UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:
Junior Alan Amaya Siesquien

Asesor:
Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Línea de investigación:
Análisis Funcional

Callao, 2023.

PERÚ

Document Information

Analyzed document	INFORME FINAL TESIS AMAYA SIESQUIEN JUNIOR-UNAC-1-8-2023.pdf (D173514127)
Submitted	2023-09-06 21:42:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

1 UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: ANÁLISIS FUNCIONAL Callao, 2023. PERÚ

2

3 INFORMACIÓN BÁSICA FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. TÍTULO: Existencia De Series Universales En Espacios De Banach Separables AUTOR: Junior Alan Amaya Siesquien- https://orcid.org/0000-0002-3442-2776 – 43380218 ASESOR: Alfredo Sotelo Pejerrey - https://orcid.org/0000-0002-0795-4638 – 45569296 LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. UNIDADES DE ANÁLISIS: Nuestra unidad a analizar es el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie, en un espacio de Banach separable. TIPO DE INVESTIGACIÓN: Teórico. TEMAS OCDE: Matemática Pura.

4

5 Hoja de Referencia del Jurado y aprobación "Existencia de series universales en espacios de Banach separables" JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática. Aprobada por: .... Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega Presidente .... Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe Secretario .... Dr. Julio César Nuñez Villa Vocal .... Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey Asesor

6 Dedicatoria A mi madre Tomasa por el sacrificio y amor a sus hijos. A Rocio y mi hija Aithanna, por su amor, afecto y apoyo incondicional.

7 AGRADECIMIENTO A Dios: Por siempre brindar salud y bendiciones en cada uno de mis proyectos, permitiendo cerrar esta etapa de mi vida. A mi madre Tomasa: Por el amor y apoyo que siempre muestra en cada una de mis decisiones, por ser siempre mi guía, y motivarme a ser cada día mejor. Gracias por cada una de tus palabras de aliento y ser el principal motor de mi vida. A Rocio: Por su amor, confianza, apoyo y sobre todo paciencia en cada uno de mis pasos. Gracias por ser la compañera de mi vida y alentarme a mejorar día a día. A mi hija Aithanna: Por sus sonrisas, amor y cariño que motivan cada esfuerzo que realizo por mi familia. A ti hija por el tiempo no compartido, te dedico este logro. A mi hermano Andy: Por su afecto y apoyo permanente. Gracias hermano por motivarme como padre, siempre estarás presente en mis proyectos. A mi tía Candelaria: Por siempre estar pendiente de mis pasos, por mostrarme que con esfuerzo siempre se alcanzan las metas planteadas. Gracias tía por ser el modelo a seguir. A mi familia: Por su preocupación y aliento permanente, porque cada uno de sus éxitos motivan mis pasos. A mi asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey Por su tiempo, enseñanzas, sugerencias y apoyo permanente durante el desarrollo de la investigación. Agradecido por la paciencia en la elaboración de este proyecto.

8 ÍNDICE

CONSTANCIA N° 36-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: "**EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES**".

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 06 de setiembre 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/pgh
Exp: 201.09.23
c.c.: Archivo

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

TÍTULO: Existencia De Series Universales En Espacios De Banach Separables

AUTOR: Junior Alan Amaya Siesquien- https://orcid.org/0000-0002-3442-2776 – 43380218

ASESOR: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey - https://orcid.org/0000-0002-0795-4638 – 45569296

LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

UNIDADES DE ANÁLISIS: Nuestra unidad a analizar es el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie, en un espacio de Banach separable.
TIPO DE INVESTIGACIÓN: Teórico.

TEMAS OCDE: Matemática Pura.

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

“Existencia de series universales en espacios de Banach separables”

JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática.

Aprobada por:

…………………………………………………..

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega

Presidente

…………………………………………………..

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Secretario

……………………………………………………….

Dr. Julio César Nuñez Villa

Vocal

………………………………………………………………

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
(Resolución Nº 106-2023-D-FCNM)

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el Callao, en el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, sito en la Av. Juan Pablo II N° 306, Bellavista, siendo las 16:00 horas, del día viernes veinticinco de agosto del año dos mil veintitrés, se reunieron, a fin de proceder en primer término al acto de instalación del Jurado Evaluador de Tesis presentado por el Bachiller **JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN**, titulado: **"EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES"** Jurado que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. Moreno Vega, Dionicio Orlando	Presidente
Dr. Núñez Villa, Julio Cesar	Vocal
Mg. Cruzado Quispe, Ever Franklin	Secretario

Luego de la Instalación, el Secretario del Jurado dio lectura a la Resolución Decanal N° 090-2023-D-FCNM, que designa a los miembros del Jurado Evaluador de Tesis por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis.

A continuación, se dio inicio a la Exposición del Trabajo de Tesis de Acuerdo a lo normado por el Art. 78° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 150- 2023-CU de fecha 15 de junio de 2023.

Culminado el acto de exposición de la tesis, los señores miembros del Jurado procedieron a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio para la deliberación en privado del Jurado, con la participación con voz del asesor, y después de calificar el Trabajo de Tesis, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Bachiller **JUNIOR ALAN AMAYA SIESQUIEN**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo con el Art. 24° del citado reglamento, a continuación se indica.

Calificación cuantitativa	Calificación Cualitativa
18	**EXCELENTE**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el Secretario del Jurado Evaluador de Tesis.

Siendo las 17:20 horas del día viernes 25 de agosto del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado Evaluador de Tesis dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas.

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega Presidente	Dr. Julio César Núñez Villa Vocal
Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe Secretario	Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DIRECCIÓN
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS
(Resolución Decanal N° 106-2023-D-FCNM)

Bellavista, 18 de setiembre de 2023

INFORME

El presidente del Jurado de Sustentación de Tesis designado mediante Resolución Decanal N° 106-2023-D-FCNM, informa que la Tesis titulada **"EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES",** expuesta por el Bachiller en Matemática Sr. Junior Alan Amaya Siesquien, no presentó observaciones durante el acto de sustentación de tesis realizado el 25 de agosto de 2023 en el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Es cuanto informo a usted para conocimiento y fines.

Mg. Dionicio Moreno Vega
Presidente

Dedicatoria

A mi madre Tomasa por el sacrificio y amor a sus hijos.

A Rocio y mi hija Aithanna, por su amor, afecto y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTO

A Dios:
Por siempre brindar salud y bendiciones en cada uno de mis proyectos, permitiendo cerrar esta etapa de mi vida.

A mi madre Tomasa:
Por el amor y apoyo que siempre muestra en cada una de mis decisiones, por ser siempre mi guía, y motivarme a ser cada día mejor. Gracias por cada una de tus palabras de aliento y ser el principal motor de mi vida.

A Rocio:
Por su amor, confianza, apoyo y sobre todo paciencia en cada uno de mis pasos. Gracias por ser la compañera de mi vida y alentarme a mejorar día a día.

A mi hija Aithanna:
Por sus sonrisas, amor y cariño que motivan cada esfuerzo que realizo por mi familia. A ti hija por el tiempo no compartido, te dedico este logro.

A mi hermano Andy:
Por su afecto y apoyo permanente. Gracias hermano por motivarme como padre, siempre estarás presente en mis proyectos.

A mi tía Candelaria:
Por siempre estar pendiente de mis pasos, por mostrarme que con esfuerzo siempre se alcanzan las metas planteadas. Gracias tía por ser el modelo a seguir.

A mi familia:
Por su preocupación y aliento permanente, porque cada uno de sus éxitos motivan mis pasos.

A mi asesor:
Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Por su tiempo, enseñanzas, sugerencias y apoyo permanente durante el desarrollo de la investigación. Agradecido por la paciencia en la elaboración de este proyecto.

ÍNDICE

RESUMEN

“EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES”

Junior Alan Amaya Siesquien

Julio - 2023

Asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Titulo obtenido: Licenciado en matemática

El presente trabajo de tesis demuestra la existencia de series universales en espacios de Banach separables. Por otra parte, demostramos el teorema de Levy-Steinitz y damos un ejemplo donde el teorema en mención no se cumple para espacios de Banach de dimensión finita.

Palabras Claves: Espacios de Banach Separables; Reordenaciones; Teorema de Riemann; Serie Universal; Teorema de Levy-Steinitz.

ABSTRACT

“EXISTENCE OF UNIVERSAL SERIES IN SEPARABLE BANACH SPACES”

Junior Alan Amaya Siesquien

July - 2023

Advisor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained Bachelor of Mathematics

This thesis work demonstrates the existence of universal series in separable Banach spaces. On the other hand, we prove the Levy-Steinitz theorem and give an example where the aforementioned theorem does not hold for finite-dimensional Banach spaces.

Keywords: Banach Spaces; Rearrangements; Riemann's theorem**;** Universal series**;** Levy-Steinitz theorem

INTRODUCCIÓN

El teorema de Riemann sobre la reordenación de series convergentes, llamado así en honor al matemático alemán Bernhard Riemann, dice que si una serie infinita de números reales es condicionalmente convergente, es decir la serie converge pero no absolutamente, entonces sus términos pueden ser permutados o reordenados de modo que la nueva serie converja a un número real arbitrario, o diverja. Esto es, si definimos el conjunto:

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \left\{ s \in \mathbb{R} / \ s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}, \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección} \right\}$$

llamado el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces es claro que si la serie de términos (a_n) es condicionalmente convergente entonces el teorema de Riemann nos permite afirmar que el conjunto de arriba es todo $\mathbb{R}$.

El conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\mathbb{R}^n$ ha sido estudiada por E. Steinitz en su famoso artículo Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme. J. Reine Angew. Math. 143(1913), 128 - 175. En este artículo, se prueba que el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$, generalizando así el teorema de Riemann en el contexto real.

Garantizar la existencia de una serie en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) de tal manera que su conjunto de reordenaciones convergentes sea todo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) es un trabajo no trivial. Este problema se vuelve aún más difícil si nos ubicamos en el contexto de espacios de Banach reales o complejos infinito dimensionales, en el presente trabajo se pretende garantizar la existencia de una serie con tal característica asumiendo la separabilidad del espacio de Banach.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Una serie de vectores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en un espacio de Banach X, se dice universal sí $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = X$.
E. Steinitz en 1913, establece la estructura del conjunto $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = X$ para una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$, demostrando que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces el conjunto $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ es un subespacio afín, es decir, la traslación de un subespacio.

Usando el teorema de Riemann, demostraremos que las series universales en $\mathbb{R}$ son las series condicionalmente convergentes, y haremos una discusión para la identificación de series universales en $\mathbb{R}^n$. El trabajo de buscar series universales en espacios de Banach de dimensión infinita, es aún más difícil, nuestro trabajo de tesis se encargará de demostrar la existencia de series universales en este contexto.

1.2 Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema General

¿Existen series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita?

Problemas Específicos

1. ¿Cuáles son las series universales en el cuerpo de los números reales?
2. ¿La prueba del teorema de Riemann (caso real) puede generalizarse a $\mathbb{R}^n$?

