UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Existencia de un Atractor Global para una ecuación de Onda Amortiguada expuesta a Fuerzas Estructurales

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:
Nyll Caldas Leiva

Asesor:
Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas

Línea de inverstigación:
Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

Callao, 2023

PERÚ

Document Information

Analyzed document	CALDAS LEIVA NYLL WALTER.pdf (D172745718)
Submitted	2023-08-11 22:10:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

W	URL: https://www.toppr.com/ask/question/the-coefficient-of-t32-in-the-expansion-of-left1t2right12le... Fetched: 2021-05-18 15:31:10	1

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA Existencia de un Atractor Global para una ecuación de Onda Amortiguada expuesta a Fuerzas Estructurales TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA CALDAS LEIVA NYLL WALTER Callao, 2023 PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA 1. Facultad: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 2. Unidad de Investigación: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 3. Título: Existencia de un Atractor Global para la ecuación de Onda Amortiguada expuesta a Fuerzas Estructurales 4. Autor: Bach. Nyll Caldas Leiva Código ORCID: 0000-0002-9467-1299 DNI: 70300513 5. Asesora: Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas Código ORCID: 0000-0003-3744-8100 DNI: 45480452 6. Lugar de ejecución: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 7. Unidades de análisis: Ecuación de onda Amortiguada 8. Tipo de Investigación: Básica. 9. Enfoque: Cuantitativo 10. Diseño de investigación: No experimental Nyll Walter Caldas Leiva Bachiller Código: 101258d DNI: 70300513 Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas Asesor Código: 2195 DNI: 45480452

a HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA AMORTIGUADA EXPUESTA A FUERZAS ESTRUCTURALES SUBCRÍTICAS CALDAS LEIVA NYLL Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por: Dedicatoria A mis queridos abuelitos, Demetria y Mauro que siempre me incentivaron a ser profesional. A mi mamá que me apoya en todo momento a seguir adelante.

Agradecimiento A mi asesor Paulo Nicanor Seminario por su enorme paciencia para el desarrollo de esta investigación. Sus orientaciones, observaciones y sugerencias me permitie- ron concluir con esta investigación. A los miembros del jurado, por sus sugerencias y observaciones, permitiendo así, mejorar mi trabajo. Un agradecimiento especial al profesor, Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey, por sus enseñanzas a lo largo de mi forma- ción profesional. A mi mamá Adelina Leiva Espinoza por su enseñanza de vida y motivarme para terminar la investigación. A mi novia por su apoyo constante. A mis compañeros de aula que compartimos conocimiento y gratos momentos juntos.

CONSTANCIA N° 27-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

NYLL WALTER CALDAS LEIVA

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: **"EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA AMORTIGUADA EXPUESTA A FUERZAS ESTRUCTURALES".**

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 14 de agosto 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/pgh
Exp: 178.08.23
c.c.: Archivo

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
3. **Título:** Existencia de un Atractor Global para la ecuación de Onda Amortiguada expuesta a Fuerzas Estructurales
4. **Autor:** Bach. Nyll Caldas Leiva
   - Código ORCID: 0000-0002-9467-1299
   - DNI: 70300513
5. **Asesora:** Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
   - Código ORCID: 0000-0003-3744-8100
   - DNI: 45480452
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidades de análisis:** Ecuación de onda Amortiguada
8. **Tipo de Investigación:** Básica.
9. **Enfoque:** Cuantitativo
10. **Diseño de investigación:** No experimental

Nyll Walter Caldas Leiva
Bachiller
Código: 101258d
DNI: 70300513

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor
Código: 6290
DNI: 45480452

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: https://meet.google.com/ogq-jsxe-gxp?pli=1&authuser=2 mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 16:00 horas del día jueves 16 de marzo del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller CALDAS LEIVA, NYLL WALTER, Titulada "EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA AMORTIGUADA EXPUESTA A FUERZAS ESTRUCTURALES" Jurado que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey — Presidente
Dr. Julio Cesar Nuñez Villa — Secretario
Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez — Vocal

Luego de la Instalación, el secretario del Jurado dio lectura a la Resolución Decanal N° 022-2023-FCNM, que designa a los miembros del Jurado de Sustentación de la Tesis.

A continuación, se dio inicio a la Exposición del Trabajo de Tesis de Acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30-10-2018.

Culminado el acto de exposición virtual de la tesis, los señores miembros del Jurado procedieron a formular las preguntas, las mismas que fueron absueltas.

Luego de un cuarto intermedio para la deliberación en privado del Jurado, con la participación con voz del asesor, y después de calificar el Trabajo de Tesis, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller CALDAS LEIVA, NYLL WALTER, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del Citado reglamento, a continuación, se indica.

Calificación cuantitativa	Calificación Cualitativa
18	EXCELENTE

Finalmente, el secretario del Jurado procedió a redactar y dar lectura al acta de sustentación del trabajo de tesis.

Siendo las 17:08 horas del día 16 de marzo del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación virtual de la tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas.

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

Dr. Julio Cesar Nuñez Villa
Secretario

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
Vocal

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

EXISTENCIA DE UN ATRACTOR GLOBAL PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA AMORTIGUADA EXPUESTA A FUERZAS ESTRUCTURALES SUBCRÍTICAS

CALDAS LEIVA NYLL

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

Dr. Lito Edinson Bocanegra Rodríguez
Vocal

Dr. Julio César Nuñez Villa
Secretario

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor

Dedicatoria

A mis queridos abuelitos, Demetria y Mauro
que siempre me incentivaron
a ser profesional.
A mi mamá que me apoya en todo
momento a seguir adelante.

Agradecimiento

A mi asesor Paulo Nicanor Seminario por su enorme paciencia para el desarrollo de esta investigación. Sus orientaciones, observaciones y sugerencias me permitieron concluir con esta investigación. A los miembros del jurado, por sus sugerencias y observaciones, permitiendo así, mejorar mi trabajo. Un agradecimiento especial al profesor, Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey, por sus enseñanzas a lo largo de mi formación profesional. A mi mamá Adelina Leiva Espinoza por su enseñanza de vida y motivarme para terminar la investigación. A mi novia por su apoyo constante. A mis compañeros de aula que compartimos conocimiento y gratos momentos juntos.

Índice general

Resumen

En esta tesis consideraremos el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ (u(x,0), u_t(x,0)) = (u_0, v_0) & , \text{ para } x \in \Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto, acotado, conexo con frontera $\partial\Omega$ lo suficientemente regular, y $\alpha > 0$ representa el coeficiente de amortiguamiento.

El objetivo principal de este trabajo será mostrar que dicho sistema está bien colocado en el sentido de Hadamard y que genera un sistema dinámico, además se pretende mostrar que este sistema dinámico es gradiente, cuasi-estable y posee un atractor global con dimensión fractal finita.

Abstract

In this thesis we will consider the system

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = 0 & , \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \\ \\ u = 0 & , \text{ on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \\ (u(x,0), u_t(x,0)) = (u_0, v_0) & , \text{ for } x \in \Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is an open, bounded, connected set with boundary $\partial\Omega$ regular enough, and $\alpha > 0$ represents the damping coefficient.

The main objective of this work will be to show that said system is well placed in the Hadamard sense and that it generates a dynamic system, it is also intended to show that this dynamic system is gradient, quasi-stable and has a global attractor with a finite fractal dimension.

Introducción

Esta introducción tiene como objetivo desarrollar nuevos métodos y/o aplicaciones de resultados recientes en la investigación de ecuaciones de evolución disipativas. El estudio del comportamiento a largo plazo de las ecuaciones de evolución autónoma tiene una base teórica sólida basada en semigrupos de operadores lineales y no lineales. La teoría se puede ver en, por ejemplo, Hale (1988) y Temam (1997), entre otros. Sabemos que las ecuaciones de onda son conservativas y necesita términos adicionales de .ªmortiguamiento"para generar sistemas disipativos, los cuales poseen un conjunto absorbente acotado. Por ejemplo, la ecuación de onda semilineal

$$\partial_{tt}u - \Delta u + \alpha\partial_t u + f(u) = 0,$$

definido en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, es disipativa para una gran clase de perturbaciones estructurales $f(u)$ si $\alpha > 0$. De hecho, el término $\partial_t u$ representa una disipación, que se puede observar a través de la identidad

$$E_t(t) = -\alpha \int_\Omega |\partial_t u|^2 \, dx,$$

donde $E(t)$es la energía total del sistema.

Igualmente, al considerar estructuras puramente elásticas, generalmente la energía total asociada al sistema suele ser conservativa, mientras que la controlabilidad y estabilidad son preguntas típicamente para sistemas disipativos. De esta forma surge el interés de considerar estructuras elásticas adicionando elementos de disipación tales como amortiguadores (dampers) y componentes visco-elásticos o termo-elásticos.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la Realidad Problemática

El presente trabajo tiene por finalidad el estudio de la dinámica asintótica de una ecuación de onda amortiguada expuestas a fuerzas estructurales subcríticas sobre un dominio acotado tridimensional, a partir del estudio de un atractor global para el sistema, así como sus propiedades geométricas.

Para esto se detallará el "framework" necesario en el estudio de los semigrupos no lineales y la teoría de atractores globales siguiendo los resultados mostrados en Teman (1997), Hale (1988), Ladyzhenskaya (1991), Chueshov y Lasiecka (2010) entre otros.

Es así que, se considerará un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, abierto, conexo, acotado, con frontera $\partial\Omega$ lo suficientemente regular tal que se tiene el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = 0 \\ &u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde

1. $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ representa el desplazamiento de las vibraciones transversales de una onda en la posición x (variable espacial) y el tiempo t (variable temporal).
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, representa las fuerzas estructurales subcríticas que afecta al sistema, tal que $f(u) \sim u^{3-\varepsilon}$, para algún $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño.
3. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ representa la acción del amortiguador friccional sobre todo el dominio espacial.

Además, se considerará que el sistema (1.1) satisface las siguientes condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{1.2}$$

para ciertos datos iniciales (u_0, u_1) es un espacio de fase adecuado.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Será posible probar la existencia de un atractor global para la ecuación de onda amortiguada?

1.2.2. Problemas Específicos

- ¿Será posible probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para la ecuación de onda amortiguada?
- ¿Será posible probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivo general

Probar la existencia de un atractor global para la ecuación de onda amortiguada.

1.3.2. Objetivos específicos

- Probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para la ecuación de onda amortiguada.
- Probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada.

1.4. Justificación

Un problema importante en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales es la investigación del comportamiento asintótico de sus soluciones. En la literatura, la gran mayoría de los artículos aborda este problema a partir de un sistema de Cauchy abstracto correspondiente al modelo, el cual debe estar bien colocado, es decir, debe poseer soluciones únicas a partir de la dependencia continua con los datos iniciales.

En este contexto, por ejemplo, es de gran importancia en la ingeniería de puentes y viaductos la pregunta de la implementación de mecanismos de disipación para la energía, ya sea generada por efectos de resonancia o por temblores sísmicos. La resonancia y/o aeroelasticidad dinámica causada por vientos laterales puede llevar a estructuras elásticas al colapso, como, por ejemplo, en la destrucción del puente de Tacoma Narrows en 1940. Observando las aplicaciones en el mundo real, entendemos que, para controlar una ecuación de ondas o placas, es necesario colocar amortiguadores en la estructura, en ese caso el controlador puede servir como disipadores. En este proyecto pretendemos mostrar las bases del estudio de la dinámica a largo plazo para ecuaciones de ondas las cuales desembocaran en futuras investigaciones cuyas aplicaciones pueden generar gran impacto en diversas áreas principalmente de la ingeniería.

Es importante destacar que el presente problema es de alta relevancia para un sector significativo de desarrollo en la matemática actual y las publicaciones sobre el tema reflejan este hecho.

1.5. Limitantes de la Investigación

1.5.1. Teórica

El estudio de la dinámica asintótica de las ecuaciones hiperbólicas no lineales en la actualidad es un problema de alta relevancia en la comunidad matemática, debido a esto se encuentra diversa literatura en revistas especialidades internacionales. En el ámbito nacional se encuentra un fuerte limitante teórico dado que el estudio de los atractores globales para este tipo de ecuaciones casi no se realiza en Perú.

1.5.2. Temporal

No se aplica el limitante temporal para este trabajo.

1.5.3. Espacial

No se aplica el limitante espacial para este trabajo.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del estudio

2.1.1. Antecedentes internacionales

En la literatura, el estudio del comportamiento a largo plazo de la energía generada por un modelo físico es un punto fundamental a investigar:

Temmam R (1997) y **Ladyzhenskaya (1969)** muestran la buena colocación del sistema (1.1) y (1.2), probando la existencia de un semigrupo de soluciones, además de mostrar el decaimiento exponencial de las soluciones en el caso que $f = 0$ y la existencia de una región compuesta de estabilización para el caso $f \neq 0$ subcríticos (atractor global).

Chueshov, I & Lasiecka, I (2010) mostraron que dicho atractor global posee dimensión fractal finita a partir del sistema genera un semigrupo quasi estable.

Además de ser gradiente para el caso $f \neq 0$ Arrieta y Carvalho mostraron la buena colocación del problema y la existencia de un atractor global para un amortiguador estructural, es decir, en lugar de αu_t consideraron $\alpha \Delta u_t$.

Feireisl, E. y Zuazua, E. (1993) mostraron la existencia de un atractor global con amortiguador friccional localizado $(\alpha(x)u_t)$ para el caso crítico, es decir, en particular para (1.1) y (1.2) con $f \neq 0$ crítica.

Mas recientemente, **Ma, T. F. y Seminario, P. N. (2020)**, probaron la existencia de un atractor exponencial generalizado para (1.1) y (1.2), con amortiguador friccional localizado.

Además, **Cavalcanti, M, Marín-Rubio, P, Ma, T.F. y Seminario, P. N. (2019)** mostraron la existencia de un atractor global con dimensión fractal finita sobre variedades Riemanianas para (1.1) y (1.2) con un amortiguamiento friccional localizado en el sentido “Sharp”.

Para el caso f supercrítico Sobolev - crítico Stripchartz, es decir, $f(u) \sim u^{5-\varepsilon}$.

Kalantorov, V, Savostianov, A y Zelik S. (2016) mostraron la buena colocación del sistema y la existencia de un atractor global, cuando el amortiguador es “friccional full”, es decir, $\alpha > 0$ es independiente de x expuesto a fuerzas estructurales supercríticas.

2.1.2. Antecedentes nacionales

A nivel nacional, podemos destacar dos tesis defendidas en la Universidad Nacional del Callao y la Universidad Nacional Mayor de San Marcos:

Seminario-Huertas, P. N. (2018) estudió una clase de ecuaciones de ondas de la forma $|\partial_t u|^\rho - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h$, definida en un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$, con condición de frontera de Dirichlet y parámetros $\alpha, \rho > 0$. Dichas ecuaciones modelaron problemas de viscoelasticidad. Los resultados fueron la prueba de la existencia de un atractor global para sistema dinámico asociado al problema, el cual fue caracterizado por las variedades inestables del conjunto de puntos estacionarios de la ecuación anterior.

Bocanegra-Rodriguez L. (2019) estudió ecuaciones de onda de la forma $\partial_t^2 u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla u) + \alpha \partial_t u + f(u) = b(x)$, definida en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^3$, con condición de frontera de Dirichlet y parámetros de Lamé, $\lambda > 0$, $\lambda + \mu > 0$. En dicho modelo aparece el operador de elasticidad (operador de Lamé), el cual ha sido estudiando por diversos autores a lo largo de los años. Con respecto a la existencia, unicidad y dependencia continua en relación con los datos utiliza la teoría clásica de semigrupos lineales y además el autor logra mostrar la existencia de un atractor global.

Es así que en el presenta trabajo se pretende explicar en detalle la existencia de soluciones débiles para una ecuación de onda débilmente amortiguada expuesta a fuerzas subcríticas, además de mostrar la existencia de un atractor global con dimensión fractal finita siguiente los resultados expuestos en **Ma, T. F. y Seminario-Huertas, P. N. (2020)** a partir del método de la cuasi estabilidad definido por **Chueshov, I y Lasiecka, I (2010)**. En este sentido el trabajo propuesto es una aplicación de la teoría de los sistemas dinámicos no lineales para un modelo de onda altamente relevante.

2.2. Bases Teóricas

2.2.1. Espacios de Sobolev

Para cualquier entero $k \geq 0$ y para $1 \leq p < \infty$ denotamos por $W_p^k(\mathscr{O})$ al espacio de Sobolev:

$$W_p^k(\mathscr{O}) = \{u \in L_p(\mathscr{O}) \, : \, \partial^\alpha u \in L_p(\mathscr{O}) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\},$$

donde $\partial = \partial_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ es el operador gradiente, y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es un multiíndice de enteros no negativos, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_n$ y $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Denotamos por $\|\cdot\|_{W_p^k(\mathscr{O})}$ la norma en $W_p^k(\mathscr{O})$. También definimos el espacio de Sobolev $W_p^s(\mathscr{O})$ para superíndices reales positivos $s \notin \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ por la fórmula

$$W_p^s(\mathscr{O}) = \left\{ u \in W_p^k(\mathscr{O}) \, : \, \|u\|_{W_p^s(\mathscr{O})}^p \equiv \|u\|_{W_p^k(\mathscr{O})}^p + \sum_{|\alpha|=k} I_{\sigma,p}(\partial^\alpha u) < \infty \right\},$$

donde $s = k + \sigma$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \sigma < 1$ e

$$I_{\sigma,p}(u) = \int_{\mathscr{O} \times \mathscr{O}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx dy.$$

Denotamos $H^s(\mathscr{O}) \equiv W_2^s(\mathscr{O})$ y consideramos el espacio $H_0^s(\mathscr{O})$ definido como la clausura en $H^s(\mathscr{O})$ del espacio de las funciones infinitamente diferenciables sobre $\mathscr{O}$ con soporte compacto en $\mathscr{O}$ y el espacio $H^{-s}(\mathscr{O}) \equiv [H_0^s(\mathscr{O})]'$ de distribuciones sobre $\mathscr{O}$. A menudo usaremos la notación $\|\cdot\|_{s,\mathscr{O}}$ para la norma en $H^s(\mathscr{O})$ para cada $s \in \mathbb{R}$ (a veces omitimos el subíndice $\mathscr{O}$ si no puede surgir ambigüedad). Por $\|\cdot\|_{\mathscr{O}}$ denotamos la norma en $L_2(\Omega)$.

Sea $C^k(\overline{\mathscr{O}})$ el espacio de las funciones continuamente diferenciables k veces sobre $\overline{\mathscr{O}}$. Para $0 < \mu < 1$ denotamos por $C^{k+\mu}(\overline{\mathscr{O}})$ el subconjunto de $C^k(\overline{\mathscr{O}})$ que consiste en las funciones cuyas derivadas de orden k son localmente μ-Hölder continuas. Las inmersiones estándar de Sobolev dan:

$$C^{k+\sigma}(\overline{\mathscr{O}}) \subset W_p^{k+\beta}(\mathscr{O}) \text{ si } k \in \mathbb{N}\,,\ 0 \leq \beta < \sigma \leq 1\,,\ 1 < p < \infty. \tag{2.1}$$

Algunas propiedades de los espacios de Sobolev, necesarias posteriormente, se recogen a continuación (ver, por ejemplo, [1, 30, 33] para las pruebas).

Teorema 2.2.1. *Asuma que $\partial\mathscr{O} \in C^\infty$ y $\mathscr{O}$ se encuentra en un lado del borde $\partial\mathscr{O}$. Entonces*

- *Las siguientes inmersiones continuas son válidas,*

$$W_p^s(\mathscr{O}) \subset C^\sigma(\overline{\mathscr{O}}) \text{ si } s - \frac{n}{p} > \sigma\,,\ 1 < p < \infty\,,\ s, \sigma \geq 0, \tag{2.2}$$

  (*si σ no es un entero la inmersión también es válida para $\sigma = s - n/p$*) *y*

$$W_p^s(\mathscr{O}) \subset W_{p^*}^{s^*}(\mathscr{O}) \text{ si } s - \frac{n}{p} \geq s^* - \frac{n}{p^*}\,,\ 1 < p \leq p^* < \infty\,,\ s^* \geq 0. \tag{2.3}$$

- *El operador traza $u \mapsto u|_{\partial\mathscr{O}}$ es continuo desde $W_p^s(\mathscr{O})$ hacia $W_p^{s-1/p}(\partial\mathscr{O})$ para cada $s > 1/p$ y $1 < p < \infty$.*

En particular, de (2.3) tenemos que

$$H^s(\mathscr{O}) \subset L_p(\mathscr{O}) \text{ si } s = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}\,,\ p \geq 2\,,\ n = \dim\mathscr{O}. \tag{2.4}$$

En el caso de $n = 2$ el teorema 2.2.1 implica las siguientes inmersiones:

$$H^s(\mathscr{O}) \subset L_\infty(\mathscr{O})\,, \quad s > 1\,,\ \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^2, \tag{2.5}$$

y

$$H^s(\mathscr{O}) \subset L_{2/(1-s)}(\mathscr{O})\,, \quad 0 \leq s < 1\,,\ \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

NOTA 2.1. La regularidad del borde asumido en el teorema (2.1) es conservativo. Para nuestras aplicaciones, usamos los espacios de Sobolev con suavidad finita, así que la regularidad del borde puede ser significativamente relajado. De hecho, para nuestro propósito $\partial\mathscr{O} \in C^4$ puede ser condición suficiente para muchos de los resultados. Como la regularidad del borde no es un aspecto central del trabajo, no le prestamos mucha atención a este asunto.

2.2.2. Espacios de valores vectoriales

Sea X un espacio de Banach y $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Denotamos por $C^m(a,b;X) \equiv C^m([a,b];X)$ el espacio de las funciones m-diferenciables (en la norma topológica) sobre $[a,b]$ con valores en X. Si $[a,b]$ es un intervalo finito, entonces $C^m(a,b;X)$ equipado con la norma

$$\|u\|_{C^m(a,b;X)} = \text{máx}\left\{\left\|u^{(k)}(t)\right\|_X \,:\, t \in [a,b]\,,\; k = 0,1,\ldots,m\right\}$$

se convierte en un espacio de Banach. Aquí $u^{(k)}(t) = \partial_t^k u(t)$ es la derivada fuerte de u de orden k. Denotamos por $C^m([a,b);X)$ el espacio de las funciones $u : [a,b) \mapsto X$ tales que $u \in C^m([a,b'];X)$ para cualquier $b' \in (a,b)$. Un significado similar tienen las notaciones $C^m((a,b];X)$ y $C^m((a,b);X)$. También usamos la notación $C_w(a,b;X)$ para el espacio de las funciones sobre $[a,b]$ que son continuas con respecto a la topología débil sobre X.

$L_p(a,b;X)$, $1 \le p \le \infty$ son los espacios clásicos L_p definidos como conjuntos de (clases de iguales en casi todas partes) funciones fuertemente Bochner-medibles $f(t)$ con valores en X tal que $\|f(\cdot)\|_X \in L_p(a,b;\mathbb{R})$. Cada $L_p(a,b;X)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \,dt\right)^{1/p} \quad , \; 1 \le < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(a,b;X)} = \text{essup}\left\{\|f(t)\|_X \,:\, t \in [a,b]\right\}.$$

Sea $\mathscr{J} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible. Denotamos por $L_p^{loc}(\mathscr{J};X)$ al conjunto de funciones medibles $u : \mathscr{J} \mapsto X$ tales que $u \in L_p(\mathscr{K};X)$ para cualquier conjunto compacto medible $\mathscr{K} \subset \mathscr{J}$.

Sean $X \subseteq Y$ un par par de espacios de Banach. Dado $f \in L_p(a,b;X)$, $p \ge 1$, la función $g \in L_q(a,b;Y)$ es llamada la derivada de f en el sentido distribucional, si

$$\int_a^b g(t)\phi(t)dt = -\int_a^b f(t)\phi'(t)dt \text{ para cualquier } \phi \in C_0^\infty(a,b;\mathbb{R}).$$

La relación es equivalente la igualdad

$$f(t) = f_0 + \int_a^t g(\tau)d\tau \text{ en } Y \text{ para casi todo } t \in [a,b],$$

donde $f_0 \in Y$. Usamos la notación $g = \partial_1 f = f_t = f'$.

Para cada $1 \le p,q \le \infty$ definimos el espacio de Banach

$$W_{p,q}^1(a,b;X,Y) = \{f \in L_p(a,b;X) \,:\, f' \in L_q(a,b;Y)\} \tag{2.7}$$

con la norma

$$\|f\|_{W^1_{p,q}(a,b;X,Y)} = \|f\|_{L_p(a,b;X)} + \|f'\|_{L_q(a,b;Y)} .$$

Por brevedad, usamos la notación $W^1_p(a,b;X) = W^1_{p,p}(a,b;X,X)$. Debajo también necesitamos espacios de orden superior de funciones L_p-diferenciables

$$W^m_p(a,b;X) = \left\{ f \in L_p(a,b;X) \,:\, f^{(k)} \in L_p(a,b;X)\,,\ k = 1,\ldots,m \right\}\,,\ m \geq 1. \tag{2.8}$$

El siguiente teorema de compacidad será importante importante en futuras consideraciones.

Teorema 2.2.2. *Sean $X \subset Y \subset Z$ espacios de Banach de manera que X está inmerso compactamente en Y. Entonces*

- *El espacio $W^1_{p,q}(a,b;X,Z)$ está inmerso compactamente en $L_p(a,b;Y)$ para cada $1 \leq p,q < \infty$.*
- *El espacio $W^1_{\infty,q}(a,b;X,Z)$ está inmerso compactamente en $C(a,b;Y)$ para cada $q > 1$.*

Para la prueba de este teorema referimos [32] (ver corolario 4). También notamos que casos particulares del teorema 2.2.2 (cuando $p < \infty$) pueden ser encontrados en [2] y [14] (ver también [25]).

2.2.3. Operadores monótonos y pseudomonótonos

Hay muchas técnicas desarrolladas en las EDPs que son usadas para probar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones no lineales. En el caso de los modelos de von Karman los dos enfoques que aparecen particularmente adecuados son los siguientes: teoría del operador monótono y métodos de Galerkin. En lo que sigue proveemos una breve exposición de estos métodos. Para una presentación más detallada referimos [5, 31, 34].

Consideramos operadores actuando desde V hacia V', donde V es un espacio reflexivo de Banach y V' es su dual. Este tipo de consideración es bastante útil para tratar con la teoría elíptica donde escogemos $V \subset H \subset V'$, con l espacio de Hilbert H seleccionado. Debajo denotamos por $(v,v^*)_{V,V'}$ al valor del funcional $v^* \in V'$ sobre el elemento $v \in V$. Si V es un espacio de Hilbert, podemos identificar V' con V y suponga que $(v,v^*)_{V,V'} = (v,v^*)_V$ es un producto interno en V.

Definición 2.2.3. El operador $A : \mathscr{D}(A) \subseteq V \mapsto V'$ es llamado *monótono* si

$$(v_1 - v_2, Av_1 - Av_2)_{V,V'} \geq 0 \text{ para todo } v_1, v_2 \in \mathscr{D}(A)$$

Decimos que A es *monótono maximal* (m-*monótono*) si A es monótono y la relación

$$(v-u, Av-u^*)_{V,V'} \geq 0$$

para algunos $u \in V$ y $u^* \in V'$ y para todo $v \in \mathscr{D}(A)$ implica que $u \in \mathscr{D}(A)$ y $u^* = Au$.

Note que si V es un espacio de Hilbert y V' es identificado con V, entonces los operadores monótonos son usualmente llamados *acumulativos*.

***Ejemplo* 2.1. (Operador de Nemytskij).** Sea X un espacio medible con medida σ-finita μ. Asuma que $g : X \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisface las condiciones de Carathéodory:

- $x \mapsto g(x, \xi)$ es medible para cada $\xi \in \mathbb{R}$.
- $\xi \mapsto g(x, \xi)$ es continua para casi todo $x \in X$.

Asuma adicionalmente que $|g(x,\xi)| \leq c\,|xi|^{p-1} + k(x)$ para casi todo $x \in X$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}$, donde $p > 1$ y $k(x) \in L_q(X,\mu)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Entonces el operador superposición definido por la fórmula

$$A(u)(x) = g(x, u(x))\,, \quad u(x) \in L_p(X,\mu),$$

mapea $V = L_p(X,\mu)$ hacia $V' = L_q(X,\mu)$. Si la función $\xi \mapsto g(x,\xi)$ es no decreciente para casi todo $x \in X$, entonces es fácil ver que A es m-monótono.

Definición 2.2.4. Sea $A : V \mapsto V'$ un operador actuando sobre un espacio reflexivo de Banach V.

- El operador A es llamado *localmente acotado en* $v_0 \in V$ si existe una vecindad $U(v_0)$ tal que $A(U) = \{Av \,:\, v \in U\}$ es un conjunto acotado de V'.
- El operador A es llamado *acotado* si mapea todo subconjunto acotado de V hacia un subconjunto acotado de V'.
- A es llamado *propio* si la preimagen de todo subconjunto compacto de V' es otra vez un compacto.
- A es llamado *continuo* si $Au_n \to Au$ fuertemente en V' para cualquier sucesión $\{u_n\} \subset V$ tal que $u_n \to u$ fuertemente en V.
- A es llamado *compacto* si A es continuo y mapeo subconjuntos acotados de V hacia subconjuntos relativamente compactos de V'.
- A es llamado *fuertemente continuo* si $Au_n \to Au$ fuertemente en V' para cualquier sucesión $\{u_n\} \subset V$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en V.
- A es llamado *hemicontinuo* si para cada $u, v \in V$ la función real $t \to (v, A(u + tv))_{V,V'}$ es continua.

- A es llamado *semicontinuo* sobre V si es fuerte-débilmente continuo desde V a V'; esto es, w-$\lim A_{v_n} = Av$ para todo $v_n \to v$ fuertemente en V.

Resulta que para operadores m-monótonos definidos sobre todo el espacio V las dos definiciones, hemicontinuidad y semicontinuidad son equivalentes [34, vol. II/B, p. 596]. También, para este clase de operadores la semicontinuidad es equivalente a la acotación local y la hemicontinuidad. Además, la monoticidad y la hemicontinuidad implican la acotación local.

Definición 2.2.5. Decimos que $A : V \mapsto V'$ es *coercitivo* si

$$\frac{(v, Av)_{V,V'}}{|v|_V} \to \infty \text{ cuando } |v|_V \to \infty,$$

donde $|\cdot|_V$ denota la norma en el espacio V.

Recolectamos algunas propiedades adicionales para una clase de operadores monótonos tales que $\mathscr{D}(A) \equiv V$ (ver por ejemplo [5, 31, 34]).

Proposición 2.2.6. *Sea $A : V \mapsto V'$ donde V es un espacio reflexivo de Banach.*

- *Si A es un operador monótono y hemicontinuo, entonces es m-monótono.*
- *SI A es lineal y monótono, entonces es continuo.*
- *Si A es monótono, entonces A es localmente acotado en cualquier punto de V.*
- *Si A es monótono y hemicontinuo, entonces es semicontinuo.*
- *SI A y B son m-monótonos de $V \to V'$. Entonces $A + B$ es m-monótono.*
- *Si A es monótono, hemicontinuo, y coercitivo y el espacio V es separable, entonces $R(A) = V'$; esto es, la ecuación $Au = f$ tiene solución para cualquier $f \in V'$.*
- *Sea A m-monótono y B monótono y hemicontinuo de $V \to V'$. Entonces $A+B$ es m-monótono. Asumiendo en adición que $A + B$ es coercivo, tenemos que $R(A + B) = V'$.*

El siguiente resultado de *convergencia débil* es fundamental dentro del contexto de los operadores m-monótonos [5].

Proposición 2.2.7. *Asuma que V es un espacio reflexivo de Banach. Sea $A : \mathscr{D}(A) \subseteq V \mapsto V'$ un operador monótono maximal y $\{v_n\}$ una sucesión en $\mathscr{D}(A)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ débilmente en V y $Av_n \rightharpoonup f$ débilmente en V'.*

- *Si*
$$\limsup_{n\to\infty} (v_n - v, Av_n - f)_{V,V'} \leq 0, \tag{2.9}$$
entonces $v \in \mathscr{D}(A)$, $f = Av$ y
$$\lim_{n\to\infty} (v_n, Av_n)_{V,V'} = (v, Av)_{V,V'}. \tag{2.10}$$

- *La misma conclusión sigue siendo válida, si en lugar de* (2.9) *asumimos que*

$$(v_n - v_m, Av_n - Av_m)_{V,V'} \to 0 \ \text{ cuando } n, m \to \infty. \tag{2.11}$$

Prueba. Dados los puntos consideremos que la demostración se divide en dos partes.

Parte 1: Se puede ver que (2.9) es equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} (v_n, Av_n)_{V,V'} \leq (v, f)_{V,V'}. \tag{2.12}$$

Por lo tanto, ya que

$$(v_n - w, Av_n - Aw)_{V,V'} \geq 0 \ \text{ para cualquier } w \in \mathscr{D}(A), \tag{2.13}$$

tomando $\limsup$ resulta que $(v - w, f - Aw)_{V,V'} \geq 0$. Luego la maximilidad de A implica que $v \in \mathscr{D}(A)$ y $f = Av$. Tomando ahora $\liminf$ en la relación (2.13) con $w = v$, obtenemos que $\liminf_{n\to\infty}(v_n, Av_n)_{V,V'} \geq (v, f)_{V,V'}$ el cual, junto con (2.12), implica (2.10).

Parte 2: Asumamos válido (2.11) en lugar de (2.9). Probaremos primero que

$$\lim_{n\to\infty} (v_n, Av_n)_{V,V'} = (v, f)_{V,V'}. \tag{2.14}$$

Se sigue de (2.11) que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$0 \leq (v_n - v_m, Av_n - Av_m)_{V,V'} \leq \varepsilon \ \text{ para todo } n, m \geq N. \tag{2.15}$$

Sea a el punto límite de la sucesión $\left\{(v_n, Av_n)_{V,V'}\right\}$. Entonces $a = \lim_{k\to\infty} (v_{n_k}, Av_{n_k})_{V,V'}$ para alguna sucesión $\{n_k\}$. De (2.15) tenemos

$$0 \leq (v_{n_k}, Av_{n_k})_{V,V'} + (v_{n_l}, Av_{n_l})_{V,V'} - (v_{n_k}, Av_{n_l})_{V,V'} - (v_{n_l}, Av_{n_k})_{V,V'} \leq \varepsilon$$

para todo $k, l \geq$. Así, si hacemos $l \to \infty$ en la última relación, obtenemos que

$$0 \leq (v_{n_k}, Av_{n_k})_{V,V'} + a - (v, Av_{n_k})_{V,V'} - (v_{n_k}, f)_{V,V'} \leq \varepsilon$$

para todo $k, l \geq$. Por lo tanto luego de aplicar límite cuando $k \to \infty$ obtenemos que

$$0 \leq 2a - 2(v, f)_{V,V'} \leq \varepsilon \ \text{ para cualquier } \varepsilon > 0.$$

Así $a = (v, f)_{V,V'}$ y luego (2.14) se verifica.

Ahora usando (2.14) y luego de aplicar límite cuando $n \to \infty$ en (2.13) encontramos que $(v - w, f - Aw)_{V,V'} \geq 0$ para cualquier $w \in \mathscr{D}(A)$ y luego, por la maximilidad de A, $v \in \mathscr{D}(A)$ y $f = Av$. La relación (2.10) se sigue de (2.14). ■

Algunas extensiones del concepto de monotonicidad son dados a continuación. Estos objetos son usados para el estudio de ecuaciones estacionarias de von Karman. Siguiendo [34], introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.8. Sea $A : V \mapsto V'$ un operador sobre el espacio reflexivo de Banach V.

- el operador A es llamado *pseudomonótono* si las relaciones

  $$u_n \rightharpoonup u \text{ débilmente en } V \text{ y } \limsup_{n\to\infty} (u_n - u, Au_n)_{V,V'} \le 0$$

  implican que

  $$(u - w, Au)_{V,V'} \le \liminf_{n\to\infty} (u_n - w, Au_n)_{V,V'} \text{ para todo } w \in V.$$

- El operador $A : V \mapsto V'$ satisface la condición $(S)_+$ si las relaciones

  $$u_n \rightharpoonup u \text{ débilmente en } V \text{ y } \limsup_{n\to\infty} (u_n - u, Au_n - Au)_{V,V'} \le 0 \tag{2.16}$$

  implican que $u_n \to u$ fuertemente en V.

La siguiente proposición es importante en aplicaciones de la teoría de los operadores pseudomonótonos y EDPs elípticas cuasilineales.

Proposición 2.2.9. *Sea $A : V \to V'$ un operador definido sobre un espacio reflexivo de Banach V.*

- *Si A es monótono y hemicontinuo, entonces es pseudomonótono.*
- *Si A es fuertemente continuo, entonces A es pseudomonótono.*
- *Si A es semicontinuo y satisface $(S)_+$, entonces A es pseudomonótono.*
- *Si $A, B : V \to V'$ son pseudomonótonos, entonces $A + B$ es pseudomonótono.*
- *Si A satisface $(S)_+$ y $B : V \to V'$ es fuertemente continuo entonces $A + B$ satisface $(S)_+$.*
- *Si A es pseudomonótono y localmente acotado sobre V,entonces A es semicontinuo.*

Para la prueba referimos [34, Capítulo 27].

Consideramos a continuación la siguiente ecuación del operador

$$Au = b\,, \quad u \in V, \tag{2.17}$$

en un espacio real separable de Banach V. Sea $\{e_k\}$ una base en V. Definimos la aproximación de Galerkin para (2.17) con respecto a la base $\{e_k\}$ como el problema: encontrar $u_n \in V_n \equiv \text{span}\,\{e_1, \dots, e_n\}$ saitsfaciendo las ecuaciones

$$(e_k, Au_n)_{V,V'} = (e_k, b)_{V,V'} \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Teorema 2.2.10. *Sea $A : V \to V'$ un operador pseudomonótono, acotado, y coercivo. Entonces*

- *Para cada $b \in V'$ la ecuación* (2.17) *tiene una solución. Si A es propia, entonces el conjunto de las soluciones de* (2.17) *es un conjunto compacto en V.*
- *Para cada $b \in V'$ y $n \in \mathbb{N}$ la aproximación de Galerkin tiene una solución. Existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ que converge débilmente a una solución de la ecuación original* (2.17)*. Si A satisface $(S)_+$, entonces una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ converge fuertemente.*

Para la prueba referimos [34, Capítulo 27].

2.2.4. Sistemas dinámicos disipativos

Por definición un sistema dinámico es un par de objetos (X, S_t) consistiendo de un espacio métrico completo X y una familia de mapeos continuos $\{S_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ de X hacia si mismo con las propiedades del semigrupo:

$$S_0 = I\,,\ S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau.$$

También asumimos que $y(t) = S_t y_0$ es continuo con respecto a t para cualquier $y_0 \in X$. Con eso X es llamadoun *espacio de fase* (o espacio de estados) y S_t es llamado un *semigrupo de evolución* (u operador evolución). Nuestro ejemplo canónico es el siguiente.

***Ejemplo* 2.2.** Sea X un espacio de Banach y $F : \mathscr{D}(F) \subseteq X \mapsto X$ un operador (no lineal) sobre X. Considere la ecuación

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t))\,,\ t \geq 0\,,\ u(0) = u_0 \in X. \tag{2.18}$$

Si este problema está bien planteado (en el sentido especificado debajo), entonces tenemos un sistema dinámico (X, S_t) con S_t definido por $S_t u_0 = u(t, u_0)$, donde $u(t, u_0)$ es la solución del problema (2.18).

