UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

INTERPRETACIÓN DE LA COHOMOLOGÍA LOCAL DE GRUPOS Y HACES, EN TÉRMINOS DE LOS FUNTORES “EXT”

AUTOR: WILFREDO MENDOZA QUISPE

(Período de Ejecución : Del 01.05.2023 al 30.04.2023)

(Resolución de aprobación N° 419-2022-R)

Callao, 2023

PERÚ

DEDICATORIA

A mi núcleo familiar, en especial a mis hijas Valeria y Natalia, quienes son la motivación de mi cotidiana lucha.

AGRADECIMIENTO

A la UNAC que, a través de su VRI y el aporte del FEDU, vienen impulsando con mucho esmero y responsabilidad la realización de la noble tarea de Investigación.

A mi familia, por el estímulo recibido y la comprensión durante el lapso en que este trabajo absorbió gran parte del tiempo que debí haberles dedicado.

A todas las personas que, de alguna manera, estuvieron motivándome en todo momento para la ejecución y culminación del proyecto.

INDICE

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

El presente trabajo de Investigación se encuentra inmerso en la Teoría de Cohomología Local, que fue inventado por Grothendieck para probar algún resultado tipo uno de Lefschetz que se presenta mediante Teoremas en Geometría Algebraica.

En la superficie, los métodos y resultados de cohomología local concierne al algebra de ideales y módulos. Su desarrollo lo iniciamos dando la definición de cohomología local de grupos y sus propiedades elementales. En este contexto los resultados que exponemos son válidos para espacios Topológicos arbitrarios y haces de grupos abelianos sobre ellos, seguido de esto presentamos una aplicación de Cohomología Local para esquemas previos. El cual es el resultado de nuestro trabajo es decir, la **Interpretación de la Cohomología local de grupos y haces en términos de los funtores "EXT".** Con la finalidad de presentar un resultado inferencial recordamos la definición de codimensión homológica, a lo que nos permite estudiar el resultado siguiente: la Cohomología Local $\underline{H}_Y^i(F)$ que se anula, para todo i < n es equivalente a : $\mathrm{Prof}_Y(F) \geq n,$ donde Y es un subconjunto cerrado de un prehaz Noetheriano Localmente X, F un haz coherente sobre X y $n \in \mathbb{Z}$ (número entero). Finalmente establecemos algunas consecuencias cuando X es un prehaz localmente Noetheriano conexo así como también para X = Spec (A) con A anillo Noetheriano Local.

Palabras claves : Cohomología local, Haces, grupos, Funtores, Codimensión homológica, prehaz, Noetheriano.

ABSTRACT

The present research work is immersed in the Local Cohomology Theory, which was invented by Grothendieck to prove some type one Lefschetz result that is presented by Theorems in Algebraic Geometry.

On the surface, the methods and results of local cohomology concern the algebra of ideals and modules. We started its development by giving the definition of local cohomology of groups and their elementary properties. In this context the results that we expose are valid for arbitrary Topological spaces and bundles of abelian groups on them, followed by this we present an application of Local Cohomology for previous schemes. Which is the result of our work, that is, the Interpretation of the local Cohomology of groups and bundles in terms of the "EXT" functors. In order to present an inferential result, we remember the definition of homological codimension, which allows us to study the following result: Local Cohomology that is annulled, for all $i < n$ is equivalent to: where Y is a closed subset of a prebundle Noetherian Locally X for F a coherent beam over X y (integer). Finally we establish some consequences when X is a locally connected Noetherian prebeam as well as for X = Spec (A) with A Local Noetherian ring.

Keywords: Local cohomology, Bundles, groups, Functors, Homological Codimension, prebundle, Noetherian.

INTRODUCCIÓN

La Cohomología local para ciertos autores, es considerado como un **“**hijo algebraico de una madre geométrica” J.P. Serrés, en uno de sus Paper “Faisceaux Algebriques Coherents”, representa una piedra angular del desarrollo de Cohomología como una herramienta en geometría algebraica: esto presagiaba muchas ideas cruciales de Cohomología moderna de haces que Serre’s publico en 1955, también tiene muchas sugerencias de temas lo cual son centrales en la teoría de cohomología local, y sin embargo no fue hasta 1967 que la publicación de R. Hartshorne’s en su obra : “Local Cohomology” confirmo la efectividad de Cohomología Local como una herramienta en álgebra local.

Desde la aparición de las notas de Grothendieck – Hartshorne, la Cohomología Local se ha convertido indispensable para muchos matemáticos trabajar en la teoría de anillos conmutativos noetherianos; pero las notas de: Grothendieck – Hartshorne ciertamente toman una óptica geométrica en el principio: Ellos empezaron con la cohomología de grupos de un espacio topológico X con coeficientes en un haz abeliano sobre X, y soportados en un subespacio cerrado local.

En este camino, nosotros sentimos que esto es una necesidad para una introducción algebraica. Sin embargo, nosotros no hemos pasado por alto las raíces geométricas o la significancia de las ideas para geometría algebraica moderna. Por supuesto, Grothendieck – Hartshorne en su obra presentan varios ejemplos detallados designados para ilustrar el significado geométrico de aspectos de cohomología local; existen muchos ejemplos los cuales requieren solamente ideas básicas de geometría algebraica.

Muchas investigaciones recientes involucran coholomogía local de anillos graduados ilustrando la importancia de este aspecto. En este contexto hacemos algunos esfuerzos para desarrollar cautelosamente los fundamentos de la cohomología local en el caso graduado.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática:

Para la geometría algebraica; la cohomología local resulta ser un análogo algebraico de la conocida Cohomología relativa. El personaje que destacó en este hecho fue Alexander Grothendieck quien introdujo por el año 1961 en unos seminarios dictados en Harvard; siendo Hartshorne (1967) quien lo redacto; y el 2005 fue reeditado por Grothendieck. De este modo presentamos una cierta descripción de la realidad referente a la Cohomología local, siendo esta como sigue: Dada una aplicación; una sección de una gavilla cuasi coherente definida, en un subconjunto abierto de una variedad algebraica, (más aún en un esquema); la cohomología local mide la obstrucción para ampliar o extender dicha aplicación a un dominio más amplio. Por ejemplo función racional $f(x)=x^{-1}$ se define solamente en $\{0\}^c$ dentro de la recta afin $Af(K)$ sobre un campo K, no siendo posible extenderlo a una función en todo el espacio. El módulo de cohomología local denotado por $H^1_{(x)}(K(x))$, identifica o detecta la no eliminación de una clase de cohomología $\left[x^{-1}\right]$; de modo similar la función $f(x,y)=(xy)^{-1}$ se define fuera de las $x\ e\ y,$ ejes de plano afin $pf(K);$ no siendo posible extenderlo al complemento del eje X o al complemento del eje Y; (más aún no es posible expresarlo como una suma de tales funciones), tal obstrucción corresponde a una clase diferente de cero $\left[(xy)^{-1}\right]$ en el respectivo módulo de cohomología local el cual es denotado por $H^2_{(x)}(K(x,y)),$ las aplicaciones que la cohomología local a encontrado en otras áreas distintas a la geometría algebraica son: Algebra abeliana, Algebra combinatoria; así como también en algunos tipos de ecuaciones diferenciales parciales.

En este trabajo nos proponemos estudiar en la forma geométrica – algebraica más general; para lo cual consideramos un espacio topológico (X,τ), Z un subespacio de X localmente cerrado; y un Haz Conmutativo F sobre X. Ahora elegimos un subconjunto abierto V en X tal que $Z\subset V,$ y Z es cerrado en V. esto es posible puesto que Z es localmente cerrado en X. Sea $\Gamma_Z(X,F)$ un subgrupo de F(V) formado por todos las secciones de F cuyo soporte está contenido en Z, fácilmente se comprueba que $\Gamma_Z\left(X,F\right)$ es independiente de el subconjunto abierto V elegido líneas arriba; estableciéndose el funtor "ξ" de la categoría de haces abeliano en la categoría de grupos i.e. $\xi(F)=\Gamma_Z\left(X,F\right)$, con tales consideraciones interpretaremos la cohomologia local de grupos y haces en función el funtor Ext.

1.2 Formulación del problema

Problema General

¿De que forma, se puede interpretar la Cohomología Local de grupos y Haces en términos Funtoriales?

Problema Específico

a) ¿De qué manera; se podría interpretar la cohomología local de grupos y Haces en términos de los funtores Ext?.

b) ¿Bajo que condiciones se puede establecer una equivalencia entre el módulo $Ext_A^i(N,M)=0$, para todo A – módulo N y la existencia de una sucesión M - regular?.

1.3 Objetivos

Objetivo General

Mostrar una interpretación de la cohomología local de grupos y Haces bajo la teoría Funtorial.

Objetivo Específico

a) Determinar una equivalencia entre el módulo $Ext_A^i(N,M)=0$, y la existencia de una sucesión M - regular

b) Interpretar mediante un isomorfismo la cohomología local de grupos y haces en términos de los funtores “Ext”.

1.4 Limitantes de la Investigación

- **Limitante Teórico**

La teoría Funtorial juega un rol preponderante en la Cohomología Local buscamos interpretar la cohomología local de grupos y Haces, en términos de los funtores Ext, lo cual realizaremos funtorialmente de la categoría de Haces Abelianas "$\mathcal{A}$(x)" a la categoría de grupos abelianos "$\mathcal{G}_{ab}$" así: $F \to \Gamma_2(X, F)$, en este contexto nuestro trabajo tiene como limitante teórico al espacio topológico X con la condición adicional de ser un Prehaz, mientras F es un Haz arbitrario.

- **Limitante Temporal :**

El trabajo que presentamos es teórico; netamente abstracto, no tiene limitante temporal alguno; por tanto. NO APLICA

- **Limitante Espacial:**

Por el mismo argumento del limitante temporal se considera que no existe limitante espacial. Por tanto NO APLICA.

CAPITULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Internacionales

La Cohomología local que hace su aparición en las notas de Grothendieck – Hartshorne publicadas entre 1955 y 1967, tuvieron una iniciativa geométrica; esto es como sigue: Se toma grupos de Cohomología de un espacio topológico X en un haz abeliano sobre X y soporte en un subespacio localmente cerrado, de este modo esta teoría se utilizó. Para demostrar algunos resultados en geometría algebraica M.P. Brodman y R.Y. Sharp; en su obra local cohomology, segunda edición (2013) lo presenta con muchas ilustraciones de la teoría en álgebra conmutativa y en la geometría de variedades cuasi – afines y cuasi – proyectivas. Internacionalmente existen muchos trabajos que se encuentran en estado: Preprint; como es de: L.A. Alba – Sarria, R. Callejas – Bedregal, and N. Caro – Tuesta A local Cohomology Theory defined by sistema of ideals (2020).

2.1.2 Nacionales

La teoría de Cohomología local, en nuestro medio y a la fecha ha sido muy poco estudiada, sin embargo podemos mencionar algunos artículos como: el intitulado "Una Teoría de Cohomología Local Generalizado", Pesquimat – UNMSM – 2021; también podemos citar en este contexto la tesis de Maestría Intitulada Espacios Fibrados, clases características y el isomorfismo de Thom cuyo autor: es Arroyo Flores, Merwill Luciano; Lima – Perú, PUCP (2013)

2.2. Marco

2.2.1 Teórico

La cohomología local que fue introducida por Alexander Grothendieck para demostrar los Teoremas de Tipo – Lefschetz en geometría algebraica; donde fue similarmente introducida como una teoría análoga a la cohomología relativa. Para efecto del mismo recordamos su definición: Consideremos un espacio Tipológico X y Z un subconjunto cerrado de X. Para cada haz de grupos abelianos sobre X, el conjunto

$$\Gamma_Z\left(X,\mathcal{F}\right):=\left\{s\in\mathcal{F}:\operatorname{supp}(s)\subseteq Z\right\}$$

Es un subgrupo del grupo de secciones globales $\mathcal{F}(X)$. Además si $\rho:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ es un morfismo de haces de grupos abelianos; entonces al restringir $\rho_X:\mathcal{F}_{(X)}\longrightarrow\mathcal{G}_{(X)}$ induce un homomorfismo de grupos.

$$\Gamma_Z\left(X,\rho\right):\Gamma_Z\left(X,\mathcal{F}\right)\longrightarrow\Gamma_Z\left(X,\mathcal{G}\right)$$

De este modo al considerar la categoría sh(X) de Hace abelianos sobre X y la categoría de grupos abelianos $\mathcal{G}_{ab}$, tenemos el funtor $\Gamma_Z\left(X,-\right)$ de Sh(X) en $\mathcal{G}_{ab}$, bajo las correspondientes $\mathcal{F}\mapsto\Gamma_Z\left(X,\mathcal{F}\right)$ y $\rho\mapsto\Gamma_Z\left(X,\mathcal{G}\right)$.

Ahora con las mismas consideraciones antes dadas y si F es un haz abeliano sobre X; y desde que Sh(X) tiene suficientes objetos inyectivos existen los funtores derivados a la derecha de $\Gamma_Z\left(X,-\right)$, lo cual denotamos por $\left\{R^k\Gamma_Z(X,-)\right\}_{k\geq 0}$ para cada entero k no negativo, el k – ésimo funtor de cohomología local de X soportada en Z es definido por

$$H_Z^K\left(X,-\right):=R^k\Gamma_Z(X,-)$$

Obsérvese que si Z = X, la cohomología descrita líneas arriba es precisamente la Cohomología de Haces sobre X.

A continuación presentamos parte del material bibliográfico utilizado en el marco teórico.

- E – Spanier; Algebraic Topology, Spinger Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- Robin Harts horneo. Residues desality. Springer Verlag. Heidelberg. New York. 1963.
- J.J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra. Universitext Springer Verlog. New York, 2009.
- Matsamuram H. Conmutative Ring Theory.Cambridge University, Press Cambrigde. 1986.

2.2.2 Conceptual

El término "Interpretación", matemáticamente hablando significa expresar un objeto en función de otro, en este trabajo buscamos interpretar la cohomología local de grupos y haces en términos de los funtores Ext. Se puede conceptuar de varias perspectivas. Desde el punto de vista algebraico, empezamos considerando un ideal I en un anillo Noetheriano conmutativo, para cada módulo tomemos el submódulo de elementos que se anulan por alguna potencia de I, esta operación no es exacta, en el sentido del álgebra homológica, y la cohomología local que mide la falla de exactitud. Esta es una simple construcción algebraica; aún este resultado es una teoría muy productiva con aplicaciones e inesperadas interacciones.

2.3. Definiciones de Términos Básicos

A) Resoluciones, Funtor Torsión y Producto Torsión

Definición.- (Resolución Proyectiva) (2.3.1).- Sea R un anillo y M un R – módulo. Una resolución proyectiva de M es una secuencia descendente exacta denotada o descrita como sigue:

$$C:.....\longrightarrow C_{n+1}\xrightarrow{\partial} C_n\xrightarrow{\partial} C_{n-1}\xrightarrow{\partial}.................$$

De R –módulos tal que $\partial\circ\partial=0$; donde el $Nuc(\partial)=Zn(C)=Nuc\partial_{n+1}$ e $\operatorname{Im}(\partial)=Bn(C)=\operatorname{Im}(\partial_n)$, entendiéndose: $\partial_n=\partial:C_n\longrightarrow C_{n-1}$ y $\partial_{n+1}=\partial:C_{n+1}\longrightarrow C_n$ los cuales son llamados operadores borde, y que además la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se establece como:

$$C_n=\begin{cases} 0,\ para\ n\ <\ \text{-1} \\ M,\ para\ n\ =\ \text{-1} \\ M_n,\ para\ M_n\ \ R\ \text{-}\ módulo\ proyectivo\ y\ para\ todo\ n\ \geq\ 0 \end{cases}$$

Definición (2.3.2).- Si en la definición anterior M_n es un R –módulo libre para todo $n\geq 0$ entonces la sucesión descendente $\{C_n\}_{n\geq 0}$ se denomina Resolución libre de M.

Proposición (2.3.1.).- Cualquier R – módulo M posee una resolución libre.

Demostración.- Sabemos que: "Todo R – módulo es isomorfo a un R – módulo cociente de un R – módulo libre". (θ) de este modo se puede garantizar la existencia de una secuencia exacta corta.

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} L_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$$

Donde L_0 es un R – módulo libre, y aquí. Nuevamente aplicando el resultado (θ) al módulo "L_0, se tiene la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} L_0 \longrightarrow 0$$

Donde L_1 es un R –módulo libre. De modo inductivo, se tiene una sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} L_n \xrightarrow{g_n} L_{n-1} \longrightarrow 0$$

Para todo n > 0, y donde L_n es un R – módulo libre. Ahora definamos una sucesión.

$$C : .... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow ....$$

De módulos y homomorfismos como sigue:

$$C_n = \begin{cases} 0, \ para\ n\ <\ -1 \\ M,\ para\ n\ =\ -1 \\ Ln,\ para\ n\ \geq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \partial_n = \begin{cases} 0,\ para\ n\ <\ 0 \\ g_0,\ para\ n\ =\ 0 \\ f_{n-1} \circ g_n,\ para\ n > 0 \end{cases}$$

Para mostrar que "C" es una Resolución libre de M, falta ver que sea exacta es decir: $\operatorname{Im}[\partial_{n+1}] = Ker[\partial_n]$ para todo $n \geq 0$. En efecto. Como f_n es inyectivo y g_n es suryectivo para todo $n \geq 0$; entonces se tiene:

$\operatorname{Im}[\partial n+1] = \operatorname{Im}[f_n] = Ker[g_n] = Ker[\partial_n]$, para todo $n \geq 0$.

Definición (2.3.3).- Sean C, D dos sucesiones descendentes o también llamados complejos de cadenas. Se dice que; $\varphi, \psi : C \longrightarrow D$ son dos homomorfismos homotópicos si existe una familia de homomorfismos $h = \{h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1} / n \in \mathbb{Z}\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se cumple $\varphi_n - \psi_n = \partial \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial$, en el siguiente diagrama, observamos tal definición.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, shift left, "\varphi_n"] \arrow[dr, shift right, "\psi_n"'] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1} \arrow[r, "h_{n-1}"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

Figura 1: *Rectángulo, mostrando homomorfismos homotópicos entre Complejos*

Fuente.- Elaboración propia

Nota.- En este caso, la familia h se denomina (Homotopía) de cadenas entre los Morfismos (Homomorfismos) φ y ψ; simbólicamente escribiremos $h:\varphi \simeq \psi : C \longrightarrow D$

Proposición (2.3.2).- Sean $\varphi = \{\varphi_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ y $\psi = \{\psi_n : C_n \longrightarrow D_n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ dos homomorfismos de las sucesiones descendentes de “C a D” tal que $\varphi_{-1} = h = \psi_{-1}$ entonces $\varphi \simeq \psi$ es decir φ y ψ son homotópicos.

Demostración.- Es rutinario siguiendo la definición de homotopia de complejos de cadenas.

Nota.- La resolución inyectiva que definimos a continuación se establece de modo análogo utilizando sucesiones ascendentes.

Definición (2.3.4).- (Funtores Torsión)

Sean M, N dos R – módulos arbitrarios. Elijamos una resolución proyectiva.

$C: \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots\ldots\ldots\ldots$

Del módulo M; y consideremos el producto Tensorial $C \otimes N$ que es la sucesión.

$C \otimes N : \ldots\ldots \longrightarrow C_{n+1} \otimes N \xrightarrow{\partial*} C_n \otimes N \xrightarrow{\partial*} C_{n-1} \otimes N \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$

Donde $\partial_* = \partial \otimes 1_N$, es decir el producto tensorial del homomorfismo ∂ y el endomorfismo $1_N = 1$ del módulo N.

