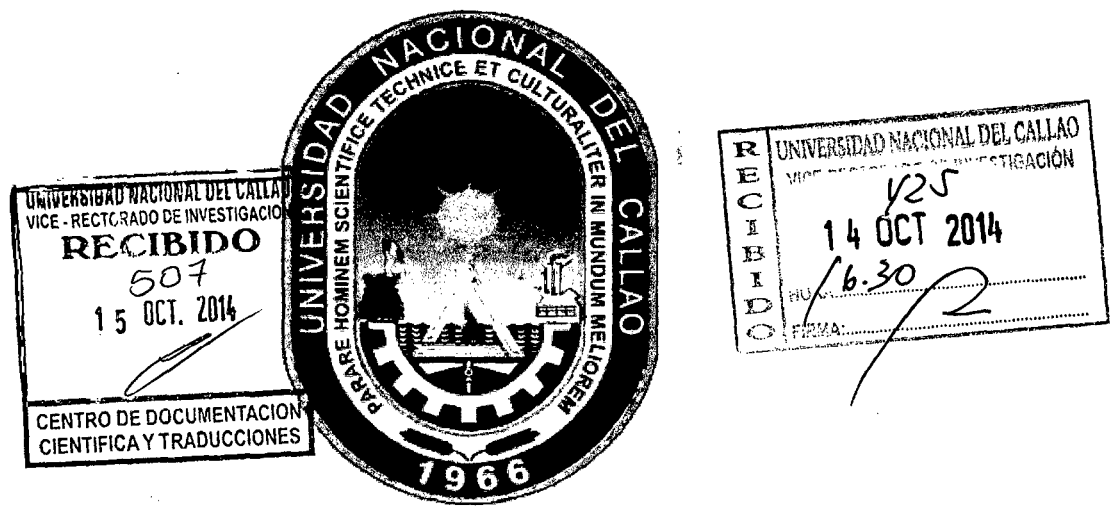


119



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN**

OCT 2014



INFORME FINAL

**“APLICACIONES DE LOS SISTEMAS
MATRICIALES EN
DINÁMICA DE POBLACIONES”**

Lic. : ABSALÓN CASTILLO VALDIVIESO

(Periodo de ejecución: 01.07.2013 al 30.06.2014)

Resolución Rectoral N° 700-2013-R

**Callao - Perú
2014**

Índice

0. Índice	1
1. Resumen	3
2. Introducción	5
3. Marco Teórico	6
3.1 Espacios vectoriales matriciales.....	6
3.2 Transformaciones lineales en espacios pre-hilbertianos	19
3.3 Sistemas matriciales escalares.....	32
3.4 Ecuaciones diferenciales matriciales y sistemas dinámicos.....	37
3.5 Sistemas dinámicos lineales y no – lineales clasificados.....	49
4. Materiales y Métodos	53
4.1 Materiales	53
4.2 Métodos	53
5. Resultados	54
5.1 Sistemas matriciales en dinámica de poblaciones.....	54
5.1.1. Modelos matriciales de crecimiento poblacional.....	54
5.1.2. Crecimiento poblacional de una especie biológica.....	57
5.1.3. El modelo poblacional de Leslie	63
5.2. Análisis y estructura de la dinámica de poblaciones.....	70
5.2.1. Explosión demográfica y colapso poblacional.....	70

5.2.2. Caracterización de las poblaciones de especies en regiones naturales.....	72
5.2.3. Los modelos de crecimiento exponencial y crecimiento logístico.....	77
5.3. Dinámica de poblaciones en las Ciencias Naturales	86
5.3.1. Masas vibrantes o resortes acoplados	87
5.3.2. El problema de los péndulos suspendidos	91
5.3.3. Instalación de grandes circuitos cerrados	95
5.3.4. Mezcla de multicompartimientos.....	99
5.3.5 El problema poblacional genético.....	102
5.4 Dinámica no-lineal de poblaciones	109
5.4.1. Sistemas matriciales no – lineales.....	110
5.4.2. Caracterización y análisis de sistemas dinámicos no–lineales.....	112
5.4.3 Inestabilidad y puntos de equilibrio para sistemas no–lineales.....	119
5.4.4 Dinámica biológica y el problema predador–presa de Volterra.....	127
5.5 Modelos de población con comportamiento caótico.....	133
5.5.1 Caos en los sistemas dinámicos no–lineales	134
5.5.2 Secciones temporales de Poincaré.....	135
6. Discusión.....	136
7. Referencias Bibliográficas	137
8. Apendice	139
9. Anexos	141

1. Resumen

El estudio y discusión de los problemas del Álgebra Lineal, muy en especial de la Teoría Matricial, ha sido hasta hace muy poco un tema de análisis que estaba confinado sólo a los estudiantes y profesionales de Física y Matemática, y a aquellos que necesitaban conocimiento de las matrices para investigar en áreas técnicas como Estadística Multivariada, Economía Matemática, Cadenas de Markov. El Álgebra Lineal se estudia hoy en día en muchas disciplinas debido a la invención de las computadoras de alta velocidad y al aumento en las aplicaciones de la Matemática en campos que no son técnicos por tradición.

Al realizar este trabajo se tuvo en mente dos metas: intentar volver accesibles las aplicaciones de los sistemas lineales y no-lineales en dinámica de poblaciones para diversas áreas de las Ciencias Naturales e Ingeniería, y la otra meta convencer a los estudiantes y profesionales de la importancia del cálculo matricial en sus investigaciones. Citamos algunos ejemplos: la multiplicación de matrices al contagio de una enfermedad, grandes sistemas como el modelo de insumo-producto de Leontief, el modelo de crecimiento de población, entre otros. El presente trabajo consiste en el estudio y diseño de los modelos matriciales aplicados en procesos que dependen de varios factores y que poseen una dinámica poblacional discreta o continua, medida en el tiempo. Elaborar estos diseños es todo un reto en la Matemática, pues demandan un verdadero y proficuo estudio e investigación, pero una vez logrados tienen trascendencia por su eficiencia y rapidez en sus aplicaciones. Nos iniciamos en este proyecto definiendo los espacios matriciales y las transformaciones lineales y no-lineales que definen a los sistemas dinámicos. Sobre esta base teórica analizamos los primeros modelos de crecimiento poblacional, como el modelo matricial de Leslie, el modelo de Crecimiento exponencial y el modelo matricial logístico; las especies biológicas son los individuos que más desarrollan una dinámica de población de tal forma que con ellas realizamos una mayor atención a sus ecuaciones dinámicas. En lo que sigue hacemos un desarrollo cuidadoso de la

teoría, la técnica, las aplicaciones y la geometría de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no-lineales, principalmente veremos aquellos sistemas autónomos que son estables en sus soluciones cuando se determinan los puntos de equilibrio.

Las ecuaciones diferenciales no-lineales no se resuelven exactamente en general, de modo que para ello se requieren de técnicas especiales, en consecuencia los sistemas no-lineales de ecuaciones diferenciales también requieren técnicas especiales si una solución exacta es posible. Se tienen entonces los métodos de eliminación, de transformación de variables, de linealización y la serie de Taylor.

Los sistemas físicos y biológicos están muy vinculados a sistemas de ecuaciones diferenciales no – lineales y muchos de ellos conducen a procesos caóticos, los cuales pueden ser controlados, de modo que se puedan estudiar regularmente los sistemas dinámicos correspondientes. A la fecha actual el caos en estos sistemas se encuentra en plena investigación y no existen métodos claros y precisos para lograr soluciones satisfactorias.



2. Introducción

Los sistemas dinámicos como modelos matriciales de las dinámicas poblacionales, constituyen un problema en la actualidad, no porque se obtengan soluciones a muchos de ellos o se conozcan algunos métodos eficaces para resolverlos, sino más bien todo lo contrario, dado que existen problemas en abundancia, surgiendo en las ciencias e ingeniería que demandan diseñar métodos muy generales que incluyan pasos muy elaborados bajo condiciones previstas. Estas dificultades para formular modelos poblacionales es de importancia en el Análisis Matricial pues considera la geometría de los sistemas lineales y no-lineales ensayando las soluciones a través de las trayectorias del plano fase. El caso de mayor aplicación es el modelo de crecimiento poblacional; supóngase que para una especie dada la población en una hora, o en una semana, o en un año resulta ser un múltiplo constante de la población anterior, es decir $\bar{p}_n = A\bar{p}_{n-1}$ o en general $\bar{p}_n = A^n \bar{p}_0$, esto determina una dinámica de especies que crecen o decrecen según los factores que surgen del medio en que habitan. Si las especies consisten en pájaros tendremos el modelo de crecimiento de Leslie, que es uno de los primeros modelos que surgen en la dinámica de pájaros. De otra parte, el avance en la investigación de las ecuaciones diferenciales en los tiempos actuales ha concluido que los sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo lineal pueden resolverse por varios métodos matriciales cuando tenemos la representación $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ que es un sistema dinámico que formula problemas diversos. En el trabajo se ha considerado varios problemas notables por su naturaleza dinámica, tenemos por ejemplo: la población de masas que vibran sujetas a resortes, la población de muchos péndulos que se encuentran suspendidos unos con otros; citamos el problema poblacional genético que contempla las leyes de la herencia a partir de los trabajos investigados por el monje Gregorio Mendel, quien experimentó con plantas de chícharo, obteniéndose como resultado leyes muy generales que controlan la trasmisión de partículas llamadas genes. Cuando tenemos un sistema dinámico de modelo no-lineal, el asunto tiene otro tipo de estudio, presenta otro enfoque, en el cual se tiene que desarrollar una teoría geométrica de trayectorias y analizar el comportamiento de ellas en el plano o en el espacio. Las funciones de Liapunov son herramientas para el análisis cualitativo de las soluciones en una dinámica no-lineal. Asimismo, se estudia los sistemas de Lorenz y Sistemas oscilatorios de Duffing de gran aplicación en la Física Moderna.

3. Marco Teórico

El Álgebra Lineal es un área de la Matemática que se ocupa del estudio de los espacios vectoriales y de las transformaciones lineales entre ellos. Cuando ocurre que los espacios tienen dimensiones finitas, las transformaciones lineales poseen matrices. También poseen matrices las formas bilineales y en particular, las formas cuadráticas. De esta manera, el Álgebra Lineal, además de vectores y transformaciones lineales, opera también con matrices y operadores lineales. En la presente sección, y a modo de tópicos, se exponen las nociones básicas de las transformaciones lineales que se traducen en hechos no triviales sobre matrices, principalmente en la formación de sistemas lineales, los cuales serán de gran utilidad en los problemas de dinámica de poblaciones.

3.1 Espacios vectoriales matriciales

Un espacio vectorial V es un conjunto no vacío, cuyos elementos son llamados vectores, en el cual están definidas dos aplicaciones llamadas operaciones, que consisten en la adición, tal que a cada par de vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ hace corresponder el vector $\bar{u} + \bar{v} \in V$, que es la suma de \bar{u} y \bar{v} ; y la multiplicación por un escalar $\alpha \in K$, el cuerpo de los números reales o complejos, tal que al par (α, \bar{v}) hace corresponder un vector $\alpha \bar{v}$ llamado producto de α y \bar{v} . Estas operaciones deben satisfacer, para cualesquiera $\alpha, \beta \in K$ y $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ los axiomas de espacio vectorial:

- ✓ Conmutatividad: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
- ✓ Asociatividad: $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}); (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v})$
- ✓ Vector nulo: existe un vector $\bar{0} \in V$ llamado vector cero, tal que $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$, $\bar{0} + \bar{v} = \bar{v}; \forall \bar{v} \in V$



- ✓ Inverso aditivo: para $\bar{v} \in V$ existe $-\bar{v} \in V$, llamado inverso aditivo de \bar{v} , tal que $(-\bar{v}) + \bar{v} = \bar{0}$; $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
- ✓ Distributividad: $(\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$; $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$
- ✓ Multiplicación por 1: $1\bar{v} = \bar{v}$; $\forall \bar{v} \in V$

En Álgebra Lineal existen muchos espacios vectoriales V sobre cuerpos K ; como ilustración tenemos:

Ejemplos:

El conjunto R^n que representa el espacio vectorial euclidiano n dimensional, los elementos son listas ordenadas $\bar{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; $\bar{v} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de números reales.

Los elementos del espacio vectorial R^∞ son las sucesiones de números reales $\bar{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$; $\bar{v} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$. El elemento cero de R^∞ es la sucesión nula $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ y el número aditivo de $\bar{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ es $-\bar{u} = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n, \dots)$.

RO

Considérese X un conjunto no vacío cualquiera. Definimos el conjunto $F(X, R)$ de todas las funciones reales $f, g: X \rightarrow R$ que se convierte en un espacio vectorial cuando se definen las operaciones de modo natural:

$$(f, g)(x) = f(x) + g(x); (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in R$$

Cuando $X = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $F(X, R) = R^n$, y si $X = N$ los números naturales entonces $F(X, R) = R^\infty$. Ahora bien, si el conjunto $X = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ tendremos $F(X, R) = M(m \times n)$ el espacio vectorial de las matrices reales de m filas y de n columnas denotadas por $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} \in R$ tal que $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$, ubicándose en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz.

En símbolos:

$$M(m \times n) = \{A = (a_{ij}) / 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n, a_{ij} \in R\}$$

El vector $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in R^n$ es el i -ésimo vector de la matriz A y el vector $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in R^m$ es el j -ésimo vector columna de A . así que $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$ y $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la suma y producto de $M(m \times n)$. Se escribe la matriz nula $0 = (0) \in M(m \times n)$ y el inverso aditivo de $A = (a_{ij})$ por $-A = (-a_{ij})$. De otra parte, si tenemos $F(X, C)$ de modo que $X = \{(m, n) / m, n \in N\}$, entonces es $F(X, C)$ el espacio vectorial de matrices complejas de m filas y n columnas. A continuación presentamos un subconjunto de $M(m \times n)$ que son los subespacios vectoriales matriciales. En efecto, desde una perspectiva general, un subespacio vectorial del espacio V es un subconjunto $U \subset V$ que, relativamente a las operaciones de V , es además un espacio vectorial. Los subespacios forman una valiosa fuente de ilustraciones de espacios vectoriales porque poseen la misma estructura. Veamos esto, sea $V = M(m \times n)$ el espacio vectorial de matrices reales de m filas y n columnas, un subespacio vectorial de V es un subconjunto $U \subset M(m \times n)$ con las propiedades inherentes:



- (i) $0 = (0) \in U$
- (ii) Si $A, B \in U$ entonces $A + B \in U$
- (iii) Si $A \in U$ entonces $\forall \alpha \in P$ es $\alpha A \in U$

Se sigue que, si $A, B \in U$ y $\alpha, \beta \in R$ entonces $\alpha A + \beta B \in U$. En general, dados $A_1, \dots, A_m \in U$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in R$ se tiene que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m \in U$. El conjunto $\{0 = (0, 0)\}$ y el espacio total V constituyen los llamados subespacios triviales de $V = M(m \times n)$. Asimismo, el conjunto $U = \{\alpha A / \alpha \in R\}$ de todos los múltiplos de A es un subespacio vectorial de $V = M(m \times n)$, se llama la recta matriz que pasa por la matriz origen y contiene a A . En lo que sigue, construimos un subespacio basado en hiperplanos de un sistema lineal de ecuaciones.

Veamos: sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, el conjunto H de todos los vectores $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ tales que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ es un subespacio de R^n , cuando $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, el subespacio H consisten en R^n . En cambio, si al menos un $a_i \neq 0$, entonces H se llama un hiperplano de R^n que pasa por el origen. Por tanto, el conjunto de vectores $\bar{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ cuyas coordenadas satisfacen las m condiciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Es un subespacio vectorial de R^n , constituido por la intersección $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m$ de los hiperplanos F_i definidos, por cada una de las ecuaciones anteriores.

Sea X un subconjunto del espacio de matrices $V = M(m \times n)$. El subespacio vectorial de V generado por X es, por definición, el conjunto de todas las combinaciones lineales: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m$ de vectores matrices $A_1, \dots, A_m \in X$. Este conjunto que se forma con vectores de X es, en efecto, un subespacio vectorial, denotado por $S(X)$. Sucede que $S(X) \supset X$ y es el menor subespacio de $V = M(m \times n)$ que contiene a X , cuando X ya es un subespacio, entonces $S(X) = X$, más todavía, si $S(X) = V$ se dice que X es un conjunto de generadores de $V = M(m \times n)$.

De modo explícito, X es un conjunto de generadores de $V = M(m \times n)$ si todo $\bar{w} \in V$ puede escribirse como una combinación lineal $\bar{w} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m$ de

$A_1, \dots, A_m \in X$. El espacio matricial $M(m \times n) = \{A = (a_{ij}) / a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ tiene como conjunto de generadores dado por

$$X = \{E_{ij} = ({}_0 1^0) \in M(m \times n) / 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$$

donde E_{ij} tiene el elemento $1 \in R$ ubicado en la i -ésima fila y la j -ésima columna, el resto de sus elementos son todos ceros. Por tanto, cualquier matriz $A \in M$ se escribe de la forma:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + \dots + a_{1n}E_{1n} + \dots + a_{m1}E_{m1} + a_{m2}E_{m2} + \dots + a_{mn}E_{mn}$$

$$A = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} E_{ij}$$

Luego, expresamos $M(m \times n) = S(X)$ en que $X \subset M(m \times n)$. Por cierto: $M(m \times n)$ sobre R ó C tiene infinitud de conjuntos X generadores.

Ilustramos estas ideas con el siguiente ejemplo: El sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$


posee una solución (x_1, \dots, x_n) si y solamente si, el vector $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ es combinación lineal de los vectores o matrices columnas:

$$\bar{v}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \dots, \bar{v}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

de la matriz $A = (a_{ij})$. En efecto, estas ecuaciones significan que:

$$\bar{b} = x_1 \bar{v}_1 + \dots + x_n \bar{v}_n$$

De manera particular, si los vectores columnas $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ pudieran generar a R^m , el sistema posee solución, sea cual fuera el segundo miembro \bar{b} .

Por otra parte, sean U_1 y U_2 subespacios vectoriales de $V=M(m \times n)$, el subespacio vectorial de $V=M(m \times n)$ generado por la reunión $U_1 \cup U_2$ es el conjunto de sumas $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ donde $\bar{v}_1 \in U_1$ y $\bar{v}_2 \in U_2$, se denota por $U_1 + U_2$. Cuando los subespacios $U_1, U_2 \subset M(m \times n)$ tienen a $\{\bar{0}\}$ en común, escribimos $U_1 \oplus U_2$ de modo que $U = U_1 \oplus U_2$ es la suma directa de U_1 y U_2 . Tengamos idea de lo que significa una matriz triangular $T = (t_{ij})$ en la que $i > j$ ó $i < j$ para el cual se tendrá $t_{ij} = 0$, se verifica que el conjunto de las matrices triangulares inferiores T_1 y el conjunto T_2 de las matrices triangulares superiores son subespacios de $M(n \times n)$ y que $M(n \times n) = T_1 + T_2$ cuando $m = n$, más no se tiene $M(n \times n) = T_1 \oplus T_2$ puesto que $T_1 \cap T_2 \neq \{0\}$, esto es T_1 y T_2 tienen más de un elemento en común. Las matrices que habitan en $M(n \times n)$ se llaman matrices cuadradas y son las de mayor uso en representaciones matriciales de problemas originados en Ciencias e Ingeniería. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es simétrica (o antisimétrica) cuando $a_{ij} = a_{ji}$ (ó $a_{ij} = -a_{ji}$), $\forall i \forall j$. Si reunimos a estas matrices por separado tendremos el conjunto $M(n \times n) = S \oplus \mathcal{A}$ constituido por los subespacios vectoriales S de matrices simétricas y \mathcal{A} de matrices antisimétricas. 

Sea $X \subset M(n \times n)$ un conjunto de matrices, decimos que es linealmente independiente cuando ningún elemento $A \in X$ es combinación lineal de otros elementos de X , si tenemos el caso en que $X = \{A\}$ consta de un solo elemento A se dice que X es linealmente independiente por definición, toda vez que $A \neq 0$. Ahora bien, si X es linealmente independiente, decimos también que todos ellos son distintos de la matriz cero, ya que el vector nulo (o matriz nula) es combinación lineal de cualesquiera otros: $0 = 0.A_1 + \dots + 0.A_m$.

Un criterio muy útil para comprobar la independencia lineal de un conjunto de matrices está dado por el siguiente:

Teorema 1.

Sea X un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial matricial $M(m \times n)$. Si $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m = 0$ con $A_1, \dots, A_m \in X$, entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Recíprocamente, si la única combinación lineal nula de vectores de X es aquella cuyos coeficientes son todos iguales a cero, entonces X es un conjunto linealmente independiente.

Demostración:

Supóngase, por reducción al absurdo, que se tenga $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m = 0$ con $A_1, \dots, A_m \in X$ pero no todos los α_i sean nulos. Simplifiquemos la prueba

considerando $\alpha_1 \neq 0$. Entonces tendremos $A_1 = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)A_2 - \dots - \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_1}\right)A_m$, y por

tanto, A_1 llega a ser una combinación lineal de los otros elementos de X . De modo recíproco, si X no fuese linealmente independiente, alguno de sus elementos matrices sería combinación lineal de los demás: $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$, luego se tendría: $1 \cdot A - \alpha_1 A_1 - \dots - \alpha_m A_m = 0$ que es una combinación lineal nula de matrices en X , en la cual por lo menos el primer coeficiente no es cero.

Una consecuencia inmediata del Teorema 1 es lo siguiente:

Si $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_m B_m$ y las matrices A_1, \dots, A_m son linealmente independiente, entonces $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$. Podemos ilustrar esto al considerar el conjunto $\{\epsilon_{ij} / i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n\}$ contenido en el espacio matricial $M(m \times n)$, sucede que los ϵ_{ij} son linealmente independiente,

esto es: $\sum_{i,j=0}^{m,n} \alpha_{ij} \epsilon_{ij} = 0$, implica que $\alpha_{ij} = 0, \forall i, \forall j$.

Un conjunto $X \subset M(m \times n)$ se dice linealmente dependiente (L.D.) cuando no es linealmente independiente. Esto quiere decir que alguna de las matrices $A \in X$ es combinación lineal de otros elementos de X , o en todo caso $X = \{0\}$. Con el

propósito de que X sea linealmente dependiente es necesario y suficiente que exista una combinación lineal nula $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m = 0$ de matrices $A_1, \dots, A_m \in X$ con algún $\alpha_i \neq 0$. Si $X \subset Y$ y X es linealmente dependiente, entonces Y también es linealmente dependiente. Si $0 \in X$ entonces X es linealmente dependiente.

Una base de un espacio vectorial matricial $M(m \times n)$ es un conjunto $B \subset M(m \times n)$ linealmente independiente que genera a $M(m \times n)$. Esto significa que toda matriz $A \in M(m \times n)$ se representa, de modo único, como combinación lineal $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$ de elementos matrices A_1, \dots, A_m de la base B . ahora bien, si $B = \{A_1, \dots, A_m\}$ es una base de $M(m \times n)$ y si $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m$, entonces los números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ se llaman coordenadas de la matriz A en la base B . como ilustración afirmamos que las matrices no cuadradas ϵ_{ij} , con elementos nulos excepto el elemento en la i -ésima fila y la j -ésima columna, de valor 1, constituyen una base de $M(m \times n)$, es la base canónica, más, existen otras bases similares, por ejemplo cuando el elemento 1 es un elemento $\lambda \neq 0$, o cuando cada ϵ_{ij} tiene a $\lambda_{ij} \neq 0$ diferente en cada fila i y en cada columna j . En realidad, cualquier familia de matrices con elementos no todos nulos $a_{ij} \neq 0$ puede constituirse en una base de $M(m \times n)$ en condiciones adecuadas.

Demostraremos a continuación, que si un espacio vectorial $M(m \times n)$ admite una base con n elementos matriciales, entonces todas las bases de $M(m \times n)$ tienen el mismo número mn de elementos. Este número es llamado la dimensión de $M(m \times n)$.

Partimos para ello del siguiente lema que lo consideramos sin demostración.

Lema 1

Todo sistema lineal homogéneo cuyo número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones admite una solución no trivial. Esto significa que el sistema propuesto:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

de m ecuaciones con n incógnitas, con $m < n$, admite representar las incógnitas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_n &= - \left(\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 + \dots + \frac{a_{1(n-1)}}{a_{1n}}x_{n-1} \right) \quad \text{si } a_{1n} \neq 0 \\ \text{ó} \quad x_n &= - \left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 + \dots + \frac{a_{m(n-1)}}{a_{mn}}x_{n-1} \right) \quad \text{si } a_{mn} \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo que este sistema admite una solución no trivial $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ ya que $n-1 > m-1$. Colocando:

$$\alpha_n = - \left(\frac{a_{m1}}{a_{mn}}\alpha_1 + \dots + \frac{a_{m(n-1)}}{a_{mn}}\alpha_{n-1} \right)$$

Obtenemos la solución no trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ del sistema dado.

Teorema 2

Si las matrices A_1, \dots, A_m generan el espacio matricial $M(m \times n)$, entonces cualquier conjunto con más de m matrices en $M(m \times n)$ es linealmente dependiente.

Demostración:

Dadas las matrices W_1, \dots, W_m en $M(m \times n)$ con $n > m$, para cada $j=1, 2, \dots, n$ tenemos $W_j = \alpha_{1j} A_1 + \dots + \alpha_{mj} A_m$ pues las matrices A_1, \dots, A_m generan a $M(m \times n)$. Para mostrar que las W_j son linealmente dependiente debemos hallar coeficientes x_1, \dots, x_n , no todos iguales a cero, tales que $x_1 W_1 + \dots + x_n W_n = 0$. Sustituyendo los W_j por sus expresiones en función a los A_i , esta igualdad quiere decir que:

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{1j} \right) A_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{2j} \right) A_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{mj} \right) A_m = 0$$

La última condición será satisfecha desde que todas las sumatorias sean nulas, esto es, que (x_1, \dots, x_n) sea una solución no trivial del sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$



Una tal solución existe, por el Lema 1, ya que $n > m$. Luego W_1, \dots, W_n son linealmente dependiente y el Teorema se prueba. El presente teorema origina las siguientes consecuencias:

- (a) Si las matrices A_1, \dots, A_p generan el espacio vectorial $M(m \times n)$ y las matrices B_1, \dots, B_q son linealmente independiente, entonces $p \leq q$.
- (b) Si el espacio matricial $M(m \times n)$ admite una base $B = \{B_1, \dots, B_p\}$ con p elementos, cualquier otra base de $M(m \times n)$ posee también p elementos.

(c) Si la dimensión de $M(m \times n)$ es p , un conjunto con p matrices genera a $M(m \times n)$ sí y sólo si, es linealmente independiente.

(d) El espacio matricial $M(m \times n)$ tiene dimensión finita por $m \cdot n$ sobre el cuerpo R .

En relación a las matrices cuadradas, sea S el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$. Para cada par (i, j) de números naturales hasta n , tal que $i \leq j$, sea S_{ij} una matriz $n \times n$ cuyos elementos en las ubicaciones ij y ji son iguales a 1, y los demás son ceros. Afirmamos que las S_{ij} forman una base para el espacio matricial $S \subset M(n \times n)$, y con un cálculo similar podemos obtener una base del subespacio A de las matrices anti-simétricas $n \times n$. Por tanto, tendremos:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim A = \frac{n(n-1)}{2}$$

El producto interno es una noción que completa y enriquece la estructura de un espacio matricial, permitiendo el uso de un lenguaje geométrico altamente sugestivo. Los axiomas de un espacio matricial no son suficientes para abordar ciertas nociones geométricas como por ejemplo, ángulo, ortogonalidad, complemento, distancia, etc. Esto se hace posible con la introducción de un producto interno.

Definimos entonces un producto interno en un espacio vectorial de matrices $M(m \times n)$ como una funcional bilineal simétrica en $M(m \times n)$. Precisando, es una función $M \times M \rightarrow R$ que asocia a cada par de matrices $A, B \in M(m \times n)$ un número real $\langle A, B \rangle$, de modo que son válidas las propiedades que siguen: para cualquiera $A, A', B, B' \in M(m \times n)$ se cumplen:

✓ Bilinealidad: $\langle A+A', B \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A', B \rangle$, $\langle \alpha A, B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle$

$$\langle A, B+B' \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, B' \rangle, \langle A, \alpha B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle, \text{ con } \alpha \in R$$

✓ Conmutatividad: $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

✓ Positividad: $\langle A, A \rangle \geq 0$, si $A \neq 0$

De esto último se sigue que si $\langle A, B \rangle = 0$, $\forall B \in M(m \times n)$, entonces $A = 0$. El número real no negativo $\|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2}$ se llama la norma de la matriz A , con esto resulta que $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle$ y $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\langle A, B \rangle$.

Una definición notable para el producto interno de matrices $m \times n$ consiste en considerar la traza matricial, en efecto, sean $A, B \in M(m \times n)$, luego escribimos $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B)$, donde la traza corresponde a la suma de los elementos de la diagonal que son el resultado del producto $A^t B$. La norma en este caso se define

para la matriz $A \in M(m \times n)$ en la forma $\|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2} = \text{Tr}(A^t A) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ el

cual guarda similitud con la norma de un vector coordinado. El ángulo entre matrices se escribe por la ecuación $\langle A, B \rangle = \|A\| \|B\| \cos \square(A, B)$ lo que implica

$$\square(A, B) = \arccos \left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|} \right).$$

Mencionamos dos desigualdades notables, las cuales son: la desigualdad triangular $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ y la desigualdad de Cauchy - Schwarz $|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \|B\|$.

Puesto que el producto interno define ángulos y por tanto la ortogonalidad entre matrices, debemos realizar algunas anotaciones al respecto. En efecto, las matrices $A, B \in M(m \times n)$ son ortogonales si cumplen $\langle A, B \rangle = 0$; un conjunto $X \subset M(m \times n)$ se dice ortogonal cuando dos matrices distintas en X son ortogonales, si además todos los vectores de X tienen norma igual a 1, entonces X es un conjunto ortonormal de matrices. Así que, $X \subset M(m \times n)$ es ortogonal sí y sólo sí, dados $A, B \in X$ se tiene $\langle A, B \rangle = 0$ si $A \neq B$ y $\langle A, B \rangle = 1$ si $A = B$. Una base ortonormal es una base de $M(m \times n)$ que es ortonormal. El Teorema de

Pitágoras tiene una versión singular en un espacio matricial, esto es, si $\langle A, B \rangle = 0$ para $A, B \in M(m \times n)$, entonces cumple $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. De otro lado, si U es la matriz tal que $\|U\|=1$, entonces dado cualquier matriz $A \in M(m \times n)$ la matriz $\langle U, A \rangle U$ consiste en la proyección ortogonal de A sobre el eje que contiene U , se escribe $proy_U A = \langle U, A \rangle U$, más si ponemos

$$U = \frac{B}{\|B\|} \text{ entonces } proy_B A = \left\langle \frac{B}{\|B\|}, A \right\rangle \frac{B}{\|B\|} = \frac{\langle B, A \rangle}{\langle B, B \rangle} B$$

Mostraremos ahora que existen bases ortonormales en $M(m \times n)$ provisto de un producto interno. Más precisamente, presentamos el llamado proceso de ortonormalización de Gram – Schmidt, que es un algoritmo que nos muestra cómo pasar de una base cualquiera $\{A_1, A_2, \dots, A_p\} \subset M(m \times n)$ a una base ortonormal $\{U_1, U_2, \dots, U_p\} \subset M(m \times n)$ con la propiedad de que para $q = 1, \dots, p$ las matrices U_1, \dots, U_p pertenecen al subespacio matricial F_q generado por A_1, \dots, A_p . El proceso comienza con $W_1 = A_1$ y se prosigue por inducción. Supóngase ya obtenidos las matrices no nulas W_1, \dots, W_q , dos a dos ortogonales, generando el subespacio F_q , el mismo que se genera por A_1, \dots, A_p . Definimos W_{q+1} poniendo:

$$W_{q+1} = A_{q+1} - \sum_{i=1}^q \frac{\langle W_i, A_{q+1} \rangle}{\langle W_i, W_i \rangle} W_i$$

Un cálculo sencillo nos dice que W_{q+1} es ortogonal a W_1, \dots, W_q . Además, $W_{q+1} \neq 0$ porque A_{q+1} no pertenece a F_q generado por W_1, \dots, W_q . Y finalmente, W_{q+1} pertenece al subespacio generado por $\{W_1, \dots, W_q, W_{q+1}\}$ el cual consiste en F_{q+1} . Esto completa el proceso de ortonormalización de bases matriciales, el cual puede usar el producto $\langle A, B \rangle = tr \langle A', B \rangle$. Finalmente, caracterizamos al espacio $M(m \times n)$ definiendo la distancia matricial mediante:

$$d(A,B)=\|A-B\|=tr((A-B)^t(A-B))$$

Asimismo, se tiene $d(A,A)=0$, $d(A,B) > 0$ si $A \neq B$, $d(A,B)=d(B,A)$ y $d(A,C) \leq d(A,B)+d(B,C)$

3.2 Transformaciones lineales en espacios pre-hilbertianos

Sean U y V dos espacios vectoriales generales definidos en un cuerpo real o complejo K . una transformación lineal $T:U \rightarrow V$ es una aplicación que asocia a cada vector $\bar{u} \in U$ con un vector $T(\bar{u}) = T\bar{u} \in V$ de modo que valen, para cualquier $\bar{u}, \bar{v} \in U$ y $\alpha \in K$, las ecuaciones: $T(\bar{u} + \bar{v}) = T\bar{u} + T\bar{v}$; $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T\bar{u}$.

