiviezo, por la motivación para cumplir con la meta trazada.
A los maestros que me enseñaron a dejar huella en la vida de los estudiantes, Ezequiel Fajardo Campos, César Augusto Ávila Celis, Deonicio Orlando Moreno Vega, los llevo en el mejor recuerdo.

.

ÍNDICE

CONTENIDO DE TABLAS

TABLA DE GRÁFICOS

La presente investigación no contiene tabla de gráficos.

TABLA DE IMÁGENES Y OTROS

La presente investigación no contiene tabla de imágenes y otros.

RESUMEN

El presente trabajo está dedicado a mostrar la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico con deformaciones lineales sobre el cuerpo expuesto a fuerzas estructurales con crecimientos multiparamétricos (α, p) sobre un dominio euclidiano bien comportado de $\mathbb{R}^N$, para esto se usará el método de sub – supersolución.

Palabras Claves: Ecuación elíptica, Soluciones débiles, Subsolucion, supersolución.

ABSTRACT

The present work is dedicated to showing the existence of weak positive solutions for an elliptical problem with linear deformations on the body exposed to structural forces with multiparametric growths $\mathbb{R}^N$ on a well-behaved Euclidean domain of, for this the sub-supersolution method will be used.

Keywords: Elliptic equation, Weak solutions, Subsolution, supersolution.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se mostrará la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico vía método de sub-supersoluciones, es decir se estudiará el problema:

$$(\rho)\ldots\ldots\begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\ |u|_{L^q}^{\alpha} \ + \ g(x,u)\ |u|_{L^s}^{\beta} & en \ \Omega, \\ u = 0 & sobre \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Definido en una región acotada $\Omega \subset R^N$ $(N > 1)$ con frontera de clase C^2, donde $|\,.\,|_{L^m}$ es la norma usual del espacio $L^m(\Omega)$, $-\Delta u \coloneqq -div(\nabla u)$ es el operador $Laplaciano$, $q, s \geq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ y $f, g: \Omega\ x\ R \to R$ son funciones que satisfacen ciertas condiciones, que serán precisadas más adelante.

En las últimas décadas surgieron varios trabajos relacionados con el operador Laplaciano, como por ejemplo los encontrados (Acerbi y Mingione,2002),(Fan y Zhao,1999),(Fan,2007) y sus referencias. Las ecuaciones diferenciales parciales que involucran el operador Laplaciano surgen, por ejemplos en fluidos mecánicos, fluidos no Newtonianos, elasticidad no lineal como también la ecuación Carrier's que consiste en estudiar los problemas de tipo $\rho U_A - a\left(x, t|u|_{L^2}^2\right)\Delta u = 0.$

En (Corra, Figueiredo y Lopes,2008, Vol. 21,p.305-324) los autores utilizaron un argumento de sub- supersolución para estudiar el problema.

$\{-\Delta u = |u|_{L^q}^{\alpha} \quad en\ \Omega, \quad u = 0 \qquad sobre\ \partial\Omega,$ $\begin{cases} -\Delta u = |u|_{L^q}^{\alpha} \ \ en\ \Omega \\ u = 0\ en\ \partial\Omega \end{cases}$

Mientras que (Chipot y Corra, 2009,p.381-393), los autores utilizaron un teorema abstracto de sub- supersolución cuya prueba se basa principalmente en una versión del Teorema de Minty- Browder para operadores pseudomonotonos de tipo.

$$\begin{cases} a\left(\int_{\Omega}|u|^{r}dx\right)\Delta u = f_{\lambda}(x,\mu) \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Donde h_1, h_2, f, g obedecen ciertas condiciones.

Es así que esta tesis es de alto interés para un sector significativo de la ciencia actualmente, el cual es reflejado en su alto nivel de publicaciones dentro de la comunidad matemática.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

1.1. Descripción de la realidad problemática:

El presente trabajo tendrá como objetivo principal mostrar la Existencia de Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub-Supersolución”

$$(\rho) \ldots.. \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,|u|_{L^q}^{\alpha} + g(x,u)\,|u|_{L^s}^{\beta} & en\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

Donde Ω es una región acotada $\Omega \subset R^N$ con frontera de clase C^2 y con condiciones de Dirichlet, esto es $u(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$. Además asumiremos sobre α,ß$, s, q > 0$ y $f, g: \Omega\, x\, R \rightarrow R$ que se satisfacen las siguientes condiciones:

- Las constantes obedecen las siguientes desigualdades $q, s \geq 1$ y $\alpha, \beta \geq 0$.
- Si $(\underline{u}, \bar{u})$ es un par de sub-supersolución para (P) con $\underline{u} > 0\ c.s.\ en\, \Omega$, $entonces\, f(x,t), g(x,t) \geq 0\ en\ \ \underline{\Omega}\, x\, [0,\ |\,\underline{u}|_{L^\infty}\,]$ siendo estas funciones continuas

Estas hipótesis son las usuales presentes en la bibliografía mencionada en este trabajo.

1.2. Formulación del problema.

Teniendo en cuenta lo referido en el apartado anterior, la presente investigación formula la problemática en los siguientes términos:

1.2.1. Problema General.

¿Existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub-Supersoluciones?

1.2.2. Problemas Específicos.

- ¿Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un Problema Elíptico?
- ¿Es posible definir el par de Sub – Supersolución para el Problema Elíptico asociado?

1.3. Objetivos.

1.3.1. Objetivo General:

Probar que existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método de Sub- Supersolución.

1.3.2. Objetivos específicos:

- Definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un Problema Elíptico.
- Definir el par de Sub – Super Solución para el Problema Elíptico asociado.

1.4. Justificación.

Desde una perspectiva teórica el estudio aportará información de alta relevancia acerca de la existencia de soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico mediante el método de Sub y Súper solución las cuales permitirán modelar ciertos fenómenos físicos, como la ecuación de la onda, fenómenos matemáticos, como la ecuación logística, fenómenos sociales como el comportamiento de los ciudadanos ante el covid-19.

El aporte metodológico de esta investigación consistirá en presentar un nuevo procedimiento que dará a conocer los pasos, métodos y técnicas a seguir en la determinación de la solución de una clase especifica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas usando el método de Sub- Supersolución.

Es así que el presente proyecto formula un tema de actual interés y se espera con esto contribuir en el desenvolvimiento de la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales no lineales y contribuir en la construcción de las bases matemáticas para el desarrollo de la tecnología de punta en el País.

1.5. Delimitantes de la investigación.

1.5.1. **Teórica.**

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2. **Temporal.**

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.3. **Espacial.**

No se aplica en este tipo de proyecto.

II. MARCO TEÓRICO.

2.1 Antecedentes.

2.1.1. Internacionales.

- Chipot y Corra (2009) en su artículo **On Some Model Diffusion Problems With a Nonlocal Lower Order Term**. Los autores consideran una clase de problemas parabólicos no lineales donde el término de orden inferior depende de una integral ponderada de la solución y abordan los problemas de existencia, unicidad, soluciones estacionarias y, en algunos casos, comportamiento asintótico.

