

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**“Descripción y Comparación de los Métodos de  
Optimización Multiobjetivo Restricción para el  
Modelo de Markowitz”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL  
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**Autor:**

**José Fortunato Linares Alejo**

**Asesor:**

Dr. Pedro Canales García

**Línea de investigación:**

Análisis Numérico y Matemática Computacional

Callao, 2023

**PERÚ**

A handwritten signature in black ink, featuring a large, stylized initial 'J' followed by the name 'Linares Alejo' in a cursive script.

---

José Fortunato Linares Alejo  
Bachiller

A handwritten signature in blue ink, featuring a large, stylized initial 'P' followed by the name 'Canales García' in a cursive script.

---

Dr. Pedro Canales García  
Asesor



## Document Information

---

Analyzed document	Tesis Yino Cueva (1).pdf (D173042787)
Submitted	2023-08-23 03:30:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

## Sources included in the report

---

### Entire Document

---

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA CUEVA CARRANZA YINO BETO CALLAO, 2021 PERÚ

Yino Beto Cueva Carranza Bachiller Código: 073022E DNI: 44699938 Sotelo Pejerrey Alfredo Asesor Código: 1745 DNI: 45569296

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN DENSIDAD DE ESTADOS Y EL FENÓMENO LIFSHITZ TAILS PARA EL MODELO DE ANDERSON DISCRETO Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por: Mg. Wilfredo Mendoza Quispe Presidente Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega Vocal Mg. Jorge Luis Rojas Orbegoso Secretario Lic. Moisés Lázaro Carrión Miembro suplente Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey Asesor

DEDICATORIA A mis padres Manuel Cueva López y Bertila Carranza Tafur, por darme la vida, por el inmenso cariño, por sus buenos consejos, por haberme inculcado buenos principios y por los ejemplos de perseverancia para hacer este sueño realidad. A mis hermanos Lidia, Higor y Sonia por la constante motivación, apoyo y comprensión. A mis sobrinos, Jimena, Rosaemilia, Samir, Piero, Kellot y Silvia. A todos mis familiares y amigos por la ayuda que me brindaron.

1  
AGRADECIMIENTO En primer lugar quisiera agradecer a mi querido asesor Mg. Sotelo Pejerrey Alfredo, por sus grandes enseñanzas, por su paciencia, amistad, excelente orientación, por la ayuda que me ha brindado para la realización de este trabajo y por ser un excelente profesional un ejemplo a seguir. En segundo lugar quisiera agradecer a mi asesor de maestría Dr. Roberto Almeida Prado, por haber contribuido para la realización de este trabajo, por los buenos consejos y hacer de mí una mejor persona y un mejor profesional. Quisiera agradecer de manera especial a los jurados de la sustentación de la presente tesis conformado por los profesores: Wilfredo Mendoza Quispe, Dionicio Orlando Moreno Vega, Jorge Luis Rojas Orbegoso y Moisés Lázaro Carrión, quienes contribuyeron con sus observaciones y sugerencias. Del mismo modo quisiera agradecer también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC que compartieron sus conocimientos y sus consejos que contribuyeron a mi formación. A todos mis amigos y compañeros de la UNAC con quienes compartimos muy buenos momentos y me ayudaron durante mi formación. A todo el personal de FCNM que me ayudaron en todo y que hicieron mi estadía en la UNAC sea muy fácil. Un agradecimiento postumo. A mi profesor de colegio Lic. Julca Meigarejo Hipólito, por su amistad, por sus consejos y el gran legado que me dejó como mi profesor de Matemáticas. A todos ellos muchas gracias. 2



## CONSTANCIA N° 23-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

**JOSÉ FORTUNATO LINARES ALEJO**

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: “DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO RESTRICCIÓN PARA EL MODELO DE MARKOWITZ”.

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 14 de agosto 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA  
DIRECTOR

## INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** “Descripción y Comparación de los Métodos de Optimización Multiobjetivo Restricción para el Modelo de Markowitz”.
4. **Autor:** Bach. José Fortunato Linares Alejo  
ORCID: 0000-0003-4203-9619
5. **Asesor:** Dr. Pedro Canales García  
ORCID: 0000-0002-9299-4158
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas (FCNM)
7. **Unidad de análisis:** Problemas multiobjetivo
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.02 (Matemática Aplicada)



### ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: <https://meet.google.com/fmk-hugg-ghc>, mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 17:00 horas del sábado veintinueve de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **JOSÉ FORTUNATO LINARES ALEJO**, titulado: **“DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO RESTRICCIÓN PARA EL MODELO DE MARKOWITZ”** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César : Presidente  
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio : Secretario  
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Vocal  
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 046-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 18:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **JOSÉ FORTUNATO LINARES ALEJO**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

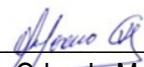
Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
<b>17</b>	<b>Muy bueno</b>

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

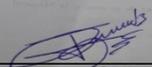
Siendo las **18:00** horas del día veintinueve de abril del año dos mil veintitres, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Julio César Núñez Villa  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega  
Secretario

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Edinson Montoro Alegre  
Vocal

  
\_\_\_\_\_  
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas  
Suplente

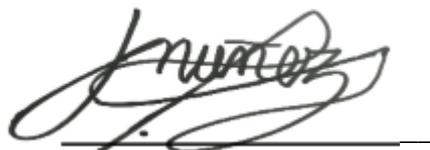
## HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

### “DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO RESTRICCIÓN PARA EL MODELO DE MARKOWITZ”

JOSÉ FORTUNATO LINARES ALEJO

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N° 084-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencia Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

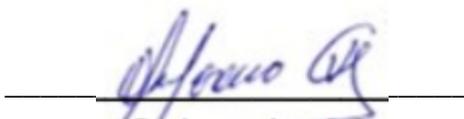
Aprobada por:



**Presidente**



**Vocal**



**Secretario**



**Asesor**

## **DEDICATORIA**

### **A Dios:**

Dar gracias a Dios por sus bendiciones y amor misericordioso, en cada etapa de mi vida.

### **A mis Padres:**

Nicanor y Rosa, porque con su esfuerzo y amor han logrado sacarme adelante, gracias a ustedes, hoy soy lo que soy, más que mío es de ustedes este logro, hoy se los dedico y agradezco desde lo más profundo de mí ser.

### **A mi Esposa y mis hijos:**

Jennifer, José Manuel y Rosangela, quienes son fuente de inspiración para poder superarme. Mi esposita que me llena de amor, comprensión, dulzura y apoyo, ha sido pilar fundamentalmente para el logro de esta meta.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al profesor Paulo Seminario, por su comprensión, paciencia para guiarnos en la elaboración de nuestra tesis y empatía sincera con nosotros, sus estudiantes de los Módulos de Tesis I, II y III.

A mi asesor, Dr. Pedro Canales, por su orientación y apoyo en todo el trabajo.

## ÍNDICE

RESUMEN .....	iv
ABSTRACT .....	v
INTRODUCCIÓN .....	1
<b>I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>3</b>
1.1 Descripción de la realidad problemática .....	3
1.2 Formulación del problema.....	5
1.2.1 Problema general .....	5
1.2.2 Problemas específicos .....	5
1.3 Objetivos .....	5
1.3.1 Objetivo general .....	5
1.3.2 Objetivos específicos .....	5
1.4 Justificación .....	6
1.5 Delimitantes de la investigación .....	7
1.5.1 Teórica .....	7
1.5.2 Temporal .....	7
1.5.3 Espacial .....	7
<b>II. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>9</b>
2.1 Antecedentes .....	9
2.1.1 Antecedentes Internacionales .....	9
2.1.2 Antecedentes Nacionales .....	10

2.2	Bases Teóricas .....	11
2.3	Marco Conceptuales .....	34
2.4	Definiciones de términos básicos.....	35
III.	<b>HIPÓTESIS Y VARIABLES</b> .....	37
3.1	Hipótesis General y Especifica .....	37
	3.1.1 Operalización de variables .....	37
IV.	<b>METODOLOGÍA DEL PROYECTO</b> .....	39
4.1	Diseño metodológico .....	39
4.2	Método de investigación.....	39
4.3	Población y muestra.....	40
4.4	Lugar de estudio y período desarrollado .....	40
4.5	Técnicas e instrumentos para la recolección de la información ..	40
4.6	Análisis y procesamiento de datos .....	41
4.7	Aspectos Éticos en Investigación .....	41
4.8	Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.....	41
4.9	Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.....	41
V.	<b>RESULTADOS</b> .....	52
	5.1 Resultados descriptivos .....	53
	5.2 Resultados inferenciales .....	53

5.3 Otro tipo de resultado estadísticos, de acuerdo con la naturaleza del problema y la hipótesis. ....	53
<b>VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b> .....	<b>54</b>
6.1 Contrastación y demostración de las hipótesis con los resultados	54
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares .....	55
6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes .....	56
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>57</b>
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	<b>58</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b> .....	<b>59</b>
<b>ANEXOS</b>	
• Matriz de consistencia.	
• Inversiones de empresas (Bolsa de Valores de Sao Paulo - BOVESPA)	

## RESUMEN

Dentro de los problemas de optimización el multiobjetivo es uno de los más frecuentes que aparece en las aplicaciones de la Economía, debido a su naturaleza variable al considerar familias de funciones a optimizar. Comúnmente estos objetivos compiten entre ellos generando conflictos para obtener buenas soluciones.

La presente tesis pretende describir y comparar dos técnicas usadas en este tipo de optimización, el método **NISE** y de  $\varepsilon$  – **restricción**, para un modelo de portafolio de Markowitz.

**Palabras claves:** Métodos de Optimización, NISE,  $\varepsilon$  – restricción, Teoría de portafolio de Markowitz.

## **ABSTRACT**

Within the problems of optimization, the multi-objective is one of the most frequent that appears in the applications of the economy, due to its variable nature when considering families of functions to optimize. Commonly these objectives compete between them generating conflicts to obtain good solutions.

This thesis aims to describe and compare two techniques used in this type of optimization the NISE and  $\varepsilon$  –restriction method for a Markowitz Portfolio model.

**Keywords:** Optimization Methods, NISE,  $\varepsilon$  – restriction, Markowitz Portfolio Theory.

## INTRODUCCIÓN

La optimización matemática es un área dentro de las matemáticas que se encarga de la elección de la mejor alternativa de entre las posibles para un problema formulado en términos matemáticos. Esta área de las matemáticas es muy amplia, debido a la diversidad de situaciones que se pueden plantear y a las distintas maneras de enfocar la resolución del problema.

Los problemas con múltiples objetivos son muy comunes en las áreas de Optimización. Como los objetivos son generalmente contradictorios, es necesario utilizar técnicas adecuadas para obtener buenas soluciones. El área que se ocupa de problemas de este tipo se denomina Optimización Multiobjetivo.

La presente investigación desarrolla la aplicación de los métodos de optimización multiobjetivo **NISE** y  $\varepsilon$  – **restricción** en el modelo de Markowitz. Para esto se considerará el siguiente esquema:

1. En primer lugar, se definen algunos conceptos relacionados con el conjunto de soluciones, como la eficiencia, para entender cuál sería la mejor solución para este tipo de problemas, se presentará algunas condiciones de optimización de primer orden, incluidas las del tipo Fritz John para problemas de optimización multiobjetivo. También se discutirá algunas condiciones de regularidad y regularidad total, que juegan el mismo papel que las condiciones de calificación en Programación No Lineal, proporcionando la estricta positividad de los multiplicadores de Lagrange asociados con funciones objetivas.

2. Con respecto al modelo de Markowitz, el problema de la selección del portafolio de inversión muestra dos funciones objetivo, la primera es maximizar el rendimiento y la segunda, es minimizar el riesgo. En el modelo de Markowitz se considera el planteamiento del problema cuadrático de minimización del riesgo con dos restricciones. La primera restricción es el rendimiento, cuya magnitud de esta cambia en función de un parámetro. La segunda restricción, considerará a la suma de variables de decisión igual al 100%. Con este modelo se obtiene la frontera del portafolio eficiente considerando el riesgo y el rendimiento en función de la covarianza entre las acciones.
  
3. Posteriormente, se describen y comparan los métodos de optimización multiobjetivo **NISE** y  $\varepsilon$  – **restricción** en el modelo de Markowitz, en las áreas de detección comprimida y optimización del portafolio.

## I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Descripción de la realidad problemática

El siguiente trabajo de tesis tiene como finalidad describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo: NISE y  $\varepsilon$  – restricción aplicada a la teoría de Portafolio, en particular al modelo de Markowitz, es decir:

El problema abordado es:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x'Qx - \mu'x & 1.1 \\ \text{s. a: } \sum_{i=1}^n x_i &= 1; x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde:

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  el vector compuesto por los rendimientos esperados de las inversiones.

$Q$ : matriz de covarianza

$f$ : función multiobjetivo  $f: R^n \rightarrow R^n$

$f_k$ : función objetivo  $f_k: R^n \rightarrow R$

Este problema 1.1 se resolverá usando los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción.

Para la aplicación del método NISE, el modelo de Markowitz dado en 1.1 sufre la siguiente transformación; para eso utilizaremos, dos funciones objetivas:

$$\min f_1(x) = x'Qx \quad \text{y} \quad \max f_2(x) = \mu'x.$$

El modelo de varianza promedio (MV) de Markowitz que usaremos se puede formular de la siguiente manera:

$$\max \mu'x - \gamma x'Qx \quad 1.2$$

$$s. a: \sum_{i=1}^n x_i = 1; \quad x \geq 0$$

donde  $\gamma \geq 0$  es una constante de aversión al riesgo, que se puede variar para obtener el límite eficiente.

Y para el método  $\epsilon$  – **restricción**, el retorno esperado se restringe a un valor mínimo  $R$ .

$$\min x'Qx \quad 1.3$$

$$s. a: \mu'x \geq R$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1; \quad x \geq 0$$

donde  $R$  es el valor mínimo deseado para el rendimiento esperado. Cuando un valor es conocido por  $R$  dentro del rango donde está el límite eficiente, podemos cambiar el menor o igual a igual simplemente, obtener  $\mu x = R$ . Tal problema es exactamente una aplicación del método  $\epsilon$  – **restricción**, dado que la varianza de una variable siempre es no negativa,  $Q$  es una matriz positiva semidefinida.

Nuestro objetivo es, por tanto, presentar y aplicar dos métodos de Optimización Multiobjetivo que no se ha aplicado en el contexto de la optimización del portafolio y comparar sus resultados, sobre el modelo de Markowitz.

## **1.2 Formulación del problema**

Se pretende formular, analizar y resolver las siguientes interrogantes:

### **1.2.1 Problema General**

¿Se puede describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz?