1.3 Objetivos

Objetivo general

Probar la existencia de series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita.

Objetivos específicos

1. Mostrar que las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes.
2. Mostrar que, en gran medida, puede imitarse la prueba del teorema de Riemann (caso real) a $\mathbb{R}^n$.

1.4 Justificación

El presente trabajo está inmerso en la línea del Análisis Funcional –Series en espacios de Banach.
El trabajo se justifica ya que:

a) Se prueba la existencia de una serie universal en un espacio de Banach separable.
b) Establece que las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes, para esto el teorema de Riemann es de vital importancia.
c) Muestra, en general, diversas aplicaciones de la teoría de reordenaciones como, por ejemplo: la caracterización de espacios de Banach de dimensión finita con series incondicionalmente y absolutamente convergentes, la forma explícita del conjunto de reordenaciones convergentes de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$.
d) La famosa hipótesis de Riemann puede ser reformulada a partir de una serie condicionalmente convergente que contiene a la función de Mobius.

Finalmente, el presente trabajo se justifica también porque este proyecto es el primer trabajo en la facultad que inicia el estudio de series y reordenaciones en espacios de Banach separables, lo que permitirá el interés y desarrollo de la línea de Análisis Funcional en la FCNM.

1.5 Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

El trabajo de tesis está inmerso en espacios de Banach separables, por lo tanto, un limitante teórico sería el estudio de existencia de series universales en espacios normados que no son de Banach.

1.5.2 Temporal

No tenemos limitante temporal.

1.5.3 Espacial

No tenemos limitante espacial.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

Nacional

En la literatura actual, no hay referencias nacionales con una antigüedad no mayor de cinco años.

Internacional

El artículo de E. STEINITZ (1913) fue el primer escrito sobre la descripción explícita del conjunto de reordenamientos convergentes de una serie. Aquí se demuestra que el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ puede ser el vacío, o la traslación de un subespacio vectorial. Este resultado es conocido como el teorema de Lévy-Steinitiz, en honor a Lévy que lo demostró para $n = 2$ y Steinitz para el caso general.

En el artículo de P. ROSENTHAL (1987) se demuestra el teorema de Lévy-Steinitz de una forma más geométrica y sencilla. Este artículo fue la motivación a muchos autores para demostrar el teorema de Lévy-Steinitz a contextos más generales.

El libro más completo referente a reordenaciones de series en espacios de Banach es el M.I. KADETS and V.M. KADETS (1997). Este libro contiene la teoría de reordenaciones de series en el cuerpo de los números reales, números complejos, de vectores en $\mathbb{R}^n$, espacios de Hilbert y Banach.

2.2 Bases Teóricas

Las bases teóricas a usar en el trabajo serán las siguientes:

2.2.1 Serie de Vectores y Reordenaciones

Sea *E* un espacio de Banach y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de vectores en *E.*

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ converge, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ converge, para cualquier $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es incondicionalmente convergente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no incondicionalmente, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente.

Cabe mencionar que si $E = \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie en $\mathbb{R}^k$, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no absolutamente. Esto es debido a que convergencia incondicional y absoluta en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes.

Ejemplo 2.2.1.1

Si $E = \mathbb{R}$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es absolutamente convergente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente (Criterio de Leibniz).

Teorema 2.2.1.2:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de números reales que converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Prueba.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\begin{cases} p_n = a_n, & a_n \geq 0 \\ p_n = 0, & a_n < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_n = -a_n, & a_n \leq 0 \\ q_n = 0, & a_n > 0 \end{cases},$$

luego $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$, $p_n + q_n = |a_n|$ y $p_n - q_n = a_n$.
Como $p_n \leq |a_n|$ y $q_n \leq |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ convergen.

Así $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - q_n$ converge.

□

Observación 2.2.1.3
El inverso del Teorema 2.2.1.2 es falso, basta considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Definición 2.2.1.4
Sea $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series en un espacio vectorial tales que $b_n = a_{\varphi(n)}, n = 1, 2, 3, \ldots$ entonces se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo 2.2.1.5 Sea $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Una reordenación de S_1 es $S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$

Teorema 2.2.1.6:
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales absolutamente convergente de suma S, entonces cada reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también absolutamente convergente y de suma S.

Prueba.
Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, por teorema 2.2.1.2 es convergente, luego denotemos a su suma por S.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una reordenación cualquiera de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, luego

$$b_n = a_{\varphi(n)}, n = 1, 2, 3, \dots, \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ una biyección.}$$

Luego:

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| = \left|a_{\varphi(1)}\right| + \left|a_{\varphi(2)}\right| + \cdots + \left|a_{\varphi(n)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ tiene sumas parciales acotada superiormente y creciente, así $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente. Faltaría demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

Para ello consideremos las sumas parciales k_n, S_n, t_n de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente, es decir:

$$k_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $N \epsilon \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N - S| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |a_{N+n}| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad (2.1)$$

pues (S_n) converge a S y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

Luego para cualquier n se tiene

$$|t_n - S| \leq |t_n - S_N| + |S_N - S| < |t_n - S_N| + \frac{\epsilon}{2}. \qquad (2.2)$$

Escojamos un $M \epsilon \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, \dots, N\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(M)\}$, esto es posible pues al ser φ biyectiva entonces en la enumeración de $\varphi(1), \dots, \varphi(M)$ eventualmente aparecerán los primeros índices $1, 2, \dots, N$.

Ahora tomando $n > M$ entonces $\varphi(n) > N$ ya que $n > M > M-1 > \cdots > 1$, así, $\varphi(n) \notin \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(M)\}$ por ser φ inyectiva; por la condición de haber elegido M se tiene que $\varphi(n) \notin \{1, 2, \dots., N\}$ luego $\varphi(n) > N$.

Y también

$$|t_n - S_N| = |b_1 + \cdots b_n - (a_1 + \cdots a_N)|$$
$$= |a_{\varphi(1)} + \cdots a_{\varphi(n)} - (a_1 + \cdots a_N)|$$
$$|t_n - S_N| = |a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{\varphi(n)}|.$$

Por último, para $n > M$ se tiene, por (2.1) que:

$|t_n - S_N| \leq |a_{N+1}| + \cdots + |a_{\varphi(n)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{N+n}| < \frac{\epsilon}{2}$.

Así en (2.2)

$$|t_n - S| < |t_n - S_N| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a S.

□

Observación 2.2.1.7

Del teorema anterior concluimos que, para series absolutamente convergentes, todos los reordenamientos conducen a series que son también convergentes al mismo valor. Tal hecho es muy diferente en series condicionalmente convergentes, veamos el siguiente ejemplo. Sabemos que:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es condicionalmente convergente.

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Luego

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots$$

Sumando

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Esta última serie contiene todos los términos de S en orden diferente, es decir, $\frac{3S}{2}$ es una reordenación de S, sin embargo, convergen a sumas diferentes.

Así concluimos que los reordenamientos en series condicionalmente convergentes introducen cierto grado de anarquía, pues es posible hacerlos converger a cualquier valor predeterminado o divergir tal y como nos lo dice Riemann.

2.2.2 Teorema de Riemann

Teorema de Riemann (1854)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales condicionalmente convergente y sea λ cualquier número real (o bien $\lambda = \pm\infty$, que diverge a $\pm\infty$). Entonces existe un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge a λ.

Prueba.

Caso 1: $\boldsymbol{\lambda} < \infty$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Si $a_n \geq 0$ entonces $p_n = a_n$ y $q_n = 0$, mientras que si $a_n < 0$ entonces $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$, además $p_n - q_n = a_n$. También $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} -q_n$ son divergentes a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

A los términos p_n los llamaremos términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mientras que a los términos $-q_n$ los llamaremos términos negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos como reordenar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para que la serie converja a λ

- **Etapa 1**

  Escoger, tantos términos positivos (digamos k_1 términos) tales que su suma supere por primera vez a λ, esto es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > \lambda,$$

esto es posible ya que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$.

Continuamos sumando ahora los términos negativos (digamos r_1 de ellos) tales que su suma sea por primera vez inferior a λ, esto es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} < \lambda,$$

esto es posible ya que $\sum_{n=1}^{\infty} -q_n = -\infty$.

- **Etapa 2**

A continuación, súmese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que

$$p_1 + p_2 \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} > \lambda.$$

Continúese con tantos términos negativos (digamos r_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que:

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - q_{r_1+2} - \cdots - q_{r_2} < \lambda,$$

y continuando con este proceso de manera indefinida, obtenemos una serie cuyos términos son los mismos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pero en orden diferente, es decir, la serie obtenida es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veamos que sucede con las sumas parciales de esta nueva serie.

Para esto necesitamos ver la etapa m.

Al final de esta etapa se suman términos negativos (r_m de ellos) hasta que por primera vez se tenga:

$$S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_m} < \lambda. \quad (2.3)$$

Pero como:

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_{m-1}} > \lambda,$$

sumando $-q_{r_m}$ se tiene

$$S_m > \lambda - q_{r_m}.$$

Por (2.3) se tiene $0 < \lambda - S_m < q_{r_m}$, cuando $m \to \infty$, $S_m \to \lambda$.

Caso 2: $\lambda = +\infty \vee \lambda = -\infty$

Hagamos la prueba para $\lambda = +\infty$, el otro caso es similar.

- **Etapa 1**

Sumamos los primeros términos positivos (digamos k_1 de ellos) hasta que por primera vez su suma sea mayor o igual a 1, es decir,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} \geq 1,$$

sumando un único término negativo se tiene:

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 \leq 1.$$

- **Etapa 2**

  Súmese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez la suma sea ≥ 2, es decir,

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} \geq 2,$$

  luego súmese un único término negativo, entonces

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 \leq 2.$$

  Continuando indefinidamente obtenemos una nueva serie que tiene los mismos términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pero en orden diferente, es decir, es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y además viendo este procedimiento en la etapa m tenemos que:

$S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_m \leq m\,. \qquad (2.4)$

Pero

$$p_1 + .. + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + .. + p_{k_2} - q_2 + .. + p_{k_{m-1}+1} + .. + p_{k_m} \geq m,$$

sumando $-q_m$ se tiene

$$S_m \geq m - q_m.$$

Por (2.4) $0 \leq m - S_m \leq q_m$, haciendo $m \to \infty$, tenemos que $S_m \to \lambda$.

□

Definición 2.2.2.1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie en un espacio de Banach E; el conjunto $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ es definido por:

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \left\{x \in E /\, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}\ para\ p: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección}\right\}$$

Observación 2.2.2.2 Cuando $E = \mathbb{R}$ y consideramos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente de suma S el teorema 2.2.1.6 nos permite afirmar que $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \{S\}$. También por el teorema de Riemann se tiene que $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \mathbb{R}$ cuando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente.

Ahora vamos analizar cuál es la estructura del conjunto $S(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$, donde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Esto nos lleva a estudiar el teorema de Lévy-Steinitz.