Afirmación.- La sucesión $C \otimes N$ es semiexacta

En efecto.- Para lo cual bastará ver que $\partial_* \circ \partial_* = 0.$

Pues $\partial_* \circ \partial_* = (\partial \otimes 1_N) \circ (\partial \circ 1_N) = (\partial \circ \partial) \otimes 1 = 0 \ x \ 1_N = 0.$

De esta manera la sucesión $C \otimes N$ es descendente semiexacta; y en consecuencia para todo entero n; se define el módulo de Homología n – dimensional descrito como:

$$H_n(C \otimes N) = \frac{Z_n(C \otimes Y)}{B_n(C \otimes Y)}$$

De la sucesión $C \otimes N$.

Lema (2.3.1).- Si "C" es una resolución proyectiva del R – módulo M; entonces para cualquier otra resolución proyectiva

$$D: ......\longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial} D_n \xrightarrow{\partial} D_{n-1} \xrightarrow{\partial} ....$$

De M, se tiene: $H_n(C \otimes N) \cong H_n(D \otimes Y)$ para todo entero "n".

Demostración: [Ver: Tzen – Hu; Algebra Homológica; Pág. 144]

Lema (2.3.2).- $H_n(C \otimes N) = 0,$ para todo entero $n \leq 0.$

Demostración.- La demostración resulta de la definición de la sucesión $\{C_n\}_{n \leq 0}$, donde $C_n = 0$ para todo n < - 1, y de aquí $C_n \otimes N = 0,$ para todo n < -1.

Observación (2.3.1).- De los lemas anteriores observamos que el módulo $H_n(C \otimes N)$ depende básicamente del entero "n" y los R – módulos : M y N; así como también $H_n(C \otimes N)$es trivial para todo $n \leq 0.$ Por lo que a continuación damos la definición siguiente:

Definición (2.3.5).- El R – módulo $H_n(C \otimes N)$se denomina **Producto Torsión n – dimensional** sobre R de los módulos M y N inicialmente dados.

Notación.- El Producto Torsión n – dimensional sobre R, de los R – módulos M y N será denotado por: $Tor_n^R(M, N).$ O simplemente $Tor_n(M, N);$ y cuando n = 1; Tor (M, N) y lo llamaremos de manera abreviada Producto Torsión (sobre R) de M y N.

Definición (Resolución Inyectiva) (2.3.6)

Una resolución inyectiva de un R-módulo M es una sucesión ascendente exacta.

$C:.....\longrightarrow C^{n-1}\xrightarrow{\delta}C^{n}\xrightarrow{\delta}C^{n+1}\xrightarrow{\delta}............$

de R – módulos tal que $\delta\circ\delta=0$ satisfaciendo.

$$C^n=\begin{cases}0,\ para\ n\ <\ -1\\ M,\ para\ n\ =\ -1\\ M^n,\ para\ n\ \geq\ 0;\ M^n\ R\text{-}módulo\ inyectivo\end{cases}$$

Nota.- Todos los resultados dados referente a resolución proyectiva; también son obtenidos para resolución inyectiva. Por lo que simplemente la enunciaremos; con la finalidad de establecer la definición del funtor Ext.

Definición (2.3.7).- Sean M, N dos R-módulos. Elijamos una resolución proyectiva.

$C:.....\longrightarrow C_{n+1}\xrightarrow{\delta}C_{n}\xrightarrow{\delta}C_{n-1}\xrightarrow{\delta}............$

Del módulo N y sea $1=1_N:N\longrightarrow N$ el endomorfismo identidad de N. Consideremos la sucesión Hom (C, N) descrita como:

$Hom(C,N):.......\longrightarrow Hom(C_n,N)\xrightarrow{\delta}Hom(C_{n+1},N)\longrightarrow........$

Donde $\partial=Hom(\delta,1)$; la cual verifica $\delta\circ\delta=0$; en efecto: $\delta\circ\delta=Hom(\partial,1)$ $\circ\ Hom(\delta,1)=Hom(\delta\circ\delta,1\circ1)=Hom(0,1)=0.$

De este modo Hom(C,N) es semiexacta ascendente, y así para todo número entero “n” definimos el Módulo de Cohomología n – dimensional denotada por $H^n[Hom(C,N)]$ de la sucesión Hom (C, N).

Lema (2.3.3).- Dada una resolución proyectiva sobre M.

$C:.....\longrightarrow C_{n+1}\xrightarrow{\delta}C_{n}\xrightarrow{\delta}C_{n-1}\xrightarrow{\delta}............$

Entonces para cualquier otra resolución proyectiva.

$D:.....\longrightarrow D_{n+1}\xrightarrow{\delta}D_{n}\xrightarrow{\delta}D_{n-1}\longrightarrow............$

Del módulo M se tiene que :

1. $H^n[Hom(C,N)]\cong H^n[Hom(D,N)]$, para todo entero “n”.
2. $H^n[Hom(C,N)]=0$ para todo $n\leq 0.$

Demostración.- Se obtiene de manera directa por dualización a partir de los resultados del contexto de resolución inyectiva.

Observación (2.3.2).- Por el lema anterior observamos que el módulo $H^n\left[Hom(C,N)\right]$ depende básicamente solo del número entero "n" y los R – módulos M, N; también $H^n\left[Hom(C,N)\right]$ es trivial para todo entero no positivo. Por lo que damos la siguiente definición.

Definición (2.3.8).- El R – módulo $H^n\left[Hom(C,N)\right]$ es llamado **Producto Extensión n – Dimensional** sobre R de los módulos M y N inicialmente dados.

Notación.- El R – módulo $H^n\left[Hom(C,N)\right]$ sobre R de los R – módulos M y N será denotado por: $Ext_R^n\left(M,N\right)$. O simplemente $Ext^n(M,N)$; y cuando n = 1, Ext (M, N) y lo llamaremos Producto Extensión (sobre R) de M y N.

B) Prehaces y Haces, Categoría Aditiva.

Sea $\left(X,\tau\right)$ un espacio topológico. La categoría formado por los abiertos de X lo denotaremos como Top_X ; es decir los objetos de $Top_X = \tau$ y tal que si $U \subset V$ son dos abiertos de X; entonces Hom (U,V) = $\left\{i_c : U \longrightarrow V\right\}$ esto es que el Hom (U, V) está formado por el único morfismo inclusión.

Definición (Prehaz) (2.3.9).- Sea Top_X la categoría antes definida y sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. **Un Prehaz** definida en Top_X con valores en $\mathcal{C}$ es un funtor covariante $F:\left(Topx\right)^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Observación (2.3.3).- Si $V \in Top_X$ entonces F(V)∈ $\mathcal{C}$ de este modo los elementos $s \in F\left(V\right)$ se llama secciones del Prehaz sobre V. Ahora si $U \subset V$ es otro elemento en τ entonces F = $\left\{i_c : U \hookrightarrow V\right\}$ lo denotamos por $S|_U$.

Ejemplo (2.3.1).- Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{gr}$ (Categoría de grupos), y sea $F:(Top_X)^{op} \longrightarrow \mathcal{C}_{gr}$ el funtor tal que a cada $U \in \tau$ le asigna un grupo prefijado G y que sobre los morfismos siempre induce la identidad. Este prehaz se llama haz constante del grupo "G".

Definición (Haz) (2.3.10).- Sea $F:(Top_x)^{op} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor covariante. Diremos que F es un Haz si para cualquier elemento $U \in \tau$ y para cualquier recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in\wedge}$ de U se cumple las condiciones siguientes.

H1) Para r, s en F(U) tal que $r|_{U_i} = s|_{U_i}$ para todo $i \in \wedge$, entonces r = s.

H2) Sea $S_i \in F(U_i)$ para todo $i \in \wedge$ tal que $Si|_{U_i \cap U_j} = Sj|_{U_i \cap U_j}$ para cada i, j $\in\wedge$, entonces $S|_{U_i} = S_i$ para algún $s \in F(U)$.

Nota.- Las condiciones (H1) y (H2) de la definición de haz se conocen como: propiedades de: Localidad y generalización respectivamente.

Definición (2.3.11).- Sean E, X dos espacios topológicos cualesquiera. Una aplicación continua $P:E \longrightarrow X$ es llamado **Homeomorfismo Local** si, para cada elemento $e \in E$, existe una vecindad abierta S de “e” llamada una “hoja” con p(S) abierto en X y la restricción $P|_S : S \longrightarrow P(S)$ es un homeomorfismo.

Nota.- 1) La Terna (E, P, X) es llamado un Protohaz si el homeomorfismo local “P” es suryectivo.

2) Cada elemento de la terna (E, P, X) posee un nombre.

- El espacio E es denominado el espacio Haz.
- La aplicación $P:E \longrightarrow X$ se denomina proyección.
- El Espacio X es conocido como el espacio base.

3) Para cada elemento $x \in X$ la imagen inversa $p^{-1}(x)$ denotado por E_x es llamado el Tallo sobre x; también $p^{-1}(x)$ es conocido como fibra de “x”.

Ejemplo (2.3.2).- La terna $(\mathbb{R}, P, S)$ es un protohaz, donde $p(t) = e^{2\pi i t}$.

(2) La terna $\left(G, P, {}^{G}\!/_{N}\right)$ es un protohaz; donde G es un grupo topológico, N un subgrupo normal discreto de G y $P: G \longrightarrow {}^{G}\!/_{N}$ la proyección natural. Esta terna es llamado espacio cubrimiento.

Definición (2.3.12).- Si $P:E \longrightarrow X$ es una aplicación continua, donde X e E son espacios topológicos, entonces S = (E, P, X) es un Tallo – Haz de grupos Abelianos si:

(i) La Terna (E, P, X) es un protohaz.

(ii) El Tallo E_x es un grupo abeliano para cada $x \in X$

(iii) Las aplicaciones: inversión y adición son continuas.

Observación (2.3.4).- i) Las aplicaciones inversión y adición serán denotadas por : -e y e + e′ para e, e′ en E.

ii) La definición inmediata anterior puede ser modificada de modo que sus tallos sean otras categorías algebraicas tales como: la categoría de R – módulos Mod, o la categoría anillos conmutativos ComRings.

Ejemplo (2.3.3).- La estructura haz de un anillo conmutativo R tiene espacio base a Spec(R) con la topología de Zariski, y como espacio haz a : $E = \underset{Pespec(R)}{U} R_p$ topologizado de manera adecuada y la proyección $P : E \longrightarrow Spec(R)$ es dada como $P(e) = \mathcal{P}$ para todo $e \in R_{\mathcal{P}}$.

Definición (2.3.13).- Sean S = (E, P, X) y $S' = (E', P', X')$ dos tallos haces sobre un espacio X. Una aplicación tallo $\varphi : S \longrightarrow S'$ es una aplicación continua $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que $P' \circ \varphi = P,$ y que $\varphi|_{Ex}$ es un homomorfismo. Escribamos: $Hom_{et}(S, S') = \left\{ \varphi : S \longrightarrow S' / \, \varphi \text{ es una aplicación tallo} \right\}$

Proposición (2.3.3).- Sean (S, E, X) y (S′, E′, X′) dos tallos haces sobre un espacio Topológico X, entonces:

(i) $Hom_{et}(S, S')$ es un grupo abeliano aditivo.

(ii) La ley distributiva se establece como sigue:

$$T \xrightarrow{\alpha} S \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} S' \xrightarrow{ß} Z$$

Donde *T* y *Z* son tallos haces sobre X; entonces

$$ß_0(\varphi + \psi) = ß \circ \varphi + ß \circ \psi \quad \text{y} \quad (\varphi + \psi) \circ \alpha = \varphi \circ \alpha + \psi \circ \alpha$$

(iii) Cada aplicación tallo $\varphi : S \longrightarrow S'$ es una aplicación abierta de E en E′.

Demostración.- [Ver Joseph J. Rotman, An introduction to Homological Algebra pag. 277]

Definición (2.3.14).- Sean S = (E, P, X) y S′ = (E′, P′, X′) dos tallos haces. Diremos que S′ es un subtallo – haz de S si: $E' \subseteq E$ y la inclusión $i : E' \longrightarrow E$ es una aplicación etale.

Proposición (2.3.4).- Dos subtallos – haces (E, P, X) y (E′, P′, X′) de un tallo – haz S son iguales si y solo si ellos tienen los mismos tallos; esto es $E_x = E_x^{'}$ para todo $x \in X$.

Demostración.- Esto se obtiene directamente puesto que $E = \bigcup\limits_{x \in X} E_x$.

Definiciones (2.3.15).- Sea X un espacio topológico. Diremos que:

1) Z es un subespacio localmente cerrado de X si este es la intersección de un abierto y un subconjunto cerrado.

2) Un haz abeliano sobre X simplemente es un haz de grupos abelianos sobre X.

Notación.- La categoría de todos los haces abelianos sobre X será denotado por $\mathscr{C}(X)$.

Definición (2.3.16).- Sea $V \subseteq X$ un subconjunto abierto tal que $Z \subseteq V$ con Z cerrado en V. Esto es posible que Z sea localmente cerrado en X.

El conjunto $\Gamma_Z\left(X, F\right)$ conformado por todas las secciones de F cuyo soporte está contenido en Z es llamado subgrupo de las secciones de F(V); donde F es un haz abeliano sobre X.

Observación (2.3.5).- i) El Conjunto $\Gamma_Z\left(X, F\right)$ es denominado las secciones de F con soporte en Z.

ii) Las correspondencias $F \mapsto \Gamma_Z\left(X, F\right)$ y considerando X, Z, F, V como en la definición anterior, entonces si U es cualquier subconjunto abierto de X, el homomorfismo restricción: $F(V) \mapsto F(V \cap U)$ induce un homomorfismo $\Gamma_Z\left(X, F\right) \longrightarrow \Gamma_{Z \cap U}\left(U, F|_U\right)$.

iii) De la observación inmediata anterior parte (2) se tiene que la correspondencia es funtorial de la categoría de haces $\mathscr{C}(X)$ en la categoría de grupos abelianos mas aún dicho funtor es exacto a izquierda y así es un Prehaz.

iv) Denotaremos el Prehaz obtenido en la parte (3) de la observación inmediata anterior por $\Gamma_Z(F)$ o simplemente como Γ_Z y de esta forma se a encontrado el funtor $F \mapsto \Gamma_Z(F)$ de $\mathscr{C}(X)$ en $\mathscr{C}(X)$.

Definición (2.3.17).- Sea X un espacio Topológico, Z un subespacio localmente cerrado, y F un haz abeliano de X. Entonces el funtor derivado a derecha de Γ_Z y $\Gamma_{Z'}$ respectivamente será denotado por: $H_Z^K(X,F)$ y $\underline{H_Z^K(F)}$ k = 0, 1, 2, ….. respectivamente y son llamados los grupos de Cohomología (Respectivamente cohomología de haces) de X con coeficientes en F y con soporte en Z.

Proposición (2.3.5).- Sea $Z \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X. Entonces:

i) $\Gamma_Z(X,F) = R_Z^0(X,F)$, $\underline{\Gamma_Z(F)} = \underline{H_Z^0(F)}$

ii) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión corta de haces abeliano de X entonces existe una sucesión exacta larga.

$$0 \longrightarrow H_2^0(X,F') \longrightarrow H_Z^0(X,F) \longrightarrow H_Z^0(X,F'') \xrightarrow{\partial} H_Z(X,F) \longrightarrow H^1(X,F') \ldots\ldots$$

y

$$0 \longrightarrow \underline{H_Z^0(F')} \longrightarrow \underline{H_Z^0(F)} \longrightarrow \underline{H_Z^0(F'')} \xrightarrow{\partial} \underline{H_Z^1(F')} \longrightarrow \underline{H_Z^1(F)} \ldots\ldots\ldots$$

iii) Si $I \in \mathscr{C}(X)$ es inyectivo entonces $H_Z^K(X,F) = 0$ para k > 0 y $H_Z^K(F) = 0$ para k > 0.

Demostración.- Los funtores H_Z^K y $\underline{H_Z^K}$ son funtores derivados de Γ_Z y $\underline{\Gamma_Z}$ respectivamente y de donde se siguen las propiedades: i) ii) y iii).

Nota.- Las propiedades: i), ii) y iii) de la proposición inmediata anterior caracterizan a los funtores derivados.

Proposición (2.3.6): Sean Z, X, F como en la definición de grupos de cohomología y cohomología de haces, para cada $k \geq 0$, $H_Z^K(F)$ es el haz asociado al Prehaz: $U \longrightarrow H_{Z\cap U}^K(U, F|_U)$.

Demostración.- Se sigue rutinariamente de las definiciones de haz y prehaz.

Proposición (2.3.7).- Sea Z un cerrado localmente en X, y sea V un abierto en X y tal que: $Z \subseteq V \subseteq X$ entonces $H_Z^K(X,F) \cong H_Z^K(V,F|_V)$ para cualquier $F \in \mathcal{C}(X)$

Demostración.- Para esto bastará observar que los funtores

$F \mapsto \Gamma_Z(X,F)$ y $F \mapsto \Gamma_Z(V,F|_V)$, son funtores isomórficos de $\mathcal{C}(X)$ en (Ab).

Definición (2.3.18).- Sean $\mathcal{C}$ una categoría; X, Y $\in$ Obj ($\mathcal{C}$) entonces su producto es la terna: $(X\prod Y, \pi_X, \pi_Y)$ donde $X\prod Y \in Obj(\mathcal{C})$ y $\pi_X : X\prod Y \longrightarrow X$, $\pi_Y : X\prod Y \longrightarrow Y$ son morfismos llamados proyecciones, tal que para cada objeto Z en $\mathcal{C}$ y para cada par de morfismos $\alpha : Z \longrightarrow X$ y $ß : Z \longrightarrow Y$ existe un único morfismo $\rho : Z \longrightarrow X\prod Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

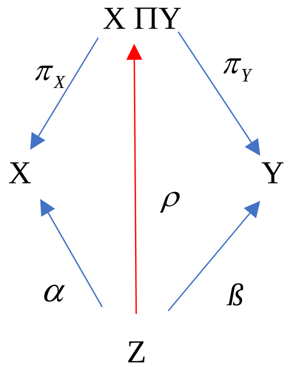

Figura 2 *Romboide; del Producto de Categorías*

Fuente: Elaboración propia

Es decir: $\rho \circ \pi_X = \alpha$ y $\pi_Y \circ \rho = ß$

Definición (2.3.19).- Sean $\mathcal{C}$ una categoría; X, Y $\in$ Obj ($\mathcal{C}$) entonces su coproducto es la terna: $(X\coprod Y, i_X, i_Y)$; donde $X \cup Y$ es un objeto en $\mathcal{C}$ y $i_X : X \longrightarrow X\coprod Y$, $\mathrm{i}_Y : Y \longrightarrow X\coprod Y$, son morfismos llamados inyecciones, tal que para cada objeto Z en $\mathcal{C}$ y para cada par de morfismos $\alpha : X \longrightarrow Z$ y $ß : Y \longrightarrow Z$, existe un único morfismo $\tau : X\coprod Y \longrightarrow Z$ haciendo el diagrama siguiente conmutativo.

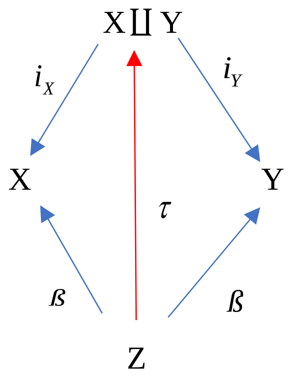

Figura 3 *Romboide del Coproducto de categorías*

Fuente: Elaboración propia

Es decir: $i_X \circ \tau = \alpha$ y $i_Y \circ \tau = ß$

Definición (Categoría aditiva) (2.3.20)

Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Se dice que $\mathscr{C}$ es aditiva si:

i) Hom (X, Y) es un grupo (aditivo) abeliano para cada X, Y obj ($\mathscr{C}$)

ii) La Ley distributiva de morfismos se cumple esto es:

$$X \xrightarrow{\alpha} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N \xrightarrow{ß} Y$$

$ß(f+g) = ßf + ßg$ y $(f+g)\circ\alpha = f\circ\alpha + g\circ\alpha$

Donde M, N, X, Y $\in$ Obj ($\mathscr{C}$).

iii) $\mathscr{C}$ posee objeto zero (recordar que un objeto cero es aquel objeto que es inicial y terminal simultáneamente) es decir: $Hom(X,0) = \{0\} = Hom(0,Y)$, para todo X, Y $\in$ Obj ($\mathscr{C}$).

iv) $\mathscr{C}$ posee productos finitos y coproductos finitos: i.e. para todo $X,Y \in Obj(\mathscr{C})$; entonces X∏Y e $X \coprod Y$ existen y son objetos de $\mathscr{C}$.

Definición (Funtor Aditivo) (2.3.21).- Sean $\mathscr{C}$ y D dos categorías aditivas; un funtor $T:\mathscr{C} \longrightarrow D$ (de cualquier varianza) es aditivo si para todo $X,Y \in Obj(\mathscr{C})$; y para todo $\alpha, ß \in Hom(X,Y)$; se tiene que: $T(\alpha + ß) = T(\alpha) + T(ß)$.

Esto es la función $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_D(T(X),T(Y))$ dado por $\alpha \mapsto T(\alpha)$, es un homomorfismo de grupos abelianos.

C) SUCESIONES ESPECTRALES

Las sucesiones espectrales surgen de Bicomplejos; y así empezamos ahora discutiendo este hecho.

Definición (2.3.22).- Un módulo graduado.- Es una familia indexada $M = (M_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de R – módulos (para algún anillo R). Los módulos graduados son comúnmente denotados por $M_\bullet$

Ejemplo (2.3.4)

1. Si $(C,d) \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow$

   Es un complejo entonces $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un módulo graduado.
2. Si (C, d) es un complejo, entonces la familia $H(C) = (H_p(C))_{p\in\mathbb{Z}}$ de sus módulos de Homología es un módulo graduado.

Definición (2.3.23).- Sean M y N dos módulos graduados y sea $a \in \mathbb{Z}$. Una aplicación graduada de Grado $"a"$ denotado por $f : M \longrightarrow N$ es una familia de homomorfismos:

$f : \{ f_p : M_p \longrightarrow N_{p+a} \}_{p\in\mathbb{Z}}$. El grado de “f” es $"a"$ y es denotado por $grad(f) = a$.

Ejemplo (2.3.4).- Si (C, d) es un Complejo, entonces su diferencial $d : C \longrightarrow C,$ dado por $d = \{ d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1} \}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una aplicación graduada de grado “-1”.

2.- Si $f : C \longrightarrow C'$ es una aplicación cadena, entonces $f = \{ f_n : C_n \longrightarrow C_n' \}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una aplicación de grado 0.

Observación (2.3.6).- Dada una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

De Complejos, la sucesión exacta larga de módulos de homología, es algunas veces llamada una Triángulo exacto.

$$\begin{tikzcd} H_\bullet(C') \arrow[rr, "i_*"] & & H_\bullet(C) \arrow[dl, "\pi_*"] \\ & H_\bullet(C'') \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

Figura 4 *Triángulo exacto de la sucesión exacta larga de Homología*

Fuente: Elaboración propia

Si nosotros consideramos cada vértice como un módulo graduado, entonces las flechas son verdaderamente aplicaciones graduadas: i_* y π_* tienen grado cero y el homomorfismo conexión "∂" tiene grado (-1).

Más generalmente, dado un triángulo exacto de módulos graduados y aplicaciones graduadas.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Figura 5 *Triángulo exacto de módulos graduados*

Fuente : Elaboración propia

Con: α,β,γ de grados: *a*, b, c respectivamente, nosotros podemos reconstruir la sucesión exacta larga de lo cual proviene. Elegimos algunos $p \in \mathbb{Z}$, y vamos a la derecha e izquierda de Ap:

$$\longrightarrow B_{p-b-c} \xrightarrow{\beta} C_{p-c} \xrightarrow{\gamma} A_p \xrightarrow{\alpha} B_{p+a} \xrightarrow{\beta} C_{p+a+b} \xrightarrow{\gamma} A_{p+a+b+c} \longrightarrow$$

Definición (2.3.23).- Un módulo Bigraduado es una familia de R – módulos doblemente indexada, $M = \left(M_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$. Un módulo bigraduado M, es comúnmente denotado por $M_{\bullet\bullet}$.

Definición (2.3.24).- Sean M, N dos módulos bigraduados, y sea $(a,b)\in \mathbb{Z}\ x\ \mathbb{Z}$. Una aplicación Bigraduada de Bigrado (*a*, b), denotada por: $f: M \longrightarrow N$, es una familia de homomorfismos

$$f = \left\{ f_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p+a,q+b} \right\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}x\mathbb{Z}}$$

El bigrado de "f" es: (*a*, b) y nosotros denotamos esto como: $grad(f) = (a,b)$

Definición (Bicomplejos) (2.3.25).- Un Bicomplejo (o complejo doble) es una terna ordenada $(M, d', d")$ donde $M = \left(M_{p,q}\right)$ es un módulo bigraduado; y $d', d": M \longrightarrow M$ son diferenciales de bigrados: (-1, 0) y (0, -1) respectivamente (donde $d'd' = 0$ y $d"d" = 0$) y así: $d'_{p,q-1}d"_{p,q} + d_{p-1,q} + d_{p,q} = 0$

Definición(2.3.26).- Si M es un bicomplejo, entonces el Complejo total, denotado por Tot(M) es el complejo con n – ésimo termino.

$$Tot(M)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

Y con diferenciales: $D_n : Tot(M)_n \longrightarrow Tot(M)_{n-1}$ dado por:

$$D_n = \sum_{p+q=n} \left[d'_{p,q} + d"_{p,q} \right]$$

Lema (2.3.4).- Si M es un bicomplejo, entonces $\left[Tot(M), D\right]$ es un complejo.

Nota.- La sucesión espectral surge como un método para calcular la homología del Complejo Total Tot(M).

Definición (2.3.27).- Una filtración de un módulo M es una familia creciente $\left(Mp\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ de submódulos de M tal que.

$$..........M_{p-1} \subseteq M_p \subseteq M_{p+1} \subseteq ....$$

El módulo factor de esta filtración forma el módulo graduado $\left(\dfrac{M_p}{M_{p-1}}\right)_{p\in\mathbb{Z}}$

Nota.- Las secuencias espectrales pueden ser introducidas de diferentes formas, nosotros lo haremos mediante las llamadas parejas exactas, que es el camino positivo y más simple.

Definición : (Pareja Exacta) (2.3.28)

Una pareja exacta es una 5-upla $(D, E, \alpha, ß, \gamma)$. Donde D y E son módulos bigraduados; α, ß, γ son aplicaciones bigraduadas y existe exactitud en cada vértice: Esto es

$$Ker(\alpha) = \mathrm{Im}(\gamma), \qquad Ker(ß) = \mathrm{Im}(\alpha) \qquad \text{y} \qquad Ker(\gamma) = \mathrm{Im}(ß)$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Figura 6 *Triángulo de Módulos y Aplicaciones bigraduadas*

Fuente: Elaboración propia

Proposición(2.3.8): Cada filtración $(F^pC)_{p\in\mathbb{Z}}$ de un Complejo C determina una pareja exacta.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha(1,-1)"] & & D \arrow[dl, "\beta(0,0)"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma(-1,0)"] & \end{tikzcd}$$

Figura 7 *Triángulo de un Complejo, que determina una pareja exacta*

Fuente: Elaboración propia

Cuyas aplicaciones bigraduadas tienen bigrados desplegado.

Demostración.- (Ver Joseph J. Rotman, An introduction to homological Algebra).

Definición (2.3.39).- Un módulo diferencial bigraduado es un par ordenado (M, d) donde M es un módulo Bigraduado y $d: M \longrightarrow M$ es una aplicación Bigraduada con la condición $d^2 = 0$.

- Si (M, d) es un módulo diferencial bigraduado, donde bigrad(d) = (*a*, b) entonces su homología H (M, d) es el módulo bigraduado cuyo (p, q) – término es:

$$H(M,d)_{p,q} = \frac{Kerd_{p,q}}{\operatorname{Im} d_{p-a,q-b}}$$

Definición (2.3.30).- Una Sucesión Espectral es una sucesión $\left(E^r, d^r\right)_{r\geq 1}$ de módulos bigraduados tal que: $E^{r+1} = H\left(E^r, d^r\right)$, para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Observación (2.3.7).- Si una pareja exacta $\left(D, E, \alpha, ß, \gamma\right)$ es relacionada como $\left(D^1, E^1, \alpha^1, ß^1, \gamma^1\right)$ entonces cada pareja exacta produce una sucesión espectral.

Teorema (2.3.1) (ρ) **.-** Cada filtración de un Complejo produce una sucesión espectral.

Demostración.- (Ver Joseph J. Rotman – An introduction to homological algebra).

Definición (convergencia)(2.3.31).- Dada una sucesión espectral $\left\{E^r, d^r\right\}$. Escribimos y/o definimos: "Las estructuras siguientes":

$$Z^{\infty} = \bigcap_r Z^r, \ \mathrm{B}^{\infty} = \bigcup_r Z^r$$

Como la unión ascendente de submódulos es un submódulo. Entonces $B^{\infty} \subseteq Z^{\infty}$ y el límite término de la sucesión espectral es el módulo bigraduado E^{∞}, definido como:

$$E^{\infty}_{p,q} = \frac{Z^{\infty}_{p,q}}{B^{\infty}_{p,q}}$$

Lema (2.3.5).- Sea $\left\{E^r, d^r\right\}$ una sucesión espectral

i. $E^{r+1} = E^r$ si y solamente si $Z^{r+1} = Z^r \ \ y \ \ B^{r+1} = B^r$

ii. Si $E^{r+1} = E^{r}$, Para todo $r \geq s$ entonces $E^{s} = E^{\infty}$

Demostración.- (Ver Joseph J. Rotman – An introduction to homological algebra).

Observación (2.3.7).- Dado una filtración $\left(F^{p}\right)$ de un complejo C con inclusiones $i^{p}: F^{p} \longrightarrow C$, entonces $i_{*}^{p}: H_{\bullet}\left(F^{p}\right) \longrightarrow H_{\bullet}(C)$. Puesto que $F^{p} \subseteq F^{p+1}$, nosotros tenemos: $im\left(i_{*}^{p}\right) \subseteq im\left(i_{*}^{p+1}\right)$; esto es $\left(\operatorname{Im}\ i_{*}^{p}\right)$ es una filtración de $H_{\bullet}(C)$.

Definición (2.3.32).- Si $\left(F^{p}C\right)$ es una filtración de un complejo C y $i^{p}: F^{p} \longrightarrow C$ son inclusiones, definimos $\Phi^{p}H_{n}(C) = \operatorname{Im}\ i_{*}^{p}$

Nosotros llamamos a $\left(\Phi^{p}H_{n}(C)\right)$ la filtración inducida de $H_{n}(C)$.

Definición (2.3.33).- Una filtración $\left(F^{p}M\right)$ de un módulo graduado M = $\left(M_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es borde si, para cada "n" existe enteros s = s(n) y t = t(n) tal que

$F^{S}M_{n} = \{0\}$ **y** $F^{t}M_{n} = M_{n}$

Definición (2.3.34).- Una sucesión espectral $\left(E^{r}, d^{r}\right)_{r\geq 1}$ converge a un módulo graduado H; denotado por: $E_{p,q}^{2} \underset{p}{\Longrightarrow} H_{n}$ si existe alguna filtración borde $\left(\phi^{p}H_{n}\right)$ de H con: $E_{p,q}^{\infty} \cong \dfrac{\phi^{p}H_{n}}{\phi^{p-1}H_{n}}$, para todo n.

Definición (2.3.35).- Si $\left(M, d', d''\right)$ es un bicomplejo, su primera homología iterada es el módulo bigraduado cuyo término (p, q) es: $H_{p}^{I}H_{q}^{II}(M)$

Proposición (2.3.9).- Si M es un bicomplejo en el primer cuadrante, entonces:

$${}^{I}E_{p,q}^{1} = Hq(Mp_{1}^{*}) \text{ y } E_{p,q}^{2} = H_{p}^{I}H_{q}^{II}(M) \underset{p}{\Longrightarrow} H_{n}(Tot(M))$$

Demostración.- Se obtiene de las definiciones anteriores.

Definición (2.3.36).- Si $\left(M, d', d''\right)$ es un bicomplejo; su segunda Homología iterada es el módulo bigraduado, cuyo término (p, q) es: $H_{p}^{II}H_{q}^{I}(M)$

Proposición (2.3.10).- Si M es un bicomplejo en el primer cuadrante, entonces

$$^{I}E^{1} = H_q(M_{p,*}) \quad \text{y} \quad ^{II}E^{2}_{p,q} = H^{I}_{p}H^{II}_{q}(M) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(Tot(M))$$

Demostración.- Similar a la proposición anterior.

Definición (2.3.36).- Una sucesión espectral (E^r, d^r) colapsa en el p-ésimo eje si $E^2_{p,q} = \{0\}$, para todo $q \neq 0$.

- Una sucesión espectral (E^r, d^r) colapsa en el q- ésimo eje si $E^2_{p,q} = \{0\}$, para todo $p \neq 0$.

Proposición (2.3.11).- Sea (E^r, d^r) una sucesión espectral en el primer cuadrante y sea

$$E^2_{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(Tot(M))$$

i. Si (E^r, d^r) colapsa sobre otro eje, entonces $E^{\infty}_{p,q} = E^2_{p,q}$, para todo p, q

ii. • Si (E^r, d^r) colapsa sobre los p – ejes. Entonces $Hn(Tot(M)) \cong E^2_{n,0}$

 • Si (E^r, d^r) colapsa sobre las q – ejes entonces Hn(Tot (M)) $\cong E^2_{0,n}$.

Demostración.- Usar las tres proposiciones inmediatas anteriores.

Teorema (2.3.2).- Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$ tres categorías abelianas con suficientes inyectivos y supóngase dados dos funtores covariantes exactos a izquierda: $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y G:$\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ donde para cada inyectivo $I \in \mathcal{C}$ se tiene $R^K G(F(I)) = 0$ con k > 0 y $R^K G$ son funtores derivados de G entonces para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$; existe una sucesión espectral relacionada a funtores derivados a derecha: F, G y $G \circ F$.

$$E_2^{pq} = R^P G\left(R^q F(X)\right) \Longrightarrow R^n\left(G \circ F\right)(X)$$

Demostración.- (Ver Joseph J. Rotman – An introduction to homological algebra).

A continuación presentamos algunos lemas relacionados a haces flácidos para luego obtener la existencia de una secuencia espectral.

Lema (2.3.6).- Cualquier haz inyectivo en $\mathcal{C}$(X), la categoría de haces abelianos en X es un haz flácido.

Demostración.- Cualquier haz puede ser inmerso en un haz flácido; es decir: el haz de secciones discontinuas en si mismo, pero si I es inyectivo, y $I \subseteq F$ con F flácido, entonces I es sumando directo de F, y de aquí flácido en si mismo.

Lema (2.3.7).- Si F es flácido, entonces $\Gamma_Z(F)$ lo es.

Demostración.- Reemplazando X por un subconjunto abierto V lo cual contiene Z como un subconjunto cerrado, podemos asumir que Z es cerrado en X, entonces mostramos que si U es cualquier subconjunto abierto de X, la aplicación.

$$\Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z\cap U}\left(U, F|_U\right)$$

Es suryectiva, donde suponemos que F es un haz flácido dado. Así sea $\sigma \in \Gamma_{Z\cap U}\left(U, F|_U\right)$ es decir σ es una sección de F sobre U, cuyo soporte está en $Z \cap U$. Consideremos la sección cero de F sobre el conjunto abierto X∖ Z; está en coherencia con σ sobre la intersección de sus dominios $U \cap (X \setminus Z) = U \setminus (Z \cap U)$, de aquí, existe una sección σ' de F sobre el conjunto abierto $U \cup (X \setminus Z)$, cuya restricción a U es σ, y cuya restricción a X ∖ Z es cero. Ahora como F es flácido, existe una sección σ″ de F sobre todo X, cuya restricción a $U \cup (X \setminus Z)$ es σ′. Claramente σ″ tiene soporte en Z, y $\sigma'' \mapsto \sigma$ bajo la aplicación antes dada, de aquí $\Gamma_Z(F)$ es flácido.

Lema (2.3.8).- Si F es flácido, entonces $H^K(X,F)=0$ para todo k > 0.

Demostración.- Sumergiendo F en un haz inyectivo I, y sea C el conúcleo entonces tenemos la sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$ entonces I es flácido (Ver lema ante – anterior). Por consiguiente C también es flácido y como Γ es funtor exacto entonces la sucesión siguiente es exacta.

$$0 \longrightarrow \Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(I) \longrightarrow \Gamma(C) \longrightarrow 0$$

De aquí $H^1(X,F)=0$ y $H^K(X,F) \cong H^{k-1}(X,C)=0,$ para k > 1 lo cual se obtiene inductivamente sobre K, y por tanto C es también flácido.

Proposición (2.3.12).- Si Z es localmente cerrado en X para cualquier F existe una sucesión espectral.

$$H^P(X, H_2^q(F)) = E_2^{pq} \Longrightarrow H_Z^n(X, F)$$

Donde $H^P(X, F)$ para cualquier F son los funtores derivados del funtor $F \mapsto \Gamma(F)$

Demostración.- Tenemos los funtores $\underline{\Gamma_Z} : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}'(X)$ y $\Gamma : \mathcal{C}'(X) \longrightarrow (Ab)$

Y de este modo tenemos la composición $\Gamma \circ \underline{\Gamma_Z} = \Gamma_Z$ y aplicando los lemas anteriores, se deduce la existencia de la sucesión espectral; así solamente mostraremos que $\underline{\Gamma_Z}$ lleva haces inyectivos en haces $\Gamma-$ aciclicos, nuevamente por los lemas inmediatos anteriores, cualquier inyectivo es flácido asi Γ_Z (flácido) = flácido, y cualquier flácido es Γ-acíclico por tanto el resultado.

CAPITULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis General

Los homomorfismos entre haces permitirá interpretar la Cohomología local de grupos y haces en términos de los funtores Ext.

3.1.2 Hipótesis Específica

a) Los isomorfismos entre haces permitirá interpretar la cohomología local de grupos y haces como el límite directo de los funtores $Ext^k(-,F)$

b) Un ideal I en un anillo A Noetheriano y M un A – módulo finito, permitirá establecer la equivalencia entre $Ext_A^K(N,M)=0$ y la existencia de una secuencia M – regular.

3.2 Definición Conceptual de Variables

Las variables identificados en la hipótesis general, se pueden definir conceptualmente de la forma que se indica a continuación.

Variable Independiente

La estructura algebraica de grupo y la estructura de un Haz Abeliano

Variable dependiente

La cohomología local y el funtor $Ext^k(-,F)$.