Esta parte lidia con sistemas dinámicos disipativos. Desde un punto de vista físico, los sistemas disipativos son caracterizados por la "reubicación" y disipación de la energía. Con esto queremos decir que la energía de los modos superiores se disipa y se reubica en el modelo bajo, fenómeno que conduce en última instancia a estructuras de dimensión finita. Este proceso produce una formación de regímenes límite que son estables en un sentido adecuado. La siguiente definición describe muchos conceptos que nos permitirán cuantificar tanto la disipación como la reubicación a nivel formal.

Definición 2.2.11. Sea (X, S_t) un sistema dinámico.

- Un conjunto cerrado $B \subset X$ es llamado *absorbente* para (X, S_t)si para cualquier conjunto acotado $D \subset X$ existe $t_0(D)$ tal que $S_t D \subset B$ para todo $t \geq t_0(D)$.

- (X, S_t) es llamado (*acotado, o en última instancia*) *disipativo* si posee un conjunto acotado absorbente B. Si X es un espacio de Banach, entonces un valor $R > 0$ es llamado un *radio de disipatividad* de (X, S_t) si $B \subset \{x \in X \,:\, \|x\|_X \leq R\}$.

- El sistema dinámico (X, S_t) es llamado *punto disipativo* si existe $B_0 \subset X$ tal que para cualquier $x \in X$ hay un $t_0(x)$ tal que $S_t x \in B_0$ para todo $t \geq t_0(x)$.

- (X, S_t) es llamado *compacto* si es disipativo y el conjunto absorbente B es compacto.

- (X, S_t) es llamado *asintóticamente compacto* si existe un conjunto compacto atractor K; esto es, para cualquier conjunto acotado D tenemos

$$\lim_{t \to +\infty} d_X \{S_t D | K\} = 0, \tag{2.19}$$

  donde $d_X \{A|B\} = \sup_{x \in A} \text{dist}_X(x, B)$.

- (X, S_t) es llamado asintóticamente suave si para cualquier conjunto acotado D tal que $S_t D \subset D$ para $t > 0$ existe un conjunto compacto K en la clausura $\overline{D}$ de D, de manera que (2.19) es válido.

Si el espacio de fase X es compacto, entonces (X, S_t) es un sistema dinámico compacto. Si X es un espacio finito-dimensional, entonces cualquier sistema disipativo es compacto. También es claro que todo sistema asintóticamente compacto es disipativo y asintóticamente suave. Notamos que en la mayoría de los casos los modelos de von Karman descritos en otros textos generalmente son sistemas dinámicos asintóticamente suaves bajo condiciones apropiadas. Esta es la razón principal por la cual discutimos a continuación la compacidad/suavidad asintótica con detalle.

Ahora recordamos varias notaciones bien conocidas de la teoría de los sistemas dinámicos.

Un conjunto $D \subset X$ es llamado *invariante hacia adelante* (o positivamente) si $S_t D \subseteq D$ para todo $t \geq 0$. Es llamado *invariante hacia atrás* (o negativamente) si $S_t D \supseteq D$ para todo $t \geq 0$. El conjunto S es llamado *invariante* si es invariante hacia adelante y hacia atrás al mismo tiempo; es decir, $S_t D = D$ para todo $t \geq 0$.

Sea $D \subset X$. El conjunto

$$\gamma_D^t \equiv \bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D$$

es llamado la *cola* (del momento t) de las trayectorias emanando de D. Es claro que $\gamma_D^t = \gamma_{S_t D}^0 \equiv \gamma_{S_t D}^+$. Si $D = \{v\}$ es un conjunto unitario, entonces $\gamma_v^+ \equiv \gamma_D^0$ es llamado *semitrayectoria positiva* (*o semiorbita*) emanando de v. Una curva continua $\gamma \equiv \{u(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ en X es llamado *trayectoria completa* si $S_t u(\tau) = u(t + \tau)$ para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Como S_t no es necesariamente un operador invertible, una trayectoria completa puede no existir. Semitrayectorias son conjuntos invariantes hacia adelante. Trayectorias completas son conjuntos invariantes.

Para describir el comportamiento asintótico usamos el concepto de un conjunto $\omega-$límite. El conjunto

$$\omega(D) \equiv \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_D^t} = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D} \tag{2.20}$$

es llamado el *conjunto ω-límite* de las trayectorias emanando de D (la barra sobre un conjunto significa la clausura). Es equivalente a decir que $x \in \omega(D)$ si y solo si existen sucesiones $t_n \to +\infty$ y $x_n \in D$ tal que $S_{t_n} x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Es claro que los conjuntos ω-límite (si existen) son invariantes hacia adelante.

Si $\gamma = \{u(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ es una trayectoria completa, podemos definir tanto conjuntos ω-límite como α-límite de γ por las siguientes fórmulas

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup \{u(\tau) \,:\, \tau \geq t\}} \;\text{ y }\; \alpha(\gamma) = \bigcap_{t<0} \overline{\bigcup \{u(\tau) \,:\, \tau \leq t\}} \tag{2.21}$$

La siguiente afirmación provee condiciones bajo las cuales $\omega(D)$ es no vacío.

Proposición 2.2.12. *Asuma que el sistema (X, S_t) es un sistema dinámico asintóticamente compacto con un conjunto compacto atractor K. Entonces para cualquier conjunto acotado D el conjunto ω-límite $\omega(D)$ es un conjunto invariante compacto no vacío.*

Si (X, S_t) es asintóticamente suave y la cola γ_D^t es acotada para algún $t \geq 0$, luego el conjunto ω-límite $\omega(D)$ es también un conjunto invariante compacto no vacío.

Para la prueba, ver por ejemplo, [7].

La siguiente proposición provee otras descripciones (equivalentes) de los sistemas asintóticamente compactos.

Proposición 2.2.13. *Asuma que X es un espacio de Banach y (X, S_t) es un sistema dinámico disipativo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- *(X, S_t) es asintóticamente compacto.*
- *(X, S_t) es aintóticamente suave.*
- *Existe una descomposición $S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$, donde $S_t^{(1)}$ es uniformemente compacto para un t suficientemente grande; esto es, para cualquier conjunto acotado D existe $t_0 = t_0(D)$ tal que el conjunto $\gamma^{(1)}(D; t_0) := \bigcup_{\tau \geq t_0} S_\tau^{(1)} D$ es relativamente compacto en S y $S_t^{(2)}$ es un mapeo continuo en X tal que*

  $$r_D(t) = \sup \left\{ \left\| S_t^{(2)} x \right\|_X \,:\, x \in D \right\} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \tag{2.22}$$

  para conjunto acotado D.

- *La condición de Ladyzhenskaya se satisface: Para cada sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$ y cada sucesión $t_n \to \infty$, la sucesión $\{S_{t_n}x_n\}$ es relativamente compacta en X.*

Si el sistema (X, S_t) es no disipativo, la equivalencia descrita en la proposición 2.2.13 no será válida. Sin embargo, es claro que compacidad asintótica implica la suavidad asintótica. Además, las siguientes dos proposiciones muestran que la condición de suavidad asintótica es la más débil de entre las otras propiedades de compacidad postuladas en la proposición 2.2.13.

Proposición 2.2.14. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico en un espacio de Banach X. Asuma que para cada $t > 0$ existe una descomposición $S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$, donde $S_t^{(2)}$ es un mapeo continuo en X satisfaciendo* (2.22) *y $S_t^{(1)}$ es completamente continuo; es decir, para cada $t > 0$ el conjunto $\left\{S_\tau^{(1)}B \,:\, 0 \le \tau \le t\right\}$ es acotado y $S^{(1)}B$ es un conjunto acotado arbitrario en X. Luego, $(X; S_t)$ es asintóticamente suave.*

Prueba. Ver [17, Lema 3.2.3]. ■

Otra condición útil de la suavidad asintótica es dada en la siguiente afirmación.

Proposición 2.2.15. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico en un espacio de Banach X. Asuma que la condición de Ladyzhenskaya es válida: para cada sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$ y cada sucesión $t_n \to \infty$, la sucesión $\{S_{t_n}x_n\}$ es relativamente compacta en X. Luego (X, S_t)es asintóticamente suave.*

Prueba. Sea D un conjunto acotado invariante hacia adelante. Se sigue de la condición de Ladyzhenskaya que $K = \omega(D)$ es un conjunto compacto invariante no vacío (ver el argumento dado en [7, Capítulo 1]). El argumento de la contradicción, aplicado de la misma manera com en la prueba del teorema 1.5.1 [7], lleva a (2.19). ■

Concluimos esta sección con varias afirmaciones que dan otros convenientes criterios para la suavidad asintótica de un sistema dinámico. Estos son usados más adelante en el contexto de los sistemas de von Karman con amortiguación no lineal.

Teorema 2.2.16. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico sobre un espacio de Banach X. Asuma que para cualquier conjunto acotado positivamente invariante B en X existe $T > 0$, una función no decreciente continua $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ y una pseudométrica ρ_B^T sobre $C(0, T; X)$ tal que*

(i) $g(0) = 0$; $g(s) < s$, $s > 0$.

(ii) *La pseudométrica ρ_B^T es precompacto (con respecto a la norma de X) en el siguiente sentido. Cualquier sucesión $\{x_n\} \subset B$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que la sucesión $\{y_k\} \subset C(0, T; X)$ de elementos $y_k(\tau) = S_\tau x_{n_k}$ es de Cauchy con respecto a ρ_B^T.*

(iii) *La siguiente estimación*

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\| \leq g(\|y_1 - y_2\| + \rho_B^T(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\})), \tag{2.23}$$

es válido para todo $y_1, y_2 \in B$, donde denotamos por $\{S_\tau y_i\}$ al elemento en el espacio $C(0,T;X)$ dado por la función $y_i(\tau) = S_\tau y_i$.

Luego, (X, S_t) es un sistema dinámico asintóticamente suave.

NOTA 2.2. En lugar de (2.23) uno también puede asumir que

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\| \leq g(\|y_1 - y_2\|) + \rho_B^T(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\})$$

(pseudométrica fuera de g). También notamos que el teorema (2.2.16) permanece válido en el caso cuando X es un espacio métrico completo.

Prueba. Usamos la misma idea como en [17, lema 2.3.6] la cual está basada en la α-medida de Kuratowski de no compacidad. Este último es definido por la fórmula

$$\alpha(B) = \inf\{d : B \text{ tiene una cubierta de diámetro } < d\}$$

sobre conjuntos acotados de X. La α-medida tiene las siguientes propiedades

(i) $\alpha(B) = 0$ si y solo si B es precompacto.

(ii) $\alpha(A \cup B) \leq \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

(iii) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

(iv) $\alpha(\overline{\text{co}}B) = \alpha(B)$, donde $\alpha(\overline{\text{co}}B)$ es la cápsula convexa cerrada de B.

(v) Si $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots$ son conjuntos cerrados no vacíos en X tal que $\alpha(B_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego $\bigcap_{n\geq 1} B_n$ es no vacío y compacto.

Primero probamos que

$$\alpha(S_T B) \leq g(\alpha(B)). \tag{2.24}$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existen conjuntos $F_1, \ldots, F_n$ tal que

$$B = F_1 \cup \ldots \cup F_n \qquad \text{diam} F_i < \alpha(B) + \varepsilon.$$

Se sigue de la suposición (ii) que existe un conjunto finito $\mathscr{N} = \{x_i : i = 1, 2, \ldots, m\} \subset B$ tal que para cada $y \in B$ hay un $x_i \in \mathscr{N}$ con la propiedad $\rho_B^T(\{S_\tau y\}, \{S_\tau x_i\}) \leq \varepsilon$. Esto significa que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} C_i, \quad C_i = \left\{y \in B : \rho_B^T(\{S_\tau y\}, \{S_\tau x_i\}) \leq \varepsilon\right\}.$$

Ahora usamos la representación

$$B = \bigcup_{i,j} (C_i \cap F_j) \text{ y } S_T B = \bigcup_{i,j} (S_T(C_i \cap F_j)). \tag{2.25}$$

Debido a que diam$F_j < \alpha(B) + \varepsilon$ y

$$\rho_B^T(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}) \leq \rho_B^T(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau x_i\}) + \rho_B^T(\{S_\tau x_i\}, \{S_\tau y_2\})$$

para cualquier $y_1, y_2 \in C_i \cap F_j$, se sigue de (2.23) que

$$\|S_T y_1 - S_T y_2\| \leq g([\alpha(B) + \varepsilon] + 2\varepsilon)$$

para cualquier $y_1, y_2 \in C_i \cap F_j$. Así diam$(S_T(C_i \cap F_j)) \leq g(\alpha(B) + 3\varepsilon)$. Por lo tanto usando (2.25) y la definición de α-medida obtenemos (2.24).

Como $S_t B \subset B$, la siguiente representación toma lugar,

$$\omega(B) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k, \quad B_k \equiv \overline{S_{kT} B},$$

para el conjunto ω-límite $\omega(B)$. Es claro también que $B_k \supset B_{k+1}$ para todo k y

$$\alpha(B_k) \leq \alpha(S_T B_{k-1}) \leq g(\alpha(B_{k-1})) \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.26}$$

Como $g(s) < s$, la sucesión $\{\alpha(B_k)\}$ es decreciente. Por lo tanto existe $\alpha_0 = \lim_{k \to \infty} \alpha(B_k)$. De (2.26) tenemos que $\alpha_0 \leq g(\alpha_0)$ que es posible solamente si $\alpha_0 = 0$. Así la propiedad (v) de la α-medida, $\omega(B)$ es un conjunto compacto no vacío. El argumento estándar nos permite concluir que $\omega(B)$ atrae a B uniformemente. Así (X, S_t) es asintóticamente suave. ■

El teorema 2.2.16 implica las siguientes dos proposiciones que son ligeras generalizaciones presentadas en [17].

Proposición 2.2.17. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico sobre un espacio de Banach X. Asuma que para cualquier conjunto acotado positivamente invariante B en X y para cualquier $t \geq t_0 = t_0(B) \geq 0$ existe una función $K_B(t)$ sobre $[t_0, +\infty)$ y una pseudométrica ρ_B^t sobre $C(0, t; X)$ tal que*

(i) *$K_B(t) \geq 0$ y $\lim_{t \to \infty} K_B(t) = 0$.*

(ii) *La pseudométrica ρ_B^t es precompacta (con respecto a la norma de X) en el siguiente sentido. Cualquier sucesión $\{x_n\} \subset B$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que la sucesión $\{y_k\} \subset C(0, t; X)$ de elementos $y_k(\tau) = S_\tau x_{n_k}$ es de Cauchy con respecto a ρ_B^t.*

(iii) *La estimación*

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\| \leq K_B(t). \|y_1 - y_2\| + \rho_B^t(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}), \ t \geq t_0, \tag{2.27}$$

es válida para cada $y_1, y_2 \in B$, donde denotamos por $\{S_\tau y_i\}$ al elemento en $C(0, t; X)$ dado por la función $y_i(\tau) = S_\tau y_i$.

Luego, (X, S_t) es un sistema dinámico asintóticamente suave.

Prueba. Aplicamos el teorema 2.2.16 con $g(s) = K_B(T) \cdot s$, donde T es escogido de manera que $K_B(T) < 1$. ■

Proposición 2.2.18. *Asuma que un sistema dinámico (X, S_t) sobre un espacio de Banach X posee la siguiente propiedad. Para cualquier conjunto acotado positivamente invariante B en X existen las funciones $C_B(t) \geq 0$ y $K_B(t) \geq 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} K_B(t) = 0$, un tiempo $t_0 = t_0(B)$, y una pseudométrica precompacta ρ sobre X tal que*

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\| \leq K_B(t) \cdot \|y_1 - y_2\| + C_B(t) \cdot \rho(y_1, y_2), \quad t \geq t_0, \tag{2.28}$$

para cada $y_1, y_2 \in B$. Luego (X, S_t) es un sistema dinámico asintóticamente suave.

Recordamos que una pseudométrica ρ sobre un espacio de Banach X es llamada *precompacta* (con respecto a la norma de X) si cualquier sucesión acotada (en la norma) tiene una subsucesión la cual es de Cauchy con respecto a ρ.

Prueba. Es claro que una pseudométrica ρ_B^t definida sobre $C(0, t; X)$ por la fórmula

$$\rho_B^t(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\}) = C_B(t) \cdot \rho(y_1, y_2)$$

satisface las suposiciones (ii) y (iii) en la Proposición 2.2.17. ■

Nuestro siguiente criterio de suavidad asintótica se basa en la idea presentada en [19].

Teorema 2.2.19. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico sobre un espacio métrico completo X dotado con una métrica d. Asuma que para cualquier conjunto acotado positivamente invariante B en X y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $T \equiv T(\varepsilon, B)$ tal que*

$$d(S_T y_1, S_T y_2) \leq \varepsilon + \Psi_{\varepsilon,B,T}(y_1, y_2)\,, \; y_i \in B, \tag{2.29}$$

donde $\Psi_{\varepsilon,B,T}(y_1, y_2)$ es un funcional definido sobre $B \times B$ tal que

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Psi_{\varepsilon,B,T}(y_n, y_m) = 0 \tag{2.30}$$

para cualquier sucesión $\{y_n\}$ de B. Luego (X, S_t) es un sistema dinámico asintóticamente suave.

Notamos que el criterio de compacidad presentado en el Teorema 2.2.19 provee más flexibilidad, con respecto a métodos más estándar como los dados en el Teorema 2.2.16, al permitir la toma de límites secuenciales (en n y m) en lugar de los límites simultáneos. Esta fue una observación hecha por primera vez en [19]. El resultado señalado en el Teorema 2.2.19 es una versión abstracta del teorema 2 en [19] que puede ser derivado de los argumentos dados en [19].

El Teorema 2.2.19 sigue a la vez de la siguiente afirmación.

Proposición 2.2.20. *Sea* (X, S_t) *un sistema dinámico sobre un espacio métrico completo* (X, d)*. Asuma que para cualquier conjunto acotado positivamente invariante* B *en* X *y para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $T \equiv T(\varepsilon, B)$ *tal que*

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} d(S_T y_n, S_T y_m) \leq \varepsilon \tag{2.31}$$

para cualquier sucesión $\{y_n\}$ *de* B*. Luego* (X, S_t) *es un sistema dinámico asintóticamente suave.*

Prueba. Como en la prueba del Teorema 2.2.16 es suficiente probar que

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(S_t B) = 0,$$

donde $\alpha(B)$ es la α-medida de Kuratowski de no compacidad.

Debido a que $S_{t_1}B \subset S_{t_2}B$ para $t_1 > t_2$, la función $\alpha(t) \equiv \alpha(S_t B)$ es no creciente. Por lo tanto es suficiente probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\alpha(S_T B) \leq \varepsilon$. Si esto no es cierto, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\alpha(S_T B) \geq 3\varepsilon_0$ para todo $T > 0$. Para este ε_0 escogemos T_0 tal que (2.31) es válido. La relación $\alpha(S_{T_0} B) \geq 3\varepsilon_0$ implica que existe una secuencia infinita $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$d(S_{T_0} y_n, S_{T_0} y_m) \geq 2\varepsilon_0 \text{ para todo } n \neq m\,,\ n, m = 1, 2, \ldots$$

Esto contradice (2.31). ■

2.2.5. Atractores globales

Los principales objetos que surgen en el análisis del comportamiento prolongado de los sistemas dinámicos disipativos infinito-dimensionales son los atractores. Su estudio nos permite responder un número fundamental de preguntas sobre las propiedades de regímenes límite que pueden surgir en el sistema considerado. En la actualidad, hay varios enfoques generales y métodos que nos permiten probar la existencia y la dimensionalidad finita de los atractores globales para una gran clase de sistemas dinámicos generados por ecuaciones diferenciales parciales no lineales (ver por ejemplo, [7, 17] y sus referencias dentro de ellos). Más adelante revisaremos algunos de ellos, con particular énfasis en los métodos aplicables a las evoluciones de segundo orden.

Definición 2.2.21. Un conjunto cerrado acotado $A \subset X$ es llamado *atractor global* del sistema dinámico (X, S_t) si se verifican las siguientes propiedades.

(i) A es un conjunto invariante; esto es, $S_t A = A$ para $t \geq 0$.

(ii) A está atrayendo informemente; es decir, para todo conjunto acotado $D \subset X$

$$\lim_{t\to+\infty} d_X \{S_t D \,|\, A\} = 0, \tag{2.32}$$

donde $d_X = \{A \,|\, B\} = \sup_{x\in A} \text{dist}_X(x, B)$ es la semidistancia de Hausdorff.

El principal resultado sobre la existencia de un atractor global es el siguiente.

Teorema 2.2.22. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico asintóticamente compacto es un espacio de Banach X con un conjunto compacto atrayente K. Entonces (X, S_t) posee un único atractor global compacto A tal que $A \subset K$. Este atractor es un conjunto conexo y tiene la forma*

$$A = \omega(K) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau K}. \tag{2.33}$$

También tiene la relación

$$A = \bigcap_{n \geq N} S_n K \text{ para todo } N \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.34}$$

Además, (i) una trayectoria completa $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ pertenece al atractor si y solo si γ es un conjunto acotado y (ii) para cualquier $x \in A$ existe una trayectoria completa $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que $u(0) = x$ y $\gamma \subset A$. Así el atractor global puede ser descrito como un conjunto de todas las trayectorias completas acotadas.

Si B es un conjunto absorbente acotado para (X, S_t), entonces $A = \omega(B)$ y

$$\lim_{t \to +\infty} \left(d_X \{S_t B | A\} + d_X \{A | S_t B\} \right) = 0, \tag{2.35}$$

donde $d_X \{A|B\} = \sup_{x \in A} \mathrm{dist}_X(x, B)$. Así A atrae conjuntos absorbentes acotados en la métrica de Hausdorff.

Para la prueba referimos a [7].

Notamos que la propiedad (2.35) significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier conjunto absorbente B existe $t_\varepsilon > 0$ tal que $S_t B \subset \mathscr{O}_\varepsilon(S_t B)$ para todo $t \geq t_\varepsilon$. Aquí $\mathscr{O}_\varepsilon(D)$ denota la ε-vecindad del conjunto D.

Debido a la proposición 2.21 el teorema 2.33 se puede replantear en la siguiente forma.

Teorema 2.2.23. *Cualquier sistema dinámico disipativo asintóticamente suave (X, S_t) en un espacio de Banach X posee un único atractor global compacto A. Este atractor es un conjunto conexo y puede ser descrito como un conjunto de todas las trayectorias completas acotadas. Además $A = \omega(B)$ para cualquier conjunto absorbente acotado B de (X, S_t) y la relación* (2.35) *es válida.*

Es claro que si un sistema posee un atractor global compacto, entonces es asintóticamente compacto. Así el teorema 2.2.22 implica que (X, S_t) tiene un atractor global compacto si y solo si es asintóticamente compacto. Por el teorema 2.2.23 también también tenemos que un sistema disipativo posee un atractor global compacto si y solo si es asintóticamente suave.

Podemos también probar la siguiente afirmación (ver por ejemplo [17, Teorema 2.4.6]).

Teorema 2.2.24. *Sea $(X; S_t)$ un sistema dinámico en un espacio métrico completo X. Luego (X, S_t) posee un atractor global compacto A si y solo si*

(i) (X, S_t) *es asintóticamente suave.*

(ii) (X, S_t) *es punto disipativo.*

(iii) *Para todo conjunto acotado $B \subset X$ existe t_0 tal que la cola $\gamma_B^{t_0}$ es acotado.*

El atractor A tiene la representación

$$A = \bigcup \{\omega(B) \ : \ B \text{ es un subconjunto acotado de } X\}\,. \tag{2.36}$$

Así las propiedades (i)-(iii) son equivalentes a la compacidad asintótica del sistema.

Este teorema y también la Proposición 2.22 implican la siguiente afirmación.

Corolario 2.2.25. *Asuma que (X, S_t) es un sistema dinámico disipativo en un espacio de Banach X. Asuma que para cada $t > 0$ suficientemente grande el operador evolución $S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$, donde $S_t^{(2)}$ es un mapeo continuo en X satisfaciendo* (2.22) *y $S_t^{(1)}$ es compacto; es decir, $S_t^{(1)}B$ es un conjunto precompacto en X para todo $t > 0$ suficientemente grande y para cada conjunto acotado $B \subset X$. Luego, (X, S_t) posee un atractor global compacto.*

En orden de describir propiedades de estabilidad de atractores necesitamos las siguientes nociones. El conjunto positivamente invariante M es llamado *estable* (*en el sentido de Lyapunov*) si y solo si para cualquier vecindad $\mathscr{O}$ de M existe una vecindad $M \subset \mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$ tal que $S_t\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$ para todo $t \geq 0$. El conjunto M es *asintóticamente estable* si y solo si es estable y $S_t x \to M$ cuando $t \to \infty$ para cualquier $x \in \Omega'$. Este conjunto es *asintótica y uniformemente estable* si y solo si es estable y

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\mathscr{O}'} \mathrm{dist}_X(S_t x, M) = 0.$$

Tenemos la siguiente propiedad de atractores globales compactos (ver [7]).

Teorema 2.2.26. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico en un espacio de Banach X que posee un atractor global compacto A. Asuma que existe una vecindad acotada $\mathscr{O}$ de A tal que el mapeo $(t, x) \mapsto S_t x$ es continuo sobre $\mathbb{R} \times \mathscr{O}$. Luego A es asintótica y uniformemente estable.*

También tenemos el siguiente *principio de reducción* (para la prueba referimos [7]).

Teorema 2.2.27. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico disipativo en un espacio de Banach X. Asuma que hay un conjunto localmente compacto[1] y positivamente invariante*

[1] En el sentido que cada subconjunto acotado de este conjunto es relativamente compacto

M que posee la propiedad de atracción uniforme: para cualquier conjunto acotado D tenemos

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in D}\text{dist}_X(S_t x, M) = 0.$$

Si A es un atractor global de la restricción (M, S_t) del sistema $(X; S_t)$ sobre M, entonces A también es un atractor global para (X, S_t).

En ciertas situaciones este teorema nos permite reducir significativamente la dimensión del espacio de fase, el cual es importante en el estudio de los sistemas infinito dimensionales.

A continuación consideramos la estabilidad de los atractores con respecto a las perturbaciones de un sistema dinámico. Asuma que tenemos una familia de sistemas dinámicos (X, S_t^λ) con el mismo espacio de fase X y con el operador evolutivo S_t^λ dependiendo del parámetro λ desde un espacio métrico completo Λ. La siguiente afirmación es probada por Kapitansky y Kostin [18] (ver también [17] y [7]).

Teorema 2.2.28. *Asuma que un sistema dinámico (X, S_t^λ) en un espacio de Banach X posee un atractor global A^λ para todo $\lambda \in \Lambda$. Suponga que las siguientes condiciones son válidas.*

(i) *Existe un compacto $K \subset X$ tal que $A^\lambda \subset K$.*

(ii) *Si $\lambda_k \to \lambda_0$, $x_k \to x_0$ y $x_k \in A^{\lambda_k}$, entonces $S_\tau^{\lambda_k} x_k \to S_\tau^{\lambda_0} x_0$ para algún $\tau > 0$.*

Luego la familia $\left\{A^\lambda\right\}$ de atractores es semicontinua superiormente en el punto λ_0; es decir,

$$d_X\left\{A^{\lambda_k}|A^{\lambda_0}\right\} \equiv \sup\left\{\text{dist}_X(x, A^{\lambda_0})\ :\ x\in A^{\lambda_k}\right\} \to 0 \textit{ cuando } \lambda_k \to \lambda_0 \qquad (2.37)$$

Además, el límite superior $A(\lambda_0, \Lambda)$ de atractores A^λ en λ_0 es definido por la fórmula

$$A(\lambda_0, \Lambda) = \bigcap_{\delta>0}\overline{\bigcup\{A^\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda,\ 0<\text{dist}(\lambda,\lambda_0)<\delta\}}$$

es un conjunto compacto invariante no vacío que se encuentra en el atractor A^{λ_0}.

La situación con la continuidad de los atractores A^λ con respecto a λ es más complicada. En general la familia $\left\{A^\lambda\right\}$ no es semicontinua inferiormente en el punto λ_0; esto es, la propiedad $d_X\left\{A^{\lambda_0}|A^{\lambda_k}\right\} \to 0$ cuando $\lambda_k \to \lambda_0$ no es válido. En orden de probar la semicontinuidad inferior bajo las hipótesis del Teorema 2.2.28 algunas suposiciones adicionales deberían imponerse. Sin embargo, la propiedad de semicontinuidad inferior es genérica bajo simples suposiciones de compacidad (ver la discusión en la examinada [29]).

El siguiente concepto es útil para describir comportamiento a largo plazo de trayectorias individuales.

Definición 2.2.29. Un conjunto cerrado acotado $A_{\text{mín}} \subset X$ es llamado un *atractor global minimal* si el sistema dinámico (X, S_t) si y solo si las siguientes propiedades son válidas.

(i) $A_{\text{mín}}$ es un conjunto positivamente invariante; esto es, $S_t A_{\text{mín}} \subseteq A_{\text{mín}}$ para $t \geq 0$;

(ii) $A_{\text{mín}}$ atrae cada punto x de X; es decir,

$$\lim_{t\to+\infty} \text{dist}_X(S_t x, A_{\text{mín}}) = 0 \text{ para cualquier } x \in X;$$

(iii) $A_{\text{mín}}$ es minimal; esto es, $A_{\text{mín}}$ no tiene subconjuntos propios que poseen las propiedades (i) y (ii).

Es claro que si el sistema (X, S_t) admite un atractor global A, entonces un atractor global minimal $A_{\text{mín}}$ también existe y $A_{\text{mín}} \subset A$.

Similar al Teorema 2.2.24 uno puede probar la siguiente afirmación.

Teorema 2.2.30. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico en un espacio de Banach X. Entonces (X, S_t) posee un atractor global minimal $A_{\text{mín}}$ si (X, S_t) es un punto disipativo y para cada $x \in X$ existe t_0 tal que la cola $\gamma_x^{t_0}$ es relativamente compacto. Además el atractor $A_{\text{mín}}$ tiene la representación*

$$A_{\text{mín}} = \overline{\bigcup \{\omega(x) \,:\, x \in X\}}. \tag{2.38}$$

La suposición más restrictiva que garantiza la existencia de un atractor global es la compacidad asintótica del sistema dinámico correspondiente (ver Teorema 2.2.22). Además esta suposición se puede evitar si se limitan las consideraciones a la topología débil. Así, es conveniente considerar la propiedad de la convergencia uniforme (2.32) en una topología débil. Esto permite la siguiente definición.

Definición 2.2.31. Sea X un espacio de Banach reflexivo separable. Un conjunto cerrado débilmente acotado $A \subset X$ es llamado una *atractor global débil* del sistema dinámico (X, S_t) si y sólo si las siguientes propiedades son válidas.

(i) A un conjunto invariante; es decir, $S_t A = A$ para $t \geq 0$.

(ii) A es uniformemente atrayente en la topología débil; esto es, para cualquier vecindad débil $\mathscr{O}$ de A y para el conjunto acotado $D \subset X$ existe $t_0(D, \mathscr{O})$ tal que $S_t D \subset \mathscr{O}$ para todo $t \geq t_0(D, \mathscr{O})$.

Es claro que un atractor global, si existe, es también débil. Sin embargo, el siguiente resultado sobre la existencia de atractores globales débiles muestra que la hipótesis de compacidad asintótica puede ser reemplazada por un condición más débil de cerrabilidad débil. Por supuesto, la conclusión obtenida es igualmente más débil, la atracción fuerte es reemplazada por una atracción débil.

Teorema 2.2.32. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico disipativo en un espacio de Banach reflexivo separable X con un conjunto absorbente B. Asuma que el operador evolución S_t es débilmente cerrado: para todo $t > 0$ la débil convergencia de $u_n \rightharpoonup u$ y $S_t u_n \rightharpoonup v$ en X implica que $S_t u = v$. Luego (X, S_t) posee un único atractor global débil A tal que $A \subset B$. Este atractor tiene la forma*

$$A = \omega_W(B) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau B}^W, \tag{2.39}$$

donde $\overline{D}^W$ denota la clausura del conjunto D en la topología débil.

La prueba se basa en la compacidad débil de los acotados acotados en un espacio de Banach reflexivo separable. Para los detalles referimos [4] o [7].

También notamos que a veces es conveniente usar no solamente las convergencias fuertes o débiles sino también otras topologías en la definición de atractores globales. Referimos [4] para la teoría de atractores envolviendo dos espacios de fases con distintas topologías.

2.2.6. Dimensión de atractores globales

La dimensionalidad finita es una propiedad importante de los atractores globales que puede ser establecida para muchos sistemas dinámicos, incluidos los que surjan en aplicaciones significativas. Hay diversos métodos que proveen estimaciones efectivas para la dimensión de atractores de sistemas dinámicos generados por EDPs (ver por ejemplo [4]) . Aquí presentamos dos métodos que no requieren C^1-suavidad del operador evolutivo (como en [4]). La razón para este enfoque es que los sistemas dinámicos de naturaleza hiperbólica no muestran efectos de suavidad, a diferencia de las ecuaciones parabólicas. Por lo tanto, la C^1 suavidad de los flujos más a menudo está fuera de toda duda, particularmente en problemas con una disipación no lineal. En cambio, consideramos flujos de Lipschitz locales más generales, que pueden ser estudiados por métodos introducidos por el teorema Ladyzhenskaya (ver por ejemplo [22]) sobre la finita dimensionalidad de conjuntos invariantes. Otro método exitoso discutido en esta sección está relacionado con exprimir la propiedad en la formulación considerada en [28]. Sin embargo, deseamos señalar que las estimaciones de la dimensión basadas en los teoremas previos usualmente tienden a ser conservativos.

Dimensiones fractales y de Hausdorff son las medidas más utilizadas en la teoría de los sistemas dinámicos de dimensión infinita.

Definición 2.2.33. Sea M un conjunto compacto en un espacio métrico X.

- La *dimensión fractal (recuento de cajas)* $\dim_f M$ de M es definida por

$$\dim_f M = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n(M, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

donde $n(M,\varepsilon)$ es el número mínimo de de bolas cerradas de radio ε que cubren al conjunto M.

- Para un positivo d definimos la *medida de Huasdorff d-dimensional* por la fórmula

$$\mu(M,d) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu(M,d,\varepsilon),$$

donde

$$\mu(M,d,\varepsilon) = \inf\left\{\sum_j (r_j)^d \;:\; M \subset \bigcup_i B(x_j,r_j)\,,\; r_j \le \varepsilon\right\}.$$

Aquí $B(x_j,r_j)$ es la bola en X con centro x_j y radio r_j. La *dimensión de Hausdorff* dim$_H M$ de M es definido por la fórmula $\dim_H M = \inf\{d \,:\, \mu(M,d)=0\}$.

Uno puede mostrar que la dimensión de Hausdorff no excede la dimensión fractal:

$$\dim_H M \le \dim_f M. \tag{2.40}$$

Simples cálculos muestran que (i) $\dim_H M = 0$ si $M = \{a_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, (ii) $\dim_f M = 1/2$ si $M = \{1/n\}$, y (iii) $\dim_H M = \dim_f M = \ln 2/\ln 3$ cuando M es el conjunto de Cantor obtenido del intervalo $[0,1]$ por la remoción secuencial de tercios centrales.

Escogemos tratar con las dimensión fractal de atractores por las siguientes razones: (i) la dimensión fractal es más conveniente para los cálculos y (ii) estima la dimensión de Hausforff (por (2.40)). La importancia de la noción de dimensión fractal finita es también ilustrada por la siguiente propiedad: si M es un conjunto compacto en X tal que $\dim_f M < n/2$ por algún $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un mapeo Lipschitziano inyectivo $L : M \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que su inversa es Hölder continua. Esto significa que M se puede colocar en el gráfico del mapeo continuo de Hölder que mapea un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ en M.

También notamos que la dimensión fractal $\dim_f M$ de un conjunto compacto M se puede representar por la fórmula

$$\dim_f M = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(M,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{2.41}$$

donde $N(M,\varepsilon)$ es el mínimo número de conjuntos cerrados de diámetro 2ε que cubren M.

La siguiente versión del teorema de Ladyzhenskaya ha sido en probado en [7].

Teorema 2.2.34. (Ladyzhenskaya). *Sea M un conjunto compacto en un espacio de Hilbert H. Asuma que V es un mapeo continuo en H tal que $V(M) \supset M$ y existe un proyector finito-dimensional P en H tal que*

$$\|P(Vv_1 - Vv_2)\| \le l\,\|v_1 - v_2\|\;, \quad v_1, v_2 \in M, \tag{2.42}$$

y

$$\|(I-P)(Vv_1 - Vv_2)\| \leq \delta \|v_1 - v_2\|\ , \quad v_1, v_2 \in M, \tag{2.43}$$

donde $\delta < 1$. Luego la dimensión fractal $\dim_f M$ es finita y la estimación

$$\dim_f M \leq \dim P \cdot \ln \frac{9l}{1-\delta} \left[\ln \frac{2}{1+\delta} \right]^{-1} \tag{2.44}$$

es válida, siempre que $l \geq 1-\delta$ (si $l < 1-\delta$ entonces M es un conjunto unitario).

En términos generales, las suposiciones (2.42) y (2.43) significan que el mapeo V exprime el conjunto M a lo largo del espacio $(I-P)H$ aunque no se estira M demasiado a lo largo de PH. La invarianza negativa de M nos da que $M \subseteq V^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así el conjunto M debe ser inicialmente exprimido. Esta propiedad es expresada por la afirmación sobre la dimensionalidad finita de M.

En problemas con amortiguación no lineal el siguiente criterio se vuelve útil (ver por ejemplo [9, 10]).

Teorema 2.2.35. *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea M un conjunto cerrado acotado en H. Suponga que existe un mapeo $V : M \mapsto H$ tal que*

(i) *$M \subseteq VM$.*

(ii) *V es de Lipschitz sobre M; esto es, existe $L > 0$ tal que*

$$\|Vv_1 - Vv_2\| \leq L \|v_1 - v_2\|\ , \quad v_1, v_2 \in M. \tag{2.45}$$

(iii) *Existe un seminormas compactas $n_1(x)$ y $n_2(x)$ sobre H tal que*

$$\|Vv_1 - Vv_2\| \leq \eta \|v_1 - v_2\| + L \cdot [n_1(v_1 - v_2) + n_2(Vv_1 - Vv_2)] \tag{2.46}$$

para cualquier $v_1, v_2 \in M$, donde $0 < \eta < 1$ y $K > 0$ son constantes (una seminorma $n(x)$ sobre H es llamada compacta si $n(x_m) \to 0$ para cualquier sucesión $\{x_m\} \subset H$ tal que $x_m \to 0$ débilmente en H).

Luego M es un conjunto compacto en H de dimensión fractal finita. Además, si las seminormas n_1 y n_2 tienen la forma $n_i(v) = \|P_i v\|$, $i = 1, 2$, donde P_1 y P_2 son ortoproyectores finito-dimensionales, entonces

$$\dim_f M \leq (\dim P_1 + \dim P_2) \cdot \ln \left(1 + \frac{8(1+L)\sqrt{2}K}{1-\eta} \right) \cdot \left[\ln \frac{2}{1+\eta} \right]^{-1}. \tag{2.47}$$

NOTA 2.3. Notamos que en el caso general (ver [13]) la estimación para la dimensión tiene la forma

$$\dim_f M \leq \left[\ln \frac{2}{1+\eta} \right]^{-1} \cdot \ln m_0 \left(\frac{4K(1+L^2)^{1/2}}{1-\eta} \right), \tag{2.48}$$

donde $m_0(R)$ es el número máximo de pares (x_i, y_i) en $H \times H$ que posee las propiedades

$$\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2 \leq R^2\,,\; n_1(x_i - x_j) + n_2(y_i - y_j) > 1\,,\; i \neq j.$$

También notamos que una declaración más general (para espacios métricos) y algunas otras versiones y corolarios del Teorema 2.2.35 puede ser encontrada en [13]. También referimos [12] para un análisis del problema de la dimensión en el caso de relaciones no lineales del tipo (2.46).