2.2.3 Teorema de Lévy-Steinitz:

Si consideremos $E = \mathbb{R}^2$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n}, 0\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}, 0\right),$$

entonces

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}, 0\right) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

No es todo $\mathbb{R}^2$, pero es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$. Este fenómeno fue observado por Lévy para $\mathbb{R}^2$ en 1905 y por Steinitz para $\mathbb{R}^k$ con $k \in \mathbb{N}$ en 1913. El enunciado del teorema es el siguiente:

"*El conjunto de sumas de todas las reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$, es el vacío o la traslación de un subespacio*".

En nuestra notación si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de vectores convergente en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$S\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = \{\text{traslación de subespacio}\}.$$

A continuación, vamos a ver los detalles de la demostración del teorema de Levy-Steinitz.

Empezamos con el teorema del confinamiento poligonal.

2.2.3.1 El teorema del Confinamiento Poligonal

Para cada "n", existe una constante C_n tal que si $\{v_i; i = 1, \dots, m\}$ es una familia finita de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuya suma es cero y $\|v_i\| \le 1$, $i = 1, \dots, m$, entonces existe una permutación P de $(2, \dots, m)$ tal que

$$\left\|v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{p(i)}\right\| \le C_n \text{ para todo j.} \tag{2.5}$$

Además, podemos tomar $C_1 = 1$ y $C_n \le \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ para todo "n".

Prueba.

Caso $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ (Idea del teorema de Riemann)

Si $v_i > 0$, escogemos $P(2)$ tal que $v_{p(2)} < 0$; y continuamos escogiendo los v negativos hasta que la suma (por primera vez) sea negativa. Es decir,

$$v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} < 0.$$

Escogemos el siguiente v positivo y continuamos escogiendo los v positivos hasta que por primera vez la suma de todos los vectores escogidos sea positiva. Es decir,

$$v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} + \cdots + v_{p(k_2)} > 0,$$

continuamos de esta manera hasta que todos los v sean usados y como $\| v_i \| \leq 1$ para todo i, entonces

$$0 \leq v_1 + v_{p(2)} \leq v_1 \leq 1$$

$$0 \leq v_1 + v_{p(2)} + v_{p(3)} \leq v_1 \leq 1$$

$$\vdots$$

$$v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} \leq 0.$$

Pero

$$v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1 - 1)} \geq 0,$$

Sumando $v_{p(k_1)}$ se tiene

$$v_{p(k_1)} \leq v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1 - 1)} + v_{p(k_1)} \leq 0.$$

Entonces

$$0 \leq |v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)}| \leq |v_{p(k_1)}| \leq 1.$$

De manera similar

$$v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} \leq v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} + v_{p(k_1+1)} \leq 0,$$

luego

$$|v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)} + v_{p(k_1+1)}| \leq |v_1 + v_{p(2)} + \cdots + v_{p(k_1)}| \leq 1.$$

Continuando con este proceso, concluimos que cada suma parcial está entre 0 y 1, por tanto $C_1 = 1$

Caso general

Haremos la prueba por inducción.

Asumamos que $n > 1$ y que $C_{n-1} < \infty$, además consideremos $\{v_i\}$ una colección de vectores satisfaciendo la hipótesis.

Como $\{v_i\}$ es finito, hay un número finito de posibles sumas parciales de los v que empiezan con v_1; sea L una suma parcial con norma máxima entre todas esas sumas parciales.

Entonces

$$L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s \text{ donde } \{u_1, \dots, u_s\} \subset \{v_i\}.$$

Sea $\{w_1, \dots, w_t\}$ los otros v tal que

$$L + w_1 + \cdots + w_t = 0.$$

Afirmación 1 $\langle u_i, L\rangle \geq 0$ para todo i.

Supongamos que $\langle u_i, L\rangle < 0$ para algún i, luego: $-\frac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|} > 0$.

Entonces

$$\| L \| - \frac{\langle u_i, L\rangle}{\| L \|} > \| L \|,$$

así: $\| L - u_i \| \geq \langle L - u_i, \frac{L}{\|L\|}\rangle > \| L \|$.

Lo cual contradice la maximalidad de $\| L \|$

Afirmación 2 $\langle v_1, L\rangle \geq 0$

Supongamos que $\langle v_1, L\rangle < 0$,

entonces

$$\| v_1 - L \| \geq \langle v_1 - L, -\frac{\boldsymbol{L}}{\|L\|}\rangle = \| L \| - \frac{\boldsymbol{1}}{\|L\|}\langle v_1, L\rangle > \| L \|.$$

Así $\| v_1 - L \| > \| L \|$

Como:

$$-L = w_1 + \cdots + w_t,$$

entonces

$$\| v_1 + w_1 + \cdots + w_t \| > \| L \|,$$

lo cual contradice la maximalidad de L.

Afirmación 3 $\langle w_i, L\rangle \leq 0$ para todo i

Supongamos que $\langle w_i, L\rangle > 0$ para algún i.

Entonces

$$\| L + w_i \| \geq \langle L + w_i, \frac{\boldsymbol{L}}{\|L\|}\rangle = \| L \| + \frac{\langle w_i, L\rangle}{\|L\|} > \| L \|,$$

luego

$$\| L + w_i \| > \| L \|.$$

Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ entonces

$$\| v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i \| > \| L \|.$$

Así $v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i$ sería una suma parcial de norma mayor que la de L.

Usaremos la hipótesis inductiva en el espacio $(n-1)$ −dimensional

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n / \langle v, L\rangle = 0\}.$$

Sea

$$v' = v - \frac{\langle v, L\rangle L}{\| L \|^2},$$

como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ y

$$v'_1 = v_1 - \frac{\langle v_1, L\rangle L}{\| L \|^2} \in L^{\perp},$$

$$u'_i = u_i - \frac{\langle u_i, L\rangle L}{\| L \|^2} \in L^{\perp} \text{ para i} = 1, 2, \dots, s.$$

Entonces

$$v'_1 + u'_1 + \cdots + u'_s = v_1 + u_1 + \cdots + u_s - \frac{\langle v_1 + u_1 + \cdots + u_s, L\rangle L}{\| L \|^2},$$

como $v_1 + u_1 + \cdots + u_s = L$ se tiene

$$v'_1 + u'_1 + \cdots + u'_s = L - \frac{\langle L, L\rangle L}{\| L \|^2} = 0.$$

De manera similar se prueba que $w'_1 + \cdots + w'_t = 0$,

luego por la hipótesis inductiva, existe una permutación Q de $(1, 2, \dots, s)$ tal que

$$\left\| v'_1 + \sum_{i=1}^{j} u'_{Q(i)} \right\| \leq C_{n-1} \text{ para todo j} = 1, 2, \dots, s, \tag{2.6}$$

y también existe una permutación R de $(2, \dots, t)$ tal que

$$\left\| w'_1 + \sum_{i=2}^{j} w'_{R(i)} \right\| \leq C_{n-1} \text{ para todo j} = 2, \dots, t. \tag{2.7}$$

Pongamos $R(1) = 1$ como $\langle v_1, L\rangle \geq 0$ y $\langle w_i, L\rangle \leq 0$, escogemos el más pequeño r, por ejemplo r_1, tal que

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \langle w_{R(i)}, L\rangle \leq 0, \tag{2.8}$$

esto es posible ya que definiendo

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} / \, \langle v_1, L \rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \langle w_{R(i)}, L \rangle \ \leq 0 \right\} \subset \mathbb{N}.$$

Se tiene que $A \neq \emptyset$ porque $t \in A$, luego A posee mínimo, a este mínimo llamémoslo r_1.

Similarmente podemos escoger el más pequeño s_1 que cumpla

$$\langle v_1, L \rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \langle w_{R(i)}, L \rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \langle < u_{Q(i)}, L \rangle \ \geq 0, \tag{2.9}$$

luego el más pequeño r_2 tal que

$\langle v_1, L \rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \langle < w_{R(i)}, L \rangle \ + \sum_{i=1}^{s_1} \langle < u_{Q(i)}, L \rangle + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \langle < w_{R(i)}, L \rangle \ \leq 0$ y así sucesivamente.

Ponemos los vectores en el siguiente orden

$$\left(v_1, w_{R(1)}, w_{R(2)}, \dots, w_{R(r_1)}, u_{Q(1)}, \dots, u_{Q(s_1)}, w_{R(r_1+1)}, \dots, w_{R(r_2)}, \dots \right),$$

es decir, ubicamos los vectores $\{v_i\}$ según la permutación P como sigue

$$v_{P(i)} = \begin{cases} v_1, i = 1 \\ w_{R(i)}, i = 2, \dots, r_1 \\ u_{Q(i-r_1)}, i = r_1 + 1, \dots, r_1 + s_1 \\ w_{R(i-s_1)}, i = r_1 + s_1, \dots, s_1 + r_2 \\ \qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad . \end{cases}$$

Luego sea $j = 2, \dots, m$ y llamemos $a = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}$, la idea es acotar $\|Proy_L a\|$ y $\|Comp_L a\| = \|a'\|$ para luego usar el teorema de Pitágoras y obtener una cota para "a".

Afirmación 4 $\|a'\| \leq 2C_{n-1}$.

En efecto,

como

$$a' = a - \frac{\langle a, L\rangle L}{\|L\|^2} = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} - \frac{\langle v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L\rangle L}{\|L\|^2}$$

$$a' = v'_1 + \sum_{i=2}^{j} v'_{P(i)},$$

entonces

$$\|a'\| = \left\| v'_1 + \sum_{i=2}^{j} v'_{P(i)} \right\|.$$

Por (2.6) y (2.7) tenemos

$$\| a' \| \leq C_{n-1} + C_{n-1} = 2C_{n-1}. \tag{2.10}$$

Afirmación 5 $\|Proy_L a\| \leq 1$

Por (2.8) y la afirmación 3 tenemos,

$$0 \leq \frac{\langle v_1 + w_{R(1)}, L\rangle L}{\| L \|} \leq \frac{\langle v_1, L\rangle}{\| L \|} \leq \| v_1 \| \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\langle v_1 + w_{R(1)} + w_{R(2)}, L\rangle}{\| L \|} \leq \frac{\langle v_1, L\rangle}{\| L \|} \leq \| v_1 \| \leq 1$$

.
.
.

$$\frac{\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1 - 1)}, L\rangle}{\| L \|} \geq 0,$$

sumando $\frac{\langle w_{R(r_1)}, L\rangle}{\|L\|}$

$$0 \geq \frac{\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1)}, L\rangle}{\| L \|} \geq \frac{\langle w_{R(r_1)}, L\rangle}{\| L \|},$$

entonces

$$\left|\frac{\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1)}, L\rangle}{\|L\|}\right| \leq \left|\frac{\langle w_{R(r_1)}, L\rangle}{\|L\|}\right| \leq \| w_{R(r_1)} \| \leq 1. \tag{2.11}$$

De manera similar por (2.9) y la afirmación 1 tenemos

$$\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}\,,L\rangle+\langle u_{Q(1)},L\rangle\leq 0$$

$$\frac{\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle}{\|L\|}\leq\frac{\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle+\langle u_{Q(1)},L\rangle}{\|L\|}\leq 0.$$

Luego por (2.11) se tiene

$$\frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle+\langle u_{Q(1)},L\rangle\right|}{\|L\|}\leq\frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle\right|}{\|L\|}\leq 1,$$

también

$$\frac{\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle}{\|L\|}\leq\frac{\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle+\langle u_{Q(1)}+u_{Q(2)},L\rangle}{\|L\|}\leq 0.$$

Por (2.11) se tiene

$$\frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle+\langle u_{Q(1)}+u_{Q(2)},L\rangle\right|}{\|L\|}\leq\frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle\right|}{\|L\|}\leq 1,$$

y por (2.9)

$$\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}\,,L\rangle+\langle\sum_{i=1}^{s_1-1} u_{Q(1)}\,,L\rangle\leq 0,$$

sumando $\langle u_{Q(s_1)},L\rangle$ tenemos

$$0\leq\frac{\langle v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\rangle+\langle\sum_{i=1}^{s_1} u_{Q(i)},L\rangle}{\|L\|}\leq\frac{\langle u_{Q(s_1)},L\rangle}{\|L\|}\leq\parallel u_{Q(s_1)}\parallel\leq 1.$$

De manera análoga se puede hacer para los demás $v_{P(i)}$ que sobran.

