UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

"FLUJO LAMINAR ESTABLE DE UN FLUIDO VISCOSO E INCOMPRESIBLE POR UN TUBO DE SECCIÓN ELÍPTICA"

AUTOR: Venancio Alejandro Gómez Jiménez

(PERÍODO DE EJECUCIÓN: Del 01-02-2012 al 31-01-2014)

(Resolución Rectoral N° 209-2012-R)

Callao-2014

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo de investigación aplicó los conceptos, principios o leyes de la dinámica de fluidos al problema del flujo laminar estable o estacionario de fluidos viscosos e incompresibles por tuberías, en particular, al flujo por un tubo de sección elíptica. Para ello, se utilizó la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, acompañado de condiciones de frontera, resolviendo analíticamente y hallando la distribución o perfil de velocidades del flujo así como también el gasto volumétrico por segundo que fluye a lo largo del tubo de sección elíptica. A modo de comprobación o contrastación, se aplicó estos resultados al caso de un tubo de sección circular, con resultados positivos.

En conclusión, mediante un método físico-matemático propio aplicado al caso investigado, se encontró una expresión analítica concreta del perfil de velocidades para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible por un tubo de sección elíptica. A partir de este perfil también se encontró el correspondiente gasto volumétrico por segundo o caudal volumétrico, culminando con una comprobación de estas expresiones cuando se aplican a tubos de sección circular, cuyos resultados, a diferencia del caso de tubos de sección elíptica, sí pueden encontrarse en la bibliografía de los cursos básicos de ciencias e ingeniería.

Palabras claves: laminar, estable, perfil, analítica.

ABSTRACT

In the present research the concepts, principles or laws of fluid dynamics to the problem of stable or steady laminar flow of viscous incompressible fluid through pipes, in particular, the flow through a tube of elliptical section was applied. For this, the Navier- Stokes equation and the continuity equation, together with boundary conditions and finding analytically solving the distribution or flow velocity profile as well as the volume flow per second flowing through the tube was used elliptical section . A test mode or contrasting these results to the case of a tube of circular cross section, with positive results was applied.

In conclusion, by its own physical- mathematical method applied to the case under investigation, a specific velocity profile analytical expression for the steady laminar flow of an incompressible viscous fluid through a tube of elliptical section was found. From this profile the corresponding volumetric flow rate or volume flow per second were also found, ending with a check of these terms as applied to circular section tubes, the results, unlike the case of elliptical section tubes, they can be in the literature of basic science and engineering courses.

Keywords : laminar , steady , profile, analytics.

ℓγ

INTRODUCCIÓN

El problema fundamental de la hidroaerodinámica es encontrar los campos de velocidad, presión y densidad en un fluido que se mueve sometido a la acción de fuerzas exteriores dadas.

Las ecuaciones del movimiento y de continuidad son suficientes para resolver el problema fundamental de la hidroaerodinámica de cualquier fluido cuya densidad y ambos coeficientes de viscosidad dependen solamente de la presión. Esto es cierto, en particular, en los casos de un fluido perfecto incompresible, de un fluido perfecto barotrópico y también cuando se trata del movimiento isotérmico de un fluido viscoso.

En todos los demás casos, para resolver el problema fundamental hay que partir de un sistema de ecuaciones más amplio, formado por las ecuaciones del movimiento, de continuidad, de la energía, del estado del fluido y por las ecuaciones que expresan las viscosidades dinámica (primera) y segunda en función de los parámetros de estado del fluido.

Para tener en cuenta las peculiaridades específicas de cada problema concreto y poder obtener una solución unívoca del sistema de ecuaciones diferenciales de la hidroaerodinámica es necesario, además, indicar las condiciones iniciales (si el movimiento no fuera estacionario o estable) y los límites del problema que se analiza.

Debido a la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales que se utilizan para resolver el problema global, su resolución por métodos analíticos ofrece generalmente dificultades insoslayables y solamente es posible en ciertos casos particulares de movimiento.

ℓγ

Reviste especial importancia investigar el movimiento laminar estable de un fluido viscoso incompresible por un tubo de sección elíptica, determinando una expresión analítica para el perfil de velocidades, lo que luego se puede particularizar a un tubo de sección circular, permitiendo calcular el caudal volumétrico respectivo.

La importancia y justificación de la investigación radica en la obtención de expresiones analíticas que determinan el perfil de velocidades y el gasto volumétrico por segundo o caudal volumétrico para el flujo de fluidos viscosos e incompresibles que circulan por tuberías, los cuales son elementos que se usan en la práctica de la ingeniería en sus diversas aplicaciones como, por ejemplo, para construir redes de agua y desagûe, oleoductos, etc.

Los resultados que se obtienen pueden permitir la exploración de mayor investigación en esta área y proyectar un mayor conocimiento del comportamiento de los fluidos que interesa no sólo a la ciencia misma sino a todas las ciencias y técnicas asociadas con los fenómenos de transporte.

I
MARCO TEÓRICO

El soporte teórico para el presente trabajo de investigación se encuentra profusamente en las referenciales indicadas en la página correspondiente. En relación a ello, presentamos a continuación lo más puntual y relevante del referido marco, incluyendo algunos conceptos principales de la cinemática general de un fluido:

1.1. Conceptos principales.

Se da el nombre de *partícula de un medio continuo* a un elemento muy pequeño del volumen de dicho medio cuyas dimensiones, sin embargo, son muchas veces mayores que las distancias intermoleculares. Como quiera que estas últimas son muy pequeñas (del orden de 10^{-6} cm para los gases que se hallan en condiciones normales), las partículas de un fluido se pueden considerar prácticamente como si fueran puntuales.

En la cinemática de los fluidos se pueden usar dos métodos distintos para definir el movimiento. Uno de ellos, llamado *método de Lagrange*, consiste en que el movimiento del fluido se expresa dando las coordenadas de todas las partículas en función del tiempo t:

$$x = F_1(a,b,c,t)$$
$$y = F_2(a,b,c,t)$$
$$z = F_3(a,b,c,t)$$

donde a,b,c son las coordenadas de una partícula en el instante inicial $t = 0$, que sirven para designar dicha partícula. Eliminando el tiempo en estas ecuaciones se puede obtener la ecuación de la trayectoria de la partícula. Las cantidades a,b,c y t reciben el nombre de variables de Lagrange. Las proyecciones sobre los ejes de coordenadas de los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ de la partícula serán:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

El método fundamental de la hidroaerodinámica es *el de Euler*, que consiste en que el movimiento del fluido se define dando el campo de velocidades del fluido en el espacio, en cada instante, es decir,

$$\vec{v} = f(\vec{r},t)$$

o, en proyecciones sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares

$$\begin{aligned} v_x &= f_1(x,y,z,t) \\ v_y &= f_2(x,y,z,t) \\ v_x &= f_3(x,y,z,t) \end{aligned}$$

donde $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ es la velocidad del fluido en el instante t en un punto del espacio determinado por el radio vector $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Las cantidades x, y, z, t se llaman variables de Euler. En lugar de las coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z) se pueden tomar como variables de Euler unas coordenadas cilíndricas, esféricas o de otro tipo.

Las proyecciones del vector aceleración $\vec{a}$ de las partículas del fluido, sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, serán:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \quad ,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \quad ,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \quad .$$

En estas ecuaciones se ve claramente que la aceleración $\vec{a}$ de las partículas del fluido es igual a la suma de dos aceleraciones, es decir, $\vec{a} = \vec{a}_{loc} + \vec{a}_{conv}$ donde

$$\vec{a}_{loc} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \vec{k}$$

es la *aceleración local*, debida a la variación del campo de velocidades con el tiempo, y

$$\vec{a}_{conv} = (v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}) \vec{i} + (v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}) \vec{j} +$$
$$+ (v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) \vec{k}$$

es la *aceleración de convección* debida a la heterogeneidad del campo de velocidades.

En lo que sigue todas las ecuaciones de la hidroaerodinámica las escribiremos en variables de Euler, entendiéndose por x, y, z unas coordenadas cartesianas rectangulares.

El movimiento de un fluido se llama *estacionario* si el campo de sus velocidades no varía con el tiempo. En caso contrario el movimiento se llama *no estacionario*. Cuando el movimiento del fluido es estacionario los campos de presión y de densidad no dependen del tiempo.

Se dice que el movimiento de un fluido es *potencial* o *no turbulento* si en cada instante y en todo el volumen que ocupa dicho fluido se tiene $\nabla x \vec{v} = \vec{0}$,

ℓγ

es decir, si su velocidad es igual al gradiente de cierta función escalar de las coordenadas y del tiempo $\varphi(x,y,z,t)$ llamada *potencial de velocidad.* Si existen regiones del fluido en las cuales $\nabla x \vec{v} \neq \vec{0}$ entonces el movimiento del fluido se llama *turbulento.*

Se llama *línea de corriente* aquella cuya tangente en cada punto, en cada instante dado t, coincide en dirección con el vector velocidad del fluido en dicho punto. En el caso de un flujo estacionario las líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido. La ecuación de las líneas de corriente tiene la forma

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}$$

donde el tiempo t es un parámetro determinado.

Se da el nombre de *tubo de corriente* a la superficie formada por las líneas de corriente trazadas por todos los puntos de un pequeño contorno cerrado. La parte de fluido limitada por el tubo de corriente se llama filete. En el caso del movimiento estacionario del fluido los tubos de corriente no varían con el tiempo y las partículas del fluido se mueven de tal forma que cada una de ellas permanece dentro de los límites de un filete determinado.

La *circulación de la velocidad* a lo largo de un contorno cerrado L se define como la integral curvilínea

$$C = \oint_L \vec{v}.\,d\vec{l}$$

donde $d\vec{l}$ es un vector elemental cuya magnitud es numéricamente igual a la longitud del arco de un sector elemental del contorno y está dirigido tangencialmente al mismo en el sentido de su recorrido.

Por el teorema de Stokes:

ey

$$C = \iint_S \nabla x\, \vec{v}.\, \vec{n}\, dS$$

donde S es el área de la superficie abierta abarcada por el contorno L , y $\nabla x\, \vec{v}.\vec{n}$ es la proyección del vector $\nabla x\, \vec{v}$ en la dirección de la normal exterior $\vec{n}$ al elemento dS de esta superficie, tomada según una determinada regla. En el caso del movimiento potencial de un fluido, la circulación C es nula, independientemente del contorno L que se elija.

Se llama *línea de torbellino o de remolino* la línea cuya tangente en cada punto, en un instante dado t, coincide en dirección con el rotacional de la velocidad $\nabla x\, \vec{v}$ en dicho punto. La ecuación de la línea de torbellino tiene la forma

$$\frac{dx}{(\nabla x\, \vec{v}\,)_x} = \frac{dy}{(\nabla x\, \vec{v}\,)_y} = \frac{dz}{(\nabla x\, \vec{v}\,)_z}$$

donde las expresiones de los denominadores son las componentes escalares del vector $\nabla x\, \vec{v}$ sobre los correspondientes ejes de coordenadas.

Tubo de remolino o torbellino se llama la superficie formada por las líneas de remolino que pasan por todos los puntos de un pequeño contorno cerrado. El líquido encerrado dentro del tubo de torbellino se llama *filete del remolino o torbellino.*

La intensidad de un remolino (tubo de remolino) es el producto del valor numérico de la magnitud del vector $\nabla x\, \vec{v}$, en una sección normal cualquiera del tubo de torbellino, por el área A de esta sección. La intensidad de un remolino es constante a lo largo de todo el tubo de remolino e igual a la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno cerrado cualquiera trazado sobre la superficie del tubo de remolino de manera que abarque a éste una sola vez.

φγ

Se llama *flujo* a través de una superficie fija S a la masa m_s de flujo que pasa a través de dicha superficie en la unidad de tiempo:

$$m_s = C = \iint_S \rho \vec{v}.\vec{n}\, dS = \iint_S \vec{j}.\vec{n}\, dS \qquad (1)$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario de la normal exterior al elemento de superficie dS, $\vec{v}.\vec{n}$ es la proyección de la velocidad del fluido en la dirección de $\vec{n}$, y $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ es el vector densidad del flujo.

1.2. Ecuación de continuidad.

Se basa en la ley de conservación de la masa aplicada a la hidroaerodinámica. En variables de Euler esta ecuación se puede escribir de varias maneras equivalentes entre sí:

(a) $$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla.\vec{v} = 0 \qquad ó \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) = 0 \qquad (2)$$

donde $\rho(x,y,z,t)$ es la densidad del fluido, $\vec{v}(x,y,z,t)$ es su velocidad, y $\nabla.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ es la divergencia del vector $\vec{v}$;

(b) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{v}) = 0 \qquad ó \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0\ ; \qquad (3)$$

(c) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla.\,\vec{v} + \vec{v}.\nabla\rho = 0 \qquad ó$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho(\frac{\partial\, v_x}{\partial x} + \frac{\partial\, v_y}{\partial y} + \frac{\partial\, v_z}{\partial z}) + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

donde $\nabla\rho$ es el gradiente de la densidad.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible $(\frac{d\rho}{dt}=0)$ es:

$$\nabla.\vec{v}=0 \qquad ó \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{5}$$

Si el movimiento del fluido es estacionario $(\frac{\partial \rho}{\partial t}=0)$, la ecuación de continuidad será:

$$\nabla.(\rho\vec{v})=0 \qquad ó \qquad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{6}$$

Cuando la corriente es estacionaria el flujo a través de la sección transversal del filete es independiente del lugar en que se encuentre esta sección. Para dos secciones transversales arbitrarias dS_1 y dS_2 de un filete elemental se cumple la condición:

$$\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$$

1.3. Ecuaciones del movimiento de los fluidos

(a) Ecuaciones del movimiento de un fluido perfecto (ecuaciones de Euler):

(a.1) en forma vectorial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad ó \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{7}$$

donde $\vec{F}$ es la intensidad del campo de las fuerzas gravitacionales, p es la presión, ρ es la densidad del fluido, y el operador

$$(\vec{v}.\nabla)=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

(a.2) en proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

ey

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad ,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ó también:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad , \qquad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad ,$$

En el caso del movimiento estacionario

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \qquad y \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \qquad (9)$$

(b) Ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso (ecuaciones de Navier-Stokes, considerando μ y ζ constantes)

(b.1) En forma vectorial

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + (\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\mu}{3})\nabla(\nabla.\vec{v}) \qquad (10)$$

donde $\mu = \frac{\eta}{\rho}$ es la viscosidad cinemática del fluido, η es su viscosidad dinámica o coeficiente de rozamiento interno, ζ es la segunda viscosidad y $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador Laplaciano.

(b.2) En proyecciones sobre los ejes de coordenadas, las cuales se expresan de modo similar al caso (a.2) partiendo de (b.1).

Para un fluido incompresible se tiene $\nabla.\vec{v} = 0$, o también:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad ,$$

y la ecuación de Navier-Stokes toma la forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \tag{11}$$

Esta ecuación se puede representar de forma que no contenga la presión p, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla x \vec{v}) = \nabla x \vec{F} + \nabla x (\vec{v} x \nabla \vec{v}) + \mu \nabla^2 (\nabla x \vec{v}) \tag{12}$$

Si el campo de las fuerzas de masa es de carácter potencial como es, por ejemplo, el campo gravitacional, entonces $\nabla x \vec{F} = \vec{0}$. En el caso de un fluido perfecto $(\mu = 0)$, el último término de la ecuación también se anula.

La segunda viscosidad o coeficiente de segunda viscosidad, ζ, a semejanza de la viscosidad dinámica (primera), η, es una cantidad positiva y depende de la naturaleza química del fluido compresible, de la presión y de la temperatura. Si la primera viscosidad se manifiesta en las deformaciones por cizallamiento puro, la segunda lo hace cuando se trata de deformaciones por compresión en todos los sentidos, acompañadas de una variación de la densidad del fluido. Si un fluido se somete a compresión o expansión, su equilibrio termodinámico se altera y en su seno se producen procesos que tienden a restablecer dicho equilibrio. Y como los procesos para establecer el equilibrio son irreversibles, se produce un aumento de la entropía que da cuenta de una disipación de energía. Esta disipación de energía y la segunda viscosidad que la determina serán tanto mayores cuanto más despacio transcurran los procesos de restablecimiento del equilibrio en comparación con los de compresión o expansión. Por ejemplo, la cantidad ζ deberá ser grande si durante la compresión o expansión del fluido se altera el equilibrio químico en éste y se produce una reacción química cuyo tiempo de relajación sea grande, es decir, que transcurra lentamente. En el caso de las compresiones y enrarecimientos debidos a las ondas sonoras, ζ depende de la frecuencia (dispersión de la segunda viscosidad).

El problema fundamental de la hidroaerodinámica es hallar los campos de velocidad, presión y densidad en el fluido que se mueve sometido a la acción de fuerzas exteriores dadas, es decir, hallar las siguientes cinco funciones de las coordenadas y del tiempo:

$$v_x = f_1(x, y, z, t), \qquad v_y = f_1(x, y, z, t), \qquad v_z = f_1(x, y, z, t),$$
$$p = f_4(x, y, z, t) \quad y \quad \rho = f_5(x, y, z, t)$$

Las ecuaciones del movimiento y de continuidad son suficientes para resolver el problema fundamental de la hidroaerodinámica de cualquier fluido cuya densidad y ambos coeficientes de viscosidad dependan solamente de la presión. Esto es cierto, en particular, en los casos de un fluido perfecto incompresible ($\rho = const.$, $\eta = \zeta = 0$), de un fluido perfecto barotrópico ($p = const.$, $\eta = \zeta = 0$) y también cuando se trata del movimiento isotérmico de un fluido viscoso.

En todos los demás casos para resolver el problema fundamental de la

℘γ

hidroaerodinámica hay que partir de un sistema de ecuaciones más amplio, formado por las ecuaciones del movimiento, de continuidad, de la energía, del estado del fluido y por las ecuaciones que expresan las viscosidades dinámica y segunda en función de los parámetros de estado del fluido.

Para tener en cuenta las peculiaridades específicas de cada problema concreto y poder obtener una solución unívoca del sistema de ecuaciones diferenciales de la hidroaerodinámica, señalado anteriormente, es necesario además indicar las condiciones iniciales y límites del problema que se analiza.

Las condiciones iniciales definen el estado de movimiento del fluido en el instante inicial, es decir, cuando $t = 0$:

$$v_{x0} = f_1\,(x, y, z, 0) \quad , \quad v_{y0} = f_2\,(x, y, z, 0) \quad , \quad etc.$$

Si el movimiento del fluido es estacionario no es necesario dar las condiciones iniciales.

Las condiciones límites determinan las condiciones especiales en que se mueve el fluido en sus límites de contacto con los cuerpos sólidos, en la superficie libre y en las superficies de separación con fluidos inmiscibles.

Algunos casos de condiciones límites de un fluido perfecto son:

a) en los puntos de la superficie de una pared sólida fija la componente de la velocidad del fluido, normal a dicha superficie, es nula (condición de deslizamiento):

$$v_n = 0 \qquad ó \qquad v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ,$$

ey

donde $\Phi(x, y, z) = 0$ es la ecuación de la superficie de la pared;

b) si la pared se traslada en el espacio y, en el caso general, se deforma al ocurrir esto, la velocidad de un punto cualquiera de su superficie y la velocidad de la partícula del fluido que se encuentra en dicho punto en un momento dado deberán tener proyecciones iguales sobre la dirección de la normal a la superficie:

$$v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad ,$$

siendo $\Phi(x, y, z, t) = 0$ la ecuación de la superficie móvil;

c) en la superficie libre del fluido $\Phi(x, y, z, t) = 0$ y, además de la condición dada en b), deberá cumplirse la condición de constancia de la presión: $p(x, y, z, t) = const.$

d) en el límite de separación de dos líquidos inmiscibles deberá cumplirse la condición de igualdad de presión en ambos fluidos y también la condición de igualdad de las componentes normales a la superficie de separación, de las velocidades de la propia superficie y de ambos fluidos.

Algunos casos de condiciones límites de un fluido viscoso:

a) en los puntos de la superficie de una pared fija la velocidad del fluido es nula (condición de adherencia);
b) en los puntos de la superficie de una pared móvil la velocidad del fluido es igual a la velocidad del punto correspondiente de la pared.

Debido a la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales de la hidroaerodinámica, su resolución por métodos analíticos ofrece generalmente dificultades insoslayables y solamente es posible en los casos más simples de movimiento.

ℓγ

En el caso del movimiento de un fluido por un tubo, de la ecuación de continuidad se deduce que cuando el movimiento es estacionario se cumple:

$$m_S = \int_S \rho v_n \, dS = const. \quad ,$$

donde m_S es la masa de fluido que pasa en la unidad de tiempo por cada sección transversal del tubo (gasto en masa por segundo), ρ es la densidad del fluido, dS es un elemento de superficie de la sección transversal y v_n es la componente de la velocidad del fluido en dirección normal al elemento de superficie dS.

Si el líquido es incompresible,

$$V_s = \int_S v_n \, dS = const. \tag{13}$$

siendo V_s el volumen de fluido que pasa en la unidad de tiempo por una sección transversal cualquiera del tubo (caudal o gasto volumétrico por segundo).

Cuando un fluido viscoso incompresible se mueve por un tubo cilíndrico, en el tramo inicial del tubo el flujo consta de dos partes: una capa límite, que se encuentra junto a las paredes del tubo, y un núcleo no excitado dentro de cuyos límites la velocidad del fluido es igual en todos los puntos de una sección transversal dada. A medida que nos vamos alejando de la entrada del tubo va aumentando el espesor de la capa límite hasta que a la distancia l_{est} esta capa llena toda la sección transversal. El tramo inicial de longitud l_{est} se llama tramo o zona de estabilización hidrodinámica, y la corriente de fluido después de esta zona se dice que está estabilizada,

ℓy

puesto que le corresponde un campo de velocidades igual en todas las secciones. La longitud l_{est} crece al aumentar las dimensiones del tubo y el número de Reynolds (para un flujo laminar en un tubo redondo $l_{est} \cong R \,.\, R_e$ siendo R el radio de tubo y $R_e = 2\,V_s/\pi R\mu$)

En el caso del movimiento laminar estabilizado de un fluido incompresible por un tubo cilíndrico, cuyo eje coincida con el eje Oz de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la velocidad $\vec{v}$ del fluido en todos los puntos del tubo será paralela al eje Oz, es decir, $v_x = v_y = 0 \quad y \quad v_z = v$. De la ecuación de continuidad se deduce en este caso que

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ es decir, } v = f(x,y) \tag{14}$$

De la ecuación de Navier-Stokes se deduce (Lass, Harry, 1996)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = const. = -\frac{\Delta p}{l}, \tag{15}$$

donde Δp es la caída de presión en el tramo de tubo de longitud l

Para un tubo cilíndrico redondo esta ecuación se puede representar, usando coordenadas polares, de la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}, \tag{16}$$

donde $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia al centro del tubo.

