

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



EJEMPLOS DE CONJUNTOS EN \mathbb{R} NO
BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES
TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTORES:

Guia Rodriguez Lesly Alexandra
Valer Ruiz Juan Manuel

ASESOR:

Absalon Castillo Valdivieso

Callao, 2023

PERÚ



Lesly Alexandra Guia Rodriguez - Juan Manuel Valer Ruiz Ejemplos de conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles



Nombre del documento: Lesly Alexandra Guia Rodriguez - Juan Manuel Valer Ruiz Ejemplos de conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles.pdf
ID del documento: 3297edbf7baf281563ff5c05d887be1693fce96d
Tamaño del documento original: 572,95 kB

Depositante: FCNM PREGRADO UNIDAD DE INVESTIGACION
Fecha de depósito: 13/3/2024
Tipo de carga: Interface
fecha de fin de análisis: 13/3/2024

Número de palabras: 12.815
Número de caracteres: 66.916

Ubicación de las similitudes en el documento:



Fuentes principales detectadas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	repositorio.unac.edu.pe https://repositorio.unac.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12952/6008/TESIS_PREGRADO_ASMAT_FC... 75 fuentes similares	12%		Palabras idénticas: 12% (2122 palabras)
2	Documento de otro usuario #dse2rt El documento proviene de otro grupo 75 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (1077 palabras)
3	ru.dgb.unam.mx https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/YES01000814032/3/0814032.pdf 75 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (1091 palabras)
4	cybertesis.unmsm.edu.pe https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/20.500.12672/11601/1/Bartolo_al.pdf 75 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (1079 palabras)
5	www.dspace.uce.edu.ec http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/16249/1/IT-UCE-0011-ICF-029.pdf 75 fuentes similares	4%		Palabras idénticas: 4% (1019 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	INFORME FINAL JOSE LUIS REYES DORIA...pdf INFORME FINAL JOSE LUIS... #c795w9 El documento proviene de mi grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (39 palabras)
2	SEGUNDA REVISIÓN TESIS - BARRA Y GABRIEL.docx INVESTIGACIÓN FOR... #bb29f El documento proviene de mi grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (22 palabras)
3	cybertesis.unmsm.edu.pe https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/20.500.12672/5497/3/fojas_be.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (14 palabras)
4	matematicas.unex.es https://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes/cap18.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (17 palabras)
5	Documento de otro usuario #116527 El documento proviene de otro grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (13 palabras)

Fuentes mencionadas (sin similitudes detectadas) Estas fuentes han sido citadas en el documento sin encontrar similitudes.

- <http://mat.lzt.uam.mx/mat/documentos/notas>
- https://www.dm.uba.ar/materias/optativas/topicos_de_logica/2014/2/Capitulo_2

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** CONJUNTOS EN \mathbb{R} NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES
4. **Autores:** Guía Rodríguez Lesly Alexandra
ORCID: 0000-0002-8615-4515
Valer Ruiz Juan Manuel
ORCID: 0000-0002-8938-8253
5. **Asesor:** Absalon Castillo Valdivieso
ORCID: 0000-0002-6083-9321
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidades de análisis:** Teoría de la medida, Conjuntos Lebesgue medibles, Conjuntos Borelianos.
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN
EJEMPLOS DE CONJUNTOS EN \mathbb{R} NO BORELIANOS Y NO
LEBESGUE MEDIBLES

GUIA RODRIGUEZ LESLY ALEXANDRA


VALER RUIZ JUAN MANUEL

Tesis presentada a consideración del jurado designado por Resolución Decanal N° 087-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

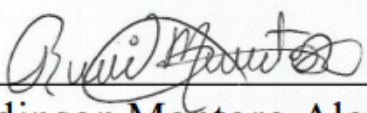
Aprobada por



Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente



Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario



Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal



Lic. Absalon Castillo Valdivieso
Asesor



ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: <https://meet.google.com/fmk-huqq-qhc> mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 19:00 horas del sábado veintinueve de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por los Bachilleres en Matemática **Sr(a). Guia Rodriguez Lesly Alexandra Y Sr. Valer Ruiz Juan Manuel**, titulado: **“EJEMPLOS DE CONJUNTOS EN R NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES”** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César : Presidente
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio : Secretario
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 034-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 19:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.


Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por los Bachilleres en Matemática **Sr(a). Guia Rodriguez Lesly Alexandra Y Sr. Valer Ruiz Juan Manuel**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	Muy bueno

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **20:00** horas del día veintinueve de abril del año dos mil veintitres, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

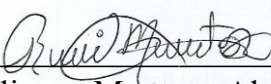
En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:



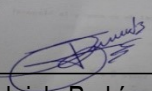
Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente



Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario



Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal



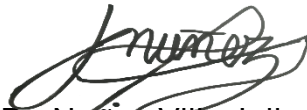
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

Bellavista, 28 de junio de 2023

INFORME

El presidente del Jurado de Sustentación de Tesis designado mediante Resolución Decanal N°034-2023- D-FCNM, informa que la Tesis titulada "**EJEMPLOS DE CONJUNTOS EN R NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES**", expuesta por los Bachilleres en Matemática **Sr(a). Guia Rodriguez Lesly Alexandra Y Sr. Valer Ruiz Juan Manuel**, no presentó observaciones durante el acto de sustentación de tesis realizado el sábado 29 de abril de 2023 a las 19:00 horas vía Google Meet.

Sin otro particular quedo, de usted.



Dr. Nuñez Villa Julio
CésarPresidente

Dedicado a

Dedico esta tesis a quienes inspiraron mi espíritu para la conclusión de esta tesis , en matemática. A mis padres quienes me dieron vida, educación, apoyo y consejos.

A mis compañeros de estudio, a mis maestros y amigos, quienes sin su ayuda nunca hubiera podido hacer esta tesis. A todos ellos se los agradezco desde el fondo de mi alma. Para todos ellos hago esta dedicatoria.

Lesly Alexandra Guia Rodriguez

Dedicado a

A mis padres quienes me dieron vida, educación, apoyo y consejos. A mis hermanos por su cariño y amor incondicional logré superar muchas barreras. A mis compañeros de estudio, a mis maestros y amigos, quienes sin su ayuda nunca hubiera podido hacer esta tesis. Para todos ellos hago esta dedicatoria.

Juan Manuel Valer Ruiz

AGRADECIMIENTOS

A mis padres que han sido siempre el motor que impulsa mis sueños y esperanzas, quienes estuvieron siempre a mi lado en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudio. Siempre han sido mis mejores guías de vida. Hoy cuando concluyo mis estudios, les dedico a ustedes este logro amados padres, como una meta más conquistada. Orgullosa de haberlos elegido como mis padres y que estén a mi lado en este momento tan importante.

Gracias por ser quienes son y por creer en mí.

A mis docentes que con sus palabras fueron sabias, sus conocimientos rigurosos y precisos, a ustedes mis profesores queridos, les debo mis conocimientos. Donde quiera que vaya, los llevaré conmigo en mí transitar profesional. Su semilla de conocimientos, germinó en el alma y el espíritu. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional e invaluable, por su dedicación perseverancia y tolerancia.

Lesly Alexandra Guía Rodríguez

Gracias a Dios por tener y disfrutar la mejor familia, gracias a la vida que tengo porque me demuestra lo mucho que puedo hacer; gracias a mi familia por lograme permitir realizar esta tesis con gran excelencia para su desarrollo. No ha sido sencillo encaminar este proyecto, hubo dificultades en este contexto de la pandemia.

Te agradezco madre ya que con tu inmeso amor y apoyo no podría haber realizado

esta tesis, con ese cariño incondicional lograste que sea una mejor persona y anhelar siempre a más.

Te agradezco padre que por esa confianza, dedicación, empeño y serenidad, me diste los mejores consejos que ahora se ven reflejados en esta tesis.

Agradezco a mis amigos, compañeros y profesores que gracias a sus consejos enca-
minaron en mi pensar y sentir, con cada uno de los conocimientos adquiridos para
concentrar la tesis.

Gracias a la Universidad que me dió la bienvenida al mundo como tal, las oportu-
nidades que me ha brindado con incomparables.

Gracias por todo.