Ahora como

$$Proy_L a=\frac{\langle a,L\rangle L}{\parallel L\parallel^2}=\frac{\langle v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\,,L\rangle L}{\parallel L\parallel^2}$$

$$\|Proy_L a\|=\frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\,,L\rangle\right|}{\parallel L\parallel},$$

y por todo lo visto anteriormente llegamos a que

$\|Proy_L a\| = \frac{\left|\langle v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L\rangle\right|}{\|L\|}$ para todo j.

Por lo tanto, por las afirmaciones 4 y 5 concluimos que

$$\|a\|^2 = \|Comp_L a\|^2 + \|Proy_L a\|^2 \leq 4C_{n-1}^2 + 1,$$

luego

$$\left\|v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\right\| \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}.$$

$\square$

A continuación, vamos a ver los detalles de la prueba del "el teorema del reordenamiento", ingrediente importante para la prueba del teorema de Lévy-Steinitz.

Antes veamos la siguiente consecuencia del teorema del confinamiento poligonal:

Lema 2.2.3.2. Si $\{v_i : i = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\|\sum_{i=1}^{m} v_i\| \leq \epsilon$, $\|v_i\| \leq \epsilon$ para todo i, entonces existe una permutación P de $(1, \dots, m)$ tal que

$$\left\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + \dots + v_{P(r)}\right\| \leq \epsilon(C_n + 1) \text{ para } 1 \leq r \leq m$$

Prueba.

Definimos $v_{m+1} = -v_1 - v_2 - \dots - v_m$ entonces

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{v_i}{\epsilon} = 0,$$

y

$$\left\|\frac{v_i}{\epsilon}\right\| \leq 1, \text{ para todo } i.$$

Luego por el teorema de confinamiento poligonal, existe una permutación P de $(2, \dots, m+1)$ tal que

$$\left\| \frac{v_1}{\epsilon} + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\epsilon} v_{P(i)} \right\| \leq C_n \text{ para } 2 \leq r \leq m.$$

De aquí:

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} \right\| \leq \epsilon C_n,$$

sea $P(1) = 1$ tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r-1} v_{P(i)} \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)} \right\| + \left\| v_{P(r)} \right\| \leq \epsilon C_n + \epsilon,$$

luego

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)} \right\| \leq \epsilon(C_n + 1) \text{ para } 1 \leq r \leq m.$$

$\square$

2.2.3.3 El teorema del Reordenamiento

En $\mathbb{R}^n$, si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de una serie de vectores converge a S, y si la sucesión de términos de la serie converge a “0”, entonces existe un reordenamiento de la serie cuya suma es S.

Prueba

Sea $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$. Para cada m se tiene

$S_m = \sum_{i=1}^{m} v_i$. Asumimos que $S_{m_k} \to S$ para alguna subsucesión S_{m_k}, y debemos mostrar como reordenar los $\{v_i\}$ tal que toda la sucesión de sumas parciales converja a S.

Veamos:

Sea $\delta_k = \left\|S_{m_k} - S\right\|$ entonces $\delta_k \to 0$,

como

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - \sum_{i=1}^{m_k} v_i - v_{m_{k+1}}\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{m_k} v_i - S\right\| + \left\|v_{m_{k+1}}\right\|,$$

entonces de la definición de δ_k se tiene

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| \leq \delta_{k+1} + \delta_k + \left\|v_{m_{k+1}}\right\|.$$

Ahora para cada k definimos

$$\epsilon_k = \text{máx}\left\{\delta_{k+1} + \delta_k, sup\{\|v_i\| : i \geq m_k\}\right\},$$

entonces $\epsilon_k \to 0$ y $\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| < 2\epsilon_k$.

También $\|v_i\| \leq \epsilon_k \leq 2\epsilon_k$ para $i \geq m_k$,

luego por el lema 2.2.3.2, para cada k existe una permutación P_k de

$m_k + 1, \dots, m_{k+1} - 1$ tal que

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{r} v_{P_k(i)}\right\| \leq 2\epsilon_k(C_n + 1) \text{ para } r = m_k + 1, \dots, m_{k+1} - 1,$$

ahora ordenemos los $\{v_i\}$ como sigue

$$\big(\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_{m_k},}_{\substack{\text{los mantenemos}\\ \text{en su posición}}}\ \underbrace{v_{m_k+1}, v_{m_k+2, \dots, } v_{m_{k+1}-1}\big)}_{\substack{\text{y ordenamos estos términos}\\ \text{de acuerdo a } \mathrm{p_k}}}.$$

En este arreglo si $m_k + 1 \leq m \leq m_{k+1} - 1$, entonces

$$S_m = \sum_{i=1}^{m_k} v_i + \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$$

y $S_m - S_{m_k} = \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$,

luego haciendo $k \to \infty$ y sabiendo que $S_{m_k} \to S$

$$\|S_m - S_{m_k}\| = \left\| \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)} \right\| \leq 2\epsilon_k(C_n + 1) \to 0.$$

Por lo tanto

$$S_m \to S$$

□

Antes de enunciar y demostrar el teorema Lévy-Steinitz necesitamos otra consecuencia del teorema de Confinamiento Poligonal

Lema 2.2.3.4 Si $\{v_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$, $0 < t < 1$ y $\|v_i\| \leq \epsilon$ para todo i, entonces existe una permutación P de $(2, \dots, m)$ y un r entre 2 y m tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw \right\| \leq \epsilon \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

Prueba.

Asumamos que $w \neq 0$ ya que si $w = 0$,

entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{v_i}{\epsilon} = 0 \ y \ \left\| \frac{v_i}{\epsilon} \right\| \leq 1.$$

Luego por el teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2, \dots, m)$ tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} \right\| \leq \epsilon \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}\,, 2 \leq r \leq m,$$

así se tendría lo pedido.

Veamos el caso para $n = 1$

Multiplicando por -1 si es necesario, asumamos que $w > 0$.

Sea S el más pequeño i tal que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_s > tw, \tag{2.12}$$

entonces

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} \leq tw.$$

Luego por 2.12 y sabiendo que $|v_S| \leq \epsilon$ se tiene

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} + v_S - tw| \leq |v_S| \leq \epsilon.$$

Así para el caso $n = 1$ se tiene el Lema con $C_{n-1} = C_0 = 0$.

Notar también que en este caso ningún reordenamiento es necesario para obtener una apropiada suma parcial.

Ahora veamos el caso general para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Como $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$, sea $v'_i = v_i - \frac{\langle v_i, w\rangle w}{\|w\|^2}$,

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} v'_i = \sum_{i=1}^{m} v_i - \frac{\langle \sum_{i=1}^{m} v_i\,, w\rangle w}{\|w\|^2} = 0,$$

y como $\|v_i\| \leq \epsilon$ se tiene $\|v'_i\| \leq \epsilon$ y por tanto $\left\|\frac{v'_i}{\epsilon}\right\| \leq 1$.

Luego por el teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2, \dots, m)$ tal que

$$\left\| \frac{v'_i}{\epsilon} \right\| \leq C_{n-1} \text{ para todo } j = 2, \dots, m, \tag{2.13}$$

también tenemos que

- $\langle v_1, \frac{w}{\|w\|} \rangle + \langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|} \rangle + \cdots + \langle v_{P(m)}, \frac{w}{\|w\|} \rangle = \|w\|$.
- $\left| \frac{\langle v_i, w \rangle}{\|w\|} \right| \leq \frac{\|v_i\| \|w\|}{\|w\|} \leq \epsilon$ para todo i.

Y similarmente al caso $n = 1$ escogemos un r tal que

$$\left| \langle v_1, \frac{w}{\|w\|} \rangle + \langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|} \rangle + \cdots + \langle v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|} \rangle - t\|w\| \right| \leq \epsilon, \tag{2.14}$$

observar que en este caso a comparación del caso $n = 1$ los $\langle v_i, \frac{w}{\|w\|} \rangle$ hacen el papel de los v_i.

Ahora definamos

$$a = v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw.$$

Veamos que sucede con $\|a'\|$ y $\|Proy_w a\|$

- $a' = a - \frac{\langle a, w \rangle w}{\|w\|^2} = v'_1 + v'_{P(2)} + \cdots + v'_{P(r)}$.

Por (2.13) se tiene

$$\|a'\| = \left\| v'_1 + v'_{P(2)} + \cdots + v'_{P(r)} \right\| \leq \epsilon C_{n-1}. \tag{2.15}$$

- $Proy_w a = \frac{\langle a, w \rangle w}{\|w\|^2}$ y $\|Proy_w a\| = \frac{|\langle a, w \rangle|}{\|w\|}$.

Primero observemos (2.14)

$$\left| \langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|} \rangle - t\|w\| \right| \leq \epsilon.$$

Como

$$\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|}\rangle - t\|w\|$$

$$= \langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw + tw, \frac{w}{\|w\|}\rangle - t\|w\|$$

$$= \langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \frac{w}{\|w\|}\rangle,$$

entonces

$$\left|\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \tfrac{w}{\|w\|}\rangle\right| \leq \epsilon.$$

Según como hemos definido “a” concluimos que

$$\left|\langle a, \frac{w}{\|w\|}\rangle\right| \leq \epsilon,$$

así

$$\|Proy_w a\| \leq \epsilon. \tag{2.16}$$

Por lo tanto, de (2.15) y (2.16) tenemos que

$$\|a\| = \left\|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw\right\| \leq \sqrt{\epsilon^2 C_{n-1}^2 + \epsilon^2} \leq \epsilon\sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

□

Ahora podemos finalmente probar el resultado principal

2.2.3.5 Teorema de Lévy-Steinitz

El conjunto de sumas de todas las posibles reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es o bien el vacío o la traslación de un subespacio.