3.3 Operacionalización de la variable

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente Estructura algebraica de grupo y Haz abeliano.	Teoría de Grupos y Haces	Grupos y Haces	G y F	Analítico, Inductivo - Deductivo	Constructiva
Dependiente La Cohomología Local y el Funtor $Ext^{K}\left(-,F\right)$.	Teoría de Cohomología Local y Funtorial	Cohomología Local	$H_{Y}^{K}\left(F\right)$	Analítico, Inductivo - Deductivo	Constructiva

Gráfico 1 *Tabla Operacionalización de Variables*

Fuente : Elaboración Propia.

CAPÍTULO IV

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de la investigación

4.1.1. Tipo de Investigación

El tipo de investigación (Estudio) es básica, según Alva Lucía Marin Villada (2008), "También, llamada investigación Pura, teórica o dogmática. Se caracteriza porque parte de un marco teórico y permanece en él; la finalidad radica en formular nuevas teorías o modificar las existentes, en incrementar los conocimientos científicos o filosóficos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico".

Dado que es un estudio básico teórico, previamente se buscará aportar conocimientos que permitan mejorar algunos detalles del marco teórico (Cohomología Local), haciendo una recolección y revisión de material bibliográfico especializado.

4.2 Método de investigación

El método utilizado es demostrativo e Inductivo - deductivo

4.3. Población y muestra

No aplica

4.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Por ser un trabajo netamente "matemático" (Teórico – abstracto); no se requiere procedimientos especiales para la recolección de la información. Lo que se realiza es una búsqueda y revisión bibliográfica: (libros de especialidad, páginas web, papers, revistas especializadas, etc.)

4.5 Análisis y Procesamiento de datos

No hay análisis y procesamiento de datos, por ser un trabajo no experimental. La orientación del proyecto, no es de inversión ni de impacto ambiental. El proyecto se ha realizado luego de revisar abundante material bibliográfico y de especialidad dentro del área de geometría, topología y álgebra.

De esta manera iniciamos considerando categorías con suficientes inyectivos, para luego presentar una secuencia de proposiciones y lemas relacionados a haces flácidos y acíclicos; así como también la secuencia exacta de haces asociados y luego daremos una aplicación de la Cohomología local, a preesquemas.

“Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$ tres categorías con suficientes inyectivos, y supóngase que dados dos funtores covariantes exactos a izquierda $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ y $G:\mathcal{C}'\longrightarrow\mathcal{C}''$. Supóngase además que F toma inyectivos sobre objetos G – acíclicos. Es decir si I es objeto inyectivo en $\mathcal{C}, R^K G(F(I))=0$ para k > 0, donde $R^k G$ son los funtores derivado a derecha de G. Entonces para cada x∈Obj($\mathcal{C}$); existe una sucesión espectral relativa a los funtores derivados a derecha de F, G y G o F.

$$R^k G(R^j F(X)) \Rightarrow R^n (G\circ F)(X).$$

Con el propósito de aplicar este teorema expuesto en el Informe anterior, y así deducir la existencia de la sucesión espectral, necesitamos mostrar que $\underline{\Gamma_Z}$ lleva haces inyectivos sobre haces Γ – acíclicos, pero por resultados también expuestos en el informe anterior tenemos que cualquier inyectivo es flácido, Γ_Z(flácido) = flácido; y que cualquier flacido es Γ- acíclico. A continuación exponemos; Tres aspectos teóricos y fundamentales para la obtención y/o prueba de los resultados propuestos.

Proposiciones y Lemas relacionados a Haces Flácidos y acíclicos.

Lema: Sea X un espacio topológico $Z\subseteq X$ localmente cerrado, y sea Z' un cerrado en X. y sea $Z''=Z-Z'$ entonces para cualquier haz abeliano F sobre X, existe una sucesión exacta.

$$0\longrightarrow\Gamma_Z(F)\longrightarrow\Gamma_{Z'}(F)\longrightarrow\Gamma_{Z''}(F)$$

Además; si F es flácido; podemos escribir un cero = 0, también en el lado derecho.

Prueba.- Claramente podemos asumir que Z es cerrado en X. Entonces $\Gamma_{Z'}(F)$ es el conjunto de secciones globales de F con soporte en Z' que claramente este contenido en $\Gamma_Z(F)$. Escribiendo $V=V(Z')^c$ en X, V es abierto y $Z''=Z\cap V$ es decir Z'' es cerrado en V. Entonces se tiene que $F_{Z''}(F)=\left\{\sigma\in\Gamma\left(V,F|_V\right)\text{tal que sop}(\sigma)\ \subset z''\right\}$ claramente la aplicación restricción natural.

$$\phi : \Gamma\left(X, F\right) \longrightarrow \Gamma\left(V, F\,|_V\right)$$

Induce una aplicación $\Phi_Z : \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,F)$.

Además de decir que $\Phi_Z(\sigma) = 0$; esto significa que σ es cero en Z'', es decir σ tiene soporte en Z', aquí nuestra sucesión es exacta.

Ahora si F es flácido, ϕ es suryectiva. Entonces para $\sigma \in \Gamma_{Z''}(X,F)$, existe $\sigma' \in \Gamma\left(X,F\right)$ restringiendo a σ. Pero como $V = C(Z')^c$, entonces debe tener soporte en Z', y así Φ_Z es suryectiva.

En lo que sigue escribiremos los funtores derivados a derecha de Γ_Z como $R_Z^K(X,F) = H_Z^K(X,F)$ (respectivamente de $\underline{\Gamma_Z}$ como $\underline{R}_Z^K(F) = \underline{H}_Z^K(F)$)

Proposición (4.5.1). - Considerando $Z, Z'\ y\ Z''$ como en la del lema inmediato anterior y sea F cualquier haz abeliano sobre X. Entonces existe sucesiones exactas cortas.

$$\left(\beta_1\right)\ 0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(X,F) \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,F) \longrightarrow R^1_{Z'}(X,F) \longrightarrow R^1_Z(X,F) \longrightarrow .....$$

$$\left(\beta_2\right)\ 0 \longrightarrow \underline{\Gamma_{Z'}}(F) \longrightarrow \underline{\Gamma_Z}(F) \longrightarrow \underline{\Gamma_{Z''}}(F) \longrightarrow \underline{R}^1_{Z'}(F) \longrightarrow \underline{R}^1_Z(F) \longrightarrow .....$$

Prueba**.-** La existencia de tales sucesiones exactas son obtenidas directamente por la naturalidad del funtor derivado a derecha $R^K\left(\bullet\right)$.

Proposición (4.5.2).- Sea Z un cerrado en X $\left(Z \subseteq X\right)$, y F cualquier haz abeliano en X. Existen sucesiones exactas.

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X-Z,F) \longrightarrow R^1_Z(X,F) \longrightarrow R^1(X,F) \longrightarrow R^1\left(X-Z,F\right) \longrightarrow .....\left(\varepsilon_0\right)$$

y

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma_Z}(F) \longrightarrow F \longrightarrow j_*(F\,|\,X-Z) \longrightarrow R^1_Z(F) \longrightarrow 0 ....\left(\varepsilon_1\right)$$

Donde $\underline{R_Z^{k+1}}(F) \cong R^K_{j_*}\left(F\,|\,X-Z\right)$ para k > 0;

j : X – Z $\hookrightarrow$ X es la inyección natural y j_* es el funtor derivado imagen directa.

Prueba.- Tomando una resolución inyectiva

$L=(I_i)$ de $F:0\longrightarrow F\longrightarrow I_0\longrightarrow I_1\longrightarrow I_2\longrightarrow$........ entonces los I_i todos son flácidos pues basta recordar el lema: "Cualquier haz inyectivo en la categoría $\mathcal{C}(X)$, de haces abelianos sobre X es flácido" y por el lema inmediato anterior tenemos una sucesión exacta de complejos.

$$0\longrightarrow\Gamma_{Z'}(L)\longrightarrow\Gamma_{Z}(L)\longrightarrow\Gamma_{Z''}(L)\longrightarrow 0$$

Similar para los funtores de haces: $\underline{\Gamma_{Z'}},\underline{\Gamma_{Z}}$ y $\underline{\Gamma_{Z''}}$. Estos complejos dan la sucesión exacta descrita líneas arriba. Para la proposición buscada, tomamos el caso particular donde Z = X y escribimos Z por Z'. Note que $\Gamma_X(F)=F$, y $\Gamma_{X-Z}(F)=J_*(F\mid X-Z)$. Por definición de funtor imagen directa. Γ_X es exacta, así $\underline{R_X^k}(F)=0$ para k > 0 , y $H_{X-Z}^k(F)=R_{j_*}^k(F\mid X-Z)$.

Proposición (4.5.3).- Sea F un haz abeliano sobre X, son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) F es flácido

(b) Para todo subespacio localmente cerrado Y de X y para todo i > 0. Se tiene:

$R_Y^i(X,F)=0$ y $\underline{R_Y^i}(F)=0$

(c) Para todo subespacio cerrado Y de X, $\underline{R_Y^i}(X,F)=0$

Demostración.- (a) ➔ (b) supóngase F flácido, e $Y\subseteq X$ localmente cerrado. Sea $V\subseteq X$ un conjunto abierto e Y como un subconjunto cerrado. Entonces F|V es flácido, así aplicando la formula de escisión "$R_Z^K(X,F)\cong R_Z^K(V,F|_V)$"

Podemos asumir que V = X; es decir Y es cerrado en X, usando la proposición inmediata anterior y observando que $R^i(X,F)=R^i(X-Y,F)=0$ para i > 0, puesto que F es flácido, nosotros encontramos que $H_y^i(X,F)=0$ para $i\geq 2$ y $\Gamma(X,F)\longrightarrow\Gamma(X-Y,F)\longrightarrow H_Y^1(X,F)\longrightarrow 0$ por la definición de flacidad, también $R_Y^1(X,F)=0$. Para cualquier abierto $U\subseteq X, F\mid U$ es también abierto, así $H_{Y\cap U}^i(U,F|_U)=0$ para i > 0. Recordar "Sea X un espacio topológico, Z un subespacio localmente cerrado, y F un haz abeliano de X. Para cada $k \geq 0, \underline{R_Z^K}(F)$ es el haz asociado al Prehaz. $U \longrightarrow H_{Z\cap U}^k(U, F|_U)$". Entonces usando este resultado al pasar para haces asociados, encontramos que $H_Y^i(F) = 0,$ para i > 0.

(b) ➔ (c): Es inmediato, pues $R_Y^i(X, F) = 0$ en particular $R_y^1(X, F) = 0$.

(c) ➔ (a): De la definición de flacidad y la sucesión exacta, para cualquier cerrado Y se tiene:

$$\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma\left(X - Y, F\right) \longrightarrow R_Y^1\left(X, F\right)$$

Proposición (4.5.4).- Sea Y un subconjunto cerrado de X. Sea V = X – Y, sea F un haz abeliano sobre X, y sea n – un número entero. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $R_Y^i(F) = 0$ para todo $i \leq n$

(b) Par todo subconjunto abierto U de X, la aplicación $\alpha_i : H^i(U, F) \longrightarrow H^i\left(U \cap V, F\right)$ es inyectivo para i = 0 y es un isomorfismo para todo i < n.

Prueba: (a) ➔ (b) : Puesto que la condición (a) es de naturaleza local, esto será suficiente para probar (b) en el caso donde U = X.

Así que debemos mostrar que la aplicación.

$$\alpha_i : R^i(X, F) \longrightarrow R^i(X - Y, F)$$

Es inyectiva para i = 0, y un isomorfismo para i < n. Usando las sucesiones exactas $\left(\varepsilon_0\right)$ y $\left(\varepsilon_1\right)$, esto será suficiente para mostrar que $H_Y^K(X, F) = 0$ para $i \leq n.$ Pero por el resultado : "Si Z es localmente cerrado en X, para cualquier F existe una sucesión espectral. $E_Z^{Kj} = R^K(X, H_Z^j(F)) \Rightarrow H_Z^n(X, F)$". Se tiene que existe una sucesión espectral $E_Z^{Kj} = R^K(X, R_Y^j(F)) \Rightarrow H_Y^i(X, F);$ ya que por hipótesis $H_Y^j(F) = 0$ para $j \leq n.$ De aquí se sigue que $H_Y^i(X, F) = 0$ para $i \leq n$.

(b) ➔ (a) : Nuestra hipótesis claramente asegura que $H^{i}_{Y\cap U}(U,F\,|_{U})=0$ para cualquier abierto U, y para i = 0 e i < n. El único caso que resta es cuando i = n > 0, entonces para cada U, tenemos:

$$R^{n-1}(U,F)\xrightarrow{\sim}R^{n-1}\left(U\cap V,F\right)\longrightarrow R^{n}_{Y\cap U}\left(U,F\right)\longrightarrow R^{n}(U,F) \qquad \text{(I)}$$

Sucesión Exacta de Haces Asociados

La sucesión exacta (I), conmuta con los homomorfismos restricción a medida que pasamos de un abierto U a otro, da lugar a una secuencia exacta asociada de haces. Pero el haz asociado al Prehaz $U \rightsquigarrow R^{n}\left(U,F\right)$ es nulo, puesto que n > 0, de este modo se tiene.

$$\underline{R}^{n-1}(F)\xrightarrow{\sim}R^{n-1}j_{*}\left(F\,|\,V\right)\longrightarrow R^{n}_{Y}(F)\longrightarrow 0 \text{ la cual muestra que: } R^{n}_{Y}(F)=0$$

Proposición (4.5.5).- Sea X un espacio de Zariski n – dimensional, sea Y un subconjunto localmente cerrado de X, y sea F cualquier haz abeliano sobre X, entonces para todo i > n, $R^{i}_{Y}(X,F)=0,$ y $\underline{R^{i}_{Y}}(F)=0$.

Prueba. - Obsérvese que $R^{i}_{Y}(X,F)=0$ para i > 0 y F flácido “Pues basta recordar que: si F es un haz abeliano sobre X, entonces F es flácido si y solo si $R^{i}_{Y}(X,F)=0=\underline{R}^{i}_{Y}(F)$, para todo i > 0 y para todo subespacio localmente cerrado Y de X”, y que el funtor Γ_{Y} conmuta con limites directos y sumas directas finitas. Cualquier subconjunto abierto $U\subseteq X$ es nuevamente un espacio de Zariski n – dimensional; así $Y^{i}_{Y\cap U}(U,F\,|\,U)=0$ para i > n pasando para haces asociados se obtiene que $R^{i}_{Y}(X,F)=0$ para i > n.

Observación (4.5.1). – Para espacios topológicos adecuados en la cual la cohomología de haces está de acuerdo con la cohomologia singular (Es decir: Para compacto y localmente contractible); uno puede interpretar los grupos de cohomologia definido anteriormente en términos de la cohomologia relativa. Para ser preciso; sea Y un cerrado en X y sea G un grupo abeliano (respectivamente el haz constante G sobre X) entonces:

$$R^{i}_{Y}(X,G)=R^{i}(X,X-Y;G)$$

Donde la expresión derecha es cohomologia singular de X relativo a $X \setminus Y$ con coeficientes en G, esto es un isomorfismo funtorial canonico, compatible con la sucesión exacta usual.

Ejemplo (4.5.1).- Sea X un espacio topológico X, Y un subconjunto cerrado de X, de modo que X se ve localmente como: $Y \; x \; \mathbb{R}^k$; esto es, tal que para cada $y \in Y$, existe una vecindad V en "y" en X, tal que el Par: $\left(Y \cap V, V\right)$ es homeomorfico a $\left(Y \cap Vx\left\{0\right\}, Y \cap Vx\mathbb{R}^K\right)$.

Nosotros consideremos la cohomologia de haces $R_Y^i(X, \mathbb{Z})$, este haz tendrá soporte en Y, y nosotros podemos calcular esto de manera local, sobre un abierto V, tal como arriba.

$$R_{\{0\}}^i\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \text{ i } \neq \text{k} \\ \mathbb{Z} \text{ si } \text{ i = k} \end{cases}$$

(Uno puede calcular esto por métodos topológicos ordinarios vía la observación anterior: el Par $\left(\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^K - \left\{0\right\}\right)$ es del mismo tipo de homotopía como el par: $\left(\mathbb{R}^K, S^{K-1}\right)$, así tenemos:

$$\ldots\ldots \longrightarrow R^{i-1}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow R^{i-1}(S^{k-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow R_{\{0\}}^i\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow R^i\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \ldots\ldots$$

Nosotros sabemos: $R^i\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{Z}\right) = 0$ para i > 0, y

$$R^i\left(S^{k-1}; \mathbb{Z}\right) = \begin{cases} 0 \text{ , para } \text{ i } \neq \text{k-1} \\ \mathbb{Z} \text{ , en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto el haz $\underline{R_Y^k}\left(X, \mathbb{Z}\right)$ es localmente isomórfico a $\mathbb{Z}$, a lo largo de Y. Llamamos este haz $\underline{T_{Y,X}}$, el haz de enteros de Y en X. La sucesión espectral $R^K(X, \underline{R_Z^j}(F)) = E_2^{Kj} \Rightarrow R_Z^n(X, F)$, degenera, puesto que $\underline{R_Y^i}\left(X, \mathbb{Z}\right) \neq 0$ solo cuando i = d, y nosotros encontramos $R_Y^i\left(X, \mathbb{Z}\right) \cong R^{i-k}\left(X, T_{Y,X}\right) = R^{i-k}\left(Y, T_{Y,X}\right)$ puesto que $T_{Y,X}$ es concentrado en Y, sustituyendo en las sucesiones exactas ($ß_0$) y ($ß_1$) se tiene:

$$.....\longrightarrow R^{i}\left(X,\mathbb{Z}\right)\longrightarrow R^{i}(X-Y,\mathbb{Z})\longrightarrow R^{i+1-k}\left(Y,T_{Y,X}\right)\longrightarrow R^{i+1}\left(X,\mathbb{Z}\right)\longrightarrow......$$

Por tanto el resultado.

Aplicación de la Cohomologia Local a Preesquemas

En esta sección aplicamos las nociones de cohomología local, para el caso donde nuestro espacio topológico X es un preesquema. Primero estudiaremos el caso de un esquema afín mostrando como calcular la cohomología local de grupos y haces en función de los funtores “Ext”. Estos resultados están muy relacionados o cercanos a teoremas de serre, relativo a la cohomología de haces sobre espacio proyectivo.

Proposición (4.5.6).- Sea X un preesquema, con estructura de haz O_X, y sea Y = V ∖ U un subconjunto localmente cerrado, donde U y V son abiertos. Asúmase que las aplicaciones inyección de U y V en X son inversiones cuasi – compactas (esto siempre será cierto si X es localmente Noetheriano).

Si F es haz cuasi – coherente de O_X - módulo, entonces los haces $R_Y^n(F)$ son haces cuasi – coherentes de O_X - módulo, para todo $n \geq 0$.

Prueba.- Por resultados tenemos sucesiones exactas de haces.

$$.......\longrightarrow R_U^n(F)\longrightarrow R_Y^n(F)\longrightarrow R_V^{n+1}(F)\longrightarrow..........$$

Sobre cualquier preesquema. Puesto que: el núcleo y conúcleo de un homomorfismo de haces cuasi – coherentes son cuasi – coherentes, y puesto que una extensión de un haz cuasi – coherente por otro es cuasi coherente, esto será suficiente para mostrar que los haces $R_U^n(F)$ y $R_V^n(F)$ son cuasi – coherentes. Nosotros tenemos que si U es abierto en X, y $j:U\longrightarrow X$ es la inyección natural, entonces el haz $R_U^n(F)$ es solo $R^n J_*(F\,|\,U)$. Debido a que F|U es un haz cuasi – coherente sobre U. Y puesto que una inmersión es separada, entonces nuestra proposición resultara del siguiente teorema, conocido dentro del algebra homológico.

