118

IF

OCT 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

Existencia Global de Soluciones Clásicas Periódicas para Sistema Parabólico no Lineal

Dionicio Orlando Moreno Vega

Resolución Rectoral N° 830-2013-R
(01-09-2013 al 31-08-2014)

Índice

2. Resumen

Existencia Global de Soluciones Clásicas Periódicas para Sistema Parabólico no Lineal

Dionicio Orlando Moreno Vega

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones clásicas para un sistema parabólico de la forma

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

donde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ es una función desconocida, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es una función suave dada y ε es una constante positiva

Haciendo el siguiente cambio de variable,

$$\left| \begin{array}{ll} t = \epsilon\tau & \tau > 0, \\ x = \epsilon y & y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,t) & \mapsto & u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t)) \end{array}.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = (\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial u_n}{\partial x}),$

$$v(y,\tau) = u(x,t)$$

- $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \epsilon\dfrac{\partial u}{\partial t},$
- $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y} = \epsilon\dfrac{\partial u}{\partial x},$
- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial v}{\partial y}) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\epsilon\dfrac{\partial u}{\partial x}) = \epsilon\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial u}{\partial x}) = \epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial y} = \epsilon^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

y reemplazando en (1) obtenemos que,

$$\frac{1}{\epsilon}v_{\tau} + \frac{1}{\epsilon}A(v)v_y = \frac{\epsilon}{\epsilon^2}v_{yy}$$

$$v_{\tau} + A(v)v_y = v_{yy}.$$

Entonces nuestro estudio se reduce aun sistema cuando $\epsilon = 1$.

Los resultados de existencia de soluciones periódicas del problema, se obtienen usando la técnica de corte.

Palabras claves: Sistema de ecuaciones diferenciales parciales, soluciones locales, técnica de corte, soluciones globales.

3. Introducción

En la actualidad los modelos matemáticos relacionados con procesos dependientes del tiempo son intensamente estudiados. Las ecuaciones de evolución representan situaciones físicas tales como: oscilaciones de la cuerda, difusión de gases, vibraciones de membrana, etc. Así es como se implementan diversos métodos para obtener soluciones de los modelos propuestos.
Este trabajo esta basado en el libro de Kreiss H. O. y Lorenz J., [4] sobre problemas parabólicos no lineales. Específicamente estudiamos el siguiente problema

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx} \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{3}$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \tag{4}$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$ es desconocido, la función $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es una función suave dada y ε es una constante positiva. Restringiremos nuestro estudio para dato inicial periódico. El caso $n = 1$ es estudiado por Ladyzenskaya, Solonikov y Ura'lceva en [11].

Si $n > 1$ para matriz de viscosidad no lineal, siempre que el dato inicial es "pequeño", la existencia global fue estudiado por varios autores, por ejemplo Kawashima [Tesis de Doctorado] para dato inicial próximo a una constante en $L^2(\mathbb{R})$ o Hagstrom - Lorenz [10] para el caso periódico.

Este trabajo generaliza estos resultados para la función matricial A con dato inicial periódico. Con A y todas sus derivadas acotadas globalmente. En el capítulo 3 mostraremos la existencia y unicidad de soluciones clásicas del sistema (3)-(4).

Para determinar la existencia de soluciones primero aplicamos la técnica de corte para encontrar una solución local. Las estimativas obtenidas nos permiten extender la solución para todo $t > 0$. La unicidad es hecha siguiendo el método usual.

Una de las motivaciones para el estudio de este problema es la aplicación de los resultado de los resultados en las ecuaciones de la dinámica de los gases.

4. Marco Teórico

3.1 Funciones de Prueba

Sea $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Denotaremos por $\mathcal{E}(]a,b[)$ o $C^{\infty}(a,b)$ al conjunto de las funciones infinitamente diferenciables sobre $]a,b[$, $\mathcal{E}(]a,b[)$ es un espacio de Fréchet con la topología de convergencia uniforme de funciones, junto con todas sus derivadas, sobre subconjuntos compactos de $]a,b[$. Sea $u :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función escalar. El soporte de u es el cerrado en $]a,b[$ del conjunto $\{x \in]a,b[: u(x) \neq 0\}$, y es denotado por $\text{supp}(u)$.

Observación 1. El soporte de u es el menor conjunto cerrado fuera del cual $u = 0$ en el siguiente sentido:

i) $\text{supp}(u)$ es cerrado en $]a,b[$ y $u = 0$ en $]a,b[-\text{supp}(u)$.

ii) Se W es un conjunto cerrado de $]a,b[$ y $u = 0$ en $]a,b[-W$ entonces $\text{supp}(u) \subset W$.

Por $C_0^{\infty}(a,b)$ denotaremos al espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto en $]a,b[$ que poseen derivadas continuas de todos los órdenes en $]a,b[$.
Decimos que una sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^{\infty}(a,b)$ converge para $\varphi \in C_0^{\infty}(a,b)$ si, y sólo si,

i) Existe un compacto fijo K de $]a,b[$ tal que todos los soportes de los φ_k, $k \in \mathbb{N}$ estan contenidos en K.

ii) La sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente en K, juntamente con todas las derivadas de todas los órdenes.

El espacio vectorial $C_0^{\infty}(a,b)$ con esta noción de convergencia se denota por $\mathscr{D}(a,b)$ y se denomina el espacio de las funciones de prueba en $]a,b[$.

Observación 2.

i) La convergencia en $\mathscr{D}(a,b)$ será denotado por $\varphi_k \to \varphi$.

ii) el operador $\frac{d^m}{dx^m} : \mathscr{D}(a,b) \to \mathscr{D}(a,b)$ es continuo.

3.2 Espacio de las Distribuciones

Se denomina distribución sobre $]a,b[$, a toda forma lineal T sobre $\mathscr{D}(a,b)$ contínua en el sentido de la convergencia definida en $\mathscr{D}(a,b)$. Esto es; una distribución, es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathscr{D}(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & T(\varphi) \end{array}$$

tal que

i) $T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1)+\alpha_2 T(\varphi_2)$; $(\forall\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, \varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{D}(a,b))$.

ii) T es contínua, esto es, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{D}(a,b)$ converge para φ en $\mathscr{D}(a,b)$. Entonces $(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio de todas las distribuciones sobre]a,b[. En este espacio una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ si, y solo si, la sucesión $(T_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$; para todo φ en $\mathscr{D}(a,b)$.
El espacio de las distribuciones sobre $]a,b[$, con esta noción de convergencia, será denotado por $\mathscr{D}'(a,b)$. El valor de la distribución T en φ se denotará tambiém por $\langle T,\varphi\rangle$ (dualidad entre $\mathscr{D}'(a,b)$ y $\mathscr{D}(a,b)$)
Diremos que una distribución se anula en un abierto $\mathscr{O}$ si para todo $\phi \in \mathscr{D}(a,b)$ tal que supp$\phi \subset \mathscr{O}$ tenemos que $T(\varphi)=0$. Denotaremos por Ω_0 el mayor abierto donde la distribución T se anula. El conjunto cerrado $]a,b[-\Omega_0$ es llamado soporte de la distribución, y es denotado por $\mathrm{supp}(T)$; conclutímos que si existe un cerrado F tal que T se anula en $]a,b[-F$, entonces

$$\mathrm{supp}(T) \subset F.$$

Teorema 1. *Sea $F \in \mathscr{D}'(a,b)$ una distribución con soporte compacto entonces F se extiende de modo único a una funcional lineal contínua sobre $\mathcal{E}(]a,b[)$; y si G es una funcional lineal contínua sobre $\mathcal{E}(]a,b[)$ entonces $G\big|_{\mathscr{D}(a,b)}$ es una distribución con soporte compacto; esto es,*

$$\mathcal{E}'(]a,b[) \cong \{T \in \mathscr{D}'(a,b) : T\textit{es una distribución con soporte compacto}\}.$$

Demostración. Vea [3]. □

Derivada Distribucional
Sea $T \in \mathscr{D}'(a,b)$; se denomina derivada de orden m de T a la distribución

$\frac{d^m}{dx^m}T$ definida por

$$\langle \frac{d^m}{dx^m}T, \varphi\rangle = (-1)^m \langle T, \frac{d^m}{dx^m}\varphi\rangle; \quad (\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(a,b)).$$

Se sigue que, cada distribución T sobre $]a,b[$ posee derivadas de todos los órdenes. Se Observa tambiém, que la derivación en sentido de las distribuciones es una operación contínua en $\mathscr{D}'(a,b)$.

Traslación de las Distribuciones.
Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), h \in \mathbb{R}$. La traslación $\tau_h\varphi$ de φ por h es definido por $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$. Definiremos entonces la traslación $\tau_h T$ de una distribución T por h por la fórmula

$$\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi).$$

Observación 3. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces $\tau_h f = g \Leftrightarrow \tau_h(T_f) = T_g$ donde T_f y T_g son respectivamente distribuciones definidas por f y g.

3.3 Propiedades Generales de las Distribuciones Periódicas.

En lo que sigue, periódica, significa una función periódica de período 1.

Definición 1. *Decimos que una distribución F es periódica (de período 1) si $\tau_\lambda F = F$, para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$.*

Denotaremos por $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ al conjunto de las distribuciones periódicas, y es un subconjunto de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Sea

$$\mathscr{P}(\mathbb{T}) = \mathscr{D}'(\mathbb{T}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}).$$

Un elemento de $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es una función periódica indefinidamente diferenciable. La convergencia en el espacio $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es definida como sigue: una sucesión $(\theta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ es dicha convergente en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para una función limite θ; si cada $\theta_\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y si para cada entero no negativo k la sucesión $(\theta_\nu^{(k)})$ converge a $\theta^{(k)}$ uniformemente; luego se sigue que a función limite $\theta \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y, por tanto, $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es cerrado con esta convergencia.

Transformación Periódica de una Distribución con soporte compacto.