- Ambrosetti y Brezis (1994) en su artículo **Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, Journal of Functionar su muestra .** Muestra la existencia de dos soluciones positivas de la ecuación elíptica en Rn con no linealidades cóncavas y convexas.

- Dos Santos y Figueiredo (2017) en su trabajo **Soluciones positivas para una clase de problemas no locales que involucran espacios generalizados de Lebesgue**. En este trabajo probaron la existencia.

2.1.2. Nacionales

- MACHADO (2017) en su trabajo Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no lineal vía el teorema de Schauder. Se prueba la existencia de una solución débil para el siguiente problema elíptico no lineal.

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Además, el autor mostró la existencia y unicidad de una solución débil para el problema anisotrópico del siguiente tipo

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}\left(a_i(x,u)\left|\partial_{x_i}u\right|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\right)+b(x,u)=f \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Para resolver (1) el autor usó la teoría de las funciones semicontinuas, aplicaremos el teorema de Lax – Milgram y el teorema del punto fijo de Schauder. Para resolver (2) aplicaremos el teorema de Minty – Browder y el Teorema del punto fijo de Schauder.

- ACUÑA (2019) en su trabajo **Solución débil a una ecuación elíptica con el (P,Q)- laplaciano y término no lineal dependiente del gradiente** .En esta tesis, estudiamos un problema elíptico no lineal con el (p,q)-Laplaciano y que tiene un término convectivo (el término dependiente del gradiente). Probamos que bajo condiciones adecuadas para el término convectivo, el problema posee una solución débil. Además obtenemos un resultado de unicidad y presentamos un algoritmo de aproximación numérica.

- SANTARIA (2015) en su trabajo **Ecuaciones y Sistemas Elípticos con Crecimiento Superlineal** estudiaron ecuaciones elípticas de la forma

$$(\rho)\ldots\ldots\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(x,u), \text{ en } \Omega \\ \qquad u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ es un dominio limitado o $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f : \bar{\Omega}\ x\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con condiciones de crecimiento subcrítico y crítico.

También estudiaron sistemas de ecuaciones elípticas de la forma.

$$(S).....\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v), & \text{en } \Omega \\ -\Delta v = g(x,u,v), & \text{en } \Omega \\ u,v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), & \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N \left(N \geq 2\right)$, $f,g : \bar{\Omega} x \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas con condiciones de crecimiento subcrítico. Encontraremos soluciones definidas en $H_0^1(\Omega) x H_0^1(\Omega)$, para sistemas elípticos de tipo gradiente y de tipo hamiltoniano.

2.2. Bases Teóricas.

- En esta sección haremos un repaso de los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de la presente tesis, con esta finalidad se usó los trabajos de M. Chipot y N.H.chang para más detalles (cf. [10]) y sus referencias.

Proposición (1).- Sea $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión en un espacio de Banach E. Entonces.

a. $x_n \to x$ en $E \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \forall f \in E^*$

b. Si $x_n \to x$ en E, entonces $x_n \to x$ en E.

c. Si $x_n \to x$ en E, entonces $\|x_n\|$ es acotada y $\|x\| \leq n \to \infty \liminf \|x_n\|$.

d. Si $x_n \to x$ en E y $f_n \to f$ en E*, entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$

Demostración: Ver [3], Pag. 112.

Proposición (2).- Sea E un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\left(x_{n_k}\right) k \in N$ que converge en la topología débil.

Demostración: Ver [4] pág. 22

1. Espacios $L^P(\Omega)$

Sea Ω un abierto de R^n y 1 $\leq p < \infty$, definimos $L^P(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles $u:\Omega \longrightarrow R$ tal que $|u|^P$ es Lebesgue integrable sobre Ω. La norma en $L^P(\Omega)$ es dado por:

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{P}}$$

Para el caso en que $p = \infty$, definimos $L^P(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles que son esencialmente acotadas y

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c; \quad |u(x)| \leq c \text{ c.s. en } \Omega\}$$

En una norma en $L^\infty(\Omega)$

Teorema (1).- Si $1 \geq p < \infty$, entonces $L^P(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_P = \left(\int_\Omega |u(x)|^P \, dx\right)^{1/P}$$

Demostración.- Sabemos que $L^P(\Omega)$ es un espacio normado. Resta probar que es un espacio completo. Para ello sea $\left([u_n]\right)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^P(\Omega)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe M = M$(\varepsilon) \in N$ tal que

$\int_\Omega |u_n - u_m|^p \, d\mu = \|u_n - u_m\|_p^p < \varepsilon^p$ siempre que m, n $\geq M$

Sea $(g_k)_{k=1}^\infty$ una subsucesión de $\left([u_n]\right)_{n=1}^\infty$ tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$ para todo $k \in N$. Consideremos la función

$$g : \Omega \to R \cup \{\infty\}, \quad g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

Sabemos que g es medible y no negativa. Así mismo,

$$|g(x)|^p = \lim_{n\to\infty}\left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|\right)^p$$

Por el lema de Fatou, se deduce

$$\int_{\Omega}|g|^{p}\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left(|g_1|+\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|\right)^{p}d\mu.$$

Elevando ambos miembros a $\frac{1}{P}$ y usando la desigualdad de Minkowski, obtenemos

$$\left(\int_{\Omega}|g|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left(|g_1|_p+\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}-g_k|_p\right)\le \|g_1\|_p+1.$$

Entonces, definiendo $A=\{x\in\Omega : g(x)<\infty\}$, de (2) podemos concluir que $\mu(\Omega-A)=0.$ Luego, la serie en (1) converge excepto tal vez en un conjunto de media nula Ω -A, esto es, una serie µ - casi siempre. Se tiene que la función $g : X_A \in L^P(\Omega)$, donde X_A es la función característica de A. Definimos $f:\Omega\to K$ por:

$$f(x)=\left\{g_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}-g_k(x)\right\}, si \text{ x } \in \text{A0}, \qquad \text{si } x\in A$$

Como $g_k = g_1+(g_2-g_1)+(g_3-g_2)+\ldots..+(g_k-g_{k-1})$ tenemos

$$|g_k(x)|\le |g_1(x)|+\sum_{j=1}^{k-1}|g_{j+1}(x)-g_j(x)|\le g(x)$$

Para todo x y $g_k(x)\to f(x)$ para todo $x\in A$, esto es, una sucesión $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para *f* c.s. Por el Teorema de la Convergencia Dominada, se deduce que $f\in L^P(\Omega)$.

Proposición 3 (Desigualdades de Yung). Sean 1 < p < q < ∞ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y sean $a,b\ge 0$. Entonces $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

Demostración : Ver [4] Pág. 136

Proposición 4 (Desigualdad de Holder) Si $u\in L^P(\Omega)$ y $v\in L^q(\Omega)$ como $1\le p\le\infty$ y $1p+1q=1.$ Entonces se tiene la desigualdad.

$$\int_{\Omega}|uv|\le \|u\|_{L^P(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración : Ver [3] Pág. 6.