### **1.2.2 Problemas Específicos**

¿Se puede describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz?

¿Se puede comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz?

## **1.3 Objetivos de la investigación**

### **1.3.1 Objetivo General**

Describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

Comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

## 1.4 Justificación

Dentro del área de optimización, existen problemas en los que existen varios objetivos a alcanzar en lugar de solo uno. Estos objetivos a menudo están en conflicto entre sí y rara vez existe una solución óptima para todos los objetivos simultáneamente. Esas son las características de un problema de optimización multiobjetivo (POM), también conocido como problema de optimización multicriterio. El proceso de optimización, sin embargo, pertenece a otro más general, llamado Toma de Decisiones Multicriterio (TDMC). Esta distinción entre dos procesos se debe principalmente a las diferentes áreas que trabajan con problemas con múltiples objetivos utilizando sus herramientas específicas, como la investigación operativa y Economía. Como el proceso TDMC es muy completo, es posible distinguir los problemas existentes y las áreas respectivas que los tratan en dos tipos. El primero, llamado la división multicriterio, es un área que se ocupa de problemas en los que el conjunto de soluciones viables es discreto, predeterminado y finito. En el segundo tipo, llamado Optimización Multiobjetivo, las soluciones viables no se conocen explícitamente, pero suelen estar representadas por restricción. (Cohon et al., 1979).

En este proyecto de tesis, presentamos algunos métodos para resolver problemas de optimización multiobjetivo encontrado en (Cohon, 1978], (Cohon et al., 1979), (Zadeh, 1963) y (Haimes et al., 1971). Tales métodos consisten en dar solución al problema multiobjetivo. Lo llamamos escalarización, la transformación de un problema con varios objetivos en otro con un solo objetivo. Estudiaremos en este trabajo los métodos de optimización multiobjetivo **NISE** y  $\epsilon$  – **restricción** para el modelo de Markowitz.

Por ejemplo, considere un conjunto de  $n$  inversiones que contienen acciones de empresas, fondos mutuos, opciones y otros derivados. Estas inversiones tienen riesgos y rendimientos futuros asociados a ellas.

Queremos saber cuánto debemos invertir en cada uno para que el rendimiento futuro total sea el máximo posible, y el riesgo, el mínimo posible. En otras palabras, queremos **optimizar** nuestro portafolio.

Generalmente, las inversiones que brindan el mayor rendimiento esperado son aquellas que ocasionan mayores riesgos. En la teoría moderna de portafolio, introducida en (Markowitz, 1952) y eso será considerado en este trabajo, el inversor puede elegir una compensación entre el riesgo y el rendimiento esperado del portafolio a través de la curva de frontera eficiente.

Es así, que el presente trabajo tiene su justificación en la aplicación práctica sobre modelos altamente estudiados considerando problemas multiobjetivo en particular el estudio del método **NISE** y  $\epsilon$  – **restricción**.

## **1.5 Limitantes de la investigación**

### **1.5.1 Teórica**

Al realizar la investigación teórica del tema a desarrollar, se ha visto que se cuenta con pocos trabajos a nivel nacional, por este motivo, los trabajos teóricos de referencia son de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas. Es así como la principal limitación es el acceso a dicho material, ya que la mayoría de las revistas consideran un monto a pagar por sus artículos.

### **1.5.2 Temporal**

Debido a la situación actual en el país y en el mundo respecto al COVID 19, se ha reducido el tiempo de interacción que tenía con mi asesor para el proyecto de tesis, lo cambio todo y ahora se analiza todo de forma virtual a pesar de la dificultad que esto origina.

### **1.5.3 Espacial**

En el país debido a la situación actual originado por el COVID-19 y conforme a los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación, dictados en el marco de la emergencia sanitaria para prevenir y controlar el COVID-19, la presente investigación se desarrollará de manera virtual desde casa ya que no podemos ingresar a las universidades e ingresar a su biblioteca.

## CAPITULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Antecedentes

##### 2.1.2 Nacionales

**Fretel, I. (2018)**, en su tesis titulada “*Aplicación del modelo de Markowitz en el mercado de acciones peruano*” de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM-PERÚ), presenta un estudio detallado de la importancia de la diversificación de los portafolios en el mercado peruano, considerando que los riesgos pueden minimizarse si el importe total que se quiere invertir se divide entre un conjunto de acciones. En el lenguaje coloquial se dice que no se debe poner todos los huevos en una sola canasta.

La idea es que el inversionista que compra acciones de una sola empresa, en caso esta empresa quiebre o se devalúe, el inversionista lo perderá todo, su riesgo habrá aumentado y su rentabilidad habrá disminuido. En el caso de que el inversionista compre acciones de diferentes empresas, su rentabilidad dependerá de la rentabilidad de las demás acciones y el riesgo sería mínimo. Esto indica que los resultados son más favorables al invertir en un conjunto de acciones que invirtiendo en una sola. Por ello, para su mejor representación el autor utilizó el **Modelo de Markowitz** donde se optimizó el portafolio; a fin, de analizar el porcentaje que se le asignó a cada acción perteneciente al portafolio.

### 2.1.2 Internacionales

**Fazzio, N. (2018)**, en su tesis titulada "*Teoría y métodos para problemas de optimización multiobjetivo*", de la Universidad Nacional de la Plata (Argentina), planteó en su trabajo que existe una gran variedad de métodos para resolver problemas multiobjetivo. La elección de un método optimización multiobjetivo debe ser realizada con cuidado ya que no existe un método mejor que todos los otros. Cada problema posee sus características propias, por eso, un método puede ser muy bueno para un tipo de problema e ineficiente para otros.

**Raimundo M. (2019)** en su artículo titulado "*Una extensión del algoritmo de estimación de conjuntos no inferiores (NISE) para muchos objetivos*", de la Universidad de Campinas (Brasil), planteo un trabajo novedoso con un enfoque de optimización multiobjetivo que encuentra un representante del conjunto de soluciones no inferiores a nivel global, también conocidas como soluciones óptimas de Pareto, mediante la formulación de una secuencia de problemas de escalarización del método de sumas ponderadas. El enfoque se llama MONISE (**NISE** de muchos objetivos) porque representa una extensión del conocido algoritmo de estimación de conjuntos no inferiores (**NISE**), que se concibió originalmente para tratar con espacios objetivos bidimensionales. Los resultados validan la propuesta e indican que MONISE es competitivo, en problemas convexos y no convexos.

**Stefan B. (2019)** en su artículo titulado "*Un enfoque multiobjetivo basado en múltiples escenarios*", del Instituto de Investigación de Operaciones e Informática Empresarial, Escuela de Economía y

Negocios de Schumpeter, Universidad de Wuppertal, Alemania, analizó una variante multiobjetivo del conocido Problema del vendedor ambulante (TSP) y el Problema del reparador viajero (TRP) para abordar el conflicto clásico entre la minimización de costos (representada por el TSP) y la minimización del tiempo de espera del cliente (representado por el PRT). Al considerar simultáneamente diferentes escenarios con tiempos de viaje individuales, se manejó la incertidumbre en los datos de viaje.

## 2.2 Bases Teóricas

En esta sección se presenta las notaciones, definiciones y resultados importantes necesarios para el desarrollo del trabajo de investigación. Para esto, se siguió lo mostrado en [Luc, 1989] y [Sawaragi et al., 1985]. Además, le presentaremos los conceptos básicos de optimización multiobjetivo que se encuentran en [Cohon, 1978], [Kuhn y Tucker, 1951], [Sawaragi et al., 1985] y [Zadeh, 1963].

La formulación de un POM generalizado, que se adoptará a partir de ahora, se describe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))' & (2.1) \\ \text{s.a: } g_1(x) &\leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0, \end{aligned}$$

donde  $p$  es el número de funciones objetivo, cada  $g_i: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$  es una función de restricción y  $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^p$  es una función conocida como *función multiobjetivo*. Cada  $f_k: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$  define una función objetivo.

El conjunto viable del problema, por lo tanto, se definirá como:

$$X = \{x / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

### 2.2.1 Ordenes parciales y conos convexos

Una relación binaria  $A$  en  $\mathfrak{R}^p$  es un subconjunto del producto  $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^p$ . Por tanto, se dice que un elemento  $x \in \mathfrak{R}^p$  está relacionado con  $y \in \mathfrak{R}^p$  por  $A$  si  $(x, y) \in A$ .

**Definición:** Sea  $A$  una relación binaria en  $\mathfrak{R}^p$ . Decimos que es:

(i) reflexivo, si:  $(x, x) \in A, \forall x \in \mathfrak{R}^p$

(ii) antisimétrico, si:  $(x, y) \in A$  y  $(y, x) \in A \rightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}^p$

(iii) transitivo, si:  $(x, y) \in A$  y  $(y, z) \in A \rightarrow (x, z) \in A \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{R}^p$

(iv) conectada, si:  $(x, y) \in A$  o  $(y, x) \in A \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}^p$  con  $x \neq y$

(v) lineal, si:

$$(x, y) \in A \rightarrow (tx + z, ty + z) \in A \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{R}^p \text{ y } t > 0.$$

Un *orden parcial* es una relación binaria que tiene las propiedades (i), (ii) y (iii). Si, además, se satisface la propiedad (v), decimos que el orden parcial es lineal. Cuando un orden parcial satisface la propiedad (iv), se llama orden total.

**Definición:**  $C \subseteq \mathfrak{R}^p$  es un cono si  $tx \in C$  siempre que  $x \in C, \forall t > 0$ . Decimos que un cono  $C$  es puntiagudo, si  $C \cap -C = \{0\}$ .

**Proposición:** Si  $C \subseteq \mathfrak{R}^p$  es un cono convexo si, y solo si,  $C + C \subseteq C$ .

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Rodrigues, 1992, p. 23].

**Proposición:** Si  $A$  una relación binaria en  $\mathfrak{R}^p$ .  $A$  es un orden lineal parcial si, y solo si, existe un cono convexo puntiagudo  $C \subseteq \mathfrak{R}^p$  tal que

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow y - x \in C.$$

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Rodrigues, 1992, p. 24].

Las siguientes dos definiciones son fundamentales para comprender la naturaleza de un problema generalizado de optimización multiobjetivo.

**Definición:** Sea  $Y \subseteq \mathfrak{R}^p, C \subseteq \mathfrak{R}^p$  un cono convexo puntiagudo y  $\leq_C$  el orden lineal parcial inducido por  $C$ . Un punto  $x \in Y$  es el punto ideal mínimo de  $Y$ , si  $x \leq_C y$  para todo  $y \in Y$ .

**Definición:** Sea  $Y \subseteq \mathfrak{R}^p, C \subseteq \mathfrak{R}^p$  un cono convexo puntiagudo y  $\leq_C$  el orden lineal parcial inducido por  $C$ . Un punto  $x \in Y$  es un punto mínimo en  $Y$  si no existe  $y \in Y \setminus \{x\}$  tal que  $y \leq_C x$ .

Cuando el orden en cuestión es total, los conceptos de punto mínimo ideal y punto mínimo coinciden. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el cono convexo puntiagudo es el conjunto de números reales no negativos,  $\mathfrak{R}_+$ , y el orden lineal parcial inducido es el de  $\leq$ . Sin embargo, al considerar ordenes parciales, es posible que no exista un punto mínimo ideal. Esa es la razón porque el concepto de punto minimal es importante cuando se trata de órdenes de este tipo.

Denotamos por  $\min_C Y$  al conjunto de puntos *mínimos* de un conjunto  $Y \subseteq \mathfrak{R}^p$  y por  $f(X)$ , el conjunto formado por los valores obtenidos por la evaluación de la función multiobjetivo  $f$  en los puntos  $x \in X$ .

Por tanto, un problema generalizado de la **Optimización Multiobjetivo** con respecto a los conos consiste en encontrar los puntos  $x \in X$  tal que  $f(x) \in \min_C f(X)$ . En la literatura, es conocido como el problema de optimización vectorial. En particular, la presente investigación estuvo dedicado al caso en el que  $C = \mathfrak{R}_+^p$ .

## 2.2.2 Optimización Multiobjetivo

**Definición:** Una solución  $x^* \in X$  es eficiente si no existe otro punto  $x \in X$  tal que  $f(x) \leq f(x^*)$  y  $f(x) \neq f(x^*)$ .

Si un punto viable no satisface la definición, se denomina *ineficiente*.

**Definición:** Una solución  $x^* \in X$  es local eficiente si hay  $\delta > 0$  tal que,  $x^*$  es eficiente en  $X \cap N(x^*, \delta)$ , donde:

$$N(x, \delta) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| < \delta\}.$$

**Definición:** Una solución  $x^* \in X$  es débilmente eficiente si no existe un punto  $x \in X$ , tal que  $f(x) < f(x^*)$ .

**Definición:** Una solución  $x^* \in X$  es local débilmente eficiente, si existe un  $\delta > 0$  tal que  $x^*$  es débilmente eficiente, si  $X \cap N(x^*, \delta)$ .

**Definición:** Un cono linealizado de  $X$  en  $x \in X$  es el conjunto dado por:

$$L \leq (X, x) = \{y \mid \nabla g_i(x)'y \leq 0, i \in A(x)\},$$

donde  $A(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$  es un conjunto de índices de las restricciones evaluadas en  $x$ .

Recordando ahora la **condición de calificación de Kuhn y Tucker (CQKT)** [Kuhn y Tucker, 1951], que utiliza la definición de **auto eficiencia** (propiamente eficiente).

**Definición:** Se dice que el conjunto de restricciones  $X$  satisface la Condición de Calificación de Kuhn Tucker (**CQKT**) si, para cada  $x \in X$  tal que  $A(x) \neq \emptyset$ , toda dirección  $d$  que satisface  $\nabla g_j(x)'d \leq 0$ ,  $j \in A(x)$ , es tangente a un arco diferenciable contenido en  $X$ .

**Definición:** [Kuhn-Tucker]

Si las funciones:  $f_k, k = 1, \dots, p$ , y  $g_i, i = 1, \dots, m$ , son diferenciables y que cumplen con **CQKT**. Una solución eficiente  $x^* \in X$  es **propia** **eficiente** si ocurre uno de dos casos:

(1) Si  $A(x^*) = \emptyset, J_f(x^*)d \leq 0$  y  $J_f(x^*)d \neq 0$  para ningún  $d \in \mathfrak{R}^n$ .

(2) Si  $A(x^*) \neq \emptyset, J_f(x^*)d \leq 0$  para ningún  $d \in L_{\leq}(X, x^*)$ .

Para excluir soluciones efectivas de este tipo, Geoffrion modificó la definición de su eficiencia propia, restringiendo aún más el número de soluciones eficientes consideradas como propias. Esta nueva definición de **auto eficiencia** se muestra a continuación

**Definición:** [Geoffrion] Una solución eficiente  $x^* \in X$  es **propia** **eficiente**, si existe  $M > 0$  tal que para cada  $i = 1, \dots, p$  y cada  $x \in X$  se cumple que si  $f_i(x) < f_i(x^*)$ , existe al menos un  $j \neq i$  tal que  $f_j(x) > f_j(x^*)$  y  $f_i(x^*) - f_i(x) \leq M(f_j(x) - f_j(x^*))$ .

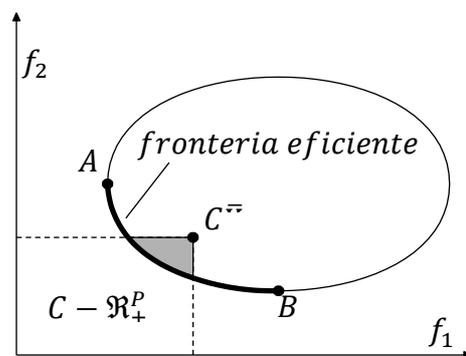
**Definición:** Una solución eficiente  $x^* \in X$  es **local** **propia** **eficiente**, si existe un  $\delta > 0$  tal que  $x^*$  es **propia** **eficiente** en  $X \cap N(x^*, \delta)$ .

Asimismo, en [Isermann, 1974], el autor demostró que cuando el problema multiobjetivo posee funciones objetivas y restricciones lineales, todas las soluciones eficientes son **propia** **eficientes**.

El conjunto de soluciones eficientes para un POM se denomina **frontera eficiente**. En la literatura, la frontera eficiente se llama a menudo **Frontera de Pareto**. Dependiendo del problema, podemos ver este conjunto gráficamente, en el espacio objetivo. El espacio objetivo difiere de espacio de decisión, que se define por las variables de decisión del problema, de la siguiente manera: los ejes están representados por las

funciones objetivo del problema, por lo tanto, cada punto en este espacio tiene sus coordenadas definidas por los valores de las funciones objetivo-evaluadas en un punto del espacio de decisión.

Sea el conjunto  $\bar{X} = \{f(x) \mid x \in X\}$ . Tal conjunto corresponde al conjunto viable en el espacio objetivo. Los puntos A y B son ejemplos de soluciones eficientes y C, de una solución inferior. Estrictamente hablando, A y B son puntos en el espacio de decisión, deben ser representarse como  $f(A)$  y  $f(B)$  en el espacio objetivo. La parte del gráfico donde la línea es más gruesa constituye la **frontera eficiente**. Al fijar un punto en esa curva, no es posible moverse a otro punto viable disminuyendo simultáneamente las dos funciones objetivo, o al menos disminuir el valor de una función y dejando la otra con el mismo valor. También es fácil ver que C es una solución ineficiente, pues podemos mejorar los valores de las funciones objetivo-individuales moviéndonos hacia la izquierda y / o hacia abajo.



**Figura 2.4:** Espacio objetivo.

Fuente Rodrigues S. (p. 9)

De la figura 2.4, podemos concluir fácilmente que un punto viable  $x$  es eficiente si, y solo si,  $(f(x) - \mathfrak{R}_+^p) \cap \bar{X} = \{f(x)\}$ ; es decir, no existe dirección desde  $f(x)$  en el sentido del ortante no positivo de  $\mathfrak{R}^p$  que conduce a un punto viable en el espacio objetivo diferente de  $f(x)$ .

Examinando el punto C, vemos que hay varias direcciones partiendo de C en la dirección del ortante no positivo que conducen a otros puntos viables; moviéndose a cualquiera de ellos, se podría mejorar el valor de alguna función objetivo, manteniendo las otras con un valor, como máximo, igual. A menudo, queremos obtener no solo una solución eficiente, sino toda la frontera eficiente, o al menos una aproximación de esta. Aunque hay varias soluciones eficientes encontradas en el problema, sabemos que solo se elegirá una al final. Esta solución elegida se llama la mejor solución de compromiso. La relación entre la cantidad que debe aumentarse para una función objetivo para que otro objetivo disminuya se llama *tradeoff*. Las soluciones comerciales y eficientes son dos tipos de información importante para que el tomador de decisiones elija la mejor solución de compromiso. Usando el razonamiento de Zadeh [1963], dado un punto viable  $x$ , podemos definir tres conjuntos disjuntos en el espacio de decisión  $\mathfrak{R}^n$ :

$$Q^{<}(x) = \{y \mid f(y) \leq f(x), f(y) \neq f(x)\},$$

$$Q^{\geq}(x) = \{y \mid f(y) \geq f(x)\},$$

$$Q^{\sim}(x) = \{y \mid f(y) \not\leq f(x) \text{ y } f(y) \not\geq f(x)\}.$$

El primer conjunto,  $Q^{<}(x)$ , contiene todos los puntos que son mejores que  $x$ , es decir, todos los vectores que tienen valores de función objetivo evaluados en ellos menores o iguales a los de  $x$ , siendo estrictamente menor en al menos una de las funciones. Decimos que un punto  $y$  de este tipo es superior en relación a  $x$ . El segundo conjunto,  $Q^{\geq}(x)$ , contiene todos los puntos que son inferiores a  $x$ . El tercer conjunto contiene todos los puntos no comparables a  $x$ .

Zadeh señaló que cualquier vector del  $\mathfrak{R}^n$  pertenece a uno de estos tres conjuntos. Entonces tenemos que  $\mathfrak{R}^n = Q^{<}(x) \cup Q^{\geq}(x) \cup Q^{\sim}(x)$ .

Observamos, que para una solución viable  $x$  para ser eficiente es necesario y suficiente tener  $X \cap Q^{<}(x) = \emptyset$ .

### 2.2.3 Condiciones de optimalidad

Consideremos primero el caso en el que el problema multiobjetivo no tiene restricciones, es decir,  $X = \mathfrak{R}^n$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Proposición:** Si  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  es una solución local débilmente eficiente, por lo que no existe un  $d \in \mathfrak{R}^n$  tal que

$$\nabla f_i(x^*)'d < 0, \forall i = 1, \dots, p.$$

**Demostración:** Suponer que  $x^*$  es una solución local débilmente eficiente y que ocurre para alguna dirección  $d \in \mathfrak{R}^n$ . Entonces, tenemos que

$$J_f(x^*)d < 0.$$

Como la función objetivo es diferenciable y al Teorema del valor medio, tenemos que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe uno  $s \in ]0, 1[$  tal que:

$$f(x^* + \epsilon d) = f(x^*) + \epsilon J_f(x^* + s\epsilon d)d.$$

Como todas las funciones objetivas son continuamente diferenciables, tenemos que, para todos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $J_f(x^* + s\epsilon d)d < 0$ , por lo tanto,  $f(x^* + \epsilon d) < f(x)$ . Esto contradice el hecho de que  $x^*$  ser una solución local débilmente eficiente.

**Definición:** Ser  $Y \subseteq \mathfrak{R}^q$ . Un cono tangente a  $Y$  en  $y \in cl(Y)$  este dado por

$$T(Y, y) = \{w \in \mathfrak{R}^q \mid \exists \{w_n\} \rightarrow w, \exists \{t_n\} \downarrow 0 \text{ talque } y + t_n w_n \in Y\}$$

El cono tangente es una aproximación del conjunto  $Y$  alrededor del punto  $y$  por rectas tangentes a dicho conjunto, siempre será cerrado. Sin embargo, el cono tangente puede no ser convexo.

**Proposición:** Si  $x^* \in X$  es una solución local débilmente eficiente, entonces  $T(f(X \cap N), f(x^*)) \cap -\mathfrak{R}_{++}^p = \emptyset$ , para alguna vecindad  $N$  de  $x^*$ .

**Demostración:** Suponer que  $x^* \in X$  es una solución local débilmente eficiente. Por contradicción, dado  $n \in \mathbb{N}$ , suponga que existe  $z_n \in T(f(X \cap N(x^*, 1/n)), f(x^*)) \cap -\mathfrak{R}_{++}^p$ .

Entonces existen secuencias  $\{z_k\} \rightarrow z_n, \{t_k\} \downarrow 0$  y  $x_k \in X \cap N(x^*, 1/n)$  tal que:

$$f(x^*) + t_k z_k = f(x_k) \text{ para cualquier } k \in \mathbb{N}.$$

Sea  $k$  lo suficientemente grande para tener  $z_{\bar{k}} \in -\mathfrak{R}_{++}^p$  y definir  $x_n := x_{\bar{k}}$ . Así que tienes  $\{x_n\} \rightarrow x^*$  y  $f(x^*) - f(x_n) \in \mathfrak{R}_{++}^p$ , contradiciendo la suposición inicial.

**Proposición:** Si  $x^* \in X$  es una solución local débilmente eficiente se cumple para alguna vecindad  $N$  en  $x^* \in X$ , entonces la condición

$$\max_k [\nabla f_k(x^*)]'w \geq 0 \tag{2.2}$$

se verifica por todo  $w \in T(X, x^*)$ .

**Demostración:**

Sea  $w \in T(X, x^*)$ . Entonces existen secuencias  $\{w_n\} \rightarrow w$  y  $\{t_n\} \downarrow 0$  tal que  $x_n := x^* + t_n w_n \in X$ . Además,  $x_n \in N$  por  $n$  suficientemente grande. Sea  $d_n := t_n^{-1}(f(x_n) - f(x^*))$ .

Entonces tenemos  $d_n = J_f(x^*) w_n + \epsilon_n$ , con  $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$ . Entonces tenemos  $d_n \rightarrow J_f(x^*) w$  y  $f(x_n) = f(x^*) + t_n d_n$ , lo que garantiza que  $J_f(x^*) w \in T(f(X \cap N), f(x^*))$ .

Las siguientes condiciones utilizan conceptos de cono tangente y cono linealizado. Recuerde que el cono linealizado de  $X$  en un punto  $x^* \in X$  Es dado por

$$L_{\leq}(X, x^*) = \{y \mid \nabla g_i(x^*)'y \leq 0, i \in A(x^*)\},$$

Dónde  $A(x^*) = \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$  es un conjunto de índices de las restricciones activas en  $x^*$ .

**Definición:** Un cono linealizado débil de  $X$  en  $x^* \in X$  es el conjunto dado por:

$$L_{<}(X, x^*) = \{y \mid \nabla g_i(x^*)'y < 0, i \in A(x^*)\}.$$

El cono débil linealizado de  $X$  en  $x^* \in X$  es un conjunto abierto. Además, tenemos que:  $L_{<}(X, x^*) \subseteq \text{int}(L_{\leq}(X, x^*))$ .

**Proposición:** Sea  $x^* \in X$ . Entonces tenemos:

$$L_{<}(X, x^*) \subseteq T(X, x^*) \subseteq L_{\leq}(X, x^*).$$

**Demostración:**

Primero, probaremos que  $T(X, x^*) \subseteq L_{\leq}(X, x^*)$ .

Sea  $w \in T(X, x^*)$ . Entonces, existen secuencias

$\{w_n\} \rightarrow w$  y  $\{t_n\} \downarrow 0$  tal que  $x_n := x^* + t_n w_n \in X$ .

Por lo tanto, para todos  $i \in A(x^*)$ , tenemos.

$$0 \geq t_n^{-1} (g_i(x_n) - g_i(x^*)) = \nabla g_i(x^*)'w_n + \epsilon_n,$$

con  $\{\epsilon_n\} \rightarrow 0$ . Tomando el límite, obtenemos  $\nabla g_i(x^*)'w \leq 0$ .

Ahora probaremos que  $L_{<}(X, x^*) \subseteq T(X, x^*)$ .

Sea  $w \in L_{<}(X, x^*)$ ,  $\{t_n\} \downarrow 0$  y  $x_n := x^* + t_n w_n$ .

Considerar  $i \in A(x^*)$ . Entonces tenemos que  $w_n \rightarrow w$ ,

$$t_n^{-1} g_i(x_n) = t_n^{-1} g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)'w_n + \epsilon_n \rightarrow \nabla g_i(x^*)'w < 0.$$

Para  $i \notin A(x^*)$ , por la continuidad de  $g_i$ , tenemos  $g_i(x_n) \rightarrow g_i(x^*) < 0$ . Entonces existe un  $n_0$  lo suficientemente grande tal que, para todo  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in X$ . Considerando las secuencias con índices iniciales igual a  $n_0$ , Podemos concluir que  $w \in T(X, x^*)$ .

**Proposición:** Si  $x^* \in X$  es una solución local débilmente eficiente, entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f_k(x^*)'w &< 0, & k = 1, \dots, p, \\ \nabla g_i(x^*)'w &< 0, & \forall i \in A(x^*) \end{aligned}$$

no tiene solución  $w \in \mathfrak{R}^n$ .

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Cohon, 1978, p.152]

La proposición anterior junto con el teorema alternativo de Motzkin permiten el desarrollo de condiciones tipo Fritz John para la optimización multiobjetivo.

**Proposición:** [Teorema alternativo de Motzkin] Ser  $a_k, b_i, c_j \in \mathfrak{R}^n$ , con  $k \in I^< \neq \emptyset, i \in I^{\leq} \text{ y } j \in I^=$ , Dónde  $I^<, I^{\leq} \text{ y } I^=$  son conjuntos de índices finitos. Entonces, el sistema.

$$\begin{aligned} a_k'w &< 0, & k \in I^<, \\ b_i'w &< 0, & i \in I^{\leq}, \\ c_j'w &< 0, & j \in I^=, \end{aligned}$$

no tiene solución si, y solo si, hay números  $\lambda_k, k \in I^<$ , no todo nulo,  $\sigma_i, i \in I^{\leq}$ , y  $\theta_j, j \in I^=$ , tal que:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I^<} \lambda_k a_k + \sum_{i \in I^{\leq}} \sigma_i b_i + \sum_{j \in I^=} \theta_j c_j &= 0, \\ \lambda_k &\geq 0, & k \in I^<, & \sigma_i \geq 0, & i \in I^{\leq} \end{aligned}$$

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Cohon, 1978, p.156]

**Proposición:** [Condiciones de Fritz John para POM (FJPOM)]

Si  $x^*$  es una solución débil y eficientemente local, entonces existe  $\lambda \in \mathfrak{R}^p$  y  $\mu \in \mathfrak{R}^m$  no todo nulo tal que.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \lambda_k \nabla f_k(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) &= 0, \\ \mu_i g_i(x^*) &= 0, i = 1, \dots, m, \\ \lambda_k &\geq 0, k = 1, \dots, p, \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Cohon, 1978, p.158]

**Definición:** El conjunto de restricciones  $X$  satisface la Condición de calificación de Abadie (CQA) en  $x^* \in X$ , si:

$$L_{\leq}(X, x^*) \subseteq T(X, x^*).$$

**Proposición:** Si se verifica las CQA y  $x^* \in X$  es una solución débilmente eficiente, entonces el sistema.

$$\begin{aligned} \nabla f_k(x^*)'w &< 0, k = 1, \dots, p, \\ \nabla g_i(x^*)'w &\leq 0, \forall i \in A(x^*) \end{aligned}$$

no tiene solución  $w \in \mathfrak{R}^n$ .

