

†  
510  
B39

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



# Programación Multiobjetivo Convexa

Tesis para optar el Título Profesional de  
Licenciado en Matemática

**OSMAR ARNALDO BERMEO CARRASCO**

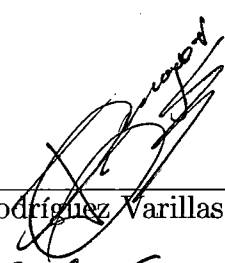
**CALLAO - PERÚ**  
**Febrero - 2010**

## HOJA DE PRESENTACIÓN

### Programación Multiobjetivo Convexa Osmar Arnaldo Bermeo Carrasco

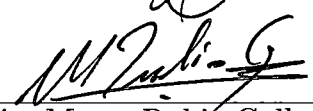
Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por



---

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas (Presidente)




---

Lic. Marco Rubio Gallarday (Vocal)



---

Lic. Elmer León Zárate (Secretario)



---

Mg. Edinson Montoro Alegre (Asesor)

CALLAO - PERÚ  
Febrero - 2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

BERMEO CARRASCO, OSMAR ARNALDO

Programación Multiobjetivo Convexa, Callao [2009].  
x, 100 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2009).

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias  
Naturales y Matemática.

Matemática.

I. UNAC / FCNM II. Título (Serie)

## **Dedicatoria**

A mis padres Samuel y Esmilda.

## AGRADECIMIENTOS

- \* Gracias a Dios, a mi familia, en particular a mis hermanos Carlos, Hugo, Yanet y a mi novia Yovana. Agradeciéndoles por su apoyo que han brindado durante mi carrera.
- \* A mi Asesor de Tesis el profesor Edison Montoro Alegre por la dedicación y dirección que me brindo en la realización de la tesis y también al profesor Carlos Vargas Trujillo quien me da la iniciativa de mi trabajo de tesis. Así mismo dar un agradecimiento, a mi amigo Edgar Saenz por su plena y permanente ayuda. Al profesor, Pascual Onofre, Erick Papa por sus sugerencias que me ayudaron a mejorar mi tesis en general a todos los profesores y amigos que me apoyaron en la realización de mi tesis.
- \* Agradezco también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas por mi formación profesional.

## RESUMEN

### Programación Multiobjetivo o Vectorial Convexa

OSMAR ARNALDO BERMEO CARRASCO

Asesor: Mg Edison Montoro Alegre.

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo de tesis investigaremos como encontrar las soluciones de un problema multiobjetivo o vectorial en espacios dimensionales finitos de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{Min}(\max) f(x) & \\ \text{s.a:} & \\ x \in S & \end{array} \quad (\text{P})$$

donde asumimos que  $S$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función vectorial dada.

Para resolver el problema (P) introducimos los conceptos básicos de optimización vectorial.

Seguidamente, presentaremos como ordenar vectores en  $\mathbb{R}^n$ , bajo la teoría de conjuntos parcialmente ordenados, donde podemos usar conos convexos para caracterizar un ordenamiento parcial, seguidamente presentaremos los conceptos de las variantes de la noción de eficiencia, débil, propia, fuerte eficiencia esencial. Las relaciones entre estos diferentes conceptos son investigados y estudiados con ejemplos sencillos.

También estudiaremos la escalarización de problemas de optimización vectorial basándose en varios conceptos de monotonía, se describen los resultados de escalarización y se investiga en detalle el enfoque de suma de pesos o ponderaciones. Daremos a conocer las condiciones de Kunh-Tuker para optimización vectorial.

En la última sección estudiaremos el Método de Mayor Pendiente Descendente para optimización multiobjetivo o vectorial.

**Palabras Claves.** Optimización vectorial, programación multiobjetivo, cono convexo, cono polar, cápsula convexa, solución eficiente, óptimo de pareto, mayor pendiente, gradiente y escalarización

# ABSTRACT

## Programming I Multitarget Convex

OSMAR ARNALDO BