UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

INSTITUTO DE INVESTIGACION DE INGENIERÍA QUÍMICA

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES Y SUS APLICACIONES A LA ECOLOGIA"

AUTOR: LIC. VICTORIA YSABEL ROJAS ROJAS

PERIODO DE EJECUCION: 24 MESES

DEL 01 DE NOVIEMBRE DEL 2012 AL 31 DE OCTUBRE DEL 2014
RESOLUCION RECTORAL N° 1063 – 2012 -R

CALLAO, 2014

I ÍNDICE

ABSTRACT

In this research work the differential equations and nonlinear systems, as well as its application to ecology will be studied. The real world problem is to determine population at some future time. The depreador model – dam, which denote the number of prey by $x(t)$, and the predation as $y(t)$ at time t has the following in the absence of predators, the population of the prey would grow at a rate $dx/dy = ax, a > 0$. In the absence of prey, the predator population declines to a$dy/dy = -cx, c > 0$, when both predators and prey are present, a combination of these natural rates of growth. And decline occurs, in which the population prey decreases and increases of predators , each in proportion to the frequency of meetings. The effect of predators devour prey is a declining $-bxy$ in the population x and increasing interaction rate in the population and the predators dxy, where b and d are positive constants. When we add the natural rates of interaction described above , we obtain the equations of predator - prey.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx)$$

which constants a, b, c and d are all positive . This is an almost linear system with two critical points (0,0) and $(c/d, a/b)$ gives the equilibrium solution corresponding $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ describes the extinction of species, the critical point $((c/d, a/b)$; $x(t) = c/d$ y $y(t) = a/b$ are non-zero constant prey and predator populations can coexist in equilibrium .

II RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se estudiaran las Ecuaciones Diferenciales y Sistemas no Lineales, así como su aplicación a las Ecología. El problema del mundo real es el de determinar la población en algún tiempo futuro. El modelo depredador – presa, donde denotemos el número de presas por $x(t)$, y el de depredados como $y(t)$ en el tiempo t y se tiene los siguientes supuestos, en ausencia de depredadores, la población de las presas crecería a una tasa ${}^{dx}/_{dt} = ax,\ a > 0$. En ausencia de presas, la población depredadora declinaría a una tasa ${}^{dy}/_{dt} = -cx,\ c > 0,$ cuando tanto los depredadores como las presas están presentes, ocurre una combinación de estas tasas naturales de crecimiento y declinación, en la que la población de las presas disminuye y la de los depredadores aumenta, cada una en proporción a la frecuencia de los encuentros. El efecto de que los depredadores devoren a las presas es una tasa de interacción decreciente $-bxy$ en la población x de las presas y una tasa de interacción creciente en la población y de los depredadores dxy, siendo b y d constantes positivas. Cuando sumamos las tasas naturales y de interacción descritas antes, obtenemos las ecuaciones de presa - depredador

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx)$$

Cuyas constantes a, b, c y d son todas positivas. Este es un sistema casi lineal con dos puntos críticos $(0,0) y\ (c/d\,, a/b)$ se obtiene que la solución de equilibrio correspondiente $x(t) = 0,\ y(t) = 0$ describe la extinción de las especies, el punto critico$(c/d\,, a/b)$; $x(t) = c/d$ y $y(t) = a/b$ son las poblaciones constantes no nulas de presa y de depredador que pueden coexistir en equilibrio

III INTRODUCCIÓN

1.1. Presentación del problema de investigación

A menudo es difícil, si no imposible resolver explícitamente una ecuación diferencial dada, en especial si no es lineal Por lo tanto, es importante determinar qué información cualitativa relativa a las soluciones de una ecuación diferencial se puede lograr sin necesidad de obtener una solución explicita. Por ejemplo podemos estar en condiciones de establecer que toda solución $x(t)$ crece sin cota alguna cuando $t \to \infty$, o que se aproxima a un límite finito, o que es una función periódica de t. En este trabajo presentaremos (mediante consideraciones en torno a la ecuaciones diferenciales simples que se pueden resolver explícitamente) algunas de las cuestiones cualitativas más importantes que a veces pueden contestarse en el caso de ecuaciones menos dóciles.

Se estudiara la estabilidad de sistemas lineales y una de las aplicaciones más importantes e interesantes de la teoría de la estabilidad nos referimos a la interacciones entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Consideremos en el presente trabajo una situación de depredador presa en que intervienen dos especies. Una especie de depredadores se alimenta de la otra especie, la presa, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente. Por ejemplo estándar de una población de zorros y conejos en un bosque; los zorros (depredadores) devoran a los conejos (la presa), en tanto que los conejos comen cierta vegetación del bosque. Otros ejemplos son los tiburones (depredadores) y los peces su alimento (la presa); los escarabajos (depredador) y el pulgón (la presa).

El modelo matemático clásico para una situación depredador – presa fue ideado en los años 20 por el matemático italiano Vito Voltera (1860 – 1940) para analizar las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces alimento en el mar Atlántico. Para construir tal modelo. Para construir tal modelo, denotemos el número de presas como $x(t)$, el número de depradados como $y(t)$ en el tiempo t y se tiene las siguientes conjeturas simplificadas.

1.- en ausencia de depredadores la población de las presas crecería a una tasa natural con $dx/_{dt} = ax,\ a > 0.$

2.- En ausencia de presas, la población depredadora declinaría a una tasa natural, con $dy/_{dt} = -cx, c > 0.$

3.- cuando tanto los depredadores como las presas están presentes, ocurre una combinación de estas tasas naturales de crecimiento y declinación, en la que la población de las presas disminuye y la de los depredadores aumenta, cada una en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Supongamos además que la frecuencia de los encuentros es proporcional al producto xy, razonando que al duplicarse cualquiera de las dos poblaciones se duplica la frecuencia de los encuentros. En consecuencia, el efecto de que los depredadores devoren a las presas es una tasa de interacción decreciente $-bxy$ en la población x de las presas y una tasa de interacción creciente en la población y de los depredadores dxy, siendo b y d constantes positivas.

Cuando sumamos las tasas natural y de interacción descritas antes, obtenemos las ecuaciones de presa depredador

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx)$$

Cuyas constantes a, b, c y d son todas positivas

1.2. Enunciado del problema

General

¿Las Ecuaciones Diferenciales no lineales resuelven problemas de ecología (depredador presa)?

1.3. Objetivos de la Investigación

General

Estudiar las ecuaciones diferenciales no lineales, y sus aplicaciones a la ecología.

Especifico

a) Estudiar las ecuaciones diferenciales

b) Estudiar sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

c) Estudiar aplicaciones ecológicas; depredadores y competidores

1.4 Importancia y Justificación de Investigación

Las leyes del universo están, en gran parte, escritas en el lenguaje de las matemáticas. El Álgebra es suficiente para resolver muchos de los problemas estáticos, pero los fenómenos naturales más interesantes implican cambios y se describen mejor mediante ecuaciones que relacionen cantidades variables.

Las derivadas ${dx}/_{dt} = f'(t)$ de la función f pueden ser consideradas como la razón por la cual la cantidad $x = f(t)$ cambia con respecto a la variable independiente t; por eso es natural que las ecuaciones que entrañan derivadas sean las que describen el universo cambiante. Como se verá en este trabajo que será de gran utilidad para los docentes y estudiantes de Ingeniería Química.

1.5 Enunciado de la Hipótesis

Las Ecuaciones Diferenciales no lineales permiten resolver problemas ecológicos.

IV MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

Los modelos depredador-presa han desempeñado un papel muy importante en el estudio de muchas poblaciones donde aparece una determinada relación entre ellas. Con todo ello podemos decir que forman uno de los temas más interesantes y dominantes dentro de la ecología.

Uno de los primeros trabajos sobre la dinámica de poblaciones lo podemos encontrar en " Essay on the principle of population " de Thomas Malthus (1798), donde argumenta que mientras las poblaciones crecen logarítmicamente, los recursos de los que dependen son constantes o solo crecen aritméticamente, de esta manera la demanda de recursos debe de exceder al suministro y el crecimiento poblacional, dependiente de la fuente de suministro, aunque su modelo sobre el crecimiento de las poblaciones, no sea realista ya que un crecimiento ilimitado no se produce en la naturaleza, debido a la existencia de múltiples limitaciones: físicas, biológicas, etc.

Más tarde, Verhulst (1838) en su trabajo " Principle of Population ", formula un modelo en el que trata de corregir el crecimiento Malthusiano con un factor freno en el modelo, y que se puede considerar como el germen de todos los modelos conocidos como logísticos, $\frac{dN}{dt} = kN$, donde N es la densidad de la población, a la tasa per cápita de cambio o la tasa de aumento intrínseco y k la densidad de equilibrio a menudo llamada la capacidad de carga del entorno.

Posteriormente, y a partir del auge que estaban adquiriendo todos estos temas, Lotka (1925) y Volterra (1928) realizan uno de los grandes avances en la dinámica de poblaciones, donde proponen el primer modelo depredador presa que en lugar de ser obtenido por extensión de la ley logística a dos especies, adoptan el principio químico de acción de masas. En otras palabras, en dichos trabajos se asume que la respuesta de la población será proporcional al producto de sus biomasas. A partir de aquí son múltiples los avances que en torno a este tema y en general sobre la dinámica de poblaciones se han llevado a cabo. En consecuencia, en este trabajo realizamos un estudio de ecuaciones diferenciales no lineales obteniendo una serie de resultados, para un caso particular de ellos, que posteriormente utilizamos para analizar un determinado modelo depredador presa.

2.2 Ecuaciones lineales de orden superior

La forma general de una ecuación diferencial de orden ***n*** con la variable independiente x y función desconocida o variable dependiente $y = y(x)$ es

$$F(x,y,y',y'',....y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

En la que F es una función conocida con valores reales y $n + 2$ variables.

Diremos que la función $y = u(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (1) en el intervalo I cuando las derivadas $u', u'',....,u^{(n)}$ existen en I y si

$$F(x,u,u',u'',....u^{(n)}) = 0$$

Para todo x en el intervalo I. cuando es necesario abreviar, decimos que $y = u(x)$ satisface la ecuación diferencial (1) en I.

La ecuación lineal general de orden n tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_n - 1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x). \quad (2)$$

A menos que se indique otra cosa, supondremos siempre que las funciones coeficientes $a(x)$ y $F(x)$ son continuas en algún intervalo abierto I (quizá no acotado) en el que deseamos resolver la ecuación diferencial, pero no es necesario que sean funciones lineales. Así la ecuación diferencial.

$$e^x y^x + (\cos x) y^1 + \left(1 + \sqrt{x}\right)y = tan^{-1}x$$

Es lineal, debido a que la variable dependiente y y sus derivadas aparecen linealmente, en tanto que las ecuaciones.

$$y^n = yy^1 \text{ y } \quad y^n + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$$

Son no lineales porque aparecen productos y potenciales de y y sus derivadas.