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Cohon, 1978, p.159]

**Proposición:** Si se verifica las CQA y  $x^*$  es una solución débilmente eficiente, entonces existe vectores  $\lambda \geq 0$ , no nulo, y  $\mu \geq 0$  satisfaciendo las condiciones de Fritz John para POM.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Cohon, 1978, p.162]

#### 2.2.4 Método de optimización multiobjetivo: NISE

El método **NISE** (Estimación de conjuntos no inferiores) es un método propuesto en [Cohon et al., 1979] para obtener una buena aproximación de la frontera eficiente para problemas donde el conjunto factible en el espacio objetivo es convexo.

En [Cohon, 1978], se presenta en detalle un algoritmo que implementa este método para la resolución de problemas con **dos objetivos** y, con algunas modificaciones, para problemas con más de dos objetivos.

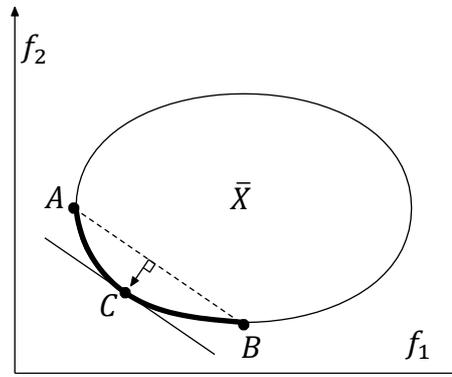
##### Descripción del método

Para explicar mejor el método, considere un problema de **dos funciones objetivo**,  $f_1$  y  $f_2$ , donde el conjunto viable  $\bar{X}$  es convexo en el espacio objetivo. Supongamos que encontramos dos soluciones eficientes,  $A$  y  $B$ . Entonces, el segmento de línea que conecta  $A$  y  $B$  en el espacio objetivo es viable y puede ser eficiente o ineficiente.

- Si es **eficiente**, moviéndose en la dirección del ortante no positivo, estamos fuera del conjunto viable del problema.
- Si es **ineficiente**, moviéndose en la misma dirección, habrá puntos correspondientes a soluciones eficientes.

Al igual que con muchos otros métodos que utilizan problemas reducidos, NISE inicia optimizando cada objetivo individualmente. Luego NISE utiliza el problema de pesos con pesos  $w_1, w_2 > 0$  tal que  $-w_1/w_2$  es igual a la pendiente del segmento de recta que conecta  $A$  y  $B$  en este caso, los pesos son estrictamente positivos, por lo que ninguna función se vuelve a optimizar individualmente.

La **solución óptima** al nuevo problema de peso corresponderá al punto  $C$ ; tal solución, además de ser óptima, es también una **solución eficiente** al problema de múltiples objetivos.



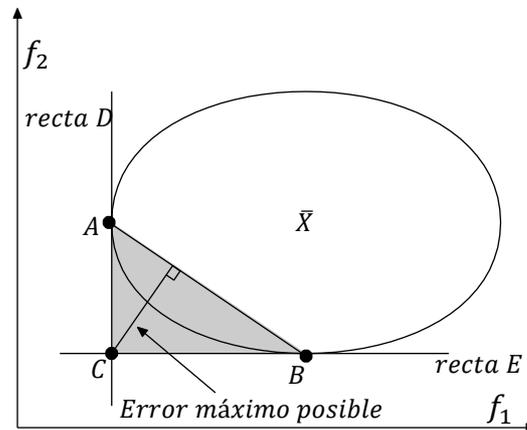
**Figura 2.5:** Método NISE

Fuente Rodrigues S. (p. 31)

La precisión del acercamiento a la frontera eficiente es controlada por un valor predefinido por el analista, llamado *error máximo permitido*. En cada iteración del método, lo que se llama error máximo posible para cada par de soluciones eficientes adyacentes encontradas hasta ahora. El algoritmo se detiene cuando el error de cada par es menor o igual que el error máximo permitido.

Para comprender mejor el concepto de error máximo posible, consulte la Figura 2.6. Las pendientes de las rectas  $D$  y  $E$  se obtuvieron a través de los pesos utilizados en los problemas de peso para encontrar los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sabemos que ningún punto viable está a la izquierda de la línea  $D$  ni debajo de la línea  $E$ ; caso contrario,  $A$  y  $B$  no serían puntos correspondientes a las soluciones óptimas a los problemas de ponderaciones considerados en iteraciones anteriores. Entonces, el punto  $C$ , ubicado en la intersección de la recta  $D$  y  $E$ , es un límite inferior para la parte del borde eficiente ubicada entre los puntos  $A$  y  $B$ . Para encontrar un límite superior, simplemente tome el segmento de línea que conecta  $A$  y  $B$ . Como  $\bar{X}$  es convexo, los puntos de este segmento

corresponden a soluciones viables al problema multiobjetivo. Por tanto, el máximo error posible será la altura del triángulo formado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .



**Figura 2.6:** Error máximo posible.

Fuente Rodrigues S. (p. 31)

### 2.2.5 Método de optimización multiobjetivo: $\varepsilon$ – Restricción

El método de  $\varepsilon$ -restricción es bien conocido. Consiste en minimizar un solo objetivo mientras los demás se incorporan al conjunto de restricciones del problema, estando restringidos por los valores de los componentes de un vector  $\varepsilon \in \mathfrak{R}^{p-1}$ , previsto a priori. Este enfoque de optimizar una función objetivo mientras se incorporan otras en las restricciones parece haber sido sugerido inicialmente en [Marglin, 1967] posteriormente [Haimes et al., 1971] presentó una nueva formulación para un problema que involucra dos funciones objetivo, el método de  $\varepsilon$  –restricción es un método cuyo objetivo es obtener una aproximación eficiente a la frontera del problema.

## Descripción del método

El problema (2.1) escalarizado en relación con el objetivo  $k$ , usando este método con un vector  $\varepsilon \in \mathfrak{R}^{p-1}$ , se convierte en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} P_k(\varepsilon): \min f_k(x) \\ \text{s. a: } f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad j \neq k, \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

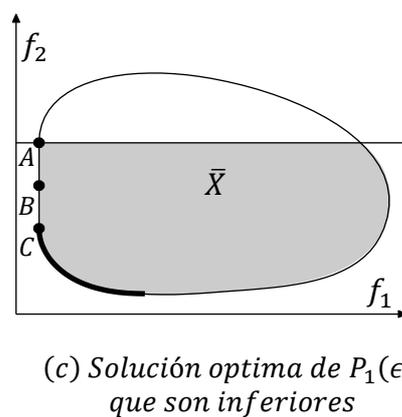
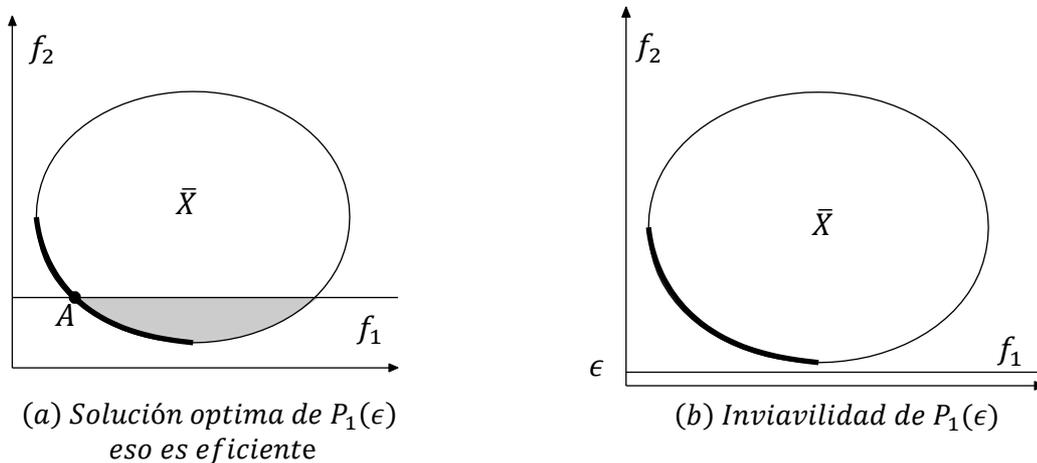
Se elige la función objetivo que se minimizará a priori, como el vector  $\varepsilon \in \mathfrak{R}^{p-1}$ , que se considera un parámetro del método. Satisfaciendo algunas condiciones que serán discutidas en la siguiente subsección, una solución óptima al problema escalar (2.4) puede ser una solución eficaz al problema (2.1). Una de las condiciones necesarias para que esto suceda está relacionada, en primer lugar, con la viabilidad del problema. Para que existan soluciones viables, es esencial que el vector  $\varepsilon \in \mathfrak{R}^{p-1}$  se elige correctamente, de modo que haya al menos un punto  $x$  satisfaciendo las restricciones del problema.

La figura 2.7 (a) muestra un ejemplo de un problema con dos funciones objetivos donde se aplica el método. En este caso, el vector  $\varepsilon$  es unidimensional y permite la viabilidad. La parte sombreada del conjunto  $\bar{X}$  corresponde al conjunto viable del problema (2.4) en el espacio objetivo. El punto  $A$  en la figura corresponde a la solución óptima de (2.4). Además, el punto  $A$  pertenece a la frontera eficiente del problema multiobjetivo; por lo tanto, la solución óptima de (2.4) en este caso, es una solución eficaz.

La figura 2.7 (b), a su vez, muestra un ejemplo del mismo problema, siendo que, en este caso, la elección de  $\varepsilon$  genera un problema escalable que no es viable. Otra condición necesaria para una solución óptima de (2.4) es eficiente es que todas las restricciones relacionadas con las

funciones objetivo se satisfacen con igualdad. Si no es así y hay más de una solución óptima, es posible que algunas de estas soluciones no sean eficientes.

La figura 2.7 (c) muestra un ejemplo de tal caso. En esta figura, los puntos  $A, B$  y  $C$  son soluciones óptimas para (2.4), pero solo el punto  $C$  es eficiente. En este método, lo que hacemos es elegir alguna función objetivo  $f_k$  para ser minimizada y tratar de obtener una aproximación de frontera eficiente a partir de las soluciones óptimas de (2.4) para diferentes parámetros de entrada  $\epsilon$ .



**Figura 2.7:** Método  $\epsilon$  –restricción

Fuente Rodrigues S. (p. 33)

## Relación con el problema multiobjetivo

A continuación, presentaremos algunas relaciones que implican soluciones eficientes al problema multiobjetivo, soluciones óptimas al problema NISE y  $\varepsilon$ -restricción, así como las relaciones entre las condiciones de Fritz John para los tres problemas.

**Proposición:**  $x^*$  es una solución eficiente al problema multiobjetivo si, y solo si,  $x^*$  resuelve  $P_k(\varepsilon^*)$ , con  $\varepsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , para todos  $k = 1, \dots, p$ .

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 656].

Por lo tanto, por el resultado anterior, tenemos una condición necesaria y suficiente para que una solución sea eficiente. Sin embargo, en la práctica, este resultado puede no ser de mucha utilidad, ya que es necesario comprobar la optimalidad de  $x^*$  para todas las  $p$  funciones objetivo.

**Proposición:** Si  $x^*$  una solución óptima única de  $P_k(\varepsilon^*)$ , con  $\varepsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , para un determinado  $k$ . Entonces,  $x^*$  es una solución eficiente al problema multiobjetivo.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 657].

**Proposición:** Si  $x^*$  es solución óptima de  $P_k(\varepsilon^*)$ , con  $\varepsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , para un determinado  $k$  y las funciones objetivo y de restricción son todas convexas. Entonces, existe un vector  $w \geq 0$  tal que  $x^*$  es una solución óptima de  $P(w)$ .

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 659].

**Proposición:** Si  $x^*$  es solución óptima de  $P(w)$  para un vector dado  $w \geq 0$ , Dónde  $w_k > 0$  para un determinado  $k$ . Entonces,  $x^*$  es la solución óptima de  $P_k(\epsilon^*)$ , con  $\epsilon_j^* = f_j(x^*), j \neq k$

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 662].

Para una mayor claridad de resultados posteriores, presentamos las condiciones KKT para problema de  $\epsilon$  - restricción ( $KKT_\epsilon$ ), mostrando que son necesarios, en determinadas condiciones, para garantizar la optimalidad de  $P_k(\epsilon)$ .

**Proposición: [Condiciones KKT para  $P_k(\epsilon)$  ( $KKT_\epsilon$ )]**

Si  $f_j(x), j = 1, \dots, p$ , y  $g_i(x), i = 1, \dots, m$ , son funciones continuamente diferenciables y  $x \in X \cap \{x \mid f_j(x) \leq \epsilon_j, j = 1, \dots, p, j \neq k\}$  es un mínimo local de  $P_k(\epsilon)$  para un determinado  $k$  y algún  $\epsilon \in \mathfrak{R}^{p-1}$  y alguna condición de calificación en  $x$ , entonces existen multiplicadores  $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, p, j \neq k$ , y  $\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, m$  tal que:

$$f_k(x) + \sum_{j \neq k} \lambda_j \nabla f_j(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x) = 0 \quad (2.5)$$

$$\lambda_j (f_j(x) - \epsilon_j) = 0, j = 1, \dots, p, j \neq k, \quad (2.6)$$

$$\mu_i g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (2.7)$$

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 663].

**Proposición:** Supongamos que  $x^*$  es una solución propiamente eficiente de POM (2.1). Sea  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Supongamos que los gradientes de las restricciones  $P_k(\epsilon^*)$ , con  $\epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$  evaluadas en  $x^*$  son linealmente independientes y que todas las funciones  $f_i$  y  $g_i$  son continuamente diferenciables. Entonces,  $x^*$  resuelve  $P_k(\epsilon^*)$  y satisface las condiciones  $KKT_\epsilon$  (2.5) - (2.7) con  $(\lambda, \mu) \geq 0$  para  $P_k(\epsilon^*)$ .

Además, todos los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones  $f_j(x) \leq \epsilon_j$ ,  $j \neq k$ , de  $P_k(\epsilon^*)$  son estrictamente positivos.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 665].