Juan Manuel Valer Ruiz

Índice general

Índice general	VIII
Tabla de Contenidos	XII
I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1 Descripción de la realidad problemática	1
1.2 Formulación del Problema	1
1.2.1 Problema General	1
1.2.2 Problema Específico	1
1.3 Objetivos	2
1.3.1 Objetivo General	2
1.3.2 Objetivo Específico	2
1.4 Justificación	2
1.5 Delimitantes de la Investigación	3
1.5.1 Teórico	3
1.5.2 Temporal	3
1.5.3 Espacial	3
II MARCO TEÓRICO	4
2.1 Antecedentes	4

2.1.1	Antecedentes Nacionales	4
2.1.2	Antecedentes Internacionales	4
2.2	Bases Teóricas	6
2.2.1	Buen Orden	6
2.2.2	Principio de inducción	10
2.2.3	Principio de inducción transfinita	10
2.2.4	Ordinales	11
2.2.5	Topología en los ordinales	18
2.2.6	ω_1 el primer ordinal no numerable	21
2.2.7	Cardinales	26
2.3	Conceptual	26
2.3.1	Teoría de conjuntos	26
2.3.2	Teorema del buen orden	27
2.3.3	Espacio Topológico	27
2.3.4	Axioma de elección	27
2.3.4.1	Conjunto de Bernstein	27
2.4	Definición de Términos Básicos	28
2.4.1	Espacios Topológicos	28
2.4.2	Espacios de medida	29
III HIPÓTESIS Y VARIABLES		36
3.1	Hipótesis	36
3.1.1	Hipótesis General	36
3.1.2	Hipótesis Específicas	36

3.2	Definición conceptual de variables	36
3.2.1	Variable Independiente (I):	36
3.2.2	Variables dependientes (D):	37
3.2.3	Operacionalización de las variables	38
IV METODOLOGÍA DEL PROYECTO		39
4.1	Diseño metodológico	39
4.1.1	Tipo de investigación	39
4.1.2	Diseño de la investigación	39
4.2	Método de investigación	40
4.3	Población y Muestra	40
4.4	Lugar de estudio	40
4.5	Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	40
4.6	Análisis y procesamiento de datos	41
4.7	Aspectos Éticos en Investigación	41
4.8	Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, estudio económico-financiero, estudio de la organización administrativa	41
4.9	Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, evaluación del impacto ambiental, medidas ecológicas, plan de supervisión ambiental	42
V RESULTADOS		43
5.1	Resultados descriptivos	43
5.2	Resultados inferenciales	43

5.2.1	Infinitos conjuntos Lebesgue medibles pero no Borelianos . . .	43
5.2.2	Conjunto de Bernstein	48
5.3	Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis	51
VI DISCUSIÓN DE RESULTADOS		52
6.1	Contrastación y demostración de la hipótesis con los Resultados . . .	52
6.2	Contrastación de los resultados con otros estudios similares	53
6.3	Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes	53
CONCLUSIONES		54
RECOMENDACIONES		55
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		55
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		56
ANEXOS		58

Tabla de Contenidos

3.1	Operacionalización de las variables	38
7.1	Matriz de consistencia	58

RESUMEN

El presente trabajo visa a estudiar las inclusiones estrictas con relación a la σ -álgebra de Borel, a la σ -álgebra de Lebesgue y a la σ -álgebra del conjunto de partes, en particular se mostrará la existencia de los conjuntos de Bernstein los cuales pertenecen al σ -álgebra del conjunto de partes pero no es un Conjunto Lebesgue medible.

Palabras Clave:

- Conjunto de Bernstein
- Ordinal
- Lebesgue medibles
- σ -álgebra
- conjuntos Borelianos
- Cardinalidad

ABSTRACT

The present work aims to study the strict inclusions in relation to the Borel σ -algebra, the Lebesgue σ -algebra and the σ -algebra of the set of parts, in particular the existence of the Bernstein sets which belong to the σ -algebra of the set of parts but it is not a measurable Lebesgue Set.

Keywords:

- Bernstein set
- Ordinal
- Lebesgue-measurable
- σ -álgebra
- Borel set
- Cardinal numbers

INTRODUCCIÓN

En éste trabajo vamos a dar a conocer algunas aplicaciones de recursiones transfinitas, mostrando la existencia de conjuntos Lebesgues medibles pero no Borelianos y además se construirá el conjunto de Bernstein, que es un ejemplo de un conjunto que no es Lebesgue medible.

El principio de buen orden afirma que en cualquier conjunto de números naturales existe un mínimo, es decir, un número no mayor que algún otro del resto, siempre y cuando dicha colección no esté vacía. Esto diferencia al conjunto de los números naturales de otros conjuntos ordenados de números, como por ejemplo los números enteros o los números reales. El principio de buena ordenación es equivalente al principio de inducción: uno puede demostrarse a partir del otro.

Recordemos que podemos hablar de dos tipos de inducción: la ordinaria y la transfinita. La inducción transfinita es una extensión de la inducción matemática a (grandes) conjuntos bien ordenados, tales como conjuntos de ordinales o cardinales.

Cuando hablemos de conjunto de Bernstein es un óptimo ejemplo de conjuntos con propiedades no usuales. La construcción de ese conjunto envuelve muchos pasos, la inducción transfinita no será suficiente y para facilitar las demostraciones se

presentará diversos lemas, todo eso con la intuición de probar la existencia de la construcción.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En el presente trabajo se pretende construir diversos ejemplos que muestren la existencia de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos y además describir los conjuntos de Bernstein que son conjuntos en los reales que no son Lebesgue medibles.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Existen ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles?

1.2.2. Problema Específico

- ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos?
- ¿Existen conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medibles?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Mostraremos ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles.

1.3.2. Objetivo Específico

- Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos.
- Mostraremos ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medibles

1.4. Justificación

El siguiente trabajo está dedicado a todos los lectores que quieran y les guste aplicar métodos de teoría de conjuntos fuera de la teoría clásica de conjuntos, a partir de la Teoría de la medida.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se pueda reconstruir toda la matemática, mientras que la teoría de la medida es de importancia central en la geometría, la probabilidad y en la estadística, ya que permite crear nuevas formas de medir conjuntos desde el punto de vista de la longitud, el área, el volumen, etc.

Es así que el motivo principal del presente trabajo es dar a conocer la importancia

de estudiar la teoría de conjuntos y los métodos típicos de la teoría moderna de conjuntos como: la inducción transfinita, el lema de Zorn y la hipótesis del continuo, obteniendo resultados relevantes en el estudio de las σ -álgebras de los reales.

Se mostrará la existencia de subconjuntos de \mathbb{R} con algunas propiedades extrañas, como lo son los conjuntos de Bernstein. Para ello se desarrollarán temas como inducción y recursividad transitiva, aritmética cardinal, entre otros.

1.5. Delimitantes de la Investigación

1.5.1. Teórico

No aplica.

1.5.2. Temporal

No aplica.

1.5.3. Espacial

No aplica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Antecedentes Nacionales

No se encontró antecedentes nacionales.

2.1.2. Antecedentes Internacionales

CIESIELSKI, K. Set Theory for the Working Mathematician. England: Cambridge University Press, 1997.

En el texto el autor se concentra en los métodos típicos de teoría de conjuntos moderna: inducción transfinita, lema de Zorn, hipótesis del continuo. La elección de los temas y la forma en que se presentan está subordinada a un propósito: obtener las herramientas que son más útiles en las aplicaciones, especialmente en geometría abstracta, análisis, topología y álgebra. En particular, la mayoría de los métodos presentados en el libro van acompañados de muchas aplicaciones en geometría abstracta, análisis real y, en algunos casos, topología y álgebra.

ALFRED TARSKI'S WORK IN SET THEORY, AZRIEL LEVY. The Journal of Symbolic Logic, Mar., 1988, Vol. 53, No. 1 (Mar., 1988)

Un motivo central en el trabajo de Tarski en teoría de conjuntos, y también en lógica, fue la idea de algebraización. Tarski probablemente esperaba que un cálculo

algebraico de la teoría de conjuntos hiciera que las sólidas herramientas desarrolladas en la teoría de conjuntos estuvieran disponibles para muchos casos diferentes, tanto en la teoría de conjuntos como fuera de ella. Esta algebraización se llevó a cabo principalmente en dos direcciones diferentes. Una dirección es la de las álgebras de Boole y sus modelos-campos de conjuntos naturales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica booleana. Esta dirección resultó ser inmensamente exitosa y dio muchos frutos para la investigación en grandes cardinales y forzamiento. La otra dirección de la algebraización de la teoría de conjuntos llevada a cabo por Tarski es la del análisis de la acción de funciones uno-uno que conducen a las álgebras cardinales y ordinales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica. Tarski y algunos de sus alumnos invirtieron mucho trabajo e ingenio en esta dirección, pero no resultó ser una fuente importante de matemáticas fructíferas. El modelo principal para la dirección algebraica fue la teoría aditiva finita e infinita de los cardinales en ausencia del axioma de elección, posiblemente en presencia de alguna versión débil de este axioma. El axioma completo de elección permite operaciones de carácter altamente no constructivo, y no es probable que uno pueda algebraizarlas de ninguna manera útil. Por tanto, los teoremas teóricos de conjuntos que mencionaremos en nuestra descripción de esta dirección serán teoremas demostrables sin utilizar el axioma de elección.

On the Berstein–Svarc theorem in dimension 2 ,BY ALEXANDER N. DRANISHNIKOV AND YULI B. RUDYAK, Department of Mathematics, University of Florida, 358 Little Hall, Gainesville, FL 32611, U.S.A.

En el trabajo de Dranishnikov se demostrará que para cualquier grupo π con dimen-

sión cohomológica al menos n la n -ésima potencia de la clase de Bernstein de π no es trivial. Esto nos permite probar el siguiente Bernstein-Svarc teorema para todo n :

*"Para un complejo X conectado con $\dim X = \text{cat} X = n$,
tenemos $\mathfrak{b}_X^n \neq 0$ donde \mathfrak{b}_X es la clase Bernstein de X ".*

Previamente esto es cierto para $n \geq 3$

También probamos que, para cada aplicación $f : M \rightarrow N$ de grado ± 1 de variedades orientables cerradas, el grupo fundamental de N es libre siempre que el grupo fundamental de M lo sea.

2.2. Bases Teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la realización del presente trabajo, con esta finalidad seguiremos los resultados mostrados en LEFSCHETZ, S. Introduction to Topology. United States: Princeton University Press, 2015 ; y Folland, G.B. 1999. Real Analysis: Modern Techniques and their Applications. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc.

2.2.1. Buen Orden

El principio del buen orden afirma que en cualquier conjunto de números naturales existe un mínimo, es decir, un número no mayor que algún otro del resto, siempre y cuando dicha colección no esté vacía.

Veamos algunas definiciones.

Definición 2.2.1. Sea A un conjunto ordenado por \preceq , decimos que $a_0 \in A$ es un elemento mínimo (\min), si para todo $a \in A$ se tiene que $a_0 \leq a$.

Definición 2.2.2. Dada \preceq una orden sobre X , decimos que \preceq es una buen orden si, dado cualquier $A \subset X$ no vacío, existe $a \in A$ tal que $a = \min A$, esto es, $a \leq b$, para todo $b \in A$.

Teorema 2.2.3. *Todo buen orden en un conjunto X es total.*

Demostración

Sea $a, b \in X$, entonces $a \leq b$ o $a \geq b$.

Teorema 2.2.4. *Sea $(A, <)$ un orden total. Entonces $(A, <)$ es un buen orden si y solo si no existe sucesión $(X_n)_{n \in \omega}$ tal que, para todo $n \in \omega$, $x_{n+1} < x_n$*

Demostración

Primero suponga que $(A, <)$ es un conjunto bien ordenado. Considere una sucesión arbitraria $(X_n)_{n \in \omega}$.

Sea $S = \{x_n : n \in \omega, \}$. Sea y el menor elemento de S . Así $y = x_n$. Entonces $x_n \leq x_{n+1}$. Por lo tanto $x_{n+1} \not< x_n$

Ahora, suponga que $(A, <)$ no es un conjunto bien ordenado. Por lo tanto, existe $S \subseteq A$ tal que $S \neq \emptyset$ y S tiene un menor elemento.

Definimos una sucesión x_n por recursión en $n \in \omega$ como sigue. Para el inicio, tomemos $x_0 \in S$. Para el caso sucesor tomemos $x_{n+1} \in S$ con $x_{n+1} < x_n$.

Note que esto es posible pues S no tiene un menor elemento.

Proposición 2.2.5. *Toda sucesión en un conjunto totalmente ordenado admite subsucesión constante, o admite una subsucesión estrictamente creciente o admite una subsucesión estrictamente decreciente.*

Demostración

Sea $(x_n)_{n \in \omega}$ una sucesión de un conjunto X totalmente ordenado por \leq .

Supongamos que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

Decimos que x_n es un pico si, para todo $k > n$, tenemos que $x_k < x_n$. De ello vemos los siguientes casos.

Caso 1

Supongamos que existen infinitos picos. Entonces enumeramos los picos aumentando subíndices:

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

Dado que cada término es un pico, tenemos:

$$x_{n_0} > x_{n_1}, x_{n_2} > \dots, x_{n_k} > \dots$$

Po lo tanto, la subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \omega}$ es decreciente de X

Caso 2

Supongamos que X tiene un número finito de picos (posiblemente cero).

Comencemos por enumerar por subíndices crecientes $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}$.

Ahora tomemos $s_0 = m_r + 1$ el primer índice después del último pico, δ de esto tenemos que x_{s_0} no es un pico, entonces existe $s_1 > s_0$ tal que $x_{s_0} < x_{s_1}$.

Análogamente como x_{s_1} no es un pico, entonces existe $s_2 > s_1$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$. Siguiendo el proceso obtenemos una subsucesión estrictamente creciente $(x_{s_k})_{k \in \omega}$ de X .

Proposición 2.2.6. ω_1 es un espacio primero numerable

Demostración

Fijemos $\alpha \in \omega_1$. Note que para $\gamma \in \alpha$, tenemos el abierto $]\gamma, \alpha + 1[$.

De aquello tenemos una base de vecindades $\mathcal{B}_\alpha = \{]\gamma, \alpha + 1[: \gamma < \alpha\}$ numerable para α .

Teorema 2.2.7. Principio del Buen Orden de Zermelo: Todo conjunto X admite un buen orden.

Demostración Ver teorema 4.3.3. [Ciesielski, 1997]

Ejemplos:

- 1.- El conjunto $S = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{1\}$ es un subconjunto bien ordenado de (\mathbb{R}, \leq) desde $S_0 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ está ordenado de la misma que \mathbb{N} y 1 es mayor que cualquier número de S_0
- 2.- El intervalo $[0; 1]$ con el orden habitual está ordenado y tiene el elemento más pequeño. Sin embargo, no está bien ordenado, ya que su subconjunto $\langle 0; 1 \rangle$ no tiene un elemento más pequeño (0 no es un elemento de $\langle 0; 1 \rangle$).

3.- El principio de buen orden es equivalente al axioma de elección. En el presente trabajo, vamos a suponer que vale el principio del Buen Orden de Zermelo.

2.2.2. Principio de inducción

Definición 2.2.8. Sea A un subconjunto de números naturales tal que

$$1 \in A$$

Si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$

$$\therefore A = \mathbb{N}$$

Teorema 2.2.9. *Principio de inducción \Rightarrow Principio de buen orden*

Demostración

Ver en [Pineda Ruelas M.,]

2.2.3. Principio de inducción transfinita

Teorema 2.2.10. *Si un conjunto A es bien ordenado, $B \subset A$, y para todo $a \in A$ el conjunto B satisface lo siguiente:*

$$\{x \in A : x < a\} \subset B \Rightarrow a \in B$$

entonces $B = A$.

Demostración

Ver teorema 4.1.6. [Ciesielski, 1997]

Por lo tanto, el principio de inducción se puede aplicar a cualquier conjunto.

Corolario 2.2.11. *Si $B \subset \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto B satisface lo siguiente:*

$$\{x \in \mathbb{N} : x < n\} \subset B \Rightarrow n \in B$$

entonces $B = \mathbb{N}$

Demostración

Ver corolario 4.1.7. [Ciesielski, 1997]

2.2.4. Ordinales

Definición 2.2.12. Decimos que un conjunto X es transitivo si, para todo $y \in X$, tenemos que $y \subset X$.

Definición 2.2.13. Un conjunto es un número ordinal (un ordinal) si él es transitivo y bien ordenado por \in .

La idea de definir ordinales es

$$\alpha < \beta \text{ si y solo si } \alpha \in \beta, \text{ y } \alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$$

Denotaremos ordinales con letras griegas minúsculas α, β, γ , etc. La clase de todos

los ordinales es denotada por Ord .

Definimos

$$\alpha < \beta \text{ si y solo si } \alpha \in \beta$$

Y

$$\alpha \leq \beta \text{ si y solo si } (\alpha < \beta \text{ o } \alpha = \beta)$$

Lema 2.2.14. a) $0 = \emptyset$ es un ordinal

b) Si $\alpha \neq \beta$ son ordinales y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha \in \beta$

c) Si α es un ordinal y $\beta \in \alpha$, entonces β es un ordinal

d) Si α, β son ordinales entonces $\alpha \subset \beta$ o $\beta \subset \alpha$

Demostración

Ver pág. 19 Lema 2.11. [Jech, 1978]

Proposición 2.2.15. Sea α, β y γ números ordinales

a. $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$

b. Se cumple exactamente uno de las siguientes propiedades: $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$ o $\beta < \alpha$

c. Todo conjunto no vacío de ordinales tiene un $<$ menor elemento. Consecuentemente, todo conjunto de números ordinales es bien ordenado por $<$.

d. Para todo conjunto de números ordinales X , existe un número ordinal $\alpha \notin X$ (en otras palabras, "El conjunto de todos los números ordinales" no existe)

Demostración Ver pág. 44 y teorema 4.2.2. [Ciesielski, 1997]

Usando el Lema 2.2.14 y la Proposición 2.2.15 se obtiene:

1. $<$ es un orden total en la clase Ord .
2. Para cada α ; $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$
3. Si C es una clase no vacío de ordinales, entonces $\bigcap C$ es un ordinal, $\bigcap C \in C$ y $\bigcap C = \text{ínf } C$.
4. Si X es un conjunto no vacío de ordinales, entonces $\bigcup X$ es un ordinal y $\bigcup X = \text{sup}X$.
5. Para todo α , $\alpha \cup \alpha$ es un ordinal y $\alpha \cup \alpha = \text{ínf}\{\beta : \beta > \alpha\}$.

Definición 2.2.16. Los conjuntos parcialmente ordenados $\langle X, \leq \rangle$ y $\langle Y, \leq \rangle$ son isomorfos si hay una biyección $f : X \rightarrow Y$ tal que $a \leq b$ si y solo si $f(a) \leq f(b)$ para todo $a, b \in X$.

La función f es llamada isomorfismo de orden entre X y Y .

En este caso decimos que X y Y son orden- isomorfos.