El vector $T\bar{u}$ se llama la imagen de \bar{u} por la transformación T . Si tenemos $T:U \rightarrow V$ una transformación lineal, entonces $T\bar{0} = \bar{0}$, además, dados $\bar{u}, \bar{v} \in U$, y $\alpha, \beta \in K$ se tiene $T(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = T(\alpha\bar{u}) + T(\beta\bar{v}) = \alpha T\bar{u} + \beta T\bar{v}$ en general, se cumple $T(\alpha_1\bar{u}_1 + \dots + \alpha_m\bar{u}_m) = \alpha_1 T\bar{u}_1 + \dots + \alpha_m T\bar{u}_m$.

Esto implica que $T(-\bar{u}) = -T\bar{u}$ y $T(\bar{u} - \bar{v}) = T\bar{u} - T\bar{v}$.

Las transformaciones lineales como aplicaciones pueden operarse entre ellas de modo que, si $T, L:U \rightarrow V$, entonces se tiene que para $\alpha \in K$ es:

$$T+L:U \rightarrow V, (T+L)\bar{u} = T\bar{u} + L\bar{u}; \quad Dom(T+L) = DomL \cap DomT$$

$$\alpha T:U \rightarrow V, (\alpha T)\bar{u} = \alpha T\bar{u}; \quad Dom(\alpha T) = DomT$$

Que son transformaciones lineales también. La transformación lineal nula se define como $0\bar{u} = \bar{0}$ y, definiendo también $-T:U \rightarrow V$ por $(-T)\bar{u} = -T\bar{u}$ lo que resulta $(-T) + T = 0 = T + (-T)$. Considere $\mathcal{L}(U,V)$ el conjunto de las transformaciones lineales de U en V , luego las definiciones anteriores determinan en $\mathcal{L}(U,V)$ un espacio vectorial sobre K ; cuando $U=V$ se tienen las transformaciones lineales en U y son llamadas operadores lineales en U , la

totalidad de ellas consiste el espacio $\mathcal{L}(U)$. Cuando $V=R$ se tienen las funcionales lineales y denotando $\mathcal{L}(U,V)=U^*$ se tiene el espacio dual de U .

A continuación veremos cómo una transformación lineal queda íntegramente determinada por una matriz. Para ello debemos considerar un resultado plasmado en lo siguiente:

Teorema 3

Sean U y V dos espacios vectoriales y B una base de U . a cada vector $\bar{u} \in B$ hagamos corresponder de modo arbitrario un $\bar{u}' \in V$. Entonces existe una única transformación lineal $T: U \rightarrow V$ tal que $T\bar{u} = \bar{u}'$ para cada $\bar{u} \in B$.

Demostración:

Todo vector $\bar{v} \in U$ se representa de modo único, como una combinación lineal $\bar{v} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}_m$ de elementos $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ de la base b . definimos así a $T: U \rightarrow V$ colocando:

$$T\bar{v} = \alpha_1 \bar{u}'_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}'_m$$



De otro lado, dados $\bar{u}, \bar{w} \in U$, tenemos:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}_m$$

$$\bar{w} = \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_m \bar{u}_m$$

Entonces sumamos: $\bar{v} + \bar{w} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \bar{u}_i$, luego efectuando se concluye que

$$T(\bar{v} + \bar{w}) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \bar{u}'_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{u}'_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \bar{u}'_i = T\bar{v} + T\bar{w}$$

De modo análogo se concluye también que $T(\alpha\bar{v}) = \alpha T\bar{v}$, por tanto, $T: U \rightarrow V$ así definida, es una transformación lineal, tal que $T\bar{u} = \bar{u}'$; $\forall \bar{u} \in B$.

En cuanto a la unicidad de T , sea $L: U \rightarrow V$ otra transformación lineal tal que

$L\bar{u} = \bar{u}'$, $\forall \bar{u} \in B$. Entonces para cada $\bar{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{u}_i \in U$ resulta

$$L\bar{v} = L\left(\sum \alpha_i \bar{u}_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i T\bar{u}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i u'_i = T\bar{v}$$

Por tanto, $L=T$. esto completa la prueba.

Ahora bien, si deseamos definir una transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^m$ nos basta escoger para $j=1, \dots, n$ un vector $\bar{v}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in R^m$ y afirmar que $\bar{v}_j = Ae_j$ es una imagen del j -ésimo vector de la base canónica, $\bar{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, por T . A partir de esto queda determinada la imagen $T\bar{v}$ de cualquier $\bar{v} = (x_1, \dots, x_m)$ de R^n , en efecto, se tiene $\bar{v} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$, luego escribimos:

$$\begin{aligned} T\bar{v} &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T\bar{e}_j = \sum_{j=1}^n (a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \dots, a_{mj}x_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right) \end{aligned}$$



Esto es: $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

En síntesis, una transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^m$ queda, pues determinada por una matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$. Los vectores columna de tal matriz son las imágenes $T\bar{e}_j$ de los vectores de la base canónica de R^n , decimos entonces que A es la matriz de T respecto de las bases canónicas de R^n y R^m . Se tiene así:

$$T\bar{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i; \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Donde los \bar{e}_j están en R^n y los \bar{e}_i están en R^m .

Por otra parte, a toda transformación lineal $T:U \rightarrow V$ están asociados dos subespacios vectoriales indispensables para estudiar el comportamiento de t , ellos son el núcleo de t , que es un subespacio de U , y la imagen de T , que es un subespacio de V también. La imagen de t es el subconjunto $ImT \subset V$ formado por todos los vectores $\bar{w} = T\bar{v}$ que son imágenes de los elementos de U por medio de T . Si ocurre que $ImT = V$, entonces se dice que T es epiyectiva; sea $X \subset U$ un conjunto de generadores del espacio U , la imagen de $T:U \rightarrow V$ es un subespacio vectorial de V generado por los vectores $T\bar{v}, \bar{v} \in X$. En particular, T es epiyectiva sí y sólo si, transforma X en un conjunto de generadores de V . Si $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ generan U , los vectores $T\bar{v}_1, T\bar{v}_2, \dots, T\bar{v}_n$ generan ImT , se sigue así, que la dimensión de ImT es menor o igual a la dimensión del dominio de T . Este hecho se ilustra cuando consideramos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, en el cual el problema de hallar un vector $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ tal que $A\bar{x} = \bar{b}$ donde $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. El sistema admite solución sí y sólo si el vector \bar{b} pertenece a la imagen de la transformación lineal $T:R^n \rightarrow R^m$ cuya matriz en las bases canónicas de R^n y R^m es $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$, lo que significa que los conjuntos $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ y $\{T\bar{v}_1, T\bar{v}_2, \dots, T\bar{v}_n, \bar{b}\}$ generan ambos el mismo espacio $ImT \subset V$. Note que

$$\bar{v}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in R^m \text{ con } j=1, 2, \dots, n.$$

El núcleo de una transformación lineal $T:U \rightarrow V$ es el conjunto de los vectores $\bar{u} \in U$ tales que $T\bar{u} = \bar{0}$, lo representamos por $N(T)$ y es un subespacio de U . Esta aplicación es inyectiva si $\bar{u} \neq \bar{u}'$ implica $T\bar{u} \neq T\bar{u}'$ en V en V , luego una característica importante es que $N(T) = \{\bar{0}\}$ y, lleva vectores linealmente

independientes en vectores linealmente independientes. De esto se sigue que si U tiene dimensión finita n , entonces $\dim V \geq n$ sólo cuando T es inyectiva.

El producto o composición de transformaciones lineales es el caso concreto de una estructura algebraica que presenta características interesantes, las cuales no se encuentran en las operaciones entre número o entre vectores. Dadas las transformaciones lineales $T:U \rightarrow V$ y $L:V \rightarrow W$, donde el dominio de L coincide con el contradominio de T , se define la composición o el producto $LT:U \rightarrow W$ escribiendo, para cada $\bar{u} \in U$, $(LT)\bar{u} = L(T\bar{u})$. Claramente LT es una transformación lineal como consecuencia de esta definición tenemos que un operador A es nilpotente cuando, para algún $n \in \mathbb{N}$, es $A^n = 0$, de otro lado, a fin de que $T:U \rightarrow V$ sea inversible es necesario y suficiente que sea biyectiva o que sea T una biyección lineal entre U y V , o más apropiadamente que T es un isomorfismo y que los espacios U y V sean isomorfos. Si $T:U \rightarrow V$ y $L:V \rightarrow W$ son isomorfos, entonces $T^{-1}:V \rightarrow U$ y $LT:U \rightarrow W$ también son isomorfos. Así que $(LT)^{-1} = T^{-1}L^{-1}$ y para $\alpha \neq 0$ es $(\alpha T)^{-1} = \frac{1}{\alpha}T^{-1}$. Un isomorfismo $T:U \rightarrow V$ transforma toda base de U en una base de V . Recíprocamente, si una transformación lineal $T:U \rightarrow V$ lleva alguna base de U en una base de V , entonces T es un isomorfismo.

La noción de isomorfismo entre espacios vectoriales es fundamental, ya que nos permite identificar espacios vectoriales que se presentan a primera vista en formas diferentes, este es el caso de los espacios matriciales, espacios coordenados, espacios de polinomios, entre otros, sin embargo, ellos finalmente llegan a tener las mismas características y estructuras. Así tenemos el isomorfismo entre el espacio S de las matrices simétricas $n \times n$ y el espacio euclidiano $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$, lo que conduce a establecer que $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$; lo mismo podemos decir del espacio \mathcal{A} de las matrices antisimétricas $n \times n$ y el espacio

$R^{\frac{n(n-1)}{2}}$, los cuales poseen igual dimensión; también el isomorfismo existente entre el espacio de las simétricas $n \times n$ y el espacio de las matrices triangulares inferiores y finalmente el de las matrices anti-simétricas y las triangulares inferiores con diagonal nula.

La matriz de una transformación lineal es un objeto matemático bastante concreto, que está asociado a dicha transformación lineal en presencia, por cierto, de bases en su dominio y su contradominio. Esta matriz posee una variedad limitada de ilustraciones de transformaciones lineales, especialmente cuando los espacios considerados son matriciales.

En esta sección, estudiaremos la relación habida entre una transformación lineal y su matriz, destacaremos el caso del producto de transformaciones lineales que nos llevará a una singular noción de producto de matrices. La idea de matriz asociada ya lo habíamos abordado antes, más sin embargo, a partir de los espacios coordenados, R^n extenderemos el trabajo realizado, hacia los espacios de dimensión finita.



Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente, y $T:U \rightarrow V$ una transformación lineal. Fijadas las bases $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset U$ y $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m\} \subset V$, para cada $j=1, 2, \dots, n$ el vector $T\bar{v}_j$ se expresa como una combinación lineal de los vectores de la base B' :

$$T\bar{v}_j = a_{1j}\bar{w}_1 + a_{2j}\bar{w}_2 + \dots + a_{mj}\bar{w}_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{w}_i$$

De esta manera, la transformación lineal $T:U \rightarrow V$ conjuntamente con las bases $B \subset U$ y $B' \subset V$ determinan una matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ llamada matriz de T respecto a B y B' . Se infiere, por tanto, que la j -ésima columna de la matriz A está formada por las coordenadas de $T\bar{v}_j$ en relación a la base B' . cuando se tiene un

operador lineal en U , esto es, con la notación $\mathcal{A} : U \rightarrow U$, sólo necesitamos una base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset U$ para determinar la matriz $A = (a_{ij})$ del operador \mathcal{A} respecto de B , la cual se define por las n igualdades:

$$A\bar{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{v}_i \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

De modo que $A \in M(n \times n)$ es la matriz cuadrada $n \times n$ cuya j -ésima columna está formada por las coordenadas del vector:

$$A\bar{v}_j = a_{1j} \bar{v}_1 + a_{2j} \bar{v}_2 + \dots + a_{nj} \bar{v}_n$$

En la base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$.

Consideremos el espacio vectorial U de dimensión n , dado $\alpha \in R$, sea $T : U \rightarrow U$ un operador lineal definido mediante $\mathcal{A}\bar{v} = \alpha \bar{v}; \forall \bar{v} \in U$. Respecto a cualquier base $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$, la matriz del operador \mathcal{A} es siempre la misma y se escribe:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$



Por tanto, el operador \mathcal{A} es de la forma $\mathcal{A} = \alpha I$; esto es, resulta ser un múltiplo de la matriz identidad $n \times n$, llamamos a esto una homotecia de razón α , y son los únicos operadores que no dependen de la base dada. Reunamos ahora la totalidad de transformaciones lineales $T : U \rightarrow V$ definidas sobre el cuerpo de los reales o complejos, ellos forman una estructura de espacio vectorial, con la adición $T+L$ y la multiplicación αT , fijamos las bases $B \subset U$ y $B' \subset V$; por tanto, ellas determinan una aplicación $\varphi : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow M(m \times n)$ que hace corresponder a cada $T \in \mathcal{L}(U, V)$ su matriz A en las bases dadas. Esta aplicación es una

transformación lineal, es decir si $A, C \in M(m \times n)$ son las matrices de T y $L \in \mathcal{L}(U, V)$, que es el espacio vectorial de las transformaciones lineales de U en V , entonces la matriz de $T+L$ es $A+C$, la matriz αT es αA y en general, la matriz de $\alpha T + \beta L$ es $\alpha A + \beta C$. Es más, todavía φ es un isomorfismo entre el espacio de transformaciones lineales y las matrices $m \times n$, donde U es de dimensión n y V de dimensión m . observemos cuando $U = \mathbb{R}^n$ y $V = \mathbb{R}^m$, tendremos entonces una situación muy singular en la correspondencia de vectores, en efecto, tomemos las bases canónicas de estos espacios y hallamos que el isomorfismo $\varphi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow M(m \times n)$ puede definirse sin dependencia de selecciones arbitrarias. En tal sentido, a cada transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ corresponde la matriz $\varphi(T) = (a_{ij})$ en la cual el j -ésimo vector columna es $T\bar{e}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$.

La multiplicación de transformaciones lineales es explicado por el isomorfismo φ , el cual hace corresponder el producto LT con el producto de las matrices de L y de T , veamos esto, sean $C = (c_{ij}) \in M(m \times n)$ y $A = (a_{ij}) \in M(n \times p)$ matrices tales que el número de columnas de C es igual al número de filas de A , luego el producto $CA = (d_{ij}) \in M(m \times p)$, cuyo ij -ésimo elemento:

$$d_{ij} = c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \dots + c_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^n c_{ik}a_{kj}$$

Que es el producto interno del vector fila i de C por el vector columna j de A .

Un resultado sorprendente de la multiplicación matricial es el siguiente:

Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se interpreta como una multiplicación de matrices, en efecto, en vez de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se considera su matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$, de modo que si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $T\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^m$, los vectores $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ pasan a ser considerados

como matrices $n \times 1$ y $m \times 1$ respectivamente, es decir, como vectores columna. Entonces la igualdad $T\bar{x} = \bar{b}$ pasa a ser escrita en la forma $A\bar{x} = \bar{b}$; desde este punto de vista el Álgebra Lineal se reduce al cálculo de matrices, lo que nos trae mucha ventaja en el aspecto computacional, pero el costo de esto es la ausencia de la intuición geométrica y la imposibilidad de tratar el caso de dimensión finita.

A continuación, las propiedades que se enlistan se prueban por definición, para cada $A \in M(m \times n)$, la transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^m$ cuya matriz es A :

(a) $(CB)A = C(BA)$

(b) $C(A+B) = CA + CB$; $(B+C)A = BA + CA$

(c) $AI_n = A$; $I_n A = A$

(d) $B(\alpha A) = \alpha(BA)$

Dada $A \in M(m \times n)$, se dice que $X \in M(n \times m)$ es una matriz inversa izquierda de A cuando $XA = I_n$ y que $Y \in M(n \times m)$ es una matriz inversa derecha de A cuando $AY = I_m$.

(e) Una matriz $m \times n$ posee inversa a izquierda si, y solamente si, sus vectores columnas son linealmente independiente y una inversa a derecha si y solamente si los vectores columna generan R^m .

Una matriz A se llama inversible cuando es cuadrada y existe una matriz A^{-1} llamada la inversa de A , tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

(f) Si una matriz A posee una inversa a izquierda de X y una inversa a derecha de Y , entonces A es cuadrada, es inversible y $X=Y=A^{-1}$.

(g) Una matriz cuadrada A admite una inversa a izquierda si y solo si, admite una inversa a derecha. En este caso, la matriz A es inversible y cada una de esas inversas laterales consisten en A^{-1} .

Seguidamente, determinamos la forma cómo varía la matriz de una transformación lineal $T: U \rightarrow V$ cuando se cambian las bases en U y en V . sean

$B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset U$ y $B_2 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m\} \subset V$ bases en relación a las cuales la matriz de T es $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$. Esto implica que:

$$T\bar{v}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{w}_i \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Tómese ahora nuevas bases:

$$B_1' = \{\bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \dots, \bar{v}'_n\} \subset U \text{ y}$$

$$B_2' = \{\bar{w}'_1, \bar{w}'_2, \dots, \bar{w}'_m\} \subset V$$

La transformación T tiene nueva matriz asociada $A' = (a'_{ij}) \in M(m \times n)$ definida

por:
$$T\bar{v}'_j = \sum_{r=1}^m a'_{rj} \bar{w}'_r \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Si deseamos relacionar las matrices A y A' debemos considerar las matrices de transición $P = (p_{kj}) \in M(n \times n)$ y $Q = (q_{ir}) \in M(m \times m)$ las cuales se escriben por las ecuaciones:

$$\bar{v}'_j = \sum_{k=1}^n a'_{kj} \bar{v}_k \quad \text{y} \quad \bar{w}'_j = \sum_{i=1}^m q'_{ir} \bar{w}_i$$

Esto define a P como la matriz de transición de la base B_1 a la base B_1' y Q como la matriz de transición de la base B_2 a la base B_2' . Efectuando en la imagen $A\bar{v}'_j$ y usando las matrices de transición P y Q obtenemos al igualar:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} p_{kj} = \sum_{r=1}^m q_{ir} a'_{rj}$$

Esto es, $AP = QA'$. Nótese ahora que toda matriz de transición es inversible, por lo tanto, se concluye:

$$A' = Q^{-1}P$$

Cuando T resulta ser un operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$, sus matrices A y A' respecto a las bases B_1 y B_2 tienen una única matriz de transición P , que se escriben por la ecuación:


$$A' = P^{-1}AP$$

Afirmamos que las dos matrices cuadradas A y $P^{-1}AP$ tienen las mismas propiedades y se dice que son semejantes, así las matrices de un mismo operador respecto a bases diferentes son semejantes.

Consideremos ahora un concepto importante en la teoría de matrices que surge en las transformaciones lineales, para ello tomemos $T:U \rightarrow V$ una transformación lineal en dimensión finita, el rango de T es la dimensión de su imagen. Es claro que $\dim \text{Im } T \leq \dim V$, y de la ecuación de espacios:

$$\dim U = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$$

Obtenemos $\dim \text{Im}(T) \leq \dim U$, lo que implica el rango de T no excede a $\dim U$ ni a $\dim V$. Por tanto, el rango de T es igual a la dimensión de U si y sólo si $A \in M(m \times n)$ es la matriz de T respecto a las bases de U y de V , entonces el rango de T es la dimensión del subespacio de R^n generado por las columnas de A . luego el rango de T es el número máximo de columnas linealmente independiente de la matriz asociada A ; similarmente el número máximo de fila linealmente independiente de A , es decir, la dimensión del subespacio de R^m generado por las filas de A .

En conclusión, podemos definir el rango de la matriz $A \in M(m \times n)$ como el número máximo de filas o de columnas linealmente independiente de esa matriz con respecto a los autovalores y autovectores de una matriz en un espacio vectorial U . 

Fijémonos muy bien en el siguiente detalle: cuanto menor es la dimensión del espacio U , más fácil es estudiar a los operadores lineales $\mathcal{A}:U \rightarrow U$ referidos al cuerpo K (real o complejo), en especial $\dim U = 1$ ó $\dim U = 2$, de allí que un operador $\mathcal{A}:U \rightarrow U$ admita descomponerse en varios operadores definidos en subespacios de dimensiones menores. Esto en principio nos llevará a elaborar la noción de subespacio invariante por un operador, el cual a su vez determinará los conceptos de autovalor y autovector del operador \mathcal{A} .

Dado un operador lineal $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ definido en un espacio U de dimensión finita, ocurre que, o bien existe un vector no nulo $\bar{u} \in U$ tal que $\mathcal{A}\bar{u} = \lambda\bar{u}$ o entonces existen $\bar{u}, \bar{v} \in U$ linealmente independiente de modo que $\mathcal{A}\bar{u}$ y $\mathcal{A}\bar{v}$ son ambas combinaciones lineales de \bar{u} y \bar{v} , es decir $\mathcal{A}\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$, $\mathcal{A}\bar{v} = \gamma\bar{u} + \delta\bar{v}$. Este hecho es fundamental para el estudio de los autovectores de un operador lineal, por lo que procedemos a definir el siguiente subespacio de U :

Se dice que un subespacio vectorial $V \subset U$ es invariante por el operador lineal $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ cuando $\mathcal{A}(V) \subset V$, esto es, cuando la imagen $\mathcal{A}\bar{v}$ de cualquier vector $\bar{v} \in V$ es además un vector en V . Así tenemos que los subespacios $\{\bar{0}\}$ y U son invariantes por cualquier operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$. El núcleo $N(\mathcal{A})$ y la imagen $Im(\mathcal{A})$ son también obviamente subespacios invariantes. Un subespacio V de dimensión 1 es invariante por \mathcal{A} si y solo si, existe un número λ tal que $\mathcal{A}\bar{v} = \lambda\bar{v}, \forall \bar{v} \in V$.

Un vector $\bar{v} \neq \bar{0}$ en U se llama un autovector del operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ cuando existe $\lambda \in R$ ó C (reales o complejos) tal que $\mathcal{A}\bar{v} = \lambda\bar{v}$; el número λ , a su vez, es llamado un autovalor del \mathcal{A} cuando existe un vector no nulo $\bar{v} \in U$ tal que $\mathcal{A}\bar{v} = \lambda\bar{v}$. De allí que hallar un autovector (o autovalor) de \mathcal{A} es, por tanto, lo mismo que hallar un subespacio de dimensión 1° invariante por \mathcal{A} . Análogamente, decimos que λ es un autovalor de la matriz $A \in M(n \times n)$ cuando λ es un autovalor del operador $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n$, cuya matriz en la base canónica es A . Esto significa que existe un vector $\bar{x} \neq \bar{0}$ en R^n tal que $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, o, lo que es lo mismo, una matriz no nula $\bar{x} \in M(n \times 1)$ de modo que $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

Un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n admite un máximo de n autovalores distintos, dado que a autovalores diferentes de un mismo operador

lineal corresponden autovectores linealmente independientes, en efecto, dado el operador lineal $\mathcal{A} : U \rightarrow U$, sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ vectores no nulos en U tales que

$$\mathcal{A}\bar{v}_1 = \lambda_1\bar{v}_1, \mathcal{A}\bar{v}_2 = \lambda_2\bar{v}_2, \dots, \mathcal{A}\bar{v}_m = \lambda_m\bar{v}_m$$

Donde los números λ_i son distintos dos a dos. Usando la inducción se prueba que esos vectores son linealmente independientes. De otra parte, inferimos que si tenemos $\dim U = n$ y si el operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ posee n autovalores distintos entonces existe una base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset U$ respecto al cual la matriz de \mathcal{A} es diagonal, esto es, tiene la forma tal que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

El polinomio característico es un concepto inherente a un operador lineal en dimensión n o a una matriz cuadrada $n \times n$, pues la igualdad $\mathcal{A}\bar{v} = \lambda\bar{v}$ equivale a $(\mathcal{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, por tanto, \bar{v} es un autovector de \mathcal{A} , sí y sólo si, es un elemento no nulo del núcleo $N(\mathcal{A} - \lambda I)$. En otras palabras, a fin de que λ sea un autovalor de \mathcal{A} es necesario y suficiente que el operador $\mathcal{A} - \lambda I : U \rightarrow U$ no posea inverso. El caso particular ocurre cuando $\dim U = 2$, en efecto, si $\{u, v\}$ es una base, entonces los vectores $\alpha u + \beta v$ y $\gamma u + \delta v$ son linealmente dependientes sí y sólo si, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Esto conduce a la matriz del operador \mathcal{A} en esta base la cual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lo que implica formular el polinomio característico del operador \mathcal{A} en la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$$

En general, $p(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = \lambda^n + (-1)^{n-1}(\text{tr } A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$ cuando A es la matriz $n \times n$ del operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ en que $\dim U = n$.

Finalmente, al concluir estos tópicos de Álgebra Lineal, abordamos el tema correspondiente a los procedimientos de triangularizar y diagonalizar un operador lineal, y por tanto su matriz asociada. De ellos podemos expresar que si las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$ son todos números reales, entonces el operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ es triangularizable, esto es, podemos colocar a su matriz asociada $A \in M(n \times n)$ como una matriz triangular; también diremos que la matriz A del operador $\mathcal{A} : U \rightarrow U$ es diagonalizable cuando es semejante a una matriz $D = (d_{ij})$ diagonal, es decir $P^{-1}AP = D$, en la cual las raíces del polinomio son en general complejas.

3.3 Sistemas matriciales escalares

Uno de los conceptos fundamentales del Análisis y del Álgebra es el de sistema de m ecuaciones y de n incógnitas en el dominio R , estos sistemas aparecen de forma natural en numerosos problemas de Ciencias e Ingeniería, y tienen mejor enfoque cuando ellos son llevados a representaciones matriciales en razón de que la data es inmensa y proficua.

El matemático inglés Arthur Cayley (1821 – 1895) desarrolló en 1857 el Álgebra de Matrices, esto es, las reglas que indican cómo se suman y multiplican las matrices. Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy, su copioso trabajo lo compiló en una colección masiva llamada “Collected Mathematical Papers” conteniendo 966 artículos escritos en 13 grandes volúmenes, los cuales incluyen representaciones de matrices en casi todas las áreas investigadas. Las matrices surgieron con Cayley, relacionadas con las transformaciones lineales del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \right\} \quad a, b, c, d \in R$$

Nótese que esta transformación lineal está completamente determinada por los cuatro coeficientes a, b, c y d , por tanto, se simbolizan por el arreglo matricial

cuadrado: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, que es la forma cómo la conocemos ahora.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe así:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Las agrupaciones en matrices nos llevan a definir en R :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ como la matriz de los coeficientes del sistema, a la}$$

$$\text{columna } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ como la matriz incógnita, y } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ como la matriz de los}$$



términos independientes. Estas matrices pertenecen a sus respectivos espacios matriciales, así que $A \in M(m \times n)$, $x \in M(m \times 1)$ y $b \in M(m \times 1)$. Por tanto, el sistema dado se puede escribir mediante el sistema matricial escalar: $Ax = b$.

Si $b \neq 0$, entonces la representación consiste en un sistema matricial no homogéneo, en caso contrario, si $b = 0$, tendremos $Ax = 0$ como un sistema homogéneo, en el cual siempre tiene la solución trivial: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Cuando $x \neq 0$ tendremos la solución no trivial para el sistema homogéneo, y poseerá un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones, esto es, $n > m$. El caso en que $A \in M(n \times n)$ entonces la única solución al sistema

$Ax=0$ es la trivial $x=0$, y el sistema no homogéneo $Ax=b$ tiene una solución única para cada matriz b .

Decimos que un sistema $Ax=b$ es inconsistente si no tiene solución, y si tiene al menos una solución, entonces el sistema es consistente. Por tanto presentamos algunos métodos de resolución de sistemas que son los más convenientes para el trabajo de investigación.

a) Eliminación de Gauss – Jordan

Se reduce por filas la matriz de los coeficientes a la forma escalonada reducida por filas usando el procedimiento de hacer el coeficiente de x_i en las siguientes filas.

b) Eliminación Gaussiana

Se reduce por filas la matriz de los coeficientes a la forma escalonada por filas, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

Al resolver los sistemas matriciales en R con una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones con filas en el sistema. Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss – Jordan se requieren aproximadamente $\frac{n^3}{2}$ sumas y multiplicaciones, en tanto que la eliminación gaussiana requiere solo $\frac{n^3}{3}$. La eliminación de Gauss – Jordan encuentra enorme aplicación en los modelos de insumo y producto del economista Wassily Leontief (Premio Nobel en Economía en 1973), al considerar un sistema económico con n industrias:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned}$$

Que se escribe como $Ax + e = x = Ix$ ó $(I - A)x = e$. La matriz A de demandas internas se llama matriz tecnológica y la matriz $I - A$ se llama matriz de Leontief. Si esta matriz es inversible, entonces el sistema tiene solución única, y Leontief usó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos en 1958, dividiendo la economía en 81 sectores y los agrupó en 6 familias de sectores relacionados.

c) Multiplicación por matrices elementales

Una matriz $E \in M(n \times n)$ se llama matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad I_n mediante una sola operación con filas. Para realizar una operación elemental en una matriz $A \in M(n \times n)$ se multiplica A por la izquierda, por la matriz E elemental adecuada. Lo que caracteriza a E es que realiza cambios en A en forma sucesiva hasta obtener una matriz B equivalente a A . E consiste en tres formas: αF_i , $F_j + \alpha F_i$ y F_{ij} , donde las F indican operaciones por filas en las ubicaciones indexadas. Esto es, en la ecuación matricial $Ax = b$ cuando $m = n$, si U es la forma escalonada por filas de A , entonces A se reduce a U mediante una serie de operaciones elementales por fila, cada una de las cuales se obtiene multiplicando por una matriz elemental.

Así: $U = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A$, lo que implica $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1} U$, donde la inversa de una matriz elemental es otra matriz elemental y U ciertamente es una matriz triangular superior. El caso $m \neq n$ se obtiene $Bx = b'$ en el que B es equivalente a a y ambas están en $M(m \times n)$.

d) Factorización LU de una matriz

Una matriz $A \in M(n \times n)$ se puede escribir como un producto de matrices triangulares. Esta factorización es útil para resolver sistemas lineales sobre una computadora y se puede considerar para mostrar resultados notables en matrices. Supóngase que deseamos resolver el sistema $Ax=b$ con A una matriz inversible y supongamos también que A se puede reducir por filas a una matriz triangular U sin hacer permutaciones entre sus filas. Entonces existe una matriz triangular inferior L inversible con la unidad real en la diagonal tal que $A = LU$. Si además, U tiene n pivotes, porque A es inversible, entonces la factorización es única. Por tanto, se escribe

$$LUx = b$$

como L es inversible, existe un vector único (o matriz columna única) y tal que $Ly=b$. Como U es también inversible, entonces existe un vector único x tal que es $Ux = y$. Se sigue entonces que $Ax=L(Ux)=Ly=b$, quedando resuelto el sistema matricial dado.

La factorización LU para matrices no cuadradas consiste en lo siguiente: sea $A \in M(n \times m)$. Supóngase que A se puede reducir a su forma escalonada por filas sin llevar a cabo permutación alguna. Entonces existe una matriz L triangular inferior de $m \times m$, con la unidad real en la diagonal y una matriz $U \in M(m \times n)$ con $u_{ij} = 0$, si $i > j$ tales que $A = LU$. Por tanto, el sistema $Ax=b$ queda resuelto en estas condiciones.

e) El núcleo de una matriz como una transformación lineal

Sea $A \in M(n \times m)$ con elementos en R o en C , los complejos. La matriz admite definirse como una transformación lineal en la forma:

$$\begin{array}{lcl} A: M(n \times 1) & \rightarrow & M(m \times 1) \\ \bar{x} & \mapsto & A\bar{x} \end{array} \quad \text{Es un vector columna del espacio } M(n \times 1)$$

El núcleo de A consiste en el subespacio $N(A) = \{\bar{x} \in M(n \times 1) / A\bar{x} = 0\}$, luego L determinación de los \bar{x} resuelve el sistema matricial homogéneo. De otro

lado, si $A\bar{x} \neq 0$, es decir, $A\bar{x} = \bar{y} \in M(m \times 1)$, entonces la solución no homogénea consiste en $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{w}$, donde \bar{x}_0 es la solución del sistema homogéneo correspondiente $A\bar{x} = 0$ y \bar{w} es una solución particular del sistema $Ax = b$, que muchas veces se conoce en el problema dado.