Prueba.

Sea $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ y

$$S\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i\right) = \left\{X \in \mathbb{R}^n / \, x = \sum_{i=1}^{\infty} v_{p(i)} \text{ para } P: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección}\right\}$$

Supongamos que $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i) \neq \emptyset$.

Remplazando v_1 por $v_1 - v$, donde v es cualquier elemento de $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ podemos asumir que $0 \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$. Así solo debemos probar que $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Sea $S_1, S_2 \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ y $\{\epsilon_m\}$ una sucesión de números positivos que converge a 0.

Como un reordenamiento converge a S_1, luego existe un conjunto finito I_1 de enteros positivos tal que $1 \in I_1$ y $\| \sum_{i\in I_1}^{\infty} v_i - S_1 \| < \epsilon_1$.

Como un reordenamiento converge a 0, existe un conjunto finito J_1 de enteros positivos tal que $J_1 \supset I_1$ y

$$\left\|\sum_{i\in J_1}^{\infty} v_i - 0\right\| < \epsilon_1,$$

(elegir este J_1 lo suficientemente grande hasta que contenga a I_1).

Además, existe un conjunto $k_1 \supset J_1$ tal que

$$\left\|\sum_{i\in K_1}^{\infty} v_i - S_2\right\| < \epsilon_1,$$

de igual manera existe un conjunto $I_2 \supset K_1$ y $I_2 \supset \{2\}$ tal que

$$\left\|\sum_{i\in I_2}^{\infty} v_i - S_1\right\| < \epsilon_2,$$

(elegir este I_2 lo suficientemente grande hasta que contenga a K_1 y $\{2\}$ si es que no lo tuviera).

Luego, procediendo de la misma manera, construimos inductivamente conjuntos I_m, J_m y K_m de enteros positivos tal que

$$\{1, \dots, m-1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m$$

y

$$\left\| \sum_{i \in I_m}^{\infty} v_i - S_1 \right\| < \epsilon_m, \left\| \sum_{i \in J_m}^{\infty} v_i - 0 \right\| < \epsilon_m \; y \; \left\| \sum_{i \in K_m}^{\infty} v_i - S_2 \right\| < \epsilon_m.$$

Para cada m ordenamos los índices en J_m de modo que los que estén en I_m se ubiquen al comienzo, también ordenamos los índices en K_m de tal manera que los que estén en J_m se ubiquen al comienzo. Luego ordenamos los índices de I_{m+1} de tal modo que los que estén en K_m se ubiquen al comienzo. Luego ordenamos los índices de I_{m+1} de tal modo que los que estén en K_m se ubiquen al comienzo. Así existe una permutación P y sus sucesiones crecientes

$\{i_m\}, \{j_m\}, \{k_m\}$ tal que $i_m < j_m < k_m < i_{m+1}$ y

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1 \right\| < \epsilon_m \qquad (2.17)$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} \right\| < \epsilon_m \qquad (2.18)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{k_m} v_{P(k)} - S_2 \right\| < \epsilon_m \text{ para cada } m. \qquad (2.19)$$

Notar que dé (2.18) y (2.19) llegamos a que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} - S_2 \right\| < \epsilon_m + \epsilon_m$$

$$= 2\epsilon_m. \qquad (2.20)$$

Y de (2.17) y (2.20) tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2)\right\| < 3\epsilon_m, \qquad (2.21)$$

luego para cada m, reordenamos los vectores

$\{v_{P(i)}, i = i_m + 1, \dots, k_m\}$ intercambiando los vectores,

$\{v_{P(i)}, i = i_m + 1, \dots, j_m\}$ con los vectores $\{v_{P(i)}, i = i_m + 1, \dots, k_m\}$,

haciendo la reordenación escrita (2.21) quedaría como

$$\left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2)\right\| < 3\epsilon_m.$$

Esto muestra que existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{m} v_{P(i)}$ que converge a $S_1 + S_2$. Además, como $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i) \neq \emptyset, v_{(P(i))} \to 0$ el teorema del reordenamiento nos permite afirmar que $S_1 + S_2 \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$.

Faltaría demostrar que si $S \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ entonces $St \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i), \forall t \in \mathbb{R}$.

Pero por la aditividad de $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ ya demostrada tendríamos que para $t \in \mathbb{Z}^+$ y $S \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$ se tiene que $St \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$.

Así es suficiente probar para los casos en que $t \in (0,1)$ y $t = -1$.

Caso $t \in (0,1)$

Empecemos con el arreglo P usado para probar la aditividad de $S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$.

Fijemos $t \in (0,1)$ y sea $\delta_m = sup\{\|v_{P(i)}\| : i = i_m + 1, \dots, k_m\}$.

Sea también

$$u_m = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \text{ y } w_m = u_m + S_2,$$

entonces por (2.20)

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \right\| < 2\epsilon_m. \qquad (2.22)$$

Así por el lema 2.2.3.4 existe una permutación Q_m de

$\{P(j_m + 1), \ldots, P(k_m)\}$ y un r_m entre $j_m + 1$ y k_m tal que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - t(S_2 + u_m) \right\| < M\delta_m,$$

donde $M = \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$.

Entonces de (2.22) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| \leq M\delta_m + 2\epsilon_m,$$

y por (2.18) se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| < \epsilon_m + M\delta_m + 2\epsilon_m = 3\epsilon_m + M\delta_m.$$

Por lo tanto, existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a tS_2. Por el teorema del reordenamiento concluimos que $tS_2 \in S(\sum_{i=1}^{\infty} v_i)$.

Caso $t = -1$

Como de (2.18) y (2.19) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m+1} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (0 - S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m,$$

entonces

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_m+1} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m,$$

luego de esta última desigualdad y de (2.18) se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_m+1} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m.$$

Luego para cada m, reordenamos los vectores

$\{v_{P(i)}, i = j_m + 1, \dots, j_{m+1}\}$, intercambiando los vectores

$\{v_{P(i)}, i = j_m + 1, \dots, k_m\}$ con los vectores $\{v_{P(i)}, i = k_m + 1, \dots, j_{m+1}\}$.

Con esta reordenación obtenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m.$$

Finalmente, el teorema del reordenamiento implica que

$$-S_2 \in S\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i \right).$$

$\square$

Observación 2.2.3.6. La demostración del teorema de Levy-Steinitz hecha líneas arriba está basada en el artículo de P. Rosenthal (1987) y no en la prueba original de Steinitz. Por otra parte, como cualesquiera dos espacios de dimensión finita y de igual dimensión son isomorfos, el teorema de Lévy-Steinitz se cumple en cualquier espacio finito dimensional.

Observación 2.2.3.7. En el teorema del confinamiento poligonal el menor valor de C_n que satisface (2.5) es llamada la constante de Steinitz de $\mathbb{R}^n$.

Trabajando en el teorema del confinamiento poligonal con un espacio vectorial con producto interno E de dimensión finita y denotando a su constante de Steinitz por $S(E)$ se tiene los siguientes resultados:

- E. Steinitz, probó que $S(E) \leq 2\dim(E)$.
- V. Grinberg & S. Sevastyanov, mostro que $S(E) \leq \dim(E)$.
- W. Banaszczyk, mostro que si $\dim(E) = 2 \Longrightarrow S(E) \leq \frac{3}{2}$.
- Si E es un espacio euclidiano de dimensión n,

V. Grinberg & S. Sevastyanov mostraron que $S(E) \geq \frac{(n+3)^{1/2}}{2}$ y

W. Banaszczyk por su parte probo que si $n = 2 \Longrightarrow S(E) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

A continuación, presentamos un ejemplo donde mostramos que el teorema de Levy-Steinitz es falso para espacios de Banach de dimensión infinita.

Ejemplo 2.2.3.8 Considere la serie con los siguientes términos

$$x_{i,k} = X_{[k.2^{-i},(k+1).2^{-i}]};\ y_{i,k} = -x_{i,k}\ ,0 \leq i \leq \infty,\ 0 \leq k \leq 2^i$$

Donde $X_{[a,b]}$ es la una función que toma valor 1 en el segmento $[a,b]$ y el valor 0 en su complemento (función característica del segmento $[a,b]$.

Observamos que estos elementos pertenecen al espacio $L_2[0,1]$. Ahora si escribimos esta suma en el siguiente orden

$$x_{0,0} + y_{0,0} + x_{1,0} + y_{1,0} + x_{1,1} + y_{1,1} + x_{2,0} + \cdots,$$

entonces la serie converge a cero. Por otro lado, si ahora cambiamos el orden a

$$x_{0,0} + x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0} + x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0} + x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1} \ldots,$$

entonces la serie converge a 1 en $[0,1]$. Sin embargo, ningún reordenamiento hará que la serie converja a $\frac{1}{2}$ en $[0,1]$ porque cualquiera de las sumas parciales de la serie es un valor entero.

2.2.4 Series Universales

A continuación, damos la definición de serie universal y presentaremos nuestro resultado principal, el cual, garantiza la existencia de series universales en espacios de Banach separables.

Definición 2.2.4.1. Series Universales

Una serie de vectores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en un espacio de Banach X, se dice universal sí $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = X$.

La existencia de las series universales en espacios de Banach reales de dimensión finita es una consecuencia directa del teorema de Riemann para series condicionalmente convergentes. En efecto, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ una serie condicionalmente convergente de números reales. Mostraremos que la serie:

$$a_1x_1 + \ldots + a_1x_n + a_2x_1 + \ldots + a_2x_n + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} a_jx_1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_jx_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{\infty} a_jx_n$$

es universal.

En efecto, sea $x \epsilon \mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, además como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ es condicionalmente convergente, existe para $i = 1,2, \dots, n$ una biyección φ_i tal que $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\varphi_i(j)} = c_i$. Luego la serie:

$$a_{\varphi_1(1)}x_1 + \ldots + a_{\varphi_n(1)}x_n + a_{\varphi_1(2)}x_1 + \ldots + a_{\varphi_n(2)}x_n + \ldots$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_{\varphi_1(j)}x_1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{\varphi_2(j)}x_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{\infty} a_{\varphi_n(j)}x_n$$

converge componente a componente hacia x y por tanto converge a x. Claramente, esta serie es un reordenamiento de la primera.

Ahora presentaremos dos lemas referentes a series universales:

Lema 2.2.4.2: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie universal de elementos de X y sea $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ una serie finita (es decir, existe un N tal que $y_n = 0$ para $n > N$), entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ es una serie universal.

Prueba.

Sea $x \in X$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie universal, existe una biyección de números naturales φ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = x - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie finita, para la biyección φ, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(x_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi(n)} \\ &= (x - \sum_{n=1}^{\infty} y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \\ &= x.\end{aligned}$$

Así, $S(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)) = X$.