Si la función $F(x)$ del segundo miembro de la ecuación (2) se anula idénticamente en I, entonces decimos que (2) es una ecuación lineal **homogénea**; de no ser así, es no homogénea.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (3)$$

Para resolver una ecuación diferencial de $n -$ ésimo orden debemos, al menos en principio, integrar n veces (para reducir $y^{(n)}$ a y). Por lo tanto, es natural esperar que la ecuación (3) tenga una solución general que requiera n constantes arbitrarias $c_1, c_2, .., c_n$ (de integración).

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \qquad (4)$$

Encontrar una solución general como (4), en el caso $n = 1$ y los casos de orden superior $n \geq 2$. No existe fórmula para resolver en forma general una ecuación lineal de orden superior arbitraria y con coeficientes variables.

2.2.1 Soluciones generales de ecuaciones lineales

La ecuación lineal general de n -ésimo orden de la forma.

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x) \qquad (5)$$

donde las funciones $P_i(x)$ y $F(x)$ son continuas en algún intervalo abierto I de R, siendo $P(x) \neq 0$, dividiendo cada término de la ecuación (5) por $P(x))$ para obtener la ecuación.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x) = f(x) \qquad (6)$$

La ecuación lineal homogénea asociada a (6) es

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (7)$$

Al igual que en el caso de segundo orden, una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden tiene la conveniente propiedad de que cualquier superposición, o combinación lineal, de soluciones de la ecuación también una solución.

Teorema 1: Principio de superposición

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluciones de la ecuación lineal homogénea (7) sobre el intervalo I. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots c_ny_n \qquad (8)$$

También es una solución de (7) sobre I. (STEWART, 2000)▪

Una solución particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden queda determinada por dos condiciones iniciales. De manera similar, una solución particular de una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden está determinado por n condiciones iniciales.

Teorema 2: Existencia y unicidad

Supóngase que las funciones $p_1, p_2, \dots, p_n$ y f son continuas en el intervalo abierto I, que contiene al punto a. Entonces, dado n números $b_1, b_2, \dots, b_n$, la ecuación

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f\,(x)$$

Tiene una única solución en el intervalo I, que satisface las n condiciones iniciales.

$$y(a) = b_0, y'^{(a)} = b_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \qquad (9)$$

La ecuación (6) y las condiciones dadas en (9) constituyen un **problema con condiciones iniciales de n-ésimo orden**. El teorema 2 nos dice que tal problema tiene una solución única en todo el intervalo I donde los coeficientes dados en (6) son continuos. (CARMONA 2013) ▪

El teorema 2 implica que la solución trivial $y(x) = 0$ es la única solución de la ecuación homogénea.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y, = 0 \qquad (10)$$

Que satisface las condiciones iniciales triviales.

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$$

Una solución general de la ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (11)$$

Será una combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_nyn \dots \qquad (12)$$

Donde $y_1, y_2, .., y_n$ son soluciones particulares de la ecuación (11). Pero estas n soluciones particulares deben ser "suficientemente independientes" como para que podamos escoger siempre los coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de la ecuación (12)

Definición 1.- Dependencia lineal de funciones

Se dice que las n funciones $f_1, f_2, .., f_n$ son **linealmente dependientes** sobre el intervalo I si existen constante $c_1, c_2, \dots, c_n$ no todas nulas tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 ; \quad \forall x \in I \qquad (13)$$

Si no todos los coeficientes de la ecuación (13) son cero, no hay duda de que podemos despejar por lo menos una de las funciones como combinación lineal de las otras y recíprocamente. Así pues, las funciones $f_1, f_2, .., f_n$ son linealmente dependientes si y sólo si al menos una de ellas es una combinación lineal de las otras.

Las n funciones $f_1, f_2, .., f_n$ se denominan **linealmente independientes ($\boldsymbol{l.i}$)** en el intervalo I en el caso de que no sean linealmente dependientes. En forma equivalente, son linealmente independientes en I con tal de que la identidad.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \qquad (14)$$

Se cumpla en I solamente en el caso trivial.

$$c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0;$$

Es decir, ninguna combinación lineal no trivial de estas funciones se anula en I. Puesto de otra manera, las funciones $f_1, f_2, .., f_n$ son linealmente independientes si ninguna de ellas es una combinación lineal de las otras.

Para demostrar que n funciones dadas son linealmente independientes hay una herramienta que hace que la determinación de la dependencia o independencia lineales sea cuestión de rutina. Esta herramienta es el determinante wronskiano. Supóngase que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, son $n-1$ veces diferenciales cada una. Entonces, su wronskiano es el determinante nxn

$$w(f_1, f_2, \ldots f_n) = det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Se llama wronskiano en honor del matemático polaco J. M.H. Wronski (1778-1853). El wronskiano de dos funciones linealmente dependientes se anula. Idénticamente generalizando, el wronskiano de n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linealmente dependientes es idénticamente cero.

Derivamos estas ecuaciones $n-1$ veces sucesivas para obtener las n ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \\ c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) + \ldots + c_n f'_n(x) \\ \vdots \\ c_1 f^{(n-1)}{}_1(x) + c_2 f^{(n-1)}{}_2(x) + \ldots + c_n f^{(n-1)}{}_n(x) \end{array}\right\} \tag{16}$$

Que se aplican para toda $x \in I$. Recordemos del álgebra lineal que un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tiene una solución no trivial si y solamente si el determinante de sus coeficientes se anula. En (16) las incógnitas son las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y el determinante de coeficientes es simplemente el wronskiano $w(f_1, f_2, \ldots f_n)$ evaluado en el punto $x \in I$. Puesto que sabemos que no todas las c_i son cero, se sigue que $w(x) = 0$.

Por lo tanto, para demostrar que las funciones $f_1, f_2, \dots f_n$ son linealmente independientes en el intervalo I, es suficiente con probar que su wronskiano no se anula al menos en sólo un punto de I.

Si $w(f_1, f_2, \dots f_n) \neq 0$, podemos encontrar siempre los coeficientes de la combinación lineal. $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_nyn$

El siguiente teorema estipula que la no anulación de w es necesaria en el caso de soluciones linealmente independientes (HASSER 1997).

Teorema 3: Wronskianos de las soluciones

Supóngase que $y_1, y_2, \dots, y_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{17}$$

En un intervalo abierto I en el que cada p_i es continua. Sea

$$w = w(y_1y_2 \dots . y_n)$$

(a) Si $y_1, y_2, \dots, y_n$ son linealmente dependientes, entonces $w = 0$ sobre I.

(b) Si $y_1, y_2, \dots, y_n$ son linealmente independientes, entonces $w \neq 0$ en todo punto de I.

Así que hay precisamente dos posibilidades o bien $w = 0$ en todos los puntos de I o bien $w \neq 0$ en todos los puntos de I. ▪

Usando el hecho establecido en el teorema 3 de que el wronskiano de n soluciones linealmente independientes no es cero, el siguiente teorema establece la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Teorema 4: Soluciones generales

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones linealmente independiente de la ecuación homogénea.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (18)$$

En un intervalo abierto I en donde las p_i son continúas. Si Y es una solución cualquiera de la ecuación (31), entonces existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x); \qquad \forall x \in I.$$

Así que toda solución de una ecuación diferencial lineal de orden n es una combinación lineal. $Y = c_1y_1 + c_2y_{2+} \ldots + c_ny_n$

de n soluciones linealmente independientes cualesquiera. Sobre esta base, llamamos **solución general de la ecuación diferencial** a dicha combinación lineal (APOSTOL, 1999)

2.2.2 Ecuaciones no homogéneas

Consideremos ahora la ecuación lineal diferencial no homogénea de orden n.

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (19)$$

Cuya ecuación homogénea asociada es

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (20)$$

El símbolo L representa **un operador**, dada una función y diferenciable n veces, ***L* opera sobre** y produciendo la combinación lineal.

$$Ly = y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny \quad (21)$$

De y y sus primeras n derivadas. El principio de superposición significa simplemente que el operador L, es lineal es decir,

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2 \tag{22}$$

si c_1 y c_2 son constantes.

Suponga que se conoce una solución particular y_p de la ecuación no homogénea (19) y que Y es otra solución cualquiera de la misma. Entonces (22) implica que:

$$L(Y - y_p) = LY - Ly_p = f - f = 0$$

Así que $y_c = Y - y_p$ es una solución de la ecuación homogénea asociada (20). Entonces

$$Y = y_c + y_p \tag{23}$$

y se sigue del teorema 10 que

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_{n'} \tag{24}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Decimos que y_c, es una **función complementaria** de la ecuación no homogénea así una solución general de la ecuación no homogénea (19) es la suma de su función complementaria y_c, y una solución particular y_p de la ecuación (19).

Teorema 5: Soluciones de ecuaciones no homogéneas

Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea (19) en un intervalo abierto I en el cual las funciones p_i y f son continuas. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independiente de la solución homogénea asociada (20). Si Y es una solución cualquiera de la ecuación (9) sobre I, entonces existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) \quad \forall x \in I$$

2.2.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

La solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables por lo general requiere métodos de series o métodos numéricos. Tal ecuación general puede escribirse en la forma.

$$a_ny^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} +..+ a_2y^n + a_1y' + a_0y = 0 \qquad (25)$$

Donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$son constantes reales tales que $a_n \neq 0$.

Primero buscamos una solución de la ecuación (38) y comenzando con la observación de que

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^ke^{rx} \qquad (26)$$

Por lo tanto, si sustituimos $y = e^{rx}$ en la ecuación (38), cada término será un múltiplo de e^{rx}, con coeficientes constantes que dependerán de r y de los coeficientes a_i. esto es,

$$e^{rx}(a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_2r^2 + a_1r + a_0) = 0.$$

Puesto que e^{rx} nunca es igual a cero, vemos que $y = e^{rx}$ será solución de la ecuación (38) precisamente cuando r sea una raíz de la siguiente ecuación:

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0. \qquad (27)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica** o ecuación auxiliar de la ecuación diferencial (25). Nuestro problema, entonces, se ha reducido a resolver esta ecuación puramente algebraica. (KREYSZIG 2003)

Teorema 6: Raíces reales distintas

Con cualquier método, resuelto de la ecuación característica. Si la n soluciones $r_1, r_2, .., r_n$ de la ecuación característica (27) son reales y distintas, entonces.

$$Y(x) = c_1 e^{r1x} + c_2 e^{r2x} + \cdots + c_n e^{rnx} \tag{28}$$

Es una solución general de la ecuación (25) ▪

Teorema 7: Raíces repetidas

Si la ecuación característica (27) tiene una raíz repetida r de multiplicidad k, entonces la parte de la solución general de la ecuación diferencial es de la forma

$$Y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{rx} \tag{29}$$

Teorema 8: Raíces complejas

Si la ecuación característica (27) tiene un par de raíces complejas conjugadas no repetidas $a \pm bi$ $(b \neq 0)$ entonces la parte correspondiente de la solución general de la ecuación (3) tiene la forma.

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2\, sen\, bx) \tag{30}$$

2.3. Sistemas de ecuaciones

Muchas aplicaciones requieren usar dos o más variables dependientes siendo cada una función de una misma variable dependiente (por lo general el tiempo). Naturalmente, tales problemas conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Por lo regular denotaremos la variable independiente mediante t y las variables dependientes (las funciones desconocidas de f) mediante $x_1, x_2, .. x_n$, o bien x, y, z, Se trabajó sistemas en los cuales el número de ecuaciones sea el mismo que el número de variables dependientes. Por ejemplo, un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con las variables dependientes x y y tiene la forma general.

$$\left.\begin{array}{l} f(t,x,y,x',y') = 0 \\ \\ g(t,x,y,x',y') = 0 \end{array}\right]$$

Donde las funciones f y g se conocen. Una solución de este sistema es un par de funciones $x(t)$ y $y(t)$ que satisfagan ambas ecuaciones en algún intervalo que contenga al valor de t. (APOSTOL 1999)

2.3.1 Sistemas de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales en el cual puedan despejarse las derivadas de más alto orden como funciones explícitas de t y de las derivadas de orden inferior de las mismas variables dependientes. Por ejemplo, en el caso de un sistema de ecuaciones de segundo orden, será que se puede escribir en la forma

$$\begin{array}{l} x''_1 = f_1(t,x_1,x_2,x'_1,x'_2) \\ x''_2 = f_2(t,x_1,x_2,x'_1,x'_2) \end{array} \tag{31}$$

cualquier sistema de orden superior como éste pueda transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones de primer orden.

Para describir cómo se lleva a cabo tal transformación, consideremos primero el "sistema" que consta simplemente de la ecuación de n-ésimo orden

$$x^{(n)} = f\left(t, x_1, x', x^{(n-1)}\right), \tag{32}$$

El cambio de las variables dependientes $x_1, x_2, \dots, x_n$ definidas en esta forma:

$$x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x'' \dots\dots x_n = x^{(n-1)} \tag{33}$$

Luego si obtiene $x'_1 = x' = x_2, x'_2 = x'' = x_3$ ...... Por lo tanto, las sustitución es de las igualdades (46) en la ecuación (45) producen el sistema

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n, \\ x'_n &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{34}$$

de n ecuaciones de primer orden. Este sistema es equivalente a la ecuación (32) de n-ésimo orden,

Un **sistema lineal de primer orden** es de la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x'_2 &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{aligned} \tag{35}$$

Una **solución del sistema** (35) es un conjunto de n funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ que (sobre algún intervalo) satisfacen idénticamente cada una de las ecuaciones dadas.

La teoría general de sistemas de n ecuaciones lineales de primer orden tiene muchas semejanzas con la teoría general de ecuaciones lineales individuales de orden n.

Teorema 9: Existencia ***y unicidad de los sistemas lineales***

Supóngase que las funciones $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son continuas en un intervalo I que contenga al punto a. Entonces, dados n números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ el sistema (48) tiene una solución única sobre el intervalo completo I que satisfaga las n condiciones iniciales.

$$x_1(a) = b_1, x_2(a) = b_2, \ldots, x_n(a) = b_n \tag{36}$$

Luego es necesario n condiciones iniciales para determinar la solución de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden y en consecuencia debemos hallar una solución general de un sistema, que requiera n constantes arbitraria. Dado un sistema de orden superior, a menudo tendremos que transformarlo en un sistema equivalente de primer orden para descubrir cuántas condiciones iniciales, son necesarias para determinar una solución única; el teorema (12) dice que el número de tales condiciones es igual al de las ecuaciones en el sistema de primer orden equivalente.

2.3.2. Sistemas lineales y matrices

Los métodos de solución como es el caso de la transformada de Laplace o el método de eliminación bastan para la resolución de pequeños sistemas lineales que contengan sólo dos o tres ecuaciones con coeficientes constantes, las propiedades generales de los sistemas lineales se describen con la mayor facilidad y concisión mediante la notación matricial.

2.3.3. Sistemas lineales de primer orden

La notación matricial facilita los cálculos relativos a sistemas de ecuaciones diferenciales, especialmente aquellos que resultarían laboriosos con la notación escalar. Analicemos aquí el sistema general de n ecuaciones lineales de primer orden

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
x'_2 &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
x'_3 &= p_{31}(t)x_1 + p_{32}(t)x_2 + \dots + p_{3n}(t)x_n + f_3(t) \qquad (37) \\
&\vdots \\
x'_n &= p_n(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}
$$

Siendo la ***matriz de coeficientes***

$$P(t) = [p_y(t)]$$

y los vectores columna

$$x = [x_1] \quad y \quad f(t) = [f_i(t)]$$

El sistema (50) toma la forma de la ecuación matricial:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \tag{38}$$

La teoría general de los sistemas lineales como el de la expresión (37) es paralela a la teoría de las ecuaciones lineales de orden n. La notación matricial usada en la ecuación (38) no sólo enfatiza dicha analogía, sino que también ahorra espacio.

Una solución de la ecuación (38) en un intervalo abierto I es una función vector columna $\boldsymbol{x}(t) = x_i(t)$ tal que las funciones componentes de $\boldsymbol{x}$ satisfacen el sistema (37) en I. Si todas las funciones $p_y(t)$ y $f_i(t)$ son continuas sobre I, el teorema (9) garantiza la existencia en I de una solución única $x(t)$ que satisfaga condiciones iniciales $x(a) = b$.(CAMPBELL 1990)

2.3.4 Valores propios para sistemas lineales homogéneos

La siguiente teoría de valores y vectores propio para construir la solución general de un sistema lineal de primer orden homogéneo con coeficientes constantes es uno de los más adecuados por las propiedades que presentan los vectores propios ya que además son linealmente independientes y forman bases, se presenta este método para ecuaciones con coeficientes constantes,

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + x_{1n}x_n \\ a'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2x}x_n \\ &\vdots \\ a'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{m}x_n \end{aligned} \tag{39}$$

basta obtener n vectores solución, linealmente independientes $x_1, x_{2,} \ldots, x_n$ la combinación lineal

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_1x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t) \tag{40}$$

de coeficientes arbitrarios será entonces una solución general del sistema (39).

Para determinar las n soluciones vectoriales linealmente independientes, se procede por analogía con el método de raíces características con el que se resuelve una ecuación lineal homogénea individual, con coeficientes. Los vectores solución son de la forma

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \upsilon_1 e^{\lambda t} \\ \upsilon_2 e^{\lambda t} \\ \upsilon_3 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \upsilon_n e^{\lambda t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}=ve^{\lambda t} \qquad (41)$$

siendo $\lambda, \upsilon_1, \upsilon_2, ..., y\ \upsilon_n$ son constantes. Debido a que si reemplazamos

$$x_i=\upsilon_i e^{\lambda t}, \qquad x'_i=\lambda\upsilon_i e^{\lambda t}$$

$(i = 1,2,,,,n)$ en la ecuación (39), entonces el factor $e^{\lambda t}$ se simplificara quedando n ecuaciones lineales en las que (para valores apropiados de λ) podemos despejar los coeficientes $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ en (41) de modo que $x(t)=ve^{\lambda t}$ sea una solución del sistema en (39).

Para tal efecto es más eficaz escribir el sistema (39) en la forma matricial

$$x'=Ax \qquad (42)$$

donde $A = (a_{ij})$. Cuando sustituimos la solución tentativa $x=ve^{\lambda t}$ con su derivada $x'=\lambda ve^{\lambda t}$ en la ecuación (39), se obtiene

$$\lambda ve^{\lambda t}=Ave^{\lambda t}$$

Cancelamos él factor escalar no nulo $e^{\lambda t}$ para obtener

$$Av=\lambda v \qquad (43)$$

Esto significa que $x=ve^{\lambda t}$ será una solución no trivial de la ecuación (42) con tal de que v sea un vector no nulo y λ una constante tal que la ecuación (43) se cumpla. La pregunta es ahora ¿Cómo encontrar v y λ?

La respuesta es que reescribamos la ecuación (43) en la forma

$$(A-\lambda I)v=0 \qquad (44)$$

Dado λ, éste es un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas en las incógnitas $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_n$. Tendrá una solución no trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes de la matriz se anula; esto es, si y sólo si

$$|A-\lambda I|=\det(A-\lambda I)=0 \qquad (45)$$

El método de valores propios para resolver el sistema $x' = Ax$ consiste en determinar$A$. tal que la ecuación (45) se cumpla y en seguida resolver la ecuación (44) con este valor de λ para obtener $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_n$.

luego, $x=ve^{\lambda I}$ será un vector solución. El nombre de este método se debe a la siguiente definición.

Definición 3.- ***Valores propios y vectores propios***

El número λ (ya sea cero o no) se llama **valor propio** de la matriz A de orden nxn siempre y cuando

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (45)$$

Un **vector propio** asociado con el valor propio A es un vector v no nulo tal que $Av=\lambda v$, de modo que

$$(A-\lambda I)v=0 \qquad (44)$$

Se observa que, si v es un vector propio asociado con el valor propio λ, también lo será cualquier múltiplo escalar constante no nulo cv de v

También se utilizan los términos *valor característico* y *vector característico*. Motivo por el cual, la ecuación

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (46)$$

es llama la ***ecuación característica*** de la matriz A; sus raíces son los valores propios de A . Al desarrollar el determinante en (46), se obtiene un polinomio de grado n de la forma

$$(-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0 \qquad (47)$$

Por el teorema fundamental del álgebra, esta ecuación tiene n raíces (algunas podrían ser complejas o repetirse) por lo que una matriz nxn tiene n valores propios (contando la multiplicidad). Aunque suponemos que los elementos de A, son números reales, permitimos que existan valores propios complejos y vectores propios con coordenadas complejas.

Lo mencionado anteriormente muestra el siguiente teorema el cual es una base para el método de valores propios para resolver un sistema lineal primer orden con coeficientes constantes (BORRELLI, 2002)

Teorema 10: ***Soluciones con valores propios de $x' = Ax$***

Sea λ un valor propio de la matriz de coeficientes [constantes] A del sistema lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Si v es un valor propio asociado con λ, entonces

$$x(t) = ve^{\lambda t}$$

es una solución no trivial del sistema. •

Paso a seguir para resolución del sistema $x' = Ax$.

//.7

1. Primero resolvemos la ecuación característica (46) para determinar los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matriz A.
2. En seguida tratamos de encontrar n vectores propios *linealmente independientes* $v_1, v_2, ..., v_n$, asociados con esos valores propios.
3. Esto no siempre será posible, pero cuando lo sea obtendremos las n soluciones linealmente independientes

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}, ..., x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t} \quad (48)$$

La solución general de $x' = Ax$ es una combinación lineal

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t)$$

de estas n soluciones.

Trataremos por separado los diversos casos que pueden ocurrir, según que los valores propios sean distintos o repetidos, reales o complejos.

Valores propios reales distintos

Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son reales y distintos, sustituimos cada uno de ellos sucesivamente en la ecuación (44) y encontramos los vectores propios asociados $v_1, v_2, ... v_n$. En este caso se puede demostrar que los vectores solución dados en la ecuación (48) siempre son linealmente independientes. (Edwards y Penney, 1988). En cualquier ejemplo se puede demostrar siempre dicha independencia lineal mediante el uso del determinante wronskiano.