En la prueba del Teorema 2.2.35 seguimos la línea del argumento dada en [11] y se basa en los siguiente lemas.

Lema 2.2.36. *Asuma que $V : M \mapsto H$ es un mapeo tal que* (2.45) *y* (2.46) *con algún $\eta > 0$ son válidos. Entonces*

$$\alpha(VB) \leq \eta \cdot \alpha(B) \text{ para cualquier } B \subset M, \tag{2.49}$$

donde $\alpha(B)$ es la α-medida de Kuratowski de no compacidad del conjunto B (*para la definición vea la prueba del Teorema 2.2.16*)*. Así V es una α-contracción en el sentido de [17, p. 14].*

Prueba. Usamos la misma idea empleada en el Teorema 2.2.16. Por la definición de $\alpha(B)$ (ver la prueba del teorema 2.2.16), para cualquier $\varepsilon > 0$ existen conjuntos $F_1, \ldots, F_n$ tales que

$$B = F_1 \cup \ldots \cup F_n\,,\; \text{diam} F_i < \alpha(B) + \varepsilon.$$

Sea $\mathscr{N} = \{x_i \,:\, i = 1, 2, \ldots, m\} \subset B$ un conjunto finito tal que para cada $y \in B$ hay un $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ con la propiedad $n_1(y - x_i) + n_2(Vy - Vx_i) \leq \varepsilon$. Si no hay tal conjunto para algún $\varepsilon > 0$, entonces existe una sucesión $\{z_n\} \subset B$ tal que

$$n_1(z_n - z_m) + n_2(Vz_n - Vz_m) \geq \varepsilon \text{ para todo } n \neq m. \tag{2.50}$$

Podemos asumir que $z_n \to z$ y $Vz_n \to w$ débilmente en H para algunos $z, w \in H$. Como las seminormas n_1 y n_2 son compactas, esto implica que $n_1(z_n - z) + n_2(Vz_n - w) \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual es imposible debido a (2.50). Así tal conjunto finito $\mathscr{N}$ existe y

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} C_i\,,\; C_i = \{y \in B \,:\, n_1(y - x_i) + n_2(Vy - Vx_i) \leq \varepsilon\}\,,\; x_i \in \mathscr{N}.$$

Explotando las representaciones $B = \bigcup_{i,j}(C_i \cap F_j)$ y $VB = \bigcup_{i,j}(V(C_i \cap F_j))$ uno puede ver de (2.46) que diam$(V(C_i \cap F_i)) \leq \eta \cdot \alpha(B) + \varepsilon \cdot [2k + \eta]$. Esto implica (2.49). ■

Lema 2.2.37. *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una constante K_ε y ortoproyectores finito-dimensionales P_1^ε y P_2^ε en H tal que*

$$n_1(v) \leq \varepsilon \|v\| + K_\varepsilon \|P_1^\varepsilon v\| \ , \ v \in H, \tag{2.51}$$

y

$$n_2(Vv_1 - Vv_2) \leq \varepsilon \|v_1 - v_2\| + K_\varepsilon \|P_2^\varepsilon(Vv_1 - Vv_2)\| \ , \ v_1, v_2 \in M. \tag{2.52}$$

Prueba. Supongamos que (2.51) no se cumple. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión de ortoproyectores $\{P_m\}$ tal que $P_m \to I$ fuertemente en H y

$$n_1(v_m) \geq \varepsilon_0 + c_m \|P_m v_m\| \ , \ m = 1, 2, \ldots \tag{2.53}$$

para alguna sucesión $\{v_m\} \subset H$ con la propiedad $\|v_m\| = 1$, donde $c_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$. De (2.53) tenemos que $\|P_m v_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$. Podemos también asumir que $v_m \to v$ débilmente en H para algún $v \in H$. Como

$$P_m v = P_m(v - v_m) + P_m v_m \to 0 \text{ débilmente en } H,$$

concluimos que $v = 0$. Esto implica que $n_1(v_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$ lo cual contradice (2.53). Así (2.51) es válido.

Para probar (2.52) notamos que el mismo argumento implica que

$$n_2(Vv_1 - Vv_2) \leq \frac{\varepsilon}{L} \|Vv_1 - Vv_2\| + K_\varepsilon \|P_2^\varepsilon(Vv_1 - Vv_2)\| \ , \ v_1, v_2 \in H.$$

Por lo tanto usando la propiedad de Lipschitz (ii) obtenemos (2.52). ■

NOTA 2.4. En la mayoría de las aplicaciones, las seminormas n_1 y n_2 son generadas por normas de espacios de Sobolev apropiados, digamos H_1 y H_2, tales que la inyección $H \subset H_i$, $i = 1, 2$ son compactos y tales que $|v|_{H_i} K_i \|v\|$, $i = 1, 2$. En este caso, el argumento de contradicción usado en el lema 2.2.37 puede ser evitado y las estimaciones explícitas para las constantes K_ε pueden ser dadas. De hecho, sea ε una constante dada y $P_1^\varepsilon, P_2^\varepsilon$ denotando proyecciones ortonormales sobre H, con las propiedades $|I - P_i^\varepsilon|_{\mathscr{L}(H,H_i)} \leq \varepsilon$ para $i = 1, 2$. Luego

$$n_1(v) = |v|_{H_1} \leq |(1 - P_1^\varepsilon)v|_{H_1} + |P_1^\varepsilon v|_{H_1} \leq \varepsilon \|v\| + K_1 \|P_1^\varepsilon v\| \ , \ v \in M,$$

y similarmente para $n_2(Vv_1 - Vv_2)$. Así, en este caso la constante K_ε no depende de ε y es igual al $\max\{K_1, K_2\}$, donde K_i denota normas del isomorfismo canónico $H \subset H_i$.

Lema 2.2.38. *Sea F un conjunto cerrado acotado en $\mathbb{R}^d$ equipado con la norma Euclidiana $|\cdot|$. Asuma que diam$F \leq 2r$ para algún $r > 0$. Entonces para cualquier $\alpha > 0$ existe un conjunto finito $\{x_k \ : \ k = 1, \ldots, n_\alpha\} \subset F$ tal que*

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n_\alpha} \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x - x_k| \leq \alpha r\} \text{ y } n_\alpha \leq \left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)^d.$$

Prueba. Como F es compacto en $\mathbb{R}^d$ existe un conjunto $\{x_k : k = 1, \ldots, n_\alpha\} \subset F$ tal que (i) para cualquier $y \in F$ podemos encontrar x_i tal que $|y - x_i| < \alpha r$ y (ii) $|x_j - x_i| \geq \alpha r$ para cualquier $i \neq j$. Así necesitamos probar solamente la estimación para n_α. Considere las bolas

$$B_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \, : \, |x - x_k| < \frac{\alpha r}{2} \right\}, \; k = 1, \ldots, n_\alpha.$$

Estas bolas poseen las propiedades $B_k \cap B_j = \emptyset$ para $k \neq j$, $k, j = 1, \ldots, n_\alpha$, y

$$B_k \subset \tilde{B} \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^d \, : \, |x - y_0| \leq 2r + \frac{\alpha r}{2} \right\}, \; k = 1, \ldots, n_\alpha,$$

donde y_0 es un punto de F. Por lo tanto $n_\alpha.\text{Vol}(B_1) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \text{Vol}(B_k) \leq \text{Vol}(\tilde{B})$. Esto implica la estimación para n_α. ■

Prueba del Teorema 2.2.35. El lema 2.2.36 implica que $\alpha(M) \leq \eta \cdot \alpha(M)$. Desde que $0 < \eta < 1$, esto es posible si y solo si $\alpha(M) = 0$. Así M es compacto.

El lema 2.2.37 nos permite reescribir (2.46) en la siguiente forma

$$\|Vv_1 - Vv_2\| \leq (\eta + \delta) \|v_1 - v_2\| + \tilde{K} \sqrt{\|P_1(v_1 - v_2)\|^2 + \|P_2(Vv_1 - Vv_2)\|^2} \qquad (2.54)$$

para cada $v_1, v_2 \in M$ y cualquier $\delta > 0$, donde la constante $\tilde{K}$ y los ortoproyectores P_1 y P_2 pueden depender de δ.

Asuma que $\{F_i : i = 1, \ldots, N(M, \varepsilon)\}$ es la cobertura mínima de M por sus subconjuntos cerrados con un diámetro menor o igual a 2ε. Sea

$$\tilde{F}_i = \{(P_1 y; P_2 V y) \, : \, y \in F_i\} \subset \tilde{H} \equiv P_1 H \times P_2 H.$$

Es fácil ver que diam$\tilde{F}_i \leq (1+L)$diam$F_i \leq 2\varepsilon(1+L)$. Como $\tilde{H}$ es infinito-dimensional, la aplicación del lema 2.2.38 para el conjunto $\tilde{F}_i$ con el parámetro α reemplazado por $\frac{\alpha}{1+L}$ nos da la existencia de un conjunto finito $\left\{x_k^j \, : \, k = 1, \ldots, n_{\alpha,i}\right\} \subset F_i$ tal que

$$F_i \subset \bigcup_{k=1}^{n_{\alpha,i}} B_k^i \, , \; B_k^i \equiv \left\{ v \in F_i \, : \, \left\|P_1(v - x_k^i)\right\|^2 + \left\|P_2(Vv - Vx_k^i)\right\|^2 \leq (\alpha\varepsilon)^2 \right\}$$

y

$$n_{\alpha,i} \leq \left(1 + \frac{4(1+L)}{\alpha}\right)^d, \; d = d(\delta) = \dim P_1 + \dim P_2 \, , \; i = 1, \ldots, N(M, \varepsilon).$$

Si $y_1, y_2 \in B_k^i$, entonces de (2.54) tenemos

$$\|Vy_1 - Vy_2\| \leq (\eta + \delta) \cdot 2\varepsilon + \tilde{K} \cdot 2\alpha\varepsilon = 2\tilde{\eta}\varepsilon,$$

donde $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\delta, \alpha) \equiv \eta + \delta + \alpha \tilde{K}$. Así diam$VB_k^i \leq 2\tilde{\eta}\varepsilon$. Puesto que como

$$M \subset VM \subset \bigcup_{i=1}^{N(M,\varepsilon)} \bigcup_{k=1}^{n_{\alpha,i}} VB_k^i,$$

tenemos que

$$N(M, \tilde{\eta}\varepsilon) \leq \left(1 + \frac{4(1+L)}{\alpha}\right)^d \cdot N(M, \varepsilon).$$

Como $\eta < 1$, podemos escoger δ y α tal que $\tilde{\eta} < 1$ y luego de aplicar iterativamente la desigualdad anterior con $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \tilde{\eta}, \ldots, \varepsilon = \tilde{\eta}^{n-1}$ obtenemos la desigualdad

$$N(M, \tilde{\eta}^n) \leq \left(1 + \frac{4(1+L)}{\alpha}\right)^{dn} \cdot N(M, 1)\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $n(\varepsilon)$ tal que $\tilde{\eta}^n \leq \varepsilon < \tilde{\eta}^{n-1}$. Así

$$N(M, \varepsilon) \leq \left(1 + \frac{4(1+L)}{\alpha}\right)^{dn(\varepsilon)} \cdot N(M, 1) \text{ con } n(\varepsilon) \leq 1 + \frac{\ln \varepsilon}{\ln \tilde{\eta}}.$$

Finalmente, estimando la dimensión fractal de la fórmula en (2.41) se sigue (ver también [7, Sección 1.8])

$$\dim_f M \leq d \cdot \ln\left(1 + \frac{4(1+L)}{\alpha}\right) \cdot \left[\ln \frac{1}{\eta + \delta + \alpha\tilde{K}}\right]^{-1}, \tag{2.55}$$

donde los parámetros δ y α son escogidos de manera que $\eta + \delta + \alpha\tilde{K} < 1$ y $d \equiv \dim P_1 + \dim P_2$ depende de δ. Así $\dim_f M < \infty$. Además, la relación (2.55) implica la estimación (2.47). El punto es que en este caso podemos usar (2.55) con $\delta = 0$ y $\tilde{K} = \sqrt{2}K$ y si escogemos $\alpha(1-\eta)/(2\sqrt{2}K)$, obtenemos (2.47). ■

2.2.7. Sistemas gradiente

El estudio de la estructura de los atractores globales es un importante problema desde el punto de vista de las aplicaciones. No hay enfoques universales resolviendo este problema. Es bien conocido que aún en casos finito-dimensionales un atractor puede poseer una estructura extremadamente complicada. Sin embargo, algunos conjuntos que pertenecen al atractor pueden ser fácilmente señalados. Por ejemplo, cada punto estacionario ($S_t x = x$ para todo $t > 0$) pertenece al atractor del sistema. El teorema 2.2.22 muestra que cualquier trayectoria acotada también se encuentra en el atractor global.

Definición 2.2.39. Sea $\mathscr{N}$ el conjunto de puntos estacionarios del sistema dinámico (X, S_t):

$$\mathscr{N} = \{v \in X \,:\, S_t v = v \text{ para todo } t \geq 0\}\,.$$

Definimos la *superficie inestable* $\mathscr{M}^u(\mathscr{N})$ emanando desde el conjunto $\mathscr{N}$ como un conjunto de todos los $y \in X$ tales que existe una trayectoria completa $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ con las propiedades

$$u(0) = y \quad , \quad \lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}_X(u(t), \mathscr{N}) = 0.$$

Es claro que $\mathscr{M}^u(\mathscr{N})$ es un conjunto invariante. Es también fácil probar la siguiente afirmación (ver por ejemplo, [4, 7]).

Proposición 2.2.40. *Sea $\mathscr{N}$ el conjunto de puntos estacionarios del sistema dinámico (X, S_t) que posee un atractor global A. Entonces $\mathscr{M}^u(\mathscr{N}) \subset A$.*

Para sistemas gradientes es posible probar que la superficie inestable coincide con el atractor; es decir, $\mathscr{M}^u(\mathscr{N}) = A$.

Damos la siguiente definición.

Definición 2.2.41. Sea $Y \subseteq X$ un conjunto invariante hacia adelante del sistema dinámico (X, S_t).

- El funcional continuo $\Phi(y)$ definido sobre Y es llamado la *función Lyapunov* para el sistema dinámico (X, S_t) sobre Y si y solo si la función $t \mapsto \Phi(S_t y)$ es una función no creciente para cualquier $y \in Y$.
- La función Lyapunov $\Phi(y)$ es llamada *estricta* sobre Y si la ecuación $\Phi(S_t y) = \Phi(y)$ para todo $t > 0$ y para algún $y \in Y$ implica que $S_t y = y$ para todo $t > 0$; esto es, y es un punto estacionario de (X, S_t).
- El sistema dinámico (X, S_t) es llamado *gradiente* si existe una función Lyapunov estricta para (X, S_t) sobre todo el espacio de fase X.

***Ejemplo* 2.3.** El sistema $(\mathbb{R}^d, S_t)$ generado por la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = \nabla F(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0,$$

posee una función Lyapunov estricta $\Phi(x) = -F(x)$ sobre $\mathbb{R}^d$ siempre que la ecuación $\nabla F(x) = 0$ tenga raíces aisladas.

Tenemos el siguiente resultado sobre la existencia de un atractor global para sistemas con una función Lyapunov.

Proposición 2.2.42. *Sea un sistema dinámico (X, S_t) un punto disipativo y asintóticamente suave. Asuma que existe una función Lyapunov $\Phi(x)$ para (X, S_t) sobre X tal que (i) es acotada superiormente sobre cualquier subconjunto acotado de X y (ii) el conjunto $\Phi_R = \{x : \Phi(x) \leq R\}$ es acotado para todo R. Entonces (X, S_t) posee un atractor global compacto.*

Prueba. Cualquier conjunto acotado B se encuentra en el conjunto Φ_R para algún $R = R_B$. Es claro que $S_t\Phi_R \subseteq \Phi_R$ para cualquier R. Por lo tanto $\gamma_B^0 \subset \Phi_R$ y luego γ_B^0 es acotado. Así podemos aplicar el Teorema 2.2.24. ■

2.2.7.1. Estructura geométrica del atractor

Tenemos el siguiente resultado sobre la estructura de un atractor global (para la prueba referimos [4, 7, 17, 22]).

Teorema 2.2.43. *Un sistema dinámico (X, S_t) posee un atractor global compacto A. Suponga que existe una función Lyapunov estricta sobre A. Entonces $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N})$. además, el atractor global A consiste de todas las trayectorias $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que*

$$\lim_{t\to-\infty} \text{dist}_X(u(t), \mathscr{N}) = 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} \text{dist}_X(u(t), \mathscr{N}) = 0. \tag{2.56}$$

La siguiente afirmación es crítica para los modelos de von Karman con presión conservativa. Su principal ventaja (en contraste con otras premisas sobre la existencia de un atractor global) es que no asume propiedades disipativas cualesquiera del sistema en forma explícita.

Corolario 2.2.44. *Suponga que (X, S_t) es un sistema dinámico gradiente asintóticamente suave. Asuma que su función Lyapunov $\Phi(x)$ es acotada superiormente sobre cualquier subconjunto acotado de X y el conjunto $\Phi_R = \{x : \Phi(x) \le R\}$ es acotado para cualquier R. Si el conjunto $\mathscr{N}$ de puntos estacionarios de (X, S_t) es acotado, entonces (X, S_t) posee un atractor global compacto $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N})$.*

Prueba. Escogemos R_0 tal que $\mathscr{N} \subset \Phi_{R_0}$. Por el Teorema 2.2.24 el sistema dinámico (Φ_R, S_t) posee un atractor global compacto A_R para cualquier R. Si $R \ge R_0$, entonces por el Teorema 2.2.43 tenemos que $A_R = \mathscr{M}^u(\mathscr{N})$. Así A_R no depende de R para $R \ge R_0$ y es atractor global para (X, S_t). ∎

NOTA 2.5. Se sigue de la primera igualdad en (2.56) que bajo la hipótesis del Corolario 2.2.44 la siguiente relación es válida,

$$\sup\{\Phi(u) \,:\, u \in A\} \le \sup\{\Phi(u) \,:\, u \in \mathscr{N}\}. \tag{2.57}$$

Si la función Lyapunov $\Phi(u)$ es topológicamente equivalente a la norma del espacio de fase X, y la existencia de un atractor global es garantizada, la desigualdad en (2.57) puede ser usada en orden de proveer una cota superior para el tamaño de la bola absorbente. De hecho, depués, aplicaremos este método en orden de obtener cotas uniformes (con respecto a los parámetros del problema) para el atractor.

Si el sistema (X, S_t) no es gradiente pero posee una función Lyapunov (que no es estricta), no podemos garantizar que $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N})$. Sin embargo, podemos probar la siguiente afirmación (ver también [7, Teorema 6.2, Capítulo 1] y $[13, Teorema 2{,}30]$).

Teorema 2.2.45. *Sea (X, S_t) un sistema dinámico asintóticamente suave en un espacio de Banach X. Asuma que existe una función Lyapunov $\Phi(x)$ para (X, S_t) sobre X tal que $\Phi(x)$ es acotada superiormente sobre cualquier subconjunto acotado de X y el conjunto $\Phi_R = \{x : \Phi(x) \le R\}$ es acotado para cualquier R. Sea $\mathscr{B}$ el conjunto* *de elementos de $x \in X$ tal que existe una trayectoria completa $\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ con las propiedades $u(0) = x$ y $\Phi(u(t)) = \Phi(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si B es acotado, entonces (X, S_t) posee un atractor compacto global y $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{B})$.*

***Prueba**.* COmo en la prueba del Corolario 2.2.44 escogemos R_0 tal que $\mathscr{B} \subset \Phi_{R_0}$. Por el Teorema 2.2.24 el sistema dinámico (Φ_R, S_t) posee un atractor global compacto A_R para todo R. Si $R \geq R_0$, entonces $\mathscr{B} \subset \Phi_R$ y por lo tanto (por el Teorema 1.6.2 de [7]) $A_R = \mathscr{M}^u(\mathscr{B})$ para todo $R \geq R_0$. Así $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{B})$ es un atractor global para (X, S_t). ■

La siguiente afirmación describe el comportamiento a lo largo del tiempo de trayectorias individuales (para la prueba referimos [4] o [7]). Esta propiedad es a menudo referida como *estabilidad fuerte* del conjunto de equilibrios.

Teorema 2.2.46. *Suponga que un sistema dinámico gradiente (X, S_t) posee un atractor global compacto A. Entonces para cualquier $x \in X$ tenemos*

$$\lim_{t \to +\infty} \text{dist}_X(S_t x, \mathscr{N}) = 0; \tag{2.58}$$

esto es, cualquier trayectoria estabiliza al conjunto $\mathscr{N}$ de puntos estacionarios. En particular, esto significa que el atractor minimal global $A_{\text{mín}}$ coincide con el conjunto de los puntos estacionarios, $A_{\text{mín}} = \mathscr{N}$.

Asuma que $\mathscr{N} = \{z_1, \dots, z_n\}$ es un conjunto finito. En Este caso $A = \bigcup_{i=1}^n \mathscr{M}^u(z_i)$, donde $\mathscr{M}^u(z_i)$ es una superficie inestable del punto estacionario z_i. Esto es decir que, $\mathscr{M}^u(z_i)$ consiste de todos los $y \in X$ tales que existe una trayectoria completa $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ con las propiedades $u(0) = y$ y $u(t) \to z_i$ cuando $t \to -\infty$.

Del teorema 2.2.46 obtenemos la siguiente afirmación.

Corolario 2.2.47. *Suponga que un sistema dinámico gradiente (X, S_t) posee una atractor global compacto A y $\mathscr{N}$ es un conjunto finito. Entonces*

(i) *El atractor global A consiste de todas las trayectorias completas $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ conectando pares de puntos estacionarios: cualquier $u \in A$ pertenece a alguna trayectoria completa γ y para cualquier $\gamma \subset A$ existe un par $\{z, z^*\} \subset \mathscr{N}$ tal que*

$$u(t) \to z \textit{ cuando } t \to -\infty \textit{ y } u(t) \to z^* \textit{ cuando } t \to +\infty.$$

(ii) *Para cualquier $v \in X$ existe un punto estacionario z tal que $S_t v \to z$ cuando $t \to +\infty$.*

NOTA 2.6. Asuma que la hipótesis del Corolario 2.2.47 es válida. Introduzca m_0 distintos valores $\Phi_1 < \Phi_2 < \ldots < \Phi_{m_0}$ del conjunto $\{\Phi(x) : x \in \mathscr{N}\}$ y sea

$$\mathscr{N}^j = \{x \in \mathscr{N} : \Phi(x) = \Phi_j\} \ , \ j = 1, \dots, m_0.$$

Entonces los conjuntos $\mathscr{N}^1, \ldots, \mathscr{N}^{m_0}$ proveen la *descomposición Morse* del atractor A; esto es, (i) los subconjuntos de $\mathscr{N}^j$ son compactos, invariantes, y disjuntos; y (ii) para cualquier $x \in A \setminus \bigcup_j \mathscr{N}^j$ y toda trayectoria completa $\gamma_x \subset A$ a través de x existe $k > l$ tal que $\alpha(\gamma_x) \in \mathscr{N}^k$ y $\omega(\gamma_x) \in \mathscr{N}^l$, donde $\alpha(\gamma_x)$ y $\omega(\gamma_x)$ son conjuntos α- y ω-límite (ver (2.21)).

El siguiente teorema describe algunas propiedades adicionales de atractores globales par sistemas gradientes. Antes de enunciarlo, se introduce la siguiente definición.

Definición 2.2.48. Sea X un espacio de banach. Suponga que el operador evolución S_t de un sistema dinámico (X, S_t) es de clase C^1; es decir, $S_t u$ tiene una derivada de Fréchet continua con respecto a $u \in X$ para cada $t > 0$. Un punto de equilibrio z del sistema dinámico (X, S_t) es llamado *hiperbólico* si la derivada de fréchet $S' \equiv DS_1(z)$ de $S_t z$ en el momento $t = 1$ es un operador lineal en X con el espectro $\sigma(S')$ que posee la propiedad

$$\sigma(S') \cap \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} = .$$

también definimos el índice ind(z) (de inestabilidad) del equilibrio z como una dimensión del subespacio espectral del operador S' correspondiente al conjunto $\sigma_+(S') \equiv \{z \in \sigma(S') : |z| > 1\}$.

La siguiente afirmación es probada en [4].

Teorema 2.2.49. *Suponga que un sistema dinámico gradiente (X, S_t) en un espacio de Banach X con una función Lyapunov estricta $\Phi(u)$ posee las siguientes propiedades.*

(i) *Admite un atractor global compacto A.*

(ii) $S_t \in C^{1+\alpha}$ *y existe una vecindad $\mathscr{O} \supset A$ tal que*

$$\|DS_t(u) - DS_t(v)\|_{\mathscr{L}(X,X)} \leq C_T \|u - v\|_X^\alpha \ , \ u, v \in \mathscr{O} \ , \ t \in [0, T].$$

(iii) $(t, u) \mapsto S_t u$ *es continua sobre $\mathbb{R}_+ \times A$.*

(iv) *Los operadores S_t son inyectivos sobre A para cualquier $t > 0$ y S_t^{-1} son continuos sobre A.*

(v) *Las derivadas de Fréchet $DS_t(u)$ de $S_t u$ en cualquier punto $u \in A$ tiene núcleo cero.*

(vi) *El conjunto $\mathscr{N} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ de puntos de equilibrio es finito y cualquier punto $z_j \in \mathscr{N}$ es hiperbólico.*

Sea la indexación de los puntos de equilibrio tal que

$$\Phi(z_1) \leq \Phi(z_2) \leq \ldots \leq \Phi(z_n)$$

y sea $\mathscr{M}_k = \bigcup_{j=1}^{k} M^u(z_j)$, $\mathscr{M}_0 = \emptyset$, *donde* $M^u(z_j)$ *denota la superficie inestable emanando desde* z_j. *Asuma también que la función* $t \mapsto \Phi(S_t u)$ *es estrictamente decreciente para* $u \notin \mathscr{N}$.

Entonces $A = \mathscr{M}_n$ *y las siguientes propiedades se verifican.*

(a) $M^u(z_i)'capM^n(z_j) = \emptyset$ *cuando* $i \neq j$.

(b) $\mathscr{M}_k$ *es un conjunto invariante compacto.*

(c) $\partial M^u(z_i)equiv\overline{M^u(z_i)} \setminus M^u(z_i)$ *es un conjunto invariante y* $\partial M^u(z_i) \subset \mathscr{M}_{i-1}$.

(d) *Para cualquier conjunto compacto* $K \subset M^n(z_i) \setminus \{z_i\}$ *tenemos*

$$\lim_{t\to+\infty} \max \{\mathsf{dist}_X(S_t k, \mathscr{M}_{i-1}) : k \in K\} = 0.$$

(e) *Todo conjunto* $M^u(z_i)$ *es una superficie* C^1 *de dimensión finita* d_i, *esta superficie es difeomórfica a* $\mathbb{R}^{d_i}$, *y la inmersión* $M^u(z_i)subsetX$ *es de clase* C^1 *en una vecindad de cualquier punto* $v \in M^u(z_i)$. *Además* $d_i = \dim E_+(z_i)$, *donde* $E_+(z_i)$ *es el subespacio espectral del operador* $S' = DS_1(z_i)$ *el cual corresponde al conjunto* $\{\lambda : |\lambda| > 1\}$.

Notamos que la propiedad de inyectividad para S_t *asumida en* (iv) *depende de la propiedad de singularidad atrasada de* S *en el atractor.*

2.2.7.2. Tasa de convergencia de los atractores globales

En muchos casos es importante conocer cuan rápido las trayectorias partiendo de conjuntos acotados convergen a atractores globales. Para sistemas gradientes esta tasa está relacionada a las tasas de convergencia de las trayectorias individuales de los equilibrios.

El resultado establecido debajo provee condiciones suficientes para la tasa exponencial de estabilización del atractor junto con algunas propiedades adicionales del atractor (ver por ejemplo [4, 17] y también los Teoremas 4.7 y 4.8 en [29]).

Teorema 2.2.50. *Sea* X *un espacio de Banach y las hipótesis del corolario 2.2.44 son válidas. Suponga que* (i) *un perador evolución* S_t *es* C^1, (ii) *el conjunto* $\mathscr{N}$ *de los puntos de equilibrio es finito y todos los equilibrios son hiperbólicos, y* (iii) *existe una función Lyapunov* $\Phi(x)$ *tal que* $\Phi(S_t x) < \Phi(x)$ *para todo* $x \in X$, $x \notin \mathscr{N}$ *y para todo* $t > 0$. *Entonces*

- *Para cualquier* $y \in X$ *existe* $e \in \mathscr{N}$ *tal que*

$$\|S_t y - e\|_X \le C_y e^{-\omega t}\,,\ t > 0.$$

Además, par cualquier conjunto acotado B en X tenemos

$$\sup\{\text{dist}(S_t y, A) \,:\, y \in B\} \leq C_B e^{-\omega t}\,,\; t > 0. \tag{2.59}$$

Aquí A es un atractor global, C_y, C_B y ω son constantes positivas, y ω en (2.59) *depende del mínimo, sobre $e \in \mathscr{N}$, de las distancias del espectro de $D[S_1 e]$ al círculo unitario en $\mathbb{C}$.*

- *Si asumimos en adición que (i) S_1 es inyectivo sobre el atractor y (ii) el mapeo lineal $D[S_1 y]$ es inyectivo para todo $y \in A$, entonces para cada $e \in \mathscr{N}$ la superficie inestable $\mathscr{M}^u(e)$ es una inmersión C^1-subsuperficial de X sobre la dimensión finita* ind(e)*, la cual implica que $\dim_H A = \max_{e\in\mathscr{N}}$* ind$(e)$.

Notamos que la prueba de este resultado (ver [4] o [17]) se basa en la consideración geométrica del comportamiento de las trayectorias en una vecindad de los puntos de equilibrio. La suposición crítica para esto es que la evolución S_t es C^1 y estos equilibrios son finitos e hiperbólicos. Las suposiciones previas nos permiten reducir el problema de la convergencia en una vecindad de equilibrios a un problema lineal.

Nuestro objetivo principal en esta sección es presentar un resultado (ver el teorema 2.2.52) que da un estimado de la tasa de convergencia para el atractor global bajo la suposición de que estimaciones similares son conocidas es pequeñas vecindades de puntos estacionarios. Para nuestro mejor conocimiento el primer resultado en esta dirección ha sido obtenido por Kostin [21] para el caso de sistemas dinámicos discretos. Inspirado por la técnica desarrollada en [21] obtenemos un resultado similar para sistemas de tiempo continuo en [13].

Nuestra principal suposición en esta sección es la siguiente.

Suposición 2.2.51. (X, S_t) es un sistema dinámico sobre un espacio de Banach X que posee las siguientes propiedades:

- Existe un atractor global compacto $A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N})$, donde $\mathscr{N}$ es el conjunto de todos los equilibrios (no asumimos que $\mathscr{N}$ es finito).
- Existe una función Lyapunov estricta sobre X tal que (i) $\Phi(x)$ es acotado superiormente sobre cualquier subconjunto acotado de X, (ii) el conjunto $\Phi_R = \{x : \Phi(x) < R\}$ es acotado para todo R, y (iii) el conjunto $\{\Phi(x) : x \in \mathscr{N}\}$ es finito y $\Phi_1 < \Phi_2 < \ldots < \Phi_m$ son sus m distintos valores.
- Existen constantes $c_R \geq 1$ y $L_R \geq 0$ tal que

$$\|S_t y_1 - S_t y_2\|_X \leq c_R e^{L_R t} \|y_1 - y_2\|_X \text{ para cualquier } y_1, y_2 \in \Phi_R.$$

- Para todo conjunto $\mathscr{N}^j = \{x \in \mathscr{N} : \Phi(x) = \Phi_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, existe una vecindad $\mathscr{O}$ de $\mathscr{N}^j$ y una función continua decreciente $\Psi_j : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que la propiedad $S_t z \in \Omega \in \mathscr{O}_j$ para todo $t \in [0, T]$ implica que

$$\text{dist}(S_t z, \mathscr{M}^u(\mathscr{N}^j)) \leq \Psi_j(t)\,,\; t \in [0, T].$$

Notamos que bajo la suposición 2.2.51 los conjuntos $\mathscr{N}^j$ proveen la descomposición de Morse del atractor A.

Sea $\varepsilon > 0$ escogido tal que

$$\varepsilon < \min_i \{\Phi_{i+1} - \Phi_i\} \text{ y } \varepsilon < \frac{1}{2} \min_i \left\{ \Phi_i - \sup_{u \in A \setminus \mathscr{O}_i} \Phi(u) \right\}, \tag{2.60}$$

donde tenemos introducidos los subconjuntos

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{M}^u(\mathscr{N}^j)\,,\ n = 1, 2, \ldots, m,$$

del atractor A. Es claro que $A = A_m$.

Bajo la suposición 2.2.51 en el espacio X consideramos los siguientes conjuntos

$$\mathscr{B}_i = \{u \in X \ :\ \Phi(u) < \Phi_i - \varepsilon\}\ ,\ i = 2, \ldots, m,$$

y $\mathscr{B}_{m+1} = \{u \in X\ :\ \Phi(u) < R_*\}$, donde R_* es escogido de manera que el atractor A pertenece $\mathscr{B}_{m+1}$. Es claro que todo conjunto B_i es invariante hacia adelante. Uno puede mostrar que para $n = 1, \ldots, m$ el conjunto A_n es un atractor global para la restricción $(\mathscr{B}_{n+1}, S_t)$ de (X, S_t) sobre $\mathscr{B}_{n+1}$.

Teorema 2.2.52. *Bajo la suposición 2.2.51 existen números $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_m < \infty$ tal que*

$$\sup_{y \in \mathscr{B}_{k+1}} \text{dist}(S_{T_k+t}y, A_k) \le \Psi_k(t)\,,\ k = 1, 2, \ldots, m\,,\ t \ge 0,$$

donde $\Psi_1(t) = \psi_1(t)$ y

$$\Psi_{k+1}(t) = C_{R_*} e^{L_{R_*}T_k} \cdot \left[\psi_{k+1}(t) + sup_{s\in[0,t]} \min\left\{\psi_{k+1}(s) e^{L_{R_*}(t-s)}; \Psi_k(t-s)\right\}\right]$$

para todo $k = 1, \ldots, m-1$. Además, para cualquier conjunto acotado B en X existe $t_B \ge 0$ tal que

$$\sup_{y \in B} \text{dist}(S_t y, A) \le \Psi_m(t - t_B)\,,\ t \ge t_B,$$

donde A es un atractor global para el sistema (X, S_t).

Prueba. Referimos [13, Capítulo 2]. ■

La siguiente afirmación da una condición para la tasa exponencial de atracción de conjuntos acotados.

Corolario 2.2.53. *Asuma que la suposición 2.2.51 es válida con la función $\psi_j(t) = c_j e^{-\gamma_j t}$, donde c_j y γ_j son constantes positivas, $j = 1, \ldots, m$. Luego existe $\gamma_0 > 0$ tal que para cualquier conjunto acotado B podemos encontrar constantes positivas C_B y t_B tales que*

$$\sup_{y \in B} \text{dist}(S_t y, A) \le C_B e^{-\gamma_0 t}\,,\ t \ge t_B.$$

Prueba. Es suficiente mostrar que toda función $\Psi_k(t)$ de la premisa del teorema 2.2.52 admite la estimación $\Psi_k(t) \leq C_k e^{-\beta_k t}$ para todod $k = 1, \dots, m$, con los positivos C_k y β_k. Esto se puede terminar por inducción sobre k (ver [13, Capítulo 2] para los detalles). ■

Suposición 2.2.54. Sean X, Y espacios de Banach reflexivos y X está inmerso compactamente en Y. Dotamos el espacio $H = X \times Y$ con la norma

$$|y|_H^2 = |u_0|_X^2 + |u_1|_Y^2 \ , \ y = (u_0; u_1).$$

Asumimos que (H, S_t)es un sistema dinámico sobre $H = X \times Y$ con el operador evolución de la forma

$$S_t y = (u(t); u_t(t)) \, , \ y = (u_0; u_1) \in H, \tag{2.61}$$

donde la función $u(t)$ posee la propiedad

$$u \in C(\mathbb{R}_+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_+, Y).$$

La estructura del espacio de fase H y el operador evolución S_t en la suposición 2.2.54 está motivada por el estudio de los sistemas generados por la ecuación de segundo orden en tiempo en $X \times Y$ (ver por ejemplo (2.89)).

Proposición 2.2.55. *Sea válida la suposición 2.2.54. Suponga que el sistema dinámico (H, S_t) es cuasi-estable sobre todo conjunto acotado invariante hacia adelante $\mathscr{B}$ en H. Entonces (H, S_t) es asintóticamente suave.*

Prueba. Sea

$$\tilde{X} = \text{Clausura} \left\{ v \in X \ : \ |v|_{\tilde{X}} \equiv \mu_X(v) + |v|_\gamma < \infty \right\}. \tag{2.62}$$

donde $\mu_X(\cdot)$ es una seminorma compacta sobre el espacio X. Uno puede ver que X está inmerso compactamente en el espacio de Banach $\tilde{X}$. Por lo tanto por el Teorema 2.2.2 tenemos que el espacio

$$W^1_{\infty,2}(0, T; X, Y) = \{ f \in L_\infty(0, T; X) \ : \ f' \in L_2(0, T; Y) \}$$

está inmerso compactamente en $C(0, T; \tilde{X})$. Esto implica que la pseudométrica $\rho^t_{\mathscr{B}}$ en $C(0, t; H)$ definida por la fórmula

$$\rho^t_{\mathscr{B}} \left(\{S_\tau y_1\}, \{S_\tau y_2\} \right) = c(t) \sup_{\tau \in [0,t]} \mu_X(u^1(t) - u^2(t))$$

es precompacta (con respecto a H). Aquí denotamos por $\{S_\tau y_i\}$ al elemento de $C(0, t; H)$ dado por la función $y_i(\tau) = S_\tau y_i \equiv (u^i(t); u^i_t(t); \theta^i(t))$. Por definición como el sistema es cuasi-estable se tiene que

$$|S_t y_1 - S_t y_2|_H^2 \leq b(t) \cdot |y_1 - y_2|_H^2 + c(t) \cdot \sup_{0 \leq x \leq t} \left[\mu_X(u^1(s) - u^2(s)) \right]^2, \tag{2.63}$$

entonces $\rho^t_{\mathscr{B}}$ satisface las hipótesis de la Proposición 2.2.17 con $K_B(t) = b(t)$. Esto implica el resultado. ■

Corolario 2.2.56. *Dado el sistema (H, S_t) gradiente y asintóticamente suave. si el funcional de Lyapunov asociado Ψ cumple que:*

$$\Psi(z) \to \infty \Leftrightarrow \|z\|_H \to \infty,$$

y el conjunto de puntos estacionarios $\mathscr{N}$ es acotado en H, entonces (H, S_t) es asintóticamente compacto y posee un atractor global $A \subset H$ dado por

$$A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N}),$$

donde $\mathscr{M}^u(\mathscr{N})$ representa a la variedad de puntos $<\in \mathscr{N}$.