Teorema (4.5.1): Sea $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo separado cuasi – compacto de pre esquemas, y sea F un haz cuasi – coherente sobre X, entonces las imágenes directas mas altos $R^n f_*(F)$ de F son todos cuasi – coherentes sobre Y.

Demostración: (Ver: Robin Hartshorne; Residuos and duality)

Proposición (4.5.7).- Sea X = Spec (A) un haz afín, y sea Y un subconjunto cerrado de X, entonces para cualquier haz cuasi – coherente F sobre X, y para cualquier $i \geq 0$ $H_Y^i(F)$ es el haz asociado al A – modulo $H_Y^i(X,F)$. Además, existe una sucesión exacta, corta.

$$0 \longrightarrow R_Y^0(X,F) \longrightarrow R^\circ(X,F) \longrightarrow R^\circ(X-Y,F) \longrightarrow R_Y^1(X,F) \longrightarrow 0$$

Y existen isomorfismos

$$R^K(X-Y,F) \cong R_Y^{K+1}, \qquad K > 0$$

Prueba.- Para la primera afirmación, aplicamos el resultado siguiente: “Si Y es localmente cerrado en X, para cualquier F existe una sucesión espectral.

$$R^K(X, R_Y^j(F)) = E_2^{kJ} \Rightarrow R_Y^h(X,F)$$

Por tal resultado, nosotros sabemos que los haces $\underline{R_Y^k}(F)$ son cuasi – coherente. Por lo tanto, X es affin, $E_2^{Kj} = 0$ para k > 0. Así que nuestra sucesión espectral permite obtener el isomorfismo:

$$R_Y^n(X,F) \cong R^\circ(X, H_Y^n(F))$$

En otras palabras $H_Y^n(F)$ es el haz asociado de los A – módulos $R_y^n(X,F)$.

La segunda afirmación se sigue directamente de las sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X-Z,F) \longrightarrow H_Z^1(X,F) \longrightarrow H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X-Z,F) \downarrow$$

y

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma_Z}(F) \longrightarrow F \longrightarrow j_*(F(X-Z) \longrightarrow R_Z^1(F) \longrightarrow 0$$

Ya que para X affin; los grupos $R^X(X,F) = 0$ para k > 0.

Ahora procederemos a detallar el estudio de la cohomología local de un esquema afín.

Ya que la cohomología de haces $H_Y^n(F) = R_Y^n(F)$. Como puede observarse en adelante, escribiremos: $H^K(-)$ en lugar de $R^K(-)$

Definición (4.5.1).- Sea K° un complejo de A – módulos, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $K[n]$ denota el complejo K° con cambio "n"; es decir el Complejo con módulos $\left[K°[n]\right]^i = K^{n+i}$, y diferencial $(-1)^n \partial_k$.

Supóngase que K° y L° son complejos de R – módulos. Su producto tensorial es el complejo $K° \otimes_R L°$, con $\left(K° \otimes_R L°\right)^n = \underset{i+j=n}{\oplus} K^i \otimes_A L^j$, y los diferenciales A – lineales definidos sobre un elemento $k \otimes l \in K^i \otimes_A L^j$ es $\partial\left(k \otimes l\right) = \partial_k\left(k\right) \otimes l + (-1)^i k \otimes \partial_L(l)$.

El complejo de homomorfismos de K° en L° es el complejo $Hom_A(K°, L°)$ consistente de los módulos $Hom_A(K°, L°)^n = \prod Hom_A(K^i, L^{i+n})$, y diferenciales A – lineales. Definida sobre un elemento $f \in Hom_R(K°, L°)^n$ por $\partial\left(f\right) = \partial_L \circ f - (-1)^n f \circ \partial_k$.

Definición.- (Filtraciones y anillos graduados asociados) (4.5.2)

Sea C un semigrupo conmutativo con identidad elemento "0". Un anillo A es C-graduado si $A = \underset{i \in G}{\oplus} R_i$ como un grupo abeliano y $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ para cada i, j $\in C$. Cuando A es un algebra sobre un cuerpo K; asumimos que la descomposición de la suma directa es uno de los K-espacios vectoriales.

Un A – módulo M es graduado si $M = \underset{i \in C}{\oplus} M_i$ con $R_i . M_j \subseteq M_{i+j}$. Nótese que R_0 es un subanillo de A, y cada M_i es un R_0 – módulo.

Ejemplo (4.5.2).- Sea $A = K\left[x_1, \ldots., x_n\right]$ un anillo de polinomios sobre un campo K. La Calificación Estandad sobre A es aquel donde $grad(x_i) = 1$. Para cada i. La clasificación fina es la $\mathbb{N}^n$ – clasificación donde grad$\left(x_i\right)$ es la i – ésima base vectorial en $\mathbb{N}^n$.

Ejemplo (4.5.3).- Sea A un C-álgebra graduada sobre un campo K. la n-ésima potencia tensorial de A sobre K, denotada por $R^{\otimes n}$, es también C-graduada con

$$\left(R^{\otimes n}\right)_i = \sum_{j_1+....+j_n=1} \left(R_{j_1} \otimes_k ......\otimes_k R_{j_n}\right) \text{para } i \in \mathbb{N}\,.$$

Definición (4.5.3).– • Sea A un anillo. Una filtración creciente sobre A es una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\geq 0}$ de subgrupos aditivos de A satisfaciendo las condiciones siguientes:

i) $F_i \subseteq F_{i+1}$ para cada i

ii) $F_i F_j \subseteq F_{i+j}$ para cada i, j y el elemento identidad de R se encuentra en F_0.

- La filtración es exhaustiva si $\underset{i}{U} F_i = A$ similarmente uno tiene la noción de una filtración decreciente, y se dice que la filtración es separada si $\bigcap_i Fi = \{0\}$.

Observación (4.5.1).- Convenientemente pongamos $F_i = 0$, para i < 0, si $\mathcal{F} = \{F_i\}_i$ es una filtración creciente y $F_i = A$ para i < 0 cuando $\mathcal{F} = \{F_i\}_i$ es una filtración decreciente. Si A es un álgebra sobre un campo K, los F_i deberían ser K-espacios vectoriales.

Ejemplo (4.5.4).- Si A es $\mathbb{N}-$graduado, $F_i = \sum_{j\leq i} R_j$ define una filtración exhaustiva creciente de A. Ahora si $F_i = \sum_{j\leq i} R_j$ entonces $\mathcal{F} = \{F_i\}_i$ define una filtración decreciente separada.

(2) Cada ideal bilatero I en un anillo A genera o produce una filtración decreciente $\{I^i\}$ llamada la filtración I-adica. Esta es precisamente separada cuando $\bigcap_i I^i = \{0\}$.

Definición (4.5.4). - Sea A un anillo y sea $\mathcal{F} = \{F_i\}_i$ una filtración creciente. El anillo graduado asociado con respecto a $\mathcal{F}$ es un grupo asociado abeliano. Esto es:

$$gr_F(A) = \bigoplus_{i\geq 0} \frac{F_i}{F_{i-1}}$$

Con una estructura $\mathbb{N}$ - graduada dada por la multiplicación canónica. Si $\mathcal{F}$ es una filtración decreciente, nosotros establecemos que $gr_F(R) = \oplus_i \frac{F_i}{F_{i-1}}$.

Definición (4.5.5).- Sea $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una filtración creciente sobre A. Una filtración sobre un A – módulo M es una familia $G = \{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de subgrupos aditivos satisfaciendo:

1) $G_i \subseteq G_{i+1}$ para cada i, y $G_i = 0$ para i ≤ 0.

2) $F_i.G_j \subseteq G_{i+j}$ para cada i, j.

Diremos que G es exhaustiva si $\bigcup_i G_i = M$.

Uno construye un módulo graduado asociado $\mathcal{G}_{r_G}(M)$ de modo o manera obvia.

Proposición (4.5.8).- Sea $\mathcal{F}$ una filtración exhaustiva creciente sobre A tal que el anillo $\mathcal{G}_{r_F}(A)$ es Noetheriano y sea M un A – módulo. Si existe una filtración exhaustiva G sobre M con $\mathcal{G}_{r_G}(M)$ un $\mathcal{G}_{r_G}(A)$ - módulo Noetheriano entonces este es inducido por $\mathcal{F}$.

Además si G es una filtración exhaustiva sobre M, existe un entero kK tal que $G_i \subseteq G'_{k+i}$ para cada i.

Prueba.- Sean $m_1, m_2, ..., m_k$ elementos en M cuyas imágenes generan $gr_G(M)$ como un $gr_F(A)$ – módulo, establezcamos K_j para ser el grado de la imagen de m_j en $gr_G(M)$. El resto de la prueba es rutinario.

Nota.- Cuando tenemos un solo elemento de un anillo; hay un complejo que inherentemente puede ser construido, este es el llamado complejo de Koszul.

Definición (4.5.6).- Sea R un anillo, $x \in A$. **El Complejo de Koszul sobre x** (o complejo de Koszul en X), denotado por $K^\circ(x, A)$, es el complejo.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow 0$$

Con A en grado -1 y 0. Supongamos que tenemos una sucesión dada de elementos.

$\overline{x} = x_1,....,x_d$ en A. Entonces el Complejo de Koszul en $\overline{x}$ es el complejo (Producto Tensorial) denotado y definido como:

$$K^\circ(\overline{x}, A) = K^\circ(x_1, A) \otimes_A ...... \otimes_A K^\circ(x_d; A).$$

El módulo no cero en este complejo están ubicados en grados : -d a 0. Note que, bajo un isomorfismo de Complejos, $K^\circ(\overline{x}, A)$ es independiente del orden de los elementos de x_i

Ejemplo (4.5.5).- Sean $x, x' \in A$. El Complejo de Koszul en x y x' son:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\;x\;} A \longrightarrow 0; \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\;x'\;} A \longrightarrow 0$$

Gráfico 2 *Representación secuencial del Complejo de Kozul*

Fuente: Elaboración Propia

Su producto tensorial $K^\circ(x, y; A)$ es el complejo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{bmatrix} -x' \\ x \end{bmatrix}} AxA \xrightarrow{[x \; x']} A \longrightarrow 0$$

Donde los tres módulos no ceros están en grados -2, -1 y 0. Observe que $K^\circ(x, y, A)$ es claramente un complejo.

Definición (4.5.7).- Sea $\overline{x} = x_1,....,x_d$ una sucesión de elementos en A y M un A – módulo. El **Complejo de Koszul** de x sobre M es el Complejo.

$$K^\circ(\overline{x}, M) = K^\circ(x; A) \otimes_A M.$$

La cohomología Koszul de x sobre M es $H^j(\overline{x}; M) = H^j(K^\circ(\overline{x}; M))$ para $j \in Z$.

Ejemplo (4.5.8).- Sea x un elemento de un anillo A, y sea M un A – módulo, los “pequeños” complejos de Koszul $K^\circ(\overline{x}; M)$ calcula la cohomología de Koszul trivial en este caso.

$$H^{-1}(\overline{x}; M) = [O;_M \overline{x}] \quad \text{y} \quad H^\circ(\overline{x}; m) = \frac{M}{xM}$$

Ahora sea A un anillo conmutativo y sea *f* un elemento de A. Denotemos por K(*f*) el complejo de A – módulos definido como sigue: Los módulos son:

$k_1(f) \cong k_0(f) \cong A;\ k_i(f) = 0$ para i > 1 y la aplicación $d : k_1(f) \longrightarrow k_0(f)$ es multiplicación por *f*.

Si $\underline{f} = (f_1, \ldots\ldots, f_n)$ es una familia finita de elementos de A, y si M es un A- módulo, entonces denotaremos por $K_*(f; M)$ el **complejo homológico** $K(f_1) \otimes_A \ldots\ldots \otimes_A K(f_n) \otimes_A M;$ donde M es considerado como un complejo concentrado en grado cero.

De otro lado denotemos por $k^*(\underline{f}; M)$ el Complejo Cohomológico $Hom_A\left(k_*(\underline{f}; A), M\right)$

La homología y cohomología de estos complejos serán denotados por:

$H_*(\underline{f}; M)\ y\ H^*(\underline{f}; M)$, respectivamente.

Si *m* y *n* son dos números enteros positivos tal que $n \geq m;$ entonces existe una aplicación natural de los **Complejos de Koszul.**

$$K(f^n) \longrightarrow K(f^m)$$

Definido como sigue: en grado cero esto es la aplicación identidad de A, y en grado uno este es la multiplicación por f^{n-m}. Uno extiende esta definición en forma trivial u obvia para dar aplicaciones de los Complejos de Koszul de n – elementos de A con respecto a un módulo M, y por consiguiente también aplicaciones de la homología y cohomología de estos complejos como sigue:

Pongamos: $\underline{f}^m = (f_1^m, \ldots., f_k^m):$

$$K_*(\underline{f}^n; M) \longrightarrow K_*(\underline{f}^m; M)$$

$$H_*(f^n; M) \longrightarrow H_*(f^m; M)$$

y

$$K*\left(\underline{f}^{n};M\right) \longrightarrow K*\left(\underline{f}^{m};M\right)$$

$$H*\left(\underline{f}^{n};M\right) \longrightarrow H*\left(\underline{f};M\right)$$

Gráfico 3 *Secuencias inducidas de Aplicaciones Naturales de los Complejos de Kozul*

Fuente: Elaboración propia

Así en el primer caso tenemos sistema inverso de Complejos y grupos de homología; en el segundo caso tenemos sistemas directos de complejos y grupos de Cohomología.

Proposición (4.5.9).- Sea A un anillo conmutativo con espectro primo X; sea $\underline{f} = (f_1, ..., f_m)$ una sucesión de elementos de A, y sea la variedad del ideal generado por $Y \subseteq X$; sea M un A – módulo. Entonces existe un isomorfismo de funtores cohomológicos $(i \geq 0)$

$$\varinjlim_{m} H^{i}\left(\underline{f}^{m};M\right) \cong H_{Y}^{i}(X,\tilde{M})$$

Prueba.- (Ver: Robin Hartshorne; Residues and duality. Pag. 302).

Observación (4.5.2).- La prueba de la proposición anterior permite observar resultados que se descifran como:

Primero**.-** Permite interpretar el limite directo de la cohomología de Koszul en términos de la cohomologia de Cech, para simplificar la notación definimos $H_{f}^{i}(M)$. Como $\varinjlim_{m} H^{i}\left(\underline{f}^{m};M\right)$.

Si $\mathcal{U}$ es una colección de conjuntos abiertos de X, y si F es un haz sobre X, denotamos por $\overset{v}{H}{}^{i}(\mathcal{U},F)$ la i – ésima cohomología de grupos de Cech del espacio X con respecto a la familia de conjuntos abiertos $\mathcal{U}$, y con coeficientes en el haz F.

Segundo.- Si $X = Spec(A) = \{P \subseteq A : P - ideal\ primo\}$; y si $\underline{f} = (f_1, ..., f_n)$ es una familia finita de elementos de A, entonces denotamos por $\mathcal{U}_{f}$ la familia de conjuntos abiertos $(\mathcal{U}_i)$, i = 1, ….,n donde $\mathcal{U}_i$ es el complemento en X de la variedad del ideal generado por f_i.

Proposición (4.5.10).- Con las hipótesis de la proposición inmediata anterior y con las notaciones antes dadas, existe una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \underline{H}_{\underline{f}}^{0}(M) \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} \check{H}^{\circ}\left(\underline{\mathcal{U}_f}, \tilde{M}\right) \longrightarrow \underline{H}_{\underline{f}}^{1}(M) \longrightarrow 0$$

Donde α es la aplicación restricción natural y existen isomorfismos.

$$H^{i}\left(\underline{\mathcal{U}_f}, \tilde{M}\right) \cong H_{\underline{f}}^{i+1}(M) \qquad \text{para i > 0.}$$

Además, la sucesión exacta e isomorfismos son funtoriales en M.

Prueba.- La demostración de esta proposición es elemental mostramos explícitamente que el complejo $C^{*}\left(\underline{\mathcal{U}_f}, \tilde{M}\right)$ de cocadenas de Coech de $\underline{\mathcal{U}_f}$ con coeficientes en $\tilde{M}$ es canonicamente isomórfico al limite directo $\underline{K_f^{*}}(M)$ de los Complejos cohomológicos de Koszul $K^{*}(\underline{f}^{m}; \tilde{M})$, pero con dimensiones mayores que uno. Es decir existe un diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{K_f^{0}}(M) \arrow[r] & \underline{K_f^{1}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \underline{K_f^{2}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots\cdots \\
 & 0 \arrow[r] & C^{0}\left(\underline{\mathcal{U}_f}, \tilde{M}\right) \arrow[r] & C^{1}\left(\underline{\mathcal{U}_f}, \tilde{M}\right) \arrow[r] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Ahora desde que el límite directo es un funtor exacto, uno puede calcular $\underline{H_f^{i}}(M)$ como la cohomología del Complejo $\underline{K_f^{*}}(M)$, y uno encuentra la sucesión exacta y los isomorfismos requeridos.

Proposición (4.5.11).- Sea X un esquema, y $\mathcal{U}$ – un cubrimiento de X por subesquemas afines abiertos, y sea F un esquema casi – coherente en X. entonces existe un isomorfismo de funtores cohomológicos $(i \geq 0)$

$$\check{H}^{i}(\mathcal{U}, F) \cong R^{i}(X, F)$$

Donde $R^{i}(X, F)$ denota el i – ésimo funtor derivado del Γ - funtor de la categoría de todo haz abeliano en X.

Demostración.- Es rutinario, siguiendo la definición de esquema y cubrimiento de la misma.

CAPITULO V

5.1. Resultados Descriptivos

Los límites directos y los límites inversos de espacios topológicos son frecuentemente utilizados en Topología Moderna. En general en teoría de categorías, la noción abstracta de límite, engloba o captura las propiedades fundamentales de las construcciones universales como por ejemplo los productos y los propios límites inversos; mientras que su dual como es el colimite generaliza construcciones como por ejemplo: Uniones disjuntas, sumas fibradas, productos fibrados y límites directos.

Los límites y colimites vistos como objetos duales existen a un gran nivel de abstracción es así que empezamos este capítulo estudiando previamente producto, productos fibrados, ecualizadores y sus respectivos duales de cada uno de estos objetos.

Nuestro objetivo será mostrar que si A es un anillo Noetheriano, entonces los funtores $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)$ para i > 0, son funtores derivados del funtor $H^i_{\mathcal{F}}(M)$ en la categoría de A módulos. Este es la misma cosa; es decir si M es un A-módulo inyectivo, entonces $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M) = 0$ para i > 0.

(A) ESTUDIO DEL LÍMITE DIRECTO DE COHOMOLOGÍA LOCAL

Empezamos estudiando el Límite directo de cohomología local y el isomorfismo entre $H^i_Y(F)$ y $\varinjlim \mathrm{Ext}^{(r)}_{(F)}$; así como también codimensión cohomológica y grupos de cohomología local. Previamente recordaremos las definiciones de sistema inverso y sistema directo.