ℓγ

La distribución de las velocidades del fluido por la sección del tubo viene expresada por la fórmula (Shames, Irving H., 2005):

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \ , \tag{17}$$

donde R es el radio del tubo, r es la distancia desde el eje hasta el punto que se considera de la sección transversal, η es la viscosidad dinámica del fluido, y Δp es la caída de presión en el tramo de tubo de longitud l.

El gasto volumétrico de fluido por segundo se determina por la *fórmula de Poiseuille* (Shames, Irving H., 2005):

$$V_S = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p \tag{18}$$

ey

II
MATERIALES Y MÉTODOS

Materiales o instrumentos.

- Bibliografía básica y especializada.
- Útiles de escritorio y conexos.
- Computadora y software respectivo.

Métodos.

Se han usado, fundamentalmente, los métodos deductivo-inductivo y analítico-sintético, acompañado de los conocimientos de cálculo vectorial que conlleva el uso del cálculo diferencial e integral así como las ecuaciones diferenciales parciales y sus métodos de solución, a fin de obtener resultados para el perfil o distribución de velocidades así como del gasto volumétrico por segundo para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible que circula por un tubo de sección elíptica o de sección circular.

ey

III
RESULTADOS

Usando apropiadas condiciones límites, la simetría cilíndrica y la ecuación (16) se encontró que para el flujo laminar estable de un fluido viscoso incompresible que circula por el hueco anular comprendido entre dos superficies cilíndricas coaxiales de radios R_1 y $R_2 > R_1$, el perfil de velocidades está dado por:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2{}^2 - r^2 + \frac{R_2{}^2 - R_1{}^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right] \qquad (R_1 \leq r \leq R_2) \qquad (19)$$

y el gasto volumétrico por segundo está dado por:

$$V_s = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}\left[R_2{}^4 - R_1{}^4 - \frac{\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right] \qquad (20)$$

Asimismo, se encontró el perfil de velocidades y el gasto volumétrico por segundo para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible que circula por un tubo de sección elíptica.

De la ecuación (15), resultante de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, aplicando las condiciones límites correspondientes a un fluido viscoso con una superficie frontera de sección elíptica fija, se encontró:

ey

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\eta l} \quad (21)$$

donde asumimos que x e y son las coordenadas del punto considerado de la sección transversal del tubo en un sistema de coordenadas cuyas direcciones de los semiejes Ox y Oy coinciden con los semiejes a y b de la elipse.

Se asumió que la solución $v(x, y)$ tiene la forma:

$$v = f_1(x) + f_2(y) \quad (22)$$

Reemplazando en (21):

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Por tanto:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = A \quad (23)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} = -\left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right) \quad (24)$$

$$De\ (23): \quad f_1 = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C \quad (25)$$

$$De\ (24): \quad f_2 = -\left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{y^2}{2} + Dy + E \quad (26)$$

Entonces en (22) se obtuvo:

ℓγ

$$v(x,y) = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C - \left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{y^2}{2} + Dy + E$$

ó $$v(x,y) = \frac{Ax^2}{2} - \left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{y^2}{2} + Bx + Dy + F \qquad (27)$$

Aplicando a (27) las condiciones:

$$v(\pm a\,, 0) = 0$$
$$v(0\,, \pm b) = 0$$

Se obtuvo las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\frac{Aa^2}{2} + Ba + F = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{Aa^2}{2} - Ba + F = 0 \qquad (b)$$

$$-\left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{b^2}{2} + Db + F = 0 \qquad (c)$$

$$-\left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{b^2}{2} - Db + F = 0 \qquad (d)$$

De las cuales, de inmediato, se obtuvo: $B = D = 0$, lo que reflejó la simetría en x y en y del problema, lo cual era de esperarse.