Valores propios complejos

Aun cuando los valores propios sean complejos, mientras sean distintos, el método antes descrito producirá aún las ti soluciones linealmente independientes. La única complicación consiste en que los vectores propios asociados con valores propios complejos en general toman valores complejos, por lo que obtendremos soluciones de

*ℓ*ℓ 7

ese tipo. Para obtener soluciones de variable real, observemos que (como estamos suponiendo que la matriz A tiene solamente elementos reales) los coeficientes de la ecuación característica (46) serán reales. En consecuencia, los valores propios complejos deberán aparecer por pares de complejos conjugados. Supóngase qué $\lambda = p+qi$ y $\bar{\lambda} = p-qi$ son dicho par de valores propios. Si v es un vector propio asociado con λ, de modo que

$$(A-\lambda I)v = 0$$

tomando después los complejos conjugados en esta ecuación se obtiene

$$(A-\bar{\lambda} I)\bar{v} = 0$$

De modo que el conjugado v de v es un vector propio asociado con λ. Por supuesto, el conjugado de un vector se define componentes, por componente; si

$$v = \begin{bmatrix} a_1 & + & b_1 i \\ a_2 & + & b_2 i \\ \vdots & & \\ a_n & + & b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} i = a + bi \tag{49}$$

La solución compleja asociada con λ y v es, entonces,

$$x(t) = ve^{\lambda t} = ve^{(p+qi)t}$$

$$= (a+bi)e^{pt}(\cos qt + i\, sen\, qt)$$

es decir,

$$x(t) = e^{pt}(a \cos qt - b\, sen\, qt) + ie^{pt}(b \cos qt + a\, sen\, qt) \tag{50}$$

Puesto que las partes real e imaginaria de una solución con valores complejos son, a su vez, soluciones del sistema, obtenemos así dos soluciones con valores reales:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}(x(t)) = e^{pt}(a \cos qt - b\, sen\, qt) \\ x_2(t) &= \mathrm{Im}(x(t)) = e^{pt}(b \cos qt + a\, sen\, qt) \end{aligned} \tag{51}$$

asociadas con los valores propios complejos conjugados $p \pm qi$; es fácil comprobar que resultan las mismas dos soluciones de variable real al tomar las partes real e imaginaria de $ve^{\lambda t}$.

2.3.5. Sistemas lineales no homogéneos

Dado el sistema lineal no homogéneo de primer orden

$$x' = P(t)x + f(t) \tag{52}$$

con $p(f)$ y $f(t)$ continuos la solución general de (65) tiene la forma

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{53}$$

Siendo x_c la solución general del sistema homogéneo asociado y x_p es una solución particular de la ecuación (65) nuestra tarea ahora es determinar encontrar x_p.

Coeficientes indeterminados

Dados el sistema. $$x' = Ax + f(t) \tag{54}$$

donde A es una matriz de constantes y $f(t)$ es una combinación lineal (con coeficientes vectoriales constantes) de productos de polinomios, funciones ex-ponenciales, senos y cosenos. El método es en esencia el mismo para sistemas que para ecuaciones diferenciales individuales Además, la elección de la forma general de x_p es en general la misma la modificamos solamente en cuanto a que usaremos coeficientes vectoriales indeterminados en vez de escalares indeterminados.

En el caso de expresiones repetidas en la función complementaria y los términos no homogéneos, hay una diferencia entre el método de coeficientes indeterminados para sistema y para ecuaciones individuales. Para un sistema, la elección ordinaria para una solución tentativa debe multiplicarse no sólo por la mínima potencia entera de t que elimine la repetición, sino también por todas las potencias menores (enteras y no negativas), todos los términos resultantes deben incluirse en la solución tentativa real.

2.3.6 Matrices fundamentales

Para la generalizando del método de variación de parámetros de modo que se aplique al problema de hallar una solución particular de un sistema lineal no homogéneo, necesitamos el concepto de matriz fundamental de un sistema homogéneo. Supóngase que $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes sobre algún intervalo abierto del sistema homogéneo

$$x' = P(t)x \tag{55}$$

de n ecuaciones lineales. Entonces, a la matriz n x n

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{56}$$

que tiene por vectores columna los vectores solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se le da el nombre de ***matriz fundamental*** del sistema. Puesto que sus vectores columna sin linealmente independientes, se sigue que la matriz $\Phi(t)$ es no singular y por lo mismo tiene una matriz inversa $\Phi(t)^{-1}$.

En términos de la matriz fundamental $\Phi(t)$ la solución general

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t) \tag{57}$$

del sistema $x' = P(t)x$ puede escribirse en la forma

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c} \tag{58}$$

Donde

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Con el fin de que la solución $x(t)$ satisfaga la condición inicial

$$\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{b} \tag{59}$$

donde están dados $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bastará por lo tanto con que el vector de coeficientes $\boldsymbol{c}$ de la ecuación (59) satisfaga $\Phi(a)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$; es decir,

$$\boldsymbol{c} = \Phi(a)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{60}$$

si reemplazamos (60) en (58) llegamos demostración del siguiente teorema.

Teorema 11: Soluciones con matrices fundamentales

Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental para el sistema lineal homogéneo $x' = P(t)x$ sobre un intervalo abierto que contiene el punto $t = a$. Entonces la solución [única] del problema con condiciones iniciales

$$x' = P(t)x, \qquad x(a) = b \tag{61}$$

está dada por

$$x(t) = \Phi(t)\ \Phi(a)^{-1} b = \Phi(t)\,\Phi(a)^{-1} x(a) \tag{62}$$ ■

Una matriz fundamental para el sistema

$$x' = Ax \tag{63}$$

De orden n x n y coeficientes constante. Al menos en el caso en donde A tiene un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ asociados con los valores propios [no necesariamente distintos] $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivamente. En este caso, los vectores solución correspondientes de (63) están dados por

$$x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$$

para $i = 1,2, \ldots, n$. Por consiguiente, la matriz n x n

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{64}$$

que tiene las soluciones $x_1, x_2, \ldots x_n$ como vectores columna es una matriz fundamental para el sistema $x' = Ax$ (en toda la recta real).

2.3.7 Variación de parámetros

El método de variación de parámetros, para sistema disfruta de la misma flexibilidad y tiene una formulación sencilla en términos de matrices que es idónea tanto en teoría como en la práctica.

Deseamos determinar una solución particular x_p del sistema lineal no homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t) \tag{65}$$

dado que ya tenemos una solución general

$$x_c(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n n_n(t) \tag{66}$$

del sistema homogéneo asociado

$$x' = P(t)x \tag{67}$$

Primero usamos la matriz fundamental $\Phi(t)$ con vectores columna $x_1, x_2, \ldots, x_n$

para reescribir la función complementaria (66) en la forma

$$x_c(t) = \Phi(t)c \tag{68}$$

la idea es sustituir el vector "parámetro" $\boldsymbol{c}$ con un vector variable $\boldsymbol{u}(t)$ y de esa manera buscar una solución particular que tenga la forma

$$x_p(t) = \Phi(t)u(t) \tag{69}$$

Se debe determinar $u(t)$ de modo que x_p satisfaga en efecto la ecuación 65.

Al derivar $x_{p(t)}$ se obtiene

$$x'_p(t) = \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) \tag{70}$$

Por lo tanto, la sustitución de (69) y (70) en la ecuación (65) da

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = P(t)\Phi(t)u(t) + f(t) \tag{71}$$

como

$$\Phi'(t) = P(t)\Phi(t) \tag{72}$$

porque cada vector columna de $\Phi(t)$ satisface la ecuación (67). Por lo tanto la ecuación (71) se reduce a

$$\Phi(t)u'(t) = f(t) \tag{73}$$

Por lo tanto, basta seleccionar $u(t)$ tal que

$$u'(t) = \Phi(t)^{-1} f(t) \tag{74}$$

es decir, tal que

$$u(t) = \int \Phi(t)^{-1} f(t)dt \tag{75}$$

Mediante la sustitución de la expresión (75) en (70) obtenemos finalmente la solución particular deseada, como se afirma en el siguiente teorema.

Teorema 12: Variación de parámetros

Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental para el sistema $x' = P(t)x$ en algún intervalo en donde $P(t)$ y $f(t)$ son continuos, entonces una solución particular del sistema homogéneo

$$x' = P(t)x + f(t)$$

está dada por

$$x_p(t) = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1} f(t)dt \tag{76}$$ •

Ésta es la fórmula de variación de parámetros para sistemas lineales primer orden. Si agregamos esta solución particular a la función complementaria (69) obtenemos la solución general

$$x(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int \Phi(t)^{-t} f(t)dt \tag{77}$$

del sistema no homogéneo (78).

Vr/

Siendo innecesaria la elección de la constante de integración en la ecuación (89), porque lo único que necesitamos es una sola solución particular. Al resolver problemas con condiciones iniciales a menudo conviene escoger la constante de integración de modo que $x_p(a) = 0$, y por tanto integramos de a t

$$x_p(t) = \Phi(t)\int_a^t \Phi(s)^{-1} f(s)\,ds \tag{78}$$

Si agregamos esta solución particular a la solución homogénea (62) obtendremos la solución

$$x(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1} b + \Phi(t)\int_a^t \Phi(s)^{-1} f(s)\,ds \tag{79}$$

del problema con condiciones iniciales $x' = P(t)x + f(t)$, $x(a) = b$ ▪

2.3.8. Exponencial de una matriz y sistemas lineales

Las funciones exponenciales juegan un papel central en la solución de las ecuaciones. Definimos las exponenciales de las matrices en la forma

$$X(t) = e^{At}$$

Tal que se una solución matricial de la ecuación diferencial matricial

$$\boldsymbol{X' = AX}$$

con una matriz de coeficientes A de n x n.

La exponencial e^zde un numeró complejo z se puede definir por medio de la serie exponencial

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + .. + \frac{z^n}{n!} + ... \tag{80}$$

Similarmente, si A es una matriz n x n, entonces la **matriz exponencial** e^A es la matriz n x n definida por la serie

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... \tag{81}$$

en donde I es la matriz de identidad. El significado de la serie a la derecha, en (81) está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!} \right) \tag{82}$$

siendo $A^0 = I, A^2 = AA, A^3 = AA^2$ y así sucesivamente; en forma inductiva, $A^{n+1} = AA^n$ si $n \geq 0$. El límite en (95) existe para toda matriz A n x n. Esto es, la matriz exponencial e^A está definida (por (94)) para toda matriz cuadrada A.

La exponencial de la matriz diagonal n x n

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{83}$$

Es la matriz diagonal n x n

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix} \tag{84}$$

Que se obtiene por exponenciación de cada elemento en la diagonal de D.

La matriz exponencial e^A satisface la mayor parte de las relaciones exponenciales que son familiares en el caso de exponentes escaleras. Por ejemplo si O es la matriz cero n x n, entonces (82) da

$$e^O = I \tag{85}$$

En particular, la matriz e^Aes no singular para cada matriz A n x n. Se deduce por álgebra lineal elemental que los vectores columna de e^A siempre son linealmente independientes.