Definición (Sistema Inverso) (5.1.1)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea Λ un conjunto parcialmente ordenado. Un sistema inverso en $\mathcal{C}$ es un par ordenado $\left((E_i)_{i\in\Lambda}, (\varphi_i^j)_{i\leq j}\right)$ abreviadamente $\{E_i, \varphi_i^j\}$; donde $\mathcal{F} = \{E_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia indexada de objetos en $\mathscr{C}$ i.e. $E_i \in Obj(\mathscr{C})$ para todo $i \in \Lambda$; mientras que $\mathscr{H} = \{\varphi_i^j : E_j \longrightarrow E_i\} i \leq j$ es una familia indexada de morfismos verificando:

1. $\varphi_i^i = 1_{E_i}$ para todo $i \in \Lambda$
2. $\varphi_i^k = \varphi_i^j \circ \varphi_j^k$ para todo $i \leq j \leq k$

Definición (Sistema Directo) (5.1.2).

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea Λ un conjunto parcialmente ordenado. Un sistema directo en $\mathscr{C}$ es una pareja ordenada $\left[(E_i)_{i\in\Lambda}, (\delta_j^i)_{i\leq j}\right]$ abreviadamente $\{E_i, \delta_j^i\}$ donde $\mathscr{F} = \{E_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia indexada de objetos en $\mathscr{C}$, i.e. $E_i \in Obj(\mathscr{C})$ para todo $i \in \Lambda$; mientras que $\mathscr{H} = \{\delta_j^i : E_i \longrightarrow E_j\} i \leq j$ es una familia indexada de morfismos verificando:

1. $\delta_i^i = 1_{E_i}$ para todo $i \in \Lambda$
2. $\delta_k^i = \delta_k^j \circ \delta_j^i$, para todo $i \leq j \leq k$

Definición (5.1.3).- Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ un sistema inverso de grupos abelianos. Nosotros diremos que este sistema es esencialmente cero si para cada $n \geq 0$ existe n' con $n' \geq n$ tal que la aplicación $\varphi_n^{n'} : G_{n'} \longrightarrow G_n$ es nula.

Observación (5.1.1).- 1. Si $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un sistema inverso esencialmente cero, entonces el límite inverso correspondiente también es cero, es decir $\varprojlim G_n = 0$. El recíproco es falso.

2. Sea la sucesión exacta corta de sistemas inversos

$$0 \longrightarrow (G_n') \longrightarrow (G_n) \longrightarrow (G_n'') \longrightarrow 0$$

entonces (G_n) es esencialmente cero si y solo si (G_n') y (G_n'') son esencialmente cero.

Proposición (5.1.1): Sea R un anillo conmutativo. Y sea $\mathscr{F} = \{f_1, ..., f_n\} \subset R$, y sea i > 0 un número entero. Entonces son equivalentes los enunciados siguientes.

1. $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)=0,$ para todo A-módulo inyectivo M.

2. $\left(H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^n;A\right)\right)_{n\geq 1}$ es un sistema inverso esencialmente cero.

Demostración.- Por definición de funtor derivado en términos de límite directo obtenemos.

$$H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)=\varinjlim_m H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;M\right)$$

Ahora si M es un A – módulo, entonces el funtor Hom (, M) es exacto; de aquí esto conmuta al pasar a homología, y así tenemos el isomorfismo:

$$H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;M\right)\cong Hom_A\left(H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;A\right),M\right)$$

De otro lado si $\left(H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;A\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es esencialmente cero entonces para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $m'\geq m$ tal que $H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;M\right)\longrightarrow H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^{m'};M\right)$, es cero, y en consecuencia el límite directo $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)$ de estos módulos también es cero.

Recíprocamente si $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)=0$ para todo A – módulo inyectivo M. Dado $m\in\mathbb{Z}^+$, podemos considerar $H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;A\right)$ en un módulo inyectivo M. Sea $a\in Hom_A\left(H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;A\right)\right)\cong H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;M\right)$ la aplicación inclusión. Si el límite directo $H^i_{\underline{\mathcal{F}}}(M)$ es cero, entonces existe $m'\geq m$ tal que la imagen de "a" en $H^i\left(\underline{\mathcal{F}}^{m'};M\right)$ es cero; en otras palabras; tal que la aplicación composición.

$$H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^{m'};A\right)\longrightarrow H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^m;A\right)\xrightarrow{a}M$$

Es cero, y como "a" es inyectivo, se sigue que $H_i\left(\underline{\mathcal{F}}^{m'};A\right)=0.$

Proposición (5.1.2).- Sea A un anillo Noetheriano y sea $\underline{\mathcal{F}}=\{f_1,....,f_n\}$ una familia finita de elementos de A, y sea N un A – módulo de tipo finito, entonces el sistema de A – módulos.

$$\left(H_i\left(\mathcal{F}^m;N\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

Es esencialmente cero para i > 0.

Demostración.- Procediendo por inducción sobre "n".

Supongamos primero para n = 1. Entonces el único valor de "i" a considerar es para: i = 1, de donde se observa inmediatamente que $H_1\left(\mathcal{F}^m;N\right)=N_m$ el cual el submódulo de N que consiste de elementos anulados por $\mathcal{F}^m$. La aplicación $\mu:N_{m'}\longrightarrow N_{m'},$ para $m'\geq m,$ es multiplicación por $f^{m'-m}$. Ahora los submodulos N_m de N forma una sucesión creciente estacionaria, puesto que A es anillo Noetheriano y N es de tipo finito. En otras palabras, existe un $m_0\in\mathbb{N}$ tal que f^{m_0} anula todos los módulos N_m. Por consiguiente, si "m" es dado y $m'=m+m_0,$ la aplicación $\mu:N_{m'}\longrightarrow N_m$ es multiplicación por $f^{m_0};$ es decir es la aplicación cero. De aquí el sistema inductivo (Nm), es esencialmente cero.

Ahora sea $n\in\mathbb{Z}$ tal que $n\geq 2;$ y supongamos que el resultado es probado para toda sucesión de elementos menores que n, y para todo módulo N de tipo finito; sea $\underline{g}=\{f_1,\ldots.,f_{n-1}\}$ entonces para cada $i\geq 0$ existe una sucesión exacta de la forma siguiente:

$$0\longrightarrow H_0\left(f_n^m;H_i\left(\underline{g}^m:N\right)\right)\longrightarrow H_i\left(\underline{f}^m;N\right)\longrightarrow H_1\left(f_n^m;H_{i-1}\left(\underline{g}^m:N\right)\right)\longrightarrow 0$$

Para mostrar que el sistema del Centro es esencialmente cero, será suficiente tener en consideración la observación inmediata anterior (parte 2). Ahora para mostrar que los dos sistemas (izquierda y derecha) que están fuera del centro sean sistemas esencialmente cero se obtendrá del hecho que la sucesión es exacta. A la izquierda, factorizamos la aplicación del sistema inverso como sigue: (donde $m'\geq m$).

$$\begin{tikzcd}
H_0\left(f_n^{m'};H_i\left(g^{m'},N\right)\right) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & H_0\left(f_n^m;H_i\left(g^m:N\right)\right) \\
& H_0\left(f_n^{m'};H_i\left(\underline{g}^m:N\right)\right) \arrow[ur, "ß"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 8 Triángulo mostrando la Factorización de sistemas esencialmente nulos de lado izquierdo.

Fuente : Elaboración propia

Por hipótesis inductiva, el sistema inverso $\left(H_i\left(\underline{g}^m;N\right)\right)_m$ es esencialmente cero para i > 0, por consiguiente, cuando m' es suficientemente grande mayor que m $(m'\gg m)$, entonces la aplicación α será igual a cero $(\alpha=0)$ y de aquí también $ß\circ\alpha$. Por consiguiente el sistema inverso de la parte superior del gráfico es esencialmente cero.

Ahora realizamos una factorización similar del sistema inverso del lado derecho.

$$\begin{tikzcd}
H_1\left(f_n^{m'};H_{i-1}\left(\underline{g}^{m'};N\right)\right) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & H_1\left(f_n^{m};H_{i-1}\left(\underline{g}^{m};N\right)\right) \\
& H_1\left(f_n^{m'};H_{i-1}\left(\underline{g}^{m};N\right)\right) \arrow[ur, "ß"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 9 Triángulo de Factorización del sistemas inverso del lado izquierdo.

Fuente : Elaboración propia

Para i, m y N dados; el módulo $H_{i-1}\left(\underline{g}^m;N\right)$ es de tipo finito, por consiguiente aplicando hipótesis inductiva a estos módulos, y a los elementos $f_n\in A,$ encontramos que para m' suficientemente grande mayor que $m(m'\gg m)$, la aplicación ß es cero. De aquí $ß\circ\alpha=0;$ y de este modo ϕ el sistema inverso de la parte inferior es también esencialmente cero.

Observación (5.1.2).- De las dos proposiciones anteriores se infiere el siguiente resultado. "Sea A un anillo Noetheriano, sea $\underline{f}=\left\{f_1,....,f_n\right\}\subset A$ y sea M un A – módulo inyectivo, entonces $H_{\underline{f}}^i(M)=0$ para i > 0.

Proposición (5.1.3).- Sea A un anillo Noetheriano con espectro primo X, y sea M un A – módulo inyectivo, entonces el haz $\tilde{M}$ de X es un haz flácido.

Demostración.- Para mostrar que $\tilde{M}$ es flácido, mostraremos que para cualquier cerrado $Z\subseteq X$ la aplicación $\gamma:M\longrightarrow\Gamma\left(X-Z,\tilde{M}\right)$ es suryectiva. Para lo cual consideremos $f_1,....,f_n$ generadores para el ideal Z. Entonces X – Z es la unión de conjuntos abiertos de la familia $U_{\underline{\mathcal{Z}}}$ definido y/o considerado anteriormente, y de la definición de la cohomología de Cech se sigue que $\Gamma\left(X-Z,\tilde{M}\right)\cong \breve{H}^{\circ}\left(U_{\underline{\mathcal{Z}}},\tilde{M}\right)$; y de este modo existe una sucesión exacta $M \xrightarrow{\alpha} \Gamma\left(X-Z,\tilde{M}\right)\cong H^{1}_{\underline{f}}\left(M\right)\longrightarrow 0$ pero $H^{1}_{\underline{f}}\left(M\right)=0$ para M, A - módulo inyectivo, y asi α - es suryectivo.

Observación (5.1.3.).- Usando resultados de la estructura de módulos inyectivos sobre anillos Noetherianos, se puede mostrar el corolario directamente como sigue: Un A – módulo inyectivo sobre un anillo Noetheriano A es suma directa de cápsulas inyectivas I_p de clases de campos residuales K(p) de ideales primo de A. Como una suma directa de haces flácidos es flácido, esto es suficiente para mostrar que $\tilde{I}_p$ es flácido para cada “p”.

Pero I_p es el límite directo de módulos Artinianos sobre el anillo local A_p. De aquí $\tilde{I}_p$ es un haz constante I_p sobre el subconjunto cerrado $V(p)$ de Spec (A) y cero fuera de él. Como un haz constante sobre un espacio irreducible Noetheriano es flácido entonces se sigue el resultado.

Ahora nosotros presentaremos el resultado central (o principal) de este proyecto; lo cual consiste en relacionar la cohomología local de grupos de un prehaz para un límite directo de los funtores Ext's.

Sea X un prehaz, sea Z un subconjunto cerrado de X $\left(Z\subseteq X\right)$ y sea F un haz cuasi coherente de OX – módulos, sea ℓ un haz cuasi – coherente de ideales definiendo Z y para cada $n\geq 1$ sea $O_n=\dfrac{O_x}{\ell^n}$. Entonces O_n es un haz concentrado sobre Z y para cada <u>n</u> existe una inyección natural.

$$Hom_{O_x}\left(O_n,F\right)\longrightarrow \Gamma_Z\left(X,F\right)$$

Para un homomorfismo de O_n sobre F es determinado por la Imagen de la sección unitaria de O_n; lo cual será una sección de F con soporte en el cerrado Z. Ahora dejando que F varie sobre la categoría de O_X – módulos.

De otro lado consideremos los funtores derivados $Ext^{i}_{O_X}\left(O_n,F\right)$ de $Hom_{0_X}\left(O_n,F\right)$, El funtor cohomológico $H_Z^i(X,F)$, lo cual primigeniamente no es un funtor derivado en esta categoría. Teniendo una aplicación de estos funtores para i = 0. Nosotros deducimos para i > 0 por la propiedad universal de funtores derivados.

$$Ext_{O_X}^i\left(O_n,F\right)\longrightarrow H_Z^i(X,F)$$

Como n – varía, estos funtores Ext′s forma un sistema directo mapeado sobre $H_Y^i(X,F)$, de esta manera existen homomorfismos.

$$\underrightarrow{Lim}\ Ext_{O_X}^i\left(O_n,F\right)\longrightarrow H_Z^i(X,F)$$

Realizando estos homomorfismos localmente, y pasando a haces asociados obtenemos homomorfismos de haces.

$$\underrightarrow{Lim}_n\ \underline{Ext}_{O_X}^i\left(O_n,F\right)\longrightarrow \underline{H}_Z^i(F) \quad \left(\rho_{\circ}\right)$$

Nota.- A continuación presentaremos el resultado central de este proyecto; que será demostrado luego de lemas y proposiciones auxiliares. Dicho resultado consiste en mostrar que los haces:

$$\underline{H}_Z^i(F) \ \text{ y } \ \underrightarrow{Lim}_n\ \underline{Ext}_{O_X}^i\left(O_n,F\right)$$

Son isomorfos, cuando X es localmente Noetheriano y F cuasi – coherente. Mas aún cuando X es Noetheriano también dichos haces son isomorfos.

Proposición (5.1.4).- Sea X un prehaz; y sean F y G dos haces de O_X- módulos y supóngase que G es inyectivo en la categoría de O_X - módulos, entonces $Hom_{O_x}\left(F,G\right)$ es un haz flácido.

Demostración.- Afirmación: $Hom_{O_x}(F,G)\longrightarrow Hom_{O_U}(F_{|U|},G_{|U|})$ es suryectivo donde U es abierto en X. En efecto: Denotemos por F_U el único haz cuya restricción a U es $F_{|U}$, el cual es cero fuera de U. Entonces un homomorfismo $\varphi: F_{|U}\longrightarrow G_{|U}$ es el mismo como un homomorfismo de F_U en G. Puesto que $F_U\subseteq F$, y G es inyectivo, entonces cualquier homomorfismo extiende a un homomorfismo de F en G. Como dicho homomorfismo es suryectivo entonces por definición y propiedades de flacitud, se tiene que $Hom_{O_x}\left(F_{|U}, G_{|U}\right)$ es flácido.

Proposición (5.1.5).- Sea X un prehaz, y sean F y G haces de $O_x -$ módulos. Entonces existe una sucesión espectral.

$$Ext^n_{O_X}(F,G) \Leftarrow E_2^{pq} = H^p\left(X, \underline{Ext}^q_{O_X}(F,G)\right)$$

Demostración: El funtor $Hom_{O_X}(F,G)$ se puede expresar como una composición funtorial del modo siguiente.

$$Hom_{O_X}(F,G) = \Gamma \circ \underline{Hom}_{0_X}(F,G),$$

Por la proposición inmediata anterior $Hom_{O_X}(F,G)$ es considerado como un funtor en G, tomando inyectivos sobre objetos $\Gamma -$ acíclicos. Por consiguiente, podemos aplicar el resultado siguiente:

"Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ tres categorías abelianas con suficientes inyectivos; y supóngase que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ son funtores covariantes exactos a izquierda supóngase además que F toma inyectivos sobre objetivos G – acíclicos para p > 0, donde $R^P G$ son funtores derivados a derecha de G, entonces para cada objeto X en $\mathcal{C}$, existe una sucesión espectral relacionando los funtores derivados a derecha de F, G y $G \circ F; R^n(G \circ F)(x) \Leftarrow E_2^{pq} = R^p G(R^q F(x)).$ Y de aquí claramente se obtiene el resultado.

Proposición (5.1.6).- Sea X un espacio topológico Noetheriano, y sea $\left(F_i\right)$ un sistema directo de haces abelianos sobre X, entonces para cada $p \geq 0,$ se tiene la siguiente igualdad.

$$\underrightarrow{Lim}\, \mathrm{H}^p\left(X, F_i\right) = \mathrm{H}^p(X, \underrightarrow{Lim}\, \mathrm{Fi})$$

Demostración.- Sea $F = \underrightarrow{Lim}\, \mathrm{Fi}.$ Para calcular la cohomología de F y de los Fi; lo hacemos tomando resoluciones inyectivos $R\left(Fi\right)$ de los Fi, en tal caso ellos forman un sistema directo, y sea $R(F) = \underrightarrow{Lim}\, \mathrm{R(Fi)}$ entonces R(F) es una resolución de F por haces los cuales son límites directos de inyectivos. Ahora usando la cuasi – compacidad de un espacio Noetheriano, uno puede encontrar que el funtor $\Gamma°$ conmuta con límites directos. Como el funtor límite directo es exacto, tenemos por consiguiente esto será suficiente para mostrar que cualquier límite directo de haces inyectivos es flácido, entonces podemos usar el complejo R(F) para calcular la cohomología de F. Ahora recordemos el resultado siguiente "Cualquier haz inyectivo en la categoría de haces abelianos sobre X denotado por $\mathscr{C}$(X) es flácido", entonces haciendo uso de dicho resultado cualquier haz inyectivo es flácido, y un fácil argumento usando el hecho de cuasi-compacidad, muestra que un límite directo de haces flácidos sobre un espacio Noetheriano es flácido, y de este modo se tiene el resultado.

Observación (5.1.4).- La proposición inmediata anterior con la hipótesis de Notherianidad es falso. En efecto consideremos $\left(\mathbb{Z}^{+},\tau_{d}\right)$ (espacio topológico de los números enteros positivos con la topología discreta). Sea Fi el haz, cuyo tallo es $\mathbb{Z}$ para $n \geq i$ y 0 para n < i. Aplica F_i en F_{i+1} al anular el i – ésimo tallo, y dejando libre lo restante entonces $\varinjlim F_i = 0$, pero $\varinjlim \Gamma(F_i) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}} \right) \neq 0$

Proposición (5.1.7).- Sea A un anillo Noetheriano con espectro primo X i.e. spec(A) = X. Sean M, N dos A – módulos y sea M de tipo finito. Entonces existen isomorfismos funtoriales canónicos.

$$Ext_{A}^{i}\left(M,N\right)^{\sim} \cong Ext_{O_X}\left(\tilde{M},\tilde{N}\right)$$

Donde el símbolo bigorita "$\sim$" denota el haz cuasi – coherente de X asociado al A – módulo dado.

Demostración.- (1°) Para i = 0, el isomorfismo se sigue del hecho que Hom (M, N), conmuta con la localización cuando M es de presentación finita. Como M varía en la categoría $\mathscr{C}_{A}^{f}$ de módulos de tipo finito sobre A, $Ext_{A}^{i}\left(M,N\right)^{\sim}$ es el iésimo funtor derivado de $Hom_{A}\left(M,N\right)$. De aquí existen homomorfismos canónicos (de funtores en M, de $\mathscr{C}_{A}^{f}$ en la categoría de haces de $O_x - módulos$).

$$Ext_{A}^{i}\left(M,N\right)^{\sim} \longrightarrow \underline{Ext}_{O_X}^{i}\left(\tilde{M},\tilde{N}\right) \qquad (*)$$

Como A es Noetheriano, cada $M \in \mathcal{C}_A^f$ tiene una resolución proyectiva generado por A – módulos libres finitos. De aquí para mostrar que (*) es un isomorfismo, necesitamos solo mostrar que el lado derecho es cero cuando $M = A^n$, entonces ellos serán funtores derivados. Como $Ext^i_{O_X}$ conmuta con sumas directas finitas, esto es suficiente para mostrar que $Ext^i_{O_{X_i}}\left(\tilde{A},\tilde{N}\right)=0$ para $i>0$. En efecto. Para cualquier O_X- módulo F, $Ext^i_{O_X}\left(\tilde{A},F\right)=0,$ puesto que $\tilde{A}=O_X$ y $\underline{Hom}_{O_X}\left(O_X,F\right)=F$ es un funtor exacto en F. (Recordar que $Ext^i_{O_X}$ son definidos como funtores derivados en la categoría de $O_X - módulos$, con respecto a la segunda variable).