Proposición 5.- (Teorema de la Representación de Riesz).- Sean $1 < p < \infty,\ \varphi \in \left(L^p(\Omega)\right)^*$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Entonces existe una única función $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \ \forall v \in L^1(\Omega)$$

Además.

$$\|u\|_{L\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{\left(L^1(\Omega)\right)^*}$$

Demostración : Ver [4]. Pág. 184.

Proposición 6.- (Desigualdad de Minkousky).- Sea $\varphi \in \left(L^1(\Omega)\right)^*$ entonces existe una única función $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

Sea $1 \le p \le 0$ y $u, v \in L^p(\Omega)$. Entonces $u + v \in L^p(\Omega)$ y

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \ \forall v \in L^1(\Omega)$$

También tenemos la siguiente isometría.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{\left(L^1(\Omega)\right)^*}$$

Demostración : Ver [3], Pág. 9.

Proposición 7.- Sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones acotadas en $L^P(\Omega)$ y sea $f \in L^P(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^P(\Omega)} \longrightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión $\left(f_{n_k}\right)$ tal que

1. $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) c.s.$ en Ω
2. $\left|f_{n_k}(x)\right| \le h(x), \forall k \in N$ y c.s. en Ω con $h \in L^P(\Omega)$

Demostración : Ver [4].

2. Distribuciones.

Denotemos por $D(\Omega)$ al espacio de las funciones de prueba en Ω. Se define la distribución sobre Ω a toda forma lineal y continua T: D$(\Omega) \to R$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es un espacio vectorial el cual se representa por D/ (Ω), llamado espacio de las distribuciones sobre Ω.

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

Es una distribución sobre Ω.

Proposición 8.- (Lema de Du Bois Raymond) Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces $T_u = 0$ si y solamente si u = 0 casi siempre en Ω.

Demostración : Ver [4].

De esta proposición se tiene que T_u queda unívocamente determinada por u casi siempre sobre Ω, esto es, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u = T_v$ si y solamente si $u = v$ c.s. sobre Ω. Por este motivo se identifica a T_u como la distribución que define u.

Proposición 9.- Sea $(u_v)_{v\in N} \subset L^P_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, tal que $u_v \longrightarrow u$ en $L^P_{loc}(\Omega)$, entonces $u_v \to u$ en $D^*(\Omega)$ $\left(L^1_{loc}(\Omega) \to D^*(\Omega)\right)$

Demostración : Ver [4].

Sea $\alpha \in N^n$, se define la derivada de orden α de una distribución T sobre Ω como sigue.

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Se verifica que $D^\alpha T$ es una distribución. Con esto tenemos que toda distribución sobre Ω posee derivada de todas las órdenes, que aún es una distribución sobre Ω. Además, el operador derivación $D^k : D^*(\Omega) \to D^*(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ es lineal y continuo.

3. Espacios de Sobolev.

Consideremos Ω un abierto acotado de R^n con frontera Γ bien regular. Definamos el espacio de Sobolev como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\right\},$$

Donde D^α es el operador de derivación de orden α, en el sentido de las distribuciones, este espacio dotado de la norma:

$$\|u\| = \left[\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right]^{1P}$$

Proposición 10.- El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración : Ver [4].

Proposición 11.- Es sabido que C_0^∞ es den so en $L^p(\Omega)$, más no es verdad que C_0^∞ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, como veremos posteriormente. Motivado por esta razón se define el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ como el cierre de C_0^∞ (Ω) en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir:

$$\overline{C_0^\infty}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$$

Demostración : Ver [15].

Proposición 12.- Sea $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $\tilde{u}$ la extensión de u cero de Ω.

Se tiene:

(a) $\tilde{u} \in W^{m,p}\left(R^n\right)$

(b) $D^\alpha \tilde{u} = \left(\tilde{D}^\alpha u\right)$ para todo $|a| \leq m$

(c) $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}\left(R^n\right)}$

Demostración : Ver [3].

Proposición 13.- Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, el complementario de Ω en el R^n tiene medida de Lebesgue nula.

Demostración : Ver [4].

Teorema 14.- (Inmersión de Sobelev). Sea $\Omega \in R^n$ un dominio acotado con frontera C^m.

i) Si mp < n , entonces $W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

ii) si mp = n entonces: $W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ Para todo $1 \leq q < \infty$

iii) Si mp > n , entonces $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow^{cpct} C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$

Demostración : Ver [4].

Observación.- En especial, cuando p = 2, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbeert que denotamos por $H^m(\Omega)$.

Definición 15.- Un operador lineal T: $E \rightarrow F$, entre espacios normados, es llamado compacto si $\overline{T(A)} \subset F$ for compacto en F, donde A es un conjunto acotado en E.

Proposición 16.- Sean E, F espacios normales y T: E$\rightarrow F$ operador lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es compacto.

b) $\overline{T(A)}$ es compacto en F para todo acotado A en E.

c) Para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in N}$ em E, a sucesión $\left(T(x_n)\right)_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente en F.

Demostración : Ver [3], Pág. 137.

Proposición 17.- Sean E_0, E, F_0, F espacios normados y S: $E_0 \longrightarrow F$, $T : E \rightarrow F$ y $U : F \longrightarrow F_0$ operadores lineales con S y U continuos y T compacto. Entonces $U \circ T \circ S$: $E_0 \rightarrow F_0$ es un operador compacto.

Demostración : Ver [3], Pág. 139.

Proposición 18.- (Desigualdad de Poincaré).- Sea Ω un abierto de R^n acotado, entonces $\exists C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Donde $proy_i \Omega \subset (a,b)$.

Demostración : Ver [3]

Teorema 19.- (De Agmon – Douglis – Nioremberg).

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio limitado y $f \in L^r(\Omega)$ con r > 1. Si $u \in H^1(\Omega)$ es |solución débil del problema lineal.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \text{ en } \Omega; \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces $u \in W^{2r}(\Omega)$ y existe c > 0, independiente de u tal que

$$\|u\|_{W^{2r}(\Omega)} \leq C|f|_{L^r(\Omega)}$$

Además, si $f \in W^{K,r}(\bar{\Omega})$, entonces $u \in W^{k+2,r}(\Omega)$

Teorema 20.- (De Schauder).

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Entonces existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, solución del problema linear.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \text{ en } \Omega; \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Y existe C > 0, independiente de u tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C|f|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

Además, si $f \in C^{K,r}(\bar{\Omega})$, entonces $u \in C^{k+2,r}(\bar{\Omega})$

Teorema (21) Principio de máximo .

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con $-\Delta u \geq 0$, supongamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \inf_{x \in \Omega} u(x)$. Entonces u es constante.