Si t es una variable escalar, entonces, la sustitución de At por A en (81) se obtiene

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots \qquad (86)$$

al diferenciar (86)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A + A^2t + A^3\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

$$= A\left(I + AT + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots\right)$$

esto es

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At} \qquad (87)$$

que es similar a $D_t\left(e^{kt}\right) = ke^{kt}$ del cálculo elemental. Así la función matricial

$$X(t) = e^{At} \qquad (88)$$

Satisface la ecuación diferencial matricial

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} \qquad (89)$$

Se deduce de los resultados de (88) y (89) que cada vector columna de e^{At}es un vector solución para el sistema lineal

$$x' = Ax \qquad (90)$$

Debido a que los n vectores columna de e^{At} automáticamente son linealmente independientes, también se deduce que la matriz n x n

$$\Phi(t) = e^{At} \qquad (91)$$

es una matriz fundamental para el sistema lineal de (90). Por consiguiente, se obtiene el siguiente teorema. (BIRKHOFF 1978)

Teorema 13: Soluciones con la matriz exponencial

Si A es una matriz n x n, entonces la solución [única] del problema con condición inicial

$$x' = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad (92)$$

está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (93)$$

Así la solución de los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales se reduce a la tarea de calcular las matrices exponenciales. Esta tarea es más fácil en el caso de una matriz A n x n que tiene un conjunto completo de $v_1, v_2, ..., v_n$ de n vectores propios linealmente independientes correspondientes (en orden) a los **n** valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (no necesariamente distintos). En este caso definimos la **matriz de vectores propios P** y la matriz **diagonal de valores propios D** de ***A*** por

$$p = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} y \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (94)$$

Entonces no es difícil demostrar por cálculo directo (Prentice Hall, 1988) que

$$\boldsymbol{A} = PDP^{-1} \qquad (95)$$

La factorización matricial en (93) facilita el cálculo de $e^{\lambda t}$.Si reemplazamos $A = PDP^{-1}$ en la serie en (99), entonces un cálculo formal

$$e^{At} = e^{(PDP^{-1})t} = e^{P(D_t)P^{-1}}$$

$$= I + P(D_t)P^{-1} + \frac{1}{2!}P(D_t)P^{-1}.P(D_t)P^{-1} + ...$$

$$= I + P(D_t)P^{-1} + \frac{1}{2!}P(Dt)^2 P^{-1} + ...$$

$$= P\left[I + (Dt) + \frac{1}{2!}(Dt)^2 + ...\right]P^{-1}$$

Así

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} \qquad (96)$$

Si definimos

$$A_t = e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \qquad (97)$$

Utilizando (84), entonces tenemos el resultado siguiente

Teorema 14: cálculo de e^{At}

Dada la matriz A n x n con n vectores propios linealmente independiente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ correspondientes (en orden) a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si la matriz de vectores propios $\boldsymbol{P}$ y la matriz diagonal A_t se definen como en las ecuaciones (94) y (97), respectivamente (de modo que $A = PDP^{-1}$), entonces

$$e^{At} = PA_tP^{-1} \qquad (98) \blacksquare$$

Finalmente, consideremos el sistema lineal no homogéneo

$$x' = Ax + f(t) \qquad (99)$$

con matriz de coeficiente A n x n. Sabemos que una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado$x' = Ax$ es $\Phi(t) = e^{At}$, asi $\Phi(t)^{-1} = e^{-At}$. En consecuencia, la fórmula de variaciones de los parámetros da la fórmula

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{c} + e^{At} \int e^{-At}\boldsymbol{f}(t)dt \qquad (100)$$

para una solución general del sistema no homogéneo en (100)

V MATERIALES Y MÉTODOS

Debido a que la investigación es básica y no experimental se han utilizado como materiales los libros y los artículos citados en la parte referencial; además material de escritorio.

Para el desarrollo de esta investigación se ha tomado como base el método científico, pues se ha obtenido parte de la información mediantes citas de artículos, para luego ser clasificados y analizados.

En la metodología se ha tomado la revisión bibliográfica de los temas relacionados a las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales y las revistas y artículos de trabajos relacionados al modelo depredador presa.

VI RESULTADOS

4.1. Estabilidad

Una ecuación diferencial de primer orden es **autónoma** si la variable independiente t no aparece explícitamente

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (1)$$

un **punto crítico** de la ecuación (1) es una raíz de $f(x) = 0$. Si $x = c$ es un punto crítico de la ecuación (1), entonces la ecuación diferencial tiene la solución constante $x(t) = c$. Una solución constante de una ecuación diferencial se denomina algunas veces una **solución de equilibrio** (podríamos pensar en una población que permanece constante por estar "en equilibrio" con su ambiente). Así, el punto crítico $x = c$, un número, corresponde a la solución de equilibrio $x(t) = c$, una función de valor constante.

El concepto de estabilidad. Un punto crítico $x = c$ de una ecuación autónoma de primer orden se dice estable con tal de que, si el valor de x_0 es suficientemente cercano a c, entonces $x(t)$ está cerca de c para toda $t > 0$. Dicho con mayor precisión, el punto crítico c es estable si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x_0 - c| < \delta \quad \text{implica que} \quad |x(t) - c| < \varepsilon \qquad (2)$$

4.2. Estabilidad y el plano fase

Una ecuación diferencial de segundo orden, autónoma, es de la forma

$$x'' = G(x, x') \qquad (3)$$

en la cual la variable independiente t no aparece en forma explícita. Si introducimos la nueva variable dependiente $y = x'$, obtendremos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y); \end{aligned} \tag{4}$$

es decir, dos ecuaciones de primer orden, ninguna de las cuales depende explícitamente de la variable independiente t. Este sistema es un caso especial del sistema autónomo general de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y); \end{aligned} \tag{5}$$

y nuevamente, la variable independiente t no aparece explícitamente en ellas. Supongamos que las funciones F y G son continuamente diferenciables en alguna región R del plano xy, al que llamaremos **plano fase** del sistema (5). Entonces, dados t_0 y un punto cualquiera (x_0, y_0) de R, existe una solución única $x = x(t)$, $y = y(t)$ de la ecuación (5) definida sobre un intervalo abierto (a, b) que contiene t_0 y que satisfaga las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{6}$$

Las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ describen una curva solución parametrizada en el plano fase. Una curva solución como ésta se llama **trayectoria** del sistema (6), y por cada punto de la región R pasa precisamente una trayectoria. Un **punto crítico** del sistema (6) es un punto (x_*, y_*) tal que se cumple que

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0 \tag{7}$$

Si (x_*, y_*) es un punto crítico del sistema entonces las funciones constantes

$$x(t) = x_*, \quad y(t) = y_* \tag{8}$$

satisface las ecuaciones de (5). Una solución tal de valor constante se llama una **solución de equilibrio del sistema**. Note que la trayectoria de la solución de equilibrio en (8) consiste únicamente del punto (x_*, y_*).

En algunas situaciones prácticas estas soluciones y trayectorias simples son las que tienen mayor interés. Por ejemplo, si el sistema $x' = F(x,y)$, $y' = G(x,y)$ sirve de modelo para dos poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ de animales que cohabitan en el mismo ambiente, y que posiblemente compiten por el mismo alimentó o que se devoran unos a otros; el caso que $x(t)$ indica el número de zorros y $y(t)$ el número de conejos que existen en el tiempo t. Entonces, un punto crítico (x,y) del sistema especifica una población constante $x.$ de zorros y una población constante de conejos $y.$ que pueden coexistir unos con otros en el ambiente. Si (x_0, y_0) no es un punto crítico del sistema, no es posible que coexistan poblaciones constantes de x_0 zorros y y_0 conejos; uno de ellos, o ambos deben cambiar con el tiempo.

4.2.1 Retrato de fase

Si el punto inicial (x_0, y_0) no es un punto crítico, la trayectoria correspondiente es una curva en el plano xy a lo largo de la cual el punto se mueve a medida que t aumenta. Resulta que cualquier trayectoria que no conste de un solo punto es una curva no degenerada que no se interseca a sí misma. Podemos demostrar cualitativamente el comportamiento de las soluciones del sistema (5) mediante la construcción de su **retrato fase** (una imagen en el plano fase de sus puntos críticos y trayectorias típicas no degeneradas). El comportamiento de las trayectorias próximas a los puntos críticos aislados resulta de gran interés. Los más comunes modelan mediante el sistema lineal autónomo

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -ky \ (k \ cons\tan te) \qquad (9)$$

cuyo único punto crítico es el origen (0, 0). La solución con el punto inicial (x_0, y_0) es

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \qquad y(t) = y_0 e^{-kt} \qquad (10)$$

Si $x_0 \neq 0$, podemos escribir

$$y = y_0 e^{-kt} = \frac{y_0}{x_0^k}\left(x_0 e^{-r}\right)^k = bx^k \qquad (11)$$

siendo $b = y_0 / x_0^k$

Si $k = 1$, entonces toda curva de la ecuación (11) es una línea recta que pasa por el origen. Cada trayectoria es un rayo a lo largo del cual el punto $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$ se aproxima al origen cuando $t \to +\infty$. Un punto crítico de este tipo, se llama nodo propio.

En general, un punto crítico (x_0, y_0) del sistema autónomo (11) se llama **nodo** si toda trayectoria se acerca a (x_0, y_0) cuando $t \to +\infty$ o bien toda trayectoria se aleja de ese punto cuando $t \to +\infty$, y además, toda trayectoria es tangente en que (x_0, y_0) a alguna línea recta que pase por el punto crítico, sería un nodo si todas las flechas fueran invertidas para hacer que las trayectorias se alejasen del punto crítico en vez de dirigirse hacia él. Se dice que este nodo es **propio** porque ningún par de trayectorias "opuestas" son tangentes a la mima línea recta.

Si $k = 2$ y ni x_0 ni y_0 son nulos en la ecuación (11), entonces cada curva es un parábola $y = bx^2$ tangente al eje de las x en el origen. La curva solución de la ecuación (10) es la mitad del eje de las x. A lo largo de cada trayectoria el punto $(x(t), y(t))$ se aproxima al origen cuando $t \to +\infty$. Por lo tanto, todas las trayectorias con excepción de un simple par se aproximan hacia el origen en dirección tangente a la misma recta (el eje x). Este tipo de punto crítico se llama **nodo impropio**.

Si $k = -1$, entonces $x(t) = x_0 e^{-t}$ $y(t) = y_0 e^{t}$, de modo que $xy = x_0 y_0 = b$. Si nix_0 ni y_0 son cero, entonces la trayectoria es una rama de la hipérbola equilátera $xy = b$, y $y \to \pm\infty$ cuando $t \to +\infty$. Si $x_0 = 0$ 0 $y_0 = 0$, entonces la trayectoria es un semieje de la hipérbola. El punto $(x(t), y(t))$, se aproxima el origen a lo largo del eje x, pero se aleja de él a lo largo del eje de las y conforme$t \to +\infty$. Así hay dos trayectorias que se aproximan al punto crítico (0, 0) y todas las demás no permanecen acotadas cuando$t \to +\infty$. Este tipo de punto crítico, se llama **punto silla**.