Corolario 2.2.57. *Si el sistema (H, S_t) es disipativo y satisface las hipótesis de la proposición 2.2.55, entonces posee un atractor global compacto.*

Prueba. Por la Proposición 2.2.55 el sistema (H, S_t) es asintóticamente suave. Así el resultado se sigue del Teorema 2.2.23. ■

Teorema 2.2.58. *Sea válida la suposición 2.2.54. Asuma que el sistema dinámico (H, S_t) posee un atractor global compacto A y es cuasi-estable sobre A. Entonces el atractor A tiene una dimensión fractal finita $\dim_f^H A$.*

Prueba. La idea de esta prueba está basada en el método de trayectorias "cortas" (ver por ejemplo [13]).

Aplicamos el Teorema 2.2.35 en el espacio $H_T = H \times W_1(0, T)$ con una apropiado T. Aquí

$$W_1(0,T) = \left\{ z \in L_2(0,T;X) : |z|^2_{W_1(0,T)} \equiv \int_0^T \left(|z(t)|^2_X + |z_t(t)|^2_Y \right) dt < \infty \right\}. \tag{2.64}$$

La norma en H_T es dada por

$$\|U\|^2_{H_T} = |y|^2_H + |z|^2_{W_1(0,T)}\ ,\ U = (y; z)\ ,\ y = (u_0; u_1; \theta_0). \tag{2.65}$$

Sean $y_i = (u_0^i; u_1^i; \theta_0^i)$, $i = 1, 2$, dos elementos del atractor A. Denotamos

$$S_t y_i = (u^i(t); u_t^i(t); \theta^i(t))\ ,\ t \geq 0\ ,\ i = 1, 2,$$

y $Z(t) = S_t y_1 - S_t y2 \equiv (z(t); z_t(t); \xi(t))$, donde

$$(z(t); z_t(t); \xi(t)) \equiv (u^1(t) - u^2(t); u_t^1(t) - u_t^2(t); \theta^1(t) - \theta^2(t)).$$

Integrando (2.63) desde T a $2T$ con respecto a t, obtenemos que

$$\int_T^{2T} |S_t y_1 - S_t y_2|^2_H\, dt \leq \tilde{b}_T\, |y_1 - y_2|^2_H + \tilde{c}_T \sup_{0 \leq s \leq 2T} [\mu(x)(z(s))]^2, \tag{2.66}$$

donde

$$\tilde{b}_T = \int_T^{2T} b(t)dt \quad \text{y} \quad \tilde{c}_T = \int_T^{2T} c(t)dt.$$

También se sigue de (2.63) que

$$|S_T y_1 - S_T y_2|_H^2 \leq b(T) \cdot |y_1 - y_2|_H^2 + c(T) \cdot \sup_{0\leq s\leq T} [\mu(x)(z(s))]^2$$

y combinando con (2.66) se tiene

$$|S_T y_1 - S_T y_2|_H^2 + \int_T^{2T} |S_t y_1 - S_t y_2|_H^2 \, dt \leq b_T \, |y_1 - y_2|_H^2 + c_T \sup_{0\leq s\leq 2T} [\mu_X(z(s))]^2, \quad (2.67)$$

donde

$$b_T = b(T) + \int_T^{2T} b(t)dt \quad \text{y} \quad c_T = C(T) + \int_T^{2T} c(t = dt. \quad (2.68)$$

Sea A el atractor global. Considere en el espacio H_T el conjunto

$$A_T := \{U \equiv (u(0); u_t(0); \theta(0); u(t) \, , \, t \in [0,T]) \; : \; (u(0); u_t(0); \theta(0)) \in A\} \, ,$$

donde $u(t)$ es la primera componente de $S_t y(0)$ con $y(0) = (u(0); u_t(0); \theta(0))$, y defina el operador $V : A_T \mapsto H_T$ por la fórmula

$$V \; : \; (u(0); u_t(0); \theta(0); u(t)) \mapsto (S_T y(0); u(T+t)).$$

Es claro que V es de Lipschitz sobre A_T y $V A_T = A_T$.

Como el espacio $\tilde{X}$ dado por (2.62) posee las propiedades

$$X \subset \tilde{X} \subset Y \;\text{ y }\; X \subset \tilde{X} \text{ es compacto},$$

por el argumento de la contradicción se sigue que

$$|\mu_X(u)|^2 \leq \varepsilon \, |u|_X^2 + C_\varepsilon \, |u|_Y^2 \;\text{ para cualquier } \varepsilon > 0. \quad (2.69)$$

Por lo tanto de la relación producidad por la cuasi-estabilidad del sistema

$$|S_t y_1 - S_t y_2|_H^2 \leq a(t) \cdot |y_1 - y_2|_H^2 \quad (2.70)$$

tenemos lo siguiente

$$\sup_{0\leq s\leq 2T} [\mu_X(z(s))]^2 \leq \frac{b_T}{c_T} \, |y_1 - y_2|_H^2 + C(a_T, b_T, c_T) \sup_{0\leq s\leq 2T} |z(s)|_Y^2 \, ,$$

donde $a_T = \sup_{0\leq s\leq 2T} a(s)$ y b_T, c_T son dados por (2.68). Consecuentemente, de (2.67) obtenemos

$$\|VU_1 - VU_2\|_{H_T} \leq \eta_T \, \|U_1 - U_2\|_{H_T} + K_T \cdot (n_T(U_1 - U_2) + n_T(VU_1 - VU_2)),$$

para cualquier $U_1, U_2 \in A_T$, donde $K_T > 0$ es una constante (dependiendo de a_T, b_T, c_T, de las propiedades de inmersión de X hacia Y, y de la seminorma μ_X), y

$$\eta_T^2 = 2b_T = 2b(T) + 2\int_T^{2T} b(t)dt. \tag{2.71}$$

La seminorma n_T tiene la forma $n_T := \sup_{0\leq s\leq T} |u(s)|_\gamma$. Como $W_1(0,T)$ está inmerso compactamente en $C(0,T;Y)$, $n_T(U)$ es una seminorma compacta sobre H_T y podemos escoger $T > 1$ tal que $\eta_T < 1$. También tenemos de (2.70) que

$$\|VU_1 - VU_2\|_{H_T} \leq L_T \|U_1 - U_2\|_{\mathscr{H}_T} \text{ para } U_1, U_2 \in A_T,$$

donde $L_T^2 = a(T) + \int_T^{2T} a(t)dt$. Por lo tanto aplicamos el Teorema 2.2.35 el cual implica que A_T es un conjunto compacto en H_T de dimensión fractal finita.

Sea $\mathscr{P} : H_T \mapsto H$ el operador definido por la fórmula

$$\mathscr{P} \ : \ (u_0; u_1; \theta_0; z(t)) \mapsto (u_0; u_1; \theta_0).$$

$A = \mathscr{P} A_T$ y $\mathscr{P}$ son lipschitzianas, así $\dim_f^H A \leq \dim_f^{H_T} A_T < \infty$. Aquí $\dim_f^H$ denota la dimensión fractal de un conjunto en el espacio W. Esto concluye la prueba del Teorema 2.2.58. ■

2.2.7.3. Regularidad de las trayectorias del atractor

En esta parte mostramos como se pueden usar estimaciones estabilización para obtener una regularidad adicional de trayectorias situadas en el atractor global. El teorema que se enuncia debajo provee la regularidad de las derivadas con respecto al tiempo. La regularidad "espacial" necesaria se sigue del análisis de la respectiva EDP. Por lo general, implica la aplicación de la teoría elíptica.

Teorema 2.2.59. *Sea válida la suposición 2.2.54. Suponga que el sistema dinámico (H, S_t) posee un atractor global compacto A y es cuasi-estable sobre el atractor A. Además, asumimos que* (2.63) *es válido con la función $c(t)$ que posee la propiedad $c_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} c(t) < \infty$. Entonces cualquier trayectoria completa*

$$\{(u(t); u_t(t); \theta(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

que pertenece al atractor global disfruta de las siguientes propiedades de regularidad.

$$u_t \in L_\infty(\mathbb{R}; X) \cap C(\mathbb{R}, Y)\,,\ u_{tt} \in L_\infty(\mathbb{R}, Y)\,,\ \theta_t \in L_\infty(\mathbb{R}, Z) \tag{2.72}$$

Además, existe $R > 0$ tal que

$$|u_t(t)|_X^2 + |u_{tt}(t)|_Y^2 + |\theta_t(t)|_Z^2 \leq R^2\,,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.73}$$

donde R depende de la constante c_∞ , sobre la seminorma μ_X, y también sobre las propiedades de inmersión de X hacia Y.

Prueba. Se sigue de (2.63) que para cualquiera de las dos trayectorias

$$\gamma = \{U(t) \equiv (u(t); u_t(t); \theta(t)) \,:\, t \in \mathbb{R}\}\,,$$
$$\gamma^* = \{U^*(t) \equiv (u^*(t); u_t^*(t); \theta^*(t)) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

del atractor global tenemos que

$$|Z(t)|_H^2 \leq b(t-s)\,|Z(s)|_H^2 + c(t-s) \sup_{s\leq\tau\leq t} [\mu_X(z(\tau))]^2 \tag{2.74}$$

para todo $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}$, donde $Z(t) = U^*(t) - U(t)$ y $z(t) = u^*(t) - u(t)$. Tomando límite cuando $s \to -\infty$ sobre la relación (2.74) nos da lo siguiente

$$|Z(t)|_H^2 \leq c_\infty \sup_{-\infty\leq\tau\leq t} [\mu_X(z(\tau))]^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para cada par de trayectorias γ y γ^*. Usando la relación (2.69) podemos concluir que

$$\sup_{-\infty\leq\tau\leq t} |Z(\tau)|_H^2 \leq C \sup_{-\infty\leq\tau\leq t} |z(\tau)|_Y^2\,, \tag{2.75}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para cada par de trayectorias γ y γ^* del atractor.

Ahora fijamos la trayectoria γ y para $0 < |h| < 1$ consideramos la trayectoria desplazada $\gamma^* \equiv \gamma_h = \{y(t+h) : t \in \mathbb{R}\}$. Aplicando (2.75) para el par de trayectorias y usando el hecho de que todos los términos en (2.75) son cuadráticos con respecto a Z obtenemos que

$$\sup_{-\infty\leq\tau\leq t} \left\{ \left|u^h(\tau)\right|_X^2 + \left|u_t^h(\tau)\right|_Y^2 + \left|\theta_t^h(\tau)\right|_Z^2 \right\} \leq C \sup_{-\infty\leq\tau\leq t} \left|u^h(\tau)\right|_Y^2\,, \tag{2.76}$$

donde $u^h(t) = h^{-1} \cdot [u(t+h) - u(t)]$ y $\theta^h(t) = h^{-1} \cdot [\theta(t+h) - \theta(t)]$. Sobre el atractor obviamente tenemos que

$$\left|u^h(t)\right|_\gamma \leq \frac{1}{h}\cdot \int_0^h |u_t(\tau+t)|_\gamma \, d\tau \leq C\,,\ t \in \mathbb{R},$$

con uniformidad en h. Por lo tanto (2.76) implica que

$$\left|u^h(t)\right|_X^2 + \left|u_t^h(t)\right|_Y^2 + \left|\theta_t^h(t)\right|_Z^2 \leq C\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Pasando con el límite sobre h entonces se siguen las relaciones (2.72) y (2.73). ■

2.2.8. Ecuaciones evolutivas

Esta sección provee material preliminar con respecto a las ecuaciones evolutivas abstractas que sirven como un prototipo de las evoluciones de von Karman. Se presta especial atención a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones evolutivas no lineales. Los métodos usados están basados en la teoría de operadores monótonos y su adaptación a problemas no monótonos. En lo que sigue proveemos una breve exposición de la teoría se semigrupos no lineal y conceptos relacionados con la teoría de operadores monótonos maximales. Restringimos nuestra atención a operadores punto a punto, aunque muchos resultados que serán enunciados debajo siguen siendo ciertos en el entorno multivalor.

También expresamos varios resultados pertinentes a ecuaciones de placas lineales en una forma conveniente.

2.2.8.1. Operadores acumulativos en Espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert. Consideramos operadores (no lineales) A en H definidos sobre un subconjunto $\mathscr{D}(A)$ de H con rango $R(A) = \{Ax : x \in \mathscr{D}(A)\} \subseteq H$.

Definición 2.2.60. Un operador $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ es llamado *acumulativo* si tenemos

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_H \geq 0 \text{ para cualquier } x_1, x_2 \in \mathscr{D}(A).$$

Un operador acumulativo A es llamado *acumulativo maximal* (*m-acumulativo*) si la relación

$$(Av - u^*, v - u)_H \geq 0$$

para algunos $u, u^* \in H$ y para todo $v \in \mathscr{D}(A)$ implica que $u \in \mathscr{D}(A)$ y $u^* = Au$.

Notamos que el operador acumulativo es caso particular de un operador monótono (ver 2.2.3).

Una conveniente caracterización de operadores m-acumulativos es dada en el siguiente resultado bien conocido (ver por ejemplo [31, Capítulo IV]).

Teorema 2.2.61. *Un operador acumulativo $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ sobre el espacio de Hilbert H es m-acumulativo si y solo si $R(\lambda I + A) = H$ para todo (equivalentemente para algún) $\lambda > 0$. Aquí $R(B)$ denota el rango de un operador B.*

El siguiente tipo de resultado de perturbación es frecuentemente usado en el contexto de las EDPs (ver por ejemplo [31, Capítulo IV. 2]).

Proposición 2.2.62. *Sea $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ un operador m-acumulativo sobre el espacio de Hilbert H. Luego*

- *Si $B : H \mapsto H$ es acumulativo y de Lipschitz; es decir,*

  $$\|B(u_1) - B(u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\| \ , \ u_1, \, u_2 \in H,$$

  entonces $A + B$ es acumulativo.

- *Si $B : H \mapsto H$ es de Lipschitz, entonces par cualquier $\omega \geq L$ el operador $A+B+\omega I$ es m-acumulativo.*

El siguiente resultado presenta algunas propiedades de los operadores m-acumulativos en el espíritu de la Proposición 2.2.7.

Proposición 2.2.63. *Sea $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ un operador m-acumulativo sobre el espacio de Hilbert H. Sea $\{v_n\}$ una sucesión en $\mathscr{D}(A)$. Asuma que existen los elementos v y f de H tales que $v_n \to v$ y $Av_n \to f$ débilmente en H y*

$$(Av_n - Av_m, v_n - v_m)_H \to 0 \text{ cuando } n, m \to 0.$$

Entonces $v \in \mathscr{D}(A)$, $f = Av$ y $\lim_{n\to\infty}(Av_n, v)_H = (Av, v)_H$.

Prueba. Aplicamos la segunda parte de la proposición 2.2.7 con $V = V' = H$. ■

En el contexto de los operadores monótonos, la noción de coercitividad es fundamental (ver definción 2.2.5).

Definición 2.2.64. Decimos que un operador $A : \mathscr{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ es *coercitivo* si

$$\lim_{\|u\|_H \to \infty} \frac{(Au, u)_H}{\|u\|_H} = \infty\,,\ u \in \mathscr{D}(A).$$

La siguiente afirmación es válida (ver por ejemplo [31, Sección IV. 2, p. 170]).

Proposición 2.2.65. *Sea un m-acumulativo. Si $\lim_{\|u\|_H \to \infty} \|A(u)\|_H = \infty$, entonces A es suryectivo; esto es $R(A) = H$. Si A es coercitivo entonces $R(A) = H$.*

***Ejemplo* 2.4.** Cualquier operador autoadjunto no negativo en un espacio de Hilbert es un operador m-acumulativo.

2.2.8.2. Ecuaciones diferenciales abstractas

Sea A un operador m-acumulativo sobre un espacio de Hilbert H. Consideramos la siguiente ecuación diferencial abstracta:

$$\frac{du}{dt} + Au = f\,;\ 0 < t < T\,,\ u|_{t=0} = u_0 \in H, \tag{2.77}$$

donde $0 < T \leq \infty$.

Definición 2.2.66. Una solución fuerte (2.77) es una función continua u de $[0, T)$ hacia H que es absolutamente continua sobre cada intervalo $[a, b]$, $0 < a < b < T$, de aquí u es diferenciable en casi todo punto (a.e.) con $du/dt \in L_1(a, b; H)$, y para a.e. $t > 0$ tenemos que $u(t) \in Dcali(A)$ y (2.77) es válido.

Aquí, como en la sección 2.2.2, denotamos por $L_p(a,b;H)$ con $1 \le p \le \infty$ al espacio de Banach de (clases de equivalencia de) funciones Bochner medibles $f : [a,b] \mapsto H$ tales que $\|f(\cdot)\|_H \in L_p(a,b)$. También recordamos (ver sección 2.2.2) que denotamos por $C(a,b;H) \equiv C([a,b];H)$ al espacio de funciones fuertemente continuas sobre $[a,b]$ con valores en el espacio H. Un significado similar tienen las notaciones $C([a,b);H)$ y $C((a,b];H)$. También usamos el espacio

$$W_p^1(a,b;H) = \{f \in C(a,b;H) \,:\, f' \in L_p(a,b;H)\}\,,$$

donde $f'(t)$ es la derivada fuerte (en casi todo punto) de $f(t)$ con respecto a t. Notamos que $W_1^1(a,b;H)$ coincide con el conjunto de las funciones absolutamente continuas de $[a,b]$ hacia H (ver por ejemplo [31, Teorema 1.7, p. 105]). Análogos de orden superior $W_p^m(a,b;H)$ del espacio $W_p^1(a,b;H)$ son definidos en (2.8).

Un resultado fundamental que afirma la existencia de soluciones fuertes para operadores m-acumulativos es el siguiente resultado de Kato (ver [31, p. 180]).

Teorema 2.2.67. *Sea A un operador m-acumulativo sobre el espacio de Hilbert H. Asuma que $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ y $f : [0,T] \mapsto H$ es absolutamente continua. Entonces hay una única solución fuerte de* (2.77)*. En adición , u es lipschitziana de $[0,T]$ hacia H y fuertemente diferenciable por la derecha en H para $t \ge 0$. Además $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ para todo $t \ge 0$ y $u' \in L_\infty(0,T;H)$.*

Notamos que en algunos casos soluciones fuertes pueden ser construidas por el método de Galerkin (ver por ejemplo [15]).

En nuestras consideraciones se utiliza con frecuencia un concepto más débil de solución, la llamada solución generalizada. Esta es definida considerando límites (fuertes) de soluciones fuertes.

Definición 2.2.68. Una *solución generalizada* de (2.77) sobre un intervalo (cerrado) $[0,T]$ es una función continua $u \in C(0,T;H)$ tal que $u(0) = u_0$ y para la cual existe una sucesión de soluciones fuertes u_n definidas sobre $[0,T]$ del problema

$$\frac{d}{dt}u_n + Au_n = f_n\,,\ n = 1,2\ldots$$

con $f_n \to f$ en $L_1(=,T;H)$ y $u_n \to u$ en $C(0,T;H)$. Una función $u(t)$ de las clases $C([0,T);H)$ es solución generalizada del problema (2.77) sobre un semi-intervalo $[0,T)$, si u es una solución generalizada de (2.77) sobre cada intervalo cerrado $[0,T']$ con $T' < T$.

El resultado de existencia para soluciones generalizadas es dado a continuación [31, p. 183].

Teorema 2.2.69. *Sea A un operador m-acumulativo sobre el espacio de Hilbert H, $f \in L_1(0,T;H)$ y $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$, donde $\overline{\mathscr{D}(A)}$ es la clausura de $\mathscr{D}(A)$ en H. Entonces existe una única solución generalizada de* (2.77)*. Además; cualquiera de las* *dos soluciones generalizada $u_1(t)$ y $u_2(t)$ con datos $\{u_{10}, f_1\}$ y $\{u_{20}, f_2\}$ satisfacen los siguientes estimados de estabilidad con $0 \le s < t \le T$*

$$\begin{aligned}\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2 \le \|u_1(s)-u_2(s)\|_H^2 \\ + 2\int_s^t (f_1(z)-f_2(z), u_1(z)-u_2(z))_H dz\end{aligned} \tag{2.78}$$

y

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_H \le \|u_1(s)-u_2(s)\|_H + \int_s^t \|f_1(z)-f_2(z)\|_H\, dz. \tag{2.79}$$

NOTA 2.7. Notamos que el concepto de solución *generalizada* es sólo débilmente asociada con la ecuación diferencial, mediante el procedimiento límite. Así, puede suceder que la solución generalizada no satisfaga realmente la ecuación diferencial, aún en un sentido débil. Sin embargo, bajo propiedades adicionales de regularidad uno puede ser capaz de mostrar que las soluciones generalizadas satisfacen una débil forma (variacional) de la ecuación diferencial. Tales soluciones son llamadas *soluciones débiles* y son también a menudo referidas como *soluciones variacionales*. Retornamos al punto anterior, al discutir estructuras más específicas de ecuaciones de evolución abstractas.

Continuamos esta sección con varios resultados de perturbación.

Sea $B : \overline{\mathscr{D}(A)} \mapsto H$ una función lipschitziana tal que

$$\|B(u)-B(v)\|_H \le L\,\|u-v\|_H \ ; \ u, v \in \overline{\mathscr{D}}(A). \tag{2.80}$$

Consideramos la ecuación perturbada

$$\frac{d}{dt}u + (A+B)u = f\,,\ u|_{t=0} = u_0. \tag{2.81}$$

Teorema 2.2.70. *Supongamos que A es m-acumulativo y B satisface* (2.80)*.*

- **Soluciones fuertes:** *Para cada $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ y f absolutamente continua de $[0,T]$ hacia H hay una única solución fuerte $u(t)$ del problema* (2.81)*. La función $t \mapsto u(t)$ es lipschitziana de $[0,T]$ hacia H y fuertemente diferenciable por la derecha en H con $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ para cualquier $t \ge 0$. Además,*

$$u_t \equiv \frac{du}{dt} \in L_\infty(0,T;H)\,,\ A(u) \in L_\infty(0,T;H) \tag{2.82}$$

y las funciones $t \mapsto u_t(t)$ y $t \mapsto A(u(t))$ son débilmente continuas y fuertemente continuas por la derecha como mapeos de $[0,T]$ hacia H.

- **Soluciones generalizadas:** *Para cada $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$ y $f \in L_1(0,T;H)$ hay una única solución generalizada del problema* (2.81) *sobre $[0,T]$.*

Además, cualquier para de soluciones generalizadas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ del problema (2.81) *con datos $\{u_{10}, f_1\}$ y $\{u_{20}, f_2\}$ satisfacen los estimados de estabilidad con $0 \leq s < t \leq T$*

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 \leq e^{2L(t-s)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 \\ + 2\int_s^t e^{2L(t-z)}(f_1(z) - f_2(z), u_1(z) - u_2(z))_H dz \end{aligned} \tag{2.83}$$

y

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq e^{L(t-s)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_H \\ + \int_s^t e^L(t-z) \|f_1(z) - f_2(z)\|_H dz. \end{aligned} \tag{2.84}$$

El teorema anterior es un teorema de generación estándar que puede ser encontrado en muchos libros sobre teoría de operadores monótonos [5, 31]. El ingrediente principal de la prueba es el hecho de que $A + B + LI$ es un operador m-acumulativo (ver proposición 2.2.62). La prueba de las estimaciones (2.83) y (2.84) pueden ser encontrados en [31, p. 183]. Las propiedades de regularidad de soluciones fuertes siguen el argumento dado en [31, p. 175]. Aquí también contamos con la proposición 2.2.63.

En lo que sigue damos una generalización del resultado de perturbaciones localmente lipschitzianas B. Tal resultado es una herramienta principal en la prueba de la existencia global para EDPs semilineales con a priori acotados típicamente obtenidos por algún tipo de método energético.

Definición 2.2.71. *Un operador localmente lipschitziano $B : \overline{\mathscr{D}(A)} \mapsto H$* es una función tal que para cualquier $K > 0$ existe una constante positiva $L(K)$ tal que

$$\|B(u) - B(v)\|_H \leq L(K) \|u - v\|_H \tag{2.85}$$

para todo $u, v \in \overline{\mathscr{D}(A)}$ tal que $\|u\|_H \leq K$ y $\|v\|_H \leq K$.

El siguiente teorema puede ser derivado del Teorema 2.2.70 mediante el procedimiento adecuado (conocido) de truncar B en orden de considerar la traslación adecuada del operador acumulativo. Este resultado es conocido por los investigadores y a menudo es aplicado en el contexto de las EDPs. Por el motivo de la completitud damos la prueba que sigue la linea del argumento presentado en [8] y cuenta con la idea encontrada en [23, sección 2.3].

Teorema 2.2.72. *Sea $A + \lambda I$ un operador m-acumulativo para algún $\lambda \geq 0$. Asumamos que B está sujeto a* (2.85)*.*

- **Soluciones fuertes locales:** *Para cada elemento $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ y cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \mapsto H$ que es absolutamente continua sobre todo intervalo finito $[0, T]$ existe $t_{\text{máx}} \leq \infty$ tal que hay una única solución fuerte $u(t)$ del problema* (2.81) *definida sobre $[0, t_{\text{máx}})$. La función $t \mapsto u(t)$ es lipschitziana y diferenciable por derecha* *con $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ para cualquier $t \in [0, t_{\text{máx}})$. Además, las relaciones* (2.82) *son válidas para cualquier $T < t_{\text{máx}}$ y las funciones $t \mapsto u_t(t)$ y $t \mapsto A(u(t))$ son débilmente continuas y fuertemente continuas por la derecha como mapeos de $[0, t_{\text{máx}})$ hacia H.*

- **Soluciones generalizadas locales:** *Para cada elemento u_0 de la clausura $\overline{\mathscr{D}(A)}$ de $\mathscr{D}(A)$ en H y para cada función $f \in L_1^{loc}([0, +\infty); H)$ hay una única solución generalizada del problem* (2.81) *definida sobre $[0, t_{\text{máx}})$.*
- *En ambos casos tenemos $\lim_{t \to t_{\text{máx}}} \|u(t)\|_H = \infty$, siempre que $t_{\text{máx}} < \infty$.*
- **Soluciones globales:** *Sea $u(t)$ una solución fuerte (o generalizada) con algún dato $\{u_0, f\}$. Suponga que existe $T > 0$ y $C_T(u_0, f)$ tal que*

$$\sup_{[0,T^*)} \|u(t)\|_H \leq C_T(u_0, f) \tag{2.86}$$

para todo intervalo $[0, T^*) \subset [0, T]$ de la existencia de la solución de $u(t)$. Entonces la solución $u(t)$ existe sobre $[0, T]$. Además, si para cualquier $T > 0$ existe $C_T(u_0, f)$ tal que (2.86) *es válido, entonces la solución $u(t)$ puede ser extendida sobre $[0, +\infty)$; es decir, $t_{\text{máx}} = \infty$.*

Prueba. Podemos asumir que $\lambda = 0$ (de otro modo redefinimos $A := A + \lambda I$ y $B := B - \lambda I$). Además, podemos asumir que $0 \in \mathscr{D}(A)$ y $A0 = 0$. Este punto dice que si $u(t)$ es una solución (fuerte o generalizada) de (2.81), entonces para cualquier $w_* \in \mathscr{D}(A)$ la función $w(t) = u(t) - w_*$ resuelve (en el mismo sentido que $u(t)$) el problema

$$\frac{d}{dt} w + A_* w + B_*(w) = f_*\,, \quad w|_{t=0} = u_0 - w_*,$$

donde A_*, B_* y f_* son dados por

$$A_* w = A(w_* + w) - A w_*\,, \qquad w \in Dcali(A_*) = -w_* + \mathscr{D}(A),$$

$$B_*(w) = B(w_* + w)\,, \qquad w \in H\,, \quad f_* = f - A w_*.$$

Es claro que A_*, B_* y f_* satisfacen las condiciones del Teorema 2.2.72 (con otra constante de Lipschitz $L(K)$) y, en adición, $0 \in \mathscr{D}(A_*)$ y $A_* 0 = 0$.

Para aplicar el Teorema 2.2.70 necesitamos considerar alguna regularización del operador B. Damos

$$\tilde{B}u = \begin{cases} Bu & , \text{ si } \|u\| \leq K, \\ B\left(k \dfrac{u}{\|u\|}\right) & , \text{ si } \|u\| > K. \end{cases}$$

Aquí y debajo $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_H$ y $(\cdot, \cdot)$ es el correspondiente producto interno. Afirmamos que el mapeo $\tilde{B}$ satisface $\left\|\tilde{B}u - \tilde{B}v\right\| \leq L(K) \|u - v\|$; esto es, $\tilde{B}$ es globalmente lipschitzianas. En orden de probar esto distinguimos tres casos.

(i) Si $\|u\|, \|v\| \leq K$, la conclusión se sigue pues de $\tilde{B}u = Bu$, $\tilde{B}v = Bv$, y la fórmula (2.85).

(ii) En el caso $\|u\| \leq K$ y $\|v\| > K$ tenemos

$$\left\|\tilde{B}u - \tilde{B}v\right\| \leq L(K)\left\|u - K\frac{v}{\|v\|}\right\|.$$

Mostramos que

$$\left\|u - K\frac{v}{\|v\|}\right\| \leq \|u - v\|.$$

Esto se hace mediante el siguiente cálculo que se basa en la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 - \left\|u - K\frac{v}{|v|}\right\|^2 &= \|v\|^2 - K^2 - 2\left(1 - \frac{K}{\|v\|}\right)(u, v) \\
&\geq \|v\|^2 - K^2 - 2\left(1 - \frac{K}{\|v\|}\right)\|u\|\,\|v\| \\
&\geq \|v\|^2 - K^2 - 2\left(1 - \frac{K}{\|v\|}\right)K\,\|v\| \\
&= \|v\|^2 - 2K\,\|v\| + K^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(iii) En el caso $\|u\| > K$, $\|v\| > K$ tenemos

$$\left\|\tilde{B}u - \tilde{B}v\right\| \leq L(K)\left\|K\frac{u}{\|u\|} - K\frac{v}{\|v\|}\right\|$$

y afirmamos que

$$\left\|K\frac{u}{\|u\|} - K\frac{v}{\|v\|}\right\| \leq \|u - v\|.$$

De nuevo, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 - K^2\left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\|^2 &= \|u\|^2 - 2K^2 + \|v\|^2 + 2\left(\frac{K^2}{\|u\|\,\|v\|} - 1\right)(u, v) \\
&\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2K^2 + 2\left(\frac{K^2}{\|u\|\,\|v\|} - 1\right)\|u\|\,\|v\| \\
&= (\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\tilde{B}$ es de hecho globalmente lipschitziana.

De acuerdo al Teorema 2.2.70, asumiendo que $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ y $f \in W_1^1(0, T; H)$ para todo $T > 0$ la ecuación

$$u_t + Au + \tilde{B}u = f \tag{2.87}$$

tiene una única solución fuerte u. El mismo teorema garantiza una única solución generalizada sobre $\mathbb{R}_+$ siempre que $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$ y $f \in L_1(0,T;H)$ para todo $T > 0$.

Dado $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ arbitrario. Escogemos K tal que $\|u_0\| < K$ y suponga por ahora que u es una solución fuerte de (2.87). Como $A0 = 0$, la función $w \equiv 0$ es una solución fuerte del problema

$$w_t + Aw + \tilde{B}w = B(0)\,,\ w(0) = 0.$$

Por lo tanto de (2.84) tenemos

$$\|u(t)\| \leq e^{L(K)t}\left[\|u_0\| + \int_0^t e^{-L(K)s}(\|f(s)\| + \|B(0)\|)ds\right]$$

para todo $t \geq 0$. Esta desigualdad también es válido para soluciones generalizadas de (2.87). Ahora recordamos que $\|u_0\| < K$ y escogemos $T > 0$ tal que

$$V(K,T) \equiv \|u_0\| + \int_0^T e^{-L(K)s}(\|f(s)\| + \|B(0)\|)dx < K.$$

De aquí, para

$$t \leq t^* = \min\left\{T, \frac{1}{L(K)}\log\frac{K}{V(K,T)}\right\}$$

obtenemos $\|u(t)\| \leq K$. Consecuentemente, $\tilde{B}(u(t)) = B(u(t))$ para $t \leq t^*$ y esto significa que $u(t)$ resuelve la ecuación (2.81) sobre este intervalo.

De lo acabamos de demostrar se sigue que si u es una solución de (2.81) sobre $[0,t^*]$ puede extenderse a una solución sobre el intervalo $[0,t^*+\delta]$ para algún $\delta > 0$. Para esto usamos el mimos método como se describe arriba con el valor inicial t^* y con un gran K. Por supuesto, δ depende sobre $\|u(t)^*\|$.

Sea $[0,t_{\text{máx}})$ el máximo intervalo de existencia de la solución. Si $t_{\text{máx}} < \infty$, entonces $\lim_t \nearrow t_{\text{máx}} \|u(t)\| = \infty$. En otro caso existe una sucesión $t_n \nearrow t_{\text{máx}}$ tal que $\|u(t_n)\| \leq C$. Esto nos permitiría extender u como una solución de (2.81) a un intervalo $[0,t_n+\delta]$ con $\delta > 0$ independiente de n. De aquí u puede ser extendido más allá de $t_{\text{máx}}$ lo cual contradice la construcción de $t_{\text{máx}}$.

Para probar la parte de la existencia global necesitamos solamente notar que (2.86) nos permite extender una solución dentro del intervalo $[0,T]$ con pasos de tiempo independientes de $T^* < T$.

Para probar la unicidad de las soluciones generalizadas de (2.81) notamos que cualquiera de las dos soluciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ sobre un semi-intervalo $[0,T)$ también resuelven (2.87) sobre cualquier intervalo $[0,T']$ con $T' < T$ y $K = 1 + \max_{[0,T']}\{\|u_1(t)\| + \|u_2(t)\|\}$. Así el enunciado de unicidad se sigue de Teorema 2.2.70. ■

NOTA 2.8. Sean $u_1(t)$ y $u_2(t)$ dos soluciones generalizadas del problema (2.81) con datos $\{u_{10}, f_1\}$ y $\{u_{20}, f_2\}$ definida un intervalo común $[0,T)$ de existencia. Entonces las hipótesis del Teorema 2.2.72 se sigue de (2.84) que el estimado de estabilidad

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H \leq C \left\{ \|u_1(s) - u_2(s)\|_H + \int_s^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_H \, d\tau \right\} \tag{2.88}$$

es válido para cualquier $0 \leq t \leq T' < T$, donde la constante C depende de T' y las normas $\sup_{[0,T']} \|u_i(t)\|_H$, $i = 1, 2$.

NOTA 2.9. Suponga que las hipótesis del Teorema 2.2.72 son válidos. Se sigue del argumento previo que si $f \in W_1^1(0, T; H)$ y $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$, entonces para cualquier solución generalizada $u(t)$ del problema (2.81) sobre el intervalo $[0, T]$ existe una sucesión de soluciones fuertes $u_n(t)$ de (2.81) con datos $\{u_{0n}, f\}$ tal que $u_n(t) \to u(t)$ en $C(0, T; H)$. Así no es necesario aproximar $f(t)$ cuando construimos soluciones generalizadas para $f(t)$ suave.

2.2.8.3. Ecuaciones abstractas de segundo orden

En esta sección nos especializamos en resultados generales de la sección previa para modelos más concretos de segundo orden en el tiempo. Comenzamos con un modelo general que cubre casi todas nuestras aplicaciones, incluyendo modelos de frontera acotada que surgen en la dinámica de placas no lineales.

Modelo general

Tratamos con la siguiente ecuación abstracta de segundo orden en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$,

$$\begin{aligned} &Mu_{tt} + \mathscr{A}u(t) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t(t)) + D_0h(u(t)) \\ &+ D + D_0D_0^*u_t(t) + Du_t(t) = F(u(t), u_t(t)) + p(t)\,,\ t > 0, \end{aligned} \tag{2.89}$$

con los siguientes datos iniciales

$$u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{2.90}$$

Consideramos cuestiones tales como la existencia, la unicidad, y las desigualdades de energía asociadas osn (2.89). Para este fin, el siguiente conjunto de suposiciones es impuesto.

Suposición 2.2.73.

1. $\mathscr{A}$ es un operdor lineal autoadjunto, positivo, cerrado actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ con $\mathscr{D}(A) subset \mathscr{H}$. Denotamos por $|\cdot|$ y $(\cdot, \cdot)$ a la norma de $\mathscr{H}$ y el producto escalar en $\mathscr{H}$. Usamos el mismo símbolo para denotar el emparejamiento de dualidad entre $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})'$.

2. Sea V otro espacio de Hilbert tal que $\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{\,1/2}) \subset V \subset \mathscr{H} \subset V' \subset \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})'$, y todas estas inyecciones vienen a ser continuas y densas, $M \in L(V, V')$, la forma (Mu, v) es simétrica sobre V y $(Mu, u) \geq \alpha_0 \left|u\right|_V^2$, donde $\alpha_0 > 0$ y $(\cdot, \cdot)$ es entendido como un emparejamiento de dualidad entre V y V'. De aquí, $M^{-1} \in L(V', V)$. Dando $\overline{M} = M|_H$ con $\mathscr{D}\,(\overline{M}) = \{u \in V\,;\, Mu \in \mathscr{H}\}$ tenemos que $\mathscr{D}\,(\overline{M}^{1/2}) = V$. En lo que sigue no hacemos distinción entre M y $\overline{M}$. Además, podemos asumir que $\left|\cdot\right|_V = \left|M^{1/2}\cdot\right|$ y $(\cdot, \cdot)_V = (M\cdot, \cdot)$.

3. Sea U otro espacio de Hilbert y U_0 un espacio de Banach reflexivo tal que $U_0 \subseteq U \subseteq U_0'$. Denotamos por $(\cdot, \cdot)_{V,V'}$ al producto escalar sobre U y el emparejamiento de dualidad entre U_0 y U_0'. Asumimos que $g : U_0 \mapsto U_0'$ es un mapeo continuo tal que $g(0) = 0$ y
$$(g(v_1) - g(v_2), v_1 - v_2)_{V,V'} \geq 0 \;\text{ para todo }\; v_1, v_2 \in U_0.$$

4. El operador lineal $G : U_0' \mapsto \mathscr{H}$ satisface: $\mathscr{A}^{1/2}G : U_0' \mapsto \mathscr{H}$ es acotado, o equivalentemente, $G^*\mathscr{A} : \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto U_0$ es acotado, donde el operador adjunto G^* es definido por la relación $(G^*u, v)_{V,V'} = (u, Gv)$.

5. El operador no lineal $F : \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V \mapsto V'$ es localmente lipschitziana; esto es,
$$\left|F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)\right|_{V'} \leq L(K)\left(\left|\mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2)\right| + \left|v_1 - v_2\right|_V\right) \tag{2.91}$$
para todo $(u_i; v_i) \in \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) times V$ tal que $\left|\mathscr{A}^{1/2}u_i\right|$, $\left|v_i\right|_V \leq K$.

6. El operador $D : \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto [\,\mathscr{D}\,(\mathscr{A})]'$ es monótono y hemicontinuo[2] (ver defininiciones 2.2.3 y 2.2.4).

7. Sea Z un espacio de Hilbert dado. El operador lineal $D_0 : Z \mapsto [\,\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})]'$ es acotado y la función no lineal $h(u)$ es de Lipschitz desde $\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$ hacia Z; es decir
$$\left|h(u_1) - h(u_2)\right| \leq L\left|\mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2)\right|, \quad u_1, u_2 \in \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}). \tag{2.92}$$

8. $p(t) \in L_1(0, T; V')$ para todo $T > 0$.

NOTA 2.10.