Demostración.- Ver **[15] pág. 284.**

4. Grado Topológico.

Sea Ω un dominio acotado de $R^N, \varphi \in C^1\left(\Omega, R^N\right)$ y $S=\left\{x \in \Omega; J_\varphi(x)=0\right\}$, donde J_φ representa la matriz jacobiana de φ. Sea $y \in R^N$ con $y \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$ tenemos que $J_\varphi(x)=\det\left[\varphi'(x)\right] \neq 0$, entonces por el Teorema de la Funcao Inversa φ é un difeomorfismo de una vecindada U de x sobre una vecindad V de y, esto es, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)=V$ es un difeomorfismo. El conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ es finito. Sea $\varphi \in C^1\left(\Omega, R^N\right)$ e $y \notin \varphi(\partial\Omega) \bigcup \varphi(S)$. Definamos el grado topológico de Brouwer de la aplicación φ en relación a Ω en el punto y, como el número entero.

$$\deg(\varphi, \Omega, y)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} \operatorname{sgn}\det[\varphi'(x)] & \text{si } \varphi^{-1}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{casi contrario,} \end{cases}$$

Donde sgn es la función signo que es definida por

$$\deg(\varphi, \Omega, y)=\begin{cases} 1 & \text{, si t} > 0 \\ -1, & \text{si t} < 0. \end{cases}$$

De la definición del Grado Topológico, tenemos las siguientes propiedades:

(1) Normalización. Sea Id la aplicación identidad $Id: \bar{\Omega} \rightarrow R^N$, entonces,

$$\deg(Id, \Omega, y)=\{1, \text{ si } y \in \Omega, 0, \text{ si } y \neq \Omega$$

(2) **Escisión.** Si $\deg(Id, \Omega, y)=0$, entonces existe por lo menos un $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x)=y$.

(3) Aditividad. Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2=\phi$ e $y \notin \varphi\left(\bar{\Omega}-\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)\right)$, entonces

$$\deg(\varphi, \Omega, y)=\deg(\varphi, \Omega_1, y)+\deg(\varphi, \Omega_2, y).$$

2.3. Marco Conceptual.

Grado Topológico.

Sea Ω un dominio acotado de $R^N, \varphi \in C^1(\Omega, R^N)$ y $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, donde J_φ representa la matriz jacobiana de φ. Sea $y \in R^N$ con $y \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$ tenemos que $J_\varphi(x) = \det[\varphi'(x)] \neq 0,$ entonces por el Teorema de la Función Inversa φ es un difeomorfismo de una vecindada U de x sobre una vecindad V de y, esto es, $\varphi : U \to \varphi(U) = V$ es un difeomorfismo. El conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ es finito. Sea $\varphi \in C^1(\Omega, R^N)$ e $y \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definamos el grado topológico de Brouwer de la aplicación φ en relación a Ω en el punto y, como el número entero.

$$\deg(\varphi, \Omega, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} \operatorname{sgn} \det[\varphi'(x)] \text{ si } \varphi^{-1}(x) \neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 \text{ casi contrario,} \end{cases}$$

Donde deg es la función signo que es definida por

$$\deg(\varphi, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & \text{, si t} > 0 \\ -1, & \text{si t} < 0. \end{cases}$$

(Zeidler , 1990).

Teorema de punto fijo de Shauder.

Sea E un espacio de Banach y $Q \subset E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Si $T : Q \longrightarrow Q$ es un operador compacto y continuo. Entonces T, tiene un punto fijo (Zeidler, 1990).

Definición de Subsolución.

Decimos que una función $\underline{u} \in H_0^{'}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una subsolución si $\underline{u} \leq \bar{u}$ en Ω y $\underline{u} = 0 \leq \bar{u}$ en $\partial\Omega$ y $\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla v dx \leq \int_\Omega \left[f(x, \underline{u}) |\underline{u}|_{L^q}^\alpha + g(x, \underline{u}) |\underline{u}|_{L^s}^{ß} \right] v dx$

$\forall v \in H_0^{'}(\Omega)$ con $V \geq 0$ (Zeidler, 1990).

Definición de Supersolución.

Decimos que una función $\bar{u} \in H'(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ es una supersolución si $\underline{u} \leq \bar{u}$ en Ω, $\underline{u} = 0 \leq \bar{u}$ en $\partial\Omega$ y $\int_{\Omega} \nabla\bar{u}\nabla v \geq \int_{\Omega} \left[f(x,\bar{u})|\bar{u}|_{L^q}^{\alpha} + g(x,\bar{u})|\bar{v}|_{L^s}^{ß} \right] vdx$ $\forall v \in H_0^{'}(\Omega)$ con $V \geq 0$ (Zeidler, 1990).

Definición de solución débil.

Decimos que $u \in H_0^{'}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ es una solución débil positivo del problema (P), creando $u > 0$ en Ω y $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \geq \int_{\Omega} \left[f(x,u)|u|_{L^q}^{\alpha} + g(x,u)|u|_{L^s}^{ß} \right] vdx$ $\forall v \in H_0^{'}(\Omega)$ (Zeidler, 1990).

2.4. Definiciones de términos básicos.

Espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un abierto de R^n y $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow R$ tal que $|u|^p$ es Lebesgue integrable sobre Ω. La norma en $L^p(\Omega)$ es dado por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Para el caso en que $p = \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles que son esencialmente acotadas y

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \inf \{c;\ |u(x)| \leq c \ c.s. \text{ en } \Omega\}$$

En una norma en $L^{\infty}(\Omega)$ (Zeidler, 1990).

Desigualdad de Holder.

Si $u \in L^P(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ como $1 \leq p \leq \infty$ y $1p+1q=1.$ Entonces se tiene la desigualdad.

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^P(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

(Zeidler , 1990).

Espacio de Sobolev.

Funciones cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones pertenecen a los espacios de Lebesgue: decimos que $D^\alpha f = g$ en sentido débil o en sentido de las distribuciones (Zeidler, 1990).

Teorema de la Representación de Riesz.

Sean 1 < p < ∞, $\varphi \in \left(L^P(\Omega)\right)^*$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces existe una única función $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^P(\Omega)$$

Además

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{\left(L^p(\Omega)\right)^*}$$

(Ambrosetti y Brezis ,1994, No. 2, p.519-543).

Distribuciones

Denotemos por $D(\Omega)$ al espacio de las funciones de prueba en Ω. Se define la distribución sobre Ω a toda forma lineal y continua T: D $(\Omega) \rightarrow R$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es un espacio vectorial el cual se representa por D/ (Ω), llamado espacio de las distribuciones sobre Ω.

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

Es una distribución sobre Ω (Zeidler, 1990).

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis.

Hipótesis general.

Existen Soluciones Débiles positivas para un problema Elíptico Vía método de Sub- Supersoluciones.

Hipótesis especifica.

- Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un Problema Elíptico.
- Es posible definir el par de Sub- Supersolución para el Problema Elíptico asociado.

3.1.1. Operacionalización de las variables.

Definición conceptual de variables.

Variable dependiente (D).

D = Soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico.

A partir de un problema elíptico multiplicando por una función de prueba adecuada e integrando sobre su dominio es posible encontrar su formulación variacional procediendo por un camino de densidad y continuidad aquellas soluciones que satisfagan dicha formulación variacional se definen como soluciones débiles para problemas elípticos asociados al referirse con soluciones débiles positivas hacen referencia a una condición de signo y monotonía sobre estas soluciones.