4.2.2 Inestabilidad

Un punto crítico (x_*, y_*) del sistema autónomo (5) se dice que es estable en el caso de que si el punto inicial (x_0, y_0) está suficientemente cercano a (x_*, y_*), entonces $(x(t), y(t))$ permanece cerca de (x_*, y_*) para toda $t > 0$. En notación vectorial, con $\boldsymbol{x(t)} = (x(t), y(t))$, la distancia entre el punto inicial $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0)$ y el punto crítico $\boldsymbol{x_*} = (x_*, y_*)$ es

$$|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_*}| = \sqrt{(x_0 - x_*)^2 - (y_0 - y_*)^2}$$

Así, el punto crítico $\boldsymbol{x_*}$ es estable si, para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_*}| < \delta \quad \text{significa que } |\boldsymbol{x(t)} - \boldsymbol{x_*}| < \epsilon \qquad (12)$$

para toda $t > 0$. El punto crítico(x_*, y_*) se llama **inestable** si no es estable. En el caso de recta que pasan por el origen y parábolas que vértice el origen el (0,0) es un punto crítico estable. El punto silla de las hipérbolas equiláteras es un punto crítico inestable.

Si se cambian los signos en los segundos miembros de la ecuación (9), para obtener el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x,$$
$$\frac{dy}{dt} = ky, \tag{13}$$

la solución es $x(t) = x_0 e^t, y(t) = y_0 e^{kt}$. Entonces, con $k = 1$ y $k = 2$, las trayectorias son rectas que pasan por el origen pero con flechas que parten del origen hacia afuera resulta ser un nodo propio inestable; en el caso de parábolas con vértice en el origen las flechas también parten del origen, y el origen será un nodo impropio inestable.

Si (x_*, y_*) es un punto crítico, la solución de equilibrio $x(t) = x_*,\ y(t) = y_*$. es denominada estable o inestable de acuerdo de la naturaleza del punto crítico. En sus aplicaciones, la estabilidad de una solución de equilibrio es con frecuencia un asunto crucial. Así, la consecuencia práctica de la estabilidad es que cambios ligeros (posiblemente debidos a nacimientos y mueres al azar) en las poblaciones en equilibrio no sean un gran contratiempo para el equilibrio y que den como resultado una gran desviación de la solución de equilibrio.

También es posible que las trayectorias permanezcan cercanas a un punto crítico estable sin aproximarse a él.

4.2.3. Estabilidad asintótica

El punto crítico (x_*, y_*) se llama **asintóticamente estable** si, además de ser estable, cada trayectoria que comienza suficientemente cercana a (x_*, y_*) también se aproxima a él cuando $t \to +\infty$. Es decir, existe $\delta > 0$ 0 tal que

$$|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_*}| < \delta \quad \text{significa que} \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_*} \tag{14}$$

En donde $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0), \boldsymbol{x_*} = (x_* y_*)$ y $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = (x(t), y(t))$, es una solución con $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}$

Los nodos estables que se muestran en las figuras son asintóticamente estables, debido a que toda trayectoria se aproxima al punto crítico (0,0) cuando. Así, la estabilidad asintótica es una condición más fuerte que la sola estabilidad.

Ahora suponga que $x(t)$ y $y(t)$ indican la coexistencia de poblaciones para las cuales (x_*, y_*) es un punto crítico asintóticamente estable. Entonces, si las poblaciones iniciales x_0 y y_0 están suficientemente cercanas a x_* y y_*, respectivamente, se deduce que

$$\lim_{t\to x} x(t) = x_* \quad y \quad \lim_{t\to x} y(t) = y_* \qquad (15)$$

Esto es, $x(t)$ y $y(t)$ realmente se aproximan a las poblaciones en equilibrio x_* y y_* cuando $t \to +\infty$, más que solamente permanecer cerca de estos valores.

Bajo hipótesis generales se puede demostrar que hay cuatro posibilidades para una trayectoria no degenerada del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

Las cuatro posibilidades son estas:

1. $(x(t), y(t))$ se aproxima a un punto crítico cuando $t \to +\infty$
2. $(x(t), y(t))$ no está acotada cuando t crece
3. $(x(t), y(t))$ es una solución periódica con una trayectoria cerrada.
4. $(x(t), y(t))$ gira en espiral hacia una trayectoria cerrada a medida que $t \to \infty$

Como una consecuencia, la naturaleza cualitativa de la imagen del plano, fase de las trayectorias de un sistema autónomo es en gran parte determinada por las ubicaciones de sus puntos críticos y por el comportamiento de sus trayectorias en las proximidades de ellos.

4.3 Sistema líneas y casi lineales

las soluciones del sistema autónomo (3) cerca de un punto crítico aislado (x_0, y_0) en el cual $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$. Un punto crítico se llama **aislado** si alguna vecindad de él no contiene otro punto crítico. Supondremos en todo el trabajo que las funciones F y G son continuamente diferenciables en alguna vecindad del punto (x_0, y_0).

Si $x_0 = y_0 = 0$, y sustituimos $u = x - x_0, v = y - y_0$

$\Rightarrow$ $dx/dt = du/dt$ y $dy/dt = dv/dt$, de modo que la ecuación (3) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F(u + x_0, \upsilon + y_0) = F_1(u, \upsilon),\\ \frac{d\upsilon}{dt} &= G(u + x_0, \upsilon + y_0) = G_1(u, \upsilon)\end{aligned} \tag{16}$$

que tiene a (0,0) como punto crítico aislado.

Se sigue entonces de la fórmula de Taylor para funciones de dos variables que la ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + f(x, y),\\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(x, y),\end{aligned} \tag{17}$$

Donde $a = F_x(0,0)$, $b = F_y(0,0)$, $c = G_x(0,0)$ y $d = G_y(0,0)$, y las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ tienen la propiedad de que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{18}$$

Es decir, cuando (x, y) está cerca de (0,0), las cantidades $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son pequeñas en comparación con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, que en sí misma es pequeña. De esta manera, cuando (x, y) está cerca de (0,0), el sistema no lineal (17) está en cierto sentido "cerca" del sistema **linealizado**

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \qquad (19)$$

Bajo la consideración de que (0,0) es también un punto crítico aislado de este sistema lineal el sistema autónomo (17) se llama casi lineal si f y g satisfacen las condiciones (18). En la mayoría de los casos (pero no en todos) las trayectorias vecinas al punto(0,0) de un sistema casi lineal (19) nos recuerdan mucho (en el aspecto cualitativo) las trayectorias de la "linealización" (19). En consecuencia, el primer paso hacia los sistemas autónomos generales consiste en caracterizar los puntos críticos de los sistemas lineales.

4.3.1 Sistemas lineales

El sistema lineal (19) es fácilmente resuelto mediante el método de eliminación. Por este último método, sustituimos $x = Ae^{\lambda t}$ y $y = Be^{\lambda t}$ en (19). Dividiendo las ecuaciones resultantes entre $e^{\lambda t}$, obtenemos las dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}(a-\lambda)A + \quad bB &= 0,\\ cA + (d-\lambda)B &= 0\end{aligned} \qquad (20)$$

que debe satisfacer los coeficientes A y B. Con el objeto de que estas ecuaciones tengan una solución no trivial, debe anularse el determinante de coeficientes

$$\begin{aligned}\Delta &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc\\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0\end{aligned} \qquad (21)$$

El tipo de solución del sistema (19) está determinado por la naturaleza de las raíces de la ecuación característica (cuadrática) de la expresión (21). Esta ecuación es la ecuación característica de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

del sistema lineal de (19).

Si (0,0) es un punto crítico aislad: la ecuación (19). Se sigue que $ad - bc \neq 0$ y $\lambda = 0$ no puede ser una raíz de la ecuación (21). La razón es que el término constante $ad - bc$ de esta última ecuación es el determinante del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned} \qquad (22)$$

Si $ad - bc \neq 0$, entonces las ecuaciones (22) corresponder una misma línea que pasa por (0,0), de modo que el sistema tiene una línea completa de puntos críticos en vez de tener un punto crítico aislado en (0,0).

Luego la ecuación característica dada en la expresión (21) pueda tener:

1. raíces reales distintas del mismo signo;
2. raíces reales distintas de signo contrario;
3. raíces reales iguales no nulas;
4. raíces complejas conjugadas; o
5. raíces imaginarias puras.

Raíces Reales Distintas del Mismo Signo. En este caso, la solución general de la ecuación (19) tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \qquad (23)$$

donde sólo dos de los cuatro coeficientes son arbitrarios. Si ambas raíces son negativas $(\lambda_2 < \lambda_1 < 0)$, de la ecuación (11) resulta que x y y tienden a cero cuando $t \to +\infty$ por lo cual el punto crítico (0,0) resulta asintóticamente estable.

Pero si ambas raíces son positivas $(0 < \lambda_2 < \lambda_1)$, entonces x y y crecen sin cota cuando $t \to +\infty$, de modo que el punto crítico(0,0) es inestable.

En general, existe un cambio lineal de coordenadas $(u = a_1x + a_2y,\ \upsilon = b_1x + b_2y)$ que transforma (23) en

$$u = Ae^{\lambda_1 t}, \qquad \upsilon = Be^{\lambda_2 t} \qquad (24)$$

En el sistema (oblicuo) de coordenadas uv las trayectorias del sistema (24) son las líneas rectas $u = 0\ y\ v = 0$ y las curvas de la forma $\upsilon = Cu^k$, donde $k = \lambda_2 / \lambda_1 > 0$. Las trayectorias en el sistema de coordenadas xy son las imágenes de estas curvas bajo la transformación inversa de las coordenadas uv a xy. Así que (0,0) es un nodo impropio, siendo $k = 2$, de modo que las trayectorias son parábolas en el sistema oblicuo uv. El rasgo distinguible de un nodo impropio es que un par de trayectorias reposa sobre la línea $u = 0$ en tanto que las otras son tangentes a la línea $v = 0$ en el punto (0,0) . Si $\lambda_1\, y\, \lambda_2$ son negativos, todas las trayectorias tienden a (0,0) cuando $t \to +\infty$ mientras que si $\lambda_1\, y\, \lambda_2$ son positivas, entonces las trayectorias son invertidas.

Raíces Reales Distintas de Signo Opuesto. En este caso la situación es la misma que en el anterior, salvo que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ en la ecuación (24). En el sistema uv de coordenadas oblicuas las trayectorias determinadas por la ecuación (24) son las líneas rectas $u = 0\ y\ v = 0$ y las curvas de la forma $u\upsilon^k = C$, siendo $C = -\lambda_1 / \lambda_2 > 0$.

Si $K = 1$, las trayectorias no lineales son hipérbolas en el sistema uv. Cuando $t \to +\infty$ las trayectorias $u = Ae^{\lambda_1 t}$, $\upsilon = 0$ van hacia el infinito puesto que $\lambda_1 > 0$, mientras que las trayectorias $u = 0$, $\upsilon = Be^{\lambda_2 t}$ se aproximan al origen, ya que $\lambda_2 < 0$. El punto crítico(0,0) es por lo tanto, un punto silla inestable en este caso.