1. Como $\mathscr{A}$ es un operador autoadjunto positivo, uno puede usar la teoría de interpolación (ver por ejemplo [33]) para construir la escala $\{\mathscr{H}_s : s \in \mathbb{R}\}$ de espacios de Hilbert tal que (a) $\mathscr{H}_{s_1} \subset \mathscr{H}_{s_2}$ para $s_1 > s_2$; (b) $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}$ y $\mathscr{H}_s = \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^s)$ para $s > 0$; (c) $(\mathscr{H}_s)' = \mathscr{H}_{-s}$. El operador $\mathscr{A}$ puede ser extendido a una familia de operadores que mapean $\mathscr{H}_s$ hacia $\mathscr{H}_{s-1}$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$. Denotamos esta extensión por el mismo símbolo $\mathscr{A}$. Podemos también definir las potencias $\mathscr{A}^\gamma$ para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ como operadores desde $\mathscr{H}_s$ hacia $\mathscr{H}_{s-\gamma}$ que poseen la propiedad $\mathscr{A}^{\gamma_1+\gamma_2} = \mathscr{A}^{\gamma_1}\mathscr{A}^{\gamma_2}$. En la suposición 2.2.73 (4) y en lo que sigue entendemos al operador $\mathscr{A}$ en este sentido (extendido).

[2] Así por la Proposición 2.2.6 D es monótono maximal.

2. En aplicaciones concretas, el término $\mathscr{A}\, Gg(G^*\mathscr{A}\, u_t)$ modela disipaciones acotadas. De hecho el operador G típicamente representa un adecuado mapeo de Green. Una característica distinta de esta clase de problemas es que el operador composición $\mathscr{A}G$ nunca está en el espacio de la energía $\mathscr{H}$. Esto corresponde al hecho de que los problemas de disipación acotada son muy intrínsecamente no acotados. También notamos que en las aplicaciones que siguen el operador g es una operador del tipo Nemytskij (ver ejemplo 2.1) y la suposición de que $g : U_0 \mapsto U_0'$ es continua fuerza ciertas condiciones de crecimiento impuestas sobre la correspondiente función escalar $g(x, \xi)$.

3. La disipación interior es modelada por el operador de amortiguación D. Notamos que la presencia del operador D es redundante en el modelo (2.89). De hecho, este término puede ser incorporado dentro del término $\mathscr{A}Gg_0G^*\mathscr{A}$ tomando $G \equiv \mathscr{A}^{-1/2}$ y $g_0 \equiv \mathscr{A}^{-1/2}D\mathscr{A}^{-1/2}$. También podemos incluir $D_0D_0^*u_t$ dentro del término de amortiguación Du_t y, al menos formalmente, $D_0h(u)$ puede ser incluido dentro de la no linealidad de $F(u)$. Sin embargo, preferimos destacar estos términos, principalmente para la claridad de la exposición. En muchas aplicaciones estos términos juegan un papel bastante espacial al describir el acoplamiento en la estructura. En particular, el término $D_0h(u)$ resulta de las condiciones acotadas no lineales y, si $g = 0$, un componente adicional $D_0D_0^*u_t$ es necesario para la unicidad de las soluciones. Se entiende que las condiciones de globalidad lipschitziana (2.92) para $h(u)$ pueden ser relajadas.

Vamos a reescribir el problema (2.89) como una ecuación de primer orden. En orden de efectuar esto introducimos el siguiente operador $A : H \mapsto H$, donde $H \equiv \mathscr{D}(A^{-1/2}) \times V$, definido por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}[\mathscr{A} + D_0h(\cdot)] & M^{-1}[\mathscr{A}G_gG^*\mathscr{A} + D + D_0D_0^*] \end{pmatrix}, \tag{2.93}$$

donde $\mathscr{D}(A)$ consiste de los elementos $u = (x; y) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ que posee la propiedad

$$\mathscr{A}(x + Gg(G^*\mathscr{A}y)) + D_0h(x) + Dy + D_0D_0^*y \in V'.$$

Con la notación anterior fácilmente vemos que el problema de evolución original (2.89) es equivalente a la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) + AU(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}F(u(t), u_t(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}p(t) \end{pmatrix} \\ \\ U(0) = U_0 \equiv (u_0; u_1), \end{cases} \tag{2.94}$$

donde $U(t) = (u(t); u_t(t))$. Esta estructura (2.94) del problema (2.89) y las consideraciones de la sección previa conducen a las siguientes definiciones.

Definición 2.2.74. Una función $u(t)$ es llamado *solución fuerte* del problema (2.89) y (2.90) sobre un semi-intervalo $[0, T)$, si

- $u(t) \in C([0,T);\ \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})) \cap C^1([0,T);V)$.
- $u \in W_1^1(a,b;\ \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}))$ y $u_t \in W_1^1(a,b;V)$ para cualquier $0 < a < b < T$.
- $\mathscr{A}[u(t) + Gg(G^* \mathscr{A} u_t(t))] + Du_t(t) + D_0 h(u(t)) + D_0 D_0^* u_t(t) \in V'$ para casi todo $t \in [0,T]$.
- La ecuación (2.89) es satisfecha en V' para casi todo $t \in [0,T]$.
- El dato inicial (2.90) es válido.

Está función $u(t)$ es una solución fuerte sobre el intervalo $[0,T]$, si, en adición, tenemos que $(u(t);u_t(t))$ es continua en $t = T$; es decir, $u(t) \in C(0,T;\ \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})) \cap C^1(0,T;V)$.

Definición 2.2.75. Una función $u(t)$ es llamada *solución generalizada* del problema (2.89) y (2.90) sobre el intervalo $[0,T]$, si

- $u(t) \in C(0,T;\ \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})) \cap C^1(0,T;V)$.
- El dato inicial (2.90) es válido.
- Existen sucesiones de funciones $\{p_n(t)\} \subset L_1(0,T;V)$ y soluciones fuertes $\{u_n(t)\}$ del problema (2.89) y (2.90) definido sobre $[0,T]$ con p_n en lugar de p y $(u_{0n};u_{1n})$ en lugar de $(u_0;u_1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\{ \left| M^{1/2}(\partial_t u(t) - \partial_t u_n(t)) \right| + \left| \mathscr{A}^{1/2}(u(t) - u_n(t)) \right| \right\} = 0 \tag{2.95}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |p(t) - p_n(t)|_{V'}\, dt = 0. \tag{2.96}$$

Esta función $u(t)$ es una solución generalizada sobre un semi-intervalo $[0,T)$, si $u(t)$ es una solución generalizada sobre cada subintervalo $[0,T'] \subset [0,T)$.

Nuestro resultado principal en esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 2.2.76. *Bajo la suposición 2.2.73 con la referencia del problema* (2.89) *y* (2.90) *las siguientes premisas son válidas.*

- **Soluciones fuertes locales:** *Para cada* $p \in W_1^1(0,T;V')$ *y* $u_0 \in \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$ *y* $u_1 \in \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$ *tal que*

$$\mathscr{A}[u_0 + Gg(G^* \mathscr{A} u_1)] + Du_1 + D_0 h(u_0) + D_0 D_0^* u_1 \in V' \tag{2.97}$$

existe $t_{\text{máx}} > 0$ *y una única solución fuerte tal que*

$$(u;u_t) \in C([0,t_{\text{máx}});\ \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V),$$

$$(u_t; u_{tt}) \in C_r([0, t_{\text{máx}}); \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V) \cap L_\infty^{loc}([0, t_{\text{máx}}); \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V),$$
$$\mathscr{A}[u + Gg(G^* \mathscr{A} u_t)] + Du_t + D_0 h(u) + D_0 D_0^* u_t \in C_r([0, t_{\text{máx}}); V').$$

Aquí y en lo que sigue denotamos por C_r al espacio de las funciones que son continuas por la derecha. Además, la función $t \mapsto (u_1(t); u_{tt}(t))$ es débilmente continua en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$.

- **Soluciones generalizadas locales:** *Sea $(u_0; u_1) \in \overline{\mathscr{D}(A)} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$, donde $\overline{\mathscr{D}(A)}$ es la clausura de $\mathscr{D}(A)$ en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. Entonces existe $t_{\text{máx}} > 0$ y una única solución generalizada tal que*

$$(u; u_t) \in C([0, t_{\text{máx}}); \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V).$$

- **Soluciones globales:** *Si, en adición, soluciones fuertes (o generalizadas) satisfacen*

$$\sup_{t \in [0, t_*)} \left\{ \left| \mathscr{A}^{1/2} u(t) \right| + |u_t(t)| \right\} \leq M(t_*, u_0, u_1)$$

para todo semi-intervalo de existencia $[0, t_*)$, entonces las soluciones locales referidas previamente son globales; esto es, $t_{\text{máx}} = \infty$.

- **Estimación de estabilidad:** *Sean $u^1(t)$ y $u^2(t)$ dos soluciones generalizadas del problema (2.89) con datos $\{u_0^1, u_1^1, p_1\}$ y $\{u_0^2, u_1^2, p_2\}$ definidas sobre un intervalo común $[0, T)$ de existencia. Entonces la estimación*

$$\begin{aligned} &\left| \mathscr{A}^{1/2}[u^1(t) - u^2(t)] \right| + \left| u_t^1(t) - u_t^2(t) \right|_V \\ &\leq C_1 \left(\left| \mathscr{A}^{1/2}[u^1(s) - u^2(s)] + \left| u_t^1(s) - u_t^2(s) \right|_V \right| \right) + C_2 \int_s^t |p_1(\tau) - p_2(\tau)|_{V'} \, d\tau \end{aligned} \tag{2.98}$$

es válida para cualquier $0 \leq t \leq T' \leq T$, donde las constantes C_1 y C_2 pueden dependen de T' y $\sup_{t \in [0, T']} \left\{ \left| \mathscr{A}^{1/2} u^i(t) \right| + |u_t^i(t)|_V \right\}$, $i = 1, 2$.

***Prueba**.* El resultado del teorema 2.2.76 es un caso particular del teorema probado en [24] aplicando el principio de mapeo de contradicciones. Sin embargo, la prueba puede ser simplificada por el uso directo del Teorema 2.2.72.

En vista de esto, la conclusión mencionada en el Teorema 2.2.76 se sigue una vez que probamos lo siguiente

- $A + \lambda I$ es un operador m-acumulativo sobre $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ para algún $\lambda \geq 0$.
- $B(U) \equiv -\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} F(x, y) \end{pmatrix}$ es localmente lipschitziana sobre H, $U = (x; y) \in H$.

■

Lema 2.2.77. *Bajo la suposición 2.2.73, existe una constante $\lambda > 0$ tal que el operador $A + \lambda I$ es m-acumulativo, donde A es definido en* (2.93)*.*

La prueba de este lema se basa en las siguientes proposiciones. Comenzamos con la afirmación que establece la propiedad de acumulatividad para $A + \lambda I$.

Proposición 2.2.78. *Para cualquier $\lambda \geq L^2/2$ donde L es una constante de Lipschitz asociada con h en* (2.92)*, el operador $A + \lambda I$ es acumulativo.*

Prueba. Tomamos elementos arbitrarios $u = (u_1; u_2)$, $w = (w_1; w_2) \in \mathscr{D}(A)$. Sea $\xi = (\xi_1; \xi_2) = A(u)$ y $\eta = (\eta_1; \eta_2) = A(w)$. Así, en particular $\xi_1 = -u_2$, $\eta_1 = -w_2$. Además

$$\xi_2 = M^{-1}[\mathscr{A}u_1 + \mathscr{A}G\beta_{u_2} + Du_2 + D_0 h(u_1) + D_0 D_0^* u_2]$$

y

$$\eta_2 = M^{-1}[\mathscr{A}w_1 + \mathscr{A}G\beta_{w_2} + Dw_2 + D_0 h(w_1) + D_0 D_0^* w_2],$$

donde $\beta_{u_2} = g(G^* \mathscr{A} u_2)$ y $\beta_{w_2} = g(G^* \mathscr{A} w_2)$.

Como

$$\begin{aligned}
(A(u) - A(w), u - w)_H &= (\xi - \eta, u - w)_H \\
&= (\mathscr{A}^{1/2}(\xi_1 - \eta_1), \mathscr{A}^{1/2}(u_1 - w_1)) \\
&\quad + (M^{1/2}(\xi_2 - \eta_2), M^{1/2}(u_2 - w_2)),
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&(A(u) - A(w), u - w)_H \\
&= (\mathscr{A}^{1/2}(\xi_1 - \eta_1), \mathscr{A}^{1/2}(u_1 - w_1)) \\
&\quad + (M^{1/2} M^{-1}(\mathscr{A}(u_1 + G\beta_{u_2} - w_1 - G\beta_{w_2}) + Du_2 - Dw_2 \\
&\quad + D_0 h(u_1) - D_0 h(w_1) + D_0 h D_0^*(u_2 - w_2)), M^{1/2}(u_2 - w_2)) \\
&= (\mathscr{A}^{1/2}(\xi_1 - \eta_1), \mathscr{A}^{1/2}(u_1 - w_1)) + (\mathscr{A}(u_1 - w_1 + G(\beta_{u_2} - \beta_{w_2})) \\
&\quad + Du_2 - Dw_2 + D_0(h(u_1) - h(w_1)) + D_0 D_0^*(u_2 - w_2, u_2 - w_2) \\
&= (\mathscr{A}G(\beta_{u_2} - \beta_{w_2}) + Du_2 - Dw_2, u_2 - w_2) \\
&\quad + (h(u_1) - h(w_1), D_0^*(u_2 - w_2))_Z + |D_0^*(u_2 - w_2)|_Z^2 \\
&\geq \frac{1}{2} |D_0^*(u_2 - w_2)|_Z^2 - \frac{1}{2} L^2 \left| \mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2) \right|^2 \\
&\geq -\frac{1}{2} L^2 \left| \mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2) \right|^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado las suposiciones de monotonicidad de D y g y recordamos que la constante L denota la constante de Lipschitz asociada con $h(u)$. La acumulatividad de $A + \lambda I$ se sigue ahora tomando $\lambda \geq \frac{1}{2} L^2$. ■

Introducimos el siguiente operador $T_\lambda : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ el cual es denotado por

$$T_\lambda v = \mathscr{A}^{1/2} G g(G^* \mathscr{A}^{1/2} v) + K_\lambda v, \tag{2.99}$$

donde

$$K_\lambda v = \mathscr{A}^{1/2}\left(D\mathscr{A}^{-1/2} v + D_0 D_0^* \mathscr{A}^{1/2} v\right) + \frac{1}{2\lambda} + \mathscr{A}^{-1/2} D_0 h\left(\mathscr{A}^{-1/2}\frac{a+v}{\lambda}\right)$$

y a es un elemento en $\mathscr{H}$.

Proposición 2.2.79. *Para $\lambda > 0$ suficientemente grande el operador T_λ es m-acumulativo en $\mathscr{H}$ con el dominio $\mathscr{D}(T_\lambda) = \mathscr{H}$.*

Prueba. En orden de probar la acumulatividad de los operadores T_λ y K_λ, el argumento es muy similar a la prueba de la acumulatividad de $A + \lambda I$. Los detalles son omitidos. Tomamos ventaja de la condición de Lipschitz que satsiface h el cual es entonces ajustado tomando un gran valor para λ.

En cuanto a la acumulatividad maximal de T_λ, argumentamos lo siguiente. Primero de todo notemos que por la suposición 2.2.73 (3,4) el operador

$$\mathscr{A}^{1/2} G g G^* \mathscr{A}^{1/2} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$$

es acumulativo. Como los mapeos $\mathscr{A}^{1/2}G$, $G^*\mathscr{A}^{1/2}$ y g son continuos, por la primera afirmación de la Proposición 2.2.6 $\mathscr{A}^{1/2}GgG^*\mathscr{A}^{1/2}$ es m-acumulativo. Por lo tanto el operador T_λ pueden ser vistos como una suma del operador m-acumulativo $\mathscr{A}^{1/2}GgG^*\mathscr{A}^{1/2}$ y el operador K_λ. Por la proposición 2.2.6 (5) es suficiente mostrar que K_λ es m-acumulativo. Por la suposición 2.2.73 (6) el operador $\mathscr{A}^{-1/2}D\mathscr{A}^{-1/2}$ es m-acumulativo. Ahora notamos que $K_\lambda - \mathscr{A}^{-1/2}D\mathscr{A}^{-1/2}$ es de Lipschitz y acumulativa sobre $\mathscr{H}$ para $\lambda > 0$ suficientemente grande. Por lo tanto por la proposición 2.2.62 (1) K_λ es m-acumulativo, como se deseaba. ∎

Proposición 2.2.80. *$A + \lambda I$ es maximal sobre $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$, para λ suficientemente grande.*

Prueba. Por el Teorema 2.2.61 y la Proposición 2.2.78 es suficiente probar que

$$R(A + \lambda I) = H \ \text{ para algún } \lambda > 0.$$

Lo anterior implica resolver el siguiente sistema de ecuaciones: dado $f_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, $f_1 \in V$ encontrar $(x; y) \in \mathscr{D}(A)$ tal que

$$\begin{aligned} -y + \lambda x &= f_0, \\ \mathscr{A}x + D_0 h(x) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}y) + D_0 D_0^* y + Dy + \lambda M y &= M f_1. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Eliminando x se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\mathscr{A}y + D_0 h\left(\frac{f_0 + y}{\lambda}\right) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}y) + D_0 D_0^* y + Dy \\ &\qquad + \lambda M y = M f_1 - \frac{1}{\lambda}\mathscr{A} f_0, \end{aligned} \tag{2.101}$$

esto último puede ser escrito como

$$\frac{1}{2\lambda}\mathscr{A}y + \mathscr{A}^{1/2}T_\lambda\mathscr{A}^{1/2}y + \lambda My = Mf_1 - \frac{1}{\lambda}\mathscr{A}f_0 \in [\mathscr{D}(\mathscr{A})]',$$

donde T_λ es dado por (2.99) con $a = \mathscr{A}^{1/2}f_0$. Si denotamos $v = \mathscr{A}^{1/2}y$, entonces obtenemos la relación

$$S_\lambda v \equiv \frac{1}{2\lambda} + T_\lambda v + \lambda\mathscr{A}^{-1/2}M\mathscr{A}^{-1/2}v = \mathscr{A}^{-1/2}\left(Mf_1 - \frac{1}{\lambda}\mathscr{A}f_0\right) \in \mathscr{H}. \quad (2.102)$$

Por la Proposición 2.2.79 T_λ es m-acumulativo en $\mathscr{H}$. Como $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \subset V$, es también claro que $\mathscr{A}^{-1/2}M\mathscr{A}^{-1/2}$ es un operador lineal positivo y acotado en $\mathscr{H}$. Consecuentemente por la primera afirmación de la Proposición 2.2.62 el operador S_λ es m-acumulativo y coercitivo en $\mathscr{H}$. Así, por la Proposición 2.2.65 concluimos que $R(S_\lambda) = \mathscr{H}$. Por lo tanto existe $v \in \mathscr{H}$ el cual resuelve (2.102). Consecuentemente $y = \mathscr{A}^{-1/2}v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ es solución de (2.101) para la variable $y \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$. Volviendo a la primera ecuación en (2.100) obtenemos $x \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$. Es ahora sencillo verificar que $(x; y) \in \mathscr{D}(A)$. De hecho, lo anterior se sigue de la estructura de la segunda ecuación en (2.100) y de la definición del dominio del operador A. La prueba de la propiedad de maximilidad ha sido completada. ■

El resultado mencionado en el Lema 2.2.77 se sigue de las Proposiciones 2.2.78 y 2.2.80.

Para completar la prueba del Teorema 2.2.76 apelamos al Teorema 2.2.72 luego de notar que el operador

$$B(U) = -\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}F(x,y) \end{pmatrix}, \; U = (x; y) \in H,$$

es localmente lipschitziana sobre H. De hecho, lo anterior se sigue del hecho que $M^{-1/2}F$ es localmente lipschitziana, el cual actúa entre $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y $\mathscr{H}$ y la definición de la norma en V. Todos los enunciados en el Teorema 2.2.76 son consecuencias directas de las premisas en el Teorema 2.2.72 especializados en el sistema en cuestión. La estimación (2.98) fácilmente se sigue de la relación (2.88) dada en la nota 2.8.

NOTA 2.11. Asuma que los mapeos D y D_0 tienen propiedades de regularidad adicionales. Es decir, asumir que

$$D : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto V' \quad \text{y} \quad D_0 : Z \mapsto V'$$

son mapeos continuos. En este caso la condición de compatibilidad (2.97) puede ser escrita en la forma

$$u_0 + Gg(G^*\mathscr{A}u_1) \in W \equiv \left\{v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \,:\, \mathscr{A}v \in V'\right\} \quad (2.103)$$

y la solución fuerte $u(t)$ posee la propiedad

$$\mathscr{A}[u + Gg(G^*\mathscr{A}u_t)] \in C_r([0, t_{\text{máx}}); V').$$

Notamos que (2.103) es válido si $u_0 \in W$ y $u_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \cap \ker[G^*\mathscr{A}]$. Consecuentemente, si asumimos que el conjunto $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \cap \ker[G^*\mathscr{A}]$ es denso en V (lo cual es válido para muchas aplicaciones de operadores acotados), entonces las soluciones generalizadas en la segunda parte del Teorema 2.2.76 existen para cualquier dato inicial $(u_0; u_1)$ de $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. El punto es que la clausura de $\mathscr{D}(A)$ es denso en H en este caso.

La siguiente afirmación da condiciones suficientes para una solución generalizada que satisface (2.89) en un sentido (variacional) débil.

Proposición 2.2.81. *Adicionalment a la suposición 2.2.73 asuma que los mapeos*

$$v(t) \mapsto \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}v(t)), \quad v(t) \mapsto Dv(t) \text{ y } v(t) \mapsto D_0D_0^*v(t) \tag{2.104}$$

son continuas desde $C(0,T;V)$ hacia $L_1([0,T];[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/"})]')$ dotado con la topología débil. Entonces cualquier solución generalizada del problema (2.89) *y* (2.90) *es también débil; esto es, la relación*

$$\begin{aligned}(Mu_t(t),\phi) = (Mu_1,\phi) - \int_0^t [(\mathscr{A}u(\tau),\phi) + (\mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)),\phi) \\ + (Du_t(\tau) + D_0h(u(\tau)) + D_0D_0^*u_t(\tau),\phi) \\ - (F(u(\tau),u_t(\tau)) + \rho(\tau),\phi)]d\tau \end{aligned} \tag{2.105}$$

es válido para todo $\phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y para casi todo $t \in [0,T]$.

Prueba. Como cualquier solución fuerte satisface (2.105), podemos usar la relación (2.95) y la continuidad de los mapeos (2.104) para pasar con el límite en (2.105). ■

La primera suposición requerida por (2.104) es claramente restrictiva. En aplicaciones típicas para problemas de amortiguación acotados, la acotación del operador $G^*\mathscr{A}$ sobre V es también una fuerte suposición. Para compensar esto imponemos otro - tipo estructural - condición sobre la función g que nos permite modelar una gran variedad de mecanismos disipativos acotados. Con este fin especificamos más la naturaleza del mapeo monótono $g(u)$.

Suposición 2.2.82. Sea $g(z) = \partial\Phi(z)$ donde $\partial\Phi$ es un gradiente (Gateaux diferencial) de una función continua y convexa $\Phi : \mathscr{U}_0 \subset L_2(0,T;U) \to \mathbb{R}_+$ con $\Phi(0) = 0$, donde $\mathscr{U}_0$ es un espacio de Banach reflexivo tal que $\mathscr{U}_0 \subset L_2(0,T;U) \subset \mathscr{U}_0'$ con inyecciones continuas y densas. Donotamos por $(\cdot,\cdot)_{V,V'}$ al correspondiente emparejamiento de dualidad entre $\mathscr{U}_0$ y $\mathscr{U}_0'$ y asuma que

- **Acotación:** $g = \partial\Phi : \mathscr{U}_0 \to \mathscr{U}_0'$ es acotado y continuo.
- **Coercitividad:** $|z|_{\mathscr{U}_0} \leq C(\Phi(z))$ donde $C(s)$ es una función localmente acotada sobre $\mathbb{R}_+$.

Por la convexidad de Φ tenemos que

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) + (\partial\Phi(v), v - u)_{V,V'} \text{ para todo } v, u \in \mathscr{U}_0.$$

Esto implica que $g = \partial\Phi$ es un operador monótono. Así la Proposición 2.2.6 $g = \partial\Phi$ es continua y m-monótona.

NOTA 2.12. En aplicaciones típicas a amortiguaciones acotadas el espacio $\mathscr{U}_0$ es identificado con un conveniente espacio L_q del tipo $L_q(0,T;U_0)$. Por ejemplo, sea g el operador de Nemytskij $u(x) \mapsto |u(x)|^p u(x)$ desde $U_0 = L_{p+1}(\Gamma)$ hacia $U_0' = L_{(p+1)/p}(\Gamma)$. Entonces $\mathscr{U}_0 = L_{p+1}([0,T]\times\Gamma)$ y $\Phi(v) = (p+1)^{-1}\int_0^T\int_\Gamma |v(x,t)|^{p+1}\,dxdt$.

Proposición 2.2.83. *Adicionalmente a la suposición 2.2.73 asuma que la suposición 2.2.82 se satisface y*

$$v(t) \mapsto Dv(t) \quad \text{y} \quad v(t) \mapsto D_0D_0^*v(t) \tag{2.106}$$

son continuas desde $C(0,T;V)$ hacia $L_1(0,T;[\mathscr{D}(\mathscr{A})]')$ dotados con la topología débil. Entonces:

- *una solución generalizada del problema* (2.89) *y* (2.90) *es también débil; es decir, la relación* (2.105) *es válida para todo $\phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y para casi todo $t \in [0,T]$.*
- *Cada solución generalizada satisface $G^*\mathscr{A}u_t \in \mathscr{U}_0$.*
- *La siguiente estimación de estabilidad*

$$\begin{aligned} &\left|\mathscr{A}^{1/2}[u^1(t) - u^2(t)]\right|^2 + \left|u_t^1(t) - u_t^2(t)\right|_V^2 \\ &+ \int_s^t \left(g(G^*\mathscr{A}u_t^1) - g(G^*\mathscr{A}u_t^2), G^*\mathscr{A}(u_t^1 - u_t^2)\right)_{V,V'} d\tau \\ \leq\, & C_1\left|\mathscr{A}^{1/2}[u^1(s) - u^2(s)]\right|^2 + \left|u_t^1(s) - u_t^2(s)\right|_V^2 + C_2\left[\int_s^t |p_1(\tau) - p_2(\tau)|_{V'}\,d\tau\right]^2 \end{aligned} \tag{2.107}$$

es válida para cualquier par de soluciones generalizadas u^1 y u^2, donde $0 \leq s < t \leq T$ y las constantes C_1 y C_2 dependen de T y los límites de energía para las soluciones u^1 y u^2.

Prueba. Tomando en consideración los argumentos en la Proposición 2.2.81, el primer enunciado en la Proposición 2.2.83 es probada tan pronto como justifiquemos pasar con el límite sobre las soluciones fuertes cuando $n \to \infty$

$$\int_0^t (\mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t^n(\tau)), \phi)_{V,V'}d\tau \to \int_0^t (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)), G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'}d\tau \tag{2.108}$$

en casi todo lugar en t y para todo $\phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$. Para esto hacemos uso de la monotonicidad maximal del operador $\partial\Phi : \mathscr{U}_0 \to \mathscr{U}_0'$. A saber, primero notamos que la desigualdad de estabilidad en (2.107) es válida para cualquier par de soluciones fuertes u^1 y u^2. Por lo tanto para cualquier sucesión $\{u^n\}$ de soluciones fuertes correspondientes al forzamiento de términos $p^n \to p$ en $L_1((0,T),V')$ y datos iniciales $(u^n(0);u^n_t(0)) \to (u_0;u_1)$ en H tenemos que

$$\int_0^T (g(G^*\mathscr{A}u^n_t) - g(G^*\mathscr{A}u^m_t), G^*\mathscr{A}(u^n_t - u^m_t))_{V,V'}dt \qquad (2.109)$$
$$\leq C_T\left(\left|\mathscr{A}^{1/2}(u^n(0) -^m (0))\right| + |u^n_t(0) - u^m_t(0)|^2_V + |p^n - p^m|^2_{L_1(0,T;V')}\right)$$

para cada $m, n \geq 0$. En particular,

$$\int_0^T (g(G^*\mathscr{A}u^n_t, G^*\mathscr{A}(u^n_t)))_{V,V'}dt \leq \left(\left|\mathscr{A}^{1/2}u(0)\right|, |u_t(0)|_V, |p|_{L_1(0,T;V')}\right), \qquad (2.110)$$

lo cual, por la convexidad de Φ implica

$$\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t) \leq \int_0^T (\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t), G^*\mathscr{A}u^n_t)_{V,V'}dt$$
$$\leq C_T\left(\left|\mathscr{A}^{1/2}u(0)\right|, |u_t(0)|_V, |p|_{L_1(0,T;V')}\right) = C_T.$$

De la suposición 2.2.82 inferimos que $|G^*\mathscr{A}u^n_t|_{\mathscr{U}_0} \leq C_T$ y $|\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t)|_{\mathscr{U}'_0} \leq C_T$ con la correspondientes convergencias:

$$u^n_t \to u_t \text{ en } L_2(0,T;V), \quad G^*\mathscr{A}u^n_t \to G^*\mathscr{A}u_t, \text{ débilmente en } \mathscr{U}_0$$
$$\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t) \to l, \text{ débilmente en } \mathscr{U}'_0 \qquad (2.111)$$

Identificamos el límite l al demostrar que $l = \partial\Phi(G^*\mathscr{A}\,u_t)$. Para esto notamos primero que la estimación de estabilidad en (2.109) implican

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^T (\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t) - \partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^m_t), G^*\mathscr{A}(u^n_1 - u^m_t))_{V,V'}dt \to 0. \qquad (2.112)$$

Así, en conclusión, la igualdad $l = \partial\Phi(G^*\mathscr{A}u_t)$ se sigue ahora de (i) la m-monotonicidad de $\partial\Phi(z) : \mathscr{U}_0 \to \mathscr{U}'_0$; (ii) la convergencia débil en (2.111); y (iii) la condición en (2.112) por aplicación de la Proposición 2.2.7. Así

$$\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t) \to \partial\Phi(G^*\mathscr{A}u_t), \text{ débilemente en } \mathscr{U}'_0,$$
$$\int_0^T (\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u^n_t), G^*\mathscr{A}u^n_t)_{V,V'}dt \to \int_0^T (\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'}dt. \qquad (2.113)$$

Como $G^*\mathscr{A}$ es acotado $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \to U$, la primera afirmación en (2.113) nos permite concluir (2.108). Esto, a su vez, justifica la forma débil de igualdad variacional en (2.105).

La segunda afirmación en (2.113) nos permite pasar con el límite sobre la estimación de estabilidad con la retención del término

$$\int_0^T (\partial\Phi(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'}dt = \int_0^T (g(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'}dt$$

y se obtiene (2.107) para soluciones generalizadas. ■

Modelo no lineal simplificado

En esta sección consideramos el siguiente caso especial $(h = 0\,,\ D_0 = 0)$ del problema (2.89),

$$\begin{cases} Mu_{tt}(t) + \mathscr{A}u(t) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t) + Du_t(t) = F(u(t), u_t(t)) + p(t), \\ \\ u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \end{cases} \tag{2.114}$$

Aquí nuestras hipótesis respecto de M, $\mathscr{A}$ y $p(t)$ son las mismas que en la suposición 2.2.73. Las hipótesis con respecto a F son más fuertes en comparación que las otras dadas en la suposición 2.2.73 (5). El caso cuando la hipótesis sobre g también incluye la suposición 2.2.82 es también considerada. Condiciones adicionales impuestas sobre el mapeo no lineal F son propuestas para garantizar resolutividad global de las ecuaciones. Para la conveniencia del lector recolectamos a continuación todas las hipótesis usadas en este sección.

Suposición 2.2.84.

1. $\mathscr{A}$ es un operador lineal autoadjunto positivo y cerrado actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ con $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{H}$. Como antes denotamos por $|\cdot|$ a la norma de $\mathscr{H}$ y por $(\cdot,\cdot)$ al correspondiente producto escalar (y también el correspondiente emparejamiento de dualidad).

2. Sea $M : V \mapsto V'$ un operador lineal en un espacio de Hilbert tal que $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \subset V \subset \mathscr{H} \subset V' \subset \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})'$, todas las inyecciones vienen a ser continuas y densas. Además la forma (Mu, v) es simétrica sobre V y $(Mu, u) \geq \alpha_0 |u|_V^2$, donde $\alpha_0 > 0$ y $(\cdot,\cdot)$ es entendido como un emparejamiento de dualidad entre V y V'.

3. El operador no lineal $F : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V \mapsto V'$ es localmente lipschitziana, es decir

$$|F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)|_{V'} \leq L(K)\left(\left|\mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2)\right| + |v_1 - v_2|_V\right) \tag{2.115}$$

para todo $(u_i; v_i) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ tal que $\left|\mathscr{A}^{1/2}u_i\right|, |v_i|_V \leq K$. Además, asumimos que F tiene la forma

$$F(u, v) = -\Pi'(u) + F^*(u, v), \tag{2.116}$$

donde $\Pi(u)$ es un funcional C^1 sobre $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, $\Pi'(u)$ representa la derivada de Fréchet cuyo valor sobre un elemento w es dado por el producto interno $(\Pi'(u), w)$ para $u, w \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, y $F^*(u, v)$ es un mapeo (no lineal) de Lipschitz; esto es, existe $L^* > 0$ tal que

$$|F^*(u_1, v_1) - F^*(u_2, v_2)|_{V'} \leq L^*\left(\left|\mathscr{A}^{1/2}(u_1 - u_2)\right| + |v_1 - v_2|_V\right) \tag{2.117}$$

para todo $(u_i; v_i) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. También asumimos que

$$\Pi(u) = \Pi_0(u) + \Pi_1(u),$$

donde $\Pi_0(u) \geq 0$, $\Pi_0(u)$ es acotado sobre los conjuntos acotados de $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y $\Pi_1(u)$ posee la propiedad[3]: $\forall \eta > 0$, $\exists C_\eta > 0$ tal que

$$|\Pi_1(u)| \leq \eta \cdot \left(\left| \mathscr{A}^{1/2} u \right|^2 + \Pi_0(u) \right) + C_\eta \,, \quad u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \tag{2.118}$$

y $\lambda \mapsto (D(u + \lambda v), v)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ hacia sí mismo.

4. El operador G es el mismo como en el punto 4 de la suposición 2.2.73; es decir, $G : U_0' \mapsto \mathscr{H}$ es un operador lineal tal que $G^* \mathscr{A} : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto U_0$ es acotado (el caso $G \equiv 0$ es permitido). La función g satisface la suposición 2.2.73 (3), esto es, $g : U_0 \mapsto U_0'$ es un mapeo continuo tal que $g(0) = 0$ y $(g(v_1) - g(v_2), v_1 - v_2)_{V,V'} \geq 0$ para todo $v_1, v_2 \in U_0$. Aquí $U_0 \subset U \subset U_0'$ es un triple de Gelfand siendo U el pivote.

El modelo (2.114) es usado a continuación para estudiar ecuaciones evolución de von Karman con amortiguaciones internas y acotadas. Las hipótesis previas son motivadas por la estructura de la energía potencial de la placa. En algunas aplicaciones F^* puede ser interpretado como una fuerza no conservativa. Referimos [13] para una discusión de los problemas en la estructura de (2.114), sin embargo, bajo otro conjunto de hipótesis concernientes a F y para $g \equiv 0$, $G \equiv 0$.

Bajo la suposición previa el siguiente resultado bien planteado para el problema (2.114) es establecido.

Teorema 2.2.85. *Sea $T > 0$ arbitrario. Bajo la suposición 2.2.84 los siguientes enunciados son válidos.*

- **Solcuiones fuertes:** *Para todo $p \in W_1^1(0, T; V')$ y $(u_0; u_1) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ tal que $\mathscr{A}(u_0 + Gg(G^* \mathscr{A} u_1)) + D(u_1) \in V'$, existe una única solución fuerte sobre el intervalo $[0, T]$ tal que*

$$(u; u_t) \in C(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)$$

y la función $t \mapsto (u_t(t); u_{tt}(t))$ es débilmente continua en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. Además,

$$(u_t; u_{tt}) \in C_r(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V) \cap L_\infty(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V), \tag{2.119}$$

y

$$\mathscr{A}(u(t) + Gg(G^* \mathscr{A} u_t(t))) + Du_t(t) \in C_r(0, T; V') \cap L_\infty(0, T; V'). \tag{2.120}$$

[3]La relación (2.118) refleja el hecho de que la energía potencial $\Pi(u)$ es acotada inferiormente.

Como antes C_r aquí denota el espacio de las funciones continuas por la derecha. Esta solución satisface la relación de energía

$$\mathscr{E}(u(t), u_t(t)) + \int_0^t [Du_t(\tau), u_t(\tau) + (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)), G^*\mathscr{A}u_t(\tau))_{V,V'}]d\tau$$
$$= \mathscr{E}(u_0, u_1) + \int_0^t (F^*(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))d\tau, \qquad (2.121)$$

donde $\mathscr{E}(u_0, u_1) = E(u_0, u_1) + \Pi_1(u_0)$ *con*

$$E(u_0, u_1) = E_0(u_0, u_1) + \pi_0(u_0) \equiv \frac{1}{2}((Mu_1, u_1) + (\mathscr{A}u_0, u_0)) + \Pi_0(u_0).$$

- **Soluciones generalizadas:** *Asuma que el conjunto*

$$\mathscr{L} = \left\{(u_0; u_1) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) : \mathscr{A}[u_0 + Gg(G^*\mathscr{A}u_1)] + Du_1 \in V'\right\} \qquad (2.122)$$

es denso en el espacio $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ (*ver también Nota 2.13 debajo*). *Entonces para todo* $p \in L_1(0, T; V')$*,* $u_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$*,* $u_1 \in V$ *existe una única solución generalizada* $u(t)$ *tal que* $(u; u_t) \in C(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)$*.*

Tanto las soluciones fuertes como generalizadas satisfacen la desigualdad de energía

$$\mathscr{E}(u(t), u_t(t)) \leq \mathscr{E}(u_0, u_1) + \int_0^t (F^*(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))d\tau \qquad (2.123)$$

y también la estimación

$$E(u(t), u_t(t)) \leq c_0 \left(1 + E(u_0, u_1) + \left[\int_0^t |p(\tau)|_{V'} \, d\tau\right]^2\right) e^{c_1 t} \qquad (2.124)$$

para todo $t \in [0, T]$ *con algunas constantes* c_0 *y* c_1*.*

Si asumimos en adición que la suposición 2.2.82 está en vigor, entonces tenemos que $G^*\mathscr{A}u_t(t) \in \mathscr{U}_0$*. En este caso tanto las soluciones fuertes como generalizadas satisfacen la desigualdad de energía*

$$\mathscr{E}(u(t), u_t(t)) + \int_0^t (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau), G^*\mathscr{A}u_t(\tau)))_{V,V'}d\tau$$
$$\leq \mathscr{E}(u_0, u_1 + \int_0^t (F^*(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))d\tau. \qquad (2.125)$$

NOTA 2.13. Uno puede ver que el siguiente requerimiento

$$\mathscr{W} \equiv \ker[G^*\mathscr{A}] \cap \left\{v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) : D(v) \in V'\right\} \text{ es denso en } V, \qquad (2.126)$$

es una condición suficiente para la densidad del conjunto $\mathscr{L}$ dado por (2.122). De hecho, bajo la condición (2.126) el conjunto $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \times \mathscr{W}$ es denos en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ y pertenece a $\mathscr{L}$. Así en el Teorema 2.2.85 podemos reemplazar la densidad de $\mathscr{L}$ por la condición en (2.126). Esta última condición es conveniente en casos cuando el operador G es un mapeo de Green correspondiente a algunos problemas de valor límite.