Definición 2. *Sea* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$*. Definimos*

$$\tilde{w}\varphi = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \tau_\lambda \varphi. \tag{5}$$

Se observa que, sobre cualquier intervalo acotado existe solo un número finito de términos no nulos en esta suma; teniendo en vista que φ tiene soporte acotado. Así podemos derivar término a término para obtener

$$(\tilde{w}\varphi)^{(k)}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\tau_\lambda \varphi)^{(k)}(x), \tag{6}$$

por tanto $\tilde{w}\varphi$ es una función periódica de clase C^∞ llamada transformación periódica de la función φ. Además, si $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ para φ y si relacionamos cada φ_ν con una θ_ν en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ por (5), entonces $(\theta_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para θ.
Sea ahora T una distribución con soporte compacto, definimos

$$\langle \tilde{w}T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{w}\varphi \rangle, \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})),$$

la forma lineal $\tilde{w}T$, definida sobre $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ es llamada transformación periódica de la distribución T.

Proposición 1.

i) La aplicación lineal $\tilde{w}$ *envia continuamente* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *en* $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ *en* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

ii) Para todo $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$*, la distribución* $\tilde{w}T$ *es periódica. Además,*

$$\tilde{w}(\tau_\lambda T) = \tau_\lambda(\tilde{w}T) = \tilde{w}T; \quad (\lambda \in \mathbb{Z}),$$

iii) Para todo $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ *y todo* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$*, tenemos*

$$\tilde{w}(\psi F) = F(\tilde{w}\psi).$$

Para todo $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ *y todo* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$*, tenemos*

$$\tilde{w}(fT) = f(\tilde{w}T).$$

Demostración. Vea [1]. □

Partición Periódica de la unidad en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.
Llamamos partición periódica en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ de la unidad a una función $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ de modo que

$$\tilde{w}\theta = 1. \tag{7}$$

Afirmamos que existe una partición periódica en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ de la unidad. En efecto, sea ψ una función positiva sobre $\mathbb{R}$, no nula sobre $2I$, onde $I =]0,1[$ y perteneciendo a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Poniendo $\theta = \dfrac{\psi}{\tilde{w}\psi}$ como $\tilde{w}\psi$ es periódica estrictamente positivo, θ es un elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; por otro lado, como $\tilde{w}\psi$ es periódica tenemos de la proposición anterior (iii) que

$$\tilde{w}\theta = \frac{1}{\tilde{w}\psi}\tilde{w}\psi = 1. \qquad \square$$

Sobre cualquier intervalo acotado el número de términos no nulos sobre el lado izquierdo de (7) es finito porque θ tiene soporte acotado. Consecuentemente, podemos diferenciar término a término para obtener

$$(\tilde{w}\theta)^{(k)}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\tau_\lambda \varphi)^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Observamos que si $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y θ es una partición de la unidad, entonces θf está en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Ademas, si la sucesión $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{T})$ converge en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para f, entonces la sucesión $(\theta f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ para θf.

Lema 1 (Lema de sobreyectividad).

i) Toda función periódica de clase C^∞ es la transformación periódica de una función de clase C^∞ con soporte compacto.

ii) Toda distribución periódica es una transformación periódica de una distribución de soporte compacto.

Demostración. Vea [1]. $\square$

Dualidad entre $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ y $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$.
Denotaremos por $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$ al conjunto de las formas lineales continuas sobre $\mathscr{P}(\mathbb{T})$; el valor de $L \in \mathscr{P}'(\mathbb{T})$ en el punto $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ será denotado por $\langle L, f \rangle_{\mathbb{T}}$.

Teorema 2 (Teorema de Dualidad). *Los espacios vectoriales topológicos $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ son isomorfos (algebraicamente y topológicamente).*

Demostración. Vea [1]. $\square$

Expresión de Dualidad entre $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{P}(\mathbb{T})$.

Proposición 2. *Identificando $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ con $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$, entonces la dualidad entre $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{P}(\mathbb{T})$, se expresa por*

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}} = \langle T, f\rangle; \quad (F \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}),\ f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})),$$

donde T es una distribución con soporte compacto cuya transformación periódica es igual a F.

Demostración. Vea [1]. □

Observación 4.

i) Para toda distribución periódica F podemos considerar siempre como una transformación periódica de una cierta distribución con soporte compacto, por el lema de sobreyectividad es preferible escribir

$$\langle \tilde{w}T, f\rangle_{\mathbb{T}} = \langle T, f\rangle.$$

ii) Si F es una función periódica localmente integrable, entonces podemos considerar $T = 1_I F \quad (I =]0,1[)$; consecuentemente,

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}} = \int_I F(x)f(x)dx.$$

3.4 Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$.

Denotaremos por $L^2(\mathbb{T})$ al conjunto (clases) de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ (de período 1) localmente cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}$,

$$L^2(\mathbb{T}) = \mathscr{P}(\mathbb{T}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

Unimos $L^2(\mathbb{T})$ de la topología inducida por la de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$; esta topología es equivalente a una otra definida por el siguiente producto escalar

$$(f, g)_{\mathbb{T}} = \int_I f(x)g(x)dx \quad (I =]0,1[).$$

Proposición 3. *Unido de la estructura pre-hilbertiana, el espacio $L^2(\mathbb{T})$ es completo.*

Demostración. Vea [1]. □

Definición 3. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Por $H^s(\mathbb{T})$ denotamos el espacio de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{T})$ con la siguiente propiedad*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (1+m^2)^s |a_m|^2 < \infty,$$

para los coeficientes de Fourier a_m de f. El espacio $H^s(\mathbb{T})$ es llamado un espacio de Sobolev.
En el caso $s = 0$, obtenemos un espacio de Hilbert que es isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T})$.

Teorema 3. *$H^s(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por*

$$(f,g)_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^s \; a_m \; b_m,$$

para $f,\ g \in H^s(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier a_m y b_m, respectivamente. Note que la norma sobre $H^s(\mathbb{T})$ es dado por

$$|||f|||_s = \{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^s |a_m|^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Vea [8]. □

Definición 4. *Sea X e Y dos espacios de Banach. El operador $T : D(T) \subseteq X \to Y$ es llamado compacto si, y solo si,*

i) T es contínuo;

ii) T lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

Definición 5. *Sean X e Y dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ con $X \subseteq Y$, y el operador de inmersión*

$$\begin{aligned} j:\ X &\to Y \\ u &\mapsto j(u) = u. \end{aligned}$$

i) La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada contínua, denotado por $X \hookrightarrow Y$ si, y solo si, j es contínua, esto es,

$$||u||_Y \leq const||u||_X; \quad (para\ todo\ u \in X). \tag{8}$$

ii) La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada compacto, denotado por $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si, y solo si, j es compacto, esto es, (8) es verdadero, y cada sucesión (u_n) acotada en X posee una subsucesión $(u_{n'})$ el cual es convergente en Y.

Proposición 4. *Sean X, Y, Z tres espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Entonces, si la imersión $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq Z$ son contínuas, $X \subseteq Z$ tambiém lo es. Si ademas, una de las imersiones $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq Z$ es compacta, entonces $X \subseteq Z$ tambiém es compacta.*

Demostración. Vea [5]. $\square$

Teorema 4. *Sea $s, r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Entonces $H^s(\mathbb{T})$ es denso en $H^r(\mathbb{T})$ con inmersión contínua $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$; y si $s \geq r \geq 0$ la imersión es compacta con*

$$|||f|||_r \leq |||f|||_s \ ; \quad (\forall\ f \in H^s(\mathbb{T})).$$

Demostración. Vea [2], [8]. $\square$

Teorema 5. *Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces $f \in H^m(\mathbb{T})$ si, y solo si, $\dfrac{d^j f}{\partial x^j} = f^{(j)} \in L^2(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, ..., m$; donde la derivada es tomada en el sentido de las distribuciones ($\mathscr{D}'(\mathbb{T})$). Además, $|||f|||_m$ y*

$$||f||_m^2 = \sum_{j=0}^{m} ||f^{(j)}||_2^2,$$

son equivalentes, esto es, existen m, $c_m > 0$ y $c'_m > 0$ tal que

$$c_m|||f|||_m^2 \leq ||f||_m^2 \leq c'_m|||f|||_m^2 \ ; \quad (\forall\ f \in H^m(\mathbb{T})).$$

Demostración. Vea [2]. $\square$

Teorema 6. *Si $s > \dfrac{1}{2}$, entonces $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ y*

$$|||f|||_\infty \leq ||a_m||_{\ell^1} \leq c|||f|||_s \ ; \quad (\forall\ \ f \in H^s(\mathbb{T})),$$

donde a_m es el coeficiente de Fourier de f.

Demostración. Vea [2]. $\square$

Definición 6. *Por $(H^s(\mathbb{T}))'$ denotamos el espacio dual de $H^s(\mathbb{T})$, que es, por definición el espacio de funcionales lineales sobre $H^s(\mathbb{T})$.*

Proposición 5. *$(H^s(\mathbb{T}))'$ es isomorfo isometricamente a $H^{-s}(\mathbb{T})$ para todo $s \in \mathbb{R}$ la dualidad es implementada por el par*

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m\ b_m \ ; \quad (f \in H^{-s}(\mathbb{T}),\ g \in H^s(\mathbb{T})),$$

con a_m, b_m coeficientes de Fourier de f y g respectivamente.

Demostración. Vea [2]. □

Consideraremos funciones vectoriales n-dimensionales de variable real con componentes en $L^2(\mathbb{T})$ o $H^s(\mathbb{T})$. Usaremos las notaciones:

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{T}) = (L^2(\mathbb{T}))^n = \{v = (v_1, \ldots, v_n);\ v_i \in L^2(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{T}) = (H^s(\mathbb{T}))^n = \{v = (v_1, \ldots, v_n);\ v_i \in H^s(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathbf{D}(\mathbb{T}) = (\mathscr{P}(\mathbb{T}))^n = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n);\ \theta_i \in \mathscr{P}(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

y asumiremos que estos espacios productos son equipados con la norma usual, o con una norma equivalente (excepto $\mathscr{P}(\mathbb{T})$, lo cual no es un espacio normado).

$$||v||_2 = (\sum_{i=1}^{n} ||v_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{para} \quad v \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}).$$

$$||v||_{\mathbf{H}^s(\mathbb{T})} = (\sum_{i=1}^{n} ||v_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{para} \quad v \in \mathbf{H}^s(\mathbb{T}).$$

El producto escalar y la norma son denotados por $(\cdot,\cdot)$ y $||\cdot||_p$ sobre $L^p(\mathbb{T})$ o $\mathbf{L}^p(\mathbb{T})$.