Teorema 2.2.17. *Todo conjunto bien ordenado es orden-isomorfo a un único número ordinal.*

Demostración

Ver pág. 20 Teorema 2.12. [Jech, 1978]

Lema 2.2.18. *Sean α y β ordinales que $\beta \in \alpha$. Suponga que exista $\gamma \in \alpha$, sea γ el menor tal que $\beta \in \gamma$. Entonces $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$*

Demostración

Ver pág. 20 [Jech, 1978]

Proposición 2.2.19. *Sea α un ordinal. Entonces existe $\beta \in \alpha$ tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ o para todo $\beta \in \alpha$, tenemos $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$.*

Demostración

Suponga que exista $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$.

Suponga $\alpha \notin \beta \cup \{\beta\}$, esto es, existe $\gamma \in \alpha \setminus (\beta \cup \{\beta\})$ podemos suponer que γ sea el menor con tal propiedad.

Note que $\beta \in \gamma$ (de hecho, como $\gamma, \beta \in \alpha$, si $\beta \notin \gamma$ como \in es un orden total sobre α , tendríamos que $\beta = \gamma$ o $\gamma \in \beta$. Pero ambos de esos casos contradicen el hecho que $\gamma \in \alpha \setminus (\beta \cup \{\beta\})$).

Entonces por el lema 2.2.18, tenemos que $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ contradiciendo el hecho que $\gamma \in \alpha$ y $(\beta \cup \{\beta\}) \notin \alpha$.

Con esto denotamos $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, siendo α un ordinal, mas aún denotemos $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$.

Definición 2.2.20. Sea α un ordinal. Si $\alpha = \beta + 1$ para algún β ordinal, decimos que α es un ordinal sucesor. Si α no es un **ordinal sucesor**, entonces $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha = \bigcup \alpha\}$, α es llamado **ordinal límite**.

Note que todo $n \in \omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ no vacío es un ordinal sucesor. Note también que ω es un ordinal límite.

Además si α es un ordinal límite y $\beta \in \alpha$, entonces $\beta + 1 \in \alpha$.

Debemos verlo de la siguiente manera.

Partiendo del conjunto vacío usamos la operación

$$\alpha \mapsto \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

en etapas sucesoras y tomar uniones en etapas límite para generar todos los ordinales que comienzan con los números naturales.

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

el siguiente ordinal después de todos los números naturales es el conjunto de todos los números naturales

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Después de ω viene la sucesión infinita de ordinales

$$\begin{aligned} \omega + 1 &= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega\} \\ \omega + 2 &= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ \omega + 3 &= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$\beta \in \alpha$, entonces $\varphi(\alpha)$. Entonces, para todo ordinal α , tenemos que vale $\varphi(\alpha)$.

Demostración

Ver teorema 2.5.1. [Roberto,]

Ahora vamos a enunciar una versión de la recursión transfinita para un ordinal fijado. Recuerde que recursión es un método de definir funciones.

Teorema 2.2.22. (Recursión transfinita)

Sea Ω un número ordinal, A es un conjunto, y $S = \bigcup_{\alpha < \Omega} A^\alpha$ es el conjunto de todas las sucesiones de A de longitud menor de Ω .

Demostración

Ver teorema 4.3 [Ciesielski, 1997]

Sea $g : S \rightarrow A$ una función. Entonces existe una función $f : \Omega \rightarrow A$ tal que

$$g(\alpha) = g(f \upharpoonright \alpha) \text{ para todo } \alpha < \Omega$$

Si ξ es un ordinal y f es una sucesión transfinita de longitud ξ en un conjunto A , es decir $f : \xi \rightarrow A$ es una función, veamos la notación

$$f = \langle a_\alpha : \alpha < \xi \rangle$$

El teorema 2.2.22 establece que si g es una función en el conjunto de todas las sucesiones transfinitas de elementos de A de longitud menor que Ω con valores en A , entonces existe una sucesión transfinita $\langle a_\alpha : \alpha < \Omega \rangle$ tal que para todo $\alpha < \Omega$,

$$\alpha_a = g(\langle a_\alpha : \alpha < \xi \rangle)$$

2.2.5. Topología en los ordinales

Fijando un ordinal α , hay una topología muy natural en él, la topología del orden:

Definición 2.2.23. Dado un ordinal α , llamamos de **topología del orden** a la topología generada por los conjuntos de la forma

$$[0, \xi[,]\xi, \eta[\text{ y }]\eta, \alpha[$$

Donde $\xi, \eta \in \alpha$.

Definición 2.2.24. Un espacio topológico X es llamado un espacio T_2 o **espacio de Hausdorff**, si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que

$$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 \text{ y } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Proposición 2.2.25. *Todo ordinal es un espacio de Hausdorff*

Demostración

Sea α un ordinal y sean $\gamma < \delta \in \alpha$, así $\gamma + 1 \leq \delta$.

Ahora considere los abiertos disjuntos

$$[0, \gamma + 1[\text{ y } \delta \in]\gamma, \alpha[$$

Tenemos que:

$$\gamma \in [0, \gamma + 1[\text{ y } \delta \in]\gamma, \alpha[$$

Además

$$[0, \gamma + 1[\cap]\gamma, \alpha[= \emptyset$$

Definición 2.2.26. Un espacio topológico X es llamado compacto si X es Hausdorff y toda cobertura abierta de X tiene una subcobertura finita, es decir, si para toda cobertura abierta $\{\cup s\}_{s \in S}$ del espacio X existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ tal que $X = \{\cup_{s_1} \cup \cup_{s_2} \cup \dots \cup \cup_{s_k}\}$

Proposición 2.2.27. Si α es un ordinal límite diferente de 0, entonces α no es compacto.

Demostración

Basta tomar que $\{[0, \beta + 1[: \beta \in \alpha\}$ es una cobertura abierta sin subcobertura finita.

Proposición 2.2.28. Si α es un ordinal sucesor, entonces es compacto.

Demostración

Como α es un ordinal sucesor, entonces sea β ordinal tal que $\alpha = \beta + 1$

- Si $\beta = 0$. En este caso $\alpha = 1 = \{0\}$, el cual es compacto.
- Si β es ordinal tal que $\beta = \gamma + 1$, luego tenemos que $\alpha = (\gamma + 1) + 1 = (\gamma + 1) \cup \{\gamma + 1\}$.

Por hipótesis de inducción $\beta = \gamma + 1$, es compacto, luego α es un compacto unido con un punto, por tanto es compacto.

- Si β es ordinal límite. En este caso, sea \mathcal{C} una cobertura de abiertos para α .
- Sea $C \in \mathcal{C}$, note que existen ξ_1, ξ_2 tal que $\beta \in]\xi_1, \xi_2[\subseteq C$, así $]\xi_1, \beta[\subseteq C$, y como β es límite, tenemos que $\xi_1 + 1 < \beta$.

Por hipótesis de inducción, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ finito tal que $[0, \xi_1] = \xi_1 + 1 \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$.

Finalmente, note que $\mathcal{C}' \cup \{C\}$ es una subcobertura finita para $\alpha = [0, \beta]$.

Definición 2.2.29. Un espacio topológico X es llamado *separable* si existe un subconjunto numerable D de X tal que $\overline{D} = X$

Definición 2.2.30. Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

- Un conjunto $N \subseteq X$ es llamado una vecindad de x en X si existe un conjunto abierto U con $x \in U \subseteq N$.
- Una base de vecindades en x es una familia \mathcal{B}_x de vecindades de x (en X) tal que toda vecindad de x contiene algún miembro de \mathcal{B}_x .

Definición 2.2.31. Un espacio topológico X es llamado primero numerable si X tiene una base de vecindades numerable en cada punto.

Definición 2.2.32. Un espacio topológico X es llamado segundo numerable si existe una base numerable de abiertos para X .

OBS 2.1. Todo espacio segundo numerable es separable y primero numerable.

Definición 2.2.33. Un espacio topológico X es llamado secuencialmente compacto si X es *Hausdorff* y toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente.

2.2.6. ω_1 el primer ordinal no numerable

Definición 2.2.34. Un conjunto X es finito si existe $f : n = \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow X$ para algún número natural n . X es infinito si no es finito.

Definición 2.2.35. Decimos que un conjunto A es numerable si es finito o existe biyección $f : A \rightarrow \omega$

Teorema 2.2.36. *Existe un conjunto bien ordenado no numerable X tal que $\{y \in X : y < x\}$ es numerable para todo $x \in X$*

Demostración

Sea X un conjunto no numerable y sea \leq un buen orden sobre X (esto es posible por el PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN DE ZERMELO).

Para cada $x \in X$, definimos $I_x = \{y \in X; y < x\}$, tenemos los siguientes casos:

- Si para todo $x \in X$, I_x es numerable, entonces X es un ω_1
- Caso contrario, esto es, existe un $x \in X$ tal que I_x no es numerario. Tome x_0 como el mínimo con aquella propiedad (esto es posible pues X es bien ordenado). Afirmamos que I_{x_0} satisface las hipótesis del teorema. En efecto, como X es bien ordenado, entonces I_{x_0} es bien ordenado.

Ahora, sea $y \in I_{x_0}$. Note que $\{z \in I_{x_0} : z < y\}$ es numerable.