Prueba. Por el Teorema 2.2.76 las soluciones fuertes y generalizadas existen sobre algún semi-intervalo $[0, t_{\text{máx}})$.

Sea $u(t)$ una solución fuerte. En este caso (2.114) es válido como una igualdad en V' para casi todo $t \in [0, t_{\text{máx}})$. Por lo tanto, multiplicando (2.114) por u_t en $\mathscr{H}$ luego de algunos cálculos estándar obtenemos

$$E_0(u(t), u_t(t)) + \int_0^t [(Du_t(\tau), u_t(\tau)) + (g(G^* \mathscr{A} u_t(\tau)), G^* \mathscr{A} u_t(\tau))_{V,V'}] d\tau$$

$$= E_0(u_0, u_1 + \int_0^t (F(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau)) d\tau \tag{2.127}$$

para $t \in [0, t_{\text{máx}})$. Es fácil ver de (2.125) que

$$(F(u(t), u_t(t)), u_t(t)) = -\frac{d}{dt}\Pi(u(t)) + (F^*(u(t), u_t(t)), u_t(t)), \quad t \in [0, t_{\text{máx}}).$$

Por lo tanto de (2.127) obtenemos la relación de energía (2.121) válido para la solución fuerte $u(t)$ y para $t \in [0, t_{\text{máx}})$. Notamos que (2.118), con una apropiada elección de η implica que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}E(u_0, u_1) - c \leq \mathscr{E}(u_0, u_1) \leq 2E(u_0, u_1) + c\,,\ u_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\,,\ u_1 \in V. \tag{2.128}$$

Denote

$$\tilde{E}(t) = 1 + \text{máx}\left\{E(u(\tau), u_t(\tau)) : \tau \in [0, t]\right\}.$$

Usando (2.121) y (2.128) obtenemos que

$$\tilde{E}(t) \leq c(1 + E(u_0, u_1)) + 2\int_0^t |(F^*(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))|\, d\tau$$

con alguna constante $c > 0$. De (2.117) también tenemos que

$$(F^*(u(\tau), u_t(\tau)), u_t(\tau)) \leq c_0 E(u(\tau), u_t(\tau)) + c_1 \leq c_2 \tilde{E}(\tau)$$

con algunas constantes c_i. Por lo tanto

$$\tilde{E}(t) \leq c_1(1 + E(u_0, u_1)) + c_2\int_0^t \tilde{E}(t)d\tau + 2\left(2\tilde{E}(t)\right)^{1/2} \cdot \int_0^t |p(\tau)|_{V'}\, d\tau.$$

Esto implica

$$\tilde{E}(t) \leq c_0\left(1 + E(u_0, u_1) + \left[\int_0^t |p(\tau)|_{V'}\, d\tau\right]^2\right) + c_1\int_0^t \tilde{E}(\tau)d\tau$$

con algunas constantes c_0 y c_1. De aquí por el lema de Gronwall tenemos

$$\tilde{E}(t) \leq c_0\left(1 + E(u_0, u_1) + \left[\int_0^t |p(\tau)|_{V'}\, d\tau\right]^2\right) e^{c_1 t}\,, \quad t \in [0, t_{\text{máx}}).$$

Después de reescalar constantes obtenemos

$$E(u(t), u_t(t)) \leq c_0 \left(1 + E(u_0, u_1) + \left[\int_0^t |p(\tau)|_{V'} \, d\tau \right]^2 \right) e^{c_1 t}, \quad t \in [0, t_{\text{máx}}),$$

con algunas contantes c_0 y c_1. Usando (2.95) y la continuidad de $E(u, u_t)$ es fácil determinar que la última relación es cierta también para soluciones generalizadas. Así la tercera parte del Teorema 2.2.76 implica la existencia global (y la unicidad) de las soluciones fuertes y generalizadas.

Enfatizamos que las soluciones generalizadas existen para *todo* dato inicial $(u_0; u_1) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. Esto es debido a que el conjunto $\mathscr{L}$, dado por (2.122), coincide con el dominio $\mathscr{D}(A)$ del correspondiente operador acumulativo (ver (2.93)) en la prueba del Teorema 2.2.76.

La desigualdad en (2.123) es obvia para soluciones fuertes. Para soluciones generalizadas se sigue fácilmente mediante el proceso de limitación.

Si la suposición 2.2.82 está en vigor, entonces la inclusión $G^* \mathscr{A} u_t(t) \in \mathscr{U}_0$ y la desigualdad de energía en (2.125) se sigue del argumento dado en la prueba de la Proposición 2.2.83. ■

NOTA 2.14. Si se sigue de (2.98) que para cualquier par de soluciones generalizadas $u^1(t)$ y $u^2(t)$ del problema (2.114) con datos iniciales $(u_0^i; u_1^i)$ y con la misma función $p(t)$ el estimado

$$\left| \mathscr{A}^{1/2}[u^1(t) - u^2(t)] \right| + \left| u_t^1(t) - u_t^2(t) \right|_V \leq C \left(\left| \mathscr{A}^{1/2}[u_0^1 - u_0^2] \right| + \left| u_1^1 - u_1^2 \right|_V \right)$$

es válido para cualquier $0 < t < T$, donde la constante C depende de T y de las energías $E_0(u_0^i, u_1^i)$, $i = 1, 2$. En particular, si $p \in W_1^1(0, T; V')$, entonces para cualquier solución generalizada $u(t)$ podemos escoger una sucesión de datos iniciales y las correspondientes soluciones fuertes $u_n(t)$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \left| \mathscr{A}^{1/2}[u(t) - u_n(t)] \right| + |u_t(t) - u_{nt}(t)|_V \right\} = 0.$$

Así en este caso la construcción de una solución generalizada puede ser aproximada solamente con los datos iniciales (ver Nota 2.9).

NOTA 2.15. En este caso cuando $F^* \equiv 0$ y $p(t) \equiv p$ (caso autónomo) la energía completa $\mathscr{E}(u(t), u_t(t)) - (p, u(t))$ no es creciente a lo largo de las trayectorias. Sin embargo, en general, el sistema dinámico puede no poseer esta propiedad, como es muy a menudo el caso cuando el término F^* es presentado en el modelo.

La siguiente afirmación muestra que bajo algunas condiciones adicionales la desigualdad de energía (2.125) válida para soluciones generalizadas puede ser expresada en una forma más fuerte.

Proposición 2.2.86. *En adición a las suposiciones 2.2.84 y 2.2.82, asuam que existe una función convexa* $\varphi : V \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tal que*

- *φ es semicontinua inferiormente sobre V; esto es,*

$$\{v_n \to v \text{ en } V\} \Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \geq \varphi(v);$$

- *$\varphi(v) \leq (Dv, v)$ para cualquier $v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$.*

Entonces cualquier solución generalizada $u(t)$ del problema (2.114) *satisface la desigualdad de energía de la forma*

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(u(t), u_t(t)) + \int_s^t [\varphi(u_t(\tau)) + (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)), G^*\mathscr{A}u_t(\tau))_{V,V'}]d\tau \\ \leq\ &\mathscr{E}(u(s), u_t(s)) + \int_s^t (F^*(u(\tau), u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{2.129}$$

para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Prueba. Sea $u(t)$ una solución generalizada y $\{u^n(t)\}$ una sucesión de soluciones fuertes tales que (2.95) es válido. Usamos la relación de energía

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(u^n(t), u^n_t(t)) + \int_s^t [(Du^n_t(\tau), u^n_t(\tau)) + (g(G^*\mathscr{A}u^n_t(\tau)), G^*\mathscr{A}u^n_t(\tau))_{V,V'}]d\tau \\ \leq\ &\mathscr{E}(u^n(s), u^n_t(s)) + \int_s^t (F^*(u^n(\tau), u^n_t(\tau)) + p^n(\tau), u^n_t(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{2.130}$$

Como la energía $\mathscr{E}(u, u_t)$ es continua sobre $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$, la relación (2.95) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{E}(u^n(t), u^n_t(t)) = \mathscr{E}(u(t), u_t(t)) \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Usando la propiedad de Lipschitz (2.117) de F^* y la relación (2.95), otra vez, es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^t (F^*(u^n(\tau), u^n_t(\tau)), u^n_t(\tau))d\tau = \int_s^t (F^*(u(\tau), u_t(\tau)), u_t(\tau))d\tau.$$

Por (2.95) y (2.96) tenemos también que

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^t (p^n(\tau), u^n_t(\tau))d\tau = \int_s^t (p(\tau), u_t(\tau))d\tau.$$

Como φ es semicontinua inferiormente, por el lema de Fatou tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_s^t (Du^n_t(\tau), u^n_t(\tau))d\tau \geq \int_s^t \liminf_{n\to\infty} \varphi(u^n_t(\tau))d\tau \geq \int_s^t \varphi(u_t(\tau))d\tau. \tag{2.131}$$

También se sigue del argumento dado en la prueba de la Proposición 2.2.83 (ver la segunda relación en (2.113)) que

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t (g(G^*\mathscr{A}u_t^n), G^*\mathscr{A}u_t^n)_{V,V'}d\tau = \int_s^t (g(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'}d\tau.$$

Así, la relación (2.129) se sigue de (2.130). ■

El enunciado previo da una condición bajo la cual las soluciones generalizadas satisfacen la identidad de la energía (2.121) y también una forma (variacional) débil de la ecuación (2.114). Las condiciones requeridas son bastante exigentes, y por lo tanto de aplicabilidad limitada.Sin embargo, por el motivo de la completitud ofrecemos una formulación concisa con una breve prueba.

Proposición 2.2.87. *Sean las hipótesis del Teorema 2.2.85 (junto con la suposición 2.2.82) válidas. Asuma adicionalmente que el operador D mapea V hacia V' y es un operador monótono hemicontinuo acotado sobre conjuntos acotados; esto es,*

$$\sup\{|D(v)|_{V'} : v\in V\,,\ |v|_V\leq\rho\}<\infty \text{ para cualquier } \rho>0. \tag{2.132}$$

Entonces las soluciones generalizadas satisfacen la relación (2.121)*. Además, cualquier solución generalizada es también débil: la relación*

$$\begin{aligned}(Mu_t(t),\psi) = (Mu_1,\psi) - \int_0^t ((\mathscr{A}u(\tau),\psi) + (Du_t(\tau),\psi) \\ + (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)), G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'} - (F(u(\tau),u_t(\tau)) + p(\tau),\psi))d\tau\end{aligned} \tag{2.133}$$

es válida para todo $\psi\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y para casi todo $t\in[0,T]$.

***Prueba**.* La premisa de que las soluciones generalizadas son también débiles fácilmente se sigue de la Proposición 2.2.83.

Vamos a probar la igualdad de energía (2.121) para soluciones generalizadas (débiles).

Como el argumento dado en la prueba de la Proposición 2.2.86 muestra que para obtener (2.121) necesitamos solamente verificar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (Du_t^n(\tau), u_t^n(\tau))d\tau = \int_0^t (Du_t(\tau), u_t(\tau))d\tau, \tag{2.134}$$

donde $u(t)$ es una solución generalizada y $\{u^n(t)\}$ es una sucesión de soluciones fuertes tales que (2.95) es válido.

Por la Proposición 2.2.6 (4) $D : V \mapsto V'$ es semicontinua; esto es, $D^n(t)\to Du(t)$ débilmente en V' para todo t y de aquí

$$\lim_{n\to\infty}(Du_t^n(\tau), u_t^n(\tau)) = (Du_t(\tau), u_t(\tau))\,,\quad \tau\in[0,T].$$

Así (2.132) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implican (2.134). ■

NOTA 2.16. Suponga que el operador D tiene la forma $D = D_1 + D_2$, donde el operador D_1 posee la propiedad descrita en el enunciado dela Proposición 2.2.86 con alguna función convexa semicontinua inferiormente φ y el operador D_2 disfruta de los requerimientos de la Proposición 2.2.87. Entonces los mismos argumentos como en las Proposiciones 2.2.86 y 2.2.87 muestran que cualquier solución generalizada satisface la desigualdad de energía de la forma

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(u(t),u_t(t)) + \int_s^t [\varphi(u_t(\tau)) + (D_2u_t(\tau),u_t(\tau)) + (g(G^*\mathscr{A}u_t(\tau)), G^*\mathscr{A}u_t(t))_{V,V'}]d\tau \\ \leq \mathscr{E}(u(s),u_t(s)) + \int_s^t (F^*(u(\tau),u_t(\tau)) + p(\tau), u_t(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

También podemos sugerir otras versiones de suposiciones adicionales concernientes a D que garantizan la validez de la relación de energía (2.121) y la igualdad variacional (2.133) para soluciones generalizadas. Por ejemplo, uno puede formular condiciones con respecto a D en el espíritu de la suposición 2.2.82 con referencia al argumento dado en la Proposición 2.2.83. Sin embargo, por el motivo de la simplicidad, preferimos considerarlos en el contexto de modelos concretos.

Problema no homogéneo lineal

En esta sección consideramos la siguiente ecuación lineal abstracta de segundo orden

$$\begin{aligned}&Mu_{tt}(t) + \mathscr{A}u(t) + \mathscr{A}G[gG^*\mathscr{A}u_t(t) + \psi(t)] \\ &+ D_0h(t) + D_0D_0^*u_t(t) + Du_t(t) = p(t)\,,\ t>0,\end{aligned} \tag{2.135}$$

con los siguientes datos iniciales

$$u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{2.136}$$

donde a las funciones ψ, h y p se les dan términos de forzamiento. Consideramos el problema (2.135) bajo la siguiente hipótesis permanente.

Suposición 2.2.88.

- Los operadores M, $\mathscr{A}$, G, y D_0 satisfacen los requerimientos listados en la suposición 2.2.73.
- Los operadores

  $$D:\ \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto \left[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\right]' \ \text{ y } g: U \mapsto U$$

  son operadores lineales monótonos.
- Las funciones ψ, h y p poseen las propiedades

  $$\psi(t) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+;U)\,, \quad h(t)\in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+;Z)\,, \quad p(t)\in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+;V'). \tag{2.137}$$

Si $\psi \equiv 0$ y $h \equiv 0$, entonces podemos aplicar nuestro principal Teorema 2.2.76 para obtener un resultado de existencia y unicidad para el problema (2.135) y (2.136). También podemos reducir el caso al Teorema 2.2.76 bajo la condición

$$\mathscr{A}G\psi(t) + D_0h(t) + D_0h(t) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+; V'). \tag{2.138}$$

Sin embargo, la condición en (2.138) es muy restrictiva, debido a la potencial incompatibilidad entre el dominio de $\mathscr{A}$ y el rango de G. Por esta razón consideramos a paso más general.

Comenzamos con la siguiente afirmación sobre la existencia global de soluciones fuertes.

Proposición 2.2.89. (Soluciones fuertes). *Sea válida la suposición 2.2.88 y*

$$\psi \in W_1^2(0,T;U)\,, \quad -D_0h + p \in W_1^1(0,T;V') \tag{2.139}$$

para cada $T > 0$. Asuma que $u_0 \in \mathscr{D}\,(Acali^{1/2})$ y $u_1 \in \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$ tales que

$$\mathscr{A}[u_0 + Gg(G^*\mathscr{A}u_1) + G\psi(0)] + Du_1 + D_0D_0^*u_1 \in V'. \tag{2.140}$$

Entonces el problema (2.135) *y* (2.136) *posee una única solución sobre $\mathbb{R}_+$ tal que*

$$(u; u_t) \in C(\mathbb{R}_+;\, \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V), \tag{2.141}$$

$$(u_t; u_{tt}) \in C_r(\mathbb{R}_+;\, \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;\, \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V), \tag{2.142}$$

$$\mathscr{A}[u + Gg(G^*\mathscr{A}u_t) + G\psi] + Du_t + D_0D_0^*u_t \in C_r(\mathbb{R}_+; V'). \tag{2.143}$$

Aquí, como antes, denotamos por C_r al espacio de todas las gunciones que son continuas por la derecha. Además, la función $t \mapsto (u_t(t); u_{tt}(t))$ es débilmente continua en $\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ y tenemos la siguiente relación de energía

$$E_0(u(t), u_t(t)) + \int_0^t [(Du_t, u_t) + (g(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'} + |D_0^*u_t|_Z^2]d\tau \tag{2.144}$$

$$= E_0(u_0, u_1) + \int_0^t + \int_0^t [-(\psi, G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'} - (h, D^*u_t)_Z + (p, u_t)]d\tau, \tag{2.145}$$

donde, como en otras menciones, $E_0(u_0, u_1) = \frac{1}{2}[(Mu_1, u_1) + (\mathscr{A}u_0, u_0)]$.

Prueba. Cuando $\psi = 0$, la conclusión de la Proposición 2.2.89 se sigue directamente de los resultados abstractos de la sección previa. De hecho, el Teorema 2.2.76 implica la existencia de una única solución local fuerte $u(t)$ que satisface la relación (2.144) sobre cada intervalo de existencia. Por (2.139) esta relación implica que

$$E_0(u(t), u_t(t)) \leq E_0(u_0, u_1) + \int_0^t |-D_0h(\tau) + p(\tau)|_{V'}\, |u_t(\tau)|_V\, d\tau$$

para todo $t \geq 0$, que hace posible establecer a priori una apropiada estimación y usa el tercer enunciado del Teorema 2.2.76 para obtener la existencia global de soluciones fuertes.

Cuando $\psi \neq 0$, la situación es un poco más adecuada. El Teorema 2.2.76 no aplica directamente. Esto es debido al hecho de que un elemento $\mathscr{A}G\psi$ puede no estar en V', no importa cuan suave sea ψ. De hecho, esta es un situación típica con entradas acotadas, donde la incompatibilidad entre el dominio de $\mathscr{A}$ y el rango de G es muy fuerte. Para hacer frente al asunto usamos una formulación equivalente del problema mediante teoría de semigrupos. Para este fin introducimos el operador

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}\mathscr{A} & M^{-1}[\mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}) + D + D_0D_0^*] \end{pmatrix}, \tag{2.146}$$

donde $A : D(A) \subset H \mapsto H$, $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$, y

$$D(A) = \left\{ U = (u_1; u_2) \in H \,\middle|\, \begin{array}{l} u_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}),\ u_2 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}), \\ \mathscr{A}u_1 + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_2) + Du_2 + D_0D_0^*u_2 \in V' \end{array} \right\}.$$

Notamos que este operador tiene la forma de (2.93) con $h \equiv 0$. por lo tanto por el Lema 2.2.77 (ver también la Proposición 2.2.78 que es válida en nuestro caso con $L = 0$) el operador A es un operador lineal m-acumulativo en H. Así por la Proposición 4.6 en [27] A está densamente definida y por el Teorema de Lumer-Phillips (ver por ejemplo Teorema 4.3 en [27]) el operador $-A$ es un generador de un semigrupo de contracción e^{-At} sobre $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$.

Note que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\mathscr{A}G\psi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} G\psi \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1^2(0, T; [\mathscr{D}(A)]')$$

debido al hecho de que $(G\psi; 0) \in W_1^2(0, T; H)$. En adición, sobre la fuerza de la hipótesis en (2.139) tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}p - M^{-1}D_0h \end{pmatrix} \in W_1^1(0, T; H).$$

Así, estamos en posición de escribir debajo la representación en semigrupo de la solución $U = (u; u_t)$ al problema no homogéneo (2.135):

$$U(t) = e^{-At}U_0 + \int_0^t Ae^{-A(t-s)} \begin{pmatrix} -G\psi(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_0^t e^{-A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ ; M^{-1}(p - D_0h) \end{pmatrix} ds.$$

Integrando la primera integral por partes (con valores en $[\mathscr{D}(A)]'$) se sigue

$$U(t) = e^{-At}U_0 - e^{-A(t-s)} \begin{pmatrix} G\psi(s) \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t e^{-A(t-s)} \begin{pmatrix} G\psi_t(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds$$
$$\int_0^t e^{-A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}(p - D_0h) \end{pmatrix} ds.$$

Introduciendo la notación

$$\widehat{U}(t) \equiv \begin{pmatrix} \widehat{u}_1(t) \\ \widehat{u}_2(t) \end{pmatrix} = U(t) + \begin{pmatrix} G\psi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) + G\psi(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix},$$

llegamos al problema

$$\widehat{U}_t + A\widehat{U} = \mathscr{F} \equiv \begin{pmatrix} G\psi_t \\ M^{-1}p - M^{-1}D_0 h \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}(0) = \begin{pmatrix} u_0 + G\psi(0) \\ u_1 \end{pmatrix}. \tag{2.147}$$

Así, por el Teorema 2.2.67 el problema (2.147) admite soluciones fuertes $\widehat{U}(t)$ siempre que $\widehat{U}(0) \in \mathscr{D}(A)$ y $\mathscr{F} \in W_1^1(0,T;H)$. En nuestro caso estas propiedades son garantizadas por la compatibilidad de las condiciones en (2.139) y (2.140).

Aplicando el método de enegría estándar a la ecuación (2.147) se sigue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left|\widehat{U}(t)\right|_H^2 - \frac{1}{2}\left|\widehat{U}(0)\right|_H^2 + \int_0^t (g(G^*\mathscr{A}\widehat{u}_2), G^*\mathscr{A}\widehat{u}_2)_{V,V'} ds \\ &+ \int_0^t |D_0^*\widehat{u}_2|^2 + \int_0^t (D\widehat{u}_2, \widehat{u}_2) ds = \int_0^t (G\psi_t, \mathscr{A}\widehat{u}_1) ds + \int_0^t (p - D_0 h, \widehat{u}_2) ds. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Usando las relaciones $\widehat{u}_1 = u + G\psi$ y $\widehat{u}_2 = u_t$ tenemos que

$$\left|\widehat{U}(t)\right|_H^2 = |U(t)|_H^2 + 2(\mathscr{A}^{1/2}G\psi(t), \mathscr{A}^{1/2}u(t)) + \left|\mathscr{A}^{1/2}G\psi(t)\right|^2$$

y

$$\int_0^t (G\psi_1, \mathscr{A}\widehat{u}_1) ds = \left[\frac{1}{2}\left|\mathscr{A}^{1/2}G\psi(s)\right|^2 + (G\psi(s), \mathscr{A}u(s))\right]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t (G\psi, \mathscr{A}u_t) ds.$$

Así la relación (2.148) es equivalente a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|U(t)|_H^2 + \int_0^t (g(G^*\mathscr{A}u_t), G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'} ds + \int_0^t (Du_t, u_t) ds + \int_0^t |D_0^* u_t|^2 ds \\ &= \frac{1}{2}|U(0)|_H^2 - \int_0^t (\psi, G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'} ds + \int_0^t (p - D_0 h, u_t) ds, \end{aligned}$$

la cual es precisamente la identidad de energía en (2.144). ■

Notamos que el término $D_0 h$ puede escribirse como $D_0 h = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}D_0 h = \mathscr{A}G_1 h$, donde $G_1 = \mathscr{A}^{-1}D_0 : Z \mapsto \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ es acotado. Así, este término puede ser tratado en exactamente la misma manera que el término $\mathscr{A}G\psi$. En vista de esta observación, podemos reafirmar la proposición 2.2.89 en la siguiente forma.

Proposición 2.2.90. (Soluciones fuertes). *Sea válida la suposición 2.2.88 y*

$$\psi \in w_1^2(0,T;U), \quad h \in W_1^2(0,T;Z), \quad p(t) \in W_1^1(0,T;V') \tag{2.149}$$

para todo $T > 0$. Asuma que $u_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ y $u_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ tal que

$$\mathscr{A}[u_0 + Gg(G^*\mathscr{A}u_1) + G\psi(0)] + Du_1 + D_0h(0) + D_0D_0^*u_1 \in V'. \tag{2.150}$$

Entonces el problema (2.135) *y* (2.136) *posee una única solución fuerte sobre $\mathbb{R}_+$ que posee las propiedades* (2.141) *y* (2.142) *y también satisface la relación*

$$\mathscr{A}[u + Gg(G^*\mathscr{A}u_t) + G\psi] + Du_t + D_0h + D_0D_0^*u_t \in C_r(\mathbb{R}_+; V'). \tag{2.151}$$

Además, la función $t \mapsto (u_t(t); u_{tt}(t))$ es débilmente continua en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ y la relación de energía (2.144) *es válida.*

Notamos que en contraste a la Proposición 2.2.89, la Proposición 2.2.90 asume más la suavidad de la función $h(t)$ pero no asume su compatibilidad con la fuerza $p(t)$.

Para estudiar las propiedades de regularidad de un problema no lineal con condiciones acotadas no lineales necesitamos una afirmación más general que lidie con soluciones débiles y generalizadas del problema lineal (2.135).

La solución generalizada de (2.135) y (2.136) es entendida como el límite de una sucesión de soluciones fuertes u^n con datos convergentes $\{u_0^n, u_1^n, \psi^n, h^n, p^n\}$. También recordamos la noción de soluciones débiles.

Definición 2.2.91. Una función $u(t)$ es llamada solución débil del problema (2.135) y (2.136) sobre el intervalo $[0, T]$ si $(u; u_t) \in L_2(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)$, $u(0) = u_0$, y $u(t)$ satisface la relación

$$\begin{aligned} &-\int_0^T [(Mu_t, \phi_t) + (Du, \phi_t) + (gG^*\mathscr{A}u, G^*\mathscr{A}\phi_t)_{V,V'} + (D_0^*u, D_0^*\phi_t)_Z]d\tau \\ &+\int_0^T (\mathscr{A}u, \phi)d\tau + \int_0^T [(\psi, G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'} + (h, D_0^*\phi)_Z - (p, \phi)]d\tau \\ &= (Mu_1 + Du_0\phi(0)) + (gG^*\mathscr{A}u_0G^*\mathscr{A}\phi(0))_{V,V'} + (D_0^*u_0D_0^*\phi(0))_Z \end{aligned} \tag{2.152}$$

para cualquier $\phi \in W_2^1(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))$ tal que $\phi(T) = 0$.

NOTA 2.17. Otra formulación equivalente de soluciones débiles envolucra funciones de prueba estática ϕ. En lugar de (2.152) uno puede tomar

$$\begin{aligned} &(Mu_t(t)) + (Du(t), \phi) + (gG^*\mathscr{A}u(t), G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'} + (D_0^*u(t), D_0^*\phi)_Z \\ &+\int_0^t (\mathscr{A}u, \phi)d\tau + \int_0^t [(\psi, G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'}(h, D_0^*\phi)_Z - (p, \phi)]d\tau \\ &= (Mu_1 + Du_0, \phi) + (gG^*\mathscr{A}u_0, G^*\mathscr{A}\phi)_{V,V'} + (D_0^*u_0, D_0^*\phi)_Z \end{aligned} \tag{2.153}$$

para cualquier $\phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$.

Para la existencia de soluciones débiles y generalizadas también necesitamos las siguientes hipótesis.

Suposición 2.2.92.

- Si $\psi \not\equiv 0$, entonces $(gu, u)_{V,V'} \geq \alpha |u|_U^2$ para todo $u \in U$ y para algún $\alpha > 0$.
- Las funciones ψ, h y p poseen las propiedades

$$\psi(t) \in L_2(0,T;U)\,, \quad h(t) \in L_2(0,T:Z)\,, \quad p(t) \in L_1(0,T;V') \tag{2.154}$$

para cualquier $T > 0$.

Teorema 2.2.93. (Soluciones débiles y generalizadas). *Sean válidas las suposiciones 2.2.88 y 2.2.92. Entonces para cualquier dato inicial* $(u_0; u_1) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ *el problema* (2.135) *y* (2.136) *posee una única solución generalizada tal que*

$$(u; u_t) \in C(0,T;\, \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V) \tag{2.155}$$

y

$$\begin{gathered}\partial_t\left[D_{\mathsf{sym}}^{1/2}u\right] \in L_2^{loc}([0,+\infty),\, \mathscr{H})\\ \partial_t[G^*\mathscr{A}u] \in L_2^{loc}([0,+\infty),U)\,, \quad \partial_t[D_0^*u] \in L_2^{loc}([0,+\infty),Z),\end{gathered} \tag{2.156}$$

donde D_{sym} *es el operador autoadjunto generado por la forma bilineal* $(D_{\mathsf{sym}}\phi,\psi) = \frac{1}{2}[(D\phi,\psi) + (\phi, D\psi)]$ *para* $\phi,\psi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$. *Además, la solución* u *es también débil y satisface la relación de energía* (2.144)*, donde usamos las identificaciones* $D_{\mathsf{sym}}^{1/2}u_t = \partial_t = \partial_t\left[D_{\mathsf{sym}}^{1/2}u\right]$, $G^*\mathscr{A}u_t = \partial_t[G^*\mathscr{A}u]$, *y* $D_0^*u_t = \partial_t[D_0^*u]$.

Las soluciones débiles de (2.135) *son únicas. También son generalizadas. En particular, cualquier solución débil posee las propiedades* (2.155) *y* (2.156) *y satisface la relación de energía* (2.144).

Prueba. Empezamos con la siguiente observación que se sigue de la igualdad de energía (2.144): para cualquier solución fuerte $u(t)$ (dada la Proposición 2.112 o Proposición 2.2.90) por el argumento de tipo estándar de Gronwall (ver la prueba de la desigualdad en (2.124)) tenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned}E_0(u(t),u_t(t)) + \int_0^t (Du_t,u_t)ds + \alpha\int_0^t |G^*\mathscr{A}u_t|_U^2\,ds + \int_0^t |D_0^*u_t|_Z^2\,ds\\ \leq C_1E_0(u_0,u_1) + C_2\int_0^t [|\psi|_U^2 - |h|_Z^2]ds + C_3\left[\int_0^t |p|_{V'}\,ds\right]^2.\end{aligned} \tag{2.157}$$

La desigualdad anterior, controlada por normas L_2 de los términos forzosos ψ y h y por las normas L_1 de p, es una clave que prueba la existencia de soluciones débiles o generalizadas.

Sean $\psi^n \in W_1^2(0,T;U)$ y $h^n \in W_1^2(0,T;Z)$ tales que $\psi_n(0)$, $h_n(0) = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^T |\psi(t) - \psi^n(t)|_U^2\,dt + \int_0^T |h(t) - h^n(t)|_Z^2\,dt\right\} = 0. \tag{2.158}$$

Escogemos p^n tal que

$$p^n \in W_1^1(0,T;V'), \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^T |p(t) - p^n(t)|_{V'} \, dt = 0.$$

y $(u_0^n; u_1^n) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, tal que $(u_0^n; u_1^n) \to (u_0; u_1)$ en $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ y

$$\mathscr{A}[u_0^n + Gg(G^*\mathscr{A}u_1^n)] + Du_1^n + D_0D_0^*u_1^n \in V'.$$

Esta elección de $(u_0^n; u_1^n)$ es posible para cualquier $(u_0; u_1) \in H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ pues el dominio $\mathscr{D}(A)$ del operador A dado por (2.146) es denso en H.

Denotamos por u^n la correspondiente solución fuerte (que existe debido a la Proposición 2.2.90). Sea $u^{n,m} = u^n - u^m$. Como $u^{n,m}$ es una solución fuerte de algún problema lineal de la forma (2.135), se sigue de (2.157) que

$$\begin{aligned}
&E_0(u^{n,m}(t), u_t^{n,m}(t)) + \int_0^t \left[\left| D_{\mathsf{sym}}^{1/2} u_t^{n,m} \right|^2 + \alpha \left| G^*\mathscr{A}u_t^{n,m} \right|_U^2 + \left| D_0^* u_t^{n,m} \right|_Z^2 \right] d\tau \\
&\leq c_1 E_0(u^{n,m}, u_1^{n,m}) + c_2 \int_0^t \left[|\psi^n - \psi^m|_U^2 + |h^n - h^m|_Z^2 \right] d\tau \\
&\quad + c_3 \left[\int_0^t |p^n - p^m|_{V'} \, d\tau \right]^2 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{[0,T]} E_0(u^{n,m}(t), u_t^{n,m}(t)) = 0$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \left[\left| D_{\mathsf{sym}}^{1/2} u_t^{n,m} \right|^2 + \alpha \left| G^*\mathscr{A}u_t^{n,m} \right|_U^2 + \left| D_0^* u_t^{n,m} \right|_Z^2 \right] d\tau = 0.$$

Por lo tanto existe una función $u(t)$ que posee las propiedades (2.155) y (2.156) tal que

$$\lim_{n,m\to\infty} \max_{[0,T]} \left\{ \left| M^{1/2}(u_t^n - u_t) \right|^2 + \left| \mathscr{A}^{1/2}(u^n - u) \right|^2 \right\} = 0$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \left[\left| D_{\mathsf{sym}}^{1/2}(u_t^n - u_t) \right|^2 + \left| G^*\mathscr{A}(u_t^n - u_t) \right|_U^2 + \left| D_0^*(u_t^n - u_t) \right|_Z^2 \right] d\tau = 0.$$

Así $u(t)$ es una solución generalizada del problema (2.135) y (2.136). Además, la convergencia anterior hace posible probar que $u(t)$ satisface la igualdad de energía (2.144) y la relación variacional (2.152); esto es, $u(t)$ es también una solución débil.

Para probar la unicidad de las soluciones débiles notamos que la diferencia $u(t)$ de dos soluciones débiles satisface la relación

$$\int_0^T [(Mu_t, \phi_t) + (Du, \phi_t) + (gG^* \mathscr{A} u, G^* \mathscr{A} \phi_t)_{V,V'} + (D_0^* u, D_0^* \phi_t)_Z - (\mathscr{A} u, \phi)] d\tau = 0$$

para cualquier $\phi \in W_2^1(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))$ tal que $\phi(T) = 0$. Por lo tanto, si escogemos

$$\phi(t) \equiv \phi^s(t) = \begin{cases} -\int_t^s u(\tau) d\tau\,, & 0 \leq t \leq s; \\ 0\,, & s < t \leq T, \end{cases}$$

para $s \in [0, T]$, entonces usando la misma idea como en [26, Capítulo 3] podemos probar que $u(t) = 0$ para casi todo $t \in [0, T]$. Esto completa la prueba del Teorema 2.2.93. ■

NOTA 2.18. También podemos notar que a priori la misma cota como en (2.157) puede ser obtenida por modelos de la forma (2.135) con operadores amortiguadores no lineales D y g bajo suposiciones de monotonicidad impuestas sobre D y g como en la suposición 2.2.73. En el caso de espacios separables esto puede ser logrado fácilmente usando el método de Galerkin junto con la convergencia débil. Este método produce el resultado sobre la existencia de soluciones débiles bajo el siguiente conjunto (adicional) de suposiciones.

- el operador $g : U \mapsto U$ posee la propiedad $(g(u), u)_{V,V'} \geq \alpha \, |u|_U^2$ para algún $\alpha > 0$ y es débilmente continuo como un mapeo que va de $L_2(0, T; U)$ hacia sí mismo.
- El operador D mapea $L_\infty(0, T; V)$ hacia $L_2(0, T; [\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]')$ continuamente con respecto a la topología $*$-débil.
- Las funciones ψ, h y p poseen la propiedad (2.154).

En este caso las soluciones débiles existen en el espacio $C_w(0, T; H)$ y poseen la propiedad adicional: $G^* \mathscr{A} u_t \in L_2(0, T; U)$. El argumento se basa en la igualdad de energía

$$E_0(u(t), u_t(t)) + \int_0^t |G^* \mathscr{A} u_t|_U^2 \, d\tau \leq E_0(u_0, u_1)$$
$$+ C \int_0^t \left[|\psi(t)|_U^2 + |h(t)|_Z^2 + |p(t)|_{V'} \, |u_t|_V \right] d\tau.$$

Como un caso particular del problema (2.135) consideramos el siguiente problema que puede ser visto como un “oscilador armónico abstracto”.

$$\begin{cases} Mu_{tt}(t) + \mathscr{A} u(t) + Du_t(t) = p(t) \\ \\ u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \end{cases} \tag{2.159}$$

donde M y $\mathscr{A}$ satisfacen la suposición 2.2.73 (1,2), $p(t) \in L_1(0, T : V')$, y D es un operador lineal monótono que va de V hacia V'.

Teorema 2.2.94. *Sea válida la suposición 2.2.73* (1,2). *Asuma que D un operador lineal monótono que va de V hacia V'. Entonces los siguientes enunciados se verifican.*

- **Soluciones fuertes:** *Sea $p \in W_1^1(0,T;V')$ y $(u_0;u_1) \in W \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, donde*

$$W = \left\{ u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) : \mathscr{A}u \in V' \right\}. \tag{2.160}$$

Entonces existe una única solución del problema (2.159) *sobre el intervalo $[0,T]$ tal que*

$$(u;u_t) \in C(0,T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V), \tag{2.161}$$

y también

$$u_{tt} \in C(0,T;V), \quad u_t \in C(0,T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})), \quad \mathscr{A}u(t) \in C(0,T;V'). \tag{2.162}$$

- **Soluciones generalizadas (débiles):** *Para cada $p \in L_1(0,T;V')$ y $u_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$, $u_1 \in V$ existe una única solución generalizada del problema* (2.159) *con la propiedad* (2.161). *Además cada solución generalizada es débil y viceversa.*

Tanto las soluciones fuertes como las generalizadas satisfacen la siguiente relación de energía

$$E_0(u(t),u_t(t)) + \int_0^t (Du_t(\tau),u_t(\tau))d\tau = E_0(u_0,u_1) + \int_0^t (p(\tau),u_t(\tau))d\tau, \tag{2.163}$$

donde $E(u_0,u_1) = \frac{1}{2}((Mu_1,u_1) + (\mathscr{A}u_0,u_0))$.

***Prueba**.* Se sigue del Teorema 2.2.76 que existe una solución fuerte $u(t)$ sobre algún intervalo $[0,T') \subset [0,T]$ que posee la propiedad (2.161) con T' en lugar de T y tal que

$$u_{tt} \in C_r([0,T');V) \ \text{ y } \ \mathscr{A}u(t) \in C_r([0,T');V'). \tag{2.164}$$

Es fácil ver que esta solución satisface la relación de energía (2.163) para $t \in [0,T')$. Esta relación implica que

$$E_0(u(t),u_t(t)) \leq E_0(u_0,u_1) + \sqrt{2} \max_{\tau\in[0,t]} [E_0(u(\tau),u_t(\tau))]^{1/2} \cdot \int_0^t |p(\tau)|_{V'} d\tau$$

y por lo tanto

$$E_0(u(t),u_t(t)) \leq 2\left(E_0(u_0,u_1) + \left(\int_0^t |p(\tau)|_{V'} d\tau \right)^2 \right), \ t > 0.$$

Así por el tercer enunciado del Teorema 2.2.76, existe una única solución fuerte sobre el intervalo $[0,T]$ y posee la propiedad (2.164) con $T = T'$.

Similarmente, el Teorema 2.2.76 implica la existencia de las soluciones generalizadas. La relación de energía - válida para soluciones generalizadas - se sigue de (2.163) para soluciones fuertes y de la propiedad de aproximación (2.95) para soluciones generalizadas. Por la Proposición 2.109 cada solución generalizada es débil. Así, para probar que cualquie solución débil es generalizada es suficiente establecer la unicidad de las soluciones débiles. Esto puede hacerse de la misma manera que en la prueba del Teorema 2.2.93.