3.5 Espacios $L^p(0, T; V)$.

Sean $0 < T < \infty$ y V un espcio de Banach, una función $u :]0, T[\to V$ es llamada medible en $]0, T[$, si la función real $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle_{V' \times V}$ es medible según Lebesgue en $]0, T[$ para todo $f \in V'$, donde V' es el dual topológico de V y $\langle .,. \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V' y V. En este caso, decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.
Una función $u :]0, T[\to V$ es llamada integrable en el sentido de Bochner en $]0, T[$, si u es medible en $]0, T[$ y la función real $t \mapsto ||u(t)||_V$ es integrable según Lebesgue en $]0, T[$. En este caso, la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt \in V$, y es caracterizado por la siguiente propiedad

$$\langle f, \int_0^T u(t)dt\rangle_{V' \times V} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{V' \times V} dt\ ; \quad (\forall\ f \in V').$$

Si $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(0, T; V)$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u :]0, T[\to V$ medibles, y tales que $t \mapsto ||u(t)||_V^p$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$. Note que este espacio vectorial, es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{L^p(0,T;V)} = (\int_0^T ||u(t)||_V^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p=2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V dt.$$

Si $p=\infty$ denotaremos por $L^\infty(0,T;V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:]0,T[\to V$ que son medibles, y tal que el supremo escencial de $\{||u(t)||_V;\ t\in]0,T[\}$ es finito. $L^\infty(0,T;V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{L^\infty(0,T;V)} = \underset{t\in]0,T[}{supess}\, ||u(t)||_V.$$

Valen los seguientes resultados [5]:

Proposición 6. *Sea V un espacio de Banach y $0<T<\infty$. Entonces $L^p(0,T;V)$ es separable en el caso que V es separable y $1\leq p<\infty$.*

Proposición 7. *Sean X, Y dos espacios de Banach. Si la inmersión $X\subseteq Y$ es contínua. Entonces para todo $1\leq q<p\leq\infty$ la inmersión $L^p(0,T;X)\subseteq L^q(0,T;Y)$ es también contínua.*

Proposición 8. *Sea V un espacio de Banach. El espacio dual de $L^p(0,T;V)$ es isomorfo al espacio $L^q(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\quad 1\leq p,q<\infty$.*

3.6 Distribuciones Vectoriales.

Sea V un espacio de Banach. Se denomina una distribución vectorial sobre $]0,T[$ con valores en V, a toda aplicación lineal y contínua sobre $\mathscr{D}(0,T)$ (contínua en el sentido de la convergencia definida en $\mathscr{D}(0,T)$). Dada una distribución T su valor en φ se denota como de costumbre, por $\langle T,\varphi\rangle$.
Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$, denotaremos por $\mathscr{D}'(0,T;V)$. Sea $u\in L^p(0,T;V)$, $\ 1\leq p\leq\infty$ la función definida por

$$\begin{array}{rccl} T_u: & \mathscr{D}(0,T) & \to & V \\ & \varphi & \mapsto & \langle T_u,\varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \end{array}$$

pertenece a $\mathscr{D}'(0,T;V)$. Las distribuciones T_u definidas por $u \in L^p(0,T;V)$, $1 \leq p \leq \infty$ son univocamente definidas, y identificaremos u con la distribución T_u. Luego $L^p(0,T;V) \subseteq \mathscr{D}'(0,T;V)$.
Decimos que una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{D}'(0,T;V)$ converge para $T \in \mathscr{D}'(0,T;V)$, cuando $\langle T_k, \varphi\rangle$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ en V para todo φ en $\mathscr{D}(0,T)$.

Derivación en $\mathscr{D}'(0,T;V)$.
Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales, denotado por u' o $\frac{du}{dt}$, como

$$\langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle = -\langle u, \frac{d\varphi}{dt}\rangle; \quad (\text{para todo } \varphi \in \mathscr{D}(0,T)).$$

En general la derivada de orden n es definida como

$$\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle u, \frac{d^n\varphi}{dt^n}\rangle; \quad (\text{para todo } \varphi \in \mathscr{D}(0,T)).$$

En particular, todo elemento $u \in L^p(0,T;V)$ posee derivada de todas las ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.
Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $C([0,T];V)$ al espacio de las funciones que son contínuas de $[0,T]$ en V.

Sean V y H dos espacios de Hilbert real, con sus respectivas estructuras $\{V, (\cdot,\cdot)_V, ||\cdot||_V\}$, $\{H, (\cdot,\cdot)_H, ||\cdot||_H\}$. Asumiremos que $V \hookrightarrow H$, esto es, V está continuamente inmerso en H, con V denso en H $(\bar{V}^{||\cdot||_H} = H)$. Por dualidad, identificamos H con su dual H', por el teorema de Representación de Riesz obtenemos $V \subseteq H \equiv H' \subseteq V'$, donde cada espacio es denso en el siguiente y las imersiones son contínuas.

Lema 7. *Sean V, H y V' espacios de Hilbert, cada espacio incluido y denso en el siguiente $(V \subseteq H \subseteq V')$, V' dual de V. Si $u \in L^2(0,T;V)$ y $u' \in L^2(0,T;V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$ y se tiene*

$$\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V},$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.

Demostración. Vea [7]. □

Sea

$$W(0,T) = \{u : u \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{T})), \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}))\}$$

sabemos que $W(0,T)$ unido de la norma

$$||u||_{W(0,T)} = ||u||_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))} + ||u_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}))}$$

es un espacio de Banach, ademas $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\mathbb{T})) \hookrightarrow C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}))$. (Ver [7]).

3.7 Convergencia en $L^p(0,T;V)$.

Sea V un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si existe $u \in V$ tales que $||u_k - u||_V \to 0$ cuando $k \to \infty$. En este caso denotamos por $u_k \to u$. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en V si existe $u \in V$, tal que

$$\langle f, u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f, u\rangle_{V'\times V}; \quad \text{(para todo } f \in V').$$

En este caso denotamos por $u_k \rightharpoonup u$.

Proposición 9. *Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, que converge débil para u en V. Entonces*

$$||u||_V \leq \liminf ||u_k||_V.$$

Demostración. Vea [9]. □

Proposición 10. *Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, si converge fuerte entonces converge débil para el mismo limite.*

Demostración. Vea [9]. □

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$; decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge debilmente a u en $L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} \to \langle f, u\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}$$

para todo $f \in L^q(0,T;V')$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Esto significa que,

$$\int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt,$$

para todo $f \in L^q(0,T;V')$.

Observación 5.
En el caso $V = H^1(\mathbb{T})$, tenemos que $V' = H^{-1}(\mathbb{T})$,

$$\langle G, v\rangle_{H^{-1}(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})} = (G, v), \quad (\text{para todo } \; G \in L^2(\mathbb{T}) \;\; v \in H^1(\mathbb{T})),$$

$$H^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}) \cong (L^2(\mathbb{T}))' \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{T}).$$

Luego

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))dt \to \int_0^T (w(t), u(t))dt,$$

donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))$ y $w \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{T}))$. $\square$
Sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual topológico, dotamos la norma de V' por

$$||f||_{V'} = \sup_{||u||_V \le 1} |\langle f, u\rangle|.$$

Decimos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ si, y solamente si, $\langle u_k, w\rangle \to \langle u, w\rangle$ para todo $w \in V$.
Así, $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;V')$, si, y solamente si, $\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$ para todo $w \in L^1(0,T;V)$, esto es,

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt; \quad (\forall\; w \in L^1(0,T;V)).$$

Observación 6.
Si $V = L^2(\mathbb{T})$ y $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T})')$ significa que

$$\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{T}))')\times L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{T}))')\times L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))},$$

para todo $w \in L^1(0,T; L^2(\mathbb{T}))$, esto es

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{(L^2(\mathbb{T}))'\times L^2(\mathbb{T})} dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{(L^2(\mathbb{T}))'\times L^2(\mathbb{T})} dt;$$

para todo $w \in L^1(0,T; L^2(\mathbb{T}))$. Por tanto $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T}))$ si, y solamente si,

$$\int_0^T (u_k(t), w(t))dt \to \int_0^T (u(t), w(t))dt \;; \quad (\forall\; w \in L^1(0,T; L^2(\mathbb{T}))).$$

3.8 Resultados Importantes.

Lema 8. *(Lema de Gronwall) Sea $y \in C^1([0,T])$, $\psi \in C([0,T])$ satisfaciendo*

$$y' \leq Cy(t) + \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

para algún $C \geq 0$. Entonces

$$y(t) \leq e^{ct}\{y(0) + \int_0^t |\psi(\tau)|d\tau\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Demostración. Vea Anexo Lema 15. □

Lema 9. *(Lema de Picard) Sea $\eta^k(t)$, $k = 0, 1, \cdots$ denota una sucesión de funciones continuas no negativas los cuales cumplen las desigualdades*

$$\eta^{k+1}(t) \leq a + b\int_0^t \eta^k(\tau)t\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con a, b constantes no negativas. Entonces

$$\eta^k(t) \leq a\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{b^\nu t^\nu}{\nu!} + \frac{b^k t^k}{k!} \max_{0\leq\tau\leq t} \eta^0(\tau),$$

para $0 \leq t \leq T$ y $k = 0, 1, \cdots$. En particular la sucesión $\eta^k(t)$, $0 \leq t \leq T$, es uniformemente acotado. Si $a = 0$, entonces la sucesión converge uniformemente para cero.

Demostración. Vea Anexo Lema 16. □

Sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{T} \times (0,\infty))$ una sucesión de funciones. Para todo entero no negativo p, q, existe una constante $C(p,q)$ independiente de m tal que

$$\max_{x,t} |\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_m(x,t)| \leq C(p,q)$$

Teorema 10. *Existe una función $u \in C^\infty$, y una sucesión $m_j \to \infty$ con*

$$\max_{x,t} |\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_{m_j}(x,t) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u(x,t)| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad m_j \to \infty.$$

Es decir existe una subsucesión de u_m convergiendo junto con todas sus derivadas en $C^\infty(\mathbb{T} \times (0,\infty))$.

Demostración. Vea Anexo Teorema 17. □

5. Materiales y Métodos

Los materiales utilizados para la elaboración de éste trabajo fueron: Libros, servicios de internet, CDs, fotocopias, espiralados, tipeos e impresiones, papel de impresión, y el editor LaTeX.

La metodología empleada en este trabajo es el enfoque inductivo y deductivo. Inductivo pues inducimos las definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, corolarios, etc. y el deductivo porque deducimos demostraciones de teoremas, proposiciones, lemas y corolarios.

6. Resultados

5.1 Teorema de Existencia Local

En este capítulo, mostraremos la existencia y unicidad de soluciones locales para el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + A(u)u_x &= \varepsilon u_{xx}, \quad \text{en} \quad \mathbb{R}\times(0,\infty), & (9)\\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \text{en} \quad \mathbb{R}\times\{t=0\}, & (10)\end{aligned}$$

donde admitimos que el dato inicial en (10), $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T})$ y $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, es una función suave dada.
Asumiremos que A y todas sus derivadas son globalmente acotadas, es decir,

$$\sum_{\nu=p}|D^\nu A(u)| \leq K_p, \quad \text{para todo} \quad u\in\mathbb{R}^n, \quad p=0,1,2,3,\cdots \tag{11}$$

Sea

$$U_\eta = \{u\in\mathbb{R}^n : \|u-u_0(x)\| < \eta \quad \text{para algún} \quad x\}$$

la η- vecindad para el dato inicial u_0.
Escojamos la función escalar cutt-off $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de de clase C^∞ tal que

$$\phi(u) := \begin{cases} 1 \;\; ; \;\; u\in U_{\frac{\eta}{4}} \\ \\ 0 \;\; ; \;\; u\notin U_{\frac{\eta}{2}}, \end{cases}$$

y sea

$$\widetilde{A}(u) := \begin{cases} \phi(u)A(u) \;\; ; \;\; u\in U_\eta \\ \\ \quad 0 \quad\quad\;\; ; \;\; u\notin U_\eta, \end{cases}$$

observamos que $\widetilde{A}$ es suave y todas sus derivadas son acotadas, esto es,

$$\sum_{\nu=p}|D^\nu \widetilde{A}(u)| \leq d_p, \quad \text{para todo} \quad u\in\mathbb{R}^n, \quad p=0,1,2,3,\cdots \tag{12}$$

Luego el sistema alterado es:

$$\left| \begin{array}{l} u_t + \widetilde{A}(u)u_x = u_{xx}; \quad k=0,1,\cdots \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array}\right. \tag{13}$$

Teorema 11 (Existencia Local). *Si* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *es una función de clase* C^∞ *en una vecindad del dato inicial, entonces el sistema parabólico (9)-(10) tiene una única solución* $u = u(x,t)$ *en algún intervalo de tiempo* $0 \le t \le T$. $T > 0$.

Teorema 12. *Dada la acotación global (12) el sistema parabólico (13) tiene una única solución suave* $u = u(x,t)$ *definida para* $0 \le t < \infty$.

Demostración del Teorema 2
Consideremos las iteraciones

$$\left| \begin{array}{l} u_t^{k+1} + \widetilde{A}(u^k)u_x^{k+1} = u_{xx}^{k+1}; \quad k = 0, 1, \cdots \\ u^{k+1}(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{14}$$

con $u^0(x,0) = u_0(x)$

5.1.1 Primer Paso: estimativas.

Lema 13. *Para cada* $j = 0, 1, 2, \cdots$ *existe* M_j *tal que*

$$\|u_j^k(.,t)\|_2 \le M_j \quad en \quad 0 \le t \le T.$$

donde $M_j = M_j(\|u_{0j}\|_2)$.

Prueba, de la ecuación (14), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u^k, u^k) &= 2(u^k, u_t^k) \\
&= 2(u^k, -\widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k + u_{xx}^k) \\
&\le -2(u^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k) + 2(u^k, u_{xx}^k) \\
&\le 2|(u^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k)| + 2(u^k, u_{xx}^k) \\
&\le 2d_0\|u^k(.,t)\|_2\|u_x^k(.,t)\|_2 - 2\|u_x^k(.,t)\|_2^2 \\
&\le \frac{d_0^2}{2}\|u^k(.,t)\|_2^2 + 2\|u_x^k(.,t)\|_2^2 - 2\|u_x^k(.,t)\|_2^2 \\
&= \frac{d_0^2}{2}\|u^k(.,t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\|u^k(.,t)\|_2^2 \leq \frac{d_0^2}{2}\|u^k(.,t)\|_2^2.$$

Integrando de 0 a $t < T$

$$\|u^k(.,t)\|_2^2 - \|u^k(.,0)\|_2^2 \leq \frac{d_0^2}{2}\int_0^t \|u^k(.,s)\|_2^2 ds,$$

es decir

$$\|u^k(.,t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \frac{d_0^2}{2}\int_0^t \|u^k(.,s)\|_2^2 ds,$$

por Gronwall

$$\|u^k(.,t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 e^{\frac{d_0^2}{2}t} \leq \|u_0\|_2^2 e^{\frac{d_0^2}{2}T} = M_0^2 = M_0^2(\|u_0\|)$$

por tanto

$$\|u^k(.,t)\|_2 \leq M_0.$$

Así queda probado el lema para $j = 0$.
Ahora probemos para $j = 1$.
Sabemos que $u_t^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k + u_{xx}^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k + u_2^k$, entonces

$$u_{tx}^k = u_{t1}^k = -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1 + u_3^k,$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_1^k, u_1^k) &= (u_1^k, u_{1t}^k) \\
&= (u_1^k, -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1 + u_3^k) \\
&= -(u_1^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1) + (u_1^k, u_3^k) \\
&\leq (u_2^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k) - \|u_2^k(.,t)\|_2 \\
&\leq |u_2^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)| - \|u_2^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq d_0\|u_1^k(.,t)\|_2\|u_2^k(.,t)\|_2 - \|u_2^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{d_0^2}{4}\|u_1^k(.,t)\|_2^2 + \|u_2^k(.,t)\|_2^2 - \|u_2^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_1^k, u_1^k) \leq \frac{d_0^2}{2}\|u_1^k(.,t)\|_2^2$$

integrando de 0 a $t < T$.

$$\|u_1^k(.,t)\|_2^2 - \|u_1^k(.,0)\|_2^2 \leq \frac{d_0^2}{2}\int_0^t \|u_1^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau$$

esto es,

$$\|u_1^k(.,t)\|_2^2 \leq \|u_{01}\|_2^2 + \frac{d_0^2}{2}\int_0^t \|u_1^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau$$

Por gronwall

$$\|u_1^k(.,t)\|_2^2 \leq \|u_{01}\|_2^2 e^{\frac{d_0^2}{2}t} \leq \|u_{01}\|_2^2 e^{\frac{d_0^2}{2}T} = M_1 = M_1(\|u_{0i}\|_2), \quad 0 \leq i \leq 1.$$

por tanro

$$\|u_1^k(.,t)\|_2^2 \leq M_1$$

Así probamos para el caso $j = 1$.
Antes de aplicar el método de inducción veamos para $j = 2$.

$$u_t^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k + u_2^k$$

$$u_{t2}^k = -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2 + u_4^k$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_2^k, u_2^k) &= (u_2^k, u_{2t}^k) \\
&= (u_2^k, -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2 + u_4^k) \\
&= -(u_2^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2) + (u_2^k, u_4^k) \\
&\leq (u_3^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1) - \|u_3^k(.,t)\|_2^2)
\end{aligned}$$

Observación 1. .

$$(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1 = \widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k$$

□

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_2^k, u_2^k) &\leq (u_3^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k) - \|u_3^k(.,t)\|_2^2 \\
&= (u_3^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k) + (u_3^k, \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k) - \|u_3^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

Observación 2. .

- $$\begin{aligned}\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k\|_2^2 &= \int_0^1 \|\widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k(x,t)\|^2dx\\ &\leq \int_0^1 \|\widetilde{A}(u^{k-1})\|^2\|u_2^k(x,t)\|^2dx\\ &\leq d_0^2\int_0^1 \|u_2^k(x,t)\|^2dx\\ &= d_0^2\|u_2^k(.,t)\|_2^2\end{aligned}$$

  entonces $\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k\|_2 = d_0\|u_2^k(.,t)\|_2$

- $$\begin{aligned}\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k\|_2^2 &= \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}(x,t)u_1^k(x,t)\|^2dx\\ &\leq \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})\|^2\|u_1^{k-1}(x,t)\|^2\|u_1^k(x,t)\|^2dx\\ &= d_1^2\int_0^1 \|u_1^{k-1}(x,t)\|^2\|u_1^k(x,t)\|^2dx\\ &\leq d_1^2\|u_1^k(.,t)\|_\infty^2\int_0^1 \|u_1^{k-1}(x,t)\|^2dx\\ &= d_1^2\|u_1^k(.,t)\|_\infty^2\|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2\end{aligned}$$

  sabemos que

  $$\|u_j^k(.,t)\|_\infty^2 \leq 2(\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 + \|u_j^k(.,t)\|_2^2)$$

  entonces

  $$\begin{aligned}\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k\|_2^2 &\leq 2d_1^2\|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2(\|u_2^k(.,t)\|_2^2 + \|u_1^k(.,t)\|_2^2)\\ &= 2d_1^2\|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2\|u_2^k(.,t)\|_2^2 + 2d_1^2\|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2\|u_1^k(.,t)\|_2^2\end{aligned}$$

  por hipótesis

  $$\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k\|_2^2 \leq 2d_1^2M_1^4 + 2d_1^2M_1^2\|u_2^k(.,t)\|_2^2$$

también sabemos que

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad a, b \in \mathbb{Z}^+$$

lo que implica que

$$\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k\|_2 \leq \sqrt{2}d_1M_1^2 + \sqrt{2}d_1M_1\|u_2^k(.,t)\|_2.$$