3.4 Ecuaciones diferenciales matriciales y sistemas dinámicos

Numerosos y variados problemas de interés en Ciencias Básicas (Matemática, Física, Química, Biología), Ingeniería y otras áreas como Economía, Teoría del Calor, Decaimiento radioactivo, Reacciones químicas, se describen y se formulan mediante los llamados sistemas de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales. Podemos afirmar que muchos problemas de tecnologías del futuro también se formularán por medio de estos sistemas. Los problemas físicos y biológicos han motivado el desarrollo de la mayor concepción existente en la Matemática, en especial, cuando se refiere a los sistemas de ecuaciones diferenciales. En esta sección vamos a preparar el material suficiente para realizar estudios en las secciones subsiguientes, sobre la interacción entre los problemas de Matemática y de la Física, Química y Biología. La comprensión de este material requerido en la solución de los problemas surgidos en las Ciencias Naturales y el entendimiento de los modelos físicos, químicos y biológicos con frecuencia hace que la Matemática se torne más sencilla. De allí que las deducciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales tendrán nuestra atención a partir de los principios naturales.

En muchas aplicaciones tenemos que considerar simultáneamente varias ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con varias variables dependientes y una independiente. Estos sistemas que resultan, se estudian de manera natural, usando la notación vectorial y la teoría de matrices.

La situación es sencilla para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. Un sistema es de primer orden si incluye sólo primeras derivadas y

Por consiguiente, escribimos: $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$, o simplemente $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}$.

La existencia y unicidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es establecida a través del teorema que sigue:

Teorema 4

Supóngase que en un sistema explícito $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$, las $a_{ij}(t)$ y las $b_i(t)$ son funciones continuas en el intervalo I . considérese que $t_0 \in I$ y sean $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ números reales. Entonces existe una solución única $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ para el sistema dado, definida para toda $t_0 \in I$, tal que:

$$x_1(t_0) = x_{10}; x_2(t_0) = x_{20}; \dots; x_n(t_0) = x_{n0}$$

Este es un resultado en la teoría de ecuaciones diferenciales matriciales, de gran utilidad en el trabajo de investigación, más sólo consideraremos su enunciado tan solamente para no desviar la atención a los objetivos trazados en el proyecto.

Si un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, con n variables dependientes x_1, x_2, \dots, x_n tiene n condiciones iniciales arbitrarias en su solución general, entonces se puede escribir de nuevo en la forma explícita $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ sumando y restando múltiples constantes de las ecuaciones. En particular, $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ se pueden especificar de manera arbitraria para cualquier tiempo fijo t_0 . Inversamente, si un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden tiene menos de n constantes arbitrarias en su solución general, no se puede reescribir en la forma explícita del sistema.

El estudio de los sistemas lineales de primer orden puede parecer un poco limitado, restringido, ya que muchos problemas de crecimiento poblacional en

Dinámica de Poblaciones llevan a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Sin embargo, ocurre que todo sistema de ecuaciones diferenciales lineales se puede escribir en otra forma, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es posible por la reducción del orden de la derivada en la variable dependiente. En el sistema $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ debemos suponer que los elementos de $A(t)$ y de $\bar{b}(t)$ son representados por funciones continuas en un cierto intervalo I que contiene a t_0 . Sea \bar{a} un vector arbitrario de escalares de $n \times 1$, entonces existe una única solución para el sistema matricial diferencial $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$; $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$ en I . toda solución particular de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ es de la forma $\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_c$, en donde \bar{x}_p es una solución particular del sistema y \bar{x}_c es la solución de la ecuación homogénea asociada $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$, llamamos a \bar{x}_p algunas veces como la respuesta forzada a la entrada \bar{b} , y \bar{x}_c se llama también la respuesta libre. Ahora bien, la solución general de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$ se puede escribir por la ecuación matricial de combinaciones lineales:

$$\bar{x}(t) = c_1(t)\bar{x}_1(t) + c_2(t)\bar{x}_2(t) + \dots + c_n(t)\bar{x}_n(t)$$

Donde $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ es un conjunto de soluciones de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$ tal que los vectores $\bar{x}_1(t_0), \bar{x}_2(t_0), \dots, \bar{x}_n(t_0)$ son linealmente independientes y las c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias. El conjunto $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ se llama un conjunto fundamental de soluciones para $\bar{x}' = A\bar{x}$.

En esta sección estudiaremos una manera de resolver $\bar{x}' = A\bar{x}$ cuando A es una matriz constante de $n \times n$. Una solución $\bar{x}(t) = \bar{0}$. Deseamos hallar soluciones no triviales. Si A consistiera en un escalar, se sabe que una solución sería $x = e^{\lambda t}$, esto es, buscaremos soluciones del tipo $\bar{x} = e^{\lambda t}\bar{u}$, en donde \bar{u} es un vector constante distinto de cero y λ un escalar. Por tanto, obtenemos $(e^{\lambda t}\bar{u})' = A(e^{\lambda t}\bar{u})$ lo que

conduce a $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$, es decir, $e^{\lambda t}\bar{u}$ es una solución no trivial de $\bar{x}' = A\bar{x}$. El escalar λ es el autovalor de A y el vector \bar{u} se llama autovector de A asociado a λ . Nótese que $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ se puede escribir como $(\lambda I - A)\bar{u} = \bar{0}$, si $\lambda I - A$ sería inversible escribiríamos $(\lambda I - A)^{-1}$ y concluir que $\bar{u} = \bar{0}$. Más, ocurre que los autovectores son siempre diferentes de cero, esto determina que $\det(\lambda I - A)$, formándose el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ de grado n , en el que los autovalores de A son precisamente las raíces del polinomio $p(\lambda)$.

La independencia lineal de soluciones por autovectores establece la solución general de la ecuación matricial $\bar{x}' = A\bar{x}$. Veamos esto, si $A \in M(n \times n)$ y tiene n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces, para cada i la solución de la ecuación $(\lambda_i I - A)\bar{u} = \bar{0}$ es de la forma $c\bar{u}_i$, con c una constante arbitraria. El conjunto de matrices columna $\{e^{\lambda_1 t}\bar{u}_1, e^{\lambda_2 t}\bar{u}_2, \dots, e^{\lambda_n t}\bar{u}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\bar{x}' = A\bar{x}$, así que la solución general es:

$$\bar{x} = x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{u}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \bar{u}_n$$

Si $A \in M(n \times n)$ tiene elementos reales con un autovalor complejo λ y autovector \bar{u} , esto es, $\lambda = \alpha + i\beta$; $\bar{u} = \bar{a} + i\bar{b}$, entonces $\bar{\lambda}$ es otro autovalor y el conjugado \bar{u} es otro autovector asociado.

Ahora analizaremos cómo resolver una ecuación diferencial matricial no homogénea $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ cuando $A \in M(n \times n)$ es una matriz real constante. La solución es de la forma: $\bar{x}(t) = \bar{x}_p + \bar{x}_c$. Pondremos nuestra atención para determinar \bar{x}_p ; para ello presentamos el método de coeficientes indeterminados para la solución particular del sistema matricial. Desarrollamos $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ para una matriz A constante real:

$$x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1(t)$$

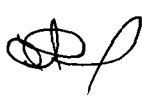
$$x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2(t)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$x_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + b_n(t)$$

Cada $b_i(t)$ es una combinación lineal de funciones $t^m e^{\alpha t} \cos \beta t$, $t^m e^{\alpha t} \sin \beta t$ para enteros $m \geq 0$ y escalares α, β . A continuación se calcula el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ de la matriz $A \in M(n \times n)$ y se hallan las raíces que son los autovalores de A . lo que sigue es la construcción e una forma matricial para la solución particular $\bar{x}_p = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{np})^t$, para los términos aparecen en cualquiera de los $b_i(t)$ se suman los términos a todas las x_{ip} de conformidad con las reglas dadas para una ecuación diferencial ordinaria, con la excepción de que, si se multiplica por t^k para una raíz de multiplicidad $k+1$ de $p(\lambda)$, también debe incluirse el término multiplicado por las potencias menores de t . Finalmente, se sustituye la forma para \bar{x}_p en $\bar{x}'_p = A\bar{x}_p + \bar{b}$ y se resuelve para obtener las constantes en \bar{x}_p igualando los términos, la solución para las constantes será único sólo si no existen términos de la forma para \bar{x}_p que aparezcan también en la solución de la ecuación homogénea asociada $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$.



La matriz exponencial desempeña un rol importante en los sistemas diferenciales matriciales, aquí nos referiremos a ella desde sus orígenes. La solución de $x' = ax$ una ecuación diferencial simple con a constante, consiste en $x = e^{at}c$, mostraremos entonces que existe una notación similar con los sistemas $\bar{x}' = A\bar{x}$.

Consideremos:
$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}$$

Ahora supóngase que $A \in M(n \times n)$, entonces la matriz exponencial se puede definir como:

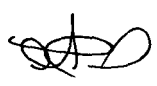
$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{6} A^3 + \dots$$

En donde $A^0 = I$ es la matriz identidad de orden n . esta serie converge a una matriz para todos los valores de t y se puede derivar término a término para obtener: $(e^{At})' = e^{At} A$. En consecuencia e^{At} es la solución única de la ecuación diferencial matricial: $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$, $\bar{x}(0) = I$.

Más aún, si \bar{a} es un vector constante de orden $n \times 1$, entonces la solución única de $\bar{x}'(t) = A(\bar{x}(t))$; $\bar{x}(0) = \bar{a}$ viene a ser $\bar{x}(t) = e^{At} \bar{a}$.

Teorema 5

La matriz exponencial es una solución de $\bar{x}'_i(t) = A\bar{x}_i(t)$ con $\bar{x}(t) = e^{At}$ y $A \in M(n \times n)$ una matriz constante y la condición inicial $\bar{x}_i(0) = \bar{e}_i$, en donde \bar{e}_i es la i -ésima columna de la matriz identidad de orden $n \times n$.



Prueba

Si $\bar{x}(t) = e^{At}$, entonces $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ con $\bar{x}(0) = I$. Ahora sea $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, en donde las \bar{x}_i son las columnas de \bar{x} . Entonces se convierte en:

$$(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n) = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = (A\bar{x}_1, A\bar{x}_2, \dots, A\bar{x}_n)$$

Mientras que: $\bar{x}(0) = (\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0)) = I = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$

Lo que se verifica.

Supongamos ahora que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ con una matriz constante. Entonces:

$$e^{At} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))^{-1}$$

En efecto, consideremos $U(t) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))^{-1}$, donde $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$. Luego tenemos:

$$U' = (\bar{x}_1', \bar{x}_2', \dots, \bar{x}_n')(\bar{x}_1'(0), \bar{x}_2'(0), \dots, \bar{x}_n'(0))^{-1}$$

$$U' = (A\bar{x}_1, A\bar{x}_2, \dots, A\bar{x}_n)(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))^{-1}$$

$$U' = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))^{-1} = A$$

Y también:

$$U(0) = (\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))^{-1} = I$$

La matriz de los valores iniciales $(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))$ llega a ser inversible porque $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ ellos constituyen un conjunto fundamental de soluciones.

Respecto a sistemas no homogéneos de modelo matricial podemos realizar una breve descripción. Pues que las notas desarrolladas anteriormente constituyen una base preliminar, podemos usar la matriz exponencial para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Consideremos entonces el problema no homogéneo:

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t) \quad A \in M(n \times n)$$

O simplemente, $\bar{x}'(t) - A\bar{x}(t) = \bar{b}(t)$.

El uso del factor integrante permite obtener:

$$e^{-At}(\bar{x}'(t) - A\bar{x}(t)) = e^{-At}\bar{b}(t)$$

Esto es: $(e^{-At}\bar{x}(t))' = e^{-At}\bar{b}(t)$, e integrando: $e^{-At}\bar{x}(t) = \int_a^t e^{-As}\bar{b}(s)ds + \bar{c}$, en donde hallamos:

$$\bar{x}(t) = \int_a^t e^{-A(t-s)}\bar{b}(s)ds + \bar{c}e^{At}$$

En particular, la solución del sistema matricial $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$, $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$, resulta ser:

$$\bar{x}(t) = \int_a^t e^{-A(t-s)}\bar{b}(s)ds + \bar{a}e^{A(t-t_0)}$$

De otro lado, existen propiedades de interés de la matriz exponencial e^{At} .

En efecto:

Supóngase que U es una matriz inversible de $m \times m$ como orden, y B es una matriz también $m \times m$. Se verifica, sin dificultad, que ocurre que:

$$(UBU^{-1})^n = UB^nU^{-1}$$

Lo que podemos concluir que $e^{UBU^{-1}t} = Ue^{Bt}U^{-1}$.

Si tenemos que $A = D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal, entonces tenemos: es otra matriz diagonal. Cuando $A \in M(n \times n)$ con n autovalores distintos con autovectores correspondientes $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, entonces:

$$e^{At} = UD(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})U^{-1}$$

En donde: $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ tiene autovectores como columnas.

Finalmente, desarrollaremos una teoría notable de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales mucho más general, que son de la forma:

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t) \quad \text{con } t \in I = [a, b]$$

En donde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Las funciones están definidas y son continuas en I de la recta, con valores en los números complejos. Por definición, una solución de este sistema matricial es una función $\bar{u}: I \rightarrow M(n \times 1)$ derivable tal que $\bar{u}'(t) = A(t)\bar{u}(t) + \bar{b}(t)$. Es inmediato que \bar{u}' es continua, pues A, \bar{u} y \bar{b} lo son. El problema de valor inicial PVI correspondiente viene a ser:

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t); \quad \bar{x}(t_0) = \bar{a}$$

Donde $\bar{a} \in M(n \times 1)$ y $t_0 \in I$.

Resolver estos sistemas conduce a plantear métodos que pasen serias dificultades. Para los llamados sistemas triangulares no hay dificultad. Bastará dar solución a n ecuaciones diferenciales simples lineales de primer orden a partir de la primera dada, reemplazando en cada caso el valor obtenido en la ecuación inmediata inferior. Más, esto en general no se presenta en circunstancias de esta naturaleza. Por ello, precisamos elaborar una teoría adecuada al respecto, en primer lugar afirmamos que, siendo $A(t)$ una matriz continua en I de modo que $\bar{b}(t)$ sea también continua en I , entonces para $t_0 \in I, \bar{a} \in M(n \times 1)$ el PVI

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{a}$$

Tiene una sola solución en I . Esto garantiza que un sistema diferencial matricial tenga siempre solución y que sea única también.

Dada cualquier sistema matricial de ecuaciones diferenciales ordinarias, se trata de hallar no solo una solución, sino todas, de ser posible. El estudio que hagamos en lo que se refiere a sistemas matriciales lineales, se reduce a encontrar n soluciones linealmente independientes. Cualquier otra consistirá en una combinación lineal de las n soluciones mencionadas.

Teorema 6

Sea U el conjunto de las soluciones de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ con $t \in I$. Esto es:

$$U = \{ \bar{u}: I \rightarrow M(n \times 1) / \bar{u}'(t) = A(t)\bar{u}(t) \text{ derivable en } I \}$$

Entonces U es un espacio vectorial sobre los números complejos y además $\dim U = n$.

Prueba

Hacer saber que U es un espacio vectorial complejo no resiste dificultad alguna.

Mostremos, por tanto, que $\dim U = n$. Tomemos un $t_0 \in I$ y sea $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, por cierto, tal conjunto existe, basta considerar la base canónica de $M(n \times 1)$. Por otro lado, para cada $\bar{\phi}_j(t_0)$, afirmamos entonces que $\{ \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n \}$ consiste en una base de U . En efecto, supongamos que $c_1\bar{\phi}_1 + c_2\bar{\phi}_2 + \dots + c_n\bar{\phi}_n = 0$, en particular:

$$c_1\bar{\phi}_1(t_0) + c_2\bar{\phi}_2(t_0) + \dots + c_n\bar{\phi}_n(t_0) = 0$$

Lo que significa $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n = \bar{0}$ y como los $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ son linealmente independientes se concluye que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Falta mostrar que $\{ \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n \}$ genera a U . Sea $\bar{f} \in U$, como $\bar{f}(t_0) \in M(n \times 1)$ decimos que existen escalares a_1, a_2, \dots, a_n tales que:

$$\bar{f}(t_0) = a_1\bar{\phi}_1(t_0) + a_2\bar{\phi}_2(t_0) + \dots + a_n\bar{\phi}_n(t_0)$$

Definimos una función $\phi: I \rightarrow M(n \times 1)$ en la forma

$$\bar{\phi}(t) = a_1\bar{\phi}_1(t) + a_2\bar{\phi}_2(t) + \dots + a_n\bar{\phi}_n(t); \forall t \in I$$

Es claro que $\phi \in U$. A su vez,

$$\bar{\phi}(t_0) = a_1\bar{\phi}_1(t_0) + a_2\bar{\phi}_2(t_0) + \dots + a_n\bar{\phi}_n(t_0) = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{f}(t_0)$$

Luego ϕ y f satisfacen el PVI:

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t); \quad \bar{x}(t_0) = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$$

Viendo que es única la solución en el PVI resulta que $\phi = f$. Es decir que

$$a_1\bar{\phi}_1 + a_2\bar{\phi}_2 + \dots + a_n\bar{\phi}_n = \bar{f}$$

Por tanto, se concluye que $\{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n\}$ es una base de U , lo que prueba el teorema.

Una matriz $x(t) \in M(n \times n)$ cuyas columnas son soluciones de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$ se llama matriz solución del sistema. Asimismo, una matriz solución cuyas columnas son linealmente independientes en el intervalo I es una matriz fundamental del sistema. Note que $x(t)$ siendo una matriz fundamental del sistema ocurrirá que $\det x(t) \neq 0; \forall t \in I$, igualmente, $x(t) \cdot C$ s cualquier matriz no singular (es decir, inversible).

Iniciamos ahora estudiando el PVI no homogéneo particular.

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t), \quad t \in I$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{0}$$

El resultado puede ser llevado al caso general.

Dada una matriz fundamental $X(t)$ de $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$, $t \in I$, tenemos que:



$$\bar{\phi}(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \bar{b}(s) ds$$

El cual resuelve el PVI con la condición inicial $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$. De forma general, para la condición $\bar{x}(t_0) = \bar{c}$ se obtiene:

$$\bar{\phi}(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \bar{b}(s) ds + X(t) X^{-1}(t_0) \bar{c}$$

Con la matriz constante \bar{c} .

La solución ϕ del PVI está dada por $\bar{\phi} = \bar{\phi}_h + \bar{f}$, donde $\bar{\phi}_h$ es la solución del PVI homogéneo $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$, $\bar{x}(t_0) = \bar{c}$; mientras que \bar{f} es la solución del PVI no homogéneo $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$, $\bar{x}(t_0) = \bar{0}$.

3.5 Sistemas Dinámicos Lineales y No – Lineales clasificados

Un sistema dinámico es un sistema físico cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en este estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta manera se puede diseñar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema. Al elegir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y con ello hallar el espacio donde se efectuará el estudio, que por cierto, se omite todo tipo de aspectos no relevantes.

En relación a la elaboración de los modelos, los elementos y sus relaciones se deben tener en cuenta:

- a) Un sistema está formado por un conjunto de elementos que están constantemente interactuando respecto del tiempo.
- b) El comportamiento del sistema se puede mostrar a través de diagramas causales.
- c) Existencia de dos tipos de variables, las variables exógenas, aquellas que afectan al sistema sin que éste las provoque; y las variables endógenas, las que afectan al sistema en que éste si las provoca.

Ilustramos con un ejemplo, considere la especie peces, que se reproduce de modo que el presente año la cantidad de peces es x_k , el próximo año será x_{k+1} .

De esta forma podemos designar las cantidades de peces que habrá cada año, así el año inicial por x_0 , el año primero por x_1 , . . . , el año k por x_k . Claramente se observa que $x_{k+1} = f(x_k)$ es cierta para cualquier año. Esto conduce a afirmar que la cantidad de peces se puede hallar si se conoce la cantidad calculada del año anterior. En consecuencia, esta ecuación representa un sistema dinámico en su representación y aplicación más simple.

Los sistemas dinámicos cuando se clasifican podemos ver una variedad de ellos. Así tenemos:

a) Discretos y continuos.

Los sistemas dinámicos se dividen en dos grandes clases: aquellos sistemas en los que el tiempo transcurre de modo continuo y en los que el tiempo varía discretamente. Los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. De otra parte, si el tiempo es discreto, los sistemas se describen utilizando ecuaciones de diferencias. Un sistema continuo dinámico n dimensional se representa por: $\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x})$, donde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n$ es el vector de estados, $\bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{dt} \in R^n$ y también:

$$\bar{f} = (\bar{f}_1(\bar{x}), \bar{f}_2(\bar{x}), \dots, \bar{f}_n(\bar{x}))^t: R^n \rightarrow R^n$$



b) Autónomos y no autónomos

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada del tipo: $\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x})$; en tanto que, si al sistema dinámico lo modela una Ecuación Diferencial Ordinaria no autónoma o forzada:

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}, t)$$

El sistema es llamado no autónomo. La diferencia entre dos sistemas estriba en el hecho de que la primera no posee estímulo alguno que es externo al sistema dependiente del sistema que obligue el comportamiento

natural de la dinámica del sistema, mientras que la otra clase de sistema si lo posee. La función que produce el comportamiento del sistema puede ser constante, periódica y aleatoria.

c) Sistemas Dinámicos con variación en el tiempo.

Un sistema es invariante en el tiempo si este no depende explícitamente del tiempo, de allí que podemos concluir que todo sistema dinámico autónomo es invariante en el tiempo. En notación

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(\delta) = \bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}(t) = \bar{x}(t + \delta); \forall t \in I$$

Esto significa que, para que el sistema sea invariante en el tiempo, dos trayectoria que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazamiento en el tiempo. Si estas ecuaciones no se cumplen, el sistema dinámico se llama variante en el tiempo.

d) Sistemas Dinámicos Lineales y No Lineales

Un sistema dinámico es lineal si se cumple la condición para \bar{f} :

$$\bar{x}' = \bar{f}(a\bar{x} + b\bar{y}) = a\bar{f}(\bar{x}) + b\bar{f}(\bar{y})$$

Esto es, el sistema es lineal si \bar{f} que relaciona la tasa de incremento de las variables de estado con sus valores actuales cumple con el principio de superposición. Los sistemas lineales son sencillos de analizar y de trabajar, ya que la solución del sistema sujeto a condiciones complejas se puede lograr simplificando el problema a la suma de respuestas que obtengamos, a condiciones más sencillas. Existen técnicas para estudiar estos sistemas como por ejemplo: la Transformada de Laplace, el Principio de Superposición, la Transformada de Fourier, entre otras. Se tiene el trabajo de determinar soluciones analíticas exactas de sistemas lineales, pero también se recurren a métodos geométricos. Cuando ocurre que en $\bar{x}' = a\bar{f}(\bar{x}) + b\bar{f}(\bar{y})$ falla en un sistema, éste se dice que es un sistema dinámico no lineal. Esto conduce a realizar un análisis más complejo. En muchos casos no se obtienen soluciones analíticas exactas a los problemas no lineales, de este modo, se recurre a técnicas geométrica de visualización y análisis.



Esta clase de sistemas dinámicos respecto a su linealidad, permite también establecer en la Dinámica de Poblaciones un tipo de ecuaciones dinámicas, determinándose la llamada Dinámica No Lineal de Poblaciones.



4. Materiales y Métodos

4.1 Materiales

El tema investigado se ha desarrollado tomando en cuenta textos, papers, manuales de laboratorio, calculadoras científicas, experiencia en el área de Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales, los cuales han permitido un adecuado desarrollo lógico del presente trabajo. Se ha utilizado un material de tipo técnico en el diseño e impresión de los informes trimestrales y el informe final. La información procesada y discutida ha empleado una computadora personal tomando en consideración un procesador de textos llamado Cientific Word, de conformidad con las reglas establecidas.

4.2 Métodos

Después de haber efectuado la elección del conjunto de libros que serán usados y la recolección de la información, los métodos que han permitido el avance y logro del proyecto son:

- Método Deductivo, como un elemento conciso y lógico en la discusión y análisis del trabajo.
- Método Inductivo-Deductivo, el cual ha permitido claramente el desarrollo de las ecuaciones matemáticas.



5. Resultados

5.1 Sistemas matriciales en Dinámica de Poblaciones

La Dinámica de Poblaciones es la especialidad de la ciencia ecológica, la cual trata del estudio de los cambios que sufren las poblaciones biológicas en cuanto a tamaño, dimensiones físicas de sus miembros, estructura de edad y sexo, así como de los factores que originan estos cambios y los métodos por la que se producen. La Dinámica de Poblaciones es el objetivo principal de la llamada Biología Matemática en general y de la Ecología de Poblaciones, en particular. Es de gran importancia en la gestión de los recursos biológicos, en la evaluación de los resultados en los estudios ambientales de las acciones humanas y también en el campo de la investigación de infecciones en la Ciencia Médica. Todas las especies biológicas tienen como finalidad el de producir mayor número de descendientes que los necesarios para mantener el tamaño de la población. El crecimiento poblacional es un fenómeno biológico y natural que está ligado con aquella característica de la materia viva que es la capacidad reproductiva de los seres vivos. De esta manera, apoyados en la ley natural de la vida, definimos tres fases en el crecimiento poblacional: El inicio o fase de asentamiento, el intervalo de abundancia o fase de desarrollo y la decadencia o fase de control.

Estas etapas de la dinámica poblacional tendrán una representación matricial bajo un sistema dinámico discreto o un sistema continuo. Estas representaciones se han de desarrollar ampliamente en este capítulo y en el siguiente, que prácticamente es el objetivo que persigue el presente trabajo de investigación.

5.1.1. Modelos matriciales de crecimiento poblacional

En el estudio de diversas situaciones que se presentan en casi todos los aspectos, tanto de la naturaleza como de las actividades humanas, se encuentran grupos de cosas, personas, plantas o animales que se caracterizan por tener un cierto número de integrantes en determinado tiempo. El número de elementos que tiene

un determinado grupo se definirá, para propósitos de esta investigación, como población, pero puede referirse a cualquier entidad cuyo número de elementos pueda contarse formalmente. La población de un determinado universo consiste pues, en, el número de elemento que se incluyen según sea la definición de ese universo. El modo en que una población crece o disminuye depende de cómo está definido el universo que la origina y el tipo de reglas, a veces naturales o a veces sociales, que predominan en ese universo. Las reglas o características que permiten determinar la población en el futuro, se conocen como un modelo de crecimiento población. Aunque mencionemos crecimiento, bien podemos referirnos a un decrecimiento de la población.

El modelo más sencillo de crecimiento poblacional corresponde a un crecimiento simple en el que la población aumenta o disminuye en un mismo número, cada año o período. Ilustramos esto: un club que tiene un determinado número de socios se tiene la política de aumentar en 5 el número de socios cada año siempre. El número de socios del club en cualquier año es igual al número de socios del año anterior más 5. Otro ejemplo consiste en el conjunto de departamentos de la República del Perú, la población asociada a esa definición es constante y no cambia a menos que en algún momento el país determina establecer un nuevo departamento.

Es muy importante hacer una estimación del aumento o disminución de una población, pues permite planear las acciones necesarias para prever futuros problemas. Este asunto empezó a estudiarse en el siglo XIV ante el crecimiento o avance del número de pobladores en Europa y Asia. Alrededor de 1945 el científico Leslie desarrolló los primeros modelos de crecimiento poblacional de los modelos matriciales de crecimiento de poblaciones tienen sus raíces en el modelo propuesto por Leslie en 1945, diseñado para investigar el efecto de la estructura de edades en las tasas de crecimiento de poblaciones animales. Lefkovitch en 1965 al respecto, consideró el problema general de la aplicación del modelo para los estados de desigual tamaño diferenciables durante el ciclo de

vida de un organismo. Los planteamientos de este investigador conducen a establecer que si para una especie existen digamos s estados diferenciales, en cada uno de los cuales están presentes $n_{i,t}$ ($i=1, 2, \dots, s$) individuos, el tamaño de la población al tiempo t consiste en la suma:

$$N_t = n_{1,t} + n_{2,t} + \dots + n_{s,t}$$

Al transcurrir un tiempo $t+\theta$ se tiene que el número de individuos en cada estado dependerá del tiempo t y de la mortalidad, crecimiento, fecundidad, inmigración o emigración de cada estado durante el intervalo $[t, t+\theta]$. La relación entre el número en el estado p al tiempo $t+\theta$ y el número en todos los otros estados al tiempo t queda descrita por la ecuación determinística:

$$n_{1,t} \cdot g_{p,1} + n_{2,t} \cdot g_{p,2} + \dots + n_{p,t} \cdot g_{p,p} + \dots + n_{s,t} \cdot g_{p,s} = n_{p,t+\theta}$$

En donde las constantes $g_{p,j} > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) representan las dependencias biológicas del estado p al tiempo $t+\theta$, en relación con el estado j al tiempo t . El conjunto de ecuaciones formadas para los s estados al tiempo t y $t+\theta$ se expresa en forma matricial:

$$M_t \bar{n}_t = \bar{n}_{t+\theta}$$

Donde M_t es la matriz de los coeficientes $g_{p,j}$ y \bar{n}_t con $\bar{n}_{t+\theta}$ son vectores que vienen a ser la composición de la población. La matriz $M_t \in M(s \times s)$ posee s autovalores λ_i con sus correspondientes autovectores \bar{v}_i de modo que:

$$M_t \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i ; \quad i=1, 2, \dots, s$$

Sucede que la matriz M_t es análoga a la matriz de Leslie, la cual especifica edades, más las dos matrices son idénticas cuando cada estado corresponde a una unidad de tiempo, los individuos no presentan variación individual y los estados son tomados en su secuencia temporal. Por tanto, y de acuerdo con esto, el modelo de Leslie es un caso particular del modelo de Lefkovich.

Por otro lado, los investigadores Buongiorno y Gilles en 1987 formularon un modelo matricial para el estudio de la dinámica poblacional de bosques

disetáneos. Al considerar el efecto de las variables exógenas dependientes de la estructura de los bosques, sobre el crecimiento diamétrico de los árboles, se plantea un modelo matricial que nos permite realizar cosecciones en los sesgos originados al asumir la estacionalidad de las probabilidades de transición que aparecen en los modelos establecidos por los mencionados autores. Cabe mencionar en esta parte, que la matriz L de Leslie en general está definida por elementos que son coeficientes proporcionales en el tiempo señalado. A continuación desarrollaremos algunas aplicaciones de los modelos de crecimiento poblacional:

5.1.2. Crecimiento Poblacional de una Especie Biológica

Supongamos que para cierta especie, la población en un período (hora, semanas, año, siglo) es un múltiplo constante de la población en el período anterior. Esto es posible, dado que las generaciones son distintas y cada organismo produce μ descendientes y después muere. Sea p_n la población al final del período n -ésimo. Entonces bajo las suposiciones realizadas, tenemos la proporción:

$$p_n = \mu p_{n-1}$$

Así, digamos que si p_0 representa la población inicial, obtenemos entonces la secuencia:

$$p_1 = \mu p_0, p_2 = \mu p_1 = \mu^2 p_0, \dots, p_n = \mu^n p_0$$

Cuando sucede que, entonces la población permanece constante, pero si se tiene $\mu < 1$, ocurrirá que la población de especies biológicas disminuye, y si $\mu > 1$, entonces la población aumenta. Este modelo resulta ser muy sencillo en una Dinámica Poblacional, de allí que es necesario postular a otros factores que fundamenten la ecuación dinámica, esto es, el número de descendientes producidos no es sólo función del número de adultos, sino también ha de depender de la edad de ellos. A modo de ejemplo, consideremos una población humana en la que todas las mujeres tienen más de 50 años de edad, entonces se tendría una tasa de multiplicación diferente que cualquier otra población en la que las mujeres tienen edades entre 20 y 40 años.

Estas afirmaciones nos permiten concluir que, para desarrollar una completa descripción de la realidad del problema, debemos utilizar modelos matriciales que nos lleven a aplicar diferentes tasas de multiplicación de los grupos de diferentes edades que intervienen en esta dinámica. En tal sentido proponemos un modelo de crecimiento poblacional para un cierto tipo de aves (gaviotas, golondrinas, pelícanos). En esta población de aves, suponemos que el número de hembras jóvenes en el año $n-1$. Luego denotamos por $p_{j,n-1}$ el número de hembras jóvenes en el año $n-1$, y sea también $p_{a,n-1}$ el número de hembras adultas en el año $n-1$. Ciertamente existen pájaros que han de fallecer en el transcurso del año. Vamos a suponer que sobreviven un número r de pájaros jóvenes y que llegan a la adultez en el año n , en la primavera. De otro lado, cada pájaro hembra que ha sobrevivido produce huevos en esta estación, que empollados se obtienen un promedio de h hembras jóvenes en la siguiente estación primaveral. Ya en este tiempo los adultos también mueren, y la cantidad de adultos que sobreviven de esta estación a la siguiente es de s . Existe el caso singular en el que la proporción de las aves que sobreviven podría ser constante, este es un hecho que puede ocurrir en la práctica.