Raíces Reales Iguales. En este caso, con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución general del sistema (19) es de la forma

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}, \qquad y(t) = (B_1 + B_2 t)e^{\lambda t} \qquad (25)$$

donde solamente dos de los cuatro coeficientes son arbitrarios. Si $\lambda < 0$, resulta claro de la ecuación (25) que x →.0 y que y → 0 cuando $t \to +\infty$, así que el punto crítico (0, 0) es asintóticamente estable. Pero si $\lambda > 0$, entonces x y, y aumentan sin cota alguna cuando $t \to +\infty$, de modo que (0,0) es un punto crítico inestable.

La naturaleza de las trayectorias depende del hecho de que el término $te^{\lambda t}$ esté efectivamente presente en la ecuación (25). El sistema $x' = -x, y' = -y$ con $A_2 = B_2 = 0$ la ecuación (25) se reduce a

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Be^{\lambda t} \tag{26}$$

Entonces, $y = (B/A)x,\ A \neq 0$, de modo que las trayectorias se apoyan en líneas rectas que pasan por el punto crítico (0, 0) que, por lo tanto, es un **nodo propio**.

La situación en la que está presente el término $te^{\lambda t}$ se ilustra mediante el sistema $x' = -x, y' = x - y$, el cual tiene como solución general

$$x = Ae^{-t}, \qquad y = Be^{-t} + Ate^{-t} \tag{27}$$

Después de despejar en la primera ecuación $t = -(1/A)lnx$= - (1/A) y sustituir esto en la segunda, encontramos que

$$y = \frac{B}{A}x - x\ \ln\frac{x}{a} \tag{28}$$

y
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-Be^{-t} + Ae^{-t} - Ate^{-t}}{-Ae^{-t}}$$

$$= \frac{1}{A}(B - A + At) \tag{29}$$

si $A \neq 0$. De la ecuación (29) resulta claro que $dy/dx \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$ de modo que todas las trayectorias son tangentes al eje y en el punto (0,0). En este caso el punto crítico (0,0) es un **nodo impropio**. En el caso más general de nodo impropio todas las trayectorias son tangentes a una línea fija arbitraria que pasa por el punto crítico.

Raíces Complejas Conjugadas. En este caso, con $\lambda_1 = p+qi$ y $\lambda_2 = p-qi$ siendo p y q números no nulos, la solución general tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{pt}\left(A_1\cos qt + A_2 sen\, qt\right) \\ y(t) &= e^{pt}\left(B_1\cos qt + B_2\, sen\, qt\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Así que $x(t)$ y $y(t)$ oscilan entre valores positivos y negativos cuando t aumenta, y el punto crítico $(0,0)$ es un punto espiral. Si la parte real p de λ_1 y λ_2 es negativa, la ecuación (30) nos permite afirmar que (x, y) tiende a (0,0) cuando $t \to +\infty$, de modo que $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable,

Raíces Imaginarias Puras. SÍ $\lambda_1 = qi$ y $\lambda_2 = -qi$ siendo $q \neq 0$, entonces la solución general toma la forma

$$x(t) = A_1 \cos\, qt + A_2\, sen\, qt \qquad y(t) = B_1 \cos\, qt + B_2\, sen\, qt \tag{31}$$

las trayectorias son elipses (rotadas) Así que el punto crítico (0, 0) es un centro estable, pero no asintóticamente estable.

Para el sistema lineal (19) con $ad - bc \neq 0$, se tiene el siguiente resultado de puntos críticos en (0,0) que corresponden a los cinco caso analizados anteriormente, de acuerdo con la naturaleza de las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (9). Nuestro estudio de estos casos puso en evidencia que la estabilidad del punto crítico (0, 0) es determinada por las partes reales de las raíces características λ_1 y λ_2, como se sintetiza en el teorema 1. Si λ_1 y λ_2 son reales, entonces, por supuesto, ellas mismas son sus propias partes reales.

Teorema 1. Estabilidad de sistemas lineales

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{9}$$

del sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \qquad (7)$$

con $ad - bc \neq 0$. Entonces, el punto crítico (0,0) es:

a) asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas negativas

b) estables, pero asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas nulas (de modo que $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$)

c) inestable si tanto λ_1 y λ_2 tienen una parte real positiva •

Pequeñas perturbaciones en los coeficientes a, b, c y d del sistema lineal (7), que producen pequeñas perturbaciones de las raíces características λ_1 y λ_2. Si esas perturbaciones son suficientemente pequeñas, las partes reales positivas (de λ_1 y de λ_2) permanecen positivas, y las partes reales negativas permanecen negativas. En consecuencia, un punto crítico asintóticamente estable conserva esa naturaleza y un punto crítico inestable permanece inestable. La parte (b) del teorema 1 es, pues, la única en la cual las perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden afectar la estabilidad del punto crítico (0, 0). En este caso, las raíces imaginarias puras $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$ pueden cambiarse en raíces complejas próximas $\mu_1, \mu_2 = r \pm si$, siendo r ya sea positivo o negativo. En consecuencia, una pequeña perturbación de los coeficientes del sistema lineal (7) puede cambiar un centro estable en un punto en espiral que sea inestable o asintóticamente estable.

Hay otro caso excepcional en el cual el tipo, aunque no la estabilidad del punto crítico (0,0) de un sistema lineal puede ser alterado mediante una pequeña perturbación dé sus coeficientes. Es el caso en que las raíces son reales e iguales $\lambda_1 = \lambda_2$, pero que con una pequeña perturbación de los coeficientes se pueden separar en dos raíces $\mu_1 y \mu_2$, que son, ya sea complejos conjugados o raíces reales desiguales. En cualquiera de los dos casos, el signo de las partes reales de las raíces se conserva; así que la estabilidad del punto crítico permanece inalterada. Sin embargo, su naturaleza puede cambiar; si un nodo con $\lambda_1 = \lambda_2$, puede, ya sea permanecer como un nodo (si y $\mu_1 y \mu_2$ son reales) o cambiar a un punto espiral (si $\mu_1 y \mu_2$ son complejos conjugados).

4.3.2 Sistemas casi lineales

El sistema casi lineales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(x.y) \end{aligned} \tag{32}$$

que tiene a (0,0) como punto crítico aislado, con $ad - bc \neq 0$. El teorema 2, en esencia implica que (en atención al tipo y estabilidad del punto crítico (0,0)) el efecto de los pequeños términos no lineales $f(x,y)$ y $g(x,y)$ es equivalente al efecto de una pequeña perturbación en los coeficientes del sistema lineal asociado (32).

Teorema 2 Estabilidad de sistemas casi lineales

Sean $\lambda_1 \; y \; \lambda_2$ las raíces características del sistema lineal (7) asociado con el sistema casi lineal (32). Entonces:

a) Si $\lambda_1 = \lambda_2$ son raíces reales iguales, entonces el punto crítico (0, 0) del sistema (17) es un nodo o un punto espiral, y es asintóticamente estables si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, o inestable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

b) Si $\lambda_1 \; y \; \lambda_2$ son imaginarios puros, entonces (0, 0) es o bien un centro o un punto espiral, que puede ser estable, asintóticamente estable, o inestable.

c) En cualquier otro caso (es decir, a menos que λ_1 y λ_2 sean reales e iguales o imaginarios puros), el punto crítico (0,0) del sistema casi lineal (32) será del mismo tipo y estabilidad que el punto crítico (0,0) del sistema lineal asociado dado en la expresión (7) •

De esta manera, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$, entonces el tipo y la estabilidad del punto crítico del sistema casi lineal (32) puede determinarse mediante el análisis de su sistema lineal asociado (7), y solamente en el caso de raíces características imaginarias puras la estabilidad de (0, 0) no queda determinada por el sistema lineal. Excepto en el caso sensible $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\text{Re}(\lambda_1) = 0$, las trayectorias próximas al punto (0,0) recuerdan cualitativamente a las del sistema lineal asociado (entran o salen del punto crítico de la misma manera, pero pueden ser "deformadas" de algún modo no lineal). Una importante consecuencia de la clasificación de los casos del teorema 2 es que un punto crítico de un sistema casi lineal es asintóticamente estable si lo es en la liberalización del sistema. Además, un punto crítico del sistema casi lineal es inestable si es un punto crítico inestable del sistema linealizado.

4.4 Aplicaciones ecológicas: depredadores y competidores

Algunas de las aplicaciones más importantes e interesantes de la teoría de la estabilidad se refieren a las interacciones entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Consideremos primero una situación de depredador-presa en que intervienen dos especies. Una especie, los depredadores, se alimentan de la otra especie, la presa, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente.

Denotemos el número de presas como $x(t)$, el número de depredadores como $y(t)$ en el tiempo t y hagamos las siguientes conjeturas simplificadoras:

1. En ausencia de depredadores, la población de las presas crecería a una tasa natural con $dx/dt = ax, a > 0$.
2. En ausencia de presas, la población depredadora declinaría a una tasa natural, con $dy/dt = -cx, c > 0$.
3. Cuando tanto los depredadores como las presas están presentes, ocurre una combinación de esas tasas naturales de crecimiento y declinación, en la que la población de las presas disminuye y la de los depredadores aumenta, cada una en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Supongamos además que la frecuencia de los encuentros es proporcional al producto xy, razonando que al duplicarse cualquiera de las dos poblaciones se duplica la frecuencia de los encuentros. En consecuencia, el efecto de que los depredadores devoren a las presas es una tasa de interacción decreciente $-bxy$ en la población x de las presas y una tasa de interacción creciente en la población y de los depredadores dxy , siendo b y d constantes positivas.

Cuando sumamos las tasas natural y de interacción descritas antes, obtenemos las ecuaciones de **presa-depredador**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy = y(-c + dx) \end{aligned} \tag{33}$$

cuyas constantes a, b, c y d son todas positivas. Éste es un sistema casi lineal con dos puntos críticos, (0,0) y $(c/d\,, a/b)$. El punto (0,0) es un punto silla, pero la solución de equilibrio correspondiente $x(t) = 0, y(t) = 0$ simplemente describe la extinción simultánea de ambas especies.