Sea X como el teorema 2.2.36. Denotaremos por ω_1 al único ordinal orden-isomorfo a X (esto es posible por el teorema 2.2.17)

Otra caracterización de ω_1 es el siguiente teorema

Teorema 2.2.37. Sea ω_1 definido por

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal numerable}\}$$

Entonces ω_1 es el menor ordinal no numerable.

Demostración

Ver pág.38 [Rodrigo Hernandez,]

Proposición 2.2.38. Sea A un subconjunto numerable de ω_1 . Entonces A es limitado.

Demostración

Sea $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq \omega_1$ una enumeración de A . Luego $b = \bigcup_{n \in \omega} a_n = \sup A$ es un ordinal, y como cada a_n es numerable, entonces b es numerable. luego $b \in \omega_1$.

Note que para cada $n \in \omega$, se tiene que $a_n \leq b$.

De aquello tenemos:

- ω_1 es el primer ordinal no numerable.
- Par cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha\}$ es numerable.
- Como ω_1 es bien ordenado podemos aplicar el método de recursión transfinita sobre el.
- Si $A = \{a_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto numerable de ω_1 , tenemos que existe

$$\sup A = \bigcup A$$

y además

$$\sup A \in \omega_1$$

Definición 2.2.39. Llamamos de ω_1 un conjunto bien ordenado y no numerable tal que para cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha\}$ es numerable.

Por lo tanto ω_1 es el primer ordinal no numerable. Note que $\omega_1 = \bigcup \omega_1$, entonces ω_1 es un ordinal límite.

Proposición 2.2.40. *Sea A un subconjunto numerable de ω_1 . Entonces A es limitado.*

Demostración

Suponga que no. Osea, para cada $b \in \omega_1$ existe $a \in A$ tal que $b < a$.

Entonces

$$\omega_1 = \bigcup_{a \in A} \{b \in \omega_1 : b < a\}$$

Note que para cada $a \in A$, $\{b \in \omega_1 : b < a\}$ es numerable, luego ω_1 es una unión numerable de conjuntos numerables, así ω_1 es numerable.

Propiedades topológicas de ω_1

1. ω_1 es un espacio compacto de Hausdorff, y esto es gracias a las proposiciones 2.2.25 y 2.2.27.
2. ω_1 no es un espacio separable.

Proposición 2.2.41. *ω_1 no es un espacio separable*

Demostración

Suponga que ω_1 es separable, luego existe un subconjunto numerable denso D . Además por la proposición 2.2.38, tenemos que D es limitado de aquello podemos ver que existe un $\alpha \in \omega_1$ tal que $D \subseteq [0, \alpha[$.

Por otro lado vemos que $D \cap]\alpha, \omega_1[= \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que D es denso en ω_1 .

3. ω_1 es secuencialmente compacto.

Lema 2.2.42. *Toda sucesión $(x_n)_{n \in \omega}$ estrictamente creciente de puntos en ω_1 es convergente.*

Demostración

Como $A = \{x_n : n \in \omega\}$ es numerable, tenemos que A admite supremo. Sea $\alpha \in \omega_1$ tal supremo, entonces α es un ordinal límite ya que de lo contrario la sucesión tendría un mayor elemento, lo cual contradice el hecho que la sucesión es estrictamente creciente.

Entonces $] \beta, \alpha] =] \beta, \alpha + 1 [$ es un abierto conteniendo α , tenemos que , existe $\alpha_n > \beta$ y todo x_k con $k > n$ es tal que $x_n \in] \beta, \alpha]$ por lo tanto se tiene el resultado.

Teorema 2.2.43. ω_1 es secuencialmente compacto.

Demostración

Sea $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq \omega_1$ además como ω_1 es totalmente ordenado entonces $(x_n)_{n \in \omega_1}$ admite una subsucesión constante o admite una subsucesión estrictamente creciente o admite una subsucesión estrictamente decreciente.

De aquello tenemos los siguientes casos:

- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsucesión constante. En este caso, el resultado es trivial.
- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsucesión estrictamente decreciente, esto no se puede dar ya que por el teorema ¿que teorema? no existe sucesión $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que, para todo $n \in \omega$, $x_{n+1} < x_n$.
- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsucesión estrictamente creciente entonces por el teorema 2.2.43 tenemos que $(x_n)_{n \in \omega}$ es convergente.

Por lo tanto ω_1 es secuencialmente compacto.

4. Toda función continua $f : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es eventualmente constante

Proposición 2.2.44. Sea $f : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \geq \alpha$.

Demostración

Fijemos $n \geq 1$.

Afirmación Existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{n}$ para todo $\beta > \omega_n$.

2.2.7. Cardinales

Definición 2.2.45. Dos conjuntos A, B tienen la misma cardinalidad (número cardinal, cardinal), y escribimos $A \approx B$ si existe una biyección $f : A \rightarrow B$.

Recordemos que por el TEOREMA DE ZERMELO y por el teorema 2.2.17, para todo conjunto A existe un ordinal α tal que $A \approx \alpha$

Definición 2.2.46. El número ordinal más pequeño con esta propiedad se llama cardinalidad de A y se denota por $|A|$. Esto es,

$$|A| = \min\{\alpha : \alpha \text{ es ordinal y } A \approx \alpha\}$$

OBS 2.2. ■ Para todo conjunto A , $|A| \approx A$;

 ■ si A, B son conjuntos, entonces $A \approx B$ si y solo si $|A| = |B|$

2.3. Conceptual

2.3.1. Teoría de conjuntos

Es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí

mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta de cualquier teoría matemática.

2.3.2. Teorema del buen orden

El teorema del buen orden establece que todo conjunto puede ser bien ordenado. Un conjunto X está bien ordenado por un orden estricto si todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo bajo dicho orden.

2.3.3. Espacio Topológico

Un espacio topológico es una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, vecindad, usando subconjuntos de un conjunto dado.

2.3.4. Axioma de elección

En teoría de conjuntos, el axioma de elección es un axioma que postula que, para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos.

2.3.4.1. Conjunto de Bernstein

Un subconjunto B de \mathbb{R} es un conjunto de Bernstein si tanto B como su complemento corta a cada cerrado no numerable. Esta propiedad hace que los conjuntos

de Bernstein sean bastantes fieros, o en términos más finos, ‘irregulares’.

2.4. Definición de Términos Básicos

2.4.1. Espacios Topológicos

Definición 2.4.1. Un espacio topológico es una pareja (X, τ) tal que X es un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X tales que satisfacen

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$
3. $U_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

Definición 2.4.2. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Llamamos bola abierta de centro a y radio r al conjunto $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$

Definición 2.4.3. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Llamamos bola cerrada de centro a y radio r al conjunto $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$

Definición 2.4.4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $x \in A$, existe $r \geq 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$.

Definición 2.4.5. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n , un elemento $a \in A$ se dice que es un punto interior de A , si existe una bola abierta con centro en a contenida en A es decir si existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$

Definición 2.4.6. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es cerrado si y solo si su complemento A^c es abierto. La cerradura \overline{A} de A es la intersección de todos los cerrados que contiene a A , El interior $\overset{\circ}{A}$ de A la definimos como la unión de todos los subconjuntos abiertos de A .

Definición 2.4.7. La *frontera* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto $\text{fr}(A)$ formado por los puntos de X que no son interiores a X , unido con los puntos de $\mathbb{R}^n - X$ que no son interiores a $\mathbb{R}^n - X$. Esto es, $x \in \text{fr}(X)$ cuando toda bola abierta con centro x contiene puntos de X y puntos de $\mathbb{R}^n - X$.

Definición 2.4.8. . Sucesiones Una sucesión en \mathbb{R}^n es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia a cada entero k un punto $x_k \in \mathbb{R}^n$ llamado el k -ésimo término de la sucesión. Utilizaremos las siguientes notaciones,

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), \quad (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{o} \quad (x_k).$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ indicamos con x_{ki} la i -ésima coordenada de x_k . Así, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$. Así dar una sucesión en \mathbb{R}^n equivale a dar n sucesiones de números reales $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$.

Definición 2.4.9. Si la sucesión (x_k) converge al punto a , si para todo $\epsilon > 0$ existe k_0 tal que $x_k \in B_\epsilon(a)$ para todo $k > k_0$.

2.4.2. Espacios de medida

Definición 2.4.10. Álgebras.

Sean $\Omega (\neq \emptyset)$ un conjunto y \mathcal{C} una familia no vacía de subconjuntos de Ω .

Se dice que \mathcal{C} es un álgebra en Ω cuando se cumple que:

- Si $A \in \mathcal{C}$ entonces $A^c \in \mathcal{C}$.
- Si $A, B \in \mathcal{C}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{C}$.

OBS 2.3. Si \mathcal{C} es un álgebra en Ω entonces $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}$.

Definición 2.4.11. σ -álgebras.

Se dice que \mathcal{C} es un σ -álgebra en Ω cuando se cumple que:

- Si $A \in \mathcal{C}$ entonces $A^c \in \mathcal{C}$.
- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{C}$ entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$.