En realidad, son varios los factores que intervienen en esta dinámica de población de aves, y sus muchas especies, en el tiempo de sobrevivencia; así tenemos: la edad, efectos de la vejez, edad de la madre, que influyen de algún modo en el número de descendientes. Formularemos ahora la ecuación matricial, como $p_{j,n}$ y $p_{a,n}$ constituyen las poblaciones de hembras jóvenes y adultas en el año n , en forma respectiva, entonces tenemos el sistema matricial:

$$p_{j,n} = h p_{a,n-1} ; \quad p_{a,n} = r p_{j,n-1} + s p_{a,n-1}$$

Que implica: $\bar{p}_n = A\bar{p}_{n-1}$, donde $\bar{p}_n = \begin{pmatrix} p_{j,n} \\ p_{a,n} \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & h \\ r & s \end{pmatrix}$ que es la matriz de crecimiento poblacional de esta especie biológica. Los cálculos recurrentes en $\bar{p}_n = A\bar{p}_{n-1}$ conllevan a:

$$p_1 = Ap_0; p_2 = Ap_1 = A(Ap_0) = A^2 p_0; p_3 = Ap_2 = A(A^2 p_0) = A^3 p_0$$

Que en forma sucesiva conducen a: $\bar{p}_n = A^n \bar{p}_0$, donde sabemos muy bien que indica el vector o matriz columna de las poblaciones iniciales de hembras jóvenes y adultas. Las tasa de supervivencia, prácticamente son las que hacen la diferencia respecto de las aves jóvenes y adultas.

Este modelo puede comprender a muchas especies de aves que pueblan distintas regiones del planeta, aunque no siempre los factores de desarrollo de las aves resultan ser los mismos, sin embargo, existe una generalidad de éstos. En particular, si consideramos la matriz numérica $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ diremos que el elemento 2 significa que cada hembra adulta produce dos descendientes hembras, lo que nos lleva a plantear que cada hembra ha de poner 2 huevos al menos, pudiendo poner más. Nótese que: $0 \leq v, s \leq 1$, y que $r < s$ en razón de que las aves jóvenes con muy poca probabilidad no sobreviven a las aves adultas.

A continuación, examinamos el comportamiento de esta población de aves a partir de la matriz o vector de población p_n . Los cálculos determinan:

$\bar{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$, de allí que $p_{1,1} = 20$, $p_{21} = 5$, de modo que el total de la población de hembras al cabo de m años es de 25; la razón de hembras jóvenes a adultas por tanto, es de $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ en el primer año de desarrollo.

En los años subsiguientes, se obtienen los siguientes resultados:

$\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8.5 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, ya que el número de pájaros no se fracciona.

$\bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\bar{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8.3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$; y podemos

continuar en forma sucesiva con los vectores de población $\bar{p}_4, \bar{p}_5, \dots$

Formulamos las razones $\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}}$ y $\frac{T_n}{T_{n-1}}$, así como una tabla comparativa de valores calculados según los años transcurridos.

Año	Número de aves jóvenes	Número de aves adultas	Población total de hembras	Tendencia poblacional	
				$\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}}$	$\frac{T_n}{T_{n-1}}$
n	$p_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n		
0	0	10	10	0.00	
1	20	5	25	4.00	2.50
2	10	8	18	1.18	0.74
3	17	7	24	2.34	1.31
4	14	8	22	1.66	0.96
5	17	8	25	2.00	1.13
10	22	12	34	1.87	1.06
11	24	12	36	1.88	1.07
12	25	13	38	1.88	1.06
20	42	22	64	1.88	1.06

La Tabla de valores poblacionales nos muestra la tendencia hacia la constante 1.88, si n comprende muchos años, entonces la razón tendiente conduce a escribir $p_{j,n} = 1.88 p_{a,n}$, habiendo por tanto, una multiplicidad de poblaciones. De otro lado, la población total va en aumento con $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ con la tendencia a la constante 1.06, es decir, en términos porcentuales constituye $0.06 = \frac{6}{100} = 6\%$ al año. Averigüemos los motivos de este comportamiento, para ello recurrimos a la determinación y análisis de los autovalores de la matriz de proporciones A . Sean entonces λ_1, λ_2 autovalores distintos y reales con los autovectores correspondientes \bar{v}_1 y \bar{v}_2 . De la independencia de ellos escribimos: $\bar{p}_0 = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2$, luego tenemos una transformación en $\bar{p}_n = A^n \bar{p}_0$ resultando

$$\bar{p}_n = A^n (c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2) = c_1 A^n \bar{v}_1 + c_2 A^n \bar{v}_2 = c_1 \lambda_1^n \bar{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \bar{v}_2$$

Calculamos los autovalores:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & h \\ r & s - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - s\lambda - hr = 0$$

De donde:
$$\lambda = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 4rh}}{2}$$

Ahora analicemos la naturaleza de λ , como $h > 0$, $0 < r < 1$ y $0 < s < 1$ según la hipótesis del problema formulado, se deduce que $4rh > 0$ y $s^2 + 4rh > 0$.

Esto indica que los autovalores son, en efecto, reales y diferentes, además $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, más se tiene: $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Así que, la matriz poblacional viene a ser:

$$\bar{p}_n = \lambda_1^n \left[c_1 \bar{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n c_2 \bar{v}_2 \right]$$

Estudiamos con cuidado el comportamiento de los términos, dado que $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ se

tiene que $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0$ si n es muy grande, de modo que, obtenemos:

$$p_n = c_1 \lambda_1^n \bar{v}_1$$

Lo cual significa que, en cuanto a la distribución de edades de las aves, logramos una estabilidad poblacional, que es proporcional al autovector de población. Claramente se observa que el grupo de edades experimenta un cambio por el factor en cada año. De allí que, en un largo plazo, las ecuaciones:

$$p_n = \mu^n p_0 \quad \text{y} \quad \bar{p}_n = A^n \bar{p}_0$$

Operan de manera exacta a sus cálculos. En el corto plazo, los números tienen oscilaciones, antes de la estabilidad alcanzada. Por consiguiente, al tomar $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ resultan sus autovalores $\lambda_1 = 1.06$ y $\lambda_2 = -0.56$, lo que explica realmente que el 6% corresponde a un aumento en la población vista en la tabla.

Calculamos \bar{v}_1 si autovector en el sistema $(A-1.06I)\bar{v}_1=\bar{0}$, lo que se obtiene

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.53 \end{pmatrix}$. Igualmente hallamos \bar{v}_2 el otro autovector en $(A+0.56I)\bar{v}_2=\bar{0}$,

obteniéndose $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28 \end{pmatrix}$. Note que los elementos de \bar{v}_1 determinan $\frac{1}{0.53} \approx 1.88$,

que justamente es $\frac{P_{j,n}}{P_{a,n}}$.

Es sorprendente la enorme información que se obtiene al realizar cálculos sencillos con los autovalores de una matriz poblacional. El objetivo trazado aquí, es conocer si una población crecerá o se reducirá en forma total, en tal sentido diremos que la población de aves va en aumento si $\lambda_1 > 1$ lo que nos lleva a

mayorar $(s^2 + 4rh)^{1/2} > 2 - \beta$ lo que implica $4rh > 4 - 4s$, es decir $h > \frac{1-s}{r}$, y

valorando resulta $h > 1.67$.

El modelo que acabamos de estudiar presenta obviamente serias limitaciones en el análisis, en efecto:

- a) La natalidad y la mortalidad tienen tasas cambiantes muy frecuentes en forma anual y el clima es determinante en ellas.
- b) Existen muchas especies de aves con tasas de natalidad y de mortalidad que varía según el tamaño de la población avícola, por motivo de escasez de alimentos, así como la sobrepoblación generada. Sin embargo, cualquier población biológica no puede crecer en forma indefinida a una tasa fija, ya que de ocurrir, entonces la tierra estaría llena de esta población, y lógicamente es no sería real.

Este modelo sobre el crecimiento poblacional de aves, en particular los pájaros, que lo hemos presentado corresponde a un caso especial del modelo de crecimiento de población de Leslie expuesto en eventos científicos internacionales en 1940.

5.1.3. El Modelo Poblacional de Leslie

Supóngase que una determinada población de pájaros está estructurado por edades, de modo que las hembras se clasifican en m clases por edades, vamos a considerar que todas las clases de las edades poseen la misma amplitud o rango. De esta consideración se infiere que, si M años es la máxima edad en años alcanzada por alguna hembra pájaro, entonces cada grupo de edades fue formulado por la razón $\frac{M}{m}$ años. Denotando a estos grupos por $G_1, G_2, G_3, \dots, G_{m-1}, G_m$ elaboramos el siguiente cuadro:

<i>Agrupación</i>	<i>Representación interválica de edades</i>
G_1	$\left[0, \frac{M}{m} \right)$
G_2	$\left[\frac{M}{m}, \frac{2M}{m} \right)$
G_3	$\left[\frac{2M}{m}, \frac{3M}{m} \right)$
G_4	$\left[\frac{3M}{m}, \frac{4M}{m} \right)$
⋮	⋮
⋮	⋮
G_{m-1}	$\left[\frac{(n-2)M}{m}, \frac{(n-1)M}{m} \right)$
G_m	$\left[\frac{(n-1)M}{m}, M \right)$



De estas observaciones se desprende que la población de pájaros son iguales a las amplitudes de los grupos de edades, esto es: $t_0 = 0; t_1 = \frac{M}{m}, \dots, t_n = \frac{nM}{m}$. De otro lado, la variación de la población es representada por $p_{i,n}$ como el número de hembras en el grupo G_i después del período n . asimismo, denominamos h_i el

número promedio de hembras que nacen en un solo período a una hembra en G_i , ya que al tener $h_i > 0$ entonces se tienen al menos un nacimiento o tal vez dos. Definimos la proporción de hembras en el grupo G_i que sobreviven para integrarse al grupo siguiente G_{i+1} , lo denotamos por s_i , es evidente que $0 \leq s_i \leq 1$, estamos obligados a suponer que si $s_i > 0$, de lo contrario no existirían hembra en G_{i+1} . Tomemos ahora los elementos de los vectores poblacionales:

$p_{i,n}$: número total de hembras nacidas de las hembras en la totalidad de los m grupos de edades comprendido entre los tiempos.

Los planteamientos realizados nos llevan a escribir $p_{i+1,n} = s_i p_{i,n-1}$, es decir, el número de pájaros hembras en el grupo de edades G_{i+1} en el tiempo t_n viene a ser el número de hembras en el grupo G_i para el tiempo t_{n-1} , aquellas hembras que han podido sobrevivir al clima para integrar el grupo siguiente G_{i+1} . La representación matricial consiste en: $\bar{p}_n = L \bar{p}_{n-1}$, donde $\bar{p}_n = (p_{1,n} \ p_{2,n} \ \dots \ p_{m,n})^t$ es el vector poblacional, y

$$L = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} \ 0 \end{pmatrix}$$



Si consideramos inicialmente el vector poblacional para cada grupo de edades tenemos la secuencia matricial:

$$\bar{p}_1 = L \bar{p}_0, \bar{p}_2 = L \bar{p}_1 = L(L \bar{p}_0) = L^2(\bar{p}_0), \bar{p}_n = L \bar{p}_{n-1} = L(L^{n-1}(\bar{p}_0)) = L^n(\bar{p}_0)$$

Cuando $n=2$ entonces $L \in M(2 \times 2)$ y, como lo hemos discutido en la Sección anterior, L posee dos autovalores reales λ_1 y λ_2 con ciertas condiciones, luego λ_1 es el autovalor dominante en el sentido estricto. Para el caso general en que $m > 2$ no es posible tener estas propiedades para los autovalores, ya que por ejemplo los

autovalores de L pueden ser complejos, lo que ocurre frecuentemente. También podemos encontrar $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, por tanto debemos elaborar condiciones con el fin de evitar estas dificultades. En efecto, tomemos L la matriz de Leslie de $n \times n$ y hagamos las hipótesis siguientes:

- (a) $h_i \geq 0$ para $i=1,2,3, \dots, m$
- (b) Existen al menos dos h_i sucesivas que son y $h_{i+1} > 0$ para algún i .
- (c) Imponemos $0 < s_i \leq 1$ con $i=1,2,3, \dots, m$

En consecuencia, L tiene un único autovalor $\lambda_1 > 0$ que posee multiplicidad algebraica 1, además tiene un autovector de componentes positivas de modo que $|\lambda_i| < \lambda_1$ para cualquier autovalor λ_i . Concluimos entonces que $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$, lo que

implica $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0$ cuando n crece en forma indefinida, de donde:

$$\bar{p}_n = c_1 \lambda_1^n \bar{v}_1$$

En el cual hemos supuesto que L tiene n autovectores linealmente independientes, lo que significa que L es diagonalizable. El caso contrario en que L es no diagonalizable el problema poblacional se complica, sin embargo, podemos considerar autovectores generalizados, ellos hacen su aparición cuando L ha pasado a la forma canónica de Jordán. Observamos pues, que a un largo plazo la distribución de las edades llega a estabilizarse a un valor proporcional a \bar{v}_1 , además notamos que cada grupo de las edades va a cambiar debido a la presencia de un factor λ_1 , y lo hará anualmente. Este resultado se pone interesante cuando \bar{v}_1 se normaliza, de tal manera que los componentes de \bar{v}_1 expresan cada una, los porcentajes de las hembras en cada grupo. Finalmente, lo que se esperaba: $\lambda_1 > 1$: la población crece; $\lambda_1 = 1$: la población es estable; $\lambda_1 < 1$: la población decrece.

Aplicaremos el modelo de Leslie al crecimiento de una población de hombres y mujeres. A fin de obtener mejores resultados supondremos que ninguna mujer de menos de 15 años o de más de 45 años tiene descendencia, por tanto, las clasificamos en sólo tres grupos de edades:

$$G_1: [0, 15); \quad G_2: [15, 30); \quad G_3: [30, 45)$$

En consecuencia, el claro está que $h_1=0$. Supongamos asimismo que $h_2=1$, $h_3=0.5$, $s_1=0.9$ y $s_2=0.8$; luego la matriz de Leslie se escribe así:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que conduce al polinomio $p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \lambda^3 + 0.9\lambda + 0.36 = 0$ cuyas raíces consisten: (se ha procesado los radicales con cuatro decimales)

$\lambda_1 = 1.1069$, $\lambda_2 = 0.5534 + 0.1375i$, $\lambda_3 = -0.5534 + 0.1375i$ las cuales presentan la particularidad:

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{(-0.5534)^2 + (0.1375)^2} \cong 0.5703$$

Hallaremos ahora \bar{v}_1 al resolver el sistema formado, lo que nos da una solución:

$$x_1 = 1.7017, \quad x_2 = 1.3836, \quad x_3 = 1$$

El autovector normalizado s entonces:

$$\bar{u}_1 = (0.4166 \quad 0.386 \quad 0.2447)^t$$

Estos cálculos matriciales nos permiten afirmar lo siguiente:

- (1) Como la población humana crecerá en el orden de 10.7% por cada 15 años. Aquí, n grande debe significar un poco más de 120 años.
- (2) El coeficiente porcentual de mujeres menores o iguales a 45 años, llegará a ser, después de muchos años del orden de 41.6%. También para las mujeres de menor de 15 años, será de 33.9% para aquellas entre 15 y 30 años, y también con 24.5% entre 30 y 45 años en el grupo de edades.

En la presente sección, tal como se ha analizado y desarrollado el modelo de crecimiento poblacional, se ha estructurado la dinámica tomando en cuenta las especies biológicas aves y humanos; ahora haremos un desarrollo teórico pero completo de un modelo de Leslie formulado para cualquier población organizada. Hemos de suponer entonces que una determinada población se encuentra estructurada por tres sectores de edad equitemporales a intervalos de 5 años, con una distancia entre tiempos sucesivos de observación dado por 5 años. Con una hipótesis de tasas de fecundidad asociada a cada sector dada por: $\frac{1}{12}, 8, 10$ y las tasas de supervivencia asociadas a la transición de un sector al otro

consisten: $\frac{1}{48}, \frac{1}{10}$.

También considérese el tamaño inicial de la población por sectores dada por el vector de población $\bar{p}_0 = (144 \ 60 \ 20)^t$.

Es nuestra intención realizar un estudio de la evolución temporal de una población (humana, animal, plantas, objetos) con estas características efectuamos cálculos para obtener los tamaños de la población por los sectores de edad:

(p_1, p_2, p_3) en la primera observación:

$$p_{1,1} = \frac{1}{12}(144) + 8 \cdot 60 + 10 \cdot 20 = 692; \quad p_{2,1} = \frac{1}{48}(144) = 3; \quad p_{3,1} = \frac{1}{10}(60) = 6$$



Note que $p_{i,1}$ mide el tamaño del i -ésimo sector al cabo de una unidad de tiempo, esto es, a 5 años. El sistema de ecuaciones en forma compacta es $\bar{p}_1 = L \bar{p}_0$, en el cual la matriz de Leslie consiste en una matriz 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Asociada al modelo n estudio. Denótese por $\bar{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n})^t$ en forma genérica luego si transcurren 50 años ó 60 años (10 ó 12 periodos de tiempo de 5 años) debemos calcular $\bar{p}_{10} = L^{10} \bar{p}_0$ usando la población inicial \bar{p}_0 ; en general, resulta:

$$\bar{p}_n = L^n \bar{p}_0$$

Contamos con el hecho de que la matriz de Leslie L es diagonalizable, es decir, que admite escribirse $L = QDQ^{-1}$, donde D es una matriz diagonal cuyos únicos elementos son los autovalores de L ; además Q es una matriz inversible cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores de L . En tal sentido, procedemos a calcular en primer término los autovalores de L , lo que resulta $p(\lambda) = \det(L - \lambda I) = 0$, entonces tenemos la ecuación, la cual ha sido obtenida al aplicar el método de eliminación de Gauss a las ecuaciones del sistema formado, el cual comprende la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1-12\lambda & 96 & 120 & 0 \\ 0 & 24\lambda^2 - 2\lambda - 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 48\lambda^3 - 4\lambda^2 - 8\lambda - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta parte es necesario introducir un parámetro μ para sostener a $x_3 \in R$, de modo que obtenemos:

$$x_1 = \frac{120\lambda}{12\lambda^2 - \lambda - 2} \mu; \quad x_2 = \frac{5}{2(12\lambda^2 - \lambda - 2)} \mu; \quad x_3 = \mu$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado en λ haciendo $z = 2\lambda$, lo que nos da:

$$6z^3 - z^2 - 4z - 1 = (z-1)(6z^2 + 5z + 1) = 0.$$

Por tanto se tienen las raíces:

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2}, z_3 = -\frac{1}{3} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{4} \text{ y } \lambda_3 = -\frac{1}{6}$$

Calculamos ahora los autovectores correspondientes para $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ resultan

$\bar{v}_1 = (120\mu \quad 5\mu \quad \mu)^t$; para $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ se obtienen $\bar{v}_2 = \left(30\mu \quad -\frac{5}{2}\mu \quad \mu\right)^t$; y para $\lambda_3 = -\frac{1}{6}$

tenemos los autovectores de la forma $\bar{v}_3 = \left(\frac{40}{3}\mu \quad -\frac{5}{3}\mu \quad \mu\right)^t$.

Por tanto, elaboramos la matriz Q evaluando las columnas para $\mu = 1, \mu = 2$ y $\mu = 3$ en forma respectiva se obtiene:

$$Q = \begin{pmatrix} 120 & 60 & 40 \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/8 \end{pmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/120 & 7/100 & 1/20 \\ 1/100 & -4/25 & -2/5 \\ -1/200 & 3/100 & 9/20 \end{pmatrix}$$

Con estos cálculos hallamos finalmente el vector poblacional \bar{p}_{10} , en efecto:

$$\bar{p}_{10} = L^{10} \bar{p}_0 = QD^{10}Q^{-1}\bar{p}_0 = \begin{pmatrix} 0.85003600 \\ 0.03560840 \\ 0.00704608 \end{pmatrix}$$

Ciertamente esta aplicación para una determinación poblacional cumple con las características de los modelos de Leslie, el autovector dominante $\bar{v}_1 = (120 \quad 5 \quad 1)^t$ nos informa respecto de la población total que representa cada uno de los sectores de edad cuando el tiempo ha sido suficiente para alcanzar una estabilización de su crecimiento.

En términos porcentuales, cada sector de edad presentan los valores:

$$p_1 : \frac{120}{120+5+1} = 0.9528; \text{ es decir, } 95.58\% \text{ del total}$$

$$p_2 : \frac{5}{120+5+1} = 0.0396; \text{ es decir, } 3.96\% \text{ del total}$$

$$p_3 : \frac{1}{120+5+1} = 0.0079; \text{ es decir, } 0.79\% \text{ del total}$$

Estos porcentajes indican prácticamente que la población en \bar{p}_{10} se ha estabilizado.

5.2. Análisis y Estructura de la Dinámica de Poblaciones

5.2.1. Explosión demográfica y Colapso Poblacional

Conocemos que una población comprende un conjunto de individuos de la misma especie que habitan muy cerca unos de otros, de modo que pueden aparearse en su medio. Algunas poblaciones poseen un determinado número de individuos que es bastante estable en el tiempo, en tanto que en otras el número de individuos aumenta, disminuye u oscila. Precisamente son los ecólogos poblacionistas los que se ocupan de investigar estos comportamientos. Podemos iniciar el estudio de las estructuras de la Dinámica de Poblaciones considerando en primer término las explosiones demográficas, que son etapas episódicas en las que una población crece muy aceleradamente. El tiempo de ellas puede ser a veces unos pocos días, o semanas, o meses, hasta toman años y ocurren otras veces que toman siglos. Existen en numerosas naciones los casos de estas explosiones que marcaron épocas en la vida política, económica y social de una nación, en particular las referidas a poblaciones humanas. Podemos referirnos a la población de mosquitos, la población de ratas llamadas ratadas; en regiones ganaderas el pastoreo excesivo sobre los plaguicidas en lugares poco áridos de Pampas Galeras, en la sierra central del Perú, es común que, con los años transcurridos aumenta la cantidad de árboles como el eucalipto, el pino. Esto puede constituir una amenaza tal que podrían ellos desplazar a especies lugareñas. Lo opuesto al fenómeno de las explosiones demográficas viene a ser el colapso poblacional que algunas veces conduce a situaciones de extinción local o por último a la desaparición de poblaciones enteras. Nuestros auquénidos tienen este problema en la serranía peruana, este es el caso de la llama con respecto a los ganados ovino y vacuno. En noticias recientes, en la región de La Pampa, provincia de Buenos Aires, Argentina, han desaparecido de los partidos donde el pastizal natural fue sustituido por cultivos agrícolas, un fenómeno por cierto que ilustra la extinción de una población agrícola que puede suceder en cualquier región pastizal de la tierra.

¿De qué manera suceden estos fenómenos?, ¿existe conexión alguna como causal con períodos como los días cálidos y húmedos? Explicaremos todos estos fenómenos usando principios básicos y para comprenderlos es necesario primero considerar el ciclo de la vida de la especie que explota o se extingue su población en la región habitada.

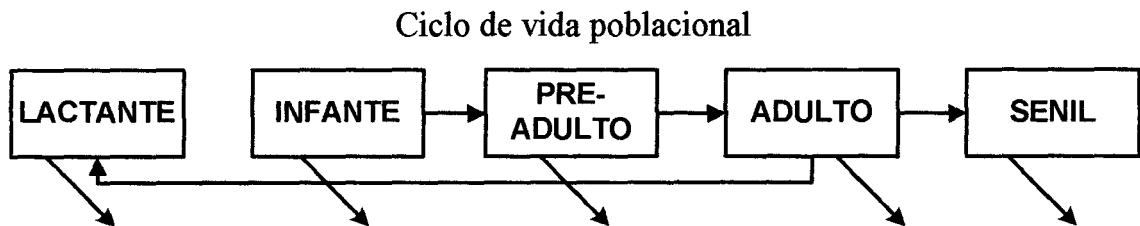


Figura 01: Modelo de análisis y estructura de la dinámica de una población de ratas, según el ciclo de vida.

En este modelo las casillas indican distintos estados del ciclo de vida de la rata, asimismo las flechas representan los posibles cambios en cada período. Consideremos, como ilustración el caso de un lactante que puede pasar al período infantil o puede fallecer, un adulto puede fallecer, pasar a la etapa senil, y puede producir nuevos individuos del período lactante. En verdad, este modelo puede utilizarse para representar la variedad de estadios y cambios que ocurren en un individuo. A partir del gráfico de casillas podemos razonar e inferir que una población de ratas (insectos, aves, peces) que aumenta en forma explosiva, probablemente llega a tener una alta tasa de reproducción de especies, altas tasas de pasajes a través de los períodos iniciales llegando al período adulto, tenga una baja tasa de pasaje al período senil, y finalmente pase a bajas tasas de mortalidad. Aquí observamos un aspecto que nos parece muy interesante en la dinámica de población de ratas; ocurre que, como resultado esta población tendrá un número grande de adultos ratas que se reproducirán mucho en un período corto de días. En consecuencia, habrían muchos lactantes, los cuales pasarían a infantes, luego a pre-adultos, adultos y se reproducirían durante mucho tiempo. Esta dinámica poblacional necesita la determinación de las principales tasas vitales que originan el crecimiento acelerado y los factores que controlan el fenómeno. En la

ilustración que estamos desarrollando sobre estos roedores, debemos calcular la conexión existente entre la floración de las plantas comestibles y la alteración sufrida en la dinámica de población.

5.2.2. Caracterización de las poblaciones de especies en regiones naturales

Las poblaciones de especies biológicas si bien pertenecen a la misma especie, y por tanto pueden aparearse y tener descendencia fértil, empero los individuos se diferencian entre sí en algunos aspectos. Destacamos en primer aspecto que precisamente es la evolución de las poblaciones, en que cada individuo tiene una combinación particular de los llamados *alelos* que son versiones de los distintos genes denominados el *genotipo*. Esto traerá como consecuencia que la población obtiene una composición genética determinada por las proporciones de individuos con cada genotipo, de allí que el cambio en la composición genética de las poblaciones que sucede a través de las generaciones es conocido como la evolución poblacional. Existen otras diferencias no menos importantes tales como el tamaño, edad, estado ontogénico y sexo. Ahora bien, las proporciones de la población que corresponden a cada clase de edad, período de desarrollo, tamaño o sexo constituyen lo que llamamos la estructura poblacional y, si es en el tiempo, será llamado estructura de la dinámica poblacional. En la figura 1 de la Sección 2.2.1, la estructura de la población está representada por las casillas y por los números de individuos correspondientes a cada casilla. La estructura de una población radica su importancia en que los individuos tienen un diferente comportamiento demográfico, esto es, tienen distintas tasas de mortalidad, fecundidad y el modo de transitar de un período de vida a otro, esto constituye la dinámica de la población en mención. El análisis de la estructura poblacional que hemos desarrollado, es llamado *Demografía*.

La estructura de una población de individuos está determinada por las proporciones de ellos según cada clase de edad, el período de desarrollo, el tamaño o el sexo. Estos factores están asociados en forma evidente en las

poblaciones humanas, así tenemos que las mujeres son de menor tamaño que los hombres; en las poblaciones de animales o plantas se tienen hechos sorprendentes, pues cuando ellos crecen cambian de sexo; podemos encontrar peces que son hembras cuando son pequeños y cuando grandes cambian al sexo macho; existe una hierba de los campos de nuestra serranía de nombre tripillo (*Aristema Triphayllum*) que produce flores masculinas cuando comienza a crecer, una vez adulta produce flores femeninas y frutos. Aun cuando estas ilustraciones nos manifiestan los vínculos en las edades, sin embargo, existen una variedad de casos en los cuales estos vínculos no aparecen. Citamos el caso de la población de árboles que viven en grandes bosques, sucede que dos individuos de la misma edad pueden estar, uno en el período de plántula, con alta mortalidad, crecimiento casi nulo y sin reproducción, el otro en el período del conopeo, con baja mortalidad entre los individuos, rápido crecimiento y muy abundante reproducción. Estamos convencidos pues, que la dinámica de una población de ciertos individuos depende rígidamente de su estructura organizacional, la esperanza de vida está dependiendo del número de individuos en reproducción o en pre-reproducción.

En muchas poblaciones naturales sucede que la mortalidad es alta entre los individuos jóvenes, pero que resulta ser de bajo nivel entre los adultos. En los Estados Unidos, en el estado de Oregón existe un árbol oriundo de la región, llamado fago (*Fagus Gramdifolia*) al cual se le ha realizado un estudio sobre la dinámica de su población en el año 1982, y se le encontró que la mortalidad anual de los arbolitos que tienen un tronco de 3 cm de diámetro es del 3%, en tanto que la mortalidad anual de los árboles adultos con un tronco de 40 cm de diámetro era del 1%; esto nos ilustra claramente que existe una ley de la naturaleza que se aplica a poblaciones de individuos que no ponen al cuidado a sus crías, dejando al abandono, porque no solamente se trata de la observación realizada, sino que está justificada por los modelos en que evolucionan las formas de vida. Sin embargo, en el extremo de esta observación, ocurre que en las poblaciones humanas en donde los individuos ponen el mayor cuidado a sus

crías (bebés), tienen la más alta mortalidad en los períodos post-reproductivos. La figura 2 manifiesta la estructura de esta dinámica, y muestra la supervivencia de los individuos con una tasa porcentual:

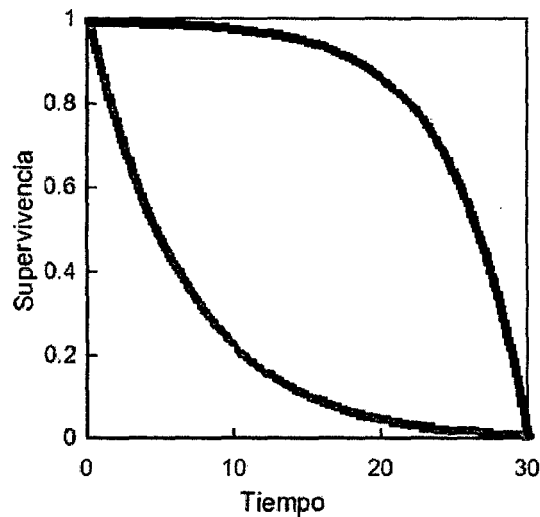


Figura 02: curvas de supervivencia correspondientes a poblaciones con mortalidad juvenil alta (línea roja) y baja (línea negra)

Los aspectos genéticos que poseen los individuos de una población natural determinan una total dependencia en las tasas vitales de supervivencia, desarrollo y reproducción. Así tenemos que la edad de la madurez sexual varía con los alimentos disponibles, más ésta variación tiene un tope genético. Por otro parte, la influencia del medio ambiente en los individuos sobre sus tasas vitales es determinante, esto ocurre con los ciervos que viven en el Parque Nacional de Yellowstone en Norteamérica, al cabo de un año lluvioso se encontró que la fecundidad de las hembras es muy alta, y también la mortalidad resultó menor cuando ha transcurrido un año seco en el ambiente forestal.

Otro análisis de la dinámica poblacional que resiste es la tasa de crecimiento per cápita, en efecto, como sabemos la tasa de crecimiento de una población es la velocidad de variación de individuos, el cual se mide en individuos por unidad de tiempo. Esta tasa puede ser medida en individuos por hora, individuos por semana, individuos por año. La tasa de crecimiento resulta al considerar la suma

de los nacimientos y las inmigraciones, menos la suma de las muertes y emigraciones de los individuos que suceden en una unidad de tiempo. Así que:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{(Nacimientos + Inmigraciones) - (Muertos + Emigración)}{\Delta t}$$

Es así como evaluamos el crecimiento poblacional en unidades de tiempo al considerar en la dinámica los egresos y los ingresos en los procesos poblacionales, sin embargo, si los procesos se realizan en unidades per cápita tendríamos otra forma de evaluación del sistema. La tasa de crecimiento per cápita de una población consiste en el porcentaje de cambio de cambio en el tamaño de la población por unidad de tiempo, y asimismo la tasa de mortalidad per cápita es el porcentaje de los fallecidos. De acuerdo a esto existen trabajos concluidos sobre una dinámica presentada durante la década de los 90', en la cual la población de argentinos ha tenido una tasa de per cápita en un aproximado de 1.13% al año según el organismo nacional sobre censos poblacionales, esto quiere decir que por cada 10 000 al inicio del año había 10 113 al inicio del año siguiente; comportamientos semejantes se tienen en otras latitudes del continente, estas tasas de crecimiento sirven para diseñar modelos de dinámica de poblaciones al establecer la matriz de crecimiento poblacional del Modelo de Leslie. Ahora bien, si no existen inmigraciones ni tampoco emigraciones, el crecimiento poblacional es sólo la diferencia del número de nacimientos con el número de muertes. Esto es:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (A - B)N$$

Donde: A : es el número de nacimientos; B : es el número de muertes.

Esta relación, indica la tasa promedio como razón de cambio expresada por las tasas promedio per cápita. La ecuación formulada es una expresión que manifiesta en el tiempo la dinámica de crecimiento.