Para obtener el mejoramiento (2.162) de la propiedad (2.164) notamos que para cualquier solución $u(t)$ la función $z(t) = u_t(t)$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} Mz_{tt}(t) + \mathscr{A}z(t) + Dz_t(t) = p_t(t), \\ \\ z|_{t=0} = u_1 \in \mathscr{D}\left(\mathscr{A}^{1/2}\right), \; z_t|_{t=0} = M^{-1}(-\mathscr{A}u_0 - Du_1 + p(0)) \in V. \end{cases}$$

Como antes, cualquier solución débil de este problema es generalizada. Por lo tanto por la definición de las soluciones generalizadas obtenemos que $(u_t; u_{tt}) \in C(0, T;\, \mathscr{D}\left(\mathscr{A}^{1/2}\right) \times V)$. directamente de (2.159) obtenemos que $\mathscr{A}u \in C(0, T; V')$. Así (2.162) es válido. ■

Concluimos esta sección con un corto análisis del siguiente problema lineal no autónomo que surge naturalmente en el contexto de la linealización,

$$\begin{cases} Mu_{tt}(t) + \mathscr{A}u(t) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t) + D(t)u_t(t) = F(t)u(t) + p(t), \\ \\ u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{2.165}$$

Resultados de regularidad para procesos no autónomos generados por (2.165) son usados en el contexto del estudio de una mayor regularidad de las soluciones.

Imponemos el siguiente conjunto de hipótesis.

Suposición 2.2.95.

- Los espacios V, $\mathscr{H}$, y U son separables y los operadores M y $\mathscr{A}$ satisfacen las hipótesis en la suposición 2.2.73 (1,2).
- $D(t) = D_0(t) + D_1(t)$, donde[4] (i) $D_0(t)$ es una familia de operadores autodajuntos lineales no negativos en $\mathscr{H}$, y (ii) $D_0(t) : \mathscr{D}\left(\mathscr{A}^{1/2}\right) \mapsto V'$ y $D_1(t) : V \mapsto V'$ son familias medibles de operadores lineales acotados para cada $t \in R_+$. Además

$$t \mapsto d_0(t) \equiv \|D_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}), V')} \text{ y } t \mapsto d_1(t) \equiv \|D_1(t)\|_{\mathscr{L}(V, V')}$$

son funciones localmente integrables sobre $[0, \infty)$.

[4]Enfatizamos que no se asume que $D(t)$ es un operador monótono

- $F(t) : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto V'$ es un operador lineal acotado para cada $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $t \mapsto F(t)$ es medible y la función $t \mapsto \|F(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{D}(acali^{1/2}),V')}$ es localmente integrable sobre $[0, \infty)$.
- $p \in L_1^{loc}([0, \infty); V')$.
- El operador G satisface la suposición 2.2.73 (4) con algún triple de Gelfand $U_0 \subset U \subset U_0'$, y o bien $g \equiv 0$ o $g \in \mathscr{L}(U)$, y $(g(u), u)_{V,V'} \geq \alpha |u|_U^2$, $\alpha > 0$.

Introducimos la noción de una solución débil para el problema (2.165) en la siguiente forma.

Definición 2.2.96. Una función $u(t)$ es llamada solución débil para el problema (2.165) sobre el intervalo $[0, T]$ si

- $(u; u_t) \in L_\infty(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)$.
- $D_0(t)^{1/2} u_t \in L_2(0, T; \mathscr{H})$ y $G^* \mathscr{A} u_t \in L_2(0, T; U)$ cuando $q \neq 0$.
- Tenemos que $u(0) = u_0$ y $u(t)$ satisfacen la relación

$$-\int_0^T [(Mu_t, \phi_t) + (gG^*\mathscr{A}u, G^*\mathscr{A}\phi_t)_{V,V'}]dt \tag{2.166}$$

$$+\int_0^T (u_t, (D_0(t) + D_1^*(t))\phi)d\tau + \int_0^T (\mathscr{A}u, \phi)dt$$

$$= (Mu_1, \phi(0)) + (gG^*\mathscr{A}u_0, G^*\mathscr{A}\phi(0))_{V,V'} + \int_0^T (F(t)u + p, \phi)dt \tag{2.167}$$

para cualquier $\phi \in W_2^1(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))$ tal que $\phi(T) = 0$.

Notemos que en este caso cuando $D_0(t)$ =const, $D_1 \equiv 0$, $F \equiv 0$ esta definición debido al Teorema 2.2.93 es equivalente a la Definición 2.2.91.

Para mayor referencia, recolectamos algunas propiedades (adicionales) de soluciones débiles.

Esto se hace en el siguiente lema.

Lema 2.2.97. *Bajo la suposición 2.2.95 cualquier solución débil $u(t)$ del problema* (2.165) *posee estas propiedades:*

- $Mu_{tt} \in L_1(0, T; [\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]')$, *que también implica lo siguiente.*
- *La función $t \mapsto (u(t); u_t(t))$ es débilmente continua en $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$.*
- *La ecuación en* (2.165) *se satisface para casi todo $t \in [0, T]$ como una igualdad en $[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]'$.*

Prueba. Puesto que

$$\left|D_0(t)^{1/2}\phi\right|^2 = (D_0(t)\phi,\phi) \le \|D_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}),V')} \left|\mathscr{A}^{1/2}\phi\right| |\phi|_V \le Cd_0(t) \left|\mathscr{A}^{1/2}\phi\right|^2,$$

tenemos que $D_0(t)^{1/2} : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto \mathscr{H}$ y así $D_0(t)^{1/2} = [D_0(t)^{1/2}]^*$ mapea $\mathscr{H}$ hacia $[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]'$ y la relación

$$\left\|D_0(t)^{1/2}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}),\mathscr{H})} = \left\|D_0(t)^{1/2}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H},[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]')} \le C\sqrt{d_0(t)}$$

es válida. Por lo tanto $|D(t)u_t(t)|_{[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]'} \le C\sqrt{d_0(t)}\left|D_0(t)^{1/2}u_t(t)\right| \in L_1(0,T)$. Un argumento similar para los otros términos de la ecuación (2.165) y la relación variacional (2.166) hace posible probar que $Mu_{tt} \in L_1(0,T;[\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]')$. No es difícil probar que esta última relación implica la segunda y tercera premisa del Lema 2.2.97. ■

Teorema 2.2.98. *Sea válida la suposición 2.2.95. Entonces*

- *Para cualquier* $(u_0;u_1) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ *el problema* (2.165) *tiene una solución débil* $u(t)$ *tal que para todo* $t \in [0,T]$ *la siguiente desigualdad*

$$E_0(u(t),u_t(t)) \le C_T\left(E_0(u_0;u_1) + \left[\int_0^t |p(\tau)|_{V'}\,d\tau\right]^2\right) \tag{2.168}$$

es válida, donde, así como antes, $E_0(u_0,u_1) = \frac{1}{2}[(Mu_1,u_1) + (\mathscr{A}u_0,u_0)]$.

- *Si, en adición, asumimos que existe un operador autoadjunto no negativo* $\tilde{D}$*:* $\mathscr{D}(\tilde{D}) \subset \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$*, y las constantes* $\beta_0,\beta_1 > 0$ *tal que*

$$\beta\tilde{D} \le D_0(t) \le \beta_1\tilde{D} \ \textit{ para todo } ; t \in [0,T], \tag{2.169}$$

entonces la solución débil $u(t)$ *es única, posee la propiedad*

$$(u;u_t) \in C(0,T;\,\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)\, mboxparatodo; T > 0, \tag{2.170}$$

y satisface la siguiente identidad

$$\begin{aligned} &E_0(u(t);u_t(t)) + \int_0^t \left[\left|D_0(\tau)^{1/2}u_t\right|^2 + (g(G^*\mathscr{A}u_t),G^*\mathscr{A}u_t)_{V,V'}\right]d\tau \\ &= E_0(u_0,u_1) + \int_0^t [(-D_1(\tau)u_t + F(\tau)u + p,u_t)]d\tau. \end{aligned} \tag{2.171}$$

Prueba. Aplicamos el método usual de compacidad basado en las aproximaciones de Galerkin (ver por ejemplo [26, Capítulo 3]) para probar la existencia de soluciones débiles.

Primera definimos las aproximaciones de Galerkin de la siguiente manera.

Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base en el espacio de Hilbert $\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$. Una función $u^n(t)$ de la forma

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_k\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

es llamada *solución aproximada de Galerkin de orden* n del problema (2.165) sobre el intervalo $[0, T]$, si $g_k(t) \in W^2_\infty(0, T; \mathbb{R})$ son funciones escalares y $u^n(t)$ satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(Mu^n(t), e_k) + (\mathscr{A}u^n(t), e_k) + (D(t), u^n(t), e_k) + (g(G^*\mathscr{A}u^n_t), G^*\mathscr{A}e_k)_{V,V'} \\ \qquad\qquad\qquad = (F(t)u^n(t) + p(t), e_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \\ u^n|_{t=0} = u_{n0}\,, \quad u^n_t|_{t=0}u_{n1}, \end{cases} \tag{2.172}$$

donde $u_{n0}, u_{n1} \in$ Span $\{e_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ son escogidos $u_{n0} \to u_0$ en $\mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})$ y $u_{n1} \to u_1$ en V.

En lo que sigue asumimos que $g \neq 0$ por definición (el caso $g \equiv 0$ es más simple). Es fácil ver que la solución aproximada $u^n(t)$ satisface la siguiente desigualdad de energía

$$\begin{aligned} &E_0(u^n(t), u^n_t(t)) + \int_0^t (D_0(\tau), u^n_t(\tau))d\tau + \alpha \int_0^t |G^*\mathscr{A}u^n_t(\tau)|^2_U\, d\tau \\ &\leq E_0(u_{n0}, u_{n1}) + \int_0^t (-D_1(\tau)u^n_1(\tau) + F(\tau)u^n(t) + p(\tau), u^n_t(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

donde $E_0(u_0, u_1) = \frac{1}{2}((Mu_1, u_1) + (\mathscr{A}\,u_0, u_0))$. La suposición 2.2.95 nos permite inferir que

$$E_0(u^n(t), u^n_t(t)) \leq C_T\left(E_0(u_{n0}, u_{n1}) + [|p(\tau)|_{V'}\, d\tau]^2\right) \leq C_T \tag{2.173}$$

para todo $t \in [0, T]$, $n = 1, 2, \ldots$, y también las cotas a priori:

$$\int_0^T \left|D_0(\tau)^{1/2}u^n_t\right|^2 d\tau \leq C_1\,, \quad \int_0^T |G^*\mathscr{A}u^n_t|^2_U\, d\tau \leq C_T.$$

Por lo tanto existe una subsucesión $\{n_k\}$ y una función $u(t)$ que pertenece al espacio $L_\infty(0, T;\, \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2}))$ tal que $u_t(t) \in L(0, T; V)$ y cuando $k \to \infty$ tenemos que

$$\begin{array}{ll} u^{n_k} \to u & *\text{-débilmente en } L_\infty(0, T;\, \mathscr{D}\,(\mathscr{A}^{1/2})), \\ u^{n_k}_t \to u_t & *\text{-débilmente en } L_\infty(0, T; V), \\ D_0^{1/2}u^{n_k}_t \to d & \text{débilmente en } L_2(0, T; \mathscr{H}) \\ G^*\mathscr{A}u^{n_k}_t \to t & \text{débilmente en } L_2(0, T; U). \end{array}$$

Obviamente tenemos que

$$\int_0^T (G^*\mathscr{A}u^n_t(\tau), \phi_0)_{V,V'}r(\tau)d\tau = .\int_0^T (u^n(\tau), \mathscr{A}G\phi_0)_{V,V'}r_1(\tau)d\tau$$

para cualquier $\phi_0 \in U$ y $r(t) \in C_0^\infty(0,T)$. Esto implica que

$$\int_0^T (l(\tau), \phi_0)_{V,V'} r(\tau) d\tau = -\int_0^T (G^* \mathscr{A} u(t), \phi_0)_{V,V'} r_t(\tau) d\tau.$$

Así el elemento l puede ser identificado con el límite correcto $G^* \mathscr{A} u_t$. Como

$$\int_0^T (D_0^{1/2} u_t^{n_k}, \phi) d\tau = \int_0^T (u_t^{n_k}, D_0^{1/2}\phi) d\tau \to \int_0^T (u_t, D_0^{1/2}\phi) d\tau$$

para cualquier $\phi \in L_2(0,T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))$ cuando $k \to \infty$, el elemento d puede ser fácilmente identificado con $D_0^{1/2} u_t$. Uno también puede ver que la función limitante u es una solución débil del problema (2.165) sobre el intervalo $[0,T]$ y que la relación (2.168) se sigue de (2.173). Esto comprueba la prueba de la primera parte parte del Teorema 2.2.98.

Para probar la segunda parte establecemos primero la siguiente afirmación.

Proposición 2.2.99. *Sean válidas la suposición 2.2.95 y* (2.169). *Entonces cualquier solución débil* $u(t)$ *del problema* (2.165) *satisface la identidad de energía en* (2.171).

Prueba. Usamos la misma idea que en [20]. De nuevo, nos concentramos en el caso $g \neq 0$. Primero extendemos la solución $u(t)$ sobre toda la recta real. Para esto consideramos el siguiente problema autónomo

$$Mw_{tt} + \mathscr{A}[w + Gg(G^* \mathscr{A} w_t)] + \tilde{D} w_t = 0\,,\ t > 0\,,\ w|_{t=0} w_0\,,\ w_t|_{t=0} = w_1.$$

Por el Teorema 2.2.93 para cualquier $(w_0; w_1) \in H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$ este problema tiene una única solución generalizada $w(t) \equiv w(t; w_0; w_1)$ que posee las propiedades

- $t \mapsto (w(t); w_t(t))$ es fuertemente continua en H.
- $\displaystyle\int_t^{t+1} \left[\left| \tilde{D}^{1/2} w_t \right|^2 + |G^* \mathscr{A} w_t|_U^2 \right] d\tau \leq C$ para todo $t \geq 0$.

Ahora definimos la extensión de $u(t)$ por la fórmula

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} w(-t; u(0), u_t(0)), & \text{si } t < 0; \\ u(t), & \text{si } t \in [0,T]; \\ w(t-T; u(T), u_t(T)), & \text{si } t > T. \end{cases}$$

Es claro del Lema 2.2.97 que esta función $\tilde{u}(t)$ posee las propiedades

- $(\tilde{u}; \tilde{u}_t) \in L_\infty(a,b; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V)$ y $M\tilde{u}_{tt} \in L_1(0,T; [\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})]')$ para todo $a < b$.

- La función $t \mapsto (\tilde{u}(t); \tilde{u}_t(t))$ es débilmente continua sobre $[0,T]$ y fuertemente continua sobre $\mathbb{R} \setminus (0,T)$ como una función con valores en $H = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$.
- Tenemos que

$$\int_t^{t+1} \left[\left| \tilde{D}^{1/2} \tilde{u}_t \right|^2 + |G^* \mathscr{A} \tilde{u}_t|_U^2 \right] d\tau \leq C \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.174}$$

Ahora como en [20] multiplicamos (2.165) en $\mathscr{H}$ por $\tilde{u}^h(t) = (2h)^{-1}(\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t-h))$ y luego integramos sobre el intervalo $[0,T]$. Nuestra meta es hacer la transición al límite en cada término de la igualdad obtenida.

Usando integrando por partes y un apropiado cambio de variables tenemos que

$$\int_0^T (Mu_{tt}, \tilde{u}^h) dt = (Mu_t, \tilde{u}^h) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (Mu_t, \tilde{u}_t^h) dt = \mathscr{I}_h^1 - \mathscr{I}_h^2(T) + \mathscr{I}_h^2(0),$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_h^1 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left[(M^{1/2} u_t(T), M^{1/2} \tilde{u}_t(T+\tau)) - (M^{1/2} u_t(0), M^{1/2} \tilde{u}_t(\tau)) \right] d\tau, \\
\mathscr{I}_h^2(T) &= \frac{1}{2h} \int_{T-h}^{T} (M^{1/2} u_t(t), M^{1/2} \tilde{u}_t(t+h)) dt, \\
\mathscr{I}_h^2(0) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{0} (M^{1/2} u_t(t+h), M^{1/2} \tilde{u}_t(t)) dt.
\end{aligned}$$

La función escalar $(M^{1/2} u_t(T), M^{1/2} \tilde{u}(T+\tau)) - (M^{1/2} u_t(0), M^{1/2} \tilde{u}(\tau))$ es continua con respecto a τ, por lo tanto obviamente tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \mathscr{I}_h^1 = \left| M^{1/2} u_t(T) \right|^2 - \left| M^{1/2} u_t(0) \right|^2.$$

Como $M^{1/2} \tilde{u}_t(t)$ es fuertemente continua fuera de $(0,T)$ (y débil en $[0,T]$), tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \sup_{T-h \leq t \leq T} \left| (M^{1/2} u_t(t), M^{1/2} \tilde{u}_t(t+h)) - \left| M^{1/2} u_t(T) \right|^2 \right| \right\} = 0.$$

Esto implica que $\lim_{h \to 0} \mathscr{I}_h^2(T) = \frac{1}{2} \left| M^{1/2} u_t(T) \right|^2$. Un argumento arroja que $\mathscr{I}_h^2(0) \to \frac{1}{2} \left| M^{1/2} u_t(0) \right|^2$ cuando $h \to 0$. Por lo tanto obtenemos que

$$\lim_{h \to 0} \int_0^T (Mu_{tt}, \tilde{u}^h) dt = \frac{1}{2} \left(\left| M^{1/2} u_t(T) \right|^2 - \left| M^{1/2} u_t(0) \right|^2 \right).$$

Aplicando similares cálculos también tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \int_0^T (\mathscr{A} u, \tilde{u}^h) dt = \frac{1}{2} \left(\left| \mathscr{A}^{1/2} u(T) \right|^2 - \left| \mathscr{A}^{1/2} u_t(0) \right|^2 \right).$$

Ahora hacemos la transición al límite en el término de amortiguación envolviendo $D_0(t)$. Se sigue de (2.169) y (2.174) que

$$\int_0^T \left|D_0(t)^{1/2}\tilde{u}^h\right|^2 dt \leq C \text{ para todo } 0 < h < 1.$$

Así existen elementos $k(t) \in L_2(0,T;\mathscr{H})$ tal que $D_0^{1/2}(t)\tilde{u}^h(t) \to k(t)$ débilmente en $L_2(0,T;\mathscr{H})$ cuando $h \to 0$ a lo largo de una subsucesión. Sobre funciones suaves ϕ tenemos que

$$\int_0^T (D_0^{1/2}\tilde{u}^h, \phi)dt = \int_0^T (\tilde{u}^h, D_0^{1/2}\phi)dt.$$

Es también claro que $\tilde{u}^h(t) \to \tilde{u}_t(t)$ débilmente en V para cada t tal que $\left|\tilde{u}^h(t)\right|$ es uniformemente acotado con respecto a $t \in [0,T]$ y $h \in (0,1)$. Por lo tanto de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$D_0(t)^{1/2}\tilde{u}^h(t) \to D_0(t)^{1/2}\tilde{u}_t(t) \text{ débilmente en } L_2(0,T;\mathscr{H}).$$

Así tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T (D_0(t)u_t(t), \tilde{u}^h(t))dt = \int_0^T \left|D_0^{1/2}(t)u_t(t)\right|^2 dt.$$

De una manera similar podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T \left(\mathscr{A}GgG^*\mathscr{A}u_t(t), \tilde{u}^h(t)\right)_{V,V'}dt = \int_0^T (gG^*\mathscr{A}u_t(t), G^*\mathscr{A}u_t(t))_{V,V'}dt.$$

La transición al límite en el término

$$\int_0^T (-D_1(t)u_t(t) + F(t)u(t), \tilde{u}^h(t))dt$$

es obvia debido al hecho de que $\tilde{u}^h(t) \to \tilde{u}_t(t)$ débilmente en V para cada t tal que $\left|\tilde{u}^h(t)\right|_V$ es uniformemente acotada con respecto a $t \in [0,T]$ y $h \in (0,1)$. Esto completa la prueba de la Proposición 2.2.99. ■

Finalización de la prueba del Teorema 2.2.98. Primero notamos que la identidad de la energía (2.171) mediante un argumento del tipo Gronwall implica la estimación (2.168) para cada solución débil del problema (2.165). En particular esto implica la unicidad de estas soluciones bajo condiciones de la segunda parte del teorema.

Es también claro de la identidad (2.171) que la función escalar

$$t \mapsto E_0(u(t), u_t(t)) \equiv \frac{1}{2}\left(\left|M^{1/2}u_t(t)\right|^2 + \left|\mathscr{A}^{1/2}u(t)\right|^2\right)$$

es continua. Por lo tanto la continuidad débil de $(u(t); u_t(t))$ en H implica su continuidad fuerte; esto es, la función $u(t)$ posee las propiedades (2.170). Así la prueba del Teorema 2.2.98 está completa. ■

Sobre una mayor regularidad de las soluciones

Uno de los métodos típicos para construir soluciones regulares se basa en el estudio de la ecuación que puede ser obtenido por diferenciando (con respecto a t) la ecuación original (ver [16] y sus referencias). Por ejemplo, si lidiamos con el problema de la forma

$$\begin{cases} Mu_{tt} + \mathscr{A}u(t) + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_t(t)) \\ \qquad\qquad +Du_t(t) + D_0h(u(t)) + D_0D_0^*u_t = F(u(t))\,,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0}u_1, \end{cases} \tag{2.175}$$

entonces la diferenciación formal nos da una ecuación diferencial lineal no autónoma con respecto a $z = u_t$ de la forma

$$\begin{cases} Mz_{tt} + \mathscr{A}z + D'(u_t(t))z_t + \mathscr{A}Gg'(G^*\mathscr{A}u_t(t))G^*\mathscr{A}z_t \\ \qquad\qquad\qquad +D_0h'(u(t))z + D_0D_0^*z_t = F'(u(t))z, \\ z|_{t=0} = z_0 \equiv u_1\,, \quad z_t|_{t=0} = z_1 \equiv u_{tt}(0), \end{cases} \tag{2.176}$$

donde $D'(v)$, $g'(v)$, $h'(u)$ y $F'(u)$ denotan las correspondientes derivadas de Fréchet que son operadores lineales en espacios apropiados para cada v y u fijos. La velocidad inicial $z_1 \equiv u_{tt}(0)$ es calculada de (2.175):

$$z_1 = -M^{-1}[\mathscr{A}u_0 + \mathscr{A}Gg(G^*\mathscr{A}u_1) + D(u_1) + D_0h(u_0) + D_0D_0^*u_1 - F(u_0)].$$

La ecuación en (2.176) es lineal en z con los coeficientes dependiendo de $u(t)$.

En orden de obtener información adicional sobre la regularidad de las soluciones del problema de la forma (2.176), se necesitan más hipótesis de regularidad impuestas a los operadores no lineales en (2.175), en adición al conjunto de la suposiciones dadas en la Suposición 2.2.73. No perseguimos la generalidad total del enfoque, sino que consideramos el modelo simplificado (2.114) con $g \equiv 0$ y con la no linealidad de F de la forma $F(u, v) = F(u) + H(v)$ que depende tanto del desplazamiento u como de la velocidad v. Más precisamente, el modelo que discutimos en esta sección es el siguiente:

$$\begin{cases} Mu_{tt}(t) + \mathscr{A}u(t) + D(u_t(t)) = F(u(t)) + H(u_t(t)) + p(t), \\ \\ u|_{t=0} = u_0 = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \end{cases} \tag{2.177}$$

bajo el conjunto de requerimientos impuestos en la Suposición 2.2.84. En el primer paso mejoramos ligeramente la propiedad de regularidad (2.119) de soluciones fuertes. El correspondientes resultado es formulado a continuación.

Proposición 2.2.100. *En adición a la hipótesis del Teorema 2.2.85 asuma que los espacios V y $\mathscr{H}$ son separables, los operadores D y F y H son Fréchet diferenciables, y los siguientes mapeos son continuos.*

- $D'(v), H'(v) : V \mapsto V'$ *para cada* $v \in V$.

- $F'(v) : \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \mapsto V'$ *para cada* $v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$.

Además asumimos que

$$\|D'(v)\|_{\mathscr{L}(V,V')} + \|H'(v)\|_{\mathscr{L}(V,V')} + \|F'(w)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}),V')} \leq C_r$$

para cada $v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ *y* $w \in W$ *tal que* $\left|\mathscr{A}^{1/2}v\right| < r$ *y* $|\mathscr{A}w|_{V'} < r$*, donde* W *es definido por* (2.160)*. Si* $p \in W_1^1(0,T;V')$ *y* $(u_0;u_1) \in W \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$*, entonces la solución fuerte* $u(t)$ *de* (2.177) *posee la siguiente propiedad de regularidad*

$$u_{tt} \in C(0,T;V)\,, \quad u_t \in C(0,T;\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})) \text{ y } \mathscr{A}u(t) \in C(0,T;V').$$

Prueba. Si $u(t)$ es una solución de (2.177), entonces es fácil ver que $z(t) = u_t(t)$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} Mz_{tt}(t) + \mathscr{A}z(t) = \tilde{p}(t)\,, \quad z|_{t=0} = u_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}), \\ \\ z_t|_{t=0} = M^{-1}(-\mathscr{A}u_0 - Du_1 + H(u_1) + F(u_0) + p(0)) \in V, \end{cases}$$

donde las derivadas respecto del tiempo son consideradas en el sentido de las distribuciones y

$$\tilde{p}(t) \equiv [-D'(u_t(t)) + H'(u_t(t))]u_{tt}(t) + F'(u(t))u_t(t) + p_t(t).$$

Se sigue de (2.119), (2.120) y de la hipótesis concerniente a las derivadas de Fréchet D', H' y F' que $\tilde{p} \in L_1(0,T;V')$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 2.2.94 para concluir que

$$(u_t;u_{tt}) \equiv (z;z_t) \in C(0,T;\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V).$$

Por lo tanto directamente de (2.177) obtenemos que $\mathscr{A}u(t) \in C(0,T;V')$. ■

Notamos que las condiciones sobre D y H impuestas por la Proposición 2.2.100 son bastantes restrictivas. Si $V = \mathscr{H} = L_2(\Omega)$ y D es el operador de Nemytskij, entonces la propiedad $D'(v) : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ significa de hecho que D es un operador afín. Así la formulación abstracta de este tipo obliga a usar suposiciones que pueden ser demasiado fuertes. De hecho, en el estudio de las evoluciones de von Karman nos permitimos usar la estructura de términos no lineales y las cancelaciones resultantes, con el fin de superar las limitaciones dictadas por un marco abstracto más general.

Uno puede también formular teoremas de regularidad de orden superior. Esto requiere un adicional conjunto de suposiciones impuestas sobre cantidades no lineales (y el dato inicial). Con el fin de mantener la exposición enfocada, no hacemos esto al nivel abstracto para el caso no lineal. Sin embargo, después cuando se lidie con un contexto más específico, mostramos que el método usado para la prueba de la Proposición 2.2.100 se aplica con sencillas modificaciones y lleva a la regularidad (diferenciabilidad) de las soluciones de orden superior. También referimos al lector el artículo [16], donde estas ideas son presentadas para ecuaciones no lineales de segundo orden con amortiguaciones internas lineales. Un resultado típico sobre la regularidad superior es presentado en el siguiente enunciado que lidia con el problema lineal (2.159).

Teorema 2.2.101. *Sean M y $\mathscr{A}$ satisfaciendo la Suposición 2.2.73* (1,2)*. Asuma que D es un operador lineal monótono de V hacia V' y $p \in W_1^m(0, T, V')$ para algún $m \geq 1$. Entonces las soluciones $u(t)$ del problema*

$$\begin{cases} Mu_{tt}(t) + \mathscr{A}u(t) + Du_t(t) = p(t), \\ \\ u|_{t=0} = u_0\,, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \end{cases} \tag{2.178}$$

gozan de las siguientes propiedades adicionales de regularidad,

$$\begin{cases} u^{(k)}(t) \in C(0, T; W) \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \\ \\ u^{(m)}(t) \in C(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))\,,\ u^{(m+1)}(t) \in C(0, T; V), \end{cases} \tag{2.179}$$

donde W es definida por (2.160)*, si y solo si las condiciones de compatibilidad*

$$\begin{cases} u^{(k)}(0) \in W \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \\ \\ u^{(m)}(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\,,\ u^{(m+1)}(0) \in V, \end{cases} \tag{2.180}$$

son válidas, donde los valores $u^{(k)}(0)$ son definidas por las relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} u^{(0)}(0) = u_0\,,\ u^{(1)}(0) = u_1, \\ \\ u^{(k)}(0) = M^{-1}\left(-\mathscr{A}u^{(k-2)}(0) - Du^{(k-1)}(0) + p^{(k-2)}(0)\right)\,,\ k \geq 2. \end{cases} \tag{2.181}$$

Prueba*.* Seguimos la línea del argumento dado en [16].

Es claro que (2.179) implica (2.180).

Asuma que (2.180) es válido y considere el problema

$$\begin{cases} Mv_{tt}(t) + \mathscr{A}v(t) + Dv_t(t) = p^{(k)}(t), \\ \\ u|_{t=0} = v_{0k}u^{(k)}(0)\,,\ u_t|_{t=0} = v_{1k} \equiv u^{(k+1)}(0), \end{cases} \tag{2.182}$$

donde $k \in \{1, \ldots, m\}$. Por (2.180) $(v_{0k}, v_{1k}) \in W \times \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ para $1 \leq k \leq m-1$ y $(v_{0m}; v_{1m}) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \times V$. Por lo tanto el Teorema 2.2.94 implica que el problema (2.182) tiene solución $v_k(t)$ de $C^1(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})) \cap C(0, T; W)$ para $1 \leq k \leq m-1$ y de $C^1(0, T; V) \cap C(0, T; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}))$ para $k = m$. El problema (2.178) es lineal, por lo tanto usando la unicidad de una solución débil por inducción en k encontramos que $u^{(k)}(t) = v_k(t)$ para todo $1 \leq k \leq m$. ■

2.3. Conceptual

1. Un problema bien definido o bien propuesto (en el sentido de Hadamard) es un problema de Cauchy de valor inicial que tiene propiedades analíticas adecuadas y cuyas soluciones posibles tienen una estructura conveniente. En particular, esas condiciones suelen incluir:

   - La existencia de alguna solución.
   - La unicidad de la solución.
   - La solución depende de manera continua de las condiciones iniciales.

2. Dada la ecuación de onda sobre un dominio bien comportado en $\mathbb{R}^3$

   $$u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = h(x)$$

   Diremos que posee fuerzas estructurales subcríticas si estas satisfacen la siguiente condición de crecimiento:

   $$|f(z)| \leq c_f(1 + |z|^{\varepsilon})$$

   Para $z \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in [1, 3)$. Esto es principalmente a que el exponente crítico de f en dimensión 3 es 3, teniendo en cuenta la inmersión de Sobolev entre H_0^1 y L^6.

2.4. Definición de Términos Básicos

1. Denotemos (Ω, M, μ) un espacio de medida, Ω es un conjunto y M es un σ-álgebra en Ω, es decir, M es una colección de subconjuntos de Ω tal que:

   a) $\emptyset \in M$

   b) $A \in M \Rightarrow A^c \in M$

   c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$ cuando sea $A_n \in M$ para todo n.

2. μ es una medida, es decir, $\mu : M \to [0, \infty]$ satisface:

   a) $\mu(\emptyset) = 0$

   b) Es numerablemente aditiva, es decir, si dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$), para $i \neq j$ y cuya unión esté en $\mathcal{A}$ (esto es automático si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra), entonces:

   $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si la condición (b) sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos, $A_1, \ldots, A_n$, diremos que la medida es aditiva.

Diremos que una medida μ es σ-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $\bigcup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$. Llamaremos probabilidad a toda mediad verificando $\mu(\Omega) = 1$.

3. Llamaremos espacio de medida a toda terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de Ω.

4. Diremos que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, es completo si para cada $B \subset A$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también es $B \in \mathcal{A}$.

5. Diremos que una aplicación entre espacio medibles

$$F : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

es medible si para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_2$.

6. **Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi:** Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones de L^1 tal que $\sup\limits_n \int f_n(x) < \infty$ entonces $f_n(x)$ converge c.t.p. en Ω a un límite finito denotado por $f \in L^1$ y $\|f_n - f\|_L \to 0$.

7. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Se representará por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, el espacio vectorial constituido por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles, cuya potencia p, $|f|^p$ es Lebesgue integrable, esto es:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}\, ;\ f \text{ es medible y } \int_\omega |f(x)|^p\, dx < \infty \right\}$$

Se define en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a la relación $\sim$ dada por:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \equiv g \text{ casi siempre en } \Omega.$$

Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Así, tiene sentido considerar el cociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por $\sim$. La colección de las clases de equivalencia obtenida por $\dfrac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$ forma un espacio vectorial, que denotaremos por:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim}$$

En el cual definimos la norma:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \text{ donde } u \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

8. Una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada esencialmente acotada si existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ casi siempre (c.s.) en $x \in \Omega$. La colección de las clases de equivalencia de las funciones definidas en Ω por la relación $\sim$ es

esencialmente acotada es denotada por $L^{\infty}(\Omega)$. Se define la norma en $L^{\infty}(\Omega)$ por:

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \text{ínf}\,\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ c.s. en } x \in \Omega\}$$

Es posible mostrar que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, además, para el caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por:

$$(u, v)_{V,V'{}_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

donde u y v pertenecen a $L^2(\Omega)$.

Recordar que si E_0 y F_0 son espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) denotado por $L(E_0, F_0)$ al espacio de los operadores lineales y continuos E_0 en F_0 con la norma usual, esto es, para $T \in L(E_0, F_0)$.

9. Una familia de operadores no necesariamente lineales $s(t)_{t\geq 0}$ fuertemente continua en X es llamado de C_0-*semigrupo* si:

   - $S(0) = I$ (Operador identidad de X)
   - $S(t + s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$

   La aplicación $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \to S(t)(x) \in X$ es continua para cada $x \in X$ dado. El par $(X; S(t))$ también es llamado sistema dinámico, definido por el semigrupo $S(t)$.

10. Un semigrupo operador lineal en E_0 y una familia $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que:

    $i)$ $T(0) = I_{E_0}$.

    $ii)$ $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

    $iii)$ $\|T(t) - I_{E_0}\|_{L(E_0)} \to 0$ cuando $t \to 0^+$, decimos que un semigrupo es fuertemente continuo.

    $iv)$ $\|T(t) - I_{E_0}\|_{L(E_0)} \to 0$ cuando $t \to 0^+$, para todo $x \in E_0$, decimos que un semigrupo es fuertemente continuo.

    Todo semigrupo fuertemente continuo tiene una limitación exponencial que se dan en el siguiente teorema.

11. Suponga que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(E_0)$ es un semigrupo fuertemente continuo. Entonces existe $M \geq 1$ t β tales que:

    $$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\beta}t\,, \quad \forall t \geq 0$$

    Para cualquier $l > 0$ podemos elegir $\beta \geq \dfrac{1}{l} \log \|T(l)\|_{L(E_0)}$ y luego elegir M.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis General e Hipótesis Específica

3.1.1. Hipótesis general

La ecuación de onda amortiguada posee un atractor global.

3.1.2. Hipótesis específica

- La ecuación de onda amortiguada esta bien colocada en el sentido de Hadamard.
- La ecuación de onda amortiguada posee estructura gradiente.
- El semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada expuesta a fuerzas estructurales cumple la cuasiestabilidad.

3.2. Definición Conceptual de Variables

3.2.1. Variable dependiente (D)

Existencia de un atractor global.

Definición conceptual:

En los sistemas dinámicos, un atractor es un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar, dada una gran variedad de condiciones iniciales en el sistema.

3.2.2. Variable independiente (I)

Semigrupo de soluciones para una ecuación de onda amortiguada.

Definición conceptual:

A partir de la buena colocación de la ecuación (1.1), se define el semigrupo de soluciones a partir de la Definición de semigrupo.

3.2.3. Operacionalización de las variables

Variable	Dimensión	Indicadores
D	• Existencia de un atractor global.	1. El sistema esta bien colocado en el sentido de Hadamard. 2. Existe un funcional de Lyapunov para el semigrupo asociado de soluciones. 3. El sistema es cuasiestable y satisface (1.1) y (1.2).
I	• Semigrupo de soluciones para una ecuación de onda amortiguada.	1. El sistema planteado responde a una problemática física a partir de una interpretación matemática. 2. Existe un espacio de fase adecuado para el tipo de soluciones que se quieren estudiar. 3. El modelo responde a un problema de Cauchy abstracto sobre espacios de dimensión infinita.

IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Tipo y Diseño de la Investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del modelaje físico de las ecuaciones de la onda amortiguada, lo que permitirá entender la construcción de dicho modelo expuesto a fuerzas estructurales.

Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve a los espacios de Sobolev con el fin de poder probar la buena colocación (i.e. existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales) para el problema de la ecuación de la onda amortiguada expuesta a fuerzas estructurales.

Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis funcional, de tal manera que se pueda probar la existencia de soluciones en el espacio de fase débil.

4.2. Método de la Investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser esta del tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3. Población y Muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.

4.4. Lugar de Estudio y Período Desarrollado

Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, la estación de trabajo remoto con la que cuento en mi hogar, etc.

4.5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.

4.6. Análisis y Procesamiento de Datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

V. RESULTADOS

5.1. Entorno Funcional

Esta sección está destinada a comprender los espacios necesarios de trabajo para definir una solución débil para el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0,\infty), \\ \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ \\ (u(x,0), u_t(x,0)) = (u_0, v_0) & , \text{ para } x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto, acotado, conexo con frontera $\partial\Omega$ lo suficientemente regular, y $\alpha > 0$ representa el coeficiente de amortiguamiento y se cumple las siguientes hipótesis sobre las fuerzas estructurales:

1. $f \in C^1(\mathbb{R})$
2. $f(0) = 0,$
3. $|f(z)| \leq c_f(1 + |z|^p)$ y $|f'(z)| \leq c_f(1 + |z|^{p-1})$, con $p \in [1, 3)$ y $z \in \mathbb{R}$,
4. $\liminf\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} > -\lambda_1,$

con $c_f > 0$ y $\lambda_1 > 0$ siendo el primer autovalor asociado al operador laplaciano $-\Delta$ sobre Ω con condiciones de Dirichlet.

Denotamos el producto interno en $L^2(\Omega)$ por

$$(u, v)_{V,V'} = \int_\Omega uv \, dx$$

para $u, v \in L^2(\Omega)$. De manera similar, $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)_{V,V'}$ representa el producto interno en $H_0^1(\Omega)$. Ambos espacios son espacios de Hilbert con estos respectivos productos internos. Adicionalmente, para $p > 0$, denotamos las normas en los espacios $L^p(\Omega)$ por $\|\cdot\|_p$, es decir

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p} \quad , \quad u \in L^p(\Omega).$$

En particular para $p = 2$ se lee

$$\|u\|_2^2 = (u, u)_{V,V'} \text{ para } u \in L^2.$$

Por otro lado, se define el operador A con condición de Dirichlet como

$$\begin{array}{rccl} A: & D(A) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & u & \longmapsto & Au = -\Delta u, \end{array}$$

donde su dominio estará dado por

$$D(A) = \{u \in L^2(\Omega) | Au \in L^2(\Omega)\,,\ u|_{\partial\Omega} = 0\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Así, debido a la identidad de Green, se tiene que para todo $u, v \in D(A)$ se cumple que:

$$(Au, v)_{V,V'} = (\nabla u, \nabla v)_{V,V'} = (u, Av)_{V,V'},$$

en particular como $H_0^1(\Omega)$ es denso en $D(A)$ debido al Teorema de extensión de Hahn-Banach, existe una extensión de A sobre $H_0^1(\Omega)$ denotada por $\overline{A}$ tal que $\overline{A}$: $H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, donde

$$\left(\overline{A}u, v\right)_{V,V'} = (\nabla u, \nabla v)_{V,V'}\,, \ \text{ para todo } u, v \in H_0^1(\Omega),$$

y $\overline{A} = A$ sobre $D(A)$. A lo largo del trabajo se usará esta equivalencia de manera automática debido a que $D(A) \subset H_0^1(\Omega)$ son dominios densos inmersos continuamente. De hecho, [3] muestra que A posee potencias fraccionarias, y en particular

$$H_0^1(\Omega) = D(A^{1/2}).$$

Dado el sistema (5.1) es de segundo orden, las soluciones serán correspondientes al par (u, u_t), por lo que el espacio de fase que se usará estará dado por $\mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Note que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ es un espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|v\|_2^2\,,$$

y el producto interno $(\cdot,\cdot)_{V,V'_{\mathcal{H}}}$ dado por

$$((u, v), (w, z))_{V,V'_{\mathcal{H}}} = (\nabla u, \nabla v)_{V,V'} + (v, z)_{V,V'}\,, \ \text{ para todo } (u, v), (w, z) \in \mathcal{H}.$$

5.2. Buena Colocación

Como se mencionó en la sección anterior, consideramos el siguiente sistema

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + \alpha u_t + f(u) = 0 & , \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \\ u(x, 0) = u_0\,,\ u_t(x, 0) = u_1 & , \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto conexo, acotado y abierto con frontera $\partial\Omega$ lo suficientemente regular, $\alpha > 0$ y $A = -\Delta$.