Presentamos ahora la relación entre las condiciones de Fritz John para el problema multiobjetivo y las condiciones  $KKT_\epsilon$  (2.5) - (2.7) al problema de  $\epsilon$ -restricción.

**Proposición:** Si  $x^* \in X$  es débil regular, entonces  $x^*$  cumple con las condiciones  $KKT_\epsilon$  (2.5) - (2.7) para  $P_k(\epsilon^*)$ , donde  $\epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , para todo  $k$  tal que  $\lambda_k > 0$ , siendo este el multiplicador de Lagrange de FJPOM (Fritz John) asociado con la  $k$ -ésima función objetivo.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 666].

**Proposición:** Si  $x^* \in X$  cumple con las condiciones  $KKT_\epsilon$  para  $P_k(\epsilon^*)$ , donde  $\epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , entonces  $x^*$  es regular débil.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 666].

**Colorario:**  $x^* \in X$  es débil regular si, y solo, si  $x^*$  cumple con las condiciones  $KKT_\epsilon$  para  $P_k(\epsilon^*)$ , donde  $\epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ .

**Demostración:** Ver la prueba del Colorario en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 667].

**Proposición:** si  $x^*$  es una solución óptima de  $P_k(\epsilon^*)$ , donde  $\epsilon_j^* = f_j(x^*)$ ,  $j \neq k$ , para un determinado  $k$ , además todas las funciones objetivo y de restricción son convexas y los gradientes de las funciones de restricción  $P_k(\epsilon^*)$ , evaluados en  $x^*$  son linealmente independientes (por lo tanto,  $x^*$  cumple con las condiciones  $KKT_\epsilon$  para  $P_k(\epsilon^*)$ ). Supongamos, entonces, que los multiplicadores de Lagrange de las condiciones  $KKT_\epsilon$  asociado a las restricciones  $f_j(x) \leq \epsilon_j$ ,  $j \neq k$ , son estrictamente positivos. Entonces,  $x^*$  es una solución propiamente eficiente al problema multiobjetivo.

**Demostración:** Ver la prueba de la proposición en [Giorgi y Guerraggio, 1992, p. 670].

## 2.2.6 Optimización de Portafolio

Considere un conjunto de  $n$  inversiones que contengan acciones de la empresa, fondos mutuos, opciones y otros derivados. Estas inversiones tienen riesgos y rendimientos futuros asociados a ellas. Deseamos saber cuánto debemos invertir en cada uno para que la rentabilidad futura total sea la máxima posible, y el riesgo, el mínimo posible.

Para calcular el riesgo de nuestro portafolio, primero calculamos la varianza. Usamos el hecho de que  $Var(r_p) = Cov(r_p, r_p)$ , donde  $Cov(r_i, r_j)$  es la covarianza entre dos variables calculada como:

$$Cov(r_i, r_j) = \frac{(r_{i1} - E(r_i)) \cdot (r_{j1} - E(r_j)) + \dots + (r_{iT} - E(r_i))(r_{jT} - E(r_j))}{T - 1}$$

Después de algunos resultados, obtenemos la siguiente fórmula para la varianza del rendimiento de un portafolio dado cualquier  $r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i$ , donde  $x_i$  es la proporción invertida en la inversión  $i$ :

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot Var(r_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \cdot Cov(r_i, r_j), i \neq j$$

o equivalente,

$$Var(r_p) = x'Qx,$$

dónde  $Q$  es la matriz de covarianza.

### Modelo de Markowitz y optimización multiobjetivo

Sea  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$  el vector compuesto por los rendimientos esperados de las inversiones. Tenemos, dos objetivos: minimizar  $f_1(x) = x'Qx$  y maximizar  $f_2(x) = \mu'x$ . De esta forma, podemos utilizar la teoría y los métodos de Optimización Multiobjetivo para resolver problemas de Optimización del Portafolio.

El modelo de varianza promedio (MV) de Markowitz que usaremos se puede describir de varias maneras formas, siendo una de ellas la siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu'x - \delta x'Qx \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dónde  $\delta \geq 0$  es una constante de aversión al riesgo, que puede ser variada para obtener la frontera eficiente. Otra formulación bien conocida se da restringiendo los retornos esperados a un valor mínimo:

$$\begin{aligned}
& \min \quad x'Qx \\
& \text{s. a: } \mu'x \geq R, \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1
\end{aligned} \tag{2.9}$$

dónde  $R$  es un valor mínimo que se desea para el retorno esperado. Cuando se conoce un valor para  $R$  dentro de la frontera eficiente, podemos cambiar el menor o igual por igual solamente, si obtenemos  $\mu'x = R$ . Tal problema es exactamente una aplicación del **método de  $\varepsilon$ -restricción**.

Dado que la varianza de una variable es siempre no negativa,  $Q$  es una matriz semidefinida positiva. Por tanto, este es un problema de Programación Cuadrática Convexa, y por tanto las condiciones KKT son condiciones óptimas necesarias y suficientes para este caso.

Otra forma de resolver el problema es restringir a otra función objetivo, obteniendo el siguiente problema de Programación No Lineal:

$$\begin{aligned}
& \max \quad \mu'x \\
& \text{s. a: } x'Qx \geq \bar{\sigma}^2, \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dónde  $\bar{\sigma}^2$  es un valor máximo deseado para la varianza de la solución. Restringir la varianza del portafolio a un valor predefinido es un criterio que se utiliza cuando queremos conocer el *error de seguimiento* de un portafolio en relación con un índice previamente elegido. El *error de seguimiento*, a su vez, es una medida de qué tan cerca está el portafolio en relación con un portafolio de referencia  $x_B$ . El *error de seguimiento* del portafolio  $x$  en relación con  $x_B$ , puede ser definido como:

$$\overline{TE}(x) = \sqrt{(x - x_B)'Q(x - x_B)}.$$

A su vez, el exceso de retorno del portafolio  $x$  en relación con  $x_B$  es dado por  $\mu'(x - x_B)$ . Asimismo, el problema (5.14) puede ser substituido por otro exceso de rendimiento o error de seguimiento:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mu'(x - x_B) \\ \text{s. a:} \quad & (x - x_B)'Q(x - x_B) \leq \overline{TE}^2, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

dónde  $\overline{TE}$  es un valor predefinido.

En [Jorion, 2003], el autor señala que los rendimientos históricos son medidas enormemente ruidosas para el rendimiento esperado y que es posible que los inversores no puedan o ni siquiera deseen determinar un rendimiento esperado mínimo aceptable y una constante aversión al riesgo. Según Jorion, es mucho más fácil restringir el riesgo del portafolio. Como la restricción de error de seguimiento es cuadrático y convexo, se puede reescribir de tal manera que el problema (2.11) se convierte en un problema de optimización cónica y las técnicas para este tipo de problemas pueden ser usadas adecuadamente.

Restricciones del tipo  $x \geq 0$  se puede agregar al problema si la venta fuera descubierta en la solución. Como se puede ver en la fórmula de varianza del portafolio, a medida que aumenta el número de inversiones, el número de términos que implican la covarianza entre variables es mucho mayor que el número de términos que implican la varianza de una variable. Por tanto, quienes tienden a dominar las sumatorias son la covarianza. Cuantos menores sean, menor será el riesgo de nuestro portafolio. Una forma de

intentar diversificar es agregar restricciones de límite a inversiones del mismo sector, por ejemplo:

$$\sum_{\substack{i \text{ pertenece} \\ \text{al sector } k}} x_i \leq m_k.$$

También podemos agregar restricciones que involucren costos de transacción. Tales restricciones pueden ser del tipo:

$$x_1 + \dots + x_n + t(x_1) + \dots + t(x_n) \leq b,$$

dónde  $t$  es una función de  $x_i$  definido por el corredor y  $b$  es el presupuesto actual disponible. Tenga en cuenta que la función  $t$  puede ser convexo o no, lo que puede hacer que el problema de optimización de portafolio sea no convexo. Los costos de transacción también se pueden considerar en la función objetivo de la siguiente forma:

$$\max \sum_{i=1}^n \mu_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0|$$

dónde  $x^0$  es el portafolio existente.

### Frontera eficiente riesgo – retorno

Podemos reescribir (2.7) como

$$\begin{aligned} \min \quad & x'Qx \\ \text{s. a: } & A'x = B, \end{aligned}$$

Dónde  $A = (\mu \quad \bar{1})$ ,  $\bar{1} = (1 \dots 1)'$  y  $B' = \begin{pmatrix} R \\ 1 \end{pmatrix}$ .

El sistema KKT para el problema anterior viene dado por:

$$\begin{cases} 2Qx + A\lambda_0 = 0 \\ A'x = B, \end{cases}$$

dónde  $\lambda_0 = (\lambda_1 \quad \lambda_2)'$ . si la matriz  $Q$  es definida positiva, es decir, la varianza del portafolio es siempre estrictamente positiva.

Definiendo  $\lambda = -1/2\lambda_0$  y resolviendo la primera ecuación para  $x$ , obtenemos:

$$x = Q^{-1}A\lambda$$

La segunda ecuación, a su vez, se convierte en:

$$A'Q^{-1}A\lambda = B \Rightarrow \lambda = (A'Q^{-1}A)^{-1}B \equiv H^{-1}B,$$

dónde  $H = A'Q^{-1}A$  y  $H' = (A'Q^{-1}A)' = A'(Q^{-1})'A = A'Q^{-1}A = H$ ; luego,  $H$  es una matriz de  $2 \times 2$  simétrica. Usando las expresiones anteriores para reescribir la varianza, obtenemos:

$$\text{Var}(r_p) = x'Qx = x'QQ^{-1}A\lambda = x'A\lambda = (A'x)'H^{-1}B \equiv B'H^{-1}B.$$

Sabemos que

$$H \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Definida  $d \equiv \det(H) = ac - b^2$ . Como  $H = A'Q^{-1}A$ , es fácil ver que:

$$a = \mu'Q^{-1}\mu, \quad b = \mu'Q^{-1}\bar{1} = \bar{1}'Q^{-1}\mu \quad c = \bar{1}'Q^{-1}\bar{1}$$

Como  $Q$  es definida positiva,  $Q^{-1}$  también lo es; luego,  $a > 0$  y  $c > 0$ .

Como  $Q^{-1}$  es definida positiva, tenemos que:

$$(b\mu - a\bar{1})'Q^{-1}(b\mu - a\bar{1}) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0, \text{ como } a > 0, \text{ tenemos } d > 0.$$

Utilizando  $H$  para reescribir la varianza, obtenemos:

$$\text{Var}(r_p) = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d}(cR^2 - 2bR + a).$$

Por lo general, la varianza de un portafolio  $x_p$  es denotada por  $\sigma_p^2$ , y su desviación estándar, por  $\sigma_p$ . Por la ecuación (5.1), concluimos que la gráfica de varianza en función del rendimiento en el espacio  $(\sigma_p^2, R)$  es una parábola. Sin embargo, en el espacio  $(\sigma_p, R)$ , el gráfico es el lado derecho

de una hipérbola, como veremos a continuación. La fórmula para el gráfico en el espacio  $(\sigma_p, R)$  es dado por:

$$\sigma_p^2 = \frac{cR^2 - 2bR + a}{d} = \frac{cR^2 - 2bR + d/c + b^2/c}{d}$$

Dividiendo el lado izquierdo por  $1/c$  y el lado derecho por  $c/c^2$ , obtenemos

$$\frac{\sigma_p^2}{c} = \frac{cR^2 - 2bR + d/c + b^2/c}{d/c^2} = (R - b/c)^2 d/c^2 + 1$$

o equivalentemente,

$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} - \frac{(R - b/c)^2}{d/c^2} = 1$$

Una forma de elegir entre los portafolios eficientes es a través de la razón de Sharpe, definida como la relación entre el retorno esperado y la desviación estándar del portafolio. El portafolio con mayor razón es llamado portafolio tangencial, proporciona el rendimiento esperado más alto por unidad de riesgo, siendo una opción razonable entre los portafolios eficientes existentes.

## 2.3 Conceptual

### Modelo de Markowitz

Es un modelo cuyo objetivo consiste en encontrar el portafolio de inversión óptimo para cada inversor en términos de rentabilidad y riesgo. Esto, realizando una adecuada elección de los activos que componen dicho portafolio.

### Portafolio de inversión

Un portafolio de inversión es el conjunto de activos con el que un inversor o ahorrador lleva a cabo su estrategia financiera. Es decir, es el conjunto

de productos financieros y bienes a los que el ahorrador destina su dinero con el fin de obtener una rentabilidad por ello.

### **Óptimo de Pareto**

Es aquel punto de equilibrio en el que ninguno de los agentes afectados puede mejorar su situación sin reducir el bienestar de cualquier otro agente. Por lo tanto, si un individuo que forme parte del sistema de distribución, producción y consumo puede mejorar su situación sin perjudicar a otro nos encontraremos en situaciones no óptimas en el sentido paretiano.

### **Inversión**

Una inversión es una actividad que consiste en dedicar recursos con el objetivo de obtener un beneficio de cualquier tipo.

### **Retorno de Riesgo**

Riesgo y retorno están relacionados casi de forma proporcional. Si se desea una ganancia mayor, se debe asumir un riesgo mayor. Por lo tanto, no existe retorno sin riesgo. Normalmente, a mayor riesgo, mayor rentabilidad; sin embargo, la relación riesgo-retorno no es siempre directamente proporcional.

## **2.4 Definición de términos básicos**

### **Definición 1: Optimización.**

Término Optimizar incluirá a ambos objetivos tanto de Minimización como de Maximización de la función objetivo, según E. Papa (2009) “la optimización es una de las áreas de la matemática que estudia el problema

de minimizar o maximizar una función sujeta generalmente a restricciones sobre su dominio” (p.9).

**Definición 2: Función objetivo.**

También llamado índice de rendimiento o criterio de elección, según Pedro Canales, (2009) la función objetivo “es la función que debe minimizarse o maximizarse” (p.64). Este es el elemento utilizado para decidir los valores adecuados de las variables de decisión que resuelven el problema de optimización. La función objetivo permite determinar los mejores valores para las variables de decisión.

**Definición 3: Restricción.**

Es la región factible o viable donde se encuentra la solución óptima para minimizar o maximizar la función objetivo, las restricciones pueden ser con igualdad o desigualdad.

3.1. Restricciones con desigualdad. Son ecuaciones entre las variables de la forma

$$h(x) = h(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

donde  $h: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real de variables reales definida sobre un conjunto A de números reales.