□

En particular, el hecho de quitar o agregar un número finito de términos a una serie universal no cambiará su carácter de universalidad.

Lema 2.2.4.3: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series y denotemos por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ la serie $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots$
entonces

$$S(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) + S(\sum_{n=1}^{\infty} y_n) \subset S(\sum_{n=1}^{\infty} z_n)$$

Prueba.

Sean $x \in S(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)$, $y \in S(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, entonces existen dos biyecciones de números naturales φ y φ' tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = x, \sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi'(n)} = y.$$

Obtenemos por tanto que el reordenamiento $x_{\varphi(1)} + y_{\varphi'(1)} + x_{\varphi(2)} + y_{\varphi'(2)} \dots$. converge a $x + y$.

$\square$

M. Kadets y V. Kadets, en su libro "Series en espacios de Banach" enuncian el siguiente lema:

Lema 2.2.4.4: Sea $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial normado de dimensión m. Entonces existe una biyección

$$\varphi: \{1,2 \dots, n\} \to \{1,2 \dots, n\}$$

tal que para todo $1 \leq k \leq n$ tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\varphi(i)} - \frac{k-m}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leq m \max_i \|x_i\|.$$

En particular, este lema y la desigualdad

$$|(\|x\| - \|y\|)| \leq \|x - y\|,$$

implica que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{\varphi(i)} \right\| \leq m \max_i \|x_i\| + (m+1) \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|.$$

La demostración del lema 2.2.4.2 puede ser estudiada por el lector en el libro "Series en espacios de Banach" de los autores en mención.

A continuación, enunciaremos y demostraremos la siguiente proposición:

Proposición 2.2.4.5. Sea X un espacio de Banach.$U_X \neq \emptyset$ si y solo si X es separable.

Prueba.

Mostraremos primero que la condición de separabilidad es necesaria. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie universal de elementos de X y sea $x = x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k}$ con $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, entonces hay un conjunto finito $I = \{n_i\}_{i=1}^{k}$ de índices tal que $x = \sum_{i\in I}^{\infty} x_i$.

También, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} x_{\varphi}(n)$ implica que existe una sucesión de conjuntos $I_k = \{\varphi(n)\}_{n=1}^{k}$ finita tal que $x \in \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\iota\in I_k}^{\infty} x_{\iota}}$.

Luego:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{i\in I}^{\infty} x_i$$

representa el resultado de todas las sumas $\sum_{i\in I}^{\infty} x_i$ con I finito, así tenemos las siguientes inclusiones:

$$X \subseteq DS\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} x_n\right) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{\iota\in I}^{\infty} x_{\iota}} \subseteq X,$$

sin embargo, la totalidad $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{I\in\mathbb{N}\\|I|=n}} \sum_{i\in I}^{\infty} x_i$ es contable porque es la unión contable de conjuntos contables. Entonces obtenemos que X es separable.

Ahora mostraremos que la condición es suficiente. Sea X un espacio de Banach separable en $\mathbb{R}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ denso en X. Cualquier serie $\sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} a_j$ condicionalmente convergente con $|a_j| \leq 1$ y

$$A(n,j) = \frac{a_j x_n}{2^n \|x_n\|}, \mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\} \times \mathbb{N},$$

así tenemos que $\|A(n,j)\| \leq \frac{1}{2^n}$.

Demostraremos ahora que $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\mathrm{x}\mathbb{N}} A(n,j)$ es universal. Tener en cuenta que el orden de la suma no importa siempre que sea fijo, un reordenamiento de una serie universal sigue siendo una serie universal. Sea $x \in X$; encontraremos una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ que converja a x y que sea un reordenamiento de nuestra serie inicial. Como $\{x_n\}$ es denso en X, existe una sucesión $\{n_k\}$ tal que $x_{n_k} \to x$. Sea V_k el espacio vectorial en $\mathbb{R}$ generado por el conjunto $\{x_i\}_{i=1}^{i=k}$. Puesto que $x_n \in V_k$ para $k > n$, existe una sucesión $\{y_k\}$ tal que $y_k \in V_k$, $y_k \to x$. Primero, supondremos por simplificar la prueba, de que para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\|y_k - y_{k-1}\| < \frac{1}{2^k}, \tag{2.23}$$

Tenga en cuenta que aquí la dimensión real del espacio vectorial V_k es k. Además, es fácil de verificar que la siguiente serie es universal en

V_1:

$$a_1 \frac{x_1}{2^1\|x_1\|} + a_2 \frac{x_1}{2^1\|x_1\|} + \cdots.$$

La serie $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}_1} A(n,j)$ siendo un reordenamiento de la última serie, también es universal. Ya que $y_1 \in V_1$, existe una biyección $\varphi_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} A(\varphi_1(j)) = y_1$. Vamos a escoger N_1 tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N_1} A(\varphi_1(j) - y_1)\right\| < \frac{1}{2},$$

donde

$$\|A(n,j)\| > \frac{1}{4} \text{ implica que } (n,j) \in \{\varphi_1(j)\}_{j=1}^{N_1}.$$

Puesto que la dimensión de V_1 es 1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para $1 \leq n \leq N_1$:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} A\big(\varphi_1(j)\big)\right\| \leq \max_{j\leq\mathbb{N}_1}\left\|A\big(\varphi_1(j)\big)\right\| + 2\left\|\sum_{j=1}^{\mathbb{N}_1} A\big(\varphi_1(j)\big)\right\|. \tag{2.24}$$

De lo contrario, el Lema 2.2.4.2 nos dice que esto es cierto para una biyección de $\{\varphi_1(j)\}_{j=1}^{N^1}$. Vamos a denotar $z_j = A(\varphi_1(j))$ para $1 \leq n \leq N_1$, $I_1 = \{\varphi_1(j)\}_{j=1}^{N^1}$. I_1 es el conjunto de todos los índices de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para los cuales el elemento correspondiente $A(n;\ j)$ se coloca en nuestra serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Puesto que $\|A(n,j)\| \leq \frac{1}{2}$, (2.24) se convierte en:

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} z_j\right\| \leq \frac{1}{2} + 2\left\|\sum_{j=1}^{N_1} z_j\right\|.$$

La serie $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}_2\setminus I_1} A(n,j)$ se puede obtener de la serie universal en V_2

$$a_1\frac{x_1}{2^1\|x_1\|} + a_1\frac{x_1}{2^2\|x_2\|} + a_2\frac{x_1}{2^1\|x_1\|} + \cdots,$$

modificando un número finito de términos y aplicándoles una biyección. Esta serie también es universal en V_2. También desde que

$(y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j) \in V_2$ hay una biyección $\varphi_2\colon \mathbb{N} \to N_2 \setminus I_1$ talque $\sum_{j=1}^{\infty} A(\varphi_1(j)) = (y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j)$. Por lo tanto, podemos encontrar un índice m_2 para el que se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\left\|\sum_{j=1}^{m_2} A(\varphi_1(j)) - (y_2 - \sum_{j=1}^{N_1} z_j)\right\| < \frac{1}{4}$
2. $\|A(n,j)\| \geq \frac{1}{2^2}$ implica que $(n,j) \in I_1 \cup \{\varphi_2(j)\}_{j=1}^{m^2}$.

Además, por el Lema 2.2.4.2 podemos suponer que para $1 \leq n \leq m_2$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} A(\varphi_1(j))\right\| \leq 2\max_{j\leq m_2}\|A(\varphi_2(j))\| + 3\left\|\sum_{j=1}^{m_2} A(\varphi_2(j))\right\|, \qquad (2.25)$$

Mostraremos que $z_{j+N_1} = A(\varphi_2(j))$ para $1 \leq j \leq m_2$, $I_2 = \{\varphi_2(j)\}_{j=1}^{m^2}$. Puesto que para todo $j \in \mathbb{N}$, $A(2,j) \leq \frac{1}{4}$ siempre que $\|A(1,j)\| > \frac{1}{4}$ para un índice $j \in \mathbb{N}$, $(1,j) \in I_1$. Así tenemos:

$$\max_{j\leq m_2}\|A(\varphi_2(j))\| \leq \frac{1}{4}.$$

Al establecer $N_2 = N_1 + m_2$, la condición (1) se convierte en:

$$\left\| \sum_{j=1}^{N_2} z_j - y_2 \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{N_1+m_2} z_j - y_2 \right\| < \frac{1}{4},$$

(2.25) implica que para todo $1 \le n \le N_2 - N_1$

$$\left\| \sum_{j=N_1+1}^{N_1+n} z_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} z_j + N_1 \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} A\big(\varphi_2(j)\big) \right\|$$

$$\le 2 \max_{j \le N_2} \left\| A\big(\varphi_2(j)\big) \right\| + 3 \left\| \sum_{j=1}^{N_2} A\big(\varphi_2(j)\big) \right\|$$

$$\le \frac{1}{2} + 3 \left\| \sum_{j=N_1+1}^{N_2} z_j \right\|.$$

Por tanto, podemos construir por inducción una sucesión de conjuntos finitos disjuntos $I_k \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, una sucesión $\{z_n\}$ de elementos de X, una sucesión estrictamente creciente de números $\{N_k\}$ y una sucesión $\varphi_k: \{1,2, \dots N_k - N_{k-1}\} \to I_k$ de biyecciones tales que para todo k tenemos:

1. $z_j + N_{k-1} = A\big(\varphi_k(j)\big)$ para $1 \le n \le N_k - N_{k-1}$
2. $\left\| \sum_{j=1}^{N_k} z_j - y_k \right\| < \frac{1}{2^k}$
3. Si $\|A(n,j)\| > \frac{1}{2^k}$ entonces $(n,j) \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$
4. Para $1 \le n \le N_k - N_{k-1}$, la siguiente desigualdad es cierta:

$$\left\| \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_{k-1}+n} z_j \right\| < \frac{k}{2^k} + (k+1) \left\| \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} z_j \right\|.$$

La condición 2 implica que para la subsucesión $\{N_m\}$, tenemos

$$S_{N_m} = \sum_{j=1}^{N_m} z_j \to x.$$

Además, la condición 4 hace que la sucesión S_n converja. En efecto, sea $n < p < q$. Existe m y s tales que $N_{m-1} < p \leq N_m$ y $N_{s-1} < q \leq N_s$. Entonces tenemos:

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{j=p+1}^{q} z_j \right\| = \left\| \sum_{j=N_{m-1}+1}^{N_{s-1}} z_j + \sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j - \sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{j=N_{m-1}+1}^{N_{s-1}} z_j \right\| + \left\| \sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j \right\| + \left\| \sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j \right\|$$

$$= \|S_{N_{s-1}} - S_{N_{m-1}}\| + \left\| \sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j \right\| + \left\| \sum_{j=N_{m-1}+1}^{p} z_j \right\|.$$

Ahora bien, si n tiende al infinito, cada uno de los términos de esta última igualdad tiende a 0: la sucesión $\{S_{n_m}\}$ es de Cauchy y los otros dos términos tienden a 0 por la desigualdad (4). En efecto,

$$\left\| \sum_{j=N_{s-1}+1}^{q} z_j \right\| \leq \frac{s}{2^s} + (s+1) \left\| \sum_{j=N_{s-1}+1}^{N_s} z_j \right\| \leq \frac{s}{2^s} + (s+1)\left(\|S_{N_s} - S_{N_{s-1}}\|\right)$$

$$\leq \frac{s}{2^s} + (s+1)(\|y_s - y_{s-1} + S_{N_s} - y_s + y_{s-1} - S_{N_{s-1}}\|)$$

$$\leq \frac{s}{2^s} + (s+1)\left(\|y_s - y_{s-1}\| + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}}\right)$$

$$\leq \frac{s}{2^s} + (s+1)\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}}\right) \to 0$$

Solo queda demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es un reordenamiento de $\sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\text{x}\mathbb{N}} A(n,j)$. Mostramos que la función $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$\varphi: \{1,2,3,\dots\} \to \{\varphi_1(1), \varphi_1(2), \dots, \varphi_1(N_1), \varphi_2(1), \varphi_2(2), \dots, \varphi_2(N_2 - N_1), \varphi_3(1), \dots\}$$

es biyectiva. Sea $(n;m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La condición (3) implica que hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n,m) \in I_k = \{\varphi_k(j)\}_{j=1}^{N_k - N_{k-1}},$$

φ es por lo tanto sobreyectiva. Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$. Dado que los conjuntos I_k son disjuntos por pares, existe un único k tal que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \in I_k$. La función φ_k es biyectiva, necesariamente tenemos que$n_1 = n_2$. φ es por lo tanto inyectiva.