Consideremos por un momento el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}e + Ae + f(t,e) = 0 \\ &e(t_0) = e_0 \in E_0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde A es un generador de un semigrupo fuertemente continuo, f es una función continua que está definida en un subconjunto U de $\mathbb{R} \times E_0$ (siendo E_0 un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y toma valores en E_0 y $(t_0, e_0) \in U$.

Una solución débil de (5.3) en $[t_0, t_1)$ es una función $e : [t_0, t_1) \to E_0$ tal que $e(t_0) = e_0(t, e(t)) \in U$, para todo $e^* \in D(A^*) \mapsto (e^*, e(t))_{V,V'}$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt}(e^*, e(t))_{V,V'} + (A^*e^*, e(t))_{V,V'} + (e^*, f(t, e(t)))_{V,V'} = 0\,, \quad t_0 < t < t_1. \tag{5.4}$$

En base a esto último se define lo siguiente para el problema (5.2):

Definición 5.2.1. Dado $T > 0$, el para $(u, u_t) \in C((0,T); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ es una *solución débil* de (5.2) si:

$$\frac{d}{dt}\langle u_t(t), v\rangle + \langle \nabla u^t, \nabla v\rangle + \alpha\langle u_t(t), v\rangle + \langle f(u(t)), v\rangle = 0,$$

para todo $0 < t < T$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, además $(u, u_t)(0) = (u_0, u_1)$.

En ese sentido, se pretende mostrar la existencia y unicidad de las soluciones vía problema de Cauchy y Lummer-Phillips. Para esto reescribimos (5.2) como

$$\frac{d}{dt}U + \mathbb{A}U + \mathbb{F}U = 0 \tag{5.5}$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix},$$

y $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ con su dominio dado por

$$\begin{aligned} D(\mathbb{A}) &= \left\{(u,v)^T \in \mathcal{H} | \mathbb{A}(u,v)^T \in \mathcal{H}\right\} \\ &= \left\{(u,v)^T \in \mathcal{H} | Au \in L^2(\Omega)\,,\ u|_{\partial\Omega} = 0\,,\ v \in H_0^1(\Omega)\right\} \\ &= \left\{(u,v)^T \in \mathcal{H} | u \in D(A)\,,\ v \in H_0^1(\Omega)\right\} \\ &= D(A) \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Teorema 5.2.2. *Supongamos que se cumplen las hipótesis 1-4 con $\alpha > 0$, entonces para el problema de Cauchy* (5.5) *se demuestra que*

$a.$ $\mathbb{A}$ *es generador de un C_0-semigrupo de contracciones.*

$b.$ $\mathbb{F}$ *localmente lipschitz, en particular se cumple*

$$\|f(u) - f(v)\|_2 \leq L \|\nabla u - \nabla v\|_2 \tag{5.6}$$

para todo $u, v \in B \subset H_0^1(\Omega)$ *y* $L > 0$.

Por lo tanto se cumple que dado $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$*, existe* $T > 0$ *y una única solución débil* $(u, u_t) \in C(0, T; \mathcal{H})$.

Prueba. Dada las hipótesis sobre f, se tiene claramente que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u) - f(v)|^2\, dx &\leq e_f \int_\Omega (1 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1})\, |u - v|^2\, dx \\ &\leq c_0 \|u - v\|_6^2 \\ &\leq C_0 \|\nabla u - \nabla v\|_2^2\end{aligned}$$

con $C_0 > 0$ una constante que depende de f, de B, de la inmersión continua entre $H_0^1(\Omega)$ y $L^6(\Omega)$ y la inmersión continua entre $H_0^1(\Omega)$ y $L^{\frac{3}{2}(p+1)}(\Omega)$. Esto garantiza (5.6).

Nota: Observe que se usó que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{p+1} \,.\, |u - v|^2 &\leq \left(\int_\Omega |u|^{\frac{3}{2}}\,(p+1)\right)^{\frac{2}{3}} . \,\|u - v\|_6^2 \\ &\leq \|u\|_{\frac{3}{2}(p+1)}^{p+1} \|u - v\|_6^2 \\ &\leq c_0 \|\nabla u\|_2^{p+1} \|u - v\|_6^2 \\ &\leq c_0 \|u - v\|_6^2 .\end{aligned}$$

Análogo con v.

Así que para finalizar la prueba basta mostrar que $\mathbb{A}$ genera un C_0-semigrupo. Con este objetivo se usará el Teorema de Lummer-Phillips, para esto se necesita demostrar los siguientes resultados sobre el operador $\mathbb{A}$:

Lema 5.2.3. *Supongamos que:*

(1) $\mathbb{A}$ *es lineal*

(2) $\mathbb{A}$ *es densamente definido*

(3) $\langle \mathbb{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ *para todo* $U \in D(\mathbb{A})$

(4) $R(I + \mathbb{A}) = \mathcal{H}$

Entonces $\mathbb{A}$ *es el generador de un* C_0*-semigrupo de contracciones.*

En efecto:

(1) Inmediato.

(2) Veamos

$$\begin{aligned}
D(\mathbb{A}) &= \{(u,v)^T \in \mathcal{H} | \mathbb{A}(u,v)^T \in \mathcal{H}\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \,:\, \begin{bmatrix} v \\ Au + \alpha v \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \,:\, v \in H_0^1(\Omega)\,,\ Au + \alpha v \in L^2(\Omega) \right\} \\
&= D(A) \times H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

entonces $\overline{D(\mathbb{A})} = \mathcal{H}$.

(3) Veamos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} -v \\ Au + \alpha v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= -\langle \nabla v, \nabla u \rangle + \langle Au + \alpha v, v \rangle \\
&= -\langle \nabla v, \nabla u \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \alpha v, v \rangle \geq 0
\end{aligned}$$

(4) Veamos:

$$R(I + \mathbb{A}) = R \begin{pmatrix} I & -I \\ A & \alpha + I \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I & -I \\ A & \alpha + I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ Au + \alpha v + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}$$

Entonces basta mostrar que:

dado $(h,g)^T \in \mathcal{H}$ se tiene un único par $(u,v) \in D(\mathbb{A})$ tal que la igualdad anterior se cumple. Note que

- $u - v = h$ entonces $v = u - h$
- $-\Delta u + \alpha v + v = g$
- $-\Delta u + \alpha u + u = g + \alpha h + h$
- $-\Delta u + (\alpha + 1)u = g + \alpha h + h \in L^2$

Para garantizar la existencia de (u,v) en este punto, usaremos Lax-Milgram. Así, se observa que para $a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ definido como

$$a(u,\varphi) := \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle (\alpha + 1)u, \varphi \rangle,$$

se tiene que:

- a es bilineal,

- a es acotada, pues

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 + c\|u\|_2 \|\varphi\|_2 \\ &\leq C\|\nabla u\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 ,\end{aligned}$$

para algún $C > 0$ dependiendo de λ_1.

- a es coerciva, pues

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega (\alpha+1)u^2 dx \geq \|\nabla u\|_2^2 .$$

Entonces por Lax-Milgram para $g + \alpha h + h \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto una única $v = u - h \in H_0^1(\Omega)$ (pues $f \in H_0^1(\Omega)$). De esto se tiene que

$$-\Delta u = g - \alpha v - v \in L^2(\Omega)$$

es decir

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto $(u,v) \in D(\mathbb{A})$.

Finalmente de (1)-(4) y por el Teorema de Lumer-Phillips, $\mathbb{A}$ genera un C_0-semigrupo. ∎

Note que el Teorema 5.2.2 muestra la existencia y unicidad de soluciones locales para el problema.

Con respecto a las soluciones globales consideramos la energía total del sistema, la cual está dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega F(u)dx \tag{5.7}$$

donde:

$$F(u) = \int_0^u f(y)dy.$$

El siguiente Teorema garantiza la buena colocación del problema para soluciones globales:

Teorema 5.2.4. *En las hipótesis del Teorema 5.2.2, si adicionalmente existen* $\beta_1, \beta_2 > 0$ *tal que*

$$\|(u,u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \beta_1 \|u(0), u_t(0)\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + \beta_2 , \quad \textit{para todo } t \in [0,T) ,\ p \in [1,3).$$

Note que este Teorema implica que $T = \infty$.

Prueba. Por el Teorema 5.2.2, existen soluciones locales y por la aproximación de soluciones fuertes podemos derivar (en el sentido clásico) con respecto de t al operador $E(t)$ siempre que $t \in [0,T)$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \langle \nabla u_t, \nabla u\rangle + \langle u_{tt}, u_t\rangle - \langle f(u), u_t\rangle \\ &= \langle Au, u_t\rangle + \langle u_{tt}, u_t\rangle - \langle f(u), u_t\rangle \\ &= -\alpha\langle u_t, u_t\rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Por otro lado de las hipótesis sobre f se tiene que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_\Omega F(u) = \int_\Omega \int_0^u f(y)dy \leq \int_\Omega \int_0^u (1 + y^p)dy \leq c(1 + \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}).$$

Entonces existe una constante genérica $C > 0$ dependiendo de la anterior, tal que

$$E(t) \leq C(1 + \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}). \tag{5.9}$$

Luego, como la energía no es creciente, entonces

$$E(t) \leq E(0) \leq C(1 + \|(u(0), u_t(0))\|_{\mathcal{H}}^{p+1}). \tag{5.10}$$

Además, se tiene que existe $\delta > 0$ pequeño y una constante $c_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega F(u)dx \geq \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\delta}{\lambda_1}\right) \|\nabla u\|_2^2 - c_1 |\Omega|,$$

por lo tanto existe una constante $\beta > 0$ y $C_0 > 0$ tal que

$$\beta \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_0 \leq E(t). \tag{5.11}$$

Así, de (5.10) y (5.11) se tiene el resultado. ■

5.3. Estructura Gradiente

Lema 5.3.1. *Bajo las suposiciones del Teorema 5.2.2, dado el funcional*

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \Psi(z) := \Psi(u, v) \end{array}$$

tal que

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega F(u)dx, \tag{5.12}$$

donde:

$$F(u) = \int_0^u f(y)dy.$$

Entonces se cumple que:

1. Ψ *es un funcional de Lyapunov estricto;*

2. $\Psi(z) \to \infty$ *si y solo si* $\|z\|_{\mathcal{H}} \to \infty$*;*

3. $\mathcal{N}$ *es acotado sobe* $\mathcal{H}$*.*

Como consecuencia directa, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ *asociado con el problema* (5.2) *es un sistema gradiente.*

Prueba*.* Según la definición 2.2.41, para mostrar 1, bastará demostrar que:

$i)$ $\dfrac{d\Psi}{dt}(S(t)z) \leq 0$, $z \in \mathcal{H}$,

$ii)$ $\Psi(S(t)z) = \Psi(z)$, para todo $t \geq 0$, y para $<\in \mathcal{N}$, donde $\mathcal{N}$ es el conjunto de puntos estacionarios de $(S(t), \mathcal{H})$.

Demostración de $i)$: Nótese que, dado $z \in \mathcal{H}$

$$\Psi(S(t)z) = E(t)$$

y por (5.8), se mostró que $\dfrac{dE}{dt} \leq 0$, en particular se cumple (i).

Demostración de $ii)$: Supongamos que dado $z \in \mathcal{H}$ y $t \geq 0$, se tiene que:

$$\Psi(S(t)z) = \Psi(z)$$

Entonces $\dfrac{dE}{dt}(t) = 0$ con z siendo el dato inicial del sistema (5.2).

Luego, por (5.8), se tiene que

$$-\alpha\langle u_t, u_t\rangle = 0$$

con $\alpha > 0$.

Luego $u_t = 0$ c.s. en Ω, $\forall t \geq 0$.

Es decir que $z = (u, 0) \in \mathcal{H}$ lo que satisface el sistema

$$\begin{cases} Au + f(u) = 0 & \text{, en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

por lo tanto $z \in \mathcal{N}$, lo que muestra $ii)$.

Para la prueba de 2, basta observar que:

$$\beta \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0 \leq E(t) \leq c(1 + \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}) \ , \ \forall t \geq 0 \tag{5.13}$$

para $(u, u_t) \in \mathcal{H}$.

Esto es gracias a (5.9) y (5.11).

Por otro lado, sabemos que si $z \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow \Psi(S(t)z) = E(t).$$

En particular:

$$\Psi(z) = E(0)$$

Entonces, en (5.13) se tiene que

$$\beta \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0 \leq \Psi(z) \leq c(1 + \|z\|^{p+1})$$

de donde se obtiene 2.

Finalmente, para 3, basta observar que si

$$z \in \mathcal{N} \Rightarrow z = (u, 0) \in \mathcal{H}$$

y satisface el sistema:

$$\begin{cases} Au + f(u) = 0 & , \text{ en } \Omega \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.14}$$

luego de (5.14), se obtiene que:

$$\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega f(u).udx = 0$$

Adicionalmente, de la hipótesis 4 sobre f, se tienen que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\int_\Omega f(u).udx \geq -\frac{\lambda_1}{4} \|u\|_2^2 - \delta$$

de donde se concluye que

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \delta + \frac{1}{4} \|\nabla u\|_2^2 .$$

En particular $\mathcal{N}$ está acotado en $\mathcal{H}$, lo que muestra 3.

■

5.4. Propiedad de Cuasiestabilidad

Proposición 5.4.1. (Estimación de Estabilidad)

Bajo las suposiciones del Teorema 5.2.2, vamos a considerar un subconjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$ y dos soluciones débiles $z^1 = (u^1, u_t^1)$ y $z^2 = (u^2, u_t^2)$ del problema (1.1) *con dato inicial $z_0^1 = (u_0^1, u_1^1)$, $z_0^2 = (u_0^2, u_1^2) \in B$. Entonces,*

$$\left\|z^1(t) - z^2(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a_2(t) \left\|z_0^1 - z_0^2\right\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{0 \leq s \leq t} \left\|u^1(s) - u^2(s)\right\|_{2p}^2 , \tag{5.15}$$

donde $a_2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con $\lim\limits_{t \to \infty} a_2(t) = 0$ y $c(t)$ es una función localmente acotada.

Prueba. La estimación (5.15) es uno de los principales núcleos de este trabajo. Su prueba es bastante técnica y extensa, y por esta razón vamos a proceder en varios pasos como sigue.

Paso 1. Establecer el problema de diferencia y los funcionales. Vamos a definir $w = u^1 - u^2$ con $u^i = (u_1^i, u_2^i, u_3^i)$, $i = 1, 2$. Entonces, una simple computación muestra que w es una solución (en el sentido débil y fuerte) del siguiente problema

$$\begin{cases} w_{tt} + Aw + \alpha w_t + f(u^1) - f(u^2) = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(x,0) = u_0^1(x) - u_0^2(x)\,,\ x \in \Omega \\ w_t(x,0) = u_1^1(x) - u_1^2(x)\,,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.16}$$

En este contexto definimos la energía perturbada

$$\Upsilon(t) = \varepsilon \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \delta\chi(t)$$

donde:

$$\chi(t) = \int_\Omega w.w_t dx,$$

y las constantes $\varepsilon, \delta > 0$ serán definidas luego.

Paso 2. Equivalencia. Mostraremos que existe una constante $\eta_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \eta_0\delta$, entonces existen constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tales que:

$$\beta_1 \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \Upsilon(t) \leq \beta_2 \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{5.17}$$

<u>En efecto</u>:

Note que

$$\left|\Upsilon(t) - \varepsilon \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2\right| = \delta \left|\chi(t)\right|$$

y además:

$$\begin{aligned} |\chi(t)| &= \left|\int_\Omega w.w_t dx\right| \\ &= |\langle w, w_t\rangle| \\ &\leq \|w\|_2 \|w_t\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_1}\|\nabla w\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right)\|(w, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor del operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet. Luego,

$$\left|\Upsilon(t) - \varepsilon \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2\right| \le \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \delta \left\|(w, w_t)\right\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\left[-\left(\frac{1}{2\lambda_1}\right) \delta + \varepsilon\right] \left\|(w, t)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \le \Upsilon(t) \le \left[\left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \delta + \varepsilon\right].$$

Así el resultado es válido para

$$\beta_1 = \varepsilon - \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \delta > 0,$$
$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \delta + \varepsilon > 0,$$

siempre que:

$$0 < \varepsilon < \eta_0 \delta,$$

para $\eta_0 = \left(\dfrac{1}{2\lambda_1} + \dfrac{1}{2}\right)$.

Paso 3. Estimativas claves sobre f. En este paso mostraremos que existe una constante $K_f > 0$ tal que:

$$\left\langle f(u^1) - f(u^2), w \right\rangle \le c_p k_f \left\|w\right\|_{2p}^2,$$
$$\left\langle f(u^1) - f(u^2), w_t \right\rangle \le k_f \left\|w\right\|_{2p} \left\|w_t\right\|_2,$$

donde $c_p > 0$ es la constante de inmersión entre $L^{2p}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

<u>En efecto:</u>

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, por el Teorema del valor medio:

$$\left|f(u^1) - f(u^2)\right| \le \left|f'(\xi)\right| \left|u^1 - u^2\right|$$

donde:

$$\xi = (1-t)u^1 + tu^2 \quad , \quad t \in [0, 1].$$

Ahora, por la hipótesis 3 sobre el crecimiento de f:

$$|f'(\xi)| \le c_f(1 + |\xi|^{p-1}) \quad , \quad p \in [1, 3)$$

entonces:

$$\begin{aligned}
|f'(\xi)| &\le (1 + \left|(1-t)u^1 + tu^2\right|^{p-1}) \\
&\le c_f(1 + 2^{p-1}(\left|(1-t)u^1\right|^{p-1} + \left|tu^2\right|^{p-1})) \\
&\le c_f(1 + 2^{p-1}(\left|u^1\right|^{p-1} + \left|u^2\right|^{p-1})) \\
&\le 2^{p-1} c_f(1 + \left|u^1\right|^{p-1} + \left|u^2\right|^{p-1})
\end{aligned}$$

luego,

$$\left|f(u^1)-f(u^2)\right| \leq 2^{p-1}c_f(1+\left|u^1\right|^{p-1}+\left|u^2\right|^{p-1})\left|w\right|. \tag{5.18}$$

Por otro lado, estudiaremos:

$$\int_\Omega \left|u^i\right|^{2p-2}\left|w\right|^2 dx \quad , \quad i=1,2 \quad , \quad 1<p<3.$$

Note que si $i=1,2$, y como

$$\frac{2p-2}{2p}+\frac{2}{2p}=1$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|u^i\right|^{2p-2}\left|w\right|^2 dx &\leq \left(\int_\Omega (\left|u^i\right|^{2p-2})^{\frac{2p}{2p-2}} dx\right)^{\frac{2p-2}{2p}} \left(\int_\Omega (\left|w\right|^2)^{\frac{2p}{2}} dx\right)^{\frac{2}{2p}} \\
&\left(\int_\Omega \left|u^i\right|^{2p} dx\right)^{\frac{2p-2}{2p}} \left(\int_\Omega \left|w\right|^{2p} dx\right)^{\frac{2}{2p}} \\
&= \left\|u^i\right\|_{2p}^{2p-2}\left\|w\right\|_{2p}^2,
\end{aligned}$$

y como $(u^i,u^i_t)\in B$, siendo B acotado en $\mathcal{H}$, se tiene que existe una constante $C_B\geq 1$, dependiente de B, tal que:

$$\left\|u^i\right\|_{2p}^2 \leq C\left\|\nabla u^i\right\|_2^2 \leq C_B,$$

donde $C>0$ es la constante de inmersión entre $H_0^1(\Omega)$ y $L^{2p}(\Omega)$.

Así, se tiene que:

$$\int_\Omega \left|u^i\right|^{2p-2}\left|w\right|^2 dx \leq C_B\left\|w\right\|_{2p}^2.$$

Observe que de esta última desigualdad, y de (5.18), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|f(u^1)-f(u^2)\right|^2 dx &\leq 2^{2p-2}C_f^2\int_\Omega (1+\left|u^1\right|^{p-1}+\left|u^2\right|^{p-1})^2\left|w\right|^2 dx \\
&\leq 2^{2p}C_f^2\left[\int_\Omega \left|w\right|^2 dx+\int_\Omega \left|u^1\right|^{2p-2}\left|w\right|^2 dx+\int_\Omega \left|u^2\right|^{2p-2}\left|w\right|^2 dx\right] \\
&\leq 2^{2p}C_f^2[\left\|w\right\|_2^2+C_B\left\|w\right\|_{2p}^2+C_B\left\|w\right\|_{2p}^2] \\
&\leq 2^{2p+1}C_f^2C_B[\left\|w\right\|_{2p}^2+\left\|w\right\|_{2p}^2] \\
&\leq 2^{p1+1}C_f^2C_B(C_p+1)\left\|w\right\|_{2p}^2,
\end{aligned}$$

siempre que $1<p<3$ y donde $C_p>0$ es la constante de inmersión entre $L^{2p}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$.

Note que si $p=1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|f(u^1)-f(u^2)\right|^2 dx &\leq 9C_f^2\int_\Omega \left|w\right|^2 dx \\
&= 9C_f^2\left\|w\right\|_{2p}^2.
\end{aligned}$$

Para ambos casos, existe una constante:

$$K_f = \left\{ \text{máx} \left\{ 9C_f^2; 2^{p+1} C_f^2 C_B (C_P + 1) \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} > 0$$

tal que:

$$\left\| f(u^1) - f(u^2) \right\|_2^2 = \int_\Omega \left| f(u^1) - f(u^2) \right|^2 dx \leq K_f^2 \left\| w \right\| u_{2p}^2.$$

Finalmente el resultado se obtiene usando la desigualdad de Cauchy-Swchartz.

Paso 4. Estimación del crecimiento de la energía lineal. En este paso, mostraremos que:

$$\frac{d}{dt} \left\| (w, w_t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq -\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 + \frac{K_f^2}{\alpha} \left\| w \right\|_{2p}^2$$

para $K_f > 0$ obtenida en el paso anterior.

En efecto:

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| (w, w_t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= 2\langle \nabla w, \nabla w_t \rangle + 2\langle w_t t, w_t \rangle \\
&= 2\langle w_t t + Aw, w_t \rangle \\
&= 2\Big\langle -\alpha w_t - (f(u^1) - f(u^2)), w_t \Big\rangle \\
&= -2\alpha (w_t, w_t)_{V,V'} - 2\Big\langle f(u^1) - f(u^2), w_t \Big\rangle \\
&= -2\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 - 2\Big\langle f(u^1) - f(u^2), w_t \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora, usando el paso 3, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| (w, w_t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq -2\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 + 2K_f \left\| w \right\|_{2p} \left\| w_t \right\|_2 \\
&\leq -2\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 + \left[\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 + \frac{K_f^2}{\alpha} \left\| w \right\|_{2p}^2 \right] \\
&= -\alpha \left\| w_t \right\|_2^2 + \frac{K_f^2}{\alpha} \left\| w \right\|_{2p}^2,
\end{aligned}$$

lo que muestra el resultado.

Paso 5. Estimación del crecimiento $\chi(t)$. Mostraremos que:

$$\frac{d}{dt}\chi(t) \leq \frac{3}{2} \left\| w_t \right\|_2^2 - \left\| \nabla w \right\|_2^2 + \left(C_p K_f + \frac{C_p \alpha^2}{2} \right) \left\| w \right\|_{2p}^2,$$

donde $C_p > 0$ y $K_f > 0$ son dados en el paso 3.

En efecto:

Note que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) &= \frac{d}{dt}(w, w_t)_{V,V'}\\
&= \|w_t\|^2 + \langle w_t t, w\rangle\\
&= \|w_t\|^2 + \big\langle -Aw - \alpha w_t - (f(u^1) - f(u^2)), w\big\rangle\\
&= \|w_t\|^2 - \|\nabla w\|_2^2 - \alpha\langle w_t, w\rangle - \big\langle f(u^1) - f(u^2), w\big\rangle\\
&\leq \|w_t\|^2 - \|\nabla w\|_2^2 + alp\,\|w_t\|_2\,\|w\|_2 - \big\langle f(u^1) - f(u^2), w\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Ahora, usando el paso 3, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) &\leq \|w_t\|^2 - \|\nabla w\|_2^2 + \alpha\,\|w_t\|_2\,\|w\|_2 + C_pK_f\,\|w\|_{2p}^2\\
&\leq \|w_t\|^2 - \|\nabla w\|_2^2 + \frac{\|w_t\|_2^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\|w\|_2^2 + C_pK_f\,\|w\|_{2p}^2\\
&\leq \frac{3}{2}\,\|w_t\|^2 - \|\nabla w\|_2^2 + \left(C_pK_f + \frac{C_p\alpha^2}{2}\right)|w|_{2p}^2,
\end{aligned}
$$

lo que muestra el resultado.

Paso 6. Estimativa del crecimiento de $\Upsilon(t)$. Mostraremos que:

$$
\frac{d}{dt}\Upsilon(t) \leq \left(\frac{3}{2}\delta - \alpha\varepsilon\right)\|w_t\|_2^2 - \delta\,\|\nabla w\|_2^2 + \left(\frac{K_f^2}{\alpha}\varepsilon + C_pK_f\delta + \frac{\delta C_p\alpha^2}{2}\right)\|w\|_{2p}^2.
$$

<u>En efecto</u>:

Note que:

$$
\frac{d}{dt}\Upsilon(t) = \varepsilon\frac{d}{dt}\,\|(w, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \delta\frac{d}{dt}\chi(t)
$$

y por los pasos 4 y 5 se tendría que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Upsilon(t) &\leq \varepsilon\left(-\alpha\,\|w_t\|_2^2 + \frac{K_f^2}{2}\,\|w\|_{2p}^2\right)\\
&\quad + \delta\left(\frac{3}{2}\,\|w_t\|_2^2 - \|\nabla w\|_2^2 + \left(C_pK_f + \frac{C_p\alpha^2}{2}\right)\|w\|_{2p}^2\right)\\
&= \left(\frac{3}{2}\delta - \alpha\varepsilon\right)\|w_t\|_2^2 - \delta\,\|\nabla w\|_2^2 + \left(\frac{K_f^2}{\alpha}\varepsilon + C_pK_f\delta + \frac{\delta C_p\alpha^2}{2}\right)\|w\|_{2p}^2.
\end{aligned}
$$

Paso 7. Elección de ε *y* δ*.* Mostraremos que existen $\varepsilon, \delta > 0$ tal que $\varepsilon > \eta_0\delta$ y se cumple que

$$
\frac{d}{dt}\Upsilon(t) \leq -\eta_1\,\|(w, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_1\,\|w\|_{2p}^2,
$$

para algunas constantes $\eta_1 > 0$ y $C_1 > 0$.

<u>En efecto:</u>

Del paso anterior, necesitamos encontrar $\varepsilon, \delta > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\delta - \alpha\varepsilon < 0, \\ \\ \varepsilon > \eta_0 \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon > \frac{3}{2\alpha}\delta \qquad \wedge \qquad \varepsilon > \eta_0\delta$$

o sea si $\varepsilon > \left(\dfrac{3}{2\alpha} + \eta_0\right)\delta$ se cumplen ambos.

Así, asumiendo $\delta = 1$ y $\varepsilon > \left(\dfrac{3}{2\alpha} + \eta_0 + \dfrac{1}{\alpha}\right) > 0$, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}\Upsilon(t) \leq -\eta_1 \|w_t\|_2^2 - 1 \|\nabla w\|_2^2 + C_1 \|w\|_{2p}^2 \,,$$

donde,

$$\eta_1 = \alpha\varepsilon - \frac{3}{2} > 0 \quad , \quad C_1 = -\left(\frac{K_f^2}{\alpha}\varepsilon + C_p K_f + \frac{C_p \alpha^2}{2}\right) > 0,$$

note que $\eta_1 > 1$, entonces $-1 < -\eta_1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dr}\Upsilon(t) &\leq -\eta_1(\|\nabla w\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + C_1 \|w\|_{2p}^2 \\ &= -\eta_1(\|(w, w_t)\|_2^2) + C_1 \|w\|_{2p}^2 \end{aligned}$$

lo que muestra el resultado.

Paso 8. Conclusión de la demostración. De la estimativa anterior y de (5.17) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dt}(t) &\leq -\eta_1 \left|(w, w_t)\right|_2^2 + C_1 \|w\|_{2p}^2 \\ &\leq -\frac{\eta_1}{\beta_1}\Upsilon(t) + C_1 \|w\|_{2p}^2 \,. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall se tiene que:

$$\Upsilon(t) \leq e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}t}\Upsilon(0) + C_1 \int_0^t e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}(t-s)} \|w(s)\|_{2p}^2 \, ds$$

lo que equivale a

$$\Upsilon(t) \leq e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}t}\Upsilon(0) + C_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \|w(s)\|_{2p}^2 \int_0^t e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}(t-s)} ds$$

Finalmente por (5.17) se tiene que:

$$\|w(t), w_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}t} \|(w_0, w_1)\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1}t}\right) C_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \|w(s)\|_{2p}^2 \,,$$

lo que muestra el resultado con

$$a_2(t) = \frac{\beta_2}{\beta_1} e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1} t} \qquad , \qquad c(t) = \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{e^{-\frac{\eta_1}{\beta_1} t}}{\eta_1} \right) C_1,$$

ya que $a_2(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ y $c(t)$ es localmente acotada. ■

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Existencia de un atractor global

Gracias a los resultados anteriores, en esta sección demostramos el resultado principal de la tesis:

Teorema 6.1.1. *Suponiendo que las mismas hipótesis del Teorema 5.2.2, entonces el sistema dinámico* $(\mathcal{H}, S(t))$ *asociado al problema* (5.2) *posee un atractor global con dimensión fractal finita.*

Prueba. Como vimos en el Lema 5.3.1, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un funcional de Lyapunov estricto denotado por Ψ, por lo que de acuerdo a la Definición 2.2.41, $(\mathcal{H}, S(t))$ es gradiente. Adicionalmente en este mismo lema se demostró que

$$\Psi(z) \to \infty \Leftrightarrow \|z\|_{\mathcal{H}} \to \infty$$

y que el conjunto de puntos estacionarios $\mathscr{N}$ es acotado en $\mathcal{H}$.

Por otro lado, la Proposición 5.4.1 muestra que $(\mathcal{H}, S(t))$ es un sistema cuasi-estable, y además como el sistema está bien colocado según el Teorema 5.2.2 y el Teorema 5.2.4, entonces se satisface la suposición 2.2.54.

Así por la Proposición 2.2.55, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es asintóticamente suave.

Finalmente por el Corolario 2.2.56, $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un atractor global $A \subset \mathcal{H}$ caracterizado como:

$$A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N}).$$

Además, por el Teorema 2.2.58, como el sistema es cuasi-estable, se tiene que dicho atractor global posee dimensión fractal finita, lo que muestra el resultado. ■

VII. CONCLUSIONES

1. El estudio de la dinámica a largo plazo de los sistemas de evolución nos permitirán mostrar la existencia de las regiones compactas de estabilización, las cuales cobran una importancia relevante cuando el sistema proviene de una ecuación de la mecánica clásica como lo son los sistemas de ondas amortiguadas.

   En este trabajo se mostró la existencia de dicha región de estabilización a partir de la existencia de un atractor global para el sistema dinámico.

2. Como se vio en el Capítulo 6, el atractor global fue caracterizado por las variedades inestables de los puntos estacionarios tal que:

   $$A = \mathscr{M}^u(\mathscr{N}).$$

   Este hecho refuerza el concepto físico de que todo problema de la mecánica clásica tiende a su estado estacionario.

3. La propiedad de cuasiestabilidad para $(\mathcal{H}, S(t))$ fue fundamental ya que nos permitió concluir que dicho sistema dinámico es asintóticamente compacto y además, que la dimensión fractal del atractor es finita.

VIII. RECOMENDACIONES

1. Se recomienda para futuros trabajos explorar la existencia de un atractor global cuando las fuerzas estructurales sobre el sistema son críticas, es decir, en lugar de considerar la hipótesis

$$|f(z)| \leq C_f(1 + |z|^p) \quad , \quad 1 \leq p < 3$$

en el sistema (5.1), se recomienda considerar

$$|f(z)| \leq C_f(1 + |z|^3).$$

Este hecho de considerar la fuerza crítica tiene un inconveniente que se debe explorar en la propiedad de cuasiestabilidad.

2. Se recomienda explorar la localización del amortiguador, es decir, en lugar de considerar $\alpha > 0$ en (5.1), considerar:

$$\alpha(x) \geq 0 \text{ c.s. en } \Omega$$

con $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ sobre $\omega \subset \Omega$.

Esta nueva hipótesis dicta que el amortiguamiento solo funcionará efectivamente sobre un conjunto ω en Ω, haciendo la disipación localizada.

3. Se recomienda estudiar el caso en que el sistema (5.1) es expuesto por fuerzas externas dependientes del tiempo. Este hecho haría que el sistema sea no autónomo y se tendría que explorar otros tipos de atractores.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[2] J.-P. Aubin, Une théorè de compacité, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 256 (1963), 5042-5044.

[3] A.Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media, Vol 44, 2012.

[4] A. Babin and M. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[5] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.

[6] M. M. Cavalcanti, L. H. Fatori anf T. F. Ma, Attractors for wave equations with degenerate memory, *J. Differ. Equ.* 260, 56-83 (2016).

[7] I. Chueshov, M. Eller and I. Lasiecka, On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation, *Commun. Partial Diff. Eqs.*, 27 (2002), 1901-1951.

[8] I. Chueshov, M. Eller and I. Lasiecka, On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation, *Commun. Partial Diff. Eqs.*, 27 (2002), 1901-1951.

[9] I. Chueshov, M. Eller and I. Lasiecka, Finite dimensionality of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation, *Commun. Partial Diff. Eqs.*, 29 (2004), 1847-1976.

[10] I. Chueshov and I. Lasiecka, Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation, *J. Diff. Eqs.*, 198 (2004), 196-221.

[11] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Attractors for second order evolution equations*, J. Dynam. Diff. Eqs., 16 (2004), 469-512.

[12] I. Chueshov and I. Lasiecka, Kolmogorov's ε-entropy for a class of invariant sets and dimension of global attractors for second order in time evolution equations with nonlinear damping. In: *Control Theory of Partial Differential Equations*, O. Imanuvilov et al., (Eds.), A Series of Lectures in Pure and Applied Mathematics, vol. 242, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005, 51-69.

[13] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Memoirs of AMS, vol.195, no. 912, AMS, Providence, RI, 2008.

[14] Yu. A. Dubinskiï, Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equtions, *Math. USSR Sbornik* 67(4) (1965), 609-642.

[15] H. Gajewski, K. Greger, and K. Zacharias, *Nichtlineare Operator Gleichungen und Operator Differential Gleichungen*, Akademic-Verlar, Berlin, 1974.

[16] J.M. Ghidaglia and R. Temam, Regularity of the solutions of second order evolution equations and their attractors, *Ann. della Scuola Norm. Sup. Pisa*, 14 (1987), 485-511.

[17] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[18] L.V. Kapitansky and I.N. Kostin, Attractors of nonlinear evolution equations and their approxiamtins, *Leningrad Math. J., 2* (1991), 97-117.

[19] A. K. Khanmamedov, Global attractors for von Karman equations with nonlinear dissipation, *J. Math. Anal. Appl.*, 318 (2006), 92-101.

[20] H. Koch and I.Lasiecka, Hadamard well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamic elasticity - full von Karman systems. In: *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*, W.R. Neumann, A. Lorenzi, and A. Lorenzi (Eds.), (Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol.50), Birkhäuser, Basel, 2002, 197-216.

[21] I. N. Kostin, Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor, *Asympt. Anal.*, 16 (1998), 203-222.

[22] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[23] J. Lagnese and G. Leugering, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear bound-ary feedback, J. Diff. Eqs., 91 (1991), 355-388.

[24] I. Lasiecka. Existence and uniqueness of solutions to second order nonlinear and nonmono-tone boundary conditions, *Nonlin. Anal.* TMA, 24 (1994), 797-823.

[25] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[26] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol.1*. Springer, New York, 1972.

[27] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1986.

[28] D. Prazak, On finite fractal dimension of the global attractor for the wave equation with nonlinear damping, *J. Dyn. Diff. Eqs.*, 14 (2002), 764-776.

[29] G. Raugel, Global Attractors in partial differential equations. In: *Handbook of Dynamical Systems, vol. 2*, B.Fiedler (Ed.), Elsevier, Amsterdam, 2002, 885-982.

[30] T. Runst and J. Sieckel, *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlineal Partial Differential equations*, Gruyter, Berlin, 1996.

[31] R. Showalter, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS Providence, 1997.

[32] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, *Annali Mat. Pura Appl.,* 148 (1987), 65-96.

[33] H. Triebel, *Interpolation Theory, Functional Spaces and Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[34] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, vol.I-IV*, Springer, Berlin, 1986-1995.

ANEXOS

9.1. Matriz de Consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
Problema General: ¿Será posible probar la existencia de un atractor global para la ecuación de onda amortiguada?	**Objetivo General:** Probar la existencia de un atractor global para la ecuación de onda amortiguada.	**Hipótesis General:** El sistema $u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + f(u) = h(x)$, $u = 0$ en $\partial\Omega$, (ecuación de onda) posee un atractor global.	**Tipo:** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. **Método:** La metodología usada es de tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. **Diseño:** La investigación que se desarrolla presenta el diseño científico-teórico, mostrando la siguiente estructura: La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Se empezará definiendo los términos básicos en la formulación del modelaje físico de las ecuaciones de la Onda, lo que permitirá entender la construcción de dicho modelo expuesto a fuerzas estructurales. Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve a los espacios de Sobolev con el fin de poder probar la buena colocación (i.e. existencia, unicidad y dependencia continua con los datos iniciales) para el problema de la ecuación de la onda expuesta a fuerzas estructurales. Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis funcional, de tal manera que se pueda probar la existencia de soluciones en el espacio de fase $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.	Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar.
Problemas Específicos: • ¿Será posible probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para la ecuación de onda amortiguada? • ¿Será posible probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada?	**Objetivos Específicos:** • Probar la buena colocación en el sentido de Hadamard para la ecuación de onda amortiguada. • Probar la estructura gradiente del semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada	**Hipótesis Específicas:** • La ecuación de onda amortiguada esta bien colocada en el sentido de Hadamard. • La ecuación de onda amortiguada posee estructura gradiente. • El semigrupo asociado a la ecuación de onda amortiguada expuesta a fuerzas estructurales cumple la cuasiestabilidad.		