El punto crítico$(c/d, a/b)$ es de mayor interés; $x(t) = c/d$ y $y(t) = a/b$ son las poblaciones constantes no nulas de presa y depredador, respectivamente, que pueden coexistir en equilibrio. Nos gustaría saber si las poblaciones iniciales x_0 y y_o están próximas a estas poblaciones críticas, de modo que $(x(t), y(t))$ permanece cerca de$(c/d, a/b)$ para toda $t > 0$. Es decir, ¿es estable el punto crítico $(c/d, a/b)$? Para intentar dar una respuesta a esta pregunta, sustituyamos $u = x - c/d, v = y - a/b$ en la ecuación (18). En consecuencia, obtendremos el sistema casi lineal

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{bc}{d}\upsilon - bu\upsilon \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \frac{ad}{b}u + du\upsilon \end{aligned} \tag{34}$$

que tiene el punto crítico (0, 0) correspondiendo al punto crítico$(c/d, a/b)$ del sistema (33). El sistema lineal correspondiente

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{bc}{d}v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{ad}{b}u \end{aligned} \tag{35}$$

tiene como ecuación característica $\lambda^2 + ac = 0$ con raíces imaginarias puras $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{ac}\,\lambda_1$, Por lo tanto, (0,0) es un centro estable de la ecuación (20) y las trayectorias son elipses con centro en $(0,0)$. En efecto, si dividimos la segunda ecuación del sistema (20) entre la primera, obtenemos

$$\frac{d\upsilon}{du} = -\frac{ad/b}{bc/d}\cdot\frac{u}{\upsilon} = -\frac{ad^2u}{cb^2\upsilon}$$

$$ad^2udu + cb^2\upsilon d\upsilon = 0,$$

$$ad^2u^2 + cb^2\upsilon^2 = C \tag{36}$$

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{B^2} = 1$$

siendo C una constante de integración, $A^2 = C/ad^2$, y $B^2 = C/cb^2$. En términos de x y y, las trayectorias del sistema linealizado son, por lo tanto, elipses de la forma

$$\frac{1}{A^2}\left(x-\frac{c}{d}\right)^2+\frac{1}{B^2}\left(y-\frac{a}{b}\right)^2=1 \qquad (37)$$

con centro en el punto crítico $(c/d\,, a/b)$.

Por desgracia este análisis no asegura la respuesta a la pregunta de la estabilidad del punto crítico $(c/d\,, a/b)$ del sistema no lineal original (33), porque un centro estable representa el caso indeterminado del teorema 2, en el cual el punto crítico puede ser (aparte de centro) un punto espiral (inestable o asintóticamente estable). Sin embargo, podemos encontrar en este caso las trayectorias explícitamente mediante una división de la segunda ecuación del sistema (33) entre la primera, para obtener

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}$$

Separamos las variables para obtener

$$\frac{c-dx}{x}dx+\frac{a-by}{y}dy=0$$

y así $$c\ln x-dx+a\ln y-by=C \qquad (38)$$

donde C es una constante de integración (ydx no es una diferencial, sino el producto de la constante positiva d por x). En cualquier caso, las trayectorias del sistema (33) en la vecindad del punto crítico $(c/d\,, a/b)$ son las curvas de nivel de la función $f(x, y)$ que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (38). Estas trayectorias son curvas cerradas simples que encierran a $(c/d\,, a/b)$, que por lo tanto es un centro estable.

Comenzando en un punto en el que la población de la presa es máxima y $y = a/b$, vemos que x disminuye y y aumenta hasta que $x = c/d$ y la población depredadora y es máxima. Después, ambas disminuyen hasta que x es mínima y $y = a/b$ otra vez. Y así sigue la trayectoria hasta regresar al punto inicial. En particular, si tanto $x_0 > 0$

como $y_0 > 0$, entonces tanto $x(t) > 0$ como $y(t) > 0$ para toda t, por lo que ambas poblaciones sobreviven en mutua coexistencia. Excepción: Si las fluctuaciones son tan amplias que $x(t)$ llegue a estar cerca de cero, existe la posibilidad de que las últimas pocas presas sean devoradas, resultando su inmediata extinción y la eventual extinción consecuente de los depredadores.

4.4.1 Especies en competencia

Consideremos ahora dos especies (de animales, plantas o bacterias por ejemplo) cuyas poblaciones son $x(t)$ y $y(t)$ en el instante t y que compiten una con la otra por los alimentos disponibles en el ambiente común. Esto contrasta con el caso en el que una especie depreda a la otra. Para construir un modelo matemático tan realista como sea posible, vamos a suponer que en ausencia de la otra especie una de ellas tendría una población limitada (logística). Cuando no se da interacción o competencia entre las dos especies, la población satisfaría entonces las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2 \end{aligned} \tag{39}$$

cada una de las cuales es de la forma de la ecuación (35). Pero además, supongamos que la competencia tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional a su producto xy. Insertamos tales términos con una constante de proporcionalidad negativa en la ecuación (39) para obtener las ecuaciones de competencia

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy = (a_1 - b_1 x - c_1 y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy = y(a_2 - b_2 y - c_2 x), \end{aligned} \tag{40}$$

donde todos los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son positivos.

El sistema casi lineal (40) tiene cuatro puntos críticos. Al igualar a cero da los segundos miembros de ambas ecuaciones, si $x = 0$, entonces $y = 0$ o $y = a_2/b_2$, mientras que si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $x = a_1/b_1$. Estos son los tres puntos críticos (0,0), $(0, a_2/b_2), (a_1/b_1, 0)$. El cuarto es la intersección de las dos rectas

$$\begin{aligned} b_1x + c_1y &= a_1, \\ c_2x + b_2y &= a_2 \end{aligned} \tag{41}$$

Supongamos que esas dos rectas no son paralelas y que se interseca en un punto del primer cuadrante. Entonces, este punto (x_E, y_E) será el cuarto punto crítico y representará la posibilidad de coexistencia pacífica de las dos especies, con poblaciones estables $x(t) = x_E, y(t) = x_E$.

La estabilidad del punto crítico (x_E, y_E). Ésta vuelve a depender de la orientación relativa de las dos rectas de la expresión (41). Comparando las pendientes de las dos rectas, corresponde a la condición

$$\frac{a_2/b_2}{a_2/c_2} < \frac{a_1/c_1}{a_1/b_1} \quad \text{esto es}, \ c_1c_2 < b_1b_2 \tag{42}$$

De manera similar se puede obtener

$$\frac{a_2/b_2}{a_2/c_2} > \frac{a_1/c_1}{a_1/b_1} \quad \text{esto es}, \ c_1c_2 > b_1b_2 \tag{43}$$

Las condiciones (42) y (43) tienen una interpretación natural. En las ecuaciones (38) vemos que b_1 y b_2 representan el efecto inhibitorio de cada población en su propio crecimiento (posiblemente debido a las limitaciones de alimento o de espacio). Por otra parte, c_1 y c_2 representan el efecto de la competencia entre las dos poblaciones. Así que b_1 y b_2 es una medida de la inhibición, mientras que c_1 y c_2 es una medida de la competencia.

VII DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Las ecuaciones de presa-depredador para dos especies

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx)$$

1.- Si $c_1 c_2 < b_1 b_2$, la competencia es pequeña comparada con la inhibición, y entonces (x_E, y_E). es un punto crítico asintóticamente estable al cual se aproxima cada solución cuando $t \to +\infty$. Entonces, ambas especies pueden coexistir en este caso, y lo hacen.

2.- Si $c_1 c_2 < b_1 b_2$ de modo que la competencia es grande comparada con la inhibición, entonces (x_E, y_E) es un punto crítico inestable y ya sea $x(t)$ o $y(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. Así que las dos especies no pueden coexistir en este caso; una sobrevive y la otra llega a extinguirse localmente

VIII REFERENCIALES

1. BIRKHOFF y G. C. ROTA. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 3ra. edición. 1978.
2. BOYCE, WILLIAM E y RICHARD C. DIPRIMA. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.. New York: Wiley, 4ta. edición 1986.
3. BORRELLI COLEMAN. Ecuaciones Diferenciales, México: Oxford University Press, 1ra edición 2002
4. BRAUN, MARTIN. Differential Equations and Their Applications (version corta). New York: Springer – Verlag, 3ra. edición 1978.
5. CANALS NAVARRETE, IGNASIO. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, México: Editorial Reverte 1ra edición 2013.
6. CAMPBELL, STEPHEA. An Introduction to Differential Equations and Their Applications, Belmont CA: Wadsworth, 2da. edición. 1990.
7. CARMONA JOVER ISABEL. Ecuaciones Diferenciales, México, Pearson Educación, 5ta edición 2011.
8. KREYSZIG ERWIN. Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, México, Editorial Limusa, 3ra edición 2003.
9. GLYN JAME. Matemática Avanzada para Ingeniería, México: Pearson Educación, 2da edición, 2002.
10. HASSER LASALLE SULLIVAN. Análisis Matemático, México, Editorial Trillas, 4ta edición 1973.
11. JAMES STEWART. Calculo Multivariable, México Thomson learning, 4ta edición, 2000.
12. TOM M. APOSTOL. Calculus, México Editorial Reverte, s.a. 2da edición 1999

IX APÉNDICES

Soluciones generales de sistemas homogéneos

Teorema Sean $x_1, x_2, .. x_n$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea $x' = \boldsymbol{P}(t)x$ en algún intervalo abierto I donde los elementos $P_{ij}(t)$ de $\boldsymbol{P}(t)$ son continuos. Si $\boldsymbol{x}(t)$ es una solución cualesquiera de la ecuación $x' = \boldsymbol{P}(t)x$ sobre I, entonces existen números $c_1, c_2, .., c_n$, tales que

$$x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \; ; \qquad \forall\, t\epsilon I \qquad (1)$$

Demostración: Sea a un punto fijo de I. Demostraremos primero que existen números $c_1, c_2, .., c_n$ tales que la solución

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \qquad (2)$$

tiene los mismos valores iniciales para$t = a$ que la solución dada $x(t)$; es decir, tal que

$$c_1x_1(a) + c_2x_2(a) + \cdots + c_nx_n(a) = x(a) \qquad (3)$$

Sea $\boldsymbol{X}(t)$ la matriz $n \; x \; n$ con vectores columnas $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$, y sea $\boldsymbol{c}$ el vector columna cuyas componentes son $c_1, c_2, .., c_n$. Entonces, la ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$\boldsymbol{X}(a)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(a) \qquad (4)$$

El determinante wronskiano $W(a) = |\boldsymbol{X}(a)|$ no es nulo ya que las soluciones $x_1, x_2, .. x_n$ son linealmente independientes. Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{X}(a)$ tiene una matriz inversa $X(a)^{-1}$. En consecuencia, el vector $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}(a)^{-1}x(a)$ satisface la ecuación (4), como se requería.

Por último se observa la solución dada $x(t)$ y la solución $y(t)$ de la ecuación (2) (con los valores de c_i determinados por la ecuación $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}(a)^{-1}x(a)$ tiene los mismos valores iniciales (en $t = a$). Por lo tanto, del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales se sigue que $x(t) = y(t)$) para toda t de I. Esto establece la ecuación (1).

Observación: Cualquier sistema $n \times n$, $x' = \boldsymbol{P}(t)x$ con matriz de coeficientes continuos tiene un conjunto de n soluciones linealmente son$c_1, c_2, .., c_n$ c_1, como en la hipótesis del teorema. Basta como $x_j(t)$ la solución única tal que

$$x_j(a)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \quad \text{Posición j}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

esto es, el vector de la columna con todas las entradas nulas, excepto para un 1 en el renglón j. (En otras palabras,$x_j(a)$ es la columna j-ésima de la matriz identidad.) Entonces,

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{t=a} = |I| = 1 \neq 0$$

de modo que las soluciones$x_1, x_2, .. x_n$ son linealmente independientes

X ANEXOS

El presente trabajo no presenta anexo debido a que la investigación es básica y no experimental.