OBS 2.4. ▪ Si \mathcal{C} es un σ -álgebra en Ω entonces también es un álgebra en Ω .

- Si \mathcal{F} es un σ -álgebra en Ω entonces: el par (Ω, \mathcal{C}) es llamado espacio medible; Ω , espacio muestral; y los elementos de \mathcal{F} , conjuntos medibles.
- $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ es un σ -álgebra en Ω . Es conocido como el σ -álgebra trivial de Ω .
- $\mathcal{F}_\Omega = 2^\Omega$ (conjunto potencia de Ω) es un σ -álgebra en Ω . Es conocido como el σ -álgebra total de Ω .

Definición 2.4.12. Borelianos en \mathbb{R}

El σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} es el σ -álgebra generado por la familia de intervalos abiertos de \mathbb{R} y es denotado por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ son llamados borelianos de \mathbb{R} o conjuntos de Borel de \mathbb{R} .

Definición 2.4.13. Una **medida** en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$$

que satisfice las siguientes condiciones:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- (σ -aditividad) Si A_1, A_2, A_3, \dots son conjuntos medibles disjuntos dos a dos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

OBS 2.5. Sea μ una medida sobre (Ω, \mathcal{F}) .

- La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es llamada espacio de medida.
- Se dice que μ es finita cuando $\mu(\Omega) < \infty$.

Definición 2.4.14. Semiálgebras.

Sean Ω un conjunto no vacío y \mathcal{C} una familia no vacía de subconjuntos de Ω . Se dice que \mathcal{C} es un semiálgebra en Ω cuando se cumplen:

- Si $A, B \in \mathcal{C}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- Si $A \in \mathcal{C}$ entonces existen $k \in \mathbb{Z}^+$ y $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{C}$ disjuntos dos a dos tales que $A = \bigcup_{j=1}^k B_j$.

OBS 2.6. ▪ Si \mathcal{C} es un semiálgebra en Ω entonces $\emptyset \in \mathcal{C}$.

- Si \mathcal{C} es un álgebra en Ω entonces también es un semiálgebra en Ω .

Definición 2.4.15. Medidas Exteriores

Sean Ω un conjunto no vacío. Una medida exterior en Ω es una función $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$ que satisface las siguientes condiciones:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (Monotonicidad) Si $A \subset B \subset \Omega$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- (sub σ -aditividad) Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in 2^\Omega$ entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Teorema 2.4.16. Sean \mathcal{C} una familia de subconjuntos de Ω y $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función tales que:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$.
- $\mu(\emptyset) = 0$

Entonces la función $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : C_1, C_2, C_3, \dots \in \mathcal{C} \text{ y } \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset A\right\}$$

es una medida exterior en Ω .

Demostración

Ver Proposición 1.10. pág.29 [hijos,]

Definición 2.4.17. Una **medida completa** en el espacio medible Ω, \mathcal{F} es una medida en (Ω, \mathcal{F}) que satisface:

- Si $A \subset B, B \in \mathcal{F}$ y $\mu(B) = 0$ entonces $A \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.4.18. Sea μ^* una medida exterior en Ω . Considere la familia \mathcal{M}_{μ^*} de los subconjuntos E de Ω tales que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \text{ para todo } A \subset \Omega.$$

Entonces

- a) \mathcal{M}_{μ^*} es un σ -álgebra en Ω .
- b) La restricción de μ^* a \mathcal{M}_{μ^*} es una medida completa en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{M}_{\mu^*})$

Demostración

Ver teorema 1.3.2. pág. 22 de [Athreya and Lahiri, 2006]

Teorema 2.4.19. Teorema de extensión de Caratheodory

Sean \mathcal{C} un semiálgebra en Ω y $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{C}$ son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Entonces $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ (donde μ^* y \mathcal{M}_{μ^*} son construidas como los teoremas 2.4.16 y 2.4.18) es una medida completa en $(\Omega, \mathcal{M}_{\mu^*})$, la cual es una extensión de μ .

Es decir,

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.
- $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$

Demostración

Ver teorema 1.3.3. pág. 24 de [Athreya and Lahiri, 2006]

Definición 2.4.20. Medida de Lebesgue en \mathbb{R}

Sea \mathcal{C} la familia de intervalos de \mathbb{R} de las formas:

$$\langle a, b \rangle, \emptyset, \langle -\infty, b \rangle, \langle a, +\infty \rangle, \mathbb{R}.$$

Sea $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ la función definida por

$$\mu(A) = \text{longitud de } A.$$

Entonces:

- \mathcal{C} es un semiálgebra.
- $\mu(\emptyset) = 0$.

- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{C}$ son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Sean μ^* y \mathcal{M}_{μ^*} construimos como en los Teoremas 2.4.16 y 2.4.18.

Por el teorema 2.4.16, μ^* es una medida exterior en \mathbb{R} . Esta medida exterior es denotada por m^* y es conocida como la medida exterior de Lebesgue de \mathbb{R} .

Por el teorema 2.4.18, \mathcal{M}_{μ^*} es un σ -álgebra. Este σ -álgebra es denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ y sus elementos son conocidos como conjuntos Lebesgue medibles de \mathbb{R} .

Por el teorema 2.4.19, la función $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ es una medida completa en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Esta medida es denotada por m y es conocida como la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis General

Existen ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles.

3.1.2. Hipótesis Específicas

- Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos
- Existen conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medible

3.2. Definición conceptual de variables

3.2.1. Variable Independiente (I):

Conjuntos en \mathbb{R}

Dado el conjunto de los reales consideraremos a los conjuntos en \mathbb{R} como todos los elementos del conjunto de partes de \mathbb{R} . El conjunto de partes de \mathbb{R} en particular es el mayor σ -álgebra sobre los reales.

3.2.2. Variables dependientes (D):

Conjuntos Borelianos y conjuntos Lebesgue medible

Un conjunto de Borel es un elemento de la llamada σ -álgebra de Borel, la cual no es más que la mínima σ -álgebra que contiene a una topología dada.

Un conjunto B de \mathbb{R}^n se dirá medible si, para todo conjunto A , se verifica la siguiente identidad:

$$m^*(A) = m^*(A \cup B) + m^*(A \setminus B)$$

Donde m^* es la medida exterior de Lebesgue.

3.2.3. Operacionalización de las variables

Tabla 1: Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
I	Topología.	Topología en ordinales.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos.
	Cardinalidad.	Hipótesis del Continuo.		Revisión bibliográfica.
	Lema de Zorn	Principio de Elección		Trabajo con equipos de investigación.
D	Conjuntos Borelianos	Conjuntos abiertos.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos.
	Conjuntos Lebesgue medible.	Medida exterior.		Revisión bibliográfica.
	Medida de conjuntos	σ -álgebras		Trabajo con equipos de investigación.

FUENTE: Elaboración propia

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico

4.1.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2. Diseño de la investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ -álgebras que se pueden generar sobre ellos.

Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible.

4.2. Método de investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3. Población y Muestra

No se aplica.

4.4. Lugar de estudio

Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la biblioteca Central de la Universidad Nacional del Callao.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

La técnica aplicada al presente trabajo proyecto de investigación fue la técnica del análisis documental, cualitativo. Ello se basa en el análisis de documentos exis-

tentes en artículos, libros, revistas científicas. Acorde a nuestra investigación no se aplica instrumento de recolección de información

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7. Aspectos Éticos en Investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, estudio económico-financiero, estudio de la organización administrativa

No se aplica.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, evaluación del impacto ambiental, medidas ecológicas, plan de supervisión ambiental

No se aplica.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

No se aplica para este tipo de trabajo.

5.2. Resultados inferenciales

Debido a la naturaleza del trabajo nuestros resultados deductivos-inductivos podrían ser considerados inferenciales

Construcciones de subconjuntos de \mathbb{R}

En este capítulo, vamos a mostrar la existencia de subconjuntos de \mathbb{R} con algunas propiedades extrañas. Estas construcciones usarán técnicas vistas en el capítulo anterior.

5.2.1. Infinitos conjuntos Lebesgue medibles pero no Borelianos

Recordemos que el σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}or$ es el menor σ -álgebra $\sigma[\tau]$ en (\mathbb{R}, τ) que contiene τ , a saber,

$$\mathcal{B}or = \sigma[\tau] = \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \tau \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \text{ es un } \sigma\text{-álgebra en } \mathbb{R} \}$$

Los elementos de \mathcal{Bor} son llamados borelianos.

Nuestra motivación son las siguientes preguntas: ¿Será que podemos dar una descripción más específicas de \mathcal{Bor} ? ¿Podemos construir \mathcal{Bor} a partir de τ ? Las respuestas son algo más complicadas.