3.2. Restricciones con igualdad. Son ecuaciones entre las variables de la forma:  $h(x) = 0$ , donde  $h: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función tal que:

$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))$ , con  $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 4: Solución óptima.**

Diremos que  $x = (x_1, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  es solución factible si cumple con las condiciones de las restricciones del problema de programación no lineal (PPNL), además de optimizar la función objetivo, Pedro Canales, (2004) afirma “un punto  $x^* \in S$  se dice que es una solución óptima completa del problema de minimización si  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in S$ ”(p.59).

**Definición 5: Conjunto factible o viable.**

Se define región o conjunto factible  $\Omega$  del problema (PPNL) al conjunto de todas sus soluciones factibles

$$\Omega = \{x \in A \subseteq \mathbb{R}^n : x \text{ es una solución factible}\}.$$

## CAPÍTULO III

### HIPÓTESIS Y VARIABLES

#### 3.1 Hipótesis

##### **Hipótesis General**

Es posible describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\epsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

##### **Hipótesis Específica**

Es posible describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\epsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

Es posible comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\epsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

#### 3.1.1 Operacionalización de variables

##### **Definición conceptual de variables**

- **Variable Dependiente (D)**

**D:** Métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\epsilon$  – restricción.

- **Variable Independiente (I)**

**I:** Modelo de Markowitz

Forma parte del área de Detección Comprimida y Optimización de Portafolios.

<b>Variable</b>	<b>Dimensiones</b>	<b>Indicadores</b>	<b>Método</b>	<b>Técnica</b>
D	<p>Método NISE</p> <p>Método <math>\varepsilon</math> – restricción</p> <p>Soluciones eficientes</p>	<p>Error máximo posible</p> <p>Optimización de la función objetivo</p> <p>Solución óptima</p>	Método de escritorio o de biblioteca.	<p>Revisión bibliográfica.</p> <p>Trabajo con equipo de investigación.</p>
I	<p>Problema de optimización de portafolio.</p> <p>Modelo de media varianza de Markowitz.</p> <p>Variables económicas.</p>	<p>Optimización de Inversión</p> <p>Problema de Optimización</p> <p>Control de riesgo, retornos esperados de la inversión y la matriz de Covarianza.</p>	Método de escritorio o de biblioteca.	<p>Revisión bibliográfica.</p> <p>Trabajo con equipo de investigación.</p>

## **CAPÍTULO IV**

### **DISEÑO METODOLÓGICO**

#### **4.1 Tipo y diseño de investigación**

##### **4.1.1 Tipo de Investigación**

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías ya existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

##### **4.1.2 Diseño de Investigación**

Su diseño es transversal – descriptivo pues su propósito es conseguir resultados teóricos a partir de demostraciones formales de resultados ya conocidos con respecto a cada una de las variables. El método de las ciencias formales es el método deductivo, a partir de axiomas – verdades simples y evidentes, y deducir de ello todas las demás verdades, usando las leyes y reglas del razonamiento correcto que la lógica proporciona. (Klimovsky, 2001). Según Elí de Gortari, *Lógica General* (1972) utilizaremos demostraciones de tipo directo e indirecto.

#### **4.2 Método de investigación**

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

### **4.3 Población y muestra**

Población: Métodos de Optimización Multiobjetivo.

Muestra: Método NISE y  $\varepsilon$  – restricción.

### **4.4 Lugar de estudio**

El lugar de estudio es el espacio físico en el cual se elabora el proyecto de investigación, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, pero debido a la situación actual 2020 – 2021 originado por el COVID-19 el lugar de estudio será desde mi casa.

### **4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información**

Para la realización de este proyecto de tesis se utilizará la técnica de revisión bibliográfica y trabajos con equipo de investigación.

**Revisión bibliográfica:** Se basa en recopilar información ya existente sobre nuestra investigación, podemos obtener esta información de diversas fuentes como, por ejemplo, papers, revistas especializadas, material archivado y otros trabajos académicos.

**Trabajo con equipo de investigación:** Se desarrolló en todas las clases del ciclo de tesis, módulo I, II y III.

Debido a la naturaleza del trabajo no se tiene un instrumento de medición con respecto a las técnicas, pero debemos tener en cuenta que la bibliografía explorada es de alta relevancia para un sector significativo de la comunidad matemática.

#### **4.6 Análisis y procesamiento de datos.**

Por la naturaleza del proyecto de investigación no se realiza ningún análisis estadístico, se muestra recolección de bibliográfica relevante (libros, páginas web, papers, etc.)

#### **4.7. Aspectos Éticos en Investigación.**

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

**4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.**

No se aplica para este tipo de proyecto.

**4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.**

No se aplica para este tipo de proyecto.

## CAPITULO V

### RESULTADOS

#### Modelo de Markowitz: Pruebas computacionales

En el mundo real del mercado de valores, hay miles de posibles inversiones entre las que puede elegir el inversor. Obviamente, no se considerará a todos como entrada de ningún método para obtener un portafolio eficiente, ya que esto daría como resultado el cálculo de miles de covarianzas entre inversiones, además del hecho de que el error entre el modelo y la realidad se amplificaría enormemente. Por lo tanto, se recomienda elegir siempre un número muy pequeño de posibles inversiones como entrada para cualquier método.

Siguiendo este pensamiento, estudiaremos 2 métodos de Optimización Multiobjetivo para problemas restringidos y realizamos un análisis comparativo de sus resultados, a saber: método  $\varepsilon$  – restricción y método NISE. Ambos métodos son bien conocidos y se utilizan para resolver problemas de **Optimización de Portafolio**. Nuestro objetivo es, por tanto, presentar métodos de Optimización Multiobjetivo que no fueron aplicados en el contexto de Optimización de Portafolio y comparar sus resultados. En esta subsección, usamos solo las aplicaciones al modelo Markowitz MV.

El problema abordado es:

$$\begin{aligned} & \min(x'Qx, -\mu'x) \\ & s. a: \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{5,1}$$

Como solo tenemos restricciones lineales, esto implica que la condición de calificación de Abadie se satisface para cada punto viable. Por lo tanto, toda solución eficiente es débil.

Todos los métodos se implementaron en el lenguaje  $C / C++$  utilizando la biblioteca de tecnología IIOG Concert y el resolver CPLEX, que se ejecuta en un procesador Intel Core 2 Quad. 2,40 GHz con el sistema operativo Linux. Cada método recibe un archivo de entrada con el número de inversiones, el número de períodos considerados en el historial de precios de inversión y los precios de inversión en cada período.

A continuación, se presenta un ejemplo que permite comparar el método  $\varepsilon$  – restricción y NISE al estudiar carteras de inversiones en un grupo de empresas brasileras. Cabe mencionar que los datos aquí mostrados fueron totalmente extraídos de [Rodríguez, 2011], ya que la motivación de este problema es solo ejemplificar el uso de los métodos. Es así, que se muestra la siguiente tabla 5.2 indicando las empresas a estudiar señalándolas con un código arbitrario para guardar la discreción empresarial correspondiente.

**Tabla 5.2:** Inversiones para cada problema. (Ver anexo 2)

Problema 1	Problema 2	Problema 3
GFSA3	ITSA4	LREN3
BBAS3	USIM5	GOLL4
VIVO4	VALE5	TAMM4
TCSL3	TAMM4	GGBR4
TLPP4	AMBV4	EMBR3
ELPL5	ELET3	BBDC4
AMBV4	ITUB4	ELPL5
PETR4	LAME4	ITUB4
EMBR3	PETR4	GFSA3
BBDC4	TNLP4	RDCD3

Se probaron tres problemas, cada uno de los cuales contenía precios históricos mensuales de 10 empresas pertenecientes al índice de **BOVESPA** (Bolsa de Valores de São Paulo) desde octubre de 2007 a octubre de 2010. La tabla 5.2 presenta las inversiones de cada uno de los problemas. Los datos que se usaran se encuentran descritos en [Rodríguez, 2011], para facilidad del lector, se muestran en el Anexo 2 al final de este trabajo.

Dado que las tasas de rendimiento son multiplicativas a lo largo del tiempo, usamos la media geométrica en lugar de la media aritmética para calcularlos, nos deja,

$$\mu_i = \left( \prod_{t=1}^p (1 + r_{it}) \right)^{1/p} - 1.$$

En todos los problemas, usamos la formulación (2.7) para el método de pesos y la formulación (2.8) para el método de  $\varepsilon$  – restricción. Si un método en particular no optimiza las funciones individualmente en su proceso, lo hacemos antes de iniciar el método e incluimos sus soluciones en el conjunto de soluciones obtenidas.

### **Método de $\varepsilon$ – Restricción**

En este método, debemos restringir el retorno esperado de nuestro portafolio a un valor mínimo  $R$ . Sin embargo, si elegimos este valor incorrectamente, el problema puede volverse impracticable. Una posible elección para  $R$  puede ser el valor mínimo entre los retornos esperados de las inversiones, ya que sabemos que invertir todo el dinero en la inversión con un retorno mínimo es una solución viable. Sin embargo, esta es una mala idea, ya que este valor puede ser muy pesimista, y esto daría como resultado la obtención de muchas soluciones iguales al intentar minimizar la varianza. Una alternativa sería  $R$  igual al rendimiento medio de la

inversión. Sin embargo, esto puede resultar en que parte de la frontera eficiente no se logre si  $R$  es mayor que el valor de retorno de límite mínimo.

La mejor alternativa, que utilizamos para los experimentos, es minimizar la varianza individualmente - sin considerar el rendimiento del problema y evaluar el rendimiento de la solución obtenida. Esto se encuentra en el extremo inferior del límite eficiente y el valor de su retorno es un límite inferior para el retorno de cualquier portafolio en la curva. Así, hacemos  $R$  igual al retorno de esta solución.

Para nuevas soluciones, añadir  $R$  nuevos valores y resolver los nuevos subproblemas correspondientes, es decir, con cada nuevo subproblema, hacemos  $R = R + \text{aumento}$ . El aumento se realiza hasta que el nuevo subproblema se vuelve inviable para el retorno esperado. La elección del valor de aumento es importante para el control eficiente de la cobertura fronteriza. Es importante señalar que, para optimizar los portafolios, la elección del vector  $\epsilon$  al inicio no es difícil, pero esto no siempre es cierto para otros tipos de problemas.

**Tabla 5.4:** Desempeño del  $\epsilon$  – restricción en el problema 1.

Aumento	Subproblemas resueltos	Soluciones diferentes
0,001	20	20
0,002	11	11
0,003	8	8
0,005	5	5
0,01	3	3

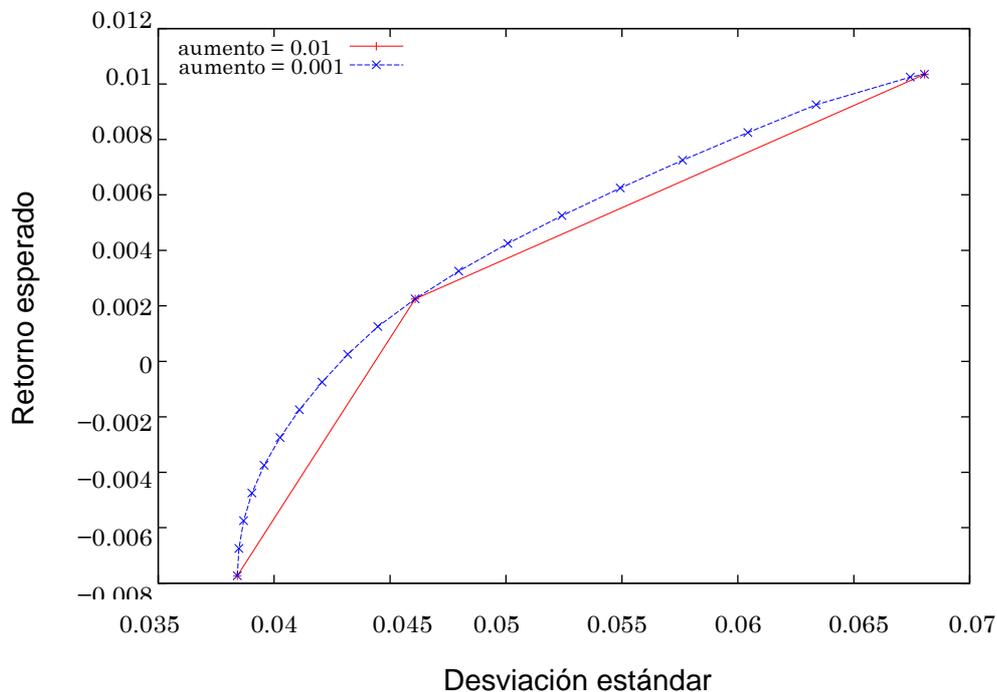
La tabla 5.4 muestra el número de diferentes soluciones eficientes encontradas para el problema 1 y el número de subproblemas resueltos

para diferentes valores de acumulación para  $R$ . Esto se debe a la elección inicial de  $R$  que hicimos. Si el valor inicial de  $R$  fuera igual al valor mínimo de los rendimientos de la inversión, la diferencia entre los números sería grande.

La figura 5.5 muestra los puntos dispuestos en el borde eficiente para el Problema 1 obtenidos usando el método con dos valores de aumento diferentes para el retorno esperado inicial: 0.01 y 0.001. Como podemos ver, obtenemos puntos bastante bien distribuidos en ambos casos. Naturalmente, cuanto menor sea el valor del aumento al retorno esperado inicial, mejor será la aproximación a la frontera de eficiencia.

**Figura 5.5:**

Método  $\varepsilon$  – restricción - Problema 1



**Nota:** Frontera eficiente del problema 1 aproximada con el método de  $\varepsilon$  – restricción y aumentos de 0.01 y 0.001 unidades al retorno esperado inicial. Tomado de Rodrigues (p. 45)

## Método NISE

En el método NISE, el valor de error máximo permitido se define generalmente como el valor del primer error máximo posible calculado multiplicado por una constante menor que uno. El valor de esta constante determinará cuántos puntos de la curva se obtendrán. Otra posibilidad es hacer que el error máximo permitido sea igual a cero y detener el método después de un cierto número de iteraciones.

Básicamente, en cada iteración del método, se realizan los siguientes pasos:

**Paso 1.** Si todos los errores máximos posibles (alturas de todos los triángulos) obtenidos por los pares de las soluciones eficientes adyacentes encontradas son menores que el error máximo permitido, DETENER. De lo contrario, vaya al paso 2.

**Paso 2.** Entre los pares de soluciones eficientes con el máximo error posible mayor que el máximo error permitido, elija una con el mayor error máximo posible y resuelva un nuevo problema de peso donde los pesos  $w_1 \geq 0$  y  $w_2 \geq 0$  para  $f_1$  y  $f_2$  son tales que  $-w_1/w_2$  igual a la pendiente del segmento de línea que conecta las dos soluciones en el espacio objetivo. (La solución óptima encontrada es una nueva solución eficiente.) Vuelva al paso 1.

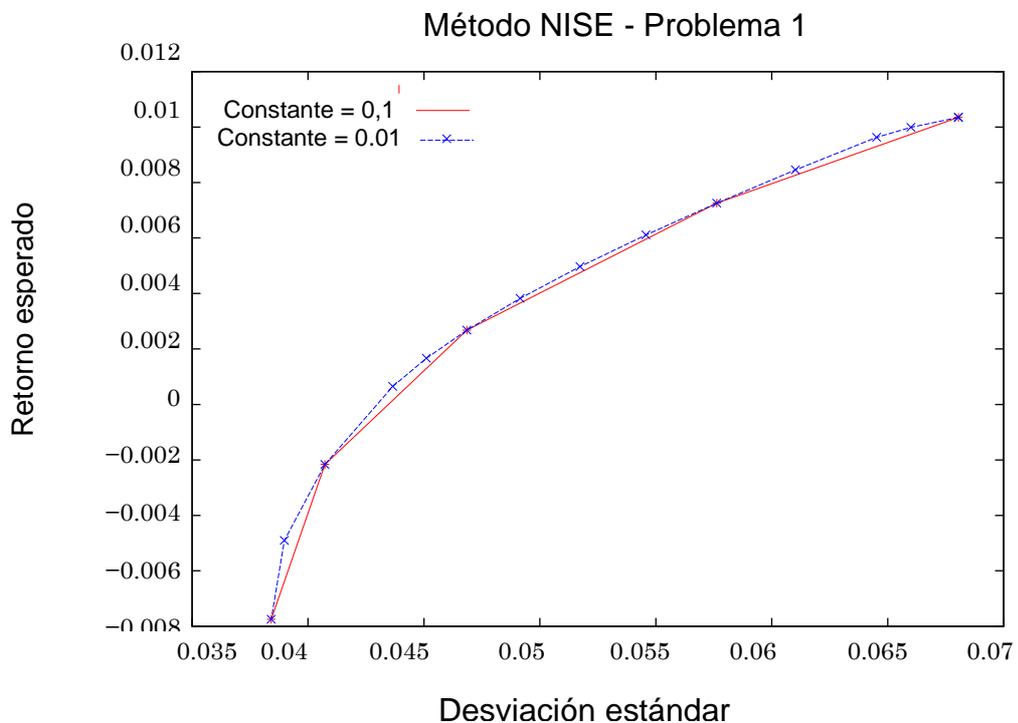
La tabla 5.5 muestra el número de diferentes soluciones eficientes encontradas para el problema 3 y el número de subproblemas resueltos para diferentes valores de la constante multiplicadora.

**Tabla 5.5:** Rendimiento del método NISE en el problema 1.

Constante	Subproblemas resueltos	Diferentes soluciones encontradas
0,5	3	3
0,1	5	5
0,05	7	7
0,03	10	10
0,02	10	10
0,01	15	15

La figura 5.6 muestra los puntos dispuestos en la frontera eficiente para el Problema 1 obtenidos usando el método con dos valores diferentes de la constante del multiplicador: 0.01 y 0.1.

**Figura 5.6:**



**Nota:** Frontera eficiente del problema 1 aproximada con el método NISE y valores de la constante del multiplicador iguales a 0.1 y 0.01. Tomado de Rodrigues (p. 47)

Como vemos, obtenemos soluciones que están bien distribuidas en ambos casos. Naturalmente, cuanto menos sea el valor de la constante del multiplicador, menor será el error máximo permitido y, por lo tanto, mejor será el acercándose a la frontera eficiente.

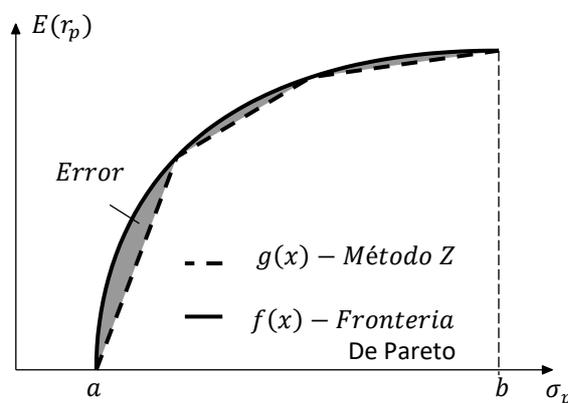
**Tabla 5.6:** Desempeño de los métodos aplicados al Problema 1.

Problema 1		
Método	Error	Soluciones diferentes encontradas
$\epsilon$ -Restricción	0.0393884	10
NISE	0.0289485	10

### Resultados comparativos entre ambos métodos

Para comparar los métodos, calculamos el área de la figura ubicada entre la frontera eficiente del problema y su aproximación obtenida por la interpolación lineal de las soluciones. El error de un método se define como el valor de esta área, que se calcula utilizando la regla trapezoidal de integración numérica. Si esta área es grande, significa que la aproximación no es buena; de lo contrario, la curva se acerca a la real.

**Figura 5.10:** Cálculo del error



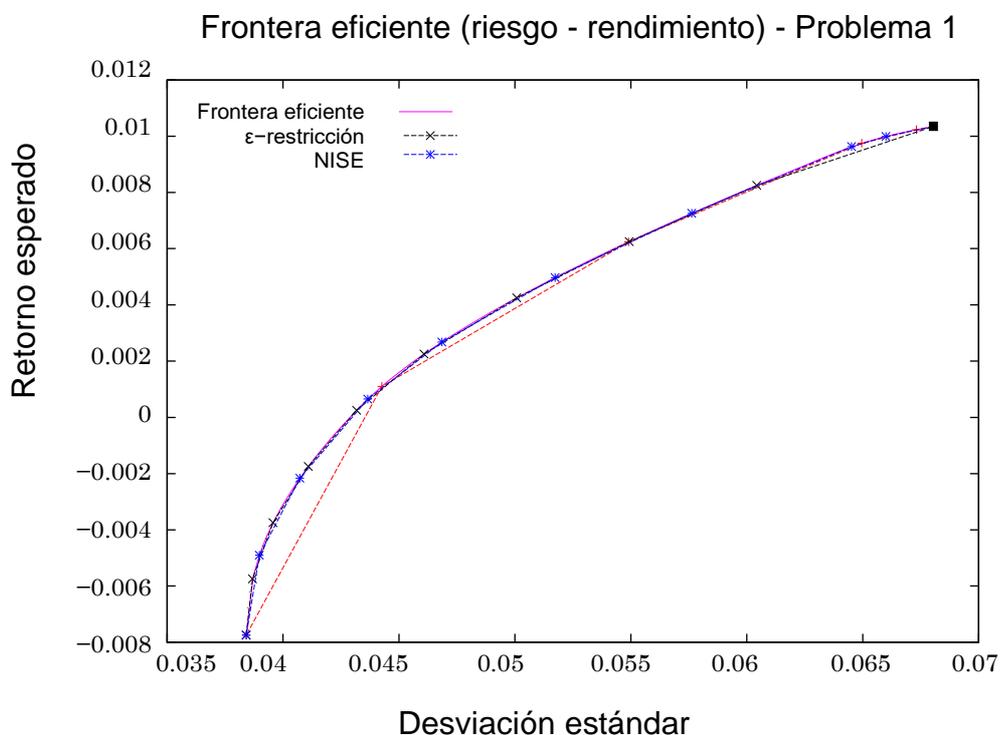
**Nota:** Error del método Z =  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ .

Fuente ver Rodrigues (p. 47)

Como estamos calculando las áreas de las curvas usando integración numérica, decidimos usar una gran cantidad de puntos (en promedio, 200) obtenidos por el método de  $\epsilon$  – **restricción** para estimar la frontera eficiencia real de cada problema. Suponiendo que estamos dispuestos a resolver 10 subproblemas para obtener una aproximación de la curva, **comparamos los métodos** entre sí en función de sus errores y el número de soluciones diferentes encontradas.

Como ya se ha dicho sobre el método de  $\epsilon$  – **restricción**, para cada subproblema, debemos elegir el valor inicial R. El valor elegido para cada problema siempre será igual al retorno del portafolio que minimiza la varianza, que es el valor de retorno mínimo que puede tener una solución eficiente.

**Figura 5.11:**



**Nota:** Frontera eficiente del problema 1. Fuente Rodrigues (p. 47)

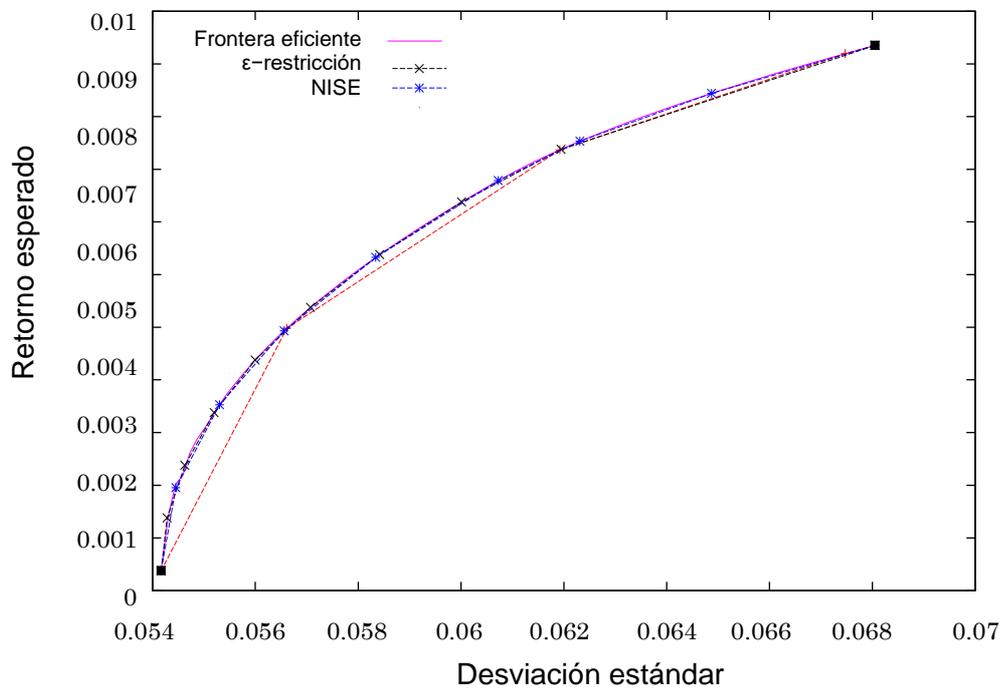
**Tabla 5.7:** Desempeño de los métodos para el Problema 2.

Problema 2		
Método	Error	Soluciones diferentes encontradas
$\varepsilon$ – restricción	0.0259655	10
NISE	0.01638	09

El valor inicial de  $R$  en el método de  $\varepsilon$  – restricción para el problema 1 es  $-0,00774781$ , que es el valor de retorno mínimo que puede tener una solución eficiente en este problema. También en este método, el valor de aumento elegido para el rendimiento mínimo esperado es igual a  $0.002$ , es decir, para cada nuevo problema, hacemos  $R = R + 0,002$ .

**Figura 5.12:**

Frontera eficiente (riesgo - rendimiento) - Problema 2

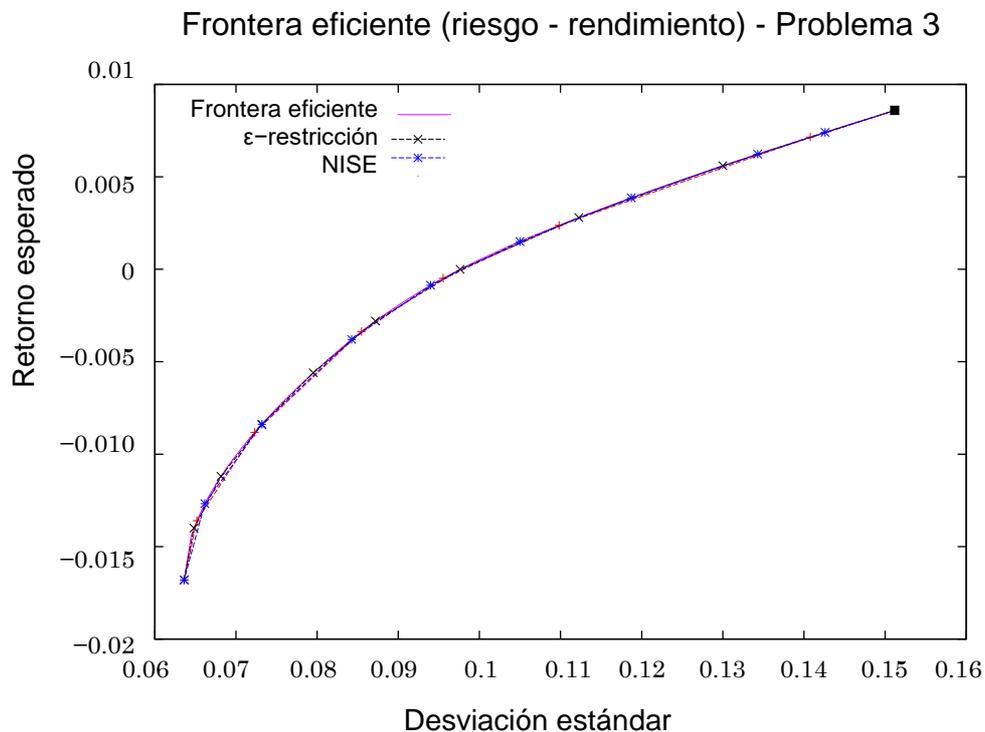


**Nota:** Frontera eficiente del problema 2. Fuente Rodrigues (p. 49)

**Tabla 5.8:** Desempeño de los métodos para el problema 3.

Problema 3		
Método	Error	Soluciones diferentes encontradas
$\epsilon$ – restricción	0.0556822	10
NISE	0.0756729	10

**Figura 5.13:**



**Nota:** Frontera eficiente del problema 3. Fuente Rodrigues (p. 51)

En los problemas 1 y 2, el método NISE tuvo un error menor que  $\epsilon$ -restricción, sin embargo, no hay garantía de que siempre sea mejor que el método de  $\epsilon$  – restricción. Como podemos ver en la Figura 5.13, el error del  $\epsilon$  – restricción en el problema 3 es menor que la del método NISE, aunque la diferencia es muy pequeña.

De los resultados anteriores, podemos concluir que el **NISE** y  $\varepsilon$  – **restricción** funciona bien cuando estamos dispuestos a resolver una pequeña cantidad de subproblemas.