Variable independiente (I).

I = Método de Sub-Supersolucion.

El método de sub y Súper solución consiste en Mostrar la existencia de algún tipo de solución para un problema variacional a partir de soluciones que aproximan de manera Superior y soluciones que aproximan de manera inferior este método muchas veces se basa en otros métodos de tipo variacional.

Tabla 1 Operacionalización de Variables.

Variables	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
D	-Formulación variacional. -Espacio de fase débil. -Condición de signo	-Espacio de las funciones de prueba. -Espacio de fase débil. -Condición de monotonía.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
I	- Sub solución -Súper solución. -El funcional de Euler lagrange.	-Límite inferior de soluciones. -Límite superior de soluciones. -Formulación variacional.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño Metodológico.

Tipo de Investigación.

Nuestro enfoque de investigación es cuantitativa de acuerdo a mis objetivos. El tipo de investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios en forma inductiva-deductiva tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Nuestro nivel de investigación es descriptivo.

Diseño de investigación.

Nuestro diseño de investigación es no experimental. Se empezará definiendo los términos básicos que nos ayudaran a demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para un problema elíptico especifico tomando como método de resolución el método de sub-supersolucion.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza de la investigación, al ser del tipo teórico – básico, el método empleado es el método de escritorio o biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3 Población y muestra.

Población: No aplica para este tipo de proyecto.

Muestra: No aplica para este tipo de proyecto.

4.4. Lugar de estudio y período desarrollado.

Debido a la pandemia mundial originado por el COVID – 19 el lugar de estudio será en mi hogar.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.6. Análisis y procesamientos de datos.

Con la variable independiente (Método de Sub-Supersolucion) tendremos una mejor visualización del comportamiento de las soluciones de un problema elíptico. La variable dependiente (Soluciones débiles positivas para un Problema Elíptico) nos dará el conjunto factible. Ambas variables se relacionan ya que el primero buscará la mejor solución (óptimo) de todas las posibles que se encuentran en conjunto factible.

4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

V. RESULTADOS

En este capítulo probaremos un Teorema de Existencia de Soluciones para algunos Problemas Elípticos usando el método de Sub-Supersolución. Consideremos el problema.

$$(P)\left\|\begin{array}{ll} -\Delta u = F_1(x,u)|u|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x,u)|u|^{\gamma}_{L^s_{(\Omega)}} & en \;\; \Omega \\ u = 0 & sobre \; \partial\Omega \end{array}\right.$$

Donde Ω es un dominio limitado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ suave $N \geq 1, | \,.\, |_{L^m}$ es la norma usual en $L^m(\Omega)$, las funciones $F_1, F_2 : \bar{\Omega}\; x\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q, s \geq 1$ y $\alpha, \gamma \geq 0.$

Comenzamos con algunas definiciones para enunciar el teorema de sub-supersolución.

Definición 1.- Decimos que una función $u \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una solución débil positiva del problema (P) cuando u > 0 en Ω y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(F_1(x,u)|u|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x,u)|u|^{\gamma}_{L^s_{(\Omega)}} \right)\varphi, \;\; \forall \varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \tag{*}$$

Definición 2.- Decimos que un par $(\underline{u}, \bar{u})$ es una Subsolución y una Supersolución para el problema (P); respectivamente, cuando $\underline{u}$ $\in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \bar{u} \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con

a) $(\underline{u} \leq \bar{u})$ y $(\underline{u} = 0 \leq \bar{u})$ sobre $\partial\Omega$

b) Para cada $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ con $\varphi \geq 0$

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi = \int_\Omega \left(F_1(x,\underline{u})|\underline{u}|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x,\underline{u})|\underline{u}|^{\gamma}_{L^s_{(\Omega)}} \right)\varphi, \tag{2.1}$$

y

$$\int_\Omega \nabla \bar{u} \nabla \varphi = \int_\Omega \left(F_1(x,\bar{u})|\bar{u}|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x,\bar{u})|\bar{u}|^{\gamma}_{L^s_{(\Omega)}} \right)\varphi \tag{2.2}$$

Teorema 3.- Supongamos que q, s ≥ 1 y 0 $\leq \alpha, \gamma, (\underline{u}, \bar{u})$ es un par de sub-supersolución para el problema (P) con $\underline{u}$ > 0 en Ω, y $F_1(x,t), F_2(x,t) \geq 0$ en $\bar{\Omega}$ x $\left[0, |\bar{u}|_{L^\infty(\Omega)}\right]$. Entonces, el problema (P) posee una solución débil positiva u con $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

Demostración.- Consideremos el operador truncamiento asociado a $\underline{u}\ y\ \bar{u}$, esto es,

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

$$T_u(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & si \quad u(x) \geq \underline{u}(x) \\ u(x) & si \quad \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) \\ \bar{u}(x) & si \quad u(x) \geq \bar{u}(x) \end{cases}$$

Como $\underline{u}, \bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ y $\underline{u} \leq Tu \leq \bar{u}$, sigue que el operador T está bien definido.

Ahora consideremos el operador.

$$H : |\underline{u}, \bar{u}| \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$H(V)(x) = F_1(x, V(x)) |V|^\alpha_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x, V(x)) |V|^\gamma_{L^s_{(\Omega)}}$$

Afirmación 1.- H está bien definido y el operador $u \mapsto H(Tu), u \in L^2(\Omega)$ es continuo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

En efecto: dada $u \in L^2(\Omega)$, como $Tu \in [\underline{u}, \bar{u}] \subset L^\infty(\Omega)$ y $\underline{u} > 0$ en Ω.

$$|\underline{u}| L^\infty(\Omega) \leq |Tu|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\bar{u}|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \forall u \in L^2(\Omega), m \geq 1$$

Además, tenemos $|\underline{u}|_{L^\infty(\Omega)} \leq |Tu|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\bar{u}|_{L^\infty(\Omega)}$, $\forall u \in L^2(\Omega), m \geq 1$

Por la continuidad de las funciones $F_1(x,t)\ y\ F_2(x,t)$ en $\bar{\Omega}$ x $\left[0, |\bar{u}|_{L^\infty(\Omega)}\right]$ existe $k_0 > 0$ tal que:

$$|H(V)| \leq k_0 \quad \text{en } \Omega, \quad \forall u \in L^2(\Omega) \tag{2.3}$$

Ahora, probaremos la continuidad del operador $u \mapsto H(Tu)$ de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$

.

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ una sucesión y $u \in L^2(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $L^2(\Omega)$, entonces a menos de subsucesión.

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \qquad \text{q.t.p. en } \Omega$$

Luego $Tu_n(x) \longrightarrow Tu(x)$ q.t.p. en Ω

Así, dado $m \geq 1$, tenemos

$$|Tu_n(x) - Tu(x)|^m \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. en } \Omega$$

y

$$|Tu_n(x) - Tu(x)|^m \leq 2|\bar{u}|^m_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{q.t.p. en } \Omega$$

Como $2|\bar{u}|^m_{L^\infty(\Omega)} \in \mathbb{R}$ y Ω es un dominio limitado, sigue de la convergencia dominada de lebesgue que

$$\int_\Omega |Tu_n - Tu|^m \longrightarrow 0$$

Por la continuidad de las funciones $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$ tenemos

$$H(Tu_n)(x) \mapsto H(Tu)(x) \text{ q.t.p. en } \Omega$$

Usando (2.3) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos

$$H(Tu_n) \longrightarrow H(Tu) \text{ q.t.p. en } L^2(\Omega)$$

Ahora dada $v \in L^2(\Omega)$, como $H(Tv) \in L^2(\Omega)$ sigue que el problema lineal.

$$(P_L)\begin{cases} -\Delta u = H(Tv) & en\ \Omega \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

Posee una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$. Así mismo está bien definido el operador.

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$v \mapsto S(v) = u$$

Donde $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (P_L).

Ahora mostraremos que el operador S definido arriba es

(i) **S es compacto :** Sean $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ acotada y $u_n = (v_n)$. Por la definición del operador S.

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv_n)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Haciendo $\varphi = u_n$ y usando (2.3.) tenemos que:

$$\|u_n\| \le k_0 |u_n|_{L^*(\Omega)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo que muestra que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ es acotado, luego, a menos de subsucesión $u_n \longrightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)$

Por las inmersiones compactas de los espacios de Sobolev, a menos de subsucesión.

$$u_n = S(v_n) \longrightarrow u \text{ en } L^2(\Omega)$$

Lo que muestra que S es compacto.

(ii) S es continuo: Sean $v_n \longrightarrow v \text{ en } L^2(\Omega)$, $u_n = S(v_n)$ y $S(v) = u.$

Por la definición del operador S.

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv_n)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

Haciendo $\varphi = u_n$ en ambas ecuaciones y usando la desigualdad de Holder tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\right| &= \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n - \int_\Omega \nabla u \nabla u_n\right| \\
&= \left|\int_\Omega H(Tv_n)u_n - \int_\Omega H(Tv)u_n\right| \\
&\le \int_\Omega |H(Tv_n) - H(Tv)||u_n| \\
&\le |H(Tv_n) - H(Tv)|_{L^2(\Omega)} |u_n|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Como en el caso anterior $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada en $H_0^1(\Omega)$, luego, también es limitada en $L^2(\Omega)$. Usando la continuidad del operador $u \mapsto H(T_u)$ y el hecho de $v_n \longrightarrow v$ en $L^2(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u) \longrightarrow 0$$

De la misma forma, haciendo $\varphi = u$ obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Como

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla u$$

Obtenemos de las dos últimas convergencias desde que

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$$

Desde que $\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega |\nabla u|^2$

Tenemos que: $S(v_n) = u_n \longrightarrow u = S(v)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Luego $S(v_n) \longrightarrow S(v)$ en $L^2(\Omega)$ lo que demuestra que S es continuo.

(iii) Existe R > 0 tal que si u = θS(u), con $\theta \in [0,1]$, tenemos que $|u|_{L^2(\Omega)} < R$. En efecto:

- Si θ = 0, tenemos que u = 0
- Si θ ≠ 0, tenemos que $S(u) = \dfrac{u}{\theta}$

Por la definición del operador S.

$$\int_{\Omega}\nabla\left(\frac{u}{\theta}\right)\nabla\varphi=\int_{\Omega}T\left(Tv\right)\varphi,\qquad\forall\varphi\in \mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right)$$

Haciendo φ = u y usando (2.3), tenemos que :

$$\|u\|\leq\theta k_0\left|u_n\right|_{L^r(\Omega)}$$

Por la desigualdad de Poincaré y la inmersión continua de $L^2(\Omega)$ en $L'(\Omega)$, existe R > 0 tal que:

$$\left|u_n\right|_{L'(\Omega)}<R$$

Por tanto, por el teorema del Punto fijo de Scheafer, existe $u\in L^2(\Omega)$ con $u=S(u)$.

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla\varphi=\int_{\Omega}H\left(Tv\right)\varphi,\qquad\forall\varphi\in \mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right)$$

O sea

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla\varphi\leq\int_{\Omega}\left(F_1(x,Tu)\left|Tu\right|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}}+F_2(x,Tu)\left|Tu\right|^{\gamma}_{L^{\gamma}_{(\Omega)}}\right)\varphi,\qquad\forall\varphi\in \mathrm{H}_0^1\left(\Omega\right)$$

Haciendo $\varphi=u$ y usando (2.3), tenemos que

$$\|u\|\leq\theta k_0\left|u_n\right|_{L'(\Omega)}$$

Por la desigualdad de poincaré y la inmersión continua de $L^2(\Omega)$ en $L'(\Omega)$, existe R > 0 tal que:

$$\left|u_n\right|_{L'(\Omega)}<R$$

Por tanto, por el teorema del Punto fijo de Scheafer, existe $u\in L^2(\Omega)$ con $u=S(u)$.

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv)\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

O sea

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \le \int_\Omega \left(F_1(x,Tu)|Tu|^{\alpha}_{L^q_{(\Omega)}} + F_2(x,Tu)|Tu|^{\gamma}_{L^\gamma_{(\Omega)}} \right)\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

Afirmación (2) $\underline{u} \le u \le \overline{u}$.

En efecto: como $Tu \in [\underline{u} \le u \le \overline{u}]$ usando la definición de la subsolución $\underline{u}$ (Ver (2.1)) y sustrayendo de (2.4), tenemos que para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ con $\varphi \ge 0$.

$$\int_\Omega \nabla(\underline{u} - u)\nabla\varphi \le \int_\Omega \left(F_1(x,\underline{u}(x)|Tu|^{\alpha}_{L^q} - F_1(x,Tu(x))|Tu|^{\alpha}_{L^q} \right)\varphi$$
$$+ \int_\Omega \left(F_2(x,\underline{u}(x)|Tu|^{\gamma}_{L^q} - F_2(x,Tu(x))|Tu|^{\gamma}_{L^q} \right)\varphi$$

Como $\underline{u},\ u \in H_0^1(\Omega)$, tenemos $(\underline{u}-u)^+ = \max\{(\underline{u}-u),0\} \in H_0^1(\Omega)$

Tomando $\varphi = (\underline{u}-u)^+$ y recordando que $F_i(x,t) \ge 0$ en $\left[0,|\underline{u}|_{L^\infty}\right], Tu = \underline{u}$ en $\{x \in \Omega : \underline{u}(\mathrm{x}) \ge u(x)\}$ y $Tu \in [\underline{u},\overline{u}]$ tenemos que :

$$\int_\Omega \nabla(\underline{u}-u)\nabla(\underline{u}-u)^+ \le \int_\Omega \left\lfloor F_1(x,\underline{u}(x))|\underline{u}|^{\alpha}_{L^q} - F_1(x,Tu(x))|Tu|^{\alpha}_{L^q} \right\rfloor (\underline{u}-u)^+$$

$$+\int_\Omega \left\lfloor F_2(x,\underline{u}(x))|\underline{u}|^{\gamma}_{L^q} - F_2(x,Tu(x))|Tu|^{\gamma}_{L^q} \right\rfloor (\underline{u}-u)^+$$

$$= \int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\ge u(x)\}} F_1(x,\underline{u}(x))\left[|\underline{u}|^{\alpha}_{L^q} - |Tu|^{\alpha}_{L^q}\right](\underline{u}-u)$$

$$= \int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\ge u(x)\}} F_2(x,\underline{u}(x))\left[|\underline{u}|^{\gamma}_{L^*} - |Tu|^{\gamma}_{L^*}\right](\underline{u}-u)^+$$

$$\le 0$$

Luego, $(\underline{u}-u)^+ = 0$ y así mismo $\underline{u} \le u$.