Más precisamente, para todo $\alpha < \omega_1$ definimos las colecciones Σ_α^0 y Π_α^0 de \mathbb{R} por inducción transfinita:

- $\Sigma_\alpha^0 = \Pi_\alpha^0 = \emptyset$
- $\Sigma_\alpha^0 =$ conjuntos abiertos de \mathbb{R} ;
- $\Pi_\alpha^0 =$ conjuntos cerrados de \mathbb{R} ;
- Para $1 < \alpha < \omega_1$, $\Pi_\alpha^0 = \{\mathbb{R} \setminus A : A \in \Sigma_\alpha^0\}$
- para $1 < \alpha < \omega_1$,

$$\Sigma_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n \in \omega} A_n : (\forall n)(\exists \beta_n < \alpha)(A_n \in \Pi_{\beta_n}^0) \right\}$$

Comenzaremos con algunos lemas:

Lema 5.2.1. *Para todo $\alpha < \omega_1$, se tiene que*

$$\Sigma_\alpha^0, \Pi_\alpha^0 \subseteq \mathcal{Bor}$$

Proposición 5.2.2. *Para $\beta < \alpha < \omega_1$ se tiene que*

(a) $\Sigma_\beta^0 \subseteq \Sigma_\alpha^0$,

(b) $\Pi_\beta^0 \subseteq \Pi_\alpha^0$,

$$(c) \sum_{\beta}^0 \subseteq \prod_{\alpha}^0,$$

$$(d) \prod_{\beta}^0 \subseteq \sum_{\alpha}^0$$

Finalmente, tenemos el gran resultado

Teorema 5.2.3. *La familia \mathcal{Bor} de subconjuntos de Borel de \mathbb{R} es igual a*

$$\mathcal{Bor} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \sum_{\alpha}^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \prod_{\alpha}^0$$

Demostración. Escribimos $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \sum_{\alpha}^0$. Por el **lema 5.2.1**, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Bor}$. Ya que \mathcal{F} contiene τ es suficiente demostrar que \mathcal{F} es un σ -álgebra, así tendremos que $\mathcal{Bor} \subseteq \mathcal{F}$.

Por lo tanto, tenemos que demostrar que \mathcal{F} es cerrado bajo complementos y uniones numerables.

- Si $A \in \mathcal{F}$ entonces, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $A \in \sum_{\alpha}^0$. Por lo tanto $\mathbb{R} \setminus A \in \prod_{\alpha}^0 \subseteq \sum_{\alpha+1}^0 \subseteq \mathcal{F}$.
- Si $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Para todo $k \in \omega$, existe $\alpha_k \in \omega_1$ tal que $A_k \in \prod_{\alpha_k}^0$. Note que $\alpha = \sup\{\alpha_k : k \in \omega\} \in \omega_1$. Así, para todo $k \in \omega$

$$A_k \in \prod_{\alpha_k}^0 \subset \bigcup_{\beta < \alpha+1} \prod_{\beta}^0$$

Entonces

$$\bigcup_{k \in \omega} A_k \in \sum_{\alpha+1}^0 \subset \mathcal{F}.$$

Teorema 5.2.4. *La familia \mathcal{Bor} de todos los borelianos de \mathbb{R} tiene cardinalidad \mathfrak{c}*

Demostración. Vamos a probar por inducción que para todo $\alpha < \omega_1$,

$$|\Sigma_\alpha^0| = \Pi_\alpha^0 = \mathfrak{c}$$

Note que $|\Sigma_\alpha^0| = \Pi_\alpha^0 = \mathfrak{c}$, pues tenemos la biyección.

$$\begin{aligned} f : \Sigma_\alpha^0 &\rightarrow \Pi_\alpha^0 \\ A &\rightarrow f(A) = \mathbb{R} \setminus A \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que $|\Sigma_1^0| = \mathfrak{c}$. Observe que $\{]x, 0[: x < 0\} \subset |\Sigma_1^0|$, así $\mathfrak{c} \leq |\tau|$.

La desigualdad $|\Sigma_1^0| = |\tau| \leq \mathfrak{c}$ es justificada por la siguiente función sobreyectiva

$$\begin{aligned} g : P(\mathcal{B}) &\rightarrow \tau \\ \mathcal{U} &\rightarrow g(\mathcal{U}) = \bigcup \mathcal{U} \end{aligned}$$

donde \mathcal{B} es una base de abiertos numerable (por ejemplo, tome $\mathcal{B} = \{]q, r[: q, r \in \mathbb{Q}\}$) de \mathbb{R} , con $|\mathcal{B}| = \omega$. Así, $|\Sigma_1^0| = \tau = \mathfrak{c}$. Ahora, supongamos que para algún $1 < \alpha < \omega$ tenemos que $|\Sigma_\beta^0| = |\Pi_\beta^0| = \mathfrak{c}$.

Pero, por la hipótesis inductiva

$$\left| \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0 \right| = |\alpha| \cdot \sup\{|\Pi_\beta^0| : \beta < \alpha\} = |\alpha| \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \text{ (ya que } |\alpha| < \omega_1 \text{)}$$

Mas aún, la función

$$\begin{aligned} F : \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0 \right)^\omega &\rightarrow \Sigma_\alpha^0 \\ \langle A_0, A_1, \dots \rangle &\rightarrow \langle F(A_0, A_1, \dots) \rangle = \bigcup_{n \in \omega} A_n \end{aligned}$$

es sobreyectiva. Así

$$|\Sigma_\alpha^0| \leq \left| \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta^0 \right)^\omega \right| = \left| \bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta^0 \right|^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}$$

ya que $\tau = \Sigma_1^0 \subseteq |\Sigma_\alpha^0|$ tenemos que $\mathfrak{c} = |\Sigma_1^0| \leq |\Sigma_\alpha^0|$.

Por lo tanto $|\Sigma_\alpha^0| = \mathfrak{c}$.

Finalmente recuerde que el conjunto de Cantor $K = 2^\omega$ es compacto, medible con medida nula y $|K| = \mathfrak{c}$.

Así tenemos.

Teorema 5.2.5. *Existen conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos en \mathbb{R} .*

Demostración. Como subconjuntos de conjuntos de medida nula tienen medida nula y por tanto son medibles, tenemos que $\mathcal{P}(K) \subseteq \mathcal{L}$, Luego $\mathfrak{c} < 2^\mathfrak{c} = 2^{|K|} = |\mathcal{P}(K)| \leq |\mathcal{L}|$, esto es, $\mathcal{L} \setminus \mathcal{Bor} \neq \emptyset$.

OBS 5.1.

- Note que $\mathcal{P}(K) \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Así, $|\mathcal{L}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Por Teorema 5.2.4, $|\mathcal{Bor}| = \mathfrak{c}$.

Recuerde que $\mathcal{Bor} \subset \mathcal{L}$. Así,

$$2^\mathfrak{c} = |\mathcal{L}| = |\mathcal{Bor}| + |\mathcal{L} \setminus \mathcal{Bor}| = \max \{ \mathfrak{c}, |\mathcal{L} \setminus \mathcal{Bor}| \} \text{ donde } \mathfrak{c} < 2^\mathfrak{c}.$$

Por lo tanto $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{Bor}| = 2^\mathfrak{c}$. Así, existe una cantidad no numerable de conjuntos

Lebesgue medibles que no son Borelianos.

5.2.2. Conjunto de Bernstein

El conjunto de Bernstein es un óptimo ejemplo de conjunto con propiedades no usuales. La construcción de ese conjunto envuelve muchos pasos, la inducción transfinita no será suficiente y para facilitar las demostraciones vamos a presentar diversos lemas, todo esto con la intuición de probar la existencia de la construcción. Primero, vamos a definir tal conjunto.

Definición 5.2.6. Decimos que $X \subset \mathbb{R}$ es un **conjunto de Bernstein** si X es no numerable y, para todo $F \subset \mathbb{R}$ cerrado no numerable, tenemos que $F \cap X \neq \emptyset$ y $F \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$.

Para demostrar la existencia del conjunto de Bernstein, es necesario recordar algunas propiedades del conjunto de Cantor.

OBS 5.2. Como ya es bien conocido, el conjunto de Cantor tiene cardinalidad \mathfrak{c} . Denotamos tal conjunto por 2^ω . El conjunto de Cantor 2^ω es compacto, nunca denso y sin puntos aislados.

Lema 5.2.7. *Todo subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ cerrado no numerable es tal que $|F| = \mathfrak{c}$.*

Lema 5.2.8. *Existen \mathfrak{c} no numerables.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} : F \text{ es cerrado y no numerable}\}$. Note que $\{[x, 0] : x < 0\} \subset \mathcal{F}$, así, $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{F}|$. Por otro lado, existen \mathfrak{c} conjuntos abiertos, por tanto existen \mathfrak{c} conjuntos cerrados. Así, $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$. Por tanto $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$.

Finalmente, tenemos resultados suficientes para demostrar el próximo teorema.

Teorema 5.2.9. *Existe un conjunto de Bernstein*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} : F \text{ es cerrado y no numerable}\}$. Por el lema 5.2.8, escribimos, $\mathcal{F} = \{F_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Vamos a usar inducción transfinita, en $\xi < \mathfrak{c}$, para construir sucesiones $(x_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$ y $(y_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$, escogiendo en el paso $\xi < \mathfrak{c}$, $x_\xi \neq y_\xi$ tales que:

$$x_\xi, y_\xi \in F_\xi \setminus (\{x_\zeta : \zeta < \xi\} \cup \{y_\zeta : \zeta < \xi\}) \quad (5.1)$$

Esto es posible ya que $|\{x_\zeta : \zeta < \xi\} \cup \{y_\zeta : \zeta < \xi\}| = |\xi| + |\xi| = |\xi| \leq \xi < \mathfrak{c}$, y por el lema 5.2.7, $|F_\xi| = \mathfrak{c}$.