En particular, el método de  $\varepsilon$  – **restricción** puede ser un poco más compleja que el método de NISE debido a la elección de sus parámetros. Si no elegimos un valor inicial para  $R$  razonable y un valor de incremento adecuado para el mismo, el problema puede volverse impracticable o podemos obtener una aproximación débil de frontera eficiente.

### **5.1 Resultados descriptivos**

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados descriptivos.

### **5.2 Resultados inferenciales**

Debido a la naturaleza del trabajo nuestros resultados deductivos – inductivos podrán ser considerados inferenciales.

### **5.3 Otro tipo de resultado estadísticos, de acuerdo con la naturaleza del problema y la hipótesis.**

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

## CAPITULO VI

### DISCUSIÓN DE RESULTADOS

#### 6.1 Contrastación y demostración de las hipótesis con los resultados

Esta sección está dedicada a verificar la veracidad de las hipótesis descritas en el Capítulo III. Con relación a las Hipótesis Específicas, las cuales son:

**HE1:** Es posible describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

**HE2:** Es posible comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

En las secciones 5.2 y 5.3 del Capítulo V, se observa que se describe en detalle la aplicación de los métodos  $\varepsilon$  – restricción y NISE para el modelo de Markowitz, verificando la **HE1**.

Por otro lado, en la sección 5.4 se compara en diferentes casos a partir de simulaciones numéricas la eficacia de las soluciones generadas por el método  $\varepsilon$  – restricción y NISE, en particular las figuras 5.11, 5.12 y 5.13 muestran el desempeño de estas soluciones sobre tres problemas diferentes, consiguiendo mostrar que:

**Tabla Comparativa de Métodos  $\varepsilon$  – restricción y NISE**

Problema	Figura	Comparación de métodos (solución óptima)
1	5.11	NISE
2	5.12	$\varepsilon$ – restricción
3	5.13	NISE

**Fuente: Elaboración propia**

Es decir, la mejor solución depende de los datos iniciales y no se puede concluir que en general un método es mejor que el otro. Esto muestra la veracidad de la **HE2**.

A partir de la comprobación de ambas hipótesis, queda demostrada la Hipótesis General (HG) la cual es:

**HG:** Es posible describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y  $\varepsilon$  – restricción para el modelo de Markowitz.

Así, todas las hipótesis planteadas son verdaderas.

## 6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

A partir de los resultados en la presente investigación tenemos que, estos resultados guardan relación con las investigaciones presentadas en los antecedentes indicados en el Marco Teórico:

- a) En la investigación de **Fazzio, N. (2018)**, planteó en su trabajo que existe una gran variedad de métodos para resolver problemas multiobjetivo. La elección de un método optimización multiobjetivo debe ser realizada con cuidado ya que no existe un método mejor que todos los otros. Cada problema posee sus características propias, por eso, un método puede ser muy bueno para un tipo de problema e ineficiente para otros, es así como nosotros elegimos trabajar con dos métodos de optimización NISE y  $\varepsilon$  – restricción y comparar sus resultados.
- b) En la investigación **Raimundo M. (2019)** en su artículo titulado “*Una extensión del algoritmo de estimación de conjuntos no inferiores (NISE) para muchos objetivos*”, de la Universidad de Campinas (Brasil), planteo un trabajo novedoso con un enfoque de optimización multiobjetivo que

encuentra un representante del conjunto de soluciones no inferiores a nivel global, también conocidas como soluciones óptimas de Pareto, mediante la formulación de una secuencia de problemas de escalarización del método de sumas ponderadas y compara en diferentes casos a partir de simulaciones numéricas la eficacia de las soluciones generadas por el restricción y NISE.

- c) Por otro lado **Stefan B. (2019)** en su artículo titulado “*Un enfoque multiobjetivo basado en múltiples escenarios*”, del Instituto de Investigación de Operaciones e Informática Empresarial, Escuela de Economía y Negocios de Schumpeter, Universidad de Wuppertal, Alemania, analizó una variante multiobjetivo del conocido Problema del vendedor ambulante (TSP) y el Problema del reparador viajero (TRP) para abordar el conflicto clásico entre la minimización de costos (representada por el TSP) y la minimización del tiempo de espera del cliente (representado por el PRT), el compara en diferentes casos a partir de simulaciones numéricas la eficacia de las soluciones generadas por el método  $\varepsilon$  – restricción y NISE.

### **6.3 Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes**

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

## CAPITULO VII

### Conclusiones

1. A partir de lo mostrado en el Capítulo V, se observó que el método **NISE** se utiliza para resolver problemas en que el conjunto factible es convexo, mientras que el método  $\varepsilon$  – **restricción** se puede aplicar variando su parámetro para conjuntos no convexos.
2. Como se vio en el Capítulo de resultados los métodos **NISE** y  $\varepsilon$  – **restricción** fueron aplicados para problemas de portafolio eficiente. Al analizar su desempeño se pudo concluir que el método NISE es el que se acerca más a la frontera eficiente, seguido del método de  $\varepsilon$  – restricción. Tales resultados sirven como estímulo para el uso de métodos de Optimización Multiobjetivo en el área de Optimización de Portafolios.
3. Con respecto a la aplicación del método **NISE** y  $\varepsilon$  – **restricción** para un problema de optimización de portafolio a manera de ejemplo se usó los datos recopilados en [Rodríguez S. 2011], los cuales muestran 3 problemas y en cada uno aparece las inversiones de 10 empresas del sector construcción pertenecientes a la bolsa de valores de Sao Paulo (IBOVESPA) entre el 2007 y 2010. Es claro que los métodos pueden ser usados de manera análoga sobre otros datos estadísticos.

## CAPITULO VIII

### Recomendaciones

1. Se recomienda implementar otros métodos de Optimización Multiobjetivo en el área de optimización de Portafolio. Uno de ellos es el método del gradiente y comprobar la calidad de su solución, que podría ser una solución óptima bajo ciertas restricciones y parámetros. Los problemas para abordar se dividen en dos clases: las que pueden tratarse como problemas de programación lineal y las que pueden tratarse como problemas de cono de segundo orden.
2. Como se observó al usar el método NISE y  $\varepsilon$  – **restricción** fue necesario asumir de manera indirecta las condiciones de Fritz John (2.3). A pesar de ser intuitivo, tal condición no se extiende en el caso de que se agregue cualquier conjunto abstracto S al conjunto viable X del problema, que se compone únicamente de restricciones de igualdades y desigualdades. Se recomienda explorar en futuros trabajos los métodos multiobjetivo antes mencionados debilitando las condiciones Fritz John
3. Debido a la pandemia generada por el COVID 19, el portafolio de inversiones de varias empresas ha sufrido fluctuaciones drásticas, se recomienda en futuros trabajos explorar el análisis numérico realizado en el Capítulo V con respecto a los métodos NISE y  $\varepsilon$  – **restricción** para un portafolio de inversiones en vías de recuperación post pandemia.

## **CAPITULO IX**

### **REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**

- Berman, A. & Plemmons, R. (1979). Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York.
- Canales, P. (2009). Introducción a la optimización e investigación de operaciones (t.1). Lima, Perú: Hozlo
- Cohon, L. (1978). "Multiobjective Programming and Planning". Academic Press, New York, 1978.
- Fazzio, N. (2018). "Teoría y métodos para problemas de optimización multiobjetivo", de la Universidad Nacional de la Plata (Argentina)
- Fretel, I. (2018). "Aplicación del modelo de Markowitz en el mercado de acciones peruano" de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM – PERÚ)
- Geoffrion M. (2015). Polynomial-time computation of the joint spectral radius for some sets of nonnegative matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 31. 10.1137/080723764.
- Giorgi A. & Guerraggio M. (1992). "Optimización No lineal". Kluwer Academic Publishers, 1992.
- Haimes, J. (1971). "Métodos para problemas de optimización multiobjetivo",
- Klimovsky, G. (2001). "Los enigmas del descubrimiento científico". Alianza Editorial, Buenos Aires, 2005, pp. 256.

- Markowitz, H. (1956). "La optimización de una función cuadrática sujeta a lineal limitaciones". *Naval Research Logistics Quarterly*, 3: 111-133
- Marglin, L. (1967). *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, Now York.
- Miettinen, M. (1999). "Nonlinear Multiobjective Optimization". Kluwer Academic Publishers, 1999.
- Papa, E. (2009). "Proximal point methods for quasiconvex and convex functions with Bregman distances on Hadamard manifolds" Academic Publishers.
- Raimundo M. (2019). "Una extensión del algoritmo de estimación de conjuntos no inferiores (NISE) para muchos objetivos", de la Universidad de Campinas (Brasil)
- Rodríguez S. (2011). "Teoría, métodos y aplicaciones de optimización multiobjetivo", Universidad de Sao Paulo (Brasil)
- Sawaragi, P. (1985). Computationally efficient approximations of the joint spectral radius (Vol. 27). *SIAM J. Matrix Anal.* doi:10.1137
- Zadeh, A. (1963). *A course of modern analysis: an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*

## ANEXO 1

### Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
<b>General</b>	<b>General</b>	<b>General</b>		
¿Se puede describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz?	Describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz.	Es posible describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ – restricción para el modelo de Markowitz.	<p style="text-align: center;"><b>Tipo de Investigación</b></p> <p>La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías ya existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.</p> <p style="text-align: center;"><b>Diseño de la investigación</b></p> <p>Su diseño es transversal – descriptivo pues su propósito es conseguir resultados teóricos a partir de demostraciones formales de resultados ya conocidos con respecto a cada una de las variables.</p> <p style="text-align: center;"><b>Método de la Investigación</b></p> <p>Método de escritorio o de biblioteca</p> <p style="text-align: center;"><b>Técnica</b></p> <p>Revisión bibliográfica. Trabajo con equipo de investigación.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Población y Muestra</b></p> <p style="text-align: center;"><b>Población</b></p> <p>Métodos de Optimización Multiobjetivo.</p> <p style="text-align: center;"><b>Muestra</b></p> <p>Método NISE y <math>\epsilon</math> restricción.</p>
<b>Específico</b>	<b>Específico</b>	<b>Específico</b>		
¿Se puede describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz?	Describir y comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz.	Es posible describir los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ – restricción para el modelo de Markowitz.		
¿Se puede comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz?	Comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ restricción para el modelo de Markowitz.	Es posible comparar los métodos de optimización multiobjetivo NISE y $\epsilon$ – restricción para el modelo de Markowitz.		

**Fuente:** Elaboración propia

**ANEXO 2**  
**BASE DE DATOS**  
**INVERSIONES DE EMPRESAS**  
**BOLSA DE VALORES DE SAO PAULO (BOVESPA)**

Los datos que se usaran se encuentran descritos en [Rodríguez, 2011] y son los siguientes:

- precios de inversión 1 en orden ascendente de los meses considerados
- precios de inversión 2 en orden ascendente de los meses considerados
- ...
- precios de inversión 10 en orden ascendente de los meses considerados

**Problema 1**

Código de empresa: GFSA3												
<b>2008</b>	30.92	33.45	33.19	29.70	33.05	29.01	36.49	36.35	27.66	27.00	23.34	24.10
<b>2009</b>	15.26	8.76	10.49	11.70	9.91	11.65	18.98	17.80	16.39	23.80	27.31	26.68
<b>2010</b>	26.14	29.04	28.24	24.37	13.70	12.29	11.84	11.00	10.80	13.20	12.10	13.05

Código de empresa: BBAS3												
<b>2008</b>	31.30	31.00	30.40	29.25	28.27	23.11	28.90	32.54	26.15	25.10	23.79	22.75
<b>2009</b>	14.77	14.30	14.68	14.20	13.85	16.87	18.46	21.16	21.18	23.64	26.16	31.23
<b>2010</b>	28.21	30.90	29.70	28.10	29.77	29.85	29.99	25.98	24.65	30.54	28.48	32.13

Código de empresa: VIVO4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TCSL3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TLPP4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70

<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20
Código de empresa: ELPL5												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: AMBV4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: PETR4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: EMBR3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: BBDC4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

## Problema 2

Código de empresa: GFSA3												
<b>2008</b>	30.92	33.45	33.19	29.70	33.05	29.01	36.49	36.35	27.66	27.00	23.34	24.10
<b>2009</b>	15.26	8.76	10.49	11.70	9.91	11.65	18.98	17.80	16.39	23.80	27.31	26.68
<b>2010</b>	26.14	29.04	28.24	24.37	13.70	12.29	11.84	11.00	10.80	13.20	12.10	13.05

Código de empresa: BBAS3												
<b>2008</b>	31.30	31.00	30.40	29.25	28.27	23.11	28.90	32.54	26.15	25.10	23.79	22.75
<b>2009</b>	14.77	14.30	14.68	14.20	13.85	16.87	18.46	21.16	21.18	23.64	26.16	31.23
<b>2010</b>	28.21	30.90	29.70	28.10	29.77	29.85	29.99	25.98	24.65	30.54	28.48	32.13

Código de empresa: VIVO4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TCSL3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TLPP4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: ELPL5												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: AMBV4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: PETR4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: EMBR3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: BBDC4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

### Problema 3

Código de empresa: GFSA3												
<b>2008</b>	30.92	33.45	33.19	29.70	33.05	29.01	36.49	36.35	27.66	27.00	23.34	24.10
<b>2009</b>	15.26	8.76	10.49	11.70	9.91	11.65	18.98	17.80	16.39	23.80	27.31	26.68
<b>2010</b>	26.14	29.04	28.24	24.37	13.70	12.29	11.84	11.00	10.80	13.20	12.10	13.05

Código de empresa: BBAS3												
<b>2008</b>	31.30	31.00	30.40	29.25	28.27	23.11	28.90	32.54	26.15	25.10	23.79	22.75
<b>2009</b>	14.77	14.30	14.68	14.20	13.85	16.87	18.46	21.16	21.18	23.64	26.16	31.23
<b>2010</b>	28.21	30.90	29.70	28.10	29.77	29.85	29.99	25.98	24.65	30.54	28.48	32.13

Código de empresa: VIVO4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TCSL3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: TLPP4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: ELPL5												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: AMBV4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: PETR4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: EMBR3												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20

Código de empresa: BBDC4												
<b>2008</b>	40.84	42.56	37.64	40.60	40.64	40.92	48.40	45.04	41.16	36.08	33.68	31.16
<b>2009</b>	23.56	29.00	28.24	33.00	38.70	30.55	35.27	39.90	37.32	42.50	43.25	44.70
<b>2010</b>	43.20	52.53	54.48	53.49	49.10	48.30	46.20	49.97	46.40	47.05	42.20	46.20