El caso de que exista un k para el que no se respete la desigualdad 2.23 se obtiene de forma análoga. Sumando entre todos los términos de la sucesión $\{y_k\}$ obtenemos términos de la forma $y_{k-1} + \frac{s(y_k - y_{k-1})}{2^k}$, encontramos una sucesión y_l tal que

$$y_l \to x, \|y_l - y_{l-1}\| \le \frac{1}{2^{v(l)}},$$

donde $v(l)$ es el entero más pequeño tal que $y_l \in V_{v(l)}$.Tener en cuenta que tenemos $v(l) + 1 < l$ para l lo suficientemente grande (de lo contrario, la desigualdad 2.23 habría sido respetado por $\{y_k\}$). Luego repetimos los mismos pasos que antes al aproximar el término y_l usando un reordenamiento de la serie

$$\sum_{(n,j) \in \mathbb{N}_{v(l)} \setminus I_{l-1}} A(n,j).$$

Todos los términos de esta serie están en $v(l)$, entonces podemos reemplazar la desigualdad 4 por

$$\left\| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_{l-1}+n} z_j \right\| < \frac{l}{2^l} + (v(l) + 1) \left\| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} z_j \right\|$$

y obtener como antes que

$$\left\| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{q} z_j \right\| \leq \frac{l}{2^l} + (l+1) \left\| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} z_j \right\|$$

$$\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)\left(\left\| S_{N_l} - S_{N_{l-1}} \right\|\right)$$

$$\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)(\|y_l - y_{l-1}\| + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}})$$

$$\leq \frac{l}{2^l} + (v(l)+1)\left(\frac{1}{2^{v(l)}} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}}\right)$$

$$\leq \frac{l}{2^l} + \frac{v(l)+1}{2^{v(l)}} + \frac{l}{2^l} + \frac{l}{2^{l-1}} \to 0$$

$\square$

2.3 Marco Conceptual

Reordenar una serie, informalmente, es simplemente cambiar el orden de sus sumandos. Formalmente esto significa que si tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, un reordenamiento de ella es otra serie con términos b_n tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$ donde φ_i es una bisección de los naturales a los naturales. Esta definición claramente puede ser usada en el campo de los números reales, para serie de vectores en $\mathbb{R}^n$, para serie de vectores en espacios de Banach, y en general todo espacio que tenga una estructura de espacio vectorial y una topología.

Reordenar una serie influye drásticamente en su convergencia, la serie reordenada puede converger a la misma suma, a una suma diferente o incluso puede diverger. Ello nos conduce y motiva a establecer teoremas que nos permitan afirmar que sucede con el resultado de reordenar una serie. Veamos en el contexto de los números reales: aquí, el teorema de Riemann afirma que, si tenemos una serie de números reales condicionalmente convergente, entonces existe un reordenamiento de la serie que converge a cualquier número real prefijado. Por otra parte, el teorema de Dirichlet establece que, si tenemos una serie de números reales absolutamente convergente, entonces cualquier reordenamiento de ella converge a la misma suma.

Como consecuencia directa de lo anterior se tiene que convergencia incondicional y convergencia absoluta son equivalentes.

Todo lo anterior puede formularse en espacios de Banach, donde el resultado principal afirma que en cualquier espacio de Banach real o complejo de dimensión finita, convergencia absoluta y convergencia incondicional de series son equivalentes.

El teorema de Riemann nos motiva a definir series universales, donde una serie universal no es más que una serie que al reordenarla converge a cualquier número prefijado. Basados en esta idea, el trabajo consistirá en garantizar la existencia de series universales en espacios de Banach separables.

2.4 Definición de términos básicos

A continuación, daremos algunas definiciones que nos ayudará en la investigación.

Definición 2.4.1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales, diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$es convergente si la sucesión de sumas parciales $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$,

$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, es convergente. En este caso, el límite "S" de la sucesión de sumas parciales es llamada la suma de la serie y escribimos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definición 2.4.2. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales, decimos que:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$converge condicionalmente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no absolutamente.

Ejemplos:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es absolutamente convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ es condicionalmente convergente.

Definición 2.4.3. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales, un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $b_n = a_{\varphi_{(n)}}, \forall n \geq 1$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección.

Ejemplo:

Sea $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, una reordenación de S_1 es $S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

Definición 2.4.4. Una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge incondicionalmente, si cualquier reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$converge.

Definición 2.4.5. Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos. Una norma en X es una función $\| \ \|: X \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) $\|x\| = 0$ sí y solo sí$x = 0$.

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo$x \in X$, para todo λ escalar real o complejo.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Se dice que $(X, \| \ \|)$ es un espacio normado.

Definición 2.4.6. Sea Xun conjunto no vacío. Sea $d: X \text{ x } X \to \mathbb{R}$. Decimos que d es una métrica en X cuando se verifican:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.

(ii) $d(x, y) = 0$ si y solo sí $x = y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Se dice que (X, d) es un espacio métrico.

Observación: Dado un espacio normado $(X, \| \ \|)$. Para $x, y \in X$ sea $d(x,y) = \|x - y\|$, entonces d es una métrica en X, llamada métrica inducida por la norma.

Definición 2.4.7. Sea (x_n) una sucesión en X. Decimos que (x_n)converge a un punto $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un numero natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $(X, \| \quad \|)$

Definición 2.4.8. La sucesión (x_n) en X es convergente si existe $x \in X$ tal que (x_n) converge a x en $(X, \| \ \|)$

Definición 2.4.9. Sea (x_n) una sucesión en X. Decimos que (x_n) es una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Definición 2.4.10. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Decimos que $(X, \| \ \|)$ es completo cuando toda sucesión de Cauchy converge a un punto de X

Definición 2.4.11. Sea $(X, \| \ \|)$un espacio vectorial normado y sea d la métrica inducida por la norma. Si X es un espacio métrico completo con respecto a d se dice que X es un espacio de Banach.

Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach:

$\mathbb{R}$ con la norma dada por el valor absoluto.

$\mathbb{C}$ con la norma usual.

$l_p^n = \left(\mathbb{R}^n, \| \ \|_p\right)$, donde $\|(x_1, x_2, \ldots., x_n)\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$

Definición 2.4.12. Sea X un espacio de Banach real o complejo y una serie de términos en X. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $S_m = \sum_{n=1}^m x_n$, converge en X. En ese caso, el límite "S" de la sucesión de sumas parciales es llamada la suma de la serie y escribimos $S = \sum_{n=1}^\infty x_n$.

Definición 2.4.13. Sea X un espacio de Banach real o complejo y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos en X.

- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ es convergente en $\mathbb{R}$.
- Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente si para toda permutación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ es convergente en X. En este caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ se dice que es una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

CAPÍTULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis.

Hipótesis general

Existen series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita.

Hipótesis específica

1. Las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes.

2. El teorema de Riemann puede generalizase, en gran medida, a series de vectores en $\mathbb{R}^n$.

3.1.1 Operacionalización de la variable

Definición conceptual de variables

Variable dependiente

Conjunto de reordenaciones de una serie en un espacio de Banach.

Variable independiente

Serie en un espacio de Banach.

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
Independiente Serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach.	Absolutamente convergente. Condicionalmente convergente	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lVert x_n \rVert$ es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y tiene un reordenamiento que no converge.	Deductivo	Analítica
Dependiente Conjunto de reordenaciones de una serie en un espacio de Banach. $S(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)$	Vacío No vacío	Ningún reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Algún reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.	Deductivo	Analítica

Tabla 1

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1 Diseño metodológico

En este trabajo se muestra un tipo de investigación no experimental, la investigación es pura (básica) ya que es teórica.

a) El presente trabajo de tesis empezará con un ejemplo motivador, ello se trata de la serie armónica clásica, donde podemos encontrar dos reordenamientos de esta serie con sumas diferentes; ello nos dice que el reordenar series condicionalmente convergentes, en general, cambia su suma.

b) Para responder el fenómeno establecido en el punto 1, para series condicionalmente convergentes, enunciaremos y demostraremos el famoso teorema de Riemann, el cual afirma que para un número real prefijado siempre es posible encontrar un reordenamiento de una serie condicionalmente convergente cuya suma es el número dado.

c) A continuación, desarrollaremos la teoría de reordenaciones para series de vectores en $\mathbb{R}^n$, donde el teorema de Levy-Steinitz es importante en esta parte, y el lema de Steinitz es una herramienta esencial para construir series universales en este contexto.

d) Finalmente, el estudio de reordenaciones de series en espacios de Banach es discutida en el último capítulo, donde el principal resultado en esta parte es garantizar la existencia de series universales en espacios de Banach separables infinito dimensionales.

4.2 Método de investigación

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.3 Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de un espacio de Banach separable X.

4.4 Lugar de estudio

El lugar de estudio del presente trabajo es en la FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7 Aspectos Éticos en Investigación

En el proyecto de investigación, se han respetado en colocar las referencias bibliográficas y se han respetado los resultados haciendo las referencias correspondientes.

CAPÍTULO V: RESULTADOS

5.1 Resultados descriptivos

1) Por el teorema 2.2.1.6 se puede afirmar que todo reordenamiento de una serie absolutamente convergente converge al mismo valor de la serie, este teorema es llamado el teorema de Dirichlet.
2) Para series condicionalmente convergentes, se cumple que su conjunto de sumas es el conjunto de todos los números reales, es decir, para un número real fijo r, existe un reordenamiento de la serie condicionalmente convergente que converge a r.
3) El conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$, ello fue demostrado para n=2 por Levy y el caso general por Steinitz. Aunque el enunciado es corto, su demostración no lo es, ingredientes como el teorema del confinamiento poligonal y el teorema del reordenamiento son usados para su demostración.