Sea $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $Y = \{y_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ para x_ξ, y_ξ satisfaciendo 5.1, vamos a mostrar que X e Y son conjuntos de Bernstein.

Sea F un cerrado no numerable, entonces existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $F = F_\xi$. Por construcción, $X \cap F_\xi \neq \emptyset$ y $Y \cap F_\xi \neq \emptyset$, pues $x_\xi \in X \cap F_\xi$ y $y_\xi \in Y \cap F_\xi$. Además, $x_\xi \notin Y$, $y_\xi \notin X$. Así, $F \cup (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$ y $F \cup (\mathbb{R} \setminus Y) \neq \emptyset$

Teorema 5.2.10. *Todo conjunto de Bernstein no es Lebesgue medible.*

Demostración. Sea B un conjunto de Bernstein. Afirmamos que

- (1) Para cualquier conjunto compacto K tal que $K \subset B$, tenemos que K es numerable.
- (2) Para cualquier conjunto abierto U tal que $B \subset U$, tenemos que $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable.

En efecto, miramos (1). Suponga que K no es numerable, luego como K es compacto, tenemos que K es cerrado no numerable. Luego $(\mathbb{R} \setminus K) \cap B = \emptyset$, contradicción. Por tanto K es numerable.

Ahora, veamos (2). Supongamos que $\mathbb{R} \setminus U$ es no numerable. Como U es abierto, $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado no numerable. Así, $(\mathbb{R} \setminus U) \cap B = \emptyset$, contradicción. Por tanto $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable.

Ahora suponga que B es medible. Como la medida de Lebesgue m es regular, tenemos que

$$m(B) = \inf\{m(U) : B \subset U \text{ y } U \text{ es abierto}\} \\ \sup\{m(K) : K \subset B \text{ y } K \text{ es compacto}\}$$

Por la afirmación (1), tenemos que

$$\sup\{m(K) : K \subset B \text{ y } K \text{ es compacto}\} = 0,$$

pues $K \subset B$ es numerable, por tanto tiene medida nula.

Por la afirmación (2), si U es un conjunto abierto tal que $B \subset U$ tenemos que $\infty = m(\mathbb{R}) = m(U) + m(\mathbb{R} \setminus U) = m(U)$, pues $\mathbb{R} \setminus U$ tiene medida nula. Así,

$$\inf\{m(U) : B \subset U \text{ y } U \text{ es abierto}\} = \infty.$$

Lo cual es una contradicción. Por tanto B no es Lebesgue medible.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis

No aplica para este tipo de trabajo.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los Resultados

Esta sección está dedicada a verificar las hipótesis postuladas en la sección 3.1.

Para esto se comenzará comenzará contrastando las Hipótesis Específicas planteadas en la sección 3.1.2.

Hipótesis Específica 1 : Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos

Hipótesis Específica 2 : Existen conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medible

Con respecto a la Hipótesis específica 1, el teorema 5.2.5 muestra que existen conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos en \mathbb{R} a partir del estudio de la cardinalidad, lo que verifica la Hipótesis Específica 1.

Con respecto a la Hipótesis específica 2, el teorema 5.2.10 muestra que todo conjunto de Bernstein no es Lebesgue medible, lo que verifica la Hipótesis específica 2.

A partir de la verificación de las Hipótesis específicas planteadas, se muestra que la Hipótesis general

Existen ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles.

se comprueba directamente.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

SET THEORY FOR THE WORKING MATHEMATICIAN (No 39).

Krzysztof Ciesielski, Cambridge University Press, 1997 En el libro, se men-

cionan algunas construcciones típicas de transfinitos utilizando la construcción recursiva de subconjuntos de \mathbb{R}^n con propiedades geoméricamente extrañas, como el conjunto de Bernstein. Se logra demostrar que el conjunto de Bernstein en \mathbb{R}^n no es medible y carece de la propiedad de Baire.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

CONCLUSIONES

- 1 Como se demostró en el presente trabajo, los conjuntos de Bernstein son ejemplos de que la σ -álgebra del conjunto de partes de los reales incluye estrictamente al σ -álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles.
- 2 En la sección 5.1. se demostró que es posible generar sobre cualquier conjunto con medida de Lebesgue positiva la existencia de un conjunto perteneciente al σ -álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles, pero que no sea Borel medible. En general se demostró que los conjuntos Lebesgue incluyen estrictamente a los conjuntos Borel medibles.

RECOMENDACIONES

- (1) Como se vió en el desarrollo del presente trabajo, la teoría transinfinita fue fundamental para demostrar los objetivos planteados. Se recomienda explorar esta teoría para buscar resultados con relación a la Hipótesis del Continuo.
- (2) En este trabajo se probó la existencia de los conjuntos de Bernstein, se recomienda explorar mayores características sobre estos conjuntos, como por ejemplo su dimensión fractal.
- (3) Uno de los objetivos principales de este trabajo fue demostrar la siguiente cadena de inclusiones estrictas

$$\mathcal{Bor} \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$$

donde \mathcal{Bor} representa el σ -álgebra de los Borelianos, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ representa el σ -álgebra de los Lebesgue medibles y el $2^{\mathbb{R}}$ el σ -álgebra del conjunto de partes. Se recomienda estudiar la posibilidad de probar la existencia de otras σ -álgebras no triviales intermediarias en dicha cadena.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Athreya and Lahiri, 2006] Athreya, K. B. and Lahiri, S. N. (2006). *Measure theory and probability theory*, volume 19. Springer.
- [Bruckner et al., 1997] Bruckner, A. M., Bruckner, J. B., and Thomson, B. S. (1997). *Real analysis*. ClassicalRealAnalysis. com.
- [Campo,] Campo, E. R. Fundamentos de algebra.
- [Ciesielski, 1997] Ciesielski, K. (1997). *Set theory for the working mathematician*. Number 39. Cambridge University Press.
- [Engelking,] Engelking, R. General topology, sigma series in pure mathematics, vol. 6, heldermann, berlin, 1989. *MR1039321 (91c: 54001)*.
- [hijos,] hijos, J. W. ., editor. *Análisis real: técnicas modernas y sus aplicaciones*.
- [Jech, 1978] Jech, T. (1978). *Set Theory*, volume 19. ACADEMIC PRESS, INC. (LONDON) LTD.
- [Kelley, 2017] Kelley, J. L. (2017). *General topology*. Courier Dover Publications.
- [Kosniowski, 2021] Kosniowski, C. (2021). *Topología algebraica*. Reverté.
- [Lefschetz, 2015] Lefschetz, S. (2015). *Introduction to topology*. Princeton University Press.
- [Levy, 2002] Levy, A. (2002). *Basic set theory*, volume 13. Courier Corporation.

- [Mirimanoff, 1917] Mirimanoff, D. (1917). Les antinomies de russell et de burali-forti et le probleme fondamental de la théorie des ensembles. *Enseignement mathématique*, 19(1-2):37–52.
- [Pineda Ruelas M.,] Pineda Ruelas M., V. S. G. D. Divisibilidad. *Disponible en* http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas_de_clase/Divisibilidad.pdf.
- [Roberto,] Roberto, C. Tópicos de lógica. *Disponible en* https://www.dm.uba.ar/materias/optativas/topicos_de_logica/2014/2/Capitulo_2-2014b.pdf.
- [Rodrigo Hernandez,] Rodrigo Hernandez, G. El primer infinito no numerable y su topología.
- [Royden and Fitzpatrick, 1988] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. (1988). *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York.
- [Viggiani and Ovando, 1995] Viggiani, M. and Ovando, G. P. (1995). Principio de inducción. *Revista de Educación Matemática*, 10(1):14–27.
- [Willard, 2012] Willard, S. (2012). *General topology*. Courier Corporation.

ANEXOS

Tabla 2: Matriz de consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	VARIABLES
<p>Problema general: ¿Existen ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles?</p>	<p>Objetivo general: Mostraremos ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles.</p>	<p>Hipótesis general: Existen ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Borelianos y no Lebesgue medibles.</p>	<p>Tipo de investigación: La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.</p> <p>Diseño de la investigación: La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p> <p>Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ-álgebras que se pueden generar sobre ellos.</p> <p>Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible.</p>	<p>Variable Independiente Conjuntos en \mathbb{R}.</p> <p>Variable Dependiente Conjuntos Borelianos y conjuntos Lebesgue medible</p>
<p>Problema específico: ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos? ¿Existen conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medibles?</p>	<p>Objetivo específico: Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Mostraremos ejemplos de conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medibles</p>	<p>Hipótesis específica: Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Existen conjuntos en \mathbb{R} no Lebesgue medible</p>	<p>Método de la investigación: Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.</p> <p>Población y muestra: Población: Conjuntos en \mathbb{R}. Muestra: σ-álgebras en \mathbb{R}</p> <p>Lugar de estudio: Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, pero debido a la situación actual originado por el COVID-19 el lugar de estudio será en mi hogar.</p> <p>Técnicas e instrumentación para la recolección de información: Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés.</p>	

FUENTE: Elaboración propia