□

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2^k\|_2^2 &\leq \|u_3^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k\|_2 + \|u_3^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k\|_2 - \|u_3^k(.,t)\|_2^2 \\
&= d_0\|u_2^k(.,t)\|_2\|u_3^k(.,t)\|_2 + (\sqrt{2}d_1M_1^2 + \sqrt{2}d_1M_1\|u_2^k(.,t)\|_2)\|u_3^k(.,t)\|_2- \\
&\quad -\|u_3^k(.,t)\|_2^2 \\
&= (d_0 + \sqrt{2}d_1M_1)\|u_2^k(.,t)\|_2\|u_3^k(.,t)\|_2 + \sqrt{2}d_1M_1^2\|u_3^k(.,t)\|_2 - \|u_3^k(.,t)\|_2^2 \\
&= e\|u_2^k(.,t)\|_2\|u_3^k(.,t)\|_2 + f\|u_3^k(.,t)\|_2 - \|u_3^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{e^2}{2}\|u_2^k(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 - \|u_3^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{d}{dt}\|u_2^k\|_2^2 \leq e^2\|u_2^k(.,t)\|_2^2 + f^2,$$

Integrando de 0 a $t < T$,

$$\|u_2^k(.,t)\|_2^2 - \|u_2^k(.,0)\|_2^2 \leq fT + e^2\int_0^t \|u_2^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

esto es

$$\|u_2^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{02}\|_2^2 + fT) + e^2\int_0^t \|u_2^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

Por Gronwall

$$\|u_2^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{02}\|_2^2 + fT)e^{e^2t} \leq (\|u_{02}\|_2^2 + fT)e^{e^2T} = C_2^2 = C_2^2(\|u_{0i}\|_2); \;\; 0 \leq i \leq 2,$$

entonces

$$\|u_2^k(.,t)\|_2 \leq C_2$$

Ahora veamos para $j = 3$

$$u_t^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k + u_2^k$$

$$u_{t3}^k = -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_3 + u_5^k$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_3^k, u_3^k) &= (u_3^k, u_{3t}^k) \\
&= (u_3^k, -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_3 + u_5^k) \\
&= -(u_3^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_3) + (u_3^k, u_5^k) \\
&= (u_4^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2) - \|u_4^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

Observación 3. .

- $\dfrac{d}{dx}(u_3^k, u_4^k) = (u_4^k, u_4^k) + (u_3^k, u_5^k)$ *entonces*

  $$(u_3^k, u_5^k) = \frac{d}{dx}(u_3^k, u_4^k) - \|u_4^k\|_2^2$$

  como $(u_3^k, u_4^k) = -(u_4^k, u_3^k)$, *entonces* $(u_3^k, u_4^k) = 0$
  luego

  $$(u_3^k, u_5^k) = -\|u_4^k(.,t)\|_2^2$$

- $(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1 = \widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k.$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2 &= (\widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k)_1 \\
&= \widetilde{A}(u^{k-1)}u_3^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k + \\
&\quad + \widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k \\
&= \widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k + 2\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1}u_2^{k-1}u_1^k + \widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k
\end{aligned}$$

$\square$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 &= (u_4^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k + 2\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k + \\
&\quad + \widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k) - \|u_4^k(.,t)\|_2^2) \\
&= (u_4^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k) + 2(u_4^k, \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k) + (u_4^k, \widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k) + \\
&\quad + (u_4^k, \widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k) - \|u_4^k(.,t)\|_2^2)
\end{aligned}
$$

Observación 4. .

-

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k\|_2^2 &= \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k\|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})\|^2 \|u_1^{k-1}(.,t)\|^2 \|u_2^k(x,t)\|^2 dx \\
&\leq d_1^2 \int_0^1 \|u_1^{k-1}(x,t)\|^2 \|u_2^k(x,t)\|^2 dx \\
&\leq d_1^2 |u_1^{k-1}(.,t)\|_\infty^2 \int_0^1 \|u_2^k(x,t)\|^2 dx \\
&= d_1^2 |u_1^{k-1}(.,t)\|_\infty^2 \|u_2^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq 2d_1^2 \|u_2^k(.,t)\|_2^2 (\|u_2^{k-1}(.,t)\|_2^2 + \|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k\|_2 \leq \widetilde{C}
$$

- $$
\begin{aligned}
\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k\|_2^2 &= \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k\|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \|\widetilde{A}'(u^{k-1})\|^2 \|u_2^{k-1}(x,t)\|^2 \|u_1^k(x,t)\|^2 dx \\
&\leq d_1^2 \int_0^1 \|u_2^{k-1}(x,t)\|^2 \|u_1^k(x,t)\|^2 dx \\
&\leq d_1^2 \|u_1^k(.,t)\|_\infty^2 \int_0^1 \|u_2^{k-1}(x,t)\|^2 dx \\
&= d_1^2 \|u_1^k(.,t)\|_\infty^2 \|u_2^{k-1}(.,t)\|_2^2 \\
&\leq 2d_1^2 \|u_2^{k-1}(.,t)\|_2^2 (\|u_2^k(.,t)\|_2^2 + \|u_1(.,t)\|_2^2)
\end{aligned}
$$

entonces

$$\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k\|_2 \leq \widetilde{\widetilde{C}}$$

- $$
\begin{aligned}
\|\widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k\|_2^2 &= \int_0^1 \|\widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k\|^2 dx \\
&\leq d_2^2 \int_0^1 \|u_1^{k-1}(x,t)\|^2 \|u_1^{k-1}(x,t)\|^2 \|u_1^k(x,t)\|^2 dx \\
&\leq d_2^2 \|u_1^{k-1}(.,t)\|_\infty^4 \int_0^1 \|u_1^k(x,t)\|^2 dx \\
&= d_2^2 \|u_1^{k-1}(.,t)\|_\infty^4 \|u_1^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq 2d_2^2 \|u_1^k(.,t)\|_2^2 (\|u_2^{k-1}(.,t)\|_2^2 + \|u_1^{k-1}(.,t)\|_2^2)
\end{aligned}
$$

Así

$$\|\widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k\|_2 \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}}$$

□

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 &\leq \|u_4^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k\|_2 + 2\|u_4^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k\|_2 + \\
&\quad + \|u_4^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k\|_2 + \\
&\quad + \|u_4^k(.,t)\|_2\|\widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k\|_2 - \|u_4^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq d_0\|u_3^k(.,t)\|_2\|u_4^k(.,t)\|_2 + 2\widetilde{C}\|u_4^k(.,t)\|_2 + \widetilde{\widetilde{C}}\|u_4^k(.,t)\|_2 + \\
&\quad + \widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}}\|u_4^k(.,t)\|_2 - \|u_4^k(.,t)\|_2^2 \\
&= d_0\|u_3^k(.,t)\|_2\|u_4^k(.,t)\|_2 + (2\widetilde{C} + \widetilde{\widetilde{C}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}})\|u_4^k(.,t)\|_2 - \|u_4^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{d_0^2}{2}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_4^k(.,t)\|_2^2 + \frac{(2\widetilde{C} + \widetilde{\widetilde{C}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}})^2}{2} + \frac{1}{2}\|u_4^k(.,t)\|_2^2 - \\
&\quad - \|u_4^k(.,t)\|_2^2 \\
&= \frac{d_0^2}{2}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 + \frac{(2\widetilde{C} + \widetilde{\widetilde{C}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{C}}})^2}{2}
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\|u_3^k(.,t)\|_2^2 \leq d_0^2\|u_3^k(.,t)\|_2^2 + g^2$$

integrando de 0 a $t < T$

$$\|u_3^k(.,t)\|_2^2 - \|u_3^k(.,0)\|_2^2 \leq g^2T + d_0^2\int_0^t \|u_3^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

esto es

$$\|u_3^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{03}\|_2^2 + g^2T) + d_0^2\int_0^t \|u_3^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

Por Gronwall

$$\|u_3^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{03}\|_2^2 + g^2T)e^{d_0^2 t} = (\|u_{03}\|_2^2 + g^2T)e^{d_0^2 T} = M_3^2 = M_3^2(\|u_{0i}\|_2),\ \ 0 \leq i \leq 3.$$

por tanto

$$\|u_3^k(.,t)\|_2 \leq M_3$$

Supongamos que el lema está probado para $j-1$. Es decir

$$\|u_{j-1}^k(.,t)\|_2 \leq M_{j-1}, \quad \text{en} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Entonces

$$u_t^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k + u_2^k$$

$$u_{tj}^k = -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_j + u_{j+2}^k$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_j^k, u_j^k) &= (u_j^k, u_{jt}^k) \\
&= (u_j^k, -(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_j + u_{j+2}) \\
&= -(u_j^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_j) + (u_j^k, u_{j+2}^k) \\
&\quad (u_{j+1}^k, (\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_{j-1}) + \|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

Observación 5.

$$(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_1 = \widetilde{A}(u^{k-1})u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^k$$

$$(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_2 = \widetilde{A}(u^{k-1})u_3^k + 2\widetilde{A}'(u^{k-1})u_1^{k-1}u_2^k + \widetilde{A}'(u^{k-1})u_2^{k-1}u_1^k + \widetilde{A}''(u^{k-1})u_1^{k-1}u_1^{k-1}u_1^k$$

En general

$$(\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k)_{j-1} = \widetilde{A}(u^{k-1})u_j^k + Q_j$$

Se sigue de (12), la desigualdad

$$|u_j^k(.,t)|_\infty^2 \leq 2(\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 + \|u_j^k(.,t)\|_2^2)$$

y por la hipótesis inductiva.

$$\|Q_j\|_2 \leq \widetilde{C_j}$$

□

Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_j^k(.,t)\|_2^2 &= (u_{j+1}^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_j^k) + Q_j) - \|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 \\
&\quad (u_{j+1}^k, \widetilde{A}(u^{k-1})u_j^k) + (u_{j+1}^k, Q_j) - \|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq d_0\|u_j^k(.,t)\|_2\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2 + \widetilde{C}_j\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2 - \|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{d_0^2}{2}\|u_j^k(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 + \frac{\widetilde{C}_j^2}{2} + \frac{1}{2}\|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2 - \|u_{j+1}^k(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_j^k(.,t)\|_2^2 \leq \frac{d_0^2}{2}\|u_j^k(.,t)\|_2^2 + \frac{\widetilde{C}_j^2}{2}$$

integrando de 0 a $t < T$

$$\|u_j^k(.,t)\|_2^2 - \|u_j^k(.,0)\|_2^2 \leq T\widetilde{C}_j^2 + d_0^2\int_0^t \|u_j^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

así

$$\|u_j^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{0j}\|_2^2 + T\widetilde{C}_j^2) + d_0^2\int_0^t \|u_j^k(.,\tau)\|_2^2 d\tau,$$

por gronwall

$$\|u_j^k(.,t)\|_2^2 \leq (\|u_{0j}\|_2^2 + T\widetilde{C}_j^2)e^{d_0^2 t} \leq (\|u_{0j}\|_2^2 + T\widetilde{C}_j^2)e^{d_0^2 T} = M_j^2 = M_j(\|u_{0i}\|_2), \quad 0 \leq i \leq j.$$

Por tanto

$$\|u_j^k(.,t)\|_2 \leq M_j$$

□

Tenemos una estimativa en norma L^2, para todas las derivadas espaciales de la sucesión $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $0 \leq t \leq T$. $(T = T(\|_0\|_2))$
Sabemos que:

$$\|u_j^k(.,t)\|_\infty^2 \leq \|u_j^k(.,t)\|_2^2 + 2\|u_j^k(.,t)\|_2\|u_{j+1}(.,t)\|_2$$

entonces las funciones $u_j^k(x,t)$ son también acotadas en norma máximo, luego por la ecuación

$$u_j^k = -\widetilde{A}(u^{k-1})u_1^k + u_2^k$$

las derivadas con respecto a la variable temporal son también acotadas. Por tanto:

$$\|\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q}u^k(.,t)\|_\infty; \quad 0 \leq t \leq T.$$

donde $C(p,q)$ es independiente de k.

5.1.2 Segundo Paso: Existencia local de soluciones de (13).

Consideremos los sistemas (14). Sea

$$v = u^{k+1} - u^k, \quad w = u^k - u^{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
v_t &= (u_t^{k+1} - u_t^k \\
&= -\widetilde{A}(u^k)u_x^{k+1} + u_{xx}^{k+1} + \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k - u_{xx}^k \\
&= \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k - \widetilde{A}(u^k)u_x^{k+1} + u_{xx}^{k+1} - u_{xx}^k \\
&= \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^k - \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^{k+1} + \widetilde{A}(u^{k-1})u_x^{k+1} - \widetilde{A}(u^k)u_x^{k+1} + v_{xx} \\
&= \widetilde{A}(u^{k-1})(u_x^k - u_x^{k+1}) + (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(^k))u_x^{k+1} + v_{xx} \\
&= -\widetilde{A}(u^{k-1})v_x + (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1} + v_{xx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v(.,t),v(.,t)) &= (v(.,t),v_t(.,t)) \\
&= (v(.,t), -\widetilde{A}(u^{k-1})v_x + (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1} + v_{xx}) \\
&= -(v, \widetilde{A}(u^{k-1})v_x) + (v, (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1}) + (v, v_{xx}) \\
&\leq |-(v, \widetilde{A}(u^{k-1})v_x)| + |(v, (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1})| + |(v, v_{xx})|.
\end{aligned}
$$

Por la limitación global y desigualdad de valor medio, tenemos

$$
\|\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k)\| \leq d_1\|u^{k-1} - u^k\| = d_1\|w\|
$$

Observación 6.

$$
\begin{aligned}
|(v, (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1})| &= |\int_0^1 \langle v, (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1}\rangle dx| \\
&\leq \int_0^1 |\langle v, (\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k))u_x^{k+1}\rangle| dx \\
&\leq \int_0^1 \|v\|\|\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k)\|\|u_x^{k+1}\| dx \\
&\leq \|u_x^{k+1}\|_\infty \int_0^1 \|v\|\|\widetilde{A}(u^{k-1}) - \widetilde{A}(u^k)\| dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq d_1 \|u_x^{k+1}\|_\infty \int_0^1 \|v\|\|w\| dx \\
&\leq d_1 \|u_x^{k+1}\|_\infty (\int_0^1 \|v\|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 \|w\|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq d_1 \|u_x^{k+1}(.,t)\|_\infty \|v(.,t)\|_2 \|w(.,t)\|_2.
\end{aligned}
$$

□

Luego

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(.,t)\|_2^2 &\leq d_0\|v(.,t)\|_2\|v_x(.,t)\|_2 + d_1\|u_x^{k+1}(.,t)\|_\infty \|v(.,t)\|_2\|w(.,t)\|_2 - \|v_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{d_0^2}{4}\|v(.,t)\|_2^2 + \|v_x(.,t)\|_2^2 + \widetilde{C}_1\|v(.,t)\|_2\|w(.,t)\|_2 - \|v_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{d_0^2}{4}\|v(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\widetilde{C}^2\|v(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w(.,t)\|_2^2 \\
&= (\frac{d_0^2}{4} + \frac{1}{2}\widetilde{C}^2)\|v(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w(.,t)\|_2^2 \\
&= \widetilde{\widetilde{C}}\|v(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w(.,t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\frac{d}{dt}\|v(.,t)\|_2^2 \leq 2\widetilde{\widetilde{C}}\|v(.,t)\|_2^2 + \|w(.,t)\|_2^2
$$

Por lema de Gronwall tenemos:

$$
\|v(.,t)\|_2^2 \leq e^{\widetilde{\widetilde{C}}t}\{\|v(.,0)\|_2^2 + \int_0^t \|w(.,\tau)\|_2^2 d\tau\}, \quad 0 \leq t \leq T.
$$

Observación 7.

$$
\begin{aligned}
v(x,0) &= u^{k+1}(x,0) - u^k(x,0) \\
&= u_0(x) - u_0(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

entonces $\|v(,,0)\| = 0$ □

por tanto

$$\|v(.,t)\|_2^2 \leq e^{\tilde{\tilde{C}}t} \int_0^t \|w(.,\tau)\|_2^2 d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Esto es,

$$\|u^{k+1}(.,t) - u^k(.,t)\|_2^2 \leq e^{\tilde{\tilde{C}}t} \int_0^t \|u^k(.,\tau) - u^{k-1}(.,\tau)\|_2^2 d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

es decir

$$\|u^{k+1}(.,t) - u^k(.,t)\|_2^2 \leq C \int_0^t \|u^k(.,\tau) - u^{k-1}(.,\tau)\|_2^2 d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde C independe de k. Así por el lema de Picard tenemos que, $\{u^n(.,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en L^2. Como L^2 es completo entonces $\exists u(.,t) \in L^2$. Como

$$\max_{x,t} \left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u^k(x,t)\right| \leq C(p,q), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1$$

tal que $C(p,q)$ independe de k. Entonces existe una subsucesión $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ tal que $k_j \to \infty$ y

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u^{k_j}(x,t) \to \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u(x,t), \quad \text{cuando} \quad k_j \to \infty$$

en la norma máximo. Por tanto por el teorema 10 $u \in C^\infty$. Además

$$\lim_{k_j\to\infty} (u_t^{k_j+1} + \widetilde{A}(u^{k_j}) u_x^{k_j+1}) = \lim_{k_j\to\infty} u_{xx}^{k_j+1}$$

entonces

$$u_t + \widetilde{A}(u) u_x = u_{xx}$$

y

$$\lim_{k_j\to\infty} u^{k_j+1}(x,0) = u_0(x)$$

entonces

$$u(x,o) = u_0(x)$$

Por tanto u es una solución local de (13). Acabamos de probar la existencia de un tiempo $T_1 > 0$ y una solución de clase C^∞ $u = u(x,t)$ definido para $0 \leq t \leq T_1$. Como

$$\|u(.,T_1)\|_2 \leq C_0$$

Podemos usar la función $x \mapsto u(x,T_1)$ como nuevo dato inicial y aplicar el teorema de existencia local. La solución empezando con el dato inicial $u(.,T_1)$

existe en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T_2$. Poniendo las dos soluciojuntos tenemos una solución u de 13) definida para $0 \leq t \leq T_1+T_2$. El puimportante es que las estimativas

$$\|u(.,t)\|_2 \leq C_0, \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T_1 + T_2$$

implica que

$$\|u(.,T_1 + T_2)\|_2 \leq C_0$$

con algún constante C_0 como antes.Así usando el teorema de existencia local podemos hacer extender la solución para un intervalo de tiempo grande T. Esto muestra el teorema de existencia global de 13).Luego por la continuidad, la solución $u = u(x,t)$ de 13) está en $U_{\frac{3}{4}}$ para algún intervalo $0 \leq t \leq T$. Aqui $u = u(x,t)$ resuelve el sistema (9)-(10).

5.1.3 Tercer Paso: Unicidad de soluciones de (9).

Sean u, v dos soluciones, entonces

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx}$$

y

$$v_t + A(v)v_x = v_{xx}$$

$$u_t - v_t + A(u)u_x - A(v)v_x = u_{xx} - v_{xx}$$

si $w = u - v$, entonces

$$w_t + A(u)u_x - A(v)v_x = w_{xx} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} A(u)u_x - A(v)v_x &= A(u)u_x - A(u)v_x + A(u)v_x - A(v)v_x \\ &= A(u)w_x + (A(u) - A(v))v_x \end{aligned}$$

notemos que

$$|A(u) - A(v)| = |A(u - v)| = |A(w)| \leq |A||w| \leq C_1|w|.$$

$$|A(u) - A(v)| \leq C_1|w|$$

luego de (15) tenemos

$$w_t + A(u)w_t + (A(u) - A(v))v_x = w_{xx}$$

entonces

$$w_t = -A(u)w_x + A(-w)v_x + w_{xx}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w) &= (w,w_t) \\
&= (w, -A(u)w_x - A(w)v_x + w_{xx}) \\
&= -(w,(u)w_x) + (w, A(-w)v_x) + (w, w_{xx})
\end{aligned}$$

Observación 8.