En el tiempo instantáneo dt la tasa instantánea de crecimiento poblacional consiste en: $\frac{dN}{dt} = (a-b)N$, donde $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} A$; $b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} B$ en la práctica denotamos por $a-b = r_a$ y representa la tasa instantánea de crecimiento per cápita de la población, luego escribimos:

$$\frac{dN}{dt} = r_a N$$

Al analizar esta ecuación podemos manifestar que el valor de la tasa de crecimiento de la población depende del número de individuos de la población y de la tasa de crecimiento per cápita, entonces una población muy grande tiene un cambio mucho mayor que el de una población pequeña, de allí que esta propiedad viene a ser la única que controlaría el crecimiento de una población cuyo valor de r_a llega ser constante e independiente del tamaño de la población de individuos, con la misma natalidad y mortalidad per cápita.

En el diagrama del ciclo de vida de la figura 01 notamos claramente que podemos identificar los procesos que diseñan la tasa de crecimiento. Por una parte, la tasa de reproducción depende del ritmo con que los individuos adultos producen crías y del número de descendientes que tienen cada vez, y de la frecuencia con que se reproducen los individuos de la población; en tanto que el número de adultos resulta realmente de la precocidad con que los individuos alcanzan el período o etapa de adultez, de su supervivencia y del tiempo en que dura la adultez. En la figura 01, esto estaría significando que la tasa de reproducción depende ciertamente del tamaño de la flecha de reproducción, así como de la caja de adultos. Al mismo tiempo el tamaño de la casilla de adultos es influido por el balance entre la flecha de entrada a esa casilla por maduración de los pre-adultos y las salidas por mortalidad y por el tránsito de la etapa senil. La tasa de mortalidad de la población, sin embargo, depende realmente de las mortalidades específicas en cada etapa y también de las proporciones de la población en cada una de ellas.

Una población que posee una alta proporción de individuos en una etapa de la vida con alta mortalidad tendría mayor mortalidad total que otra que posee una alta proporción en etapas con baja mortalidad; y con respecto a la supervivencia de los individuos en todas las etapas diremos que también contribuye al crecimiento de la población.

5.2.3. Los Modelos de Crecimiento Exponencial y Crecimiento Logístico

En la ecuación estudiada $\frac{dN}{dt} = r_a N$, si r_a que es la tasa de crecimiento per cápita, permanece constante y positivo, sucede entonces que el crecimiento de la población por unidad de tiempo vendría a ser una cantidad proporcional fija del total de individuos. Por consiguiente, la población aumentaría en forma acelerada porque su crecimiento absoluto estaría en aumento a medida que va aumentando el número de individuos. Para que esto se realice debe ser necesario que el ambiente satisfaga un crecimiento exponencial en la demanda de recursos y en la eliminación de residuos tóxico. Estas afirmaciones determinan que el factor r_a es igual a r_m que es la tasa de crecimiento per cápita máxima, luego la tasa de crecimiento poblacional consiste en:

$$\frac{dN}{dt} = r_m N$$

el mismo que puede verse a $N \in M(1 \times 1)$, es decir, es una matriz de una fila y de una columna, así que estamos frente a un sistema matricial 1×1 . Resolviéndose como una ecuación diferencial resulta la solución:

$$N(t) = N_0 e^{r_m t}$$

con lo cual hallamos el tamaño de la población en un tiempo t a partir de tamaño inicial N_0 y r_m la tasa de crecimiento poblacional máxima, véase la figura 03.

La población de individuos en su dinámica en el tiempo, llega a expresar su potencial biótico cuando se satisface el crecimiento exponencial en la demanda

de recursos y en la eliminación de residuos tóxicos, así como también la tasa de recursos por parte de los individuos tiene su valor máximo (este es el caso de una temperatura óptima). Si fuese así, entonces su crecimiento se sujeta al tamaño que tiene, y a los controles genéticos de las tasas vitales, de modo que la tasa de crecimiento per cápita es llamada la *tasa intrínseca de crecimiento* y la denotamos por r .

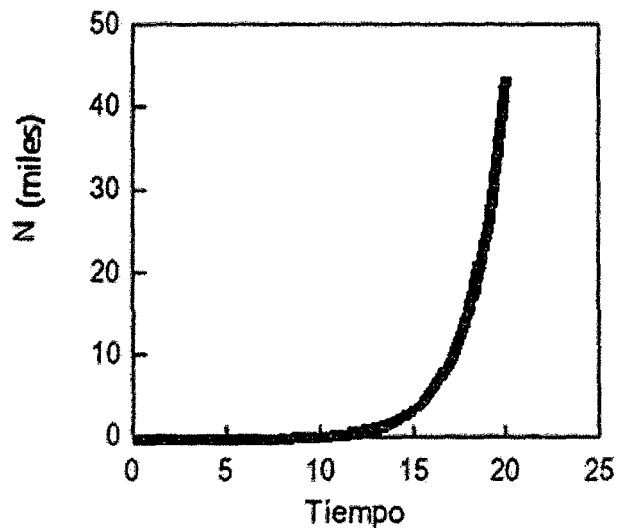


Figura 03: Curva de crecimiento exponencial $r_m = 0.5$

Es evidente que no existe un medio ambiente real capaz de abastecer por un largo tiempo las demandas de recursos y de eliminación de residuos de alta o baja toxicidad que crecen en forma exponencial; aun así, el modelo de crecimiento exponencial tiene una enorme importancia pues el parámetro r permite distinguir la influencia genética de los influyentes factores del ambiente sobre la dinámica de las poblaciones. Esta tasa r queda determinada por los límites genéticos que poseen las tasas vitales, ellos son los que dependen de:

- (a) La edad máxima a la cual puede suceder la última reproducción.
- (b) La edad mínima en la que puede iniciar la reproducción.
- (c) El máximo tamaño de la camada de cada reproducción.
- (d) La máxima frecuencia de reproducción. Y
- (e) Los valores máximos de supervivencia y longevidad de los individuos.

Los organismos en reproducción que tienen un intervalo corto y breve entre generaciones poseen una tasa intrínseca r de crecimiento muy enorme. Podemos citar a manera de ilustración aquellos organismos unicelulares como las bacterias y las amebas, las cuales tienen una reproducción por división celular, esto es, una fragmentación al infinito, ellas poseen una gran capacidad fantástica de crecimiento, en tanto que las condiciones les favorezcan, es decir, mientras pueda continuar una tasa exponencial de crecimiento poblacional celular.

Otra ilustración muy interesante y apocalíptica es la propuesta por los biólogos notables R.H. MacArthur y J.H. Connell, quienes afirman en una dinámica poblacional de bacterias el siguiente acontecimiento: una bacteria que se dividiera cada veinte minutos produciría, en un día y medio, una colonia de más de treinta centímetros de alto sobre toda la superficie de la tierra. Al cabo de una hora, la capa de bacterias tendría una altura que sobrepasaría la altura de los hombres. De continuar con esta tasa de crecimiento teórico, ocurriría que en dos o tres milenios, cualquier población animal o vegetal tendría un peso comparable con el peso del universo visible y llegaría a expandirse hacia el exterior con la velocidad como el de la luz (300 000 Km/seg).

El modelo de crecimiento exponencial, cuyos fundamentos teóricos contribuyen a una mejor comprensión de la Dinámica de Poblaciones, tiene una gran utilidad para estudiar y describir la dinámica de algunas poblaciones durante períodos con extremos limitados. En efecto, es evidente que una población de individuos ha de crecer de modo exponencial cuando accede a un nuevo hábitat o ambiente y la duración de estos períodos varía con respecto a la tasa intrínseca de crecimiento y con el tamaño del hábitat que está disponible para su uso. Así tenemos la ilustración siguiente:

El descubrimiento de América se realizó en 1492 por los españoles y Cristóbal Colón, poco tiempo después, en los años 1600 los europeos introdujeron bovinos y equinos en varias regiones del conquistado Tahuantinsuyo, que ahora son las naciones de Ecuador, Perú, Colombia, Venezuela, Argentina, Chile, entre otros.

En estas regiones las poblaciones de estas especies crecieron exponencialmente por un tiempo largo de más de 300 años. Asimismo, en otra ilustración, después del período de las glaciaciones que tuvo la Tierra en el Pleistoceno, las poblaciones de animales y plantas migraron hacia los polos terrestres y muchas de esas poblaciones crecieron en forma exponencial en las nuevas regiones. Según algunas investigaciones realizadas en las Universidades de Oxford y Cambridge, en Inglaterra, una población del árbol pino creció exponencialmente durante 500 años después del período glacial. En la figura 04 observamos el crecimiento exponencial del árbol pino luego de las glaciaciones, desde 9,500 AC y con un registro de densidad poblacional contada desde 1,000 hasta 5,000 para la apreciación de la población de pinos. Nótese la curva exponencial que promedia los puntos del plano determinados en un laboratorio de análisis numérico.

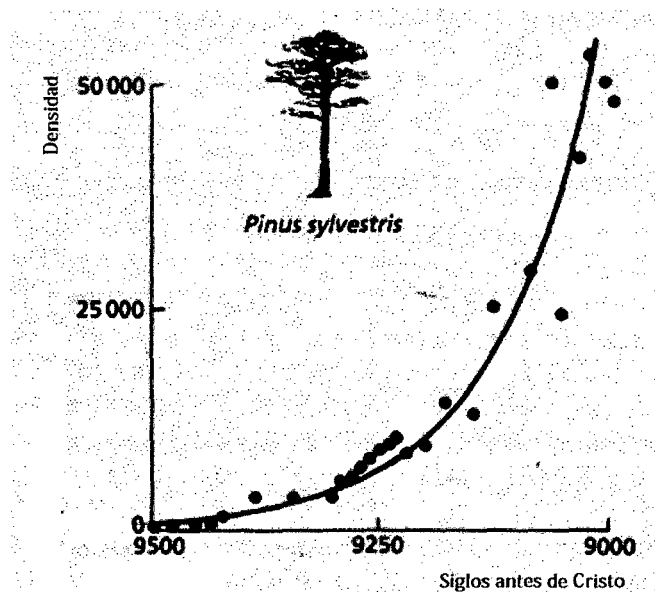


Figura 04: Ejemplos de crecimiento exponencial: *Pinus sylvestris*

Las explosiones demográficas, estudiadas en la Sección anterior son también ejemplos de crecimiento exponencial debido a que las poblaciones experimentan repentinamente cambios que no se esperaban en su hábitat. ¿Qué podríamos decir del crecimiento de la población humana en el mundo? Finalmente podemos afirmar que los humanos crecen en número en forma exponencial e inexorablemente vamos camino hacia una superpoblación en los continentes,

pues estamos en más de 6 mil millones y el área de la superficie terrestre no podrá albergar a tan magnitud numérica de individuos.

El otro modelo de crecimiento poblacional que analizaremos en cuanto a su estructura es el modelo de *crecimiento logístico*. En efecto, para empezar podemos decir que, normalmente las condiciones del medio ambiente a las que se encuentra expuesta una población no permiten que el factor r_a , la tasa de crecimiento per cápita, alcance al valor máximo determinado por los factores genéticos, es decir la tasa intrínseca r . Lo que queremos decir es que existe una resistencia del medio ambiente, el cual hace que varíe la situación de la tasa, esta es llamada la resistencia ambiental que consiste en cinco factores:

(a) Los disturbios

Son episodios de mortalidad de individuos que pueden tener origen natural, digamos las heladas, inundaciones, sequías extremas, tornados, o también pueden ser causados por el ser humano, como es el caso cuando prepara el campo de cultivo, o cuando protege la siembra con plaguicidas.

(b) Los factores reguladores

Son características del ambiente, como la temperatura, que modifican el modo en que se usan los recursos.

(c) La escasez de recursos, la actividad de parásitos y depredadores, y la acumulación de residuos tóxicos.

Son los que tienden a aumentar con el crecimiento del tamaño de la población.

La presencia de estos factores hacen que r_a , la tasa de crecimiento per cápita es menor cuando la densidad (es el número de individuos por unidad de superficie) o el número de individuos de la población es mayor de modo considerable. Ahora bien, si deseamos diseñar un modelo de crecimiento poblacional en una dinámica tal que incorpore los componentes de la resistencia ambiental, que dependen directamente de la densidad poblacional, es necesario que se represente

a la tasa de crecimiento per cápita como una función monótona decreciente del tamaño de la población. El modelo que reúne estas características es llamado el modelo de *crecimiento logístico*, en el cual el factor r_a decrece en forma lineal con el tamaño de la población. En símbolos expresamos:

$$r_a = r_m \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

Pasemos a analizar esta ecuación, en efecto, cuando el tamaño de la población N es cercano a cero, ocurre que la expresión $\left(1 - \frac{N}{K} \right)$ es muy cercano a 1 y, por tanto, la tasa de crecimiento per cápita es bastante cercana a r_m , que es la tasa máxima que depende de la tasa de crecimiento intrínseca y de los factores ambientales. De otro lado, si vemos que $N = K$, entonces $\left(1 - \frac{N}{K} \right)$ se anula, y por tanto, r_a es cero, aquí K se llama la capacidad de sostenimiento del ambiente. El caso en que N es mayor que K , entonces r_a asume valores negativos, es decir, toda la población de individuos se reduce considerablemente. Véase la figura 05 dada a continuación:

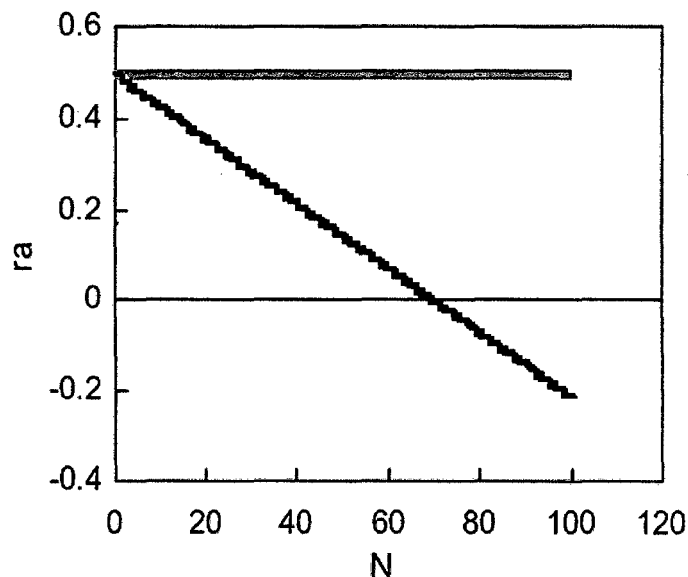


Figura 05. Relación entre la tasa de crecimiento per cápita y el tamaño de la población para el modelo exponencial con $r_m = 0.5$ (línea gris) y para el modelo logístico con $r_m = 0.5$ y $K = 70$ (línea negra).

Sustituimos el nuevo valor de $r_a = r_m \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ en $\frac{dN}{dt} = r_a N$ resultando

$\frac{dN}{dt} = r_m \left(1 - \frac{N}{K}\right) N$, que es la ecuación de la tasa de crecimiento poblacional;

como vemos, la tasa del modelo logístico responde a una función cuadrática que depende del tamaño de la población N . De acuerdo con este modelo, la dinámica

máxima $\frac{dN}{dt}$ sucede cuando $N = \frac{K}{2}$, es decir, el tamaño de la población viene a

ser la mitad de la capacidad de sostenimiento del ambiente. Al resolver obtenemos:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-r_m t}}$$

Que es el tamaño de la población en el tiempo t en términos del tamaño inicial N_0 de la población.

El modelo logístico manifiesta que una población con algunos individuos no posee resistencia ambiental y, por tanto, crece a una tasa per cápita muy cercana a la máxima, en este caso su crecimiento es del orden exponencial en forma aproximada.

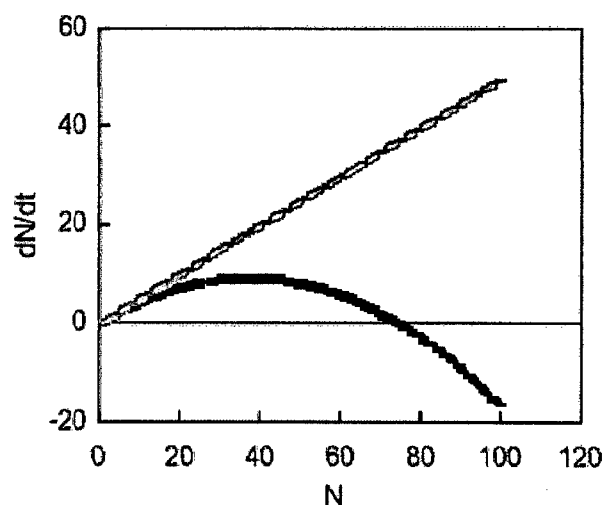


Figura 06. Relación entre la tasa de crecimiento y el tamaño de la población para los modelos exponencial (línea gris) y logístico (línea negra) con los mismos parámetros que en la figura 5.

Así que, a medida que la población crece, la resistencia ambiental aumenta ya que los recursos que se disponen son escasos en ese momento y los residuos se acumulan, luego la tasa de crecimiento per cápita disminuye y el crecimiento de la población se desacelera, alejándose cada vez más del modelo exponencial. Finalmente, si $N = K$, entonces $\frac{dN}{dt} = 0$; luego el tamaño N de la población permanece en equilibrio. Véanse las figuras 06 y 07:

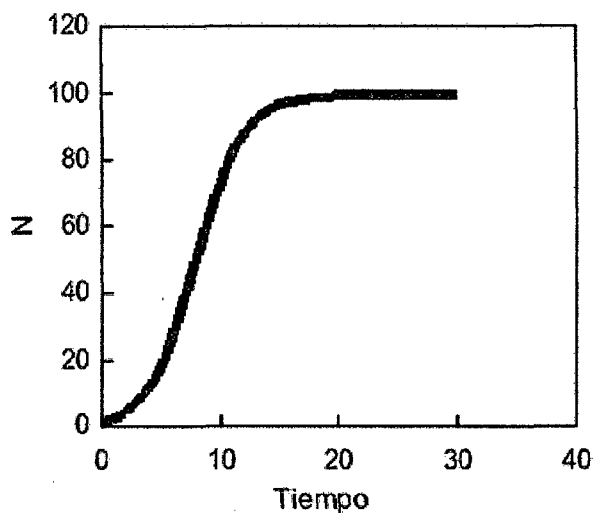


Figura 07. Curva de crecimiento logístico ($r_m=0.5$ y $K=100$).

Existen ocasiones en que una población puede colocarse por encima de la capacidad de sostenimiento, de ser así, la tasa de crecimiento es menor que cero y la población disminuye, es decir la mortalidad supera en número a la natalidad como consecuencia del crecimiento ocurrido en algunos años la población se pone por encima de esa nueva capacidad de sostenimiento, y por tanto, disminuye. Otra causa que puede ocasionar que la población se encuentre por encima de la capacidad de sostenimiento es el proceso de inmigraciones, también una causa para que una población se comporte así es que su respuesta a la resistencia ambiental sea muy tarde. Esto sucede en especies con generaciones discontinuas y en especial con aquellas que poseen una alta tasa intrínseca de crecimiento como son los casos de las plantas anuales y los insectos en cantidad. Esta dinámica poblacional acontecida resulta en fluctuaciones en el tamaño N , véase la figura 08.

Handwritten signature or mark.

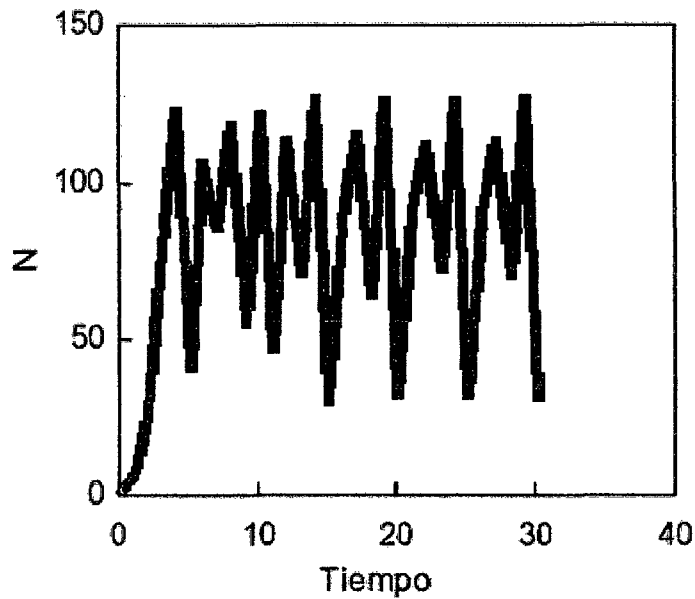


Figura 08. Fluctuaciones poblacionales predichas por el modelo logístico con generaciones discontinuas y con $r_m = 2.75$ y $K = 100$.

Llegamos a la parte final de estos análisis realizados formulando la pregunta ¿y los modelos matriciales para estas poblaciones estructuradas? Hemos visto que la estructura de una población influye fuertemente sobre su dinámica establecida, por ejemplo, la tasa de crecimiento de una población con alta proporción de individuos en el período senil, con poca capacidad reproductiva y con alta mortalidad es posible que sea menor que la de otra población del mismo tamaño pero con mucha población de individuos en períodos reproductivos. Estos factores influyentes no se toman en cuenta en los modelos exponencial ni logístico ya estudiados, los cuales predicen el crecimiento poblacional a partir del número total de individuos. Nótese el sistema matricial formado:

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{0t} \\ n_{1t} \\ n_{2t} \\ n_{3t} \\ n_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{0t+1} \\ n_{1t+1} \\ n_{2t+1} \\ n_{3t+1} \\ n_{4t+1} \end{bmatrix}$$

Es el Modelo de Leslie para determinar la dinámica poblacional considerando cuatro clases de edad. Los parámetros q_i muestran las tasas de supervivencia de

cada tipo de edad, y los parámetros p_i consisten en el número de crías por individuo en cada clase de edad. Los n_{it} son los números de los individuos en la edad i en el tiempo t . Los modelos matriciales que consideran la estructura de las poblaciones más importantes en estudio son los modelos de Leslie, ya que incorporan la estructura de edades. En una breve comparación entre los modelos exponencial y logístico con el de Leslie podemos afirmar que el estado de la población en los dos primeros está definido por el número de individuos, en cambio en el otro modelo decimos que está definido por el número de individuos en distintas clases de edad. Los parámetros que intervienen en este modelo comprenden las tasa de fecundidad y de supervivencia que son vitales en la dinámica analizada en cada clase de edad, con estos parámetros se elabora la matriz de paso o de transición que al operar con el vector columna (o matriz columna) de población se obtiene otro vector con los números de individuos en cada clase de edad después de un intervalo de tiempo transcurrido; aquí N constituye la suma de los elementos del vector columna, que es el tamaño de la población.

Las operaciones matriciales se pueden realizar innumerables veces hasta alcanzar un vector columna del estado de la población de individuos, con el cual podremos notar que la proporción de individuos en cada clase de edad no varía de generación en generación, y el total de individuos crece o decrece a una tasa proporcional que es constante, la cual es llamada tasa de crecimiento asintótico y la denotamos por λ , que precisamente se relaciona con la tasa de crecimiento per cápita mediante la ecuación $r_a = p_n \lambda$ ó $e^{r_a} = \lambda$. Todos los modelos matriciales de Leslie tienden a generalizarse hacia poblaciones con estructuras distintas de la pirámide de edades de individuos.

5.3. Dinámica de poblaciones en las Ciencias Naturales

Por Ciencia Natural se entiende como una disciplina que estudia los fenómenos naturales ocurridos en la Física, Química y Biología. Desde tiempos antiguos con

la aparición del hombre se realizaron por medio de los sentidos, la observación de distintas formas de interacciones de la materia orgánica o inorgánica. Con el paso de los años se descubren las leyes de la naturaleza, las cuales son representadas matemáticamente por ecuaciones algebraicas o diferenciales formuladas mediante matrices, las mismas que son resueltas por métodos lineales o no lineales. El propósito de esta Sección es el de proporcionar una actual información de las aplicaciones que brindan las representaciones matriciales en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales o más general en los sistemas dinámicos que están integrados en las dinámicas poblacionales.

5.3.1. Masas vibrantes o resortes acoplados

Un sistema dinámico en el cual investigaremos, consiste en los resortes A y B , y de los cuerpos C y D acoplados en una línea recta sobre un nivel horizontal sin fricción, estando los extremos de los resortes A y B fijos en niveles verticales; dos bloques tienen masas m_1 y m_2 , el acoplamiento cumple la Ley de Hooke con resortes de constantes K_1 y K_2 . Se mide la posición de los bloques desde la posición neutral por x e y con la dirección positiva indicadas en la figura 09.

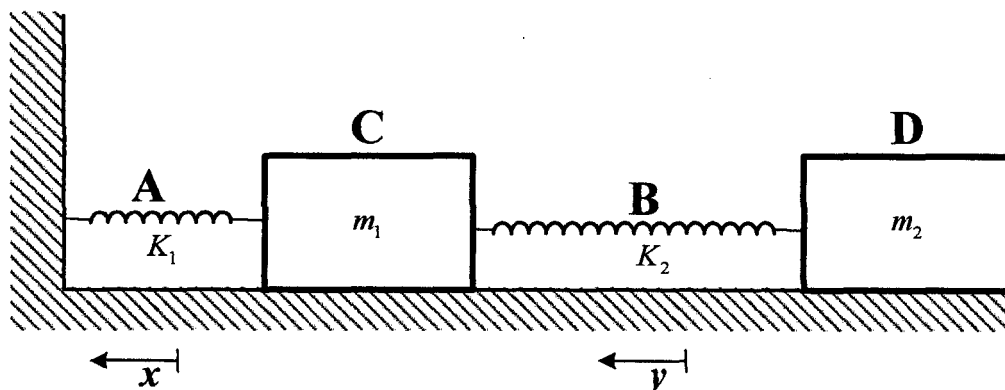


Figura 09

- (a) Demuestre que las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias modelan el movimiento de los bloques:

$$m_1 x'' = -K_1 x + K_2 (y - x) \qquad m_2 y'' = -K_2 (y - x)$$

- (b) Escriba el sistema dinámico de (a) en la forma normal de primer orden.

- (c) Determine la solución general del sistema (a) si $\frac{K_1}{m_2} = 2$; $\frac{K_2}{m_1} = 2$ y $\frac{K_2}{m_2} = 1$.

Solución:

(a) El segundo resorte actúa sobre la segunda masa en concordancia a la Ley de Hooke. Así la fuerza del resorte es proporcional al desplazamiento $y-x$ de la segunda masa, pero actúa en la dirección opuesta como la fuerza $-K_2(y-x)$. Por la Tercera Ley de Newton existe una fuerza igual y opositora sobre la primera masa, es la fuerza $+K_2(y-x)$. Adicionalmente, el primer resorte ejerce la fuerza $-K_1x$ sobre la primera masa. Por tanto, por la Segunda Ley de Newton:

$$m_1 x'' = -K_1 x + K_2 (y-x); \quad m_2 x'' = -K_2 (y-x)$$

(b) Adoptando la notación $x = x_1, x' = x_2, y = x_3, y' = x_4$ se obtiene la forma normal del sistema:

$$x_1' = x_2; \quad x_2' = -\frac{(K_1+K_2)x_1}{m_1} + \frac{K_2 x_3}{m_1}; \quad x_3' = x_4; \quad x_4' = -\frac{K_2(x_3 - x_1)}{m_2}$$

o más claramente, con las notaciones x, y, z, w :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{(K_1+K_2)x}{m_1}, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{K_2(z-w)}{m_2}$$

(c) La representación matricial del sistema estudiado es: $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$,

donde $\bar{x}(t) = (x(t) y(t) z(t) w(t))^t$, $\bar{x}'(t) = (x'(t) y'(t) z'(t) w'(t))^t$, $\bar{b}(t) = \bar{0}$

$$y \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{m_1} & 0 & \frac{K_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{m_2} & 0 & -\frac{K_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \text{ es la matriz del sistema homogéneo.}$$



El polinomio característico $p(\lambda)$ de A consiste en $\lambda^4 + (r+s)\lambda^2 + s(r-u)$,

donde $r = \frac{K_1 + K_2}{m_1}$, $s = \frac{K_2}{m_2}$ y $u = \frac{K_2}{m_1}$. Resolviendo las raíces de $p(\lambda)$

hallamos: $\lambda^2 = -\frac{r+s}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r+s)^2 - 4s(r-u)}$.

Ambos valores de λ^2 son negativos, pues $r > u$ y r, s, u son positivos. En consecuencia, todos los autovalores son imaginarios puros, esto es:

$$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta, \lambda_3 = i\gamma, \lambda_4 = -i\gamma$$

Ahora, al valorar las constantes físicas: $\frac{K_1}{m_2} = \frac{K_2}{m_1} = 2$ y $\frac{K_2}{m_2} = 1$, entonces

$\frac{K_1}{m_1} = 2$. Así que: $r = 4, s = 1$ y $u = 2$; luego obtendremos:

$\lambda^2 = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$ lo que implica $\lambda^2 = -0.43$ y $\lambda^2 = -4.56$; así llegamos a

$\beta = 0.66$ y $\gamma = 2.13$. Si denotamos por \bar{v} y \bar{w} los respectivos autovectores que corresponden a λ_1 y λ_3 , entonces la solución general compleja a $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ es:

$$\bar{x}(t) = C_1 e^{i\beta t} \bar{v} + C_2 e^{-i\beta t} \bar{v} + C_3 e^{i\gamma t} \bar{w} + C_4 e^{-i\gamma t} \bar{w}$$

donde son C_1, C_2, C_3 y C_4 constantes reales arbitrarias. Obviamente $\bar{x}(t)$ puede escribirse como una combinación lineal de $\text{sen } \beta t, \text{cos } \beta t, \text{sen } \gamma t$ y $\text{cos } \gamma t$ al considerar la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \text{cos } \theta + i \text{sen } \theta$.

Ahora pensemos en una formulación matemática para determinar un conjunto de ecuaciones diferenciales en simultáneo, esto es, un sistema, y veamos qué condiciones prevalecen en el tiempo t cuando se tienen más de dos cuerpos de masas respectivas. En efecto, consideremos un sistema de tres cuerpos de masas m_1, m_2 y m_3 conectados por medio de resortes según la figura 10, los cuales ejercen fuerzas sobre los cuerpos:

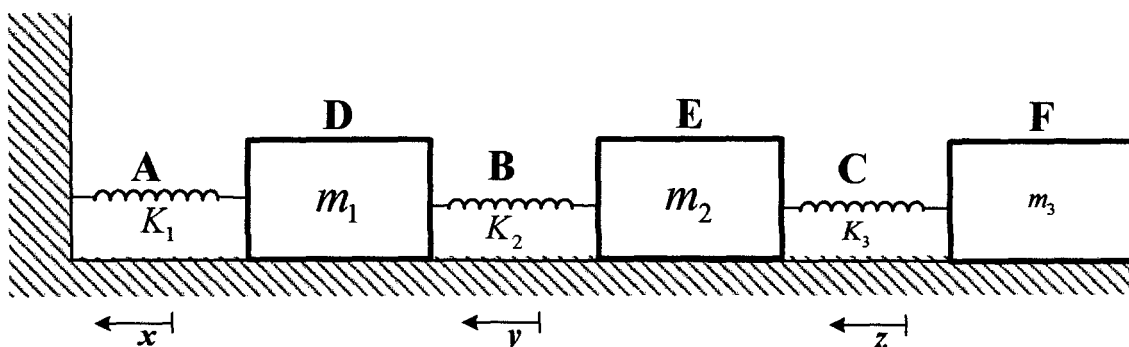


Figura 10

De la Segundo Ley de Newton, se formula el sistema dinámico:

$$m_1 x'' = -K_1 x + K_2 (y - x) \quad m_2 y'' = -K_2 (y - x) \quad m_3 z'' = -K_3 (z - y)$$

formado por tres ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, las mismas que se reducen a un sistema lineal de seis ecuaciones diferenciales

de primer orden: $\bar{x}(t) = (x(t) \ y(t) \ z(t) \ w(t) \ u(t) \ v(t))^t$, donde se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{(K_1 + K_2)x_1}{m_1}; \quad \frac{dz}{dt} = w;$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{K_2(z-x)}{m_2}; \quad \frac{du}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{K_3(u-x)}{m_3}$$

La representación matricial comprende: $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{m_1} & 0 & \frac{K_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{m_2} & 0 & -\frac{K_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_3}{m_3} & 0 & 0 & -\frac{K_3}{m_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio correspondiente $p = p(\lambda)$ tiene grado seis, con seis raíces reales o complejas. Si ahora suponemos un sistema dinámico formado por cuatro ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden o, en forma

equivalente por 8 ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, entonces el respectivo sistema mecánico de masas y resortes estaría determinando una dinámica poblacional en donde los individuos son los cuerpos con las masas m_1, m_2, m_3 y m_4 . Por tanto, en una dinámica de individuos dados por estas masas que aumentan y van en crecimiento, obtendríamos para m_1, m_2, \dots, m_n y constantes K_1, K_2, \dots, K_n el sistema: $x'(t) = A\bar{x}(t)$, donde $x'(t) = (x_1'(t) \dots x_n'(t))'$, $x(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))'$ y $A \in M(n \times n)$.

5.3.2. El problema de los péndulos suspendidos

Supongamos en primer término que un péndulo está suspendido de otro como se muestra en la figura 11, en que se ve una conexión de dos péndulos en cadena siguientes sistema dinámico lineal modela oscilaciones de amplitud pequeña alrededor de la posición de equilibrio $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. En efecto, de las leyes físicas que gobiernan el movimiento pendular obtenemos:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 + \alpha x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_1 - x_3$$

donde las designaciones físicas de este sistema son las siguientes:

$$\alpha = \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^{-1} \text{ es la dimensionalidad de la masa reducida.}$$

$$x_1, x_3 = \text{ángulos } \theta_1 \text{ y } \theta_2$$

$$x_2, x_4 = \text{velocidades angulares } \theta_1' \text{ y } \theta_2'.$$

(a) Elabórese la solución general de valor real del sistema usando el método matricial de autovalores.

(b) Sea $\alpha = 0.3$ ¿el sistema tiene algunas soluciones periódicas?



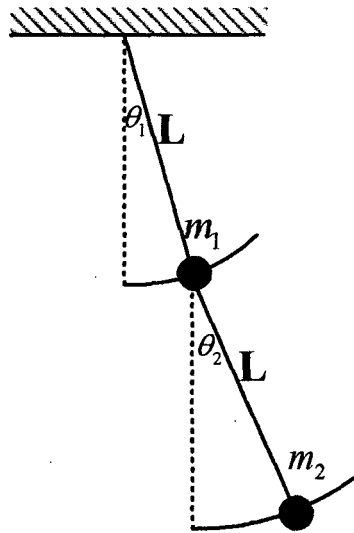


Figura 11

Solución:

(a) Para el sistema pendular formado diremos que la matriz A del sistema y el polinomio característico $p(\lambda)$ consisten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

Resolviendo $p(\lambda) = 0$ obtenemos $\lambda^2 = -1 \pm \sqrt{\alpha}$. En razón de que $0 < \alpha < 1$ afirmamos que los cuatro autovalores son imaginarios puros, ellos son:

$$\lambda_1 = i\sqrt{1+\sqrt{\alpha}} = \beta i, \quad \lambda_2 = -\beta i, \quad \text{donde } \beta = \sqrt{1+\sqrt{\alpha}}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{1-\sqrt{\alpha}} = \gamma i, \quad \lambda_4 = -\gamma i, \quad \text{donde } \gamma = \sqrt{1-\sqrt{\alpha}}$$

Los autovectores correspondientes $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ y \bar{v}_4 tienen componentes complejos y tienen la particularidad siguiente: \bar{v}_2 es el vector conjugado de \bar{v}_1 y \bar{v}_4 es el vector conjugado de \bar{v}_3 . Sin embargo, podemos generar un conjunto de soluciones reales al tomar las partes real e imaginaria de $e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1$ y $e^{\lambda_3 t} \bar{v}_3$. Nótese que el péndulo doble tiene dos frecuencias naturales dadas por β y γ .

Después de llevar a cabo largos cálculos determinamos que la solución general real del sistema está dada por la ecuación:

$$\bar{x}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) + C_4 y_4(t), \text{ esto es:}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1^2) \cos \beta t \\ -\beta(1 + \lambda_1^2) \operatorname{sen} \beta t \\ \cos \beta t \\ -\beta \operatorname{sen} \beta t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1^2) \operatorname{sen} \beta t \\ \beta(1 + \lambda_1^2) \cos \beta t \\ \operatorname{sen} \beta t \\ \beta \cos \beta t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3^2) \cos \gamma t \\ -\gamma(1 + \lambda_3^2) \operatorname{sen} \gamma t \\ \cos \gamma t \\ -\gamma \operatorname{sen} \gamma t \end{bmatrix} + \\ + C_4 \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3^2) \operatorname{sen} \gamma t \\ \gamma(1 + \lambda_3^2) \cos \gamma t \\ \operatorname{sen} \gamma t \\ \gamma \cos \gamma t \end{bmatrix}$$

Esta solución general ha sido elaborada considerando la descomposición de fuerzas en dos péndulos simples ideales, los cuales conforman el péndulo doble. En efecto, el movimiento en cada uno de ellos es el de un péndulo oscilando libremente, sin fuerzas exteriores aplicadas salvo la fuerza de gravedad que actúa describiendo en términos del ángulo $\theta = \theta(t)$ que el péndulo hace con la línea vertical. Una bolita de banco de masa m , sujeta a una caña de pescar que tiene longitud L , por tanto, elaborando el diagrama de fuerzas nos resulta:

$$F = -g m \operatorname{sen} \theta(t), \quad G = -g m \cos \theta(t)$$



Si $\theta = \theta(t)$ se mide en radianes, entonces la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria circular es $y = L\theta$, luego la fuerza coordenada en la

dirección del movimiento es: $m \frac{d^2}{dt^2}(L\theta)$, con G igualando resulta:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(L\theta) = -g m \operatorname{sen} \theta, \text{ luego, } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta \text{ que es una ecuación}$$

diferencial no lineal en $\theta(t)$, que no posee soluciones en términos de funciones elementales. Se hace que el ángulo θ tenga la restricción

$|\theta| < 0.1$ radianes, entonces las soluciones son aproximadas pero bastantes aceptables para nuestro propósito, así que: $\text{sen } \theta \approx \theta$, lo que se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta, \text{ es decir: } \theta'' = -\frac{g}{L}\theta$$

Como el sistema dinámico pendular se encuentra integrado por dos péndulos simples, entonces obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden $\theta_1'' = -\frac{g}{L}\theta_1$; $\theta_2'' = -\frac{g}{L}\theta_2$ que, asimismo, llevados a formulaciones de la primera derivada resulta finalmente el sistema dinámico de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales han sido estudiadas desde el principio del problema planteado para la formulación de una dinámica de población.

Ahora bien, si este mismo trabajo efectuado en la investigación lo realizamos con tres péndulos ideales o con cuatro péndulos ideales o, en general con n péndulos suspendidos con caña de pescar, llegamos a establecer un sistema dinámico con n péndulos en oscilación para n ángulos radianes. La matriz construida vendría a ser $A \in M(n \times n)$. En esta dinámica poblacional, los individuos participantes son los n péndulos con n masas diferentes; así que:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

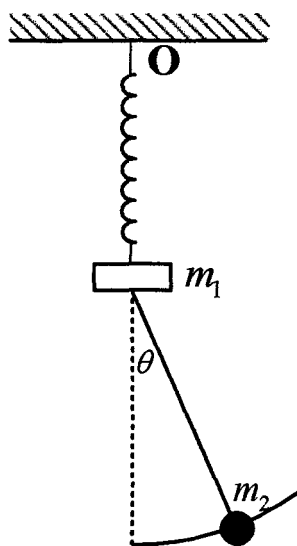
Es decir, $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ como representación matricial del problema en estudio.

Note que A es la matriz del sistema dinámico cuyos elementos corresponden a términos nulos en su mayoría, que surgen de los

planteamientos físicos considerados en el movimiento pendular compuesto.

(b) Las soluciones y_1 e y_2 son periódicas con períodos $\frac{2\pi}{\beta}$, en tanto que y_3 e y_4 tienen período $\frac{2\pi}{\gamma}$. Al reemplazar $\alpha = 0.3$ obtenemos los períodos $\beta = 1.24$ y $\gamma = 0.67$, de modo que para y_1, y_2 se tiene el período 5.06, y para y_3, y_4 es el período 9.37.

De otra parte, existen dinámicas de resortes al considerar dos cuerpos de masa m_1 y m_2 que son diferentes en sus formas. El de masa m_1 se cuelga de un resorte vertical, de constante K , el cual está soportado en un punto O , según la figura 12 de la sección. De m_1 se cuelga un péndulo simple teniendo un medallón de masa m_2 , asumamos que m_1 puede vibrar sólo verticalmente, y todo movimiento tiene lugar en un plano vertical. En consecuencia, se pueden establecer ecuaciones diferenciales para el movimiento de cada uno, y asimismo es posible determinar las posiciones de los cuerpos en cualquier tiempo, asumiendo por cierto, pequeñas vibraciones y condiciones iniciales arbitrarias.



APD

Figura 12

Como observamos, es un sistema mixto con dos tipos de movimientos distintos, sin embargo, se pueden establecer los sistemas dinámicos con leyes físicas que tienen semejanza con respecto a las oscilaciones. La Ley de Kooke el de la fuerza restauradora y la ley física del péndulo ideal, ambos casos tienen las resonancias respectivas, y se pueden aplicar a esta dinámica mixta. Debemos suponer n masas distintas y n medallones diferentes para la obtención de la representación matricial con $2n$ ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, resultando la matriz del sistema $A \in M(2n \times 2n)$.

5.3.3. Instalación de grandes circuitos cerrados

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se obtienen de la aplicación de las leyes de Kirchoff a redes eléctricas. Iniciamos la dinámica de circuitos cerrados definiendo algunos conceptos básicos, un *nudo* es un punto de la red en el cual se unen tres (o más) conductores. Una *rama* comprende cualquier circuito cerrado formado por el denominado LRC (impedancia, resistencia, capacitancia). Así tenemos como ilustración la red eléctrica simple de dos circuitos eléctricos, dada en la figura 13, la cual revela una dinámica del circuito en su expresión sencilla:

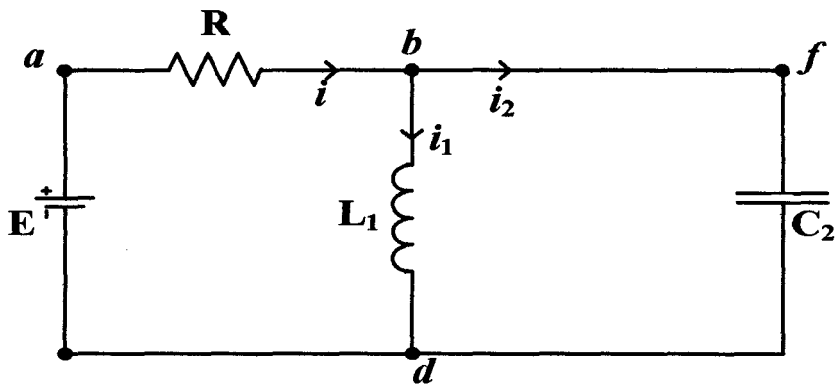


Figura 13

Los puntos b y d son nudos y las trayectorias $abda$, $abfda$, son ramas. En una red se aplican las leyes de Kirchoff que consisten en:

- “La suma algebraica de las intensidades de las corrientes en un nudo cualquiera de la red, es cero”.

- “La suma algebraica de los cambios de voltaje que se encuentran al recorrer cualquier rama de la red es cero”.

En la figura 13, por aplicación de estas leyes obtenemos en el nudo b o d :

$i = i_1 + i_2$. Asimismo, en la rama $abda$ se tiene: $R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = E$, y también en la rama

$abfda$ se obtiene $R_1 + \frac{q_2}{C_2} = E$. La carga del condensador q_2 y la corriente i_2 que

fluye por el condensador es: $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$.

Proponemos a continuación un sistema dinámico de dos corrientes eléctricas para su solución numérica, debemos hallar la intensidad $i = i(t)$ en el sistema mostrado en la figura 14, cuando todas las corrientes iniciales y la carga inicial del condensador son nulas. Sea entonces la red eléctrica:

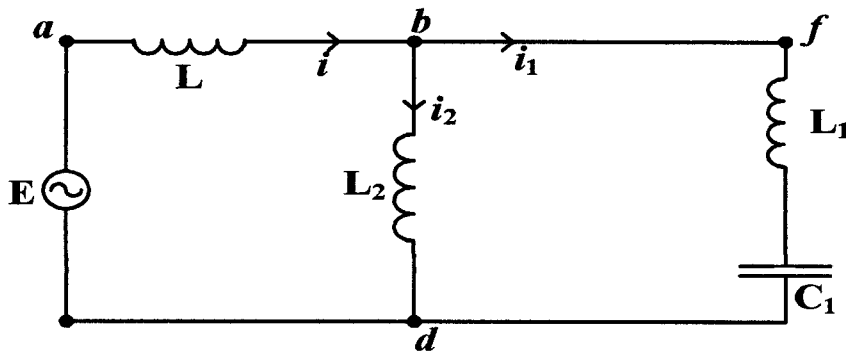


Figura 14

Aplicamos la primera ley de Kirchhoff en el nudo b : $i = i_1 + i_2$.

Ahora aplíquese la segunda ley para obtener el sistema:

$$\frac{1}{15} \frac{di}{dt} + \frac{2}{15} \frac{di_2}{dt} = 5 \operatorname{sen}(300t) \text{ en la rama } abda$$

$$\frac{1}{15} \frac{di}{dt} + \frac{1}{15} \frac{di_1}{dt} + 10^4 q_1 = 5 \operatorname{sen}(300t) \text{ en la rama } abfda$$

Donde $E = 5 \operatorname{sen}(300t)$ voltios, $L = \frac{1}{15}$ henrios, $L_1 = \frac{1}{15}$ henrios, $L_2 = \frac{2}{15}$ henrios,

$C_1 = 10^{-4}$ faradios. Al usar $i = i_1 + i_2$ en el sistema nos resulta:

$$\frac{di_1}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} = 75 \operatorname{sen}(300t)$$

$$2\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + 150\,000 q_1 = 75 \operatorname{sen}(300t)$$

Por otra parte, para formar el sistema en i_1 e i_2 en función del tiempo t , hallamos q_1 al reducirlo a una ecuación diferencial de segundo orden en q_1 :

$$5\frac{d^2i_1}{dt^2} + 45\,000 q_1 = 150 \operatorname{sen}(300t)$$

Que tiene como solución general a:

$$q_1 = C_1 \cos(300t) + C_2 \operatorname{sen}(300t) - \frac{1}{20}t \cos(300t)$$

De las condiciones iniciales $q_1 = 0$ si $t = 0$; luego $C_1 = 0$, y

$$q_1 = C_2 \operatorname{sen}(300t) - \frac{1}{20}t \cos(300t)$$

Al derivar q_1 encontramos $i_1 = 300C_2 \cos(300t) - \frac{1}{20}(\cos(300t) - 300t \operatorname{sen}(300t))$ y

por las condiciones iniciales $i_1 = 0$ si $t = 0$, lo que nos da $C_2 = \frac{1}{6000}$.

Por consiguiente, el sistema matricial formado es:

$$\frac{di_1}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} = 75 \operatorname{sen}(300t)$$

$$2\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + 150\,000 \left(\frac{1}{6000} \operatorname{sen}(300t) - \frac{1}{20}t \cos(300t) \right) = 75 \operatorname{sen}(300t)$$

Esto es:

$$\frac{di_1}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} = 75 \operatorname{sen}(300t)$$

$$2\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = 50 \operatorname{sen}(300t) + \frac{15000}{2}t \cos(300t)$$

De donde:
$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \operatorname{sen}(300t) \\ 50 \operatorname{sen}(300t) + 7500t \cos(300t) \end{bmatrix},$$
 o de manera

simplificada es $\bar{x}'(t)A = \bar{b}(t)$, así que $\bar{x}'(t) = \bar{b}(t)A^{-1}$, el cual se resuelve mediante integración matricial con respecto a t . El resultado consiste en la matriz

$$\bar{x}(t) = (i_1 \quad i_2)^t = \begin{bmatrix} 15t \operatorname{sen}(300t) & -\frac{1}{12} \cos(300t) - 5t \operatorname{sen}(300t) + \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

Si asumimos una red eléctrica compuesta por más de dos circuitos cerrados con la composición LRC tendríamos un sistema dinámico cuyos individuos son los circuitos, la matriz de los coeficientes del sistema debe pertenecer al espacio matricial $M(n \times n)$. La dinámica de circuitos dependientes del tiempo podría mostrar las características de ellos a gran escala, en la práctica equivale a una electrificación de una zona urbana o rural.

5.3.4 Mezcla de Multicompartimientos

Cuando un fluido fluye adelante o detrás entre varios tanques o compartimientos de un sistema físico, las cantidades $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ de una sustancia particular disuelta en dos o más tanques X_1, X_2, \dots, X_n varían típicamente como una función del tiempo. Dada la información suficiente acerca del proceso, nosotros podemos determinar un sistema de ecuaciones diferenciales que tienen las funciones $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ como las coordenadas de su solución.



En primer lugar consideramos dos tanques en el problema, entonces expresamos la razón e cambio de una cantidad típica x_1 como la diferencia entre la razón que fluye adentro para el tanque X_1 y la razón que fluye afuera de la sustancia disuelta $x_1(t)$, es decir:

$$\frac{dx_1}{dt} = \left(\begin{array}{l} \text{razón que fluye} \\ \text{adentro al tanque } X_1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{razón que fluye} \\ \text{afuera del tanque } X_1 \end{array} \right)$$

Una tal ecuación será así para cada tanque. Nótese que las razones sobre el lado derecho también deben ser expresados en los mismos términos, como las razones sobre el lado izquierdo, a saber, las cantidades de material disuelto son más que los volúmenes de la solución. Bajo la hipótesis en consideración, sucederá que el fluido en cada tanque se está mezclando todo el tiempo. Ilustramos el problema en desarrollo al considerar dos tanques como se muestra en la figura 15:

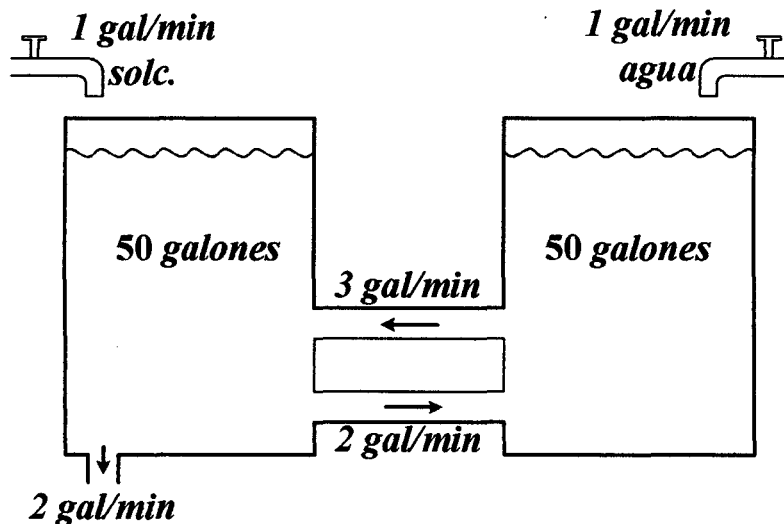


Figura 15

En la figura 15 se muestran dos tanques con 50 galones, conectados por pipas con entradas y salidas. Las razones de fluidez están arregladas tal que cada tanque se mantengan en su capacidad todo el tiempo. Supongamos que cada tanque inicialmente contiene solución de sal en una concentración en libras por galón que dejamos de especificar por el momento, que un tanque recibe sal y el otro agua pura; el problema es hallar qué le sucede a la cantidad de sal.

Asumamos que los dos tanques están completamente mezclados en todo tiempo, tal que la concentración de sal está uniforme a lo largo de cada tanque en algún tiempo dado. En el tanque izquierdo con contenido de sal $x(t)$, la razón de cambio de la cantidad de sal es, por definición, $\frac{dx}{dt}$. En el otro tanque, porque son varias las razones de fluidez, podemos partir esta razón de cambio en tres partes

consistentes en: $\frac{dx}{dt} = -4\frac{x}{50} + 3\frac{y}{50} + 1$, donde: $\frac{x}{50}$ es la concentración de sal en el tanque izquierdo, y la fracción $\frac{y}{50}$ es la concentración de sal en el tanque derecho, ambos en libras por galón. El término $-4\left(\frac{x}{50}\right)$ es la razón de fluidez de salida de sal, y los términos restantes representan la razón de fluidez de entrada.

En forma similar escribimos:

$$\frac{dy}{dt} = 2\frac{x}{50} - 3\frac{y}{50}.$$

Así tendremos la representación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{3}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$$

El polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{7}{50}\lambda + \frac{6}{50^2} = \left(\lambda + \frac{1}{50}\right)\left(\lambda + \frac{6}{50}\right)$ tiene por raíces $\lambda_1 = -\frac{1}{50}$; $\lambda_2 = -\frac{6}{50}$. La solución particular es constante igual a $\frac{50}{3}$. Así la solución general consiste en:

$$x(t) = C_1 e^{-\left(\frac{1}{50}\right)t} - \frac{3}{2} C_2 e^{-\left(\frac{6}{50}\right)t} + \frac{50}{2}$$

$$y(t) = C_1 e^{-\left(\frac{1}{50}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{6}{50}\right)t} + \frac{50}{3}$$

Esto es, $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^t$ como solución matricial. De estas ecuaciones, vemos de inmediato que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{50}{2}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{50}{3}$$

Es decir, la concentración en libras por galón, en el tanque izquierdo se aproxima a $\frac{1}{2}$, y en el tanque derecho se aproxima a $\frac{1}{3}$. Las constantes son calculadas

cuando $x(0), y(0)$ son conocidas. En particular, si $x(0) = y(0) = 0$ se tiene

$$C_1 = -20 \text{ y } C_2 = \frac{10}{3}.$$

El problema que hemos estudiado corresponde a dos tanques, y por tanto, nos ha resultado un sistema de matrices 2×2 ; ahora en lo general debemos considerar n tanques con la misma concentración y el número de n pipas de conexión, formándose entonces un sistema dinámico dependiente del tiempo t , que en suma es una dinámica poblacional, cuyos individuos son los contenidos de sal en los tanques de la concentración. Así pues tenemos $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ con $A \in M(n \times n), \bar{x}(t) \in M(n \times n)$.

Esta dinámica tiene las mismas características del caso para dos tanques visto en el referido problema.

5.3.5 El problema Poblacional Genético

Las ciencias de la Genética, como parte de la Biología, posee una teoría importante como es el de la herencia de los seres biológicos. Esta teoría tuvo su origen en los experimentos de Gregorio Mendel con plantas de chícharo, cuyos resultados se publicaron en 1865. El monje Mendel llegó a la conclusión de que existen leyes generales que gobiernan la transmisión de las características de los padres a sus descendientes, en particular, supone que la herencia es el resultado de la transmisión de partículas, que hoy en día se llaman *genes*, de los padres hacia los hijos. La estructura exacta de los genes y las funciones que desempeñan para conocer características heredadas todavía siguen siendo un problema en la investigación biológica, a saber, no se ha encontrado con exactitud las verdaderas funciones que posee un gene de la organización genética del hombre, animal o vegetal.

Lo que si podemos afirmar es que un gene específico puede manifestarse en la composición orgánica en diferentes formas llamadas alelos, esto es, un gene

puede ocurrir en numerosos alelos. Es aquí que nosotros vamos a considerar, en primer término, un gene con dos alelos que los denominamos A y a en símbolos. Los genes suceden en cada célula del organismo, agrupados en los cromosomas, y como el organismo está conformado por miles de millones de células, entonces tendremos igual cantidad o más de genes. Con excepción de las células reproductoras, los genes se manifiestan en pares y se ubican en los cromosomas pareados. Por tanto, tenemos los pares: AA , Aa , aa del gene referido, y se les llaman *genotipos* del organismo respecto del gene. Los genotipos AA y aa reciben el nombre de homócigos o puros, y el genotipo Aa se llama heterócigo o híbrido. El caso especial de las células reproductoras (espermatozoides y óvulo), ellas poseen cromosomas no pareados, de allí que realmente sólo tienen una copia de cada gene.

El tema de la descendencia en la ciencia Genética ofrece un área importante en la investigación de los genes y sus implicancias, en efecto, los genes de la descendencia resultan del pareamiento de los genes de las dos células reproductoras, es decir, una de cada uno de los padres. Cuando los dos progenitores son homócigos, entonces el genotipo de la descendencia se determina prácticamente.

Esto puede ser ilustrado en el siguiente caso: Si un padre tiene genotipo AA y el otro (madre) es de genotipo aa , ocurrirá que la descendencia tendrá que ser de tipo Aa ; si sucede que uno de los padres o ambos son heterócigos, entonces el genotipo de la descendencia no está determinado, nada podemos afirmar al respecto. Podemos ilustrar este caso al modo siguiente: Si sucede que los dos padres son heterócigos tendremos la descendencia AA , Aa , aa con probabilidades $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{4}$ en forma respectiva.

Otras características orgánicas como el enanismo o el albinismo en los seres humanos, el control es realizado por un solo gene; tenemos también otros rasgos

como el gigantismo o la inteligencia precoz se controlan mediante efectos combinados de una gran cantidad de genes, los cuales son influidos enormemente por factores del ambiente en que viven los humanos.

Un caso destacable podemos mencionar aquel en que uno de los alelos A de un cierto gene predomina sobre los otros, de modo que los genotipos AA y Aa , no se diferencian, luego A es llamado alelo dominante; el alelo a bajo esta situación es llamado alelo recesivo cuando aa se distingue al observar los genotipos AA y Aa , como ejemplo citamos la enfermedad de la anemia (en muchos caso es heredada) en los hombres y mujeres, en la cual un individuo de una población determinada que tiene esta enfermedad; cuando un individuo de una población determinada que tiene aa , definitivamente padecerá de una anemia bastante severa, lo que podría originar una muestra antes del tiempo calculado.

Con estos fundamentos discutidos, estamos en condiciones básicas de establecer una dinámica de crecimiento genético. En efecto, clasificamos a los individuos de una población de una especie dada respecto de los genotipos AA , Aa , aa que son tres de los muchos genotipos existentes. Vamos a calcular las proporciones de los dos alelos A y a elegidos para nuestro estudio en la población, debiéndose entender que este análisis poblacional no podrá efectuarse si no puede distinguirse AA de Aa . Denominamos las cantidades:

x : proporción de genotipos modelo AA .

y : proporción de genotipos modelo Aa .

z : proporción de genotipos modelo aa .

Vamos a suponer que estas cantidades son calculadas en proporciones, de modo que $x+y+z=1$, por tanto las proporciones p y q de los alelos A y a en la población satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$p = x + \frac{1}{2}y ; \quad q = \frac{1}{2}y + z$$

Los porcentajes de proporción son como sigue:

	<i>A</i>	<i>a</i>
<i>AA</i>	100%	0%
<i>aa</i>	0%	100%
<i>Aa</i>	50%	50%

Con la hipótesis de que los genotipos sucedan en iguales proporciones entre machos que entre hembras, entonces las proporciones p y q , en toda la población las probabilidades de que el gene resultante ser A o ser a , en forma respectiva. Expresamos que el problema poblacional en el contexto de las proporciones de los alelos no tiene una única solución cuando se determinan las proporciones de los genotipos i se conocen las proporciones de los alelos. El sistema de ecuaciones elaborados en x, y, yz queda reducido a una sola ecuación en dos incógnitas; es decir:

$$p = x + \frac{1}{2}y ; q = \frac{1}{2}y + z \quad \text{implica} \quad p = x + \frac{1}{2}y$$

Por lo que debemos proceder a obtener una segunda ecuación independiente al tomar en cuenta el apareamiento aleatorio, es decir, que la probabilidad de que un individuo de la población se aparee con otro individuo no depende del genotipo seleccionado. Con todo esto, continuemos con las primeras hipótesis y supongamos que la población en estudio es muy grande, entonces la probabilidad de que la descendencia reciba el alelo A del padre y la madre es p^2 . En igual forma, diremos que las probabilidades de los genotipos Aa y aa son $2pq$ y q^2 ; obviamente $2pq$ se establece porque los individuos Aa y aA proceden de genotipos idénticos. Por tanto, el cuadro de probabilidad resultante es:

Genotipo	<i>AA</i>	<i>aa</i>	<i>Aa</i>	<i>aA</i>	<i>Aa</i>
Probabilidad	p^2	q^2	pq	qp	$2pq$

Estos cálculos fueron realizados, de manera independiente por Hardy y Weinberg en 1908, en ensayos efectuados en Laboratorios de Genética en Estados Unidos. En buena cuenta, son resultados que se aplican en una población de individuos que son conducentes a generar matrices de probabilidades en un sistema matricial con proporciones de genotipos en un organismo biológico o en plantas. Ilustramos los genotipos con la planta chícaro considerando la flor y el color de ésta, y su composición genética. El color de la flor está controlado por un par de genes cuyos genotipos AA , Aa y aa se caracterizan por sus flores rojas, color de rosa y blancas, respectivamente. Supongamos que en un campo fértil se cultivan chícaros en una proporción de 60% de flores rojas y 40% de flores blancas.

Las reproducciones posteriores hasta la cuarta generación determinan proporciones de estos genotipos, entonces nos preguntamos ¿qué proporciones de los tres genotipos estarán presentes en la cuarta generación? En efecto, las proporciones dadas indican $p=0.6$ y $q=0.4$, luego, de la tesis de Hardy – Weinberg formamos las proporciones en la primera, segunda, tercera y cuarta generación:

Flores rojas / rosadas / blancas					
p	p^2	q	q^2	$2pq$	cuatro generaciones
0,60	0,36	0,40	0,16	0,48	

Nótese que el cultivo asumido es realizado al azar, pudo haberse supuesto una polinización aleatoria y el resultado era equivalente. Sin embargo, dejamos en claro que los resultados obtenidos por Hardy – Weinberg sólo son válidos cuando el apareo es totalmente aleatorio y también cuando los tres genotipos son viables en las generaciones venideras. Las discrepancias que surgen si el apareo no es obligatorio conducen a investigaciones que hoy en día todavía se encuentran en laboratorios de ensayos; por cierto, estas situaciones se presentan muchas veces en experimentos biológicos que están mayormente controlados. Citamos un típico caso que se presenta en la crianza de caballos de carrera: los experimentos

en los sementales ganadores de carreras son controlados, pues tienen gran demanda en el mercado hípico.

Como una aplicación matricial presentamos el caso de una situación controlada, veamos: los individuos, en experimento controlado, se aparean de modo que uno de los individuos de la pares es de tipo AA y el otro individuo se toma en forma aleatoria. Lo que viene son las generaciones siguientes que forman la descendencia, apareándose con individuos de genotipo AA ; al continuar este proceso tendríamos una dinámica de individuos dependiente del tiempo con esta hipótesis, por tanto, nos formulamos el siguiente interrogante después de haber transcurrido muchas generaciones, ¿cuál es el comportamiento de la proporciones de los individuos de genotipo AA en la continuidad del tiempo?

Denotemos en primer lugar por x_n, y_n, z_n las proporciones de los tres genotipos en la generación n transcurrida. Es indispensable la construcción de una tabla de proporciones para conocer lo que ocurre en la primera generación:

	AA	Aa	aa
	<i>proporción x</i>	<i>proporción y</i>	<i>proporción z</i>
AA	<i>Toda la generación 1 de tipo AA</i>	<i>1/2 generación 1 de tipo AA</i>	<i>Toda la generación 1 de tipo AA</i>
		<i>1/2 generación 1 de tipo Aa</i>	

Esta tabla contiene entradas y salidas que diseñan una matriz cerrada conducente a un sistema lineal de ecuaciones del modelo:

$$x_1 = x + \frac{1}{2} y$$

$$y_1 = \frac{1}{2} y + z$$

$$z_1 = 0$$

Es decir, si:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resulta que: $\bar{x}_1 = P\bar{x}$.

Si ahora definimos $\bar{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, y asimismo, el proceso continua de generación en

generación, calculamos los vectores \bar{x}_n de las proporciones en la forma siguiente:

$$\bar{x}_2 = P\bar{x}_1 = P(P\bar{x}) = P^2\bar{x}; \quad \bar{x}_3 = P\bar{x}_2 = P(P^2\bar{x}) = P^3\bar{x}; \quad \bar{x}_4 = P\bar{x}_3 = P(P^3\bar{x}) = P^4\bar{x}; \dots; \bar{x}_n = P\bar{x}_{n-1} = P(P^{n-1}\bar{x}) = P^n\bar{x}$$

Como vemos claramente, las proporciones de los genotipos del futuro se hallan determinados por el vector \bar{x} de las proporciones iniciales, y por la matriz del sistema P . de otra parte, encontramos los autovalores de P por los números raíces $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = 1$. Los autovalores respectivos son:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora es conveniente diagonalizar P , y vemos que la matriz $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

diagonaliza a P , es decir:

$$C^{-1}PC = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Despejando P resulta $P = CDC^{-1}$, así que en la generación n la matriz P tiene el comportamiento $P^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1}$, y hallando D^n con los cálculos

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Llegamos a la matriz potencia n-ésima:

$$D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluimos entonces que, para n grande, ocurriría que $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y la diagonalidad se preserva, de modo que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz de equilibrio para muchas generaciones. Este resultado repercute en P^n , obteniéndose luego:

$$P^n \rightarrow C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1}$$

Esto es:

$$P^n \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, en la ecuación matricial poblacional $\bar{x}_n = P^n \bar{x}$ se tienen los componentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Se infiere finalmente: $x+y+z=1$ sin interrupciones del tiempo en que se procesan las generaciones venideras. Así pues, el albinismo, la altura, la inteligencia son controlados por un solo gene o por combinación de muchos genes, los cuales pueden aparecer en algunos o en todas las generaciones consideradas.