Por lo tanto, se simplificó la ecuación (22):

$$v(x,y) = \frac{Ax^2}{2} - \left(A + \frac{\Delta p}{\eta l}\right)\frac{y^2}{2} + F \qquad (28)$$

Finalmente, se encontró los valores de A y F :

$$A = -\frac{\Delta p}{\eta l}\frac{b^2}{(a^2+b^2)}$$

$$F = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

y se reemplazó en (28):

$$v(x,y) = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{b^2x^2}{(a^2+b^2)} - \frac{\Delta p}{\eta l}\frac{a^2}{(a^2+b^2)}\frac{y^2}{2} + \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Obteniéndose, finalmente, el perfil o distribución de velocidades para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible en un tubo de sección elíptica:

$$\boldsymbol{v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)} \qquad \textbf{(29)}$$

A continuación, considerando $\varepsilon = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$ = constante, se encontró el gasto volumétrico por segundo:

$$V_s = \iint_{secci\acute{o}n\ el\acute{i}ptica} v(x,y)dS = \iint_{sessi\acute{o}n\ el\acute{i}ptica} \varepsilon\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$= \varepsilon \iint_{sessión\ elíptica} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$$

Es decir,

$$V_s = 4\varepsilon \int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

$$= 4\varepsilon \int_0^a dx \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{3b^2}\frac{b^3}{a^3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$V_s = 4\varepsilon \int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{b}{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{b}{3a^3}(a^2 - x^2)\right]$$

$$V_s = 4\varepsilon\,\frac{2b}{3a^3} \int_0^a dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{8b\varepsilon}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Efectuando cambio de variable:

$$x = a\sin t \qquad ; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$dx = a\,cost\,dt$$

$$V_s = \frac{8b\varepsilon}{3a^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} a\cos t dt = \frac{8ab\varepsilon}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt$$

$$V_s = \frac{8ab\varepsilon}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,(1 - \sin^2 t)dt = \frac{8ab\varepsilon}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos^2 t\sin^2 t)dt$$

$$V_s = \frac{8ab\varepsilon}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{\sin^2 2t}{4}\right)dt$$

$$V_s = \frac{8ab\varepsilon}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 4t}{8}\right)dt$$

$$V_s = \frac{8ab\varepsilon}{3}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right] = \frac{8ab\varepsilon}{3}\frac{3\pi}{16}$$

$$V_s = \frac{\pi ab\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, se encontró que el gasto volumétrico por segundo, para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible en un tubo de sección elíptica, es:

$$\boldsymbol{V_s = \frac{\pi ab}{2}\,\frac{\Delta p}{2\eta l}\,\frac{a^2 b^2}{(a^2+b^2)} = \frac{\pi\,\Delta p\, a^3\, b^3}{4\,\eta\, l\,(a^2+b^2)}} \qquad \mathbf{(30)}$$

℮ℊ

IV
DISCUSIÓN

A partir de la expresión analítica encontrada, ecuación (29), para el perfil o distribución de velocidades del flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible por un tubo de sección elíptica, es decir, de la expresión:

$$v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Se verificó el conocido resultado del perfil o distribución de velocidades para el caso de un tubo con sección circular, es decir, de un tubo cilíndrico de radio R. En este caso, para comprobar la consistencia de los resultados de la investigación, se remplazó $R = a = b$ y, teniendo en cuenta que $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtuvo:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

De modo similar, usando la ecuación (30) para el gasto volumétrico por segundo se obtuvo:

$$V_s = \frac{\pi ab}{2}\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)} = \frac{\pi\,\Delta p\, a^3\, b^3}{4\,\eta\, l\,(a^2+b^2)} = \frac{\pi\,\Delta p\;R^4}{8\,\eta\, l}$$

que son las expresiones ya conocidas (Kikoin A.-Kikoin I., 1978) para el perfil de velocidades y para el gasto volumétrico por segundo en el caso del flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible por un tubo de sección circular.

Ꝕγ

Se puede hacer una breve discusión de la importancia de este resultado, por ejemplo, al caso de la circulación de la sangre en los seres humanos. Sabemos que las células de nuestro cuerpo necesitan un gasto volumétrico por segundo casi constante para que desarrollen sus funciones normalmente pero, si asumimos que por alguna razón, generalmente el descuido en la alimentación, las paredes de los "tubos" sanguíneos engrosan y por lo tanto disminuye el radio de ellos, entonces, en principio, se requerirá una mayor diferencia de presión para impulsar la sangre hacia esas células lo que, obviamente, puede producir la rotura de algunos de los canales de circulación sanguínea.