$$\frac{d}{dx}(w,w_x) = (w_x,w_x) + (w,w_{xx})$$

$$(w,w_{xx}) = \frac{d}{dx}(w,w_x) - \|w_x(.,t)\|_2^2$$

como $(w_x, w) = (w, w_x)$*, entonces* $(w_x, w) = 0$*, luego*

$$(w, w_{xx}) = -\|w_x(.,t)\|_2^2$$

□

Así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w) &= -(w, A(u)w_x) + (w, A(-w)v_x) - \|w_x(.,t)\|_2^2 \\
&= -(w, A(u)w_x) + C_1\|w(.,t)\|_2^2\|v_x\|_\infty - \|w_x(.,t)\|_2^2 \\
&= C_2\|w(.,t)\|_2\|w_x(.,t)\|_2 + C_1\|v_x\|_\infty\|w(.,t)\|_2^2 - \|w_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{C_2}{\sqrt{2}}\|w(.,t)\|_2(\sqrt{2}\|w_x(.,t)\|_2) + C_1\|v_x\|_\infty\|w(.,t)\|_2^2 - \|w_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{C_2^2}{4}\|w(.,t)\|_2^2 + \|w_x(.,t)\|_2^2 + C_1\|v_x\|_\infty\|w(.,t)\|_2^2 - \|w_x(.,t)\|_2^2 \\
&= (\frac{C_2^2}{4} + C_1\|v_x\|_\infty)\|w(.,t)\|_2^2 \\
&= C_3\|w(.,t)\|_2^2
\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{d}{dt}\|w(.,t)\|_2^2 \leq 2C_3\|w(.,t)\|_2^2$$

integrando de 0 $t < T$ y teniendo en cuenta que $w(x,0) = 0$

$$\|w(.,t)\|_2^2 - \|w(.,0)\|_2^2 \leq 2C_3 \int_0^t \|w(.,s)\|_2^2 ds$$

$$\|w(.,t)\|_2^2 \leq 2C_3 \int_0^t \|w(.,s)\|_2^2 ds$$

por Gronwall, tenemos

$$\|w(.,t)\|_2^2 \leq 0e^{2C_3 t}; \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T],$$

entonces

$$w(x,t) = 0; \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T], \quad \text{para todo} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

por tanto

$$u(x,t) = v(x,t).$$

Así demostramos el teorema 2. □

5.2 Teorema de Existencia Global.

Teorema 14 (Existencia Global). *Supongamos que $|A(u)| \leq K_1(1+|u|)$ y que la solución $u = u(x,t)$ de (9)-(10) está definida para $0 \leq t \leq T < \infty$ e satisfaciendo*

$$\|u(.,t)\|_2 \leq K_2; \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t < T,$$

$$\int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_2^2 d\tau \leq K_3; \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t < T.$$

Enonces

$$\sup_{0 \leq t < T} \|u(.,t)\|_{H^1} \quad y \quad así \quad \sup_{0 \leq t < T} \|u(.,t)\|_\infty$$

son finitos; Así $u = u(x,t)$ puede ser extendida para todo $t \geq 0$, Además

$$\|u(.,t)\|_{H^1} \leq K_4; \quad 0 \leq t < T$$

donde K_4 solo depende de K_1, K_2, K_3 y $\|u(.,0)\|_{H_1}$, pero no depende de T.

Prueba del teorema 7.

Observación 9.

$$u_t = -A(u)u_x + u_{xx}$$
$$u_{tx} = -(A(u)u_x)_x + u_{xxx}$$

□

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x(.,t)\|_2^2 &= (u_x, u_{xt}) \\
&= (u_x, -(A(u)u_x)_x + u_{xxx}) \\
&= -(u_x, (A(u)u_x)_x) + (u_x, u_{xxx})
\end{aligned}$$

Observación 10.

$$\frac{d}{dx}(u_x, u_{xx}) = (u_{xx}, u_{xx}) + (u_x, u_{xxx})$$

$$(u_x, u_{xxx}) = \frac{d}{dx}(u_x, u_{xx}) - \|u_{xx}(.,t)\|_2^2$$

pero

$$(u_x, u_{xx}) = -(u_{xx}, u_x)$$

entonces

$$(u_x, u_{xx}) = 0.$$

□

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x(.,t)\|_2^2 &= -(u_x, (A(u)u_x)_x) - \|u_{xx}(.,t)\|_2^2 \\
&= (u_{xx}, -(A(u)u_x) - \|u_{xx}(.,t)\|_2^2 \\
&\leq K_1(1 + \|u(.,t)\|_\infty)\|u_x\|_2\|u_{xx}(.,t)\|_2 - \|u_{xx}(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{K_1^2}{4}(1 + \|u(.,t)\|_\infty)^2\|u_x\|_2^2 + \|u_{xx}(.,t)\|_2^2 - \|u_{xx}(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{K_1^2}{2}(1 + \|u(.,t)\|_\infty)^2\|u_x\|_2^2
\end{aligned}$$

Observación 11.

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$\square$

Sabemos que

$$\|u(.,t)\|_\infty^2 \leq 2\|u(.,t)\|_2\|u_x(.,t)\|_2 + \|u(.,t)\|_2^2$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x(.,t)\|_2^2 &\leq \frac{K_1^2}{2}(1 + 2\|u(.,t)\|_2\|u_x(.,t)\|_2 + \|u(.,t)\|_2^2)\|u_x(.,t)\|_2^2 \\
& \frac{K_1^2}{2}\|u_x(.,t)\|_2^2 + K_1^2\|u(.,t)\|_2\|u_x(.,t)\|_2^3 + \frac{K_1^2}{2}\|u(.,t)\|_2^2\|u_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{K_1^2}{2}\|u_x(.,t)\|_2^2 + K_1^2K_2\|u_x(.,t)\|_2^3 + \frac{K_1^2}{2}K_2^2\|u_x(.,t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{K_1^2}{2}(1 + K_2^2)\|u_x(.,t)\|_2^2 + K_1^2K_2\|u_x(.,t)\|_2^3
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\frac{d}{dt}\|u_x(.,t)\|_2^2 \leq 2\alpha\|u_x(.,t)\|_2^2 + 2\beta\|u_x(.,t)\|_2^3$$

donde

$$\alpha = \frac{K_1^2}{2}(1 + K_2^2), \quad \beta = K_1^2K_2$$

sea

$$y(t) = \|u_x(.,t)\|_2; \quad 0 \leq t < T$$

entonces mostramos que

$$\frac{d}{dt}y^2(t) = 2y(t)y'(t) \leq 2\alpha y^2(t) + 2\beta y^3(t).$$

Si $y(t) = 0$ entonces $u_x(x,t) = 0$, lo que implica que $u(x,t) = u(t)$ por tanto la conclusión se cumple.

Si $y(t) \neq 0$ entonces

$$y'(t) \leq \alpha y(t) + \beta y^2(t) \tag{16}$$

Para acotar $y(t)$, fijemos un tiempo $0 \leq t < T$ con $y(t) > 1$.

Caso 1: Si existe $t_0 < t$ con $y(t_0) = 1$. Sea T_0 el máximo de los t_0, entonces $y(\tau) > 1$ para $T_0 < \tau \leq t$ integrando de T_0 a $t < T$ en (16) obtenems que

$$y(t) - y(T_0) \leq (\alpha + \beta) \int_{T_0}^{t} y^2(\tau) d\tau$$

por tanto

$$y(t) \leq 1 + (\alpha + \beta) K_3$$

Caso 2: Para $0 \leq \tau < t$, tenemos que $y(\tau) > 1$. Integrando de 0 a t, en (16) tenemos que

$$y(t) \leq y(0) + (\alpha + \beta) K_3$$

por tanto

$$\|u_x(.,t)\|_2 \leq K_5; \quad \forall\ 0 \leq t < T$$

como $u(.,t), u_x(.,t) \in L^2$ entonces $u(.,t) \in H^1$ y

$$\|u(.,t)\|_{H^1}^2 = \|u(.,t)\|_2^2 + \|u_x(.,t)\|_2^2$$

entonces

$$\|u(.,t)\|_{H^1} \leq K_4, \quad \forall\ 0 \leq t < T$$

luego

$$\sup_{0 \leq t < T} \|u(.,t)\|_{H^1} \leq K_4$$

Sabemos que:

$$\|u(.,t)\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x,t)|$$

y

$$\|u(.,t)\|_\infty^2 \leq \|u(.,t)\|_2^2 + 2\|u(.,t)\|_2 \|u_x(.,t)\|_2$$

entonces

$$\|u(.,t)\|_\infty \leq K_6, \quad \forall\ 0 \leq t < T$$

luego

$$\sup_{0 \leq t < T} \|u(.,t)\|_\infty \leq K_6$$

□

7. Discusión

El método empleado en este trabajo puede ser dirigido y aplicado en diversas aplicaciones.

Una de las motivaciones para el estudio de este problema es la aplicación de los resultado en las ecuaciones de la dinámica de los gases.

De acuerdo a Smoller [14], para obtener soluciones globales de una cierta clase de problemas parabólicos no lineales, la hipótesis natural es suponer que el sistema admite regiones acotados invariantes, esto es, regiones acotados $\sum$ en el espacio de fase, con la propiedad de que si el dato inicial está en $\sum$ entonces la solución permanece siempre en $\sum$. Así $\sum$ impone una acotación a priori en la norma del supremo de la solución, lo que permitirá que las soluciones locales sean extendidas para todo $t > 0$. En general, esta técnica no se aplica para las ecuaciones de la dinámica de los gases con términos disipativos de viscosidad y conductividad térmica, pues puede existir regiones invariantes para estas ecuaciones y estas regiones son generalmente no acotadas, y así no podemos concluir que las soluciones locales sean acotadas apriori.
Este trabajo es un caso del trabajo desarrollado en [15] Existencia de Soluciones Regulares Periódicas para una Clase de Sistemas Parabólicos no Lineales. Informe Final de investigación. Resolución de consejo de facultad N° 089-2011-CF-FCNM. Resolución Vicerrectoral N° 090-2011-VRI. 2011.
Un resultado interesante sería aplicar las técnicas desarrolladas en este trabajo para demostrar la existencia global de soluciones para problemas de valores iniciales con flujo multifásico en medios porosos. En esta dirección, para un problema de valor inicial particular fue probado por J. C. da Mota: en su tesis de doctorado "solucoes Fundamentais para Escoamentos Térmico de Fluidos Multi´ásicos em Meios Porosos. PUC-RJ. 1988"la existencia local de soluciones, mas la existencia global aún no ha sido probada.

Referenciales

[1] KHOAN VO - K. *Distributions Analyse de Fourier opérateurs aux. Dérivées Partielles*, Paris: Vuibert Tome II, 1972.

[2] IÓRIO RAFAEL J. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* New York: Cambrigde studies In Advanced Mathematics 70, 2001.

[3] FOLLAND GERALD B. *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications.* New York: John Wiley & Sons, INC, Second Editions. 1999.

[4] KREISS H. O.-LORENZ J., *Initial - Boundary value problems and the Navier - Stockes Equations.* Boston: Academic Press, INC, 1989.