Teorema (Resultado Central) (5.1.1)

Si X es localmente Noetheriano, y F cuasi – coherente, entonces los homomorfismos.

$$\varinjlim_n \underline{Ext}^i_{O_X}\left(O_n,F\right)\longrightarrow \underline{H}^i_y(F)$$

Resultan ser isomorfismos. Si además X es Noetheriano, entonces los homomorfismos antes señalados son también isomorfismos.

Prueba.**-** Obsérvese que debemos mostrar dos afirmaciones la primera es para el caso local Noetheriano y la segunda es cuando X es Noetheriano.

Primera Afirmación.- $\varinjlim_n \underline{Ext}^i_{O_X}\left(O_n,F\right)\cong \underline{H}^i_Y(F),$ para X localmente Noetheriano. En efecto: Como X es localmente Noetheriano; podemos considerar que X es el espectro de un anillo Noetheriano (i.e.: X = Spec (A); donde A es Noetheriano). Sea $O=\tilde{I}$ y $F=\tilde{N}$ entonces mostraríamos que:

$$\varinjlim_n \ \underline{Ext}^i_{O_X}\left(\frac{\tilde{A}}{I^n},\tilde{N}\right) \ \text{y} \ \underline{H}^i_Y(\tilde{N})$$

Son isomorfos, para lo cual recordemos la proposición siguiente: “Sea X = Spec (A) un esquema afin, sea $Z\subseteq X$ cerrado. Entonces para cualquier haz cuasi – coherente F sobre X, y para cualquier $i\geq 0,$ $H^i_Z(F)$ es el haz asociado al A -módulo $H^i_Z(X,F).$ Además, existe una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow H_Z^{\circ}(X,F) \longrightarrow H^{\circ}(X,F) \longrightarrow H^{\circ}(X-Z,F) \longrightarrow H_Z^{i}(X,F) \longrightarrow 0$$

Y existen isomorfismos $H^i(X-Z,F) \xrightarrow{\simeq} H_Z^{i+1}\left(X,F\right),\ i>0$

Entonces usando este resultado, observamos que $\varinjlim_n \underline{Ext}^i_{O_X}\left(\frac{\tilde{A}}{I^n},\tilde{N}\right) = \underline{H}^i_Y(X,\tilde{N})^{\sim}$.

Además, usando la proposición inmediata anterior. (i.e. $\underline{Ext}^i_A\left(M,N\right)^{\sim} \cong \underline{Ext}^i_{O_X}\left(\tilde{M},\tilde{N}\right)$, donde M, N son dos A- módulos con A anillo Noetheriano) y notando que los límites directos conmutan con la operación $"\sim"$ (tilde). Entonces nuestra prueba se reduce a mostrar que los homomorfismos.

$$\varinjlim_n \underline{Ext}^i_A\left(\frac{A}{I^n},N\right) \longrightarrow \mathrm{H}^i_Z(X,\tilde{N})$$

Resultan ser isomorfismos. Esto es un homomorfismo de funtores cohomológicos de la categoría de A – módulos sobre si mismo. Para i = 0 los funtores son isomórficos

(i.e. : $\varinjlim_n \mathrm{Ext}^{\circ}_A\left(\frac{A}{I^n},N\right) \cong \mathrm{H}^{\circ}_Z(X,\tilde{N})$) su valor común empieza el conjunto de elementos de N anulados por alguna potencia de I. para i > 0 y N inyectivo, ambos se anulan: El de la izquierda desde que los Ext's son funtores derivados; mientras que para el de la derecha; bastará recordar los resultados siguientes". (1) Para un anillo Noetheriano A con espectro primo X, y sea M un A – módulo inyectivo entonces el haz $\tilde{M}$ sobre X es flácido".

(2) Si F es un haz abeliano de X. son equivalentes:

(i) F es flácido, (ii) Para todo subespacio cerrado $Z \subseteq X$ y para todo $i>0$; $H_Z^i\left(X,F\right)=0$ y $\underline{H}^i_Z(F)=0$

(iii) Para todo subespacio cerrado $Z \subseteq X$, $H_Z^1\left(X,F\right)=0$.

Esto caracteriza a ambos funtores como funtores derivados; y de este modo ellos resultan ser isomórficos.

Segunda Afirmación.- $\varinjlim_{n} \underline{Ext}^{i}_{O_x}\left(O_n, F\right) \cong \underline{H}^{i}_{Y}(F)$

Para X noetheriano. En efecto: En este caso expresamos $Ext^{i}_{O_X}\left(O_n, F\right)$ y $\mathrm{H}^{i}(X, F)$ como los pilares de sucesiones espectrales, usando los resultados: (1) Si $Z \subseteq X$ es localmente cerrado para cualquier F existe una sucesión espectral.

$$E^{n}_{Z}(X, F) \Leftarrow E^{pq}_{2} = H^{P}\left(X, H^{q}_{Z}(F)\right)$$

Por lo cual $H^{P}\left(X, F\right)$ para cualquier F nos referimos a funtores derivados a derecha del funtor F $\rightsquigarrow$ Γ (F).

(2) Sea X un Prehaz, y sea F y G haces de $O_X - módulos.$ Entonces existe una sucesión espectral.

$$E^{n}_{O_X}(F, G) \Leftarrow E^{pq}_{2} = H^{P}\left(X, \underline{Ext}^{q}_{O_X}(F, G)\right)$$

Ahora uno observa que un límite directo de sucesiones espectrales es una sucesión espectral, y que nosotros tenemos homomorfismos funtoriales de sucesiones espectrales, lo cual produce el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
E^{pq}_{2} = \varinjlim_{n} H^{P}\left(X, \underline{Ext}^{q}_{O_X}(O_n, G)\right) \arrow[r] \arrow[d] & H^{P}\left(X, \underline{H}^{q}_{Y}(F)\right) = E^{\circ pq}_{Z} \arrow[d] \\
\varinjlim_{n} Ext^{i}_{O_X}(O_n, F) \arrow[r] & H^{i}_{Y}(X, F)
\end{tikzcd}$$

Figura 10 : *Rectángulo conmutativo, de secuencias espectrales*

Fuente: Elaboración propia

Para mostrar que los homomorfismos de los pilares es un isomorfismo, esto será suficiente para mostrar que los homomorfismos en términos de E^{pq}_{2} son isomorfismos, lo cual se sigue de los isomorfismos establecidos en el diagrama inmediato anterior, y teniendo en consideración la igualdad siguiente. $H^{P}(X, \varinjlim Fi) = \varinjlim \mathrm{H}^{P}(X, Fi)$ para X espacio topológico Noetheriano, $p \geq 0$ con (F_i) un sistema directo de haces abeliano sobre X, puesto que X es Noetheriano, y en consecuencia el resultado.

5.2. Resultado Inferencial

El término Codimensión es muy utilizado en gran número, en un contexto algebraico y geométrico para indicar la diferencia entre la dimensión de ciertos objetos y la dimensión de un pequeño objeto contenido en si mismo. En función de espacios duales; esto es bastante evidente porque añaden dimensiones, el subespacio puede ser definido por el anulamiento de un cierto número de funcionales lineales, lo cual si consideramos que tales funcionales sean linealmente independiente, entonces su número es la Codimensión. Daremos un Teorema relacionando la noción de profundidad a la cohomología local de grupos; para efectos recordamos algunas definiciones considerando un anillo conmutativo A, y un ideal I en A, de este modo tendremos la variedad V(I) formado por todos los ideales primos de A conteniendo I. Con el propósito de lograr de obtener un resultado inferencial, exponemos o presentamos la definición de variedad de un ideal; y proposiciones relacionados.

Definición (Variedad de un ideal) (5.2.1)

Sea A un anillo conmutativo, y sea I un ideal de A. la variedad de I se denota y define como:

$V(I) = \{P \subset A \text{ ideal primo} : I \subset P\}$.

Es fácil mostrar que V(I) es un subconjunto cerrado de Spec(A).

Definición (Soporte de un módulo) (5.2.2)

Sea N un A – módulo. El soporte de N es el conjunto de Ideales primos P de A, cuya localización en P es no nula. Este conjunto se denota por Supp(N).

Es decir: Supp (N) = {P ideal primo de A: $N_p \neq 0$ }. En este contexto definimos el conjunto de ideales primos asociados del Módulo N. Esto son ideales primos P de A tal que N contiene un submódulo N_1 isomórfico a A/P ; el cual se denota por: $A_{ss}(N)$. Es decir:

$$Ass(N) = \left\{ P \text{ ideal primo de A: } N \supset N_1 \text{ con } N_1 \cong A/P \right\}$$

Definición (5.2.3): Sea A un anillo conmutativo, M un A – módulo. Una sucesión de elementos: $x_1, ..., x_n \in A$ se dice que es M – regular si para cada i = 1, 2, …., n; x_i no es un divisor de cero en el módulo $\dfrac{M}{(x_i, ..., x_{i-1})M}$.

Proposición (5.2.1).- Sea A un anillo Noetheriano, I⊂A un ideal y N un A – módulo de tipo finito, entonces son equivalentes los enunciados siguientes:

(1) Hom (M, N) = 0 para todo A – módulo de tipo finito M, tal que supp (M) ⊂ V(I).
(2) Hom (M, N) = 0 para todo A – módulo de tipo finito M, tal que supp (I) = M
(3) Primos no asociados de M contenidos en I.
(4) Existe un elemento $x \in I$ tal que x es N - regular.

Demostración.- Para una ilustrativa y didáctica prueba de este resultado; consideremos el resultado siguiente: "R_0": Si M, N son dos módulos de tipo finito sobre un anillo Noetheriano A, entonces $Ass(Hom(M, N)) = Supp(M) \cap Ass(M)$".

En efecto.- Usando hechos conocidos de módulos primos asociados, de tipo finito sobre anillos Noetherianos, tenemos:

Ass (Hom (M, N)) $\subseteq$ Supp (Hom (M, N)) $\subseteq$ Supp (M)

Además, si nosotros expresamos M como un cociente de un módulo libre.

$$A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor Hom (•, N) tenemos:

$$0 \longrightarrow Hom(M, N) \longrightarrow Hom(A^r, N) = N^r,$$ de aquí obtenemos:

$Ass\left(Hom(M,N)\right) \subseteq Ass\left(N^{r}\right) = Ass\left(M\right)$. Así tenemos la inclusión:

$Ass\left(Hom(M,N)\right) \subseteq Supp(M) \cap Ass\left(M\right)$

Para el recíproco, consideremos un ideal primo P de A en la intersección de Supp(M) y Ass(N). Como $P \in Ass\left(N\right)$, existe $N_1 \leq M$ (submódulo) tal que N_1 es isomorfo al cociente A/P. También P $\in Supp(M)$, entonces el soporte de $\dfrac{M}{pM}$ alcanza ser todo el Spec $\left(A/P\right)$. Particularmente : $\dfrac{M}{pM}$ tiene rango positivo y siendo P – ideal primo; el anillo A/P es un dominio entero; de aquí entonces se tiene que existe en A/P un módulo cociente M' el cual es libre Torsión de rango uno sobre dicho dominio entero A/P, por consiguiente $M' \cong A/P$. Así existe una inyección $M' \longrightarrow N_1$, y nosotros podemos definir $\phi \in Hom(M,N)$ para ser la composición de los siguientes homomorfismos.

$$M \longrightarrow \frac{M}{pM} \longrightarrow M' \longrightarrow N_1 \longrightarrow N$$

Por nuestra construcción, el submódulo $\langle \phi \rangle$ de Hom (M, N) es isomórfico a A/P; así $P \in Ass\left(Hom(M,N)\right)$.

Ahora Probaremos la proposición (enunciados equivalentes).

(1) $\Rightarrow$ (1′): Por hipótesis se cumple para todo A – módulo de tipo finito, en particular para alguno, por tanto el resultado.

(1′) $\Rightarrow$ (1) : Por hipótesis Hom (M, N) = 0, para algún A – módulo de tipo finito M y Supp (M) = V(I) entonces por el resultado "R_0"; $V(I) \cap Ass(N) = Ass(Hom(M,N)) = \phi$ y así el primo asociado de M contiene I.

(2) $\Rightarrow$ (1): Si Supp (N) $\subseteq$ V(I), entonces haciendo uso nuevamente de "R_0" se tiene: $Ass(Hom(M,N)) \subseteq V(I) \cap Ass(M) = \phi$ esto es por hipótesis de este modo: Hom (M, N) = 0.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sean $\{P_j\}_{j=1,....,n}$ una familia de primos asociados de M. Entonces decir que ninguno de los primos P_j contiene a I, es lo mismo para decir su unión $\bigcup_{j=1}^{n} P_j$ no contiene I, lo cual es el mismo como para decir que existe un elemento $x \in I$ que está en ninguno de los P_j; pero decir que un elemento x $\in$A es N – regular, es lo mismo decir que está en ninguno de los P_j. Por tanto el resultado.

Teorema (5.2.1).- Sean A un anillo Noetheriano, I un ideal de A, M un A- módulo de tipo finito y $n \in \mathbb{Z}$ (número entero). Son equivalentes:

(1) $Ext_A^k(M, N) = 0$ para todo A – módulo M de tipo finito tal que: Supp(N) $\subseteq$ V(I), y para todo entero k < n.

(1′) $Ext_A^k(M, N) = 0$ para algún A – módulo M de tipo finito tal que: Supp(N) = V(I), y para todo entero k < n.

(2) Existen elementos: $x_1, ..., x_n \in I$ formando una sucesión N – regular.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (1′) : Esta implicación es inmediata, puesto que $Ext_A^k(M, N) = 0$, para todo A – módulo N de tipo finito esto implica de manera particular para algún A – módulo N.

(1′) $\Rightarrow$ (1): Procediendo por inducción sobre “n”. Si n $\leq$ 0 no hay nada que demostrar. Ahora supongamos n > 0. Entonces en particular Hom (M, N) = 0; así por la proposición inmediata anterior existe $x \in I$ el cual es M – regular. Así x produce una sucesión exacta como sigue: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{x} N \longrightarrow \frac{N}{xN} \longrightarrow 0$ donde la primera aplicación es la multiplicación por “x”. De nuestra hipótesis y de la secuencia exacta de aplicar el funtor Ext′s, se sigue que: $Ext_A^k\left(M, \frac{N}{xM}\right) = 0$ para k < n -1. Por consiguiente, por hipótesis inductiva, existen elementos: $x_2, ..., x_n \in I$ lo cual forma una sucesión $\frac{N}{xN}$– regular. Entonces claramente $x, x_2, ..., x_n$ es una sucesión N – regular de n – elementos de I.

(2) $\Rightarrow$ (1): Procediendo por inducción sobre "n". Si $n \leq 0$ no hay nada que probar. Ahora supongamos : $n > 0$ entonces en particular x_1 es N – regular, así existe una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{x_1} N \longrightarrow \frac{N}{x_1 N} \longrightarrow 0$$

Ahora: $x_2, ..., x_n$ es un sistema $\frac{N}{x_1 N}$ - regular de (n-1) elementos de I, así por hipótesis inductiva, se sigue que: $Ext_A^k\left(M, \frac{N}{xM}\right) = 0$ para todo A – módulos de tipo finito M con soporte en la variedad V(I), y para todo entero $k < n - 1$. Por la sucesión exacta de Ext′s, esto implica que la aplicación natural.

$$Ext_A^k(M, N) \xrightarrow{x_1} Ext_A^k(M, N)$$

Es inyectivo para todo $k < n$. Como $x_1 \in I, x_1$ anula N, así esta aplicación es también la aplicación nula, de este modo $Ext_A^k(M, N) = 0$ para todo $k < n$.

5.3. Otro Tipo de Resultados

Por la naturaleza del trabajo los otros resultados que presentamos está basado en la codimensión homológica de un módulo tipo finito, respecto a un ideal o profundidad de un módulo respecto a un ideal. De este modo daremos algunas definiciones previas.

Definición (5.3.1).- Sea A un anillo Noetheriano, $I \subseteq A$ un ideal; y sea M un A – módulo de tipo finito. Entonces el I – profundo de M $\left(\mathrm{Prof}_I(M)\right)$ es el entero más grande "n" tal que existen elementos $x_1, ..., x_n \in I$ los cuales forman un sistema M – regular (observe que: $n \leq \dim M$). Si A es un anillo local, y I es un ideal maximal. Diremos simplemente M – profundo.

Nota.- El I – profundo de M es que Auslander y Buchsbaum, llamo la I – Codimensión de M.

Para los siguientes resultados: consideremos A un anillo Noetheriano, I ideal de A, y M un A – módulo de tipo finito.

Ejemplo (5.3.1): Sean A, I, M como líneas arriba. Entonces toda sucesión M – regular maximal de elementos de I tiene el mismo número de elementos a saber $\operatorname{Prof}_I(M)$

Ejemplo (5.3.2): Considerando A, I, M como antes. Si $x \in I$ es M – regular, entonces $\operatorname{Prof}_I(M) = \operatorname{Prof}_I\left(\dfrac{M}{xM}\right) + 1$.

Proposición (5.3.1).- Con las mismas condiciones antes dadas para: A, I, M; se tiene que $\operatorname{Prof}_I(M) = \inf\limits_{P \in V(I)} \left\{\operatorname{Prof}_I\left(M_P\right)\right\}$, donde M_P es considerado como un módulo sobre el anillo local A_P y su profundidad es la usual con respecto al ideal maximal ${}_P A_P$.

Demostración.- Si $x_1, ..., x_n \in I$ forma una sucesión M- regular, entonces las Imágenes canónicas $\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n$ de los f_k en A_p están en ${}_P A_P$, y forman una sucesión M_p – regular para cualquier $P \in V\left(I\right)$, por consiguiente: $\operatorname{Prof}_I(M) \leq \operatorname{Prof}(M_P)$, para cada $\rho \in V(I)$ de aquí tomando ínfimo para cada se tiene: $\operatorname{Prof}_I(M) \leq \underset{P \in V(I)}{Inf} \left\{\operatorname{Prof}(M_p)\right\} \quad \left(I\right)$

- Para la otra desigualdad, probamos la siguiente “Si $n' \in \mathbb{Z}$ (número entero) tal que para cada $p \in V\left(I\right), n' \leq \operatorname{Prof}\left(M_P\right)$, entonces $n' \leq \operatorname{Prof}_I\left(M''\right)$.

En efecto: Procediendo por inducción sobre n'

Para el caso: $n' \leq 0$ el resultado se obtiene trivialmente. Ahora supongamos $n' > 0$. Entonces para cada $p \in V\left(I\right)$, se tiene que Prof $\left(M_P\right) \geq 1$, así PAP no está asociado a M_p; es decir P no es asociado a M, entonces por resultado anterior, existe un elemento $x \in I$, lo cual es M – regular. Ahora usando el ejemplo (5.3.2) inmediato anterior, y haciendo uso de la hipótesis inductiva, nosotros obtenemos: $n' - 1 \leq \operatorname{Prof}\left(\dfrac{M}{xM}\right)$, para cada $p \in V(I)$. De aquí: $n' - 1 \leq \operatorname{Prof}_I\left(\dfrac{M}{xM}\right)$ lo cual implica que: $n' \leq \operatorname{Prof}\left(M\right)$.