5.2 Resultados inferenciales

1) Por el ejemplo 2.2.3.8 muestra que el teorema de Levy Steinitz no es válido para espacios de Banach de dimensión infinita. Sin embargo, esto no quita el hecho de que existan espacios de Banach de dimensión infinita donde se cumpla el teorema de Lévy-Steinitz.
2) Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ en un espacio de Banach X es llamada universal si $S(\sum_{k=1}^{\infty} a_k) = X$. Por el teorema de Riemann podemos inferir que toda serie condicionalmente convergente es universal en el cuerpo de los números reales.
3) La proposición 2.2.4.5 es el resultado principal de nuestro trabajo, y se infiere que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita existe al menos una serie universal.

5.3 Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis.

Ninguno.

CAPÍTULO VI: DISCUSIONES

6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

1) A lo largo de la sección 2.2.1 se ha estudiado el conjunto de todos los reordenamientos convergentes de una serie de números reales y serie de vectores en $\mathbb{R}^n$. Para serie de números reales absolutamente convergente, digamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se tiene que todo reordenamiento es absolutamente convergente y converge al mismo valor, esto nos dice que el conjunto $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ se reduce a un solo punto, que es el límite de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sin embargo, si consideramos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ condicionalmente convergente, por el teorema de Riemann, $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \mathbb{R}$.
2) Para una serie de vectores $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ en $\mathbb{R}^n$, el teorema de Levy-Steinitz afirma que $S(\sum_{k=1}^{\infty} a_k) = x + V$ donde x es un vector en $\mathbb{R}^n$ y V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. En particular, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, V se reduce a un punto, el vector nulo; y x sería el límite de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
3) Si vemos el ejemplo 2.2.3.8, existe una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de vectores en un espacio de Banach de dimensión infinita donde $S(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$ no es la traslación de un subespacio vectorial. Esto nos dice que el teorema de Lévy-Steinitz falla drásticamente en espacios de Banach de dimensión infinita.
4) Si consideramos una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ condicionalmente convergente, por el teorema de Riemann, $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \mathbb{R}$. Esto motiva a la definición de series universales en un contexto mas general, es decir, en espacios de Banach de dimensión infinita. Es así que, decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en un espacio de Banach X es llamada universal si $S(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = X$. El teorema principal del trabajo de tesis, proposición 2.2.4.5, establece las condiciones necesarias y suficientes en un espacio de Banach para la existencia de series universales.

6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares

La demostración dada, en el presente trabajo de tesis, del teorema de Lévy Steinitz, está basado en el artículo de P. Rosenthal (1987). Sin embargo, la prueba original del teorema de Lévy Steinitz puede encontrarse en E. Steinitz (1913).

Extensiones del teorema de Lévy-Steinitz a espacios de Banach de dimensión infinita ha sido estudiado en artículos como J. Bonet y A. Defant (2000).

6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación. Por otra parte, soy el responsable por toda la información brindada en este trabajo de tesis y se ha respetado exhaustivamente el referenciar autores con trabajos similares al nuestro.

CAPÍTULO VII: CONCLUSIONES

1) Toda reordenación de una serie absolutamente convergente, converge al mismo valor. Sin embargo, reordenar una serie condicionalmente convergente cambia el estado de su convergencia.

2) Por el teorema de Riemann podemos concluir que las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes.

3) El teorema de Lévy-Steinitz falla drásticamente en espacios de Banach de dimensión infinita.

4) Como ultima conclusión podemos afirmar que existen series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita.

CAPÍTULO VIII: RECOMENDACIONES

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo es éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto, se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación de análisis funcional y en la teoría de series y reordenaciones en espacios de Banach.

2) El libro más completo de series y reordenaciones en espacios de Banach es el libro de V. Kadets (1997), por lo cual se recomienda su lectura.

3) La prueba original del teorema de Lévy-Stetinitz se encuentra en alemán. Es por ello que se recomienda la lectura del articulo P. Rosenthal (1987), donde se encuentra la demostración en el idioma ingles y de una forma más didáctica y comprensible.

CAPÍTULO IX: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcántara, J. (2002). *Reorderings of Series in Banach Spaces and Some Problems in Number Theory*. Pro Mathematica, 16(31-32), 97.105.

Apostol, T. (2006). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

Bachman, G., y Narici, L. (1966). *Functional analysis*. Academic Press.

Banaszczyk, W. *The Steinitz Constant of the Plane*. J.Reine Angew. Math. 373(1987), 218-220.

Bonet, J., y Defant, A. (2000). The Levy-Steinitz Rearrangement Theorem for Duals of Metrizable Spaces (pp. 131-156). Israel J. Math. 117

Brown, A., y Page, A. (1970). *Elements of functional análisis*. Van Nostrand.

Diestel, J., Jarchow, H., y Tonge, A. (1995). *Absolutely Summing Operators*. Cup.

Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer, New York.

Grinberg, V. & Sevastyanov, S. *Value of the Steinitz Constant*. Funktsional. Anal. i Prilozhen.14 (1980), 56-57.

Steinitz, E. *Beding Konvergente Reihen and Konvexe Systeme*. J.Reine Angew. Math. 143(1913), 128-175.

Kadets, V. (1997). *Series in Banach Spaces*. Birkhauser Verlag, Basel.

Kadets, V. & Kadets, M. (1997). *Rearrangements of Series in Banach Spaces*, volume 86 de *Translations of Mathematical Monographs.* AMS, 1991.

Lima E. (1994). *Curso de Análisis Matemático.* (Vol. 1). Proyecto Euclides, IMPA.

Rosenthal, P. (1987). *The Remarkable Theorem of Levy and Steinitz* (pp. 342-351). The American Mathematical Monthly.

Rudin, W. (1953). *Principles of Mathematical Analysis.* (2.ª ed.). McGraw-Hill Book Company, New York.

Steinitz, E. (1913). *Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme* (pp. 128 - 175). Journal für die reine und angewandte Mathematik.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA: EXISTENCIA DE SERIES UNIVERSALES EN ESPACIOS DE BANACH SEPARABLES

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
PROBLEMA GENERAL ¿Existen series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita? PROBLEMAS ESPECÍFICOS 1. ¿Cuáles son las series universales en el cuerpo de los números reales? 2. ¿La prueba del teorema de Riemann (caso real) puede generalizarse a $\mathbb{R}^n$?	OBJETIVO GENERAL Probar la existencia de series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 1. Mostrar que las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes. 2. Mostrar que, en gran medida, puede imitarse la prueba del teorema de Riemann (caso real) a $\mathbb{R}^n$.	HIPÓTESIS GENERAL Existen series universales en espacios de Banach separables de dimensión infinita. HIPÓTESIS ESPECÍFICA 1. Las series universales en el cuerpo de los números reales son las series condicionalmente convergentes. 2. El teorema de Riemann puede generalizarse, en gran medida, a series de vectores en $\mathbb{R}^n$.	VARIABLE DEPENDIENTE Conjunto de reordenaciones de una serie en un espacio de Banach. $S\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ VARIABLE INDEPENDIENTE Serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach.	NIVEL DE LA INVESTIGACIÓN: Descriptiva y explicativa TIPO DE INVESTIGACIÓN: Investigación teórica DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN El presente trabajo de tesis empezará con un ejemplo motivador, ello se trata de la serie armónica clásica, donde podemos encontrar dos reordenamientos de esta serie con sumas diferentes; ello nos dice que el reordenar series condicionalmente convergentes, en general, cambia su suma. Para responder el fenómeno establecido en el punto 1, para series condicionalmente convergentes, enunciaremos y demostraremos el famoso teorema de Riemann, el cual afirma que para un número real prefijado siempre es posible encontrar un reordenamiento de una serie condicionalmente convergente cuya suma es el número dado. A continuación, desarrollaremos la teoría de reordenaciones para series de vectores en $\mathbb{R}^n$, donde el teorema de Levy-Steinitiz es importante en esta parte, y el lema de Steintiz es una herramienta esencial para construir series universales en este contexto. Finalmente, el estudio de reordenaciones de series en espacios de Banach es discutida en el último capítulo, donde el principal resultado en esta parte es garantizar la existencia de series universales en espacios de Banach separables infinitos dimensionales.

Tabla 2

ANEXO 2: FIGURAS

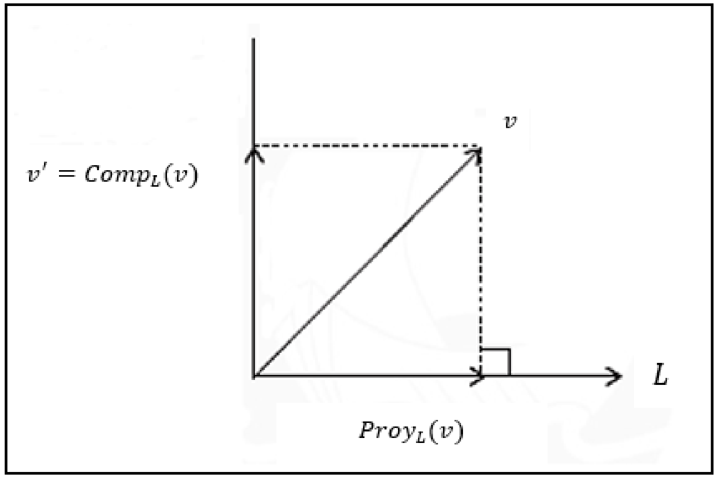

Figura 1. Descomposición del vector v

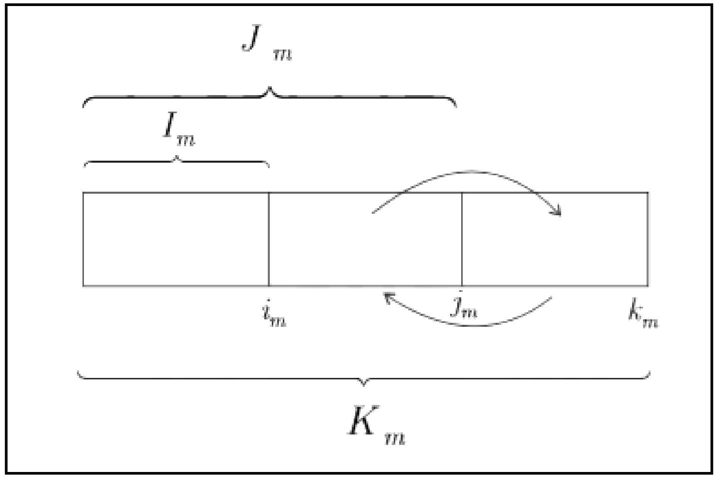

Figura 2. Ordenamiento de Índices