Ahora, usando la definición de supersolución $\bar{u}$ (Ver 2.2) y combinando con (2.4), para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ con $\varphi \geq 0,$ tenemos:

$$\int_\Omega \nabla(u-\bar{u})\nabla\varphi \leq \int_\Omega \left\lfloor F_1(x,Tu(x))|Tu|_{L^q}^{\alpha} - F_1(x,\bar{u}(x))|\bar{u}|_{L^q}^{\alpha} \right\rfloor \varphi$$

$$+\int_\Omega \left\lfloor F_2(x,Tu(x))|Tu|_{L^q}^{\gamma} - F_2(x,\bar{u}(x))|\bar{u}|_{L^q}^{\gamma} \right\rfloor \varphi$$

Como $\bar{u} > 0$ en (Ω) y $\in H_0^1(\Omega)$, inferimos que

$(\underline{u}-u)^+ = máx\{(u-\bar{u}),0\} \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando $\varphi = (u-\bar{u})^+$ y recordando que $F_i(x,t) \geq 0$ en $\left[0,|\bar{u}|_{L^\infty}\right], Tu = \bar{u}$ en $\{x \in \Omega : u(x) \geq \bar{u}(x)\}$ y $Tu \in [\underline{u},\bar{u}]$ tenemos que

$$\int_\Omega \nabla(u-\bar{u})\nabla(u-\bar{u})^+ \leq \int_\Omega \left\lfloor F_1(x,Tu(x))|Tu|_{L^q}^{\alpha} - F_1(x,\bar{u}(x))|\bar{u}|_{L^q}^{\alpha} \right\rfloor (u-\bar{u})^+$$

$$+\int_\Omega \left\lfloor F_2(x,Tu(x))|Tu|_{L^q}^{\gamma} - F_2(x,\bar{u}(x))|\bar{u}|_{L^q}^{\gamma} \right\rfloor (u-\bar{u})^+$$

$$= \int_{\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\geq\bar{u}(x)\}} F_1(x,\bar{u}(x))\left[|Tu|_{L^q}^{\alpha} - |\bar{u}|_{L^q}^{\alpha}\right](u-\bar{u})$$

$$= \int_{\{x\in\Omega:u(x)\geq\bar{u}(x)\}} F_2(x,\bar{u}(x))\left[|Tu|_{L^*}^{\gamma} - |\bar{u}|_{L^*}^{\gamma}\right](u-\bar{u})^+$$

$$\leq 0$$

Luego, $(u-\bar{u})^+ = 0$, de donde concluimos que $u \leq \bar{u}$.

Por tanto, por la definición del operador T, tenemos Tu = u.

Como u satisfice (2.4), concluimos que u es una solución débil positiva del problema (P).

Observación 2.4 La Asunción débil positiva $u \in H_0^1(\Omega) \cap$ del problema (P) encontrada en el teorema inmediato anterior es una solución fuerte.

Además de eso, $u \in C^{1,ß}1(\Omega), \qquad 0 < ß < 1.$

En efecto: por (2.3) tenemos $H(Tu) \in L^\infty(\Omega)$.

Desde que Tu = u sigue que H (u) $\in L^\infty(\Omega)$ y u es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u = H(u) \text{ en } \Omega, \\ \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Por el teorema de Agmon - Douglas – Ninenver (ver apéndice)

$u \in W^{2p}(\Omega), \forall \geq 1.$

Considerando p > N, tenemos $W^{2,p}(\Omega) \to C^{1,ß}(\Omega)$ 0 < ß < 1, luego $u \in C^{1,ß}(\overline{\Omega})$.

Usando la fórmula de green (ver apéndice).

$$\int_\Omega [-\Delta u - H(u)]\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Por el Teorema de Du Bois Raymond, encontramos

$$-\Delta u = H(u) \text{ q.t.p. en } \Omega$$

O sea, $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \forall p \geq 1$ y u satisface

$$\begin{cases} -\Delta u = F_1(x,u)|u|_{L^q}^\alpha + F_2(x,u)|u|_{L^q}^\gamma \quad \text{en } \Omega, \\ \\ u > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } \Omega \\ \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

De esta forma concluimos la demostración del teorema.

5.1. Resultados Descriptiva.

Debido a la naturaleza del trabajo no aplica.

5.2. Resultados Inferenciales.

Debido a la naturaleza del trabajo no aplica.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.

Debido a la naturaleza del trabajo no aplica.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados.

Esta sección está dedicada a mostrar que las hipótesis planteadas en el capítulo 3 son verdaderas.

Con respecto a la Hipótesis General, la cual es:

Existen Soluciones Débiles Positivas para un problema Elíptico Vía Método de Sub- Supersoluciones.

Esto se muestra en detalle en el Teorema 3 del Capítulo V, el cual prueba la existencia de una Solución débil positiva con su $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ siendo $(\underline{u}, \overline{u})$ un par de Sub – Supersoluciones para el problema (2).

Con respecto a las hipótesis Específicas, las cuales son:

HE1.Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un Problema Elíptico.

H.E.2 .Es posible definir el par de Sub- Supersolución para el Problema Elíptico Asociado.

Notase que la definición 1 del Capítulo V, dice que una solución débil del problema (2) esta dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} \left(F_1(x,u) |u|^{\gamma}_{\int_{(\Omega)}^{\varphi}} + F_2(x,u) |u|^{\gamma}_{\int_{(\Omega)}^{\varphi}} \right) \varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Lo que muestra la veracidad de la HE1.