Definición (5.3.2).- Sea X un esquema localmente noetheriano, Y un subconjunto cerrado de X, y F un haz coherente en X. Entonces el Y – profundo de F, o $\operatorname{Prof}_Y(F)$, es el $\inf_{x\in Y}\left\{\operatorname{Prof}\left(F_x\right)\right\}$.

Observación (5.3.1): Si X es un esquema alfin, y siendo X = Spec(A), Y = V (I) y $F=\tilde{M}$, entonces $\operatorname{Prof}_Y(F)=\operatorname{Prof}_I(M)$. Por la última proposición observamos que la noción de I – profundo depende solamente del radical del ideal I.

Nota.- Considerando los elementos de la definición inmediata anterior y con los mismas condiciones la expresión; descrita por Y - $\operatorname{Prof}(F)$ ó $\operatorname{Prof}_Y(F)$, el cual es el $\inf_{x\in Y}\left\{\operatorname{Prof}\left(F_x\right)\right\}$ se conoce Como: Codimensión de un haz coherente.

Observación (5.3.2).- Reafirmando la Teoría anterior en el lenguaje de Prehaces tenemos el siguiente resultado establecido en la siguiente.

Proposición (5.3.2).- Sea X un esquema localmente Noetheriano, sea Y un subconjunto cerrado, sea F un haz coherente en X, y sea n un número entero. Son equivalentes los enunciados:

1. $Ext^K_{O_X}\left(G,F\right)=0$ para todo haz coherente G con Supp (G) $\subseteq$ Y, y para todo entero k < n.

1′. $Ext^K_{O_X}\left(G,F\right)=0$ para algún haz coherente G con Supp (G) = Y, y para todo entero k < n.

2. $\operatorname{Prof}_Y(F)\geq n$

2′. $\operatorname{Prof}\left(F_x\right)\geq n$ para todo $x\in Y$.

Demostración.- Similar a los Teoremas realizados para un anillo A, I ideal de A y M. Un A – módulo de tipo finito.

Nota.- A continuación presentamos un resultado lo cual relaciona la noción de profundidad (codimensión) a la cohomología local de haces. Para lograr tal resultado se ha seguido los lineamientos puntuales de: [1], [8] y [10].

Teorema (5.3.1).- Sea X un esquema localmente Noetheriano y sea Y un subconjunto cerrado, sea F un haz coherente en X, $n \in \mathbb{Z}$ (número entero), entonces son equivalentes.

(1) $\underline{H}_Y^k(F) = 0$ para todo k < n

(2) $\text{Prof}_Y(F) \geq n$

Demostración : **(1) $\Rightarrow$ (2).-** Procedemos por inducción sobre “n”. Si $n \leq 0$ no hay nada que probar. Ahora supongamos n > 0, entonces en particular la condición (1) es satisfecha para: (n – 1), y así por hipótesis inductiva, $\text{Prof}_Y(F) \geq n-1$. Por consiguiente haciendo uso de la proposición inmediata anterior se tiene: $Ext_{O_X}^K\left(G, F\right) = 0$.

Para todo G en la categoría $\mathcal{C}_Y$ de haces coherentes en X con soporte en Y, y para todo k < n – 1. En otras palabras, el funtor ($\rightsquigarrow$ $Ext_{O_X}^{n-1}\left(G, F\right)$ de $\mathcal{C}_Y$ a haces sobre X es exacto a izquierda.

Sea O_Y el haz de ideales de Y, y para cada entero m > 0; consideremos $O_m = \dfrac{O_X}{O_Y}$. Entonces los haces O_m están en la categoría $\mathcal{C}_Y$, así las suryecciones: $O_{m'} \longrightarrow O_m \longrightarrow 0$ para $m' > m$ da lugar a inyecciones.

$$0 \longrightarrow Ext_{O_X}^{n-1}\left(O_m, F\right) \longrightarrow Ext_{O_X}^{n-1}\left(O_{m'}, F\right).$$

En otras palabras, todos los homomorfismos en el sistema directo $\left(Ext_{O_X}^{n-1}\left(O_m, F\right)\right)_m$ $\left(\xi_0\right)$ son inyecciones. Ahora recordando el resultado :

"$\varinjlim_n Ext_{O_X}^k\left(O_n, F\right) \xrightarrow{\cong} H_Y^k\left(F\right)$" $\left(\xi_1\right)$ y haciendo uso del mismo tenemos que el límite directo de este sistema $\left(\xi_0\right)$ es $\underline{H}_Y^{n-1}(F)$, lo cual es cero por hipótesis. De aquí cada uno de los términos de nuestro sistema directo es cero, en particular $Ext_{O_X}^{n-1}\left(\dfrac{O}{O_Y}, F\right) = 0$.

Nosotros vemos que: $Ext_{O_X}^K\left(\dfrac{O}{O_Y}, F\right) = 0$ para k < n -1, de la proposición inmediata anterior concluimos $\text{Prof}_Y(F) \geq n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supongamos que $\text{Prof}_Y(F) \geq n$. Usando la notación anterior y el resultado $\left(\xi_1\right)$ tenemos para cualquier k.

$$\underline{H}_Y^K(F) \cong \varinjlim_m Ext_{0_X}^k\left(O_m, F\right)$$

Nuevamente por la proposición inmediata anterior estos: Ext′s son cero “0” para k < n, desde que los haces O_m tienen soporte en Y, por eso $\underline{H}_Y^K(F) = 0$ para k < n.

Aplicación (1): Sea X un esquema noetheriano localmente conexo, y sea Y un subesquema cerrado tal que $\text{Prof}_Y(O_X) \geq 2.$ Entonces X – Y es conexo.

Demostración.- Por el teorema anterior inmediato, nuestra hipótesis implica que $\underline{H}_Y^K(O_x) = 0$ para k =0, 1. Por resultado (en la primera parte) esto implica que la aplicación.

$$H°\left(X, O_X\right) \longrightarrow H°\left(X - Y, O_X\right)$$

Es biyectivo. Para completar la demostración de este resultado propuesto; necesitamos solamente observar que: un esquema X es conexo si y solo si $H°\left(X, O_X\right),$ considerado como un módulo sobre si mismo es indescomponible antes X – Y es conexo.

Si X es disconexo, $H°\left(X, O_X\right)$ es la suma directa de $H°\left(U_K, O_X\right),$ donde U_k son los componentes, así $H°\left(X, O_X\right)$es descomponible, Inversamente, supongamos $H°\left(X, O_X\right)$ es descomponible . Entonces existen idempotentes no triviales: e_1, e_2 en $H°\left(X, O_X\right)$ estos elementos son diferente de cero, y tal que 1 = $e_1 + e_2; e_1 e_2 = 0; e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2.$ Para cada x∈ X, el anillo local O_X es indescomponible, por esto uno de los e_i es cero en X. Ni puede ser cero en cada punto de X, por eso X es la suma disjunta de los conjuntos cerrados donde $e_1 = 0 = e_2.$ Así X es disconexo

Aplicación (2): Sea A un anillo localmente Noetheriano con ideal máxima $\mathcal{M}$ y campo residual K. Sea X = Spec (A), U) X – {m}. Sea M Un módulo de tipo finito y “n” un número entero no negativo entonces los siguientes condiciones son equivalentes.

(1). Prof (M) > n

(2) $Ext^k(K, M) = 0$ para $k \leq n$.

(3) $H^k\left(X, \tilde{M}\right) \longrightarrow H^K\left(U, \tilde{M}\right)$ es biyectivo para k < n y es inyectivo para k = 0.

(4) $H_{\{m\}}^k\left(\tilde{M}\right) = 0$ para $k \leq n.$

CAPITULO VI

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y Demostración de la Hipótesis con Resultados

En este trabajo se formuló la hipótesis general, lo cual establecía que los homomorfismos entre haces permitirá la cohomología local de grupos y haces en términos de los funtores EXT, esto daba lugar a la formulación de las siguientes hipótesis específicas.

1. Los isomorfismos entre haces permitiría interpretar la cohomología local de grupos y haces como el límite directo de los funtores $Ext^{K}\left(-,F\right)$.
2. Un ideal I – en un anillo Noetheriano A y M un A – módulo finito, permitirá establecer la equivalencia entre $Ext_{A}^{K}(M,N)$ que se anula con la existencia de una sucesión M – regular.

6.2. Contrastación de la Hipótesis con Estudios Similares

Son algunos autores entre los cuales: M.P. Brodman R. Y Sharp; en su obra "Local Comology: an algebraic introduction With geometric applications" estudian e introducen la cohomología local, en un contexto netamente algebraico, basado en el denominado funtor torsión, y esto lo permite el estudio de la cohomología local de módulos; mientras que nosotros trabajamos la cohomología local y algunos resultados en un enfoque geométrico, haciendo uso de la teoría de haces y por ende de esquemas.

6.3. Responsabilidad Ética

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación, el reglamento de propiedad intelectual y el reglamento de participación de los docentes en proyectos de investigación aprobados por la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de auditoría y de propiedad intelectual.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados analíticos obtenidos, en la interpretación de la cohomología local de grupos y haces en términos o en función de los funtores "Ext", se han podido establecer las siguientes conclusiones:

1. Los funtores de cohomología local estudiados en este trabajo se presenta en un contexto geométrico basado en la Teoría de Haces y esquemas.
2. Dentro de los resultados obtenidos resaltamos el siguiente : "Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo cuasi – compacto separado de esquemas, y siendo E un haz cuasi – coherente de X. entonces las imágenes $R^n \varphi_* (E)$ del haz E son todos haces cuasi – coherentes de Y", el cual permite establecer los grupos de cohomología local en función de los funtores "Ext".
3. La noción de codimensión homológica (Profundidad) juega un rol preponderante en muchos resultados de aplicación obtenidos en el trabajo.

RECOMENDACIONES

1. Los resultados obtenidos, sobre la interpretación de la cohomología local de grupos y haces, se han presentado o estudiado bajo la cohomología local; se recomienda estudiarlo tales resultados bajo la teoría de la Homología Local.

2. El estudio del funtor Torsión que es básico y fundamental en la teoría de Cohomología local, se recomienda discutirlo bajo su dualización.

3. Impulsar la investigación matemática en el área de la Topología Algebraica y el álgebra; más puntualmente en cohomología y homología local.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Robin Hartshorne. Residues and duality. Springer – Verlag Berlin. Heidelberg. New York 1966.

[2] Srikanth Iyengar (Mas seis). Twenty – four hours of local cohomology. Departament of Mathematics, University of Nebraska – 203 Avery Hall, Lincoln. NE 68588 (mas seis). Snowbird, Utah. 2005.

[3] Sze – Tsen Hu, Introducción Algebra Homológica; Universidad de California, Los Angeles. 1974.

[4] Simmons, G.F. Introduction to Topology and Modern Analysis. New York. Mc. Graw – Hill, 1963.

[5] Spanier, E. H. Algebraic Topology, New York: Mc Graw – Hill, 1996.

[6] M. Artin "Grothendieck Topologies", mimeographed Seminar notes, Harvard (1962).

[7] H. Cartan and S. Eilemberg, "Homological Algebra", Princeton University press (1956).

[8] Joseph J. Rotman; An introduction to Homological Algebra, universidad of Illinois aturbana – Champaign. Usa – 2009.

[9] J.P.C. Greenlees, And J.P. May. Derived Functors of I-adic completion and local Homology.

[10] M.P. Brodman – R.Y. Sharp. Local cohomology; an algebraic Introduction With geometric aplications. New York. Press 1998.

[11] I.G. MacDonald and R.Y. Sharp. An Elementary Proof of the Non – Vanishing of certain local cohomology modules. Oxford. 1972

[12] O. Zariski and P. Samuel. Conmutative algebra Vol. II. Springer, Berling. 1975

ANEXOS

Haces:

La importancia de la Teoría de haces es la relación que dá o produce las relaciones entre propiedades locales y globales de un espacio Topológico.

Definición.- Sean E y X dos espacios topológicos.

Una aplicación $p : E \longrightarrow X$ es llamado un **homeomorfismo local** si, para cada $e \in E$, existe una vecindad abierta V de e, llamado una hoja, con p(V) abierto en X y $P_{|v} : V \longrightarrow p(v)$ un homeomorfismo. La terna: (E, P, X) es denominado Protohaz si el homeomorfismo local p es suryectivo.

Observación.- 1) Los elementos de la Terna (E, P, X) tienen los nombres siguientes: El espacio E es llamado el Espacio Haz; p es la proyección, mientras que X es el espacio base.

2) Para cada $x \in X$ la fibra $p^{-1}_{(x)}$ denotado por E_x y es llamado tallo sobre X.

Definición.- Si $p : E \longrightarrow X$ es continua, donde X y E son espacios topológicos entonces S = (E, P, X) es una gavilla de etale o Haz de etale de grupos abelianos si:

i) (E, P, X) es una protagavilla

ii) El Tallo E_X es un grupo abeliano para cada $x \in X$

iii) Las operaciones de inversión y adición son continuos

El significado de continuidad de inversión $e \mapsto -e$ es claro, pero nosotros elaboramos sobre la definición de continuidad de adición. Así definimos.

$$E + E = \bigcup_{x \in X} \left(E_x x E_x \right) = \left\{ \left(e, e' \right) \in ExE : p(e) = p(e') \right\}$$

La adición $\sigma : E + E \longrightarrow E$ es dado por $\alpha\left(e, e'\right) = e + e'$

Definición.- Sean S = (E, P, X) y S′ = (E′, P′, X) dos gavillas de etale sobre un espacio X. Una aplicación – Etale $\varphi : S \longrightarrow S'$ es una aplicación continua $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que $p' \circ \varphi = p$ y cada $\varphi_{|E_x}$ es un homomorfismo.

Escribimos: Hom$_{et}$(S, S′)=$\left\{\varphi : S \longrightarrow S' / \varphi \text{ es una aplicación etale}\right\}$

- El $Hom_{et}(S, S')$ es un grupo abeliano aditivo.
- No es difícil mostrar que todas las haces de etale o gavilla de etale de grupos abelianos sobre un espacio topológico X forma una categoría, lo cual denotamos por.

$$Sh_{et}\left(X, Ab\right)$$

Ejemplo.- El Protahaz $\left(\mathbb{R}, p, S^1\right)$ donde $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ es el homeomorfismo local dado por $f(t) = e^{2\pi i t}$; Mas no es una gavilla de etale (haz de etale) de grupos abelianos.

Definición.- Sean $S' = (E', P', X)$ y $S = (E, P, X)$ dos gavillas de etale (haces de etale). Se dice que S' es una gavilla subetal de S si $E' \subseteq E$ y la inclusión $i : E' \hookrightarrow E$ es una aplicación etale.

Teorema.- Dos haces subetal (gavillas subetal) (E, P, X) y $\left(E', P', X\right)$ de una gavilla etal son iguales si y solamente si ellos tienen el mismo tallo; esto es; $Ex = E'x$ pero todo $x \in X$.

Definición.- Sean $S = (E, P, X)$ es una gavilla etal de grupos abelianos y $U \subseteq X$. Un conjunto abierto. Una sección sobre U es una aplicación $\sigma : U \longrightarrow E$ tal que $P\sigma = 1_U.\sigma$ es llamado sección global si U = X. Definimos $\Gamma\left(\phi, S\right) = \left\{0\right\}$ y si $U \neq \phi$ definimos el conjunto.

$$\Gamma(U, S) = \left\{\text{secciones } \Gamma\text{:U} \longrightarrow E\right\}$$

Definición.- Una categoría abeliana $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos si para cada A $\in \mathcal{A}$, existe un inyectivo I y un monomorfismo $A \longrightarrow I$. Dualmente $\mathcal{A}$ tiene suficiente proyectivos, si para cada $A \in Obj(\mathcal{A})$, existe un proyectivo P y un epimorfismo $P \longrightarrow A$.

Sea $T : C \longrightarrow C$ un funtor contravariante aditivo. Discutimos el funtor derivado a derecha R^nT , empezamos con una resolución proyectiva P de A, para la contravarianza de T ponemos TP_A a la derecha.

Dado un funtor contravariante aditivo $T : \mathcal{A} \longrightarrow C$ entre categorías abelianas. Construíremos para todo $n \in \mathbb{Z}$, sus funtores derivados a derecha $R^nT : \mathcal{A} \longrightarrow C.$

Elijamos, uno y para toda resolución proyectiva.

$P : .. \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0,$ para cada objeto A, formemos el complejo TP_A, y tomemos la homología.

$$\left(R^nT\right)A = H^n(TP_A) = \frac{Ker(Td_{n+1})}{\operatorname{Im}(Td_n)}$$

Si $f : A \longrightarrow A',$ definimos $\left(R^nT\right)f : \left(R^nT\right)A' \longrightarrow \left(R^nT\right)A$ existe una aplicación codena $\check{f} : P_A \longrightarrow P_A^{'}$, sobre f única, salvo homotopía, que induce una aplicación: $\left(R^nT\right)f : H^n\left(TP_{A'}^{'}\right) \longrightarrow H^n\left(TP_A\right)$ en homología y definimos:

Teorema.- Si $T : \mathcal{A} \longrightarrow C$ es un funtor contravariante aditivo entre categorías abelianos, donde $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces $R^nT : \mathcal{A} \longrightarrow C$ es un funtor contravariante para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definición: Si $T : \mathcal{A} \longrightarrow C$ es un funtor contravariante entre categorías abelianas, donde $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, los funtores R^nT son llamados funtores derivados a derecha de T.

Sea X un espacio topológico; el grupo de secciones globales define los funtores:

$\Gamma : pSh(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{gob}$ y $\Gamma : Sh(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{gob}$

Como : $\Gamma : X \longrightarrow \Gamma\left(X, \mathcal{F}\right) = \mathcal{F}(X)$ para cada $X \in Obj(pSh(X))$ y $\varphi = \varphi(U)_{U-abierto} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ por $\Gamma : \varphi s \mapsto \varphi\left(x\right)\left(s\right),$ donde : $s \in \Gamma\left(X, \mathcal{F}\right), Sh(X)$ es la subcategoría de $pSh(X, Ab)$ generado por todos las haces (gavillas) sobre X.

Definición.- Una familia de Soportes Φ es una familia de subconjuntos cerrados de X tal que:

(i) Para cualquier $A \in \Phi$ y B $\subseteq$ A es cerrado, entonces $B \in \Phi$

(ii) Para cualquier $A, A' \in \Phi$, entonces $A \cup A' \in \Phi$.

Definición.- Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de anillos conmutativos sobre X. Se denomina a X espacios Localmente Anillado, junto con $\mathcal{F}$, el haz $\mathcal{F}$ se llama también Haz Estructural del espacio localmente anillado X, que generalmente se escribe como O_X .

Definición.- Sea X un espacio Topológico y O_X su espacio anillado correspondiente la pareja (X, O_X) se denomina Esquema si es localmente anillado e isomorfo localmente a un esquema Afin.

La bibliografía se presenta a continuación corresponde a los anexos.

Bibliografía (Anexos)

[1] Joseph J. Rotman; An introduction to Homological Algebra, universidad of Illinois Oturbana – Champaign. Usa – 2009.

[2] Eilemberg S. and Steenrod. Foundations of Algebraic. Topology, Princeton Univ. 1961.

[3] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp Local Cohomology: an algebraic introduction with geometric applications. Cambridge Studies in Advenced Matematics. 1998.

[4] R. Hartshorne, Residues and duality lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin. 1966.

[5] J. Limpan. Lectures on local cohomology and duality in: local cohomology and its applications.

(Guanajato 1999). New York 2002.