[5] ZEIDLER E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol. IIA, IIB, 1989.

[6] PROTTER M.-WEINBERG H. *Maximun Principles in Differential Equations.* Prentice-hall, INC, 1967.

[7] TEMAN R. *Navier - Stokes Equations* . North - Holland, 1985.

[8] KRESS R. *Linear Integral Equations.* Springer - Verlag, 1989.

[9] BREZIS H. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Paris: Editorial Masson., 1968

[10] HAGSTROM T.-LORENZ J. *All - Time Existence of Smooth Solutions to PDEs of mixed type and the Invariant Subspace of Uniform States.* Advances in Applied Mathematics, 1995, Vol 16, 219-257.

[11] LADYZESKAYA O.-SOLONIKOV V.-URAL´CEVA N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type.* Transaction of Mathematical Monograph. Vol 23, 1988.

[12] EVANS, L.C. *Partial Differential Equations.* American Math. Society, 2000.

[13] MÁLEK J., NECAS J., ROKYTA M. AND RUZICKA M. *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs.* Chapman Hall, 1996.

[14] SMOLLER J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion equations.* New York: Springer-Verlag, 1983.

[15] MORENO VEGA, DIONICIO ORLANDO. *Existencia de Soluciones Regulares Periódicas para una Clase de Sistemas Parabólicos no Lineales.* Informe Final de investigación. Resolución de consejo de facultad N° 089-2011-CF-FCNM. Resolución Vicerrectoral N° 090-2011-VRI, Bellavista Callao: UNAC, 2011.

[16] JOHN, F. *Formation of irregularities in one-dimensional nonlinear wave propagation.* Comm. Pure Appl. Math., 1970 Vol 27, pp. 377-405.

[17] LAX, P. D. *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations.* J. Math. Phys, 1964. Vol. 5, pp. 611-613.

[18] LAX, P. D. *Hyperbolic systems of conservation laws II* . Comm. Pure Appl. Math., 1957, Vol 10, pp. 537-556.

[19] GLIMM, J. *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations.* Comm. Pure Appl. Math., 1965, Vol 18, pp. 695-715.

[20] DiPERNA, R. *Measure-valued solutions to conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal., 1985, Vol 80, pp. 223-270.

[21] MAJDA, A. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Applied Mathematical Sciences, New York: Springer-Verlag, Vol. 53,1984.

[22] COURANT, R. and FRIEDRICHS, K. O. *Supersonic flow and shock waves*, New York, Interscience Publishers, 1948.

[23] WHITHAM, G. B. *Linear and nonlinear waves*, New York, Interscience Publishers, 1974.

[24] LANDAU, L. D., and LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*, Translation from the Russian, Pergamon Press, Oxford, 1959.

[25] GILBARG, D. *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer.* Amer. J. Math., 1951, Vol 73, pp. 256-274.

9. Apéndice

Para teoremas de existencia local no hay ninguna diferencia esencial entre ecuaciones lineales y no lineales. Sin embargo el teorema de existencia global requiere acotaciones globales. Un tal resultado para sistemas parabólicos se da en el teorema 14. Otros resultados se pueden encontrar en Smoller [14] y en Ladyzhenskaya, Solonnikov, y Uralceva [11]. Se sabe poco para el caso no viscoso $\varepsilon = 0$. No podemos esperar la existencia global. Las soluciones clásicas dejan de existir más allá de un cierto tiempo $T > 0$, véase [16], [17]. Si podemos escribir las ecuaciones en forma de conservación

$$u_t + (g(u))_x = 0, \quad (g(u))_x = A(u)u_x$$

entonces se puede introducir de nuevo las soluciones débiles. Una función (no necesariamente suave) v es una solución débil si

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_t v + \phi_x g(v))dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)v(x,0)dx = 0$$

Para todo $\phi \in C_0^{\infty}$. Las soluciones débiles no son únicos. En [18] introdujeron condiciones de entropía de los sistemas. En [19] se demostró que siempre hay una solución débil global que satisface estas condiciones de entropía, proporcionando los datos iniciales suficientemente cerca a un vector constante. Sin embargo, no se sabe si la solución es única. Para los resultados posteriores nos referimos a [20] y [21]. Un ejemplo importante es el sistema de las leyes de conservación de la dinámica de gases:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$$
$$(\rho E)_t + [\rho E u + pu]_x = 0, \quad E = e + \frac{1}{2}u^2.$$

Donde ρ, u, p, e denota la densidad, velocidad, presión, y la energía interna, respectivamente. También, una ecuación de estado que relaciona e, ρ, p tiene que ser especificado. Muchas personas han estudiado estas ecuaciones en los últimos 150 años, utilizando menos maquinaria matemática. ver [22], [23], y [24]. Poco se sabe sobre el comportamiento de las soluciones de (9) cuando $\varepsilon \to 0$. Sin embargo, Gilbarg (1951) [25] demostró que las ecuaciones de la dinámica de los gases viscosos permiten ondas viajeras que convergen para $\varepsilon \to 0$ a una solución débil de la ecuación límite. Para otros resultados referimos a Smoller (1983) [14].

10. Anexo

Lema 15. *(Lema de Gronwall) Sea $y \in C^1([0,T])$, $\psi \in C([0,T])$ satisfaciendo*

$$y' \leq cy(t) + \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

para algún $c \geq 0$. Entonces

$$y(t) \leq e^{ct}\{y(0) + \int_0^t |\psi(\tau)|d\tau\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Demostración. Para la función $z(t) = e^{-ct}y(t)$ se cumple que

$$z'(t) = -ce^{-ct}y(t) + e^{-ct}y'(t) \leq e^{-ct}\psi(t)$$

Integrando obtenemos

$$z(t) - z(0) \leq \int_0^t |\psi(\tau)|d\tau$$

ahora consideremos

$$y(t) = e^{ct}z(t)$$

entonces

$$y(t) \leq e^{ct}(z(0) + \int_0^t |\psi(\tau)|d\tau) \leq e^{ct}(y(0) + \int_0^t |\psi(\tau)|d\tau)$$

□

Lema 16. *(Lema de Picard) Sea $\eta^k(t)$, $k = 0, 1, \cdots$ denota una sucesión de funciones continuas no negativas los cuales cumplen las desigualdades*

$$\eta^{k+1}(t) \leq a + b\int_0^t \eta^k(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con a, b constantes no negativas. Entonces

$$\eta^k(t) \leq a\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{b^\nu t^\nu}{\nu!} + \frac{b^k t^k}{k!} \max_{0\leq\tau\leq t} \eta^0(\tau),$$

para $0 \leq t \leq T$ y $k = 0, 1, \cdots$. En particular la sucesión $\eta^k(t)$, $0 \leq t \leq T$, es uniformemente acotado. Si $a = 0$, entonces la sucesión converge uniformemente para cero.

Demostración. La Demostración lo haremos por inducción. Para $k = 0$, la estimativa es cierto. Supongamos que la estimativa es válida para el índice k. Entonces probaremos para el índice $k + 1$. Sabemos por hiótesis que

$$\eta^{k+1}(t) \leq a + b \int_0^t \eta^k(\tau)d\tau$$

entonces

$$\eta^{k+1}(t) \leq a + b \int_0^t a \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{b^\nu t^\nu}{\nu!} + \frac{b^k t^k}{k!} \max_{0\leq\tau\leq t} \eta^0(\tau)d\tau$$

Integrando tenemos que

$$\eta^{k+1}(t) \leq a + a \sum_{\nu=1}^{k} \frac{b^\nu t^\nu}{\nu!} + \frac{b^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t} \eta^0(\tau),$$

de aqui tenemos que

$$\eta^{k+1}(t) \leq a \sum_{\nu=0}^{k} \frac{b^\nu t^\nu}{\nu!} + \frac{b^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!} \max_{0\leq\tau\leq t} \eta^0(\tau),$$

□

Sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\mathbb{T} \times (0, \infty))$ una sucesión de funciones. Para todo entero no negativo p, q, existe una constante $C(p, q)$ independiente de m tal que

$$\max_{x,t} |\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_m(x,t)| \leq C(p,q)$$

Teorema 17. *Existe una función $u \in C^\infty$, y una sucesión $m_j \to \infty$ con*

$$\max_{x,t} |\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_{m_j}(x,t) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u(x,t)| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad m_j \to \infty.$$

Es decir existe una subsucesión de u_m convergiendo junto con todas sus derivadas en $C^\infty(\mathbb{T} \times (0, \infty))$.

Demostración. Por el Teorema Arzela-Ascoli existe una una función u continua y una sucesión $m = m_j \to \infty$ con

$$|u_m - u|_\infty \to 0, \quad \text{cuando} \quad m = m_j \to \infty$$

Ahora aplicando el resultado Arzela-Ascoli a la sucesión

$$\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x}$$

y obtenemos la existencia de una función continua v y una sucesión $j_k \to \infty$ con

$$|\frac{\partial u_m}{\partial x} - v|_\infty \to 0, \quad \text{cuando} \quad m = m_{j_k} \to \infty$$

desde que

$$u_m(x,t) - u_m(0,t) = \int_0^x \frac{\partial u_m(\tau,t)}{\partial x} d\tau$$

llegamos a la conclusión de que para $m = m_{j_k} \to \infty$,

$$u(x,t) - u(0,t) = \int_0^x v(\tau,t) d\tau$$

Por lo tanto u es diferenciable en x y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v$$

Mostramos que

$$|\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}|_\infty \to 0, \quad \text{cuando} \quad m = m_j \to \infty$$

Es decir tenemos la convergencia cuando $m_j \to \infty$ no sólo para la subsucesión m_{j_k}. Este se desprende de un argumento general que se formula para una sucesión de números reales. La generalización a una sucesión de funciones es sencillo. Dado que todos los límites posibles de subsucesiones de $\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x}$ es igual a $\frac{\partial u}{\partial x}$ obtenemos el resultado. Claramente la existencia de $\frac{\partial u}{\partial t}$ y la convergencia

$$|\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}|_\infty \to 0, \quad \text{cuando} \quad m = m_j \to \infty$$

se sigue de la misma manera. También, podemos aplicar los argumentos anteriores para $\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x}$ y diferenciabilidad de $\frac{\partial u}{\partial x}$ por inducción. $\square$