Por otro lado, la definición 2 del Capítulo V, dice un par $(\underline{u}, \overline{u})$ es un par de sub-supersoluciones para el problema (P) si satisface:

a) $(\underline{u},\overline{u})$ y $(\underline{u}=0\leq\overline{u})$ sobre $\partial\Omega$

b) Para cada $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ con $\varphi\geq 0$

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi=\int_\Omega\left(F_1(x,\underline{u})|\underline{u}|_{L^q_{(\Omega)}}^{\alpha}+F_2(x,\underline{u})|\underline{u}|_{L^q_{(\Omega)}}^{y}\right)\varphi \qquad (2.1)$$

y

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi=\int_\Omega\left(F_1(x,\overline{u})|\overline{u}|_{L^q_{(\Omega)}}^{\alpha}+F_2(x,\overline{u})|\overline{u}|_{L^q_{(\Omega)}}^{y}\right)\varphi \qquad (2.2)$$

Así por lo expuesto, todas las hipótesis planteadas en este trabajo son verdaderas.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Como es de vuestro conocimiento, este trabajo esta enmarcado en la parte de ecuaciones diferenciales parciales elípticos no variacionales, la cual es una rama de la matemática donde se estudia la existencia y no existencia de ciertas ecuaciones en un espacio de Sobolev adecuado. En este caso motivados en el artículo de o Gelsopn C.G. dos Santos, Giovany M. Figueiredo y Leandro da S. Tavares cuyo articulo es titulado “A Sub- super solution method for a class of nonlocal problems involving the p(x)-Laplacian operator and applications” establecen resultados la existencia de soluciones para problemas no locales y aplicaciones, usaron el argumento de Sub y supersolución teniendo como base el Teorema del Punto Fijo de Shauder, en el espacio de Sobolev con exponentes variables. En este trabajo se particularizon dicha ecuación, considerando p(x) = 2. De este forma entender mejor dichas ecuaciones en espacios de Sobolev clásicos y mostrar la existencia de dicha solución. Así mismo se estableció y entendió lo siguientes: 1. La existencia de una solución débil acotado por el par de sub y supersolución. 2. La Positividad de la solución.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

VII. CONCLUSIONES.

La presente tesis, ha sido desarrollado con la finalidad de encontrar la existencia de una Solución Débil del Problema (P), como también la positividad de dicha solución

- Se presentó un teorema, el cual presenta una relación de orden entre la sub solución y supersolución, en la cual se encontró la solución procurada. Para la demostración de dicho teorema se hizo uso de propiedades importantes y necesarias, las cuales hicieron posible su rápida demostración.

- El Problema de Sub y Supersolución analítica y abstracta, que fue generalizado para problemas no lineales por Giovany de Jesus Malcher Figuereido, tiene numerosas aplicaciones en el problemas no variacionales.

VIII. RECOMENDACIONES.

En el presente trabajo, se presentó de manera teórica y abstracta de la definición de Sub y Supersolución , así como la demostración de un teorema que relaciona la Sub y Supersolución. Se recomienda el estudio de métodos no variacionales, de una manera más detallada y exacta.

- Se recomienda el uso de la aplicación del teorema a problemas que envuelven bifurcación local, bifurcación global y problemas relacionados a la ecología.

- Se recomienda el estudio más profundo, minucioso de los métodos de sub y supersolución, ya que su aplicación es de gran ayuda para la investigación en el campo de la matemática, ingeniería y la física.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

1. Acerbi E. & Mingione, G. (2002). *Regularity results for stationary electro-rheological fluids, Arch. Ration. Mech. Anal. Paris.*
2. Adams R. A. . (2003). *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), (Second Edition ed). Elsevier/Academic Press.* (Second edition ed.).
3. Ambrosetti A., Brezis B. & G. (1994). *Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, Journal of Functional Anal. (519-543)*. https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1078
4. Brézis H. (1983). *Théorie et Applications, Paris, Masson*. https://perso.telecom-paristech.fr/decreuse/_downloads/48a1133976bc77eb6bb6de23e345b711/analyse-fonctionnelle.pdf
5. Carrier, G. F. (1945.). *On the Nonlinear Vibration Problema of the Elastic String, Quart. Appl. Math., (Vol. 3, 157-165.)*. https://doi.org/10.1090/qam/12351
6. Chen Y. , Levine S. & Rao M. (2006,). *Variable exponent, linear growth functionals in image restora-tion, SIAM J. Appl. Math.* DOI:10.1137/050624522
7. Chipot M. & Lovat, B. (1997.). *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Analysis, T.M.A., (Vol. 30, No. 7),.*
8. Chipot M. & Chang, N.H. . (2003,). *On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term. Chin. Ann. Math.,.*
9. Chipot,M, & Correa,F.J.S.A. (2009). *Boundary layer solutions to functional, Bull. Braz. Math. Soc., New Series .* . https://doi.org/10.5167/uzh-29069
10. Corra, F.J.S.A., Figueiredo G.M. & Lopes, F.P.M. (2008). *On the Existence of Positive Solutions for a Nonlocal Elliptic Problem Involving the p-Laplacian Differential and Integral Equations. (Vol. 21, 305-324). Universidad Federal de Campiña Grande*. file:///C:/Users/USER/Downloads/1356038782.pdf.

11. Fan X.L. & Zhao D. (1999). *A class of De Giorgi type and Holder continuity, Nonlinear Anal. Cornell University*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.11229
12. Fan, X.L. (2007). *Regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form, J. Differ. Equations. GlobalC1.*
13. Folland, G.B. (1999). *Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition, Jhon Wiley & Sons. Canada.* https://books.google.com.pe/books?id=N8jVDwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
14. Yan, B. & Wang, D. (2016). *The multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problem.* University of Szeged.https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.100
15. Zeidler E. (1990). *Functional Analysis and its Applications. (Part II-B). New York*. https://link.springer.com/journal/10688/volumes-and-issues

ANEXOS:

Tabla 2 Matriz de Consistencia

Título: EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UN PROBLEMA ELIPTICO VÍA MÉTODO DE SUB-SUPERSOLUCIONES.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	OBJETIVOS DEL PROBLEMA.	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
PROBLEMA GENERAL ¿Existen Soluciones Débiles Positivas para un Problema Elíptico Vía Método De Sub-Supersoluciones?	**OBJETIVOS GENERALES** Probar que existen Soluciones Débiles Positivas para un problema Elíptico Vía Método de sub- supersolución	**HIPÓTESIS GENERAL** Existen soluciones débiles positivas para un problema Elíptico vía método de sub-supersoluciones.	**VARIABLE DEPENDIENTE** D = Soluciones débiles positivas para un problema elíptico.	**MÉTODO DE INVESTIGACIÓN** El método científico usada es de enfoque cuantitativo. El tipo de investigación es básica, pura o fundamental. El diseño es no experimental de tipo longitudinal.	No aplica para este tipo de proyecto.
PROBLEMAS ESPECIFICOS • ¿Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un problema elíptico? • ¿Es posible definir el par de sub – supersolución para el problema elíptico asociado?	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS** • Definir una solución débil a partir de su formulación variacional para un problema elíptico. • Definir el par de sub – super solución para el problema elíptico asociado.	**HIPÓTESIS ESPECÍFICAS** • Es posible definir una solución débil a partir de su formulación variacional, para un problema elíptico. • Es posible definir el par de sub- supersolución para el problema elíptico asociado.	**VARIABLE INDEPENDIENTE** I = El método de Sub-Supersoluciones.		**Muestra:** No aplica para este tipo de proyecto.