5.4 Dinámica no-lineal de poblaciones

El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales con representación matricial se ha caracterizado por una búsqueda de soluciones explícitas, bien por fórmulas exactas o bien en desarrollos de series de potencias. Del total de las ecuaciones diferenciales que surgen en la Ciencia y en la Ingeniería, sólo el 5% admiten soluciones exactas, lo cual ha determinado que se abandone todo intento de resolverlas en sentido tradicional y en vez de eso nos inclinamos por obtener una información cualitativa sobre el comportamiento general que poseen las soluciones de un sistema lineal y no lineal.

Poincaré en 1880 da inicio a la Teoría Cualitativa de las ecuaciones diferenciales cuando investigaba sus trabajos en Mecánica Celeste y desde este instante dicha teoría ha ocupado un interés más creciente en las aplicaciones de los sistemas.

El área de las ecuaciones diferenciales no lineales es actualmente desconocida, no se sabe nada de ellas, de allí que en este capítulo intentamos penetrar en este campo poco fructífero, observando las ideas y métodos importantes de la no-linealidad de los sistemas, así como poner de manifiesto los fenómenos nuevos e interesantes que no aparecen en los sistemas lineales. En más de una ocasión estaremos sorprendidos cuando notemos que muchos de ellos se pueden tratar de forma elemental sin recurrir a técnicas complicadas.

5.4.1. Sistemas Matriciales No - Lineales

Muchas veces nos preguntamos el porqué del interés en los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, sobre todo aquellos que tienen representación matricial. La razón principal estriba en que muchos sistemas físicos, o de carácter químico o biológico determinan y modelan sistemas no lineales por la propia naturaleza del fenómeno observado. Las linealizaciones muy usuales no son sino aproximaciones planteadas ante la impotencia de no hacer nada; en cierta forma más vale poco que no se investigue en absoluto. Debemos señalar con énfasis que en muchos trabajos realizados en la Física las aproximaciones lineales resultan ser adecuadas y válidas para la mayor parte de

los propósitos trazados. Para el efecto, presentamos a modo de ilustración dos ejemplos de problemas que son esencialmente no-lineales. Si x es el ángulo de desviación de un péndulo no amortiguado de longitud ℓ , que tiene una pesa de masa m , entonces como habíamos visto en la sección 2.3, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} x = 0$$

La presencia de una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la pesa determina una ecuación de movimiento amortiguado:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} x = 0$$

Ahora linealizamos ambas ecuaciones diferenciales al sustituir $\operatorname{sen} x$ por x , que es razonable para pequeñas oscilaciones, más, cuando x es grande tenemos un error considerable. De otra parte, un ejemplo de modo diferente está en la teoría de válvulas al vacío, cuyo estudio conduce a la ecuación diferencial de Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

En la cual notamos que, para cualquier x del dominio obtenemos una solución viable. Las discusiones que hagamos sobre estas ecuaciones no lineales nos conducirá a interesantes propiedades que el resto de la teoría de ecuaciones diferenciales no las poseen. La linealización forma parte de estas propiedades, sin embargo, en otras situaciones este método está fuera de lugar, ya lo ha sugerido Albert Einstein al expresar que, puesto que las ecuaciones diferenciales fundamentales de la Física Matemática son no lineales, habría que volver a hacer toda área. Si Einstein tuvo razón, entonces la Matemática en el futuro, y con toda certeza, será distinta a la Matemática del presente.

A lo largo del capítulo nos ocuparemos de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que tienen su origen en ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Que por cierto se incluyen las ecuaciones de segundo orden mencionadas anteriormente, como casos especiales. Para derivadas de orden mayor que 2 corresponde considerar otro campo de investigación con fenómenos físicos o biológicos relacionados. Así tenemos:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad \text{ó} \quad \frac{d^4x}{dt^4} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}\right)$$

Por citar algunos casos que expresan el comportamiento no lineal de los fenómenos ocurrido en la naturaleza.

5.4.2. Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos No - lineales

Para un estudio y caracterización de los sistemas no-lineales en una dinámica poblacional necesitamos conocer algunos conceptos básicos que son necesarios.

En efecto, $\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ es la ecuación de movimiento de un sistema dinámico

simple formado por una partícula de masa unitaria que se mueve por el eje X en

un plano XY , y si $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ consiste en la fuerza que actúa sobre la masa,

entonces tendremos un movimiento en dicho plano. Los valores de x (la posición

de la partícula) y de $\frac{dx}{dt}$ (es la velocidad) que caracterizan el estado de la

partícula en cada t , se llaman sus fases, y el plano conformado por x y $\frac{dx}{dt}$ se

llama el plano de fases. Poniendo $y = \frac{dx}{dt}$ resulta la forma equivalente:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

Al calcular $x(t)$, $y(t)$, encontramos una curva $y = y(x)$ en el plano XY , que no es sino el plano en cuestión. Es nuestro objetivo elaborar una gráfica integral que

englobe todas esas curvas en el plano de fases. En general, analizaremos sistemas dinámicos del modelo:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Donde las funciones F y G son continuas y tienen derivadas parciales continuas de orden uno, en todo el plano. Estos sistemas están desprovistos de la variable t en las funciones F y G , llamándose entonces autónomos.

Una trayectoria es una curva en el plano de fases del sistema representada por la única solución: $x = x(t)$, $y = y(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$; $y(t_0) = y_0$ con (x_0, y_0) un punto del plano de fases. Esta solución implica que $x = x(t+c)$, $y = y(t+c)$ también es solución del sistema para cualquier constante c . Inferimos de esta manera que cada trayectoria viene representada por soluciones que difieren en la constante. La dirección de t creciente a lo largo de la trayectoria dada es la misma para todas las soluciones que representan a esta trayectoria. Así pues, una trayectoria es una curva dirigida y en las figuras que vienen usaremos flechas para mostrar la dirección del tiempo t creciente. Notamos claramente que las trayectorias cubren prácticamente todo el plano de fases y no intersectan entre sí, excepto en los puntos (x_0, y_0) , donde F y G son nulos. Esto es, $F(x_0, y_0) = 0$ y $G(x_0, y_0) = 0$. Estos puntos (x_0, y_0) se llaman *puntos críticos* o de equilibrio, en tal caso resulta $x = x_0$, $y = y_0$ que es la solución constante. Una solución constante no define una trayectoria, así que por un punto crítico no pasa trayectoria alguna. Esta clase de punto es llamado punto aislado.

Un sistema autónomo general no proviene necesariamente de ecuaciones dinámicas, sin embargo, podemos asignarle un significado físico a las trayectorias y puntos críticos o de equilibrios, con ello presentaremos el método de análisis cualitativo de los sistemas lineales y no lineales.

Si $\vec{v}(x, y) = F(x, y)\vec{i} + G(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial bidimensional, que tiene el punto $P(x, y)$ una componente horizontal $F(x, y)$ y una componente $G(x, y)$.

Ahora bien, como $\frac{dx}{dt} = F$ y $\frac{dy}{dt} = G$, este vector es tangente a la trayectoria en P y

apunta en la dirección en que t crece. Si t es el tiempo, entonces \vec{v} consiste en el vector velocidad de una partícula que se mueve por la trayectoria. Podemos tener idea que todo el plano de fases está compuesto de partículas y que cada trayectoria es la traza de una partícula precedida y seguida por muchas otras sobre su misma trayectoria, y acompañada por muchas otras sobre las demás trayectorias. Esto describe un fluido en movimiento que es estacionario, pues como podemos ver, no cambia con el tiempo, las partículas recorren las trayectorias y los puntos críticos son puntos de velocidad cero en donde las partículas están en reposo. Estos aspectos constituyen lo esencial del diagrama de fases, que es el gráfico global de las trayectorias del sistema:

$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$; $\frac{dy}{dt} = G(x, y)$, ya que en general, sucede que las ecuaciones y

sistemas no lineales no pueden resolverse explícitamente, pero el propósito de la teoría cualitativa que se discute en esta sección es precisamente descubrir cuanto sea posible acerca del diagrama de fases, directamente de las funciones F y G . para tener imaginación sobre la información que estamos acopiando es el ejemplo presentado en la ecuación de Van der Pol, que no se conoce como resolver, sin embargo, podemos mostrar la existencia de una única solución periódica con solo ver que un sistema autónomo equivalente tiene una sola trayectoria cerrada. Véase con detenimiento la Figura N° 16 de la sección.



Los puntos críticos o de equilibrio de un sistema lineal o no – lineal con representación matricial se pueden calcular, al menos en principio, resolviendo las ecuaciones simultáneas $F(x, y) = 0$; $G(x, y) = 0$. Existen cuatro tipos simples de puntos de equilibrio que suceden con frecuencia en los sistemas y haremos

una descripción somera en términos de las configuraciones de las trayectorias cercanas

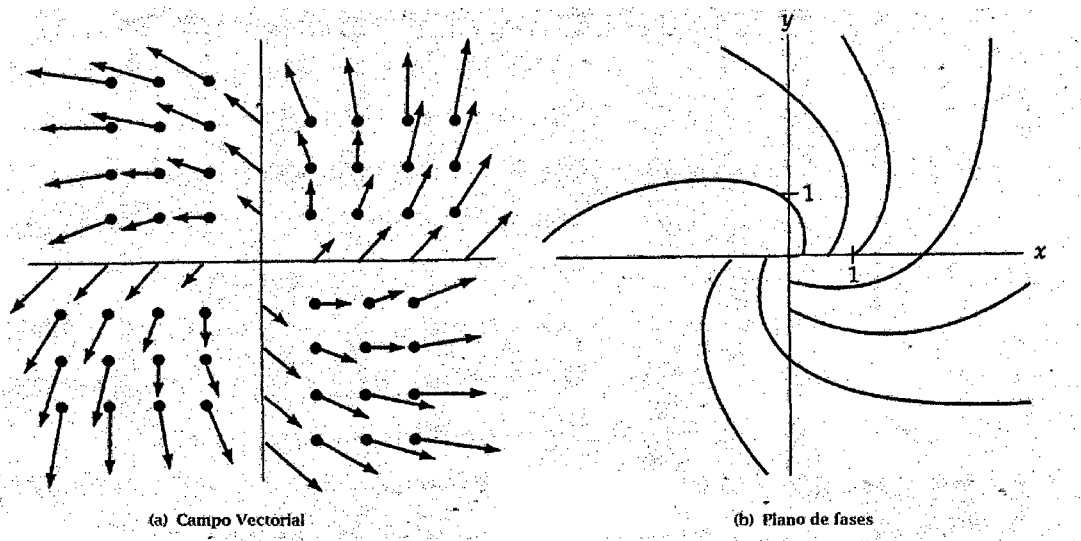


Figura 16

Para ello, necesitamos antes una definición. Considérese (x_0, y_0) un punto crítico aislado del sistema autónomo, decimos que $\gamma = \{(x(t), y(t)) / t \in I\}$ es una trayectoria del sistema, entonces γ tiende a (x_0, y_0) cuando $t \rightarrow \infty$ si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$$

Si además es cierto que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}$$

Existe entonces se dice que γ ingresa al punto crítico (x_0, y_0) cuando $t \rightarrow \infty$.

Ahora, damos una descripción geométrica de estos puntos en el origen $(0, 0)$.

Nodos: trayectorias formadas por rectas y parábolas, cuando $t \rightarrow \pm \infty$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 2y \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$$

El origen es el único punto crítico y la solución general es matricialmente:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Véase la figura N° 17

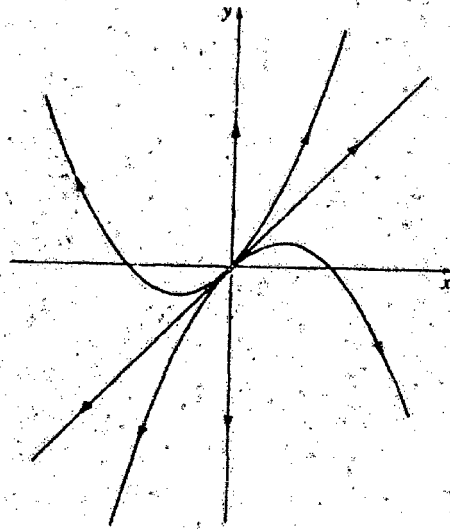


Figura 17

Punto Silla: cuando al punto crítico tienden y entran semirrectas si $t \rightarrow +\infty$, lo mismo con las semirrecta si $t \rightarrow -\infty$. Entre estas semirrectas hay cuatro regiones que contienen trayectorias semejantes a parábolas. Note que estas trayectorias no tienden al origen $(0,0)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, sino que son asíntoticas a las semirrectas. Véase la figura N° 18.

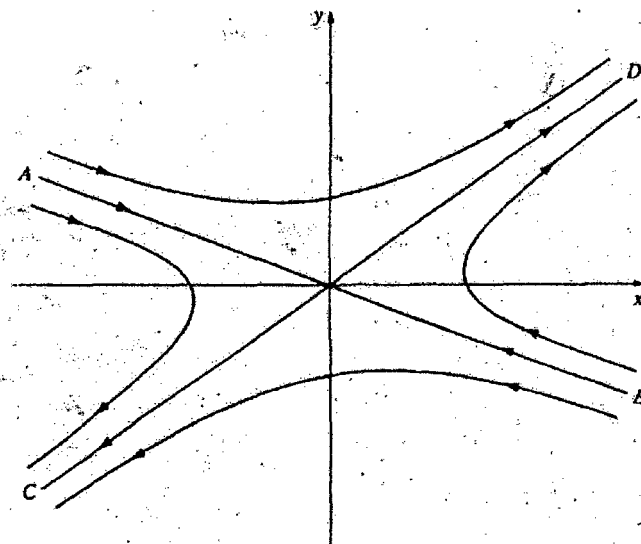


Figura 18

Focos. Llamados también punto espiral, a él tienden las trayectorias de una familia que gira en forma de espiral cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Note que aún cuando las trayectorias tienden al origen $(0,0)$, no entran a él. Ejemplo, para a constantes se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tiene a $(0,0)$ como único punto crítico o de equilibrio. Resolviéndose en coordenadas polares resulta:

$$\frac{dr}{d\theta} = ar, \text{ de donde } r = ce^{a\theta}$$

Es la ecuación polar de las trayectorias. Véase la figura 19.

Centros. Llamado vórtices. Son puntos críticos que están rodeados por una familia de trayectorias cerradas. Ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tiene el origen como único punto crítico y su solución general es:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \text{sent} + c_2 \text{cost} \\ c_1 \text{cost} + c_2 \text{sent} \end{bmatrix}$$



Con las condiciones $x(0)=1, y(0)=0$ se tiene $x = \cos t, y = \text{sent}$. Cuando es $x(0)=0, y(0)=-1$ resulta: $x = \text{sent}, y = -\text{cost}$. Véase la figura 20 que consiste en un plano de fases con circunferencias concéntricas.

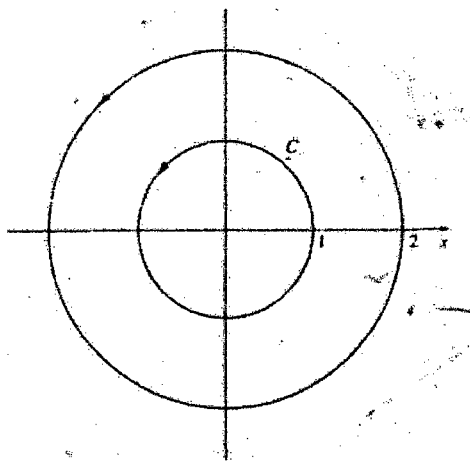


Figura N° 19

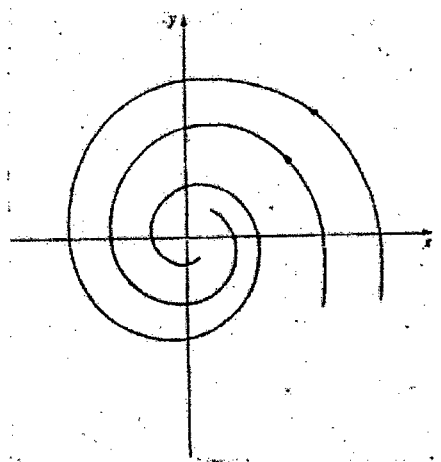


Figura N° 20

Otra caracterización de los sistemas dinámicos no lineales es la estabilidad, en efecto, una de las cuestiones importantes en el estudio de un sistema físico lo constituyen sus estados estacionarios. Sin embargo, estos estados tienen poco interés si no poseen un grado de permanencia, es decir, a menos que alcancen a ser estables. Por ejemplo, el péndulo simple presenta dos estados estacionarios posibles, a saber, cuando la pesa está en reposo en el punto más alto y cuando están en reposo en el punto más bajo. Es claro que el primer estado es inestable y el segundo si es estable, por la fuerza de la gravedad. Sabemos que un estado estacionario de algún sistema físico corresponde a un punto de equilibrio o punto crítico en el plano de fases. Estas consideraciones realizadas apuntan al hecho de que una pequeña perturbación de un estado estacionario inestable origina un alejamiento muy grande de este punto, lo que no ocurre para un punto de equilibrio estable. Estas nociones intuitivas de estabilidad pueden precisarse de tal manera que los sistemas lineales y no – lineales se apliquen acertadamente en la solución de problemas de ciencias o de ingeniería. Supóngase un punto crítico o de equilibrio del sistema: $\frac{dx}{dt}=F(x,y)$; $\frac{dy}{dt}=G(x,y)$ y convenimos que está localizado en el origen $(0,0)$ en el plano de fases. Decimos que este punto crítico es estable, si para cada $R > 0$ existe un $r > 0$ tal que $r \leq R$, de modo que toda trayectoria que se encuentra dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $t = t_0$ permanece en $x^2 + y^2 = R^2$ para todo $t > t_0$. Asimismo, el punto crítico se

llama asintóticamente estable si es estable y existe una circunferencia $x^2 + y^2 = r_0^2$ tal que toda trayectoria que se encuentra dentro de ella para algún t_0 tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Si este punto referido no es estable entonces se llama inestable. Véase la figura N° 21.

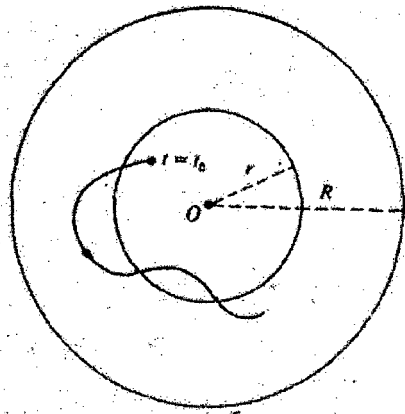


Figura 21

5.4.3 Inestabilidad y Puntos de Equilibrio para Sistemas No - Lineales

Nuestro objetivo en esta sección es llegar a conocer lo referente a ecuaciones diferenciales no - lineales estudiando los diagramas de fases de sistemas autónomos no - lineales del modelo:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) ; \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Este es un sistema que a la fecha soporta la mayor investigación posible en su naturaleza, gracias a ella tenemos buenos resultados halagüeños que nos permiten realizar aplicaciones a las diversas áreas de la Ciencia. Un aspecto de estos problemas es la clasificación de los puntos de equilibrio de tal sistema atendiendo a su naturaleza y estabilidad. Veremos aquí que elaborando algunos condiciones estos problemas se resuelven para un sistema matricial no lineal analizando un sistema lineal adecuado. Para ello ponemos nuestra atención en hacer un análisis completo de los puntos críticos o de equilibrio de sistemas autónomos lineales. En primer término consideremos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y$$

Que tiene, como vemos, al origen como punto de equilibrio. Supóngase que:

$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$ de modo que $(0,0)$ es el único punto de equilibrio. Este sistema

tiene una solución no matricial de la forma $x = Ae^{mt}$; $y = Be^{mt}$, donde m es raíz de la ecuación $m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ que es la ecuación auxiliar del sistema, en la cual cero no es raíz, pues el determinante es no nulo. Sean m_1 y m_2 estas raíces, afirmamos que la naturaleza del punto $(0,0)$ crítico del sistema queda determinado por m_1 y m_2 . Clasificamos estas raíces en la forma siguiente:

Casos Principales:

- ✓ Caso 1: las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y del mismo signo. Tenemos ahí un nodo.
- ✓ Caso 2: las raíces m_1 y m_2 son reales distintas y de signos opuestos. Esto corresponde a un punto silla.
- ✓ Caso 3: las raíces m_1 y m_2 son complejas conjugadas, pero no imaginarias puras. Tenemos aquí un foco.

Casos Frontera:

- ✓ Caso 4: las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales. Corresponde a un nodo.
- ✓ Caso 5: las raíces m_1 y m_2 son imaginarias puras. El punto de equilibrio es un centro en el sistema.



Estas afirmaciones relativas a la estabilidad de sistemas se consolidan en el teorema que sigue, el cual será aceptado sin demostración, ya que no es nuestro objetivo trazado en el Proyecto.

Teorema 1

El punto crítico $(0,0)$ del sistema $\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y$; $\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y$ es estable si y solo si ambas raíces de la ecuación auxiliar tiene partes reales no positivas; y es

asintóticamente estable si y solo si ambas raíces tienen partes reales negativas. Asimismo, el punto crítico $(0,0)$ del sistema es asintóticamente estable si y solo si $p = -(a_1 + b_2)$ y $q = a_1 b_2 - a_2 b_1$ de la ecuación auxiliar son ambos positivos.

En lo que viene a continuación, abordamos más de lleno en los problemas que estamos investigando para sistemas no lineales, que en general no pueden ser resueltos explícitamente en ningún caso presentado. En efecto, si consideramos un sistema físico cuya energía total tiene un mínimo local en un cierto punto de equilibrio, este punto llega a ser estable. Esta idea fue generalizada por Alexander Liapunov en 1892, un ingeniero ruso; con ella podemos analizar problemas de estabilidad en un contexto más amplio que abarquen otras áreas del conocimiento.

Desarrollamos en primer lugar las funciones de Liapunov y luego veremos su repercusión en algunas aplicaciones. Sea pues el sistema autónomo $\frac{dx}{dt} = F$, $\frac{dy}{dt} = G$ y supóngase que tiene un punto crítico aislado, digamos $(0,0)$. Sea también $\gamma = \{(x,t), (y,t) / t \in I\}$ una trayectoria del sistema en estudio y consideremos una función $E(x,y)$ continua y con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a la trayectoria.

Suponiendo que un punto $P(x,y)$ se mueve a lo largo de la trayectoria de acuerdo con las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces $E(t) = E(x(t), y(t))$.

La función $E(t)$ cambia con el tiempo mediante la expresión:

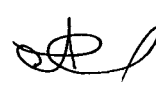
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G$$

Ponemos nuestra atención en esta clase de función $E(x,y)$ y la analizaremos por medio de las siguientes definiciones tomando en cuenta que E es continua y tiene derivadas parciales primera continuas en alguna región del plano que contiene al origen $(0,0)$:



Análisis de la Función $E(x, y)$	
Hipótesis	Denominación
$E(x, y) = 0$	E es definida positiva si $E(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$
	E es definida negativa si $E(x, y) < 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$
	E es semidefinida positiva si $E(x, y) \geq 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
	E es semidefinida negativa si $E(x, y) \leq 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
$a, b > 0$ m, n enteros positivos	$E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ es definida positiva.
$a, b < 0$ m, n enteros positivos	$E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ es definida negativa.
$E(x, y)$	$x^{2m}, y^{2m}, (x - y)^{2m}$ son semidefinidas positivas.
$E(x, y)$ es definida negativa si y solo si $-E(x, y)$ es definida positiva.	

Una función definida positiva $E(x, y)$ con la propiedad de que $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ es semidefinida positiva se llama una función Liapunov para el sistema en estudio $\frac{dx}{dt}F(x, y), \frac{dy}{dt}G(x, y)$. Claramente vemos que $\frac{dE}{dt} \leq 0$, luego E es no creciente a lo largo de las trayectorias del sistema, que están próximas al origen $(0, 0)$.



Las funciones de Liapunov por su contenido llegan a generalizar el concepto de energía total de cualquier sistema físico definido, y sientan las bases del concepto de estabilidad de una vez y por todas. Todo ello queda formulado en el siguiente Teorema.

Teorema 2

Si existe una función de Liapunov $E(x, y)$ para el sistema $\frac{dx}{dt}F, \frac{dy}{dt}G$, entonces el punto crítico o de equilibrio $(0,0)$ es estable. Asimismo, si además $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ es definida positiva, entonces, el punto crítico $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Ilustramos esta teoría expuesta con el sistema siguiente: Sea la ecuación diferencial $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$, donde c es la constante de viscosidad del medio y $k > 0$ es la constante restauradora. Formamos el sistema autónomo equivalente:

$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y$ cuya representación matricial se escribe:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Y tiene por único punto crítico a $(0,0)$. El sistema se sujeta a las leyes de la energía cinética y energía potencial, de modo que resulta:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Que es la energía total del sistema. De otro lado, $E(x, y)$ es definida positiva y puesto que

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = kxy + my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y\right) = -cy^2 \leq 0$$

Entonces $E(x, y)$ es una función de Liapunov para el sistema, y por tanto el punto de equilibrio $(0,0)$ es estable.

Proponemos otro sistema no – lineal estudiando el siguiente caso:

$$\frac{dx}{dt} = -2xy; \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2$$

Este tiene a (0,0) como punto crítico aislado, por tanto averiguamos su estabilidad construyendo una función de Liapunov del modelo

$$E(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}, \text{ entonces efectuamos:}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = 2ma x^{2m-1} (-2xy) + 2nb y^{2n-1} (x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = (-4ma x^{2m} \cdot y + 2nb x^2 y^{2n-1}) - 2nb y^{2n+2}$$

En los términos del paréntesis imponemos condiciones para alcanzar la positividad que se exige, lo que obtenemos: $m=1, n=1, a=1$ y $b=2$, de allí que $E(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ que es definida positiva. También al derivar a $E(x, y)$ resulta

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = -4y^4 \text{ lo que afirma que es semidefinida positiva, luego}$$

concluimos que (0,0) es un punto de equilibrio estable.

En la práctica de problemas sobre sistemas diferenciales matriciales puede ser muy difícil construir funciones de Liapunov que se adecuen al problema. Por consiguiente, el siguiente resultado puede ayudarnos en mucho.

Teorema 3

La función $E(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$; y es definida negativa, si y solo si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Cuando $y=0$ obtenemos $E(x, 0) = ax^2$, así que $E(x, 0) > 0$ para $x \neq 0$ si y solo si $a > 0$. Si $y \neq 0$ resulta:

$$E(x, y) = y^2 \left[a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \left(\frac{x}{y} \right) + c \right]$$

Cuando $a > 0$ el polinomio en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es positivo cuando y sólo cuando $b^2 - 4ac < 0$.

La otra parte de la prueba se sigue de considerar la función $-E(x, y)$ como definida positiva. Finalmente, el análisis de la inestabilidad en el punto crítico $(0, 0)$ conlleva a considerar la existencia de una función $E(x, y)$ que tiene las siguientes propiedades:

- a) $E(x, y)$ es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en cierta región que contiene al origen.
- b) $E(0, 0) = 0$.
- c) Cualquier circunferencia centrada en el origen contiene por lo menos un punto en el cual $E(x, y) > 0$.
- d) $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ es definida positiva.

Hasta aquí hemos desarrollado los fundamentos básicos de la estabilidad de un sistema matricial lineal, los cuales nos servirán para discutir aquellos sistemas autónomos que no son lineales. Consideremos entonces un sistema autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) ; \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Con un punto crítico aislado en $(0, 0)$. Supóngase también que F y G admiten desarrollarse en Series de Taylor en x e y , entonces el sistema se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + \dots \end{aligned}$$

Si ocurre que tanto x e y son muy pequeños, esto es, $|x| < \varepsilon_1$; $|y| < \varepsilon_2$, es decir que (x, y) está muy cerca al origen $(0, 0)$, entonces los términos de segundo grado o de grado superior resultan muy pequeños. Esta consideración nos permite despreciar los términos no – lineales y lanzar una conjetura afirmando que el

comportamiento de las trayectorias del sistema muy cerca del punto de equilibrio $(0, 0)$ es bastante semejante al que poseen las trayectorias del sistema lineal asociado:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y$$

Y realmente esto es lo que ocurre. Este proceso de sustituir los sistemas se llama **linealización**. Una consideración general nos lleva a escribir sistemas del modelo:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x, y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x, y)$$

Un estudio detallado de estas ecuaciones nos permite suponer que

$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$ para llegar a soluciones concretas, entonces el sistema lineal

asociado $\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y$; $\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y$ tiene en el origen $(0, 0)$ un punto crítico

aislado; asimismo f y g son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas para (x, y) del plano, además cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sucede que los límites son finitos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Esto implica que $f(0, 0) = 0$ y $g(0, 0) = 0$ de modo que $(0, 0)$ es un punto crítico del sistema que contiene a $f(x, y)$ y a $g(x, y)$. En estas condiciones el punto $(0, 0)$ es aislado llamándose un **punto crítico simple** del sistema planteado. Una ilustración al respecto consiste el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2$$

Entonces:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

De otro lado, calculamos los límites:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{|r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta|}{r} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|r^2|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|-2xy^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{|2r^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta|}{r} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|2r^3|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 = 0$$

Por tanto, se verifican las condiciones de exigencia, luego $(0,0)$ es un punto crítico simple del sistema. En general, estas condiciones fueron propuestas por Henri Poincaré en 1892 a fin de dar solución a un sistema no – lineal. Ahora

resolveremos el sistema lineal asociado $\frac{dx}{dt} = -2x + 3y$; $\frac{dy}{dt} = -x + y$, en

donde la ecuación auxiliar es $m^2 + m + 1 = 0$ cuyas raíces son $m_1, m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

En esta parte utilizamos el cuadro de análisis de la función $E(x,y)$, y vemos que corresponde al Caso 3, pues las raíces son complejas conjugadas y no imaginarias puras. Concluimos que el punto crítico del sistema asociado es un foco, luego el punto crítico $(0,0)$ del sistema no lineal es también un foco. Las trayectorias de ambos sistemas tienen los mismos rasgos cualitativos de las dos configuraciones del plano fase.

5.4.4 Dinámica Biológica y el Problema Predador - Presa de Volterra.



Conocidos es por todos que entre las diferentes especies animales que habitan en una misma región existe una competencia continua por la supervivencia; entre esas especies sobreviven alimentándose unos de otros, otras especies elaboran formas de evadir para no ser comidos y otras huyen de la región habitable. Esto representa un conflicto universal en todas las regiones del mundo entre predadores y presas, los que a su vez cambian de estatus, es decir, de ser predadores pasan a ser presas.

Ponemos un escenario en el cual habitan zorros y conejos. Sucede que los zorros se alimentan de los conejos, y los conejos se alimentan de alfalfa (aunque la alfalfa también se alimenta de abonos). Como hipótesis afirmamos que existe una gran cantidad de alfalfa, de modo que los conejos no tienen escasez de alimentos. Como resultado de esta dinámica los conejos abundan, de forma que los zorros aumentan y no tienen problema alguno. Con el tiempo el número de zorros aumenta considerablemente, entonces necesitan demasiados conejos y ahí se originan un grave problema, ya que empieza un período de hambre, por tanto la población tiende a disminuir enormemente. Como consecuencia de esta acción los conejos se encuentran a salvo por el momento, de allí que se multiplican. Esta actividad origina un nuevo aumento en la población de zorros y con el transcurrir de los días, el ciclo se repite una y otra vez, tornándose una dinámica poblacional de zorros y conejos.

Los biólogos que investigan esta dinámica de predador – presa han tenido que formular ecuaciones diferenciales para llegar a conclusiones satisfactorias. Discutiremos las interacciones entre zorros y conejos utilizando el esquema planteado por Vito Volterra en 1910, quien inició el análisis cualitativo de esta dinámica poblacional. Supóngase x como el número de conejos en el instante t ,

entonces debemos tener $\frac{dx}{dt} = ax$, $a > 0$, como consecuencia de la abundancia en

alfalfa si el número de zorros es cero. De otro lado, los encuentros por unidad de tiempo entre zorros y conejos resulta ser proporcional simultáneamente a x y a y , estos encuentros tienen como resultado la captura de un conejo por un zorro. Por

tanto, escribimos: $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$ con $a, b > 0$. Pensemos ahora del mismo modo en

que $\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$ con $c, d > 0$ ya que al no haber conejos entonces hay

mortandad de zorros, y su crecimiento estaría dependiendo del número de sus encuentros con los conejos. Queda pues formulado el sistema no – lineal para describir en cualquier instante t la interacción zorro – conejo.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy = -y(c - dx)$$

Son las ecuaciones predador – presa de Volterra, que se puede aplicar a cualquier par de especies animales que interactúan en el medio ambiente. Para un número mayor que dos especies tendremos un sistema no – lineal 3×3 considerando un número de encuentros entre tres especies, o un sistema no lineal 4×4 cuando los encuentros se producen entre cuatro especies que interactúan en el medio.

Por consiguiente, estamos ante un sistema no – lineal $n \times n$ que determina una dinámica poblacional si elaboramos el sistema lineal asociado $n \times n$.

Resolviendo el sistema 2×2 eliminando t para obtener $x = x(t)$; $y = y(t)$ obtendremos:

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln k$$

De donde:

$$y^a e^{-by} = kx^{-c} e^{dx}$$

A continuación, introducimos en esta sección el importante método de linealización para la interacción zorro – conejo. Notamos en principio, que si las poblaciones de conejos y de zorros son constantes, no hay cambios, entonces el sistema no – lineal se satisface, luego $\frac{dx}{dt} = 0$; $\frac{dy}{dt} = 0$, así que tanto x como y ni crecen ni decrecen, a estas poblaciones se les llama **poblaciones de equilibrio**, y podemos poner $x = \frac{c}{d}$; $y = \frac{a}{b}$.

Si ahora las poblaciones varían con el tiempo, entonces ponemos:

$$x = \frac{c}{d} + X \quad ; \quad y = \frac{a}{b} + Y$$

Luego las variables X e Y constituyen las modificaciones de x e y respecto de su equilibrio, convirtiéndose el sistema no – lineal en otro:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{bc}{d}Y - bXY$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b}X + dXY$$

Es aquí que nosotros procedemos a linealizar el sistema cuando suponemos que X e Y son muy pequeños, luego se infiere que XY en las ecuaciones son despreciables con error mínimo casi cero.

Por tanto el sistema lineal asociado:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\frac{bc}{d}Y \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{ad}{b}X \end{aligned} \quad \text{es decir} \quad \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cuya solución general consiste en la ecuación $ad^2X^2 + b^2cY^2 = c^2$ que representa una familia de elipses que describen la dinámica predador – presa. Consideremos ahora dos poblaciones que interactúan en el campo de la Biología entre el parásito P y un huésped H . las ecuaciones de Lotka – Volterra para los tamaños poblacionales consisten en el tiempo t :

$$\frac{dP}{dt} = (a - bP)H \quad ; \quad \frac{dH}{dt} = (cH - d)P$$

Con a, b, c, d como constantes positivas.

Las soluciones de equilibrio son $(0, 0)$ y $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Asimismo, para $H > 0$ y $P > 0$

el único punto de equilibrio es $(H_0, P_0) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$; diremos también que el

sistema linealizado asociado es (PH factor despreciable:

$$\frac{dP}{dt} = aH \quad ; \quad \frac{dH}{dt} = -dP \quad \text{es decir} \quad \begin{bmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ P \end{bmatrix}$$



La solución de equilibrio de este sistema es un punto crítico estable clasificado como centro. Las ecuaciones del sistema Loka – Volterra pueden ser refinadas al efectuar las acotaciones $L > H(t)$ y $M > P(t)$ para los crecimientos poblacionales del huésped H y el parásito P . por tanto, tenemos la nueva versión:

$$\frac{dH}{dt} = (a - bP)H(L - H) \quad ; \quad \frac{dP}{dt} = (cH - d)P(M - P)$$

Donde a, b, c, d son constantes positivas, con $L > \frac{d}{c} > 1$ y $M > \frac{a}{b} > 1$.

Cuando se consideran tres tamaños poblacionales H , K y P entonces la interacción bajo el tiempo t consiste en el sistema matricial:

$$\frac{dP}{dt} = aH ; \quad \frac{dK}{dt} = -eK ; \quad \frac{dH}{dt} = -dP$$

En donde los productos PH , KP , KH son despreciables. Así que:

$$\begin{bmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dK}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -e & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ K \\ H \end{bmatrix}$$

Los modelos poblacionales no – lineales más ampliamente conocidos son el parásito – huésped y predador – presa, los cuales sostienen una relación asimétrica. Como $P(t)$ denota el tamaño de una población de parásitos en el tiempo t , el cual victima o mata a la población de huéspedes de tamaño $H = H(t)$ entonces si los parásitos están ausentes, la población de huéspedes puede crecer por algún tiempo de acuerdo a $\frac{dH}{dt} = aH$, $a > 0$. Sin embargo, el

crecimiento de H será inhibido por el efecto del incremento destructivo de una población grande de parásitos P , puesto que la razón de mortandad por huésped será muy grande. Se sume estos efectos negativos al tomar la forma $-bPH$, $b > 0$

. Si la población de huéspedes se encuentra ausente, entonces los parásitos pueden estar en una expectativa de morir rápidamente en concordancia con

$$\frac{dP}{dt} = -dP, \quad d > 0.$$

Las soluciones de equilibrio satisfacen $(a - bP)H = 0$ y $(cH - d)P = 0$, luego es

$$\text{cierto que } (H, P) = (0, 0) \text{ y } (H, P) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right).$$

El origen (0,0) como solución no representa mayor interés desde el punto de vista de dinámicas de población, puesto que denota una total ausencia de ambas especies. Para comprender el significado del equilibrio en $H = \frac{d}{c}$ y $P = \frac{a}{b}$ examinamos el desarrollo cerca de ese punto. Para tal fin, considérese

$$H = H_0 + \frac{d}{c} \quad \text{y} \quad P = P_0 + \frac{a}{b}$$

Donde H_0 y P_0 se asumen muy pequeños. La sustitución en el sistema para H y P :

$$\frac{dH}{dt} = (a - bP)H \quad ; \quad \frac{dP}{dt} = (cH - d)P$$

Nos da:

$$\begin{aligned} \frac{dH_0}{dt} &= (a - bP_0 - a) \left(H_0 + \frac{d}{c} \right) = - \left(\frac{bd}{c} \right) P_0 - bP_0 H_0 \\ \frac{dP_0}{dt} &= (cH_0 + d - d) \left(P_0 + \frac{a}{b} \right) = \frac{ac}{b} H_0 + cH_0 P_0 \end{aligned}$$

Este sistema no es tan simple como el sistema original, sin embargo, si asumimos H_0 y P_0 pequeños, digamos mucho menor que 1 sobre alguna escala, el producto $H_0 P_0$ será mucho más pequeño. Denominando los dos últimos términos en la versión modificada del sistema resulta en el sistema lineal:

$$\frac{dH_0}{dt} = - \left(\frac{bd}{c} \right) P_0 \quad ; \quad \frac{dP_0}{dt} = \frac{ac}{b} H_0$$

La solución del sistema linealizado por eliminación es:

$$H_0(t) = b\sqrt{d} A \cos(\sqrt{ad} t + \phi) \quad ; \quad P_0(t) = c\sqrt{a} A \sin(\sqrt{ad} t + \phi)$$

Donde las constantes A y ϕ están determinadas por las condiciones iniciales. El punto $(H_0(t), P_0(t))$ traza una familia de elipses centradas en (0,0) en el plano

(H_0, P_0) . Regresando al plano (H, P) tendremos elipses centradas en el punto de equilibrio $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Véase la figura N° 22 en la cual se grafica las soluciones no – lineales de Lotka – Volterra. También véase la figura n1 23 sobre poblaciones que interactúan.

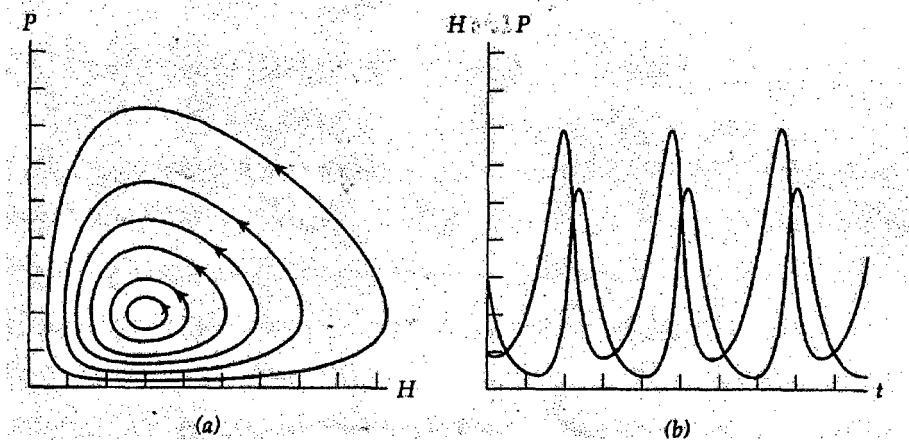


Figura N° 22: Soluciones no – lineales Lotka – Volterra

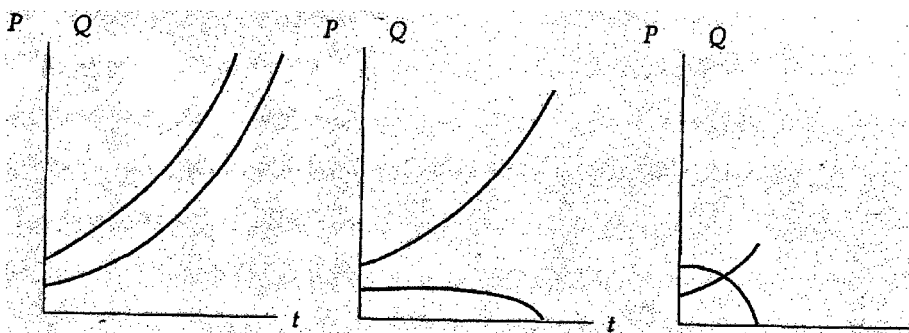


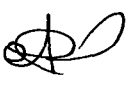
Figura N° 23: Interacciones posibles de poblaciones

5.5 Modelos de Población con comportamiento caótico

La Teoría del Caos sale a la luz por las diferencias surgidas entre la Ciencia desarrollada hasta el siglo XIX y la que se desarrolla en el siglo XX, entre la Posición Determinística y la Nueva Física. En efecto, a comienzos del siglo XX, la Física es certera en la predicción de los fenómenos, a pesar de los antecedentes sobre las declaraciones de Henri Poincaré dadas en el siglo XIX sobre el problema

de los tres cuerpos, en los cuales expresaba que solo podemos tener una aproximación y que la predicción es imposible. Estas afirmaciones fueron ignoradas complemente y los físicos continuaron en sus predicciones hasta tener la llamada Revolución de la Física. El trabajo desarrollado por Poincaré consiste en que las variables pueden tener un comportamiento caótico, complicado e impredecible pero dentro de un orden geométrico observable. A partir de esta premisa se desarrollan los procesos caóticos, aportando un nuevo conocimiento donde los problemas científicos pueden resolverse desde estos nuevos perfiles. Esto significa que las estructuras complejas podrían resultar siendo las más simples, como si el orden viniese del caos. Esta teoría fue formulada durante los años 50, el substancial y más práctico trabajo fue hecho por Edward Lorenz en los años 60, al escribir sistemas no – lineales como resultados de procesos caóticos. El nombre de caos fue acuñado por James Yorke, matemático destacado de la Universidad de Maryland, Estados Unidos, en 1991.

Para aplicar la Teoría del Caos, una sola mediación de una variable $(x)_n = x(ID + NT)$ con un tiempo t_0 y un período de tiempo t , proporciona un espacio dimensional n o fases del espacio, que representado el espacio multivariado completo del estado del sistema. Mas de 4 dimensiones son requeridas para representar la fase espacial de un sistema caótico, cuyas aplicaciones importantes son: predecir, elaborar reportes meteorológicos, generar fractales, entre otros. En lo que respecta a nuestro trabajo de investigación, nos limitamos a calcular soluciones de sistemas dinámicos no – lineales que admiten procesos caóticos en sus formulaciones teóricas.



5.5.1 Caos en los Sistemas Dinámicos No – Lineales

Uno de los sistemas no – lineales de mayor trascendencia en los procesos caóticos es el sistema general de Lorenz:

$$x' = \sigma(y - x); \quad y' = \rho x - y - xz \quad ; \quad z' = -\beta z + xy$$

Donde β, ρ y σ son constantes positivas. Este sistema autónomo ha sido estudiado extensivamente con la finalidad de comprender las trayectorias tales como el que se muestra en la figura adjunta. Con la selección de parámetros:

$\beta=8/3, \rho = 28, \sigma = 10$ los puntos de equilibrio al lado del origen son $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ la trayectoria mostrada en la figura tiene punto inicial:

$(2, 2, 21)$, los autovalores de las linealizaciones son las mismas que los dos puntos de equilibrio; ellos son: $\lambda_1 \approx -13,85, \lambda_2, \lambda_3 = 0,09 + 10,19i$. Así, esos dos puntos son puntos silla de montar y se muestran allí que tiene cada uno de ellos unas superficies contenidas a todas las trayectorias gradualmente a modo de espiral desde el punto referido

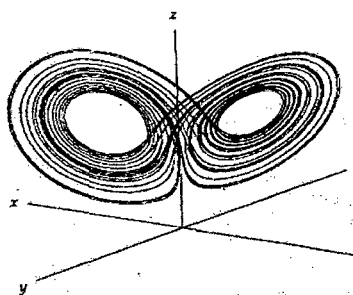


Figura N°24

Eduard Lorenz inicio el estudio de este sistema al utilizar aproximaciones en ecuaciones diferenciales complicadas en el estudio de patrones de líquidos.

Otro sistema de procesos caóticos es el sistema no lineal de Duffing $x' = y, y' = ax - bx^3 - cy + A\cos(wt)$. Las orbitas del sistema expresan una variedad de comportamiento, pasando desde oscilación, periódico y caótico.

Otro sistema caótico no menor importante es el de Rossler definida mediante:

$$x' = -y - z, y' = x + ay, z' = b - cz + xz.$$

Donde a, b, c y d son parámetros positivos. O.E. Rossler quiso edificar un posible sistema muy simple que modele el fenómeno manifestado en las complicaciones del sistema de Lorenz.

5.5.2 Secciones Temporales de Poincaré

Algunas gráficas solución y diagrama de fase para ecuaciones no-autónomas

$y'' = f(t, y, y')$ son tan irregulares que ellos expresan un pequeño orden aparente.

Esta irregularidad es algunas veces justificada por aproximaciones numéricas para predecir la actual evolución en el tiempo de una solución.


6. Discusión

En el presente trabajo se ha realizado un estudio de diversos modelos matriciales en los sistemas lineales y no lineales con el objeto de lograr una real aplicación de la teoría de matrices en los sistemas de ecuaciones diferenciales, ciertamente, no existe una forma directa y precisa para determinar las soluciones de los sistemas dinámicos, de allí que existen limitaciones cuando tratamos un problema de dinámica poblacional, ya que todavía no se tiene una teoría cabal y aplicativa.

Al respecto, nos va a tomar un poco de tiempo para investigar este campo y lograr verdaderos objetivos, por ejemplo, la linealización de sistemas no lineales no puede constituir un método eficaz porque se pierden los valores numéricos cuando se hacen truncamientos en el desarrollo de los sistemas. Se necesitan más condiciones para obtener las soluciones en los sistemas no lineales, este es el caso de los célebres sistemas no-lineales de Lorenz, de Duffing y de Rossler que utilizan órbitas periódicas en el cálculo de sus soluciones.



7. Referencias Bibliográficas

- [1]. WILLIAMSON, RICARDE. Introduction to Differential Equations and Dynamical Systems. New York: Mac Graw-Hill. Second Edition. 2001.
- [2]. ZILL, DENNIS G./CULLEN, MICHAEL R. Differential Equations with Boundary –Value Problems. California: Brooks/Cole. Sixth Edition. 2005.
- [3]. HIRSH, M.W./SMALES, S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. New York: Academic Press. First Edition. 1974.
- [4]. STRANF, W.G. Linear Algebra and its Applications. New York: Academic Press. Second Edition. 1980.
- [5]. NOBLE, BENJAMIN. Applied Linear Algebra. New Jersey: Prentice Hall. Second Edition. 1977.
- [6]. SIMMONS, GEORGE/ ROBERTSON, JOHN. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Madrid: Mc Graw – Hill Interamericana. Segunda Edición.
- [7]. TENEN BAUM, MORRIS/ POLLARD, HARR. Ordinary Differential Equations. New York: Harper and Row. Second Edition. 1963.
- [8]. EDWARDS, C.H./ PENNY, DAVID. Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones. México: Prentice – Hall Hispanoamericana. Primera Edición. 1986.
- [9]. LIMA, ELON LAGES. Álgebra Linear. Río de Janerio: IMPA. Octava Edición. 2009. 
- [10]. YABLOKOV, A.V. Population Biology Progress and Problems. Moscow: MIR Publishers. Firt Edition. 1986.
- [11]. GUTIERREZ, JOSE MANUEAL. Sistemas No-Lineales. Conceptos, algoritmos y aplicaciones. México: Matemática Aplicada y Ciencia de la Computación. Segunda Edición. 1998.
- [12]. KATOV, R/ HASSELBATT, B. Introduction on Modern Theory of Dymamics Systems. New York: Academic Press. Second Edition. 1997.
- [13]. GROSSMAN, STANLEY. Alicaciones de Álgebra Lineal. Mèxico: Grupo Editorial Iberoamérica. Primera Edición. 1988.

- [14]. SPIEGEL, MURRAY. Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. México: Prentice- Hall Hispanoamericana. Tercera Edición. 1983.
- [15]. LOTKA, A.J. Elements of Mathematical Biology. New York: Dover Publications. First Edition. 1956
- [16]. BORRELLI, ROBERT/ COLEMAN, COURTNEY. Differential Equations. New Jersey: John Willey and sons. Second Edition. 2004.
- [17]. EDWARDS, C.H./ PENNEY, DAVID differential Equations and Boundary Value Problems. New Jrsey: Pearson Prentice Hall. Third Edition. 2004.
- [18]. BRAUER, F./ NOHEL, J. Qualitative theory of Ordinary Differential equations. New York: W.A. Benjamin. First Edition. 1969.



8. APENDICE

El diagrama indica los pasos desde el problema originado hasta obtener los resultados requeridos.

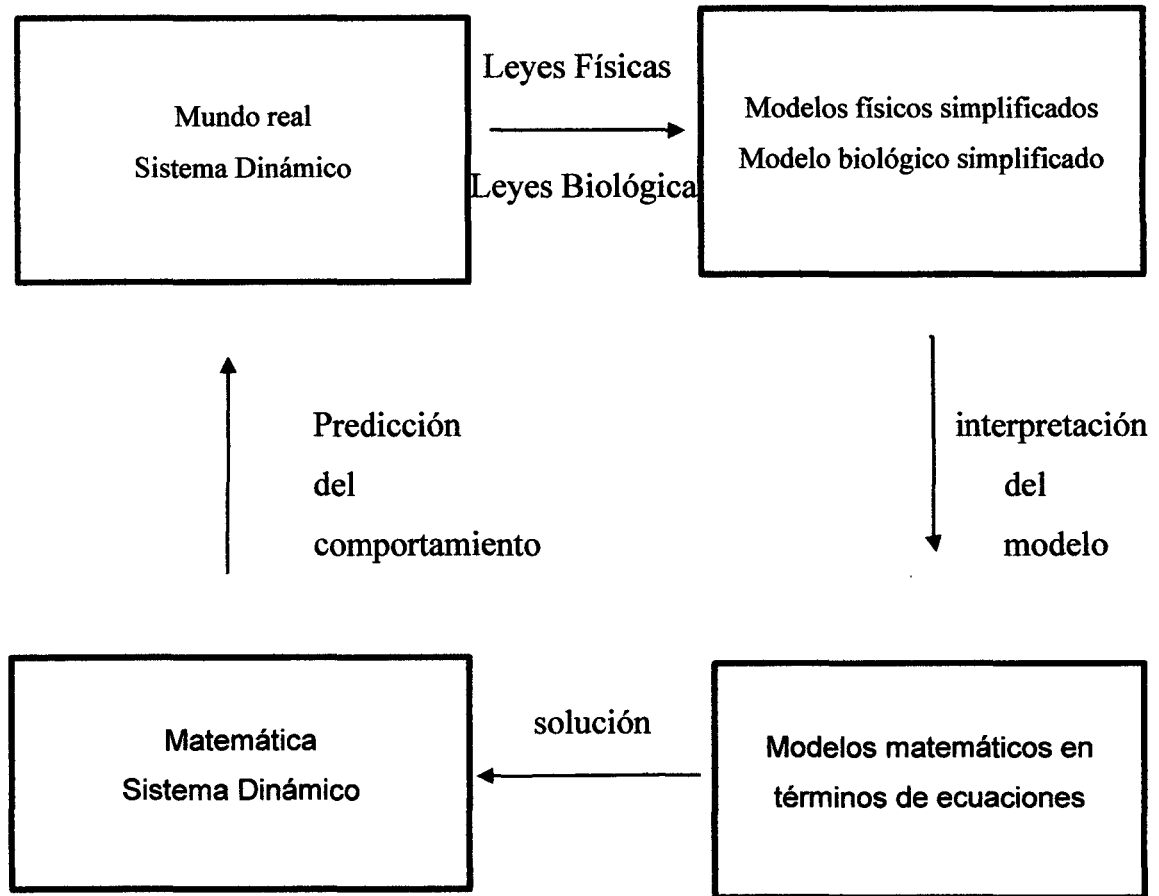


Figura N° 25: Diagrama de la aplicación de un modelo de dinámica poblacional.

El diagrama indica los pasos para seguir en el desarrollo teórico.

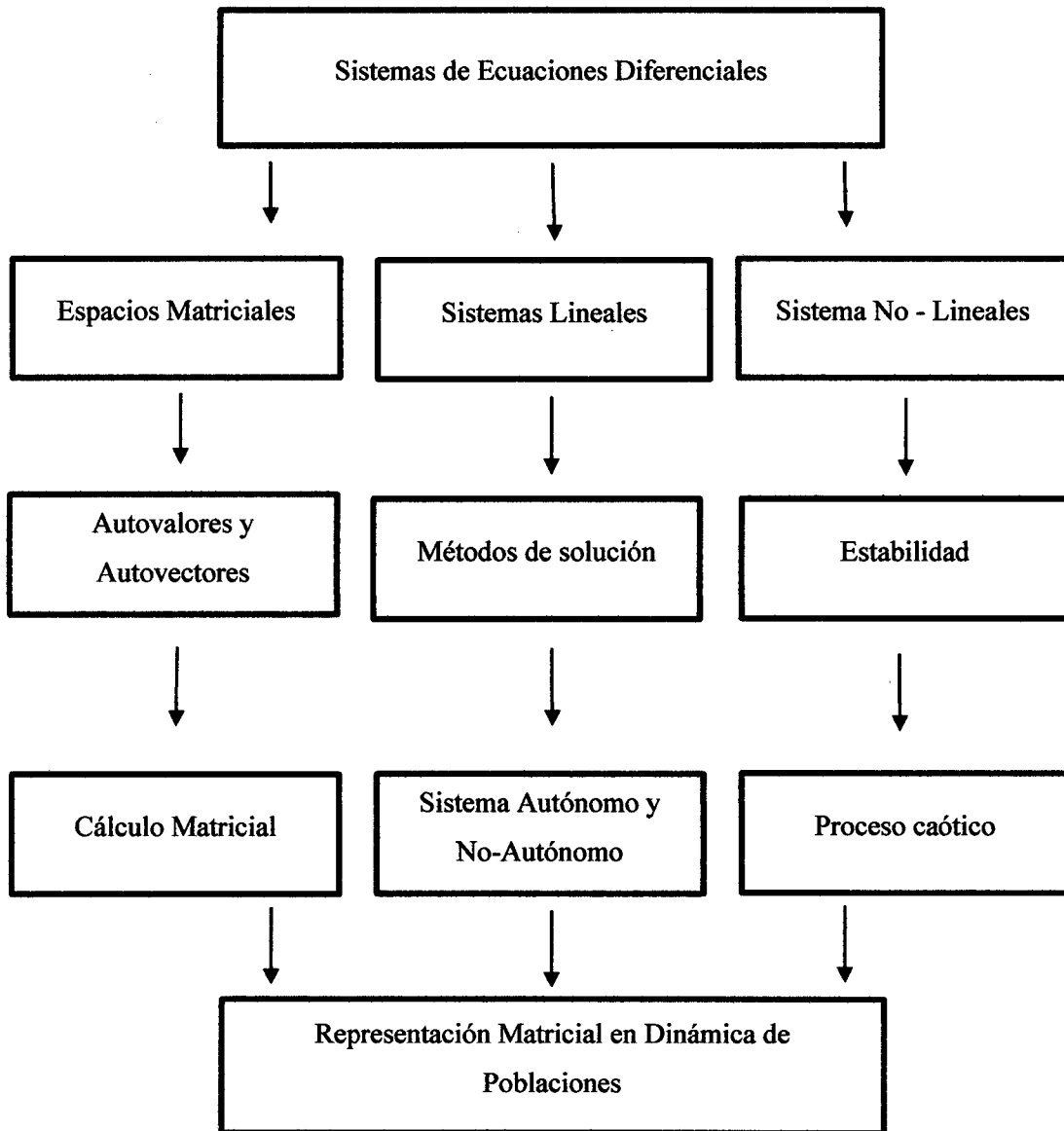
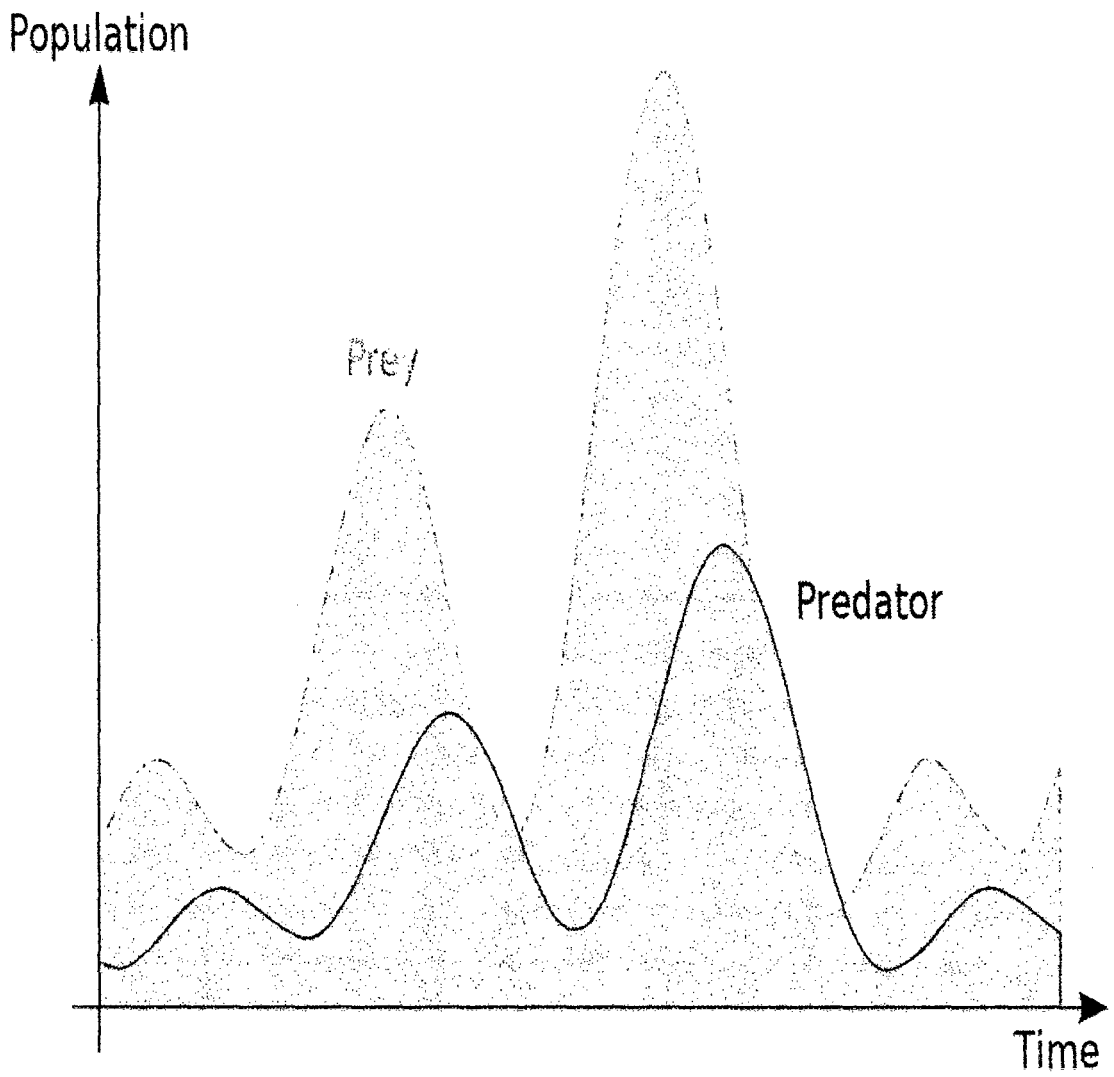


Figura N° 26 : Diagrama de consistencia de datos



[Handwritten signature]

Figura N°27: Dinámica Depredador – Presa. Fuente [1]

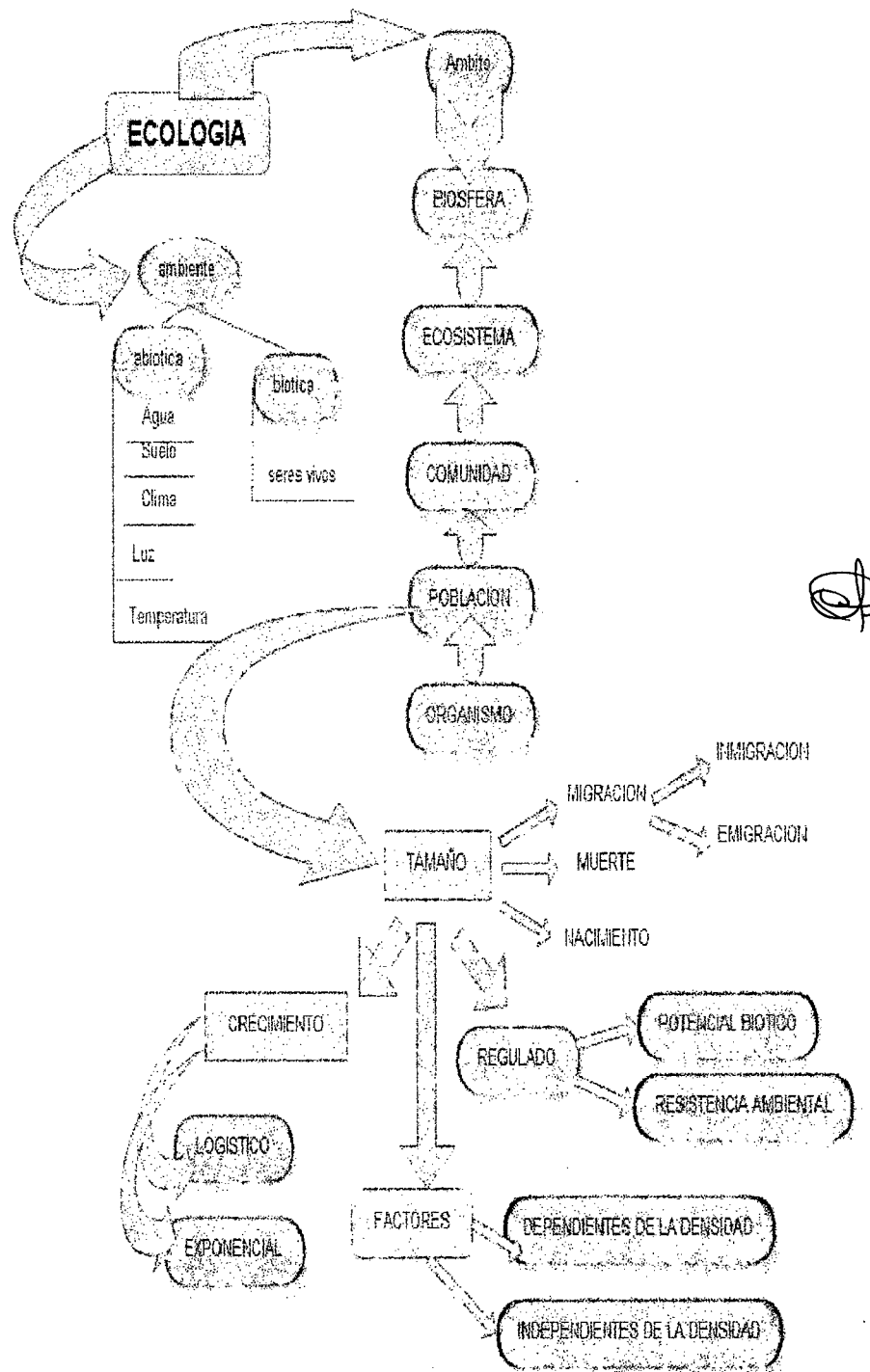


Figura N°28: Ecología de Poblaciones – Fuente [14]