Para el caso del tubo con sección elíptica, vemos que la máxima velocidad de la corriente también ocurre en el centro del tubo

$$v_{máx} = v(0,0) = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)} = \varepsilon$$

También si $y = 0$:

$$v(x,0) = \varepsilon\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \qquad ,$$

y si $x = 0$:

$$v(0,y) = \varepsilon\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

que concuerda con el resultado que ya se conoce para el caso en que la sección transversal del tubo es circular, esto es, cuando $a = b = R$.

El Número de Reynolds crítico ($R_e = 4\, V_s\, /\pi D\mu$) , siendo D el diámetro del tubo, correspondiente a la transición de la corriente laminar a la turbulenta, para los tubos redondos lisos, es del orden de 2300 (Shames, Irving H., 2005). En tal sentido, insertando este valor en la expresión dada para el número de Reynolds y usando la expresión de V_S ya determinado tanto para un tubo de sección circular como para uno de sección elíptica, podemos estimar los valores para las dimensiones del tubo a utilizarse a fin de tener un régimen laminar estable del flujo.

A través del presente trabajo se encontró una expresión analítica tanto para el perfil o distribución de velocidades como para el gasto volumétrico por segundo en el caso del flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible por un tubo de sección elíptica, mediante un procedimiento físico-matemático propio, contrastado mediante el paso al límite de un tubo de sección circular.

REFERENCIALES

01. FRISH, S.-TIMOREVA, A. **Curso de Física General - Tomo I.** Moscú. Editorial MIR. Primera edición, 1973.

02. KIKOIN, A.- KIKOIN, I. **Molecular Physics**. Moscú. Editorial MIR. Primera edición, 1978.

03. SERWAY, Raymond-JEWETT, John. **Física - Volumen I.** México. Editorial Thomson. Sexta edición, 2005.

04. TIPLER, Paul. **Física – Volumen I.** Barcelona. Editorial Reverté S.A. Cuarta edición, 1999.

05. ALONSO, Marcelo-FINN, Edward. **Física.** Delaware. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

06. IRODOV, I. **Leyes Fundamentales de Mecánica.** Moscú. Editorial MIR, 1981.

07. RESNICK, Robert - HALLIDAY, David - KRANE, Kenneth. **Física-Volumen I.** México. Compañía Editorial Continental S.A. Cuarta edición, 1995.

08. SHAMES, Irving H. **La Mecánica de los Fluidos.** New York. Editorial McGraw-Hill Book Company, 2005.

09. SOKOLNIKOFF, I.S. **Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua.** New York. Editorial John Wiley & Sons, 1984.

10. LASS, Harry. **Análisis Vectorial y Tensorial.** México. Compañía Editorial Continental S.A., 1996.

11. CARRASCO, Luis. **Transferencia de Cantidad de Movimiento, Calor y Masa.** Lima. Editorial San Marcos. Primera edición, 2005.

12. ARFKEN, George. **Métodos Matemáticos para Físicos.** México. Editorial Diana, 1995.

APÉNDICE

Determinación de la expresión analítica del perfil de velocidades y del gasto volumétrico o caudal para el flujo laminar estable de un fluido viscoso e incompresible por el hueco anular comprendido entre dos superficies cilíndricas coaxiales de radios R_1 y $R_2 > R_1$.

Puesto que hay simetría cilíndrica y se trata del movimiento laminar estabilizado de un fluido viscoso e incompresible, de manera tal que el vector velocidad del fluido en todos los puntos del tubo es paralela al eje del tubo, asumiremos que esta dirección es la del eje Z de un sistema de coordenadas rectangulares tal que $v_x = v_y = 0 \quad y \quad v_z = v$. De la ecuación de continuidad se deduce en este caso que

$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, es decir, v es función solo de x e y.

De la ecuación de Navier-Stokes se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = const. = -\frac{\Delta p}{l}$$

donde Δp es la caída de presión en el tramo de tubo de longitud l.

Para un tubo cilíndrico circular esta ecuación se puede representar, usando coordenadas polares, de la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto donde se evalúa v al centro del tubo.

ey

Integrando esta ecuación tenemos:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{-\Delta v}{2nl} r + \frac{C_1}{r}$$

Volviendo a integrar tenemos:

$$v = \frac{-\Delta p}{4nl} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Aplicando a esta ecuación las condiciones de frontera de que la velocidad es nula tanto para $r = R_1$ como para $r = R_2$, y la definición del gasto volumétrico, tenemos los resultados indicados en las ecuaciones (19) y (20), es decir:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2{}^2 - r^2 + \frac{R_2{}^2 - R_1{}^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right] \qquad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$V_s = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l}\left[R_2{}^4 - R_1{}^4 - \frac{\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right]$$

ANEXOS

El presente trabajo de investigación no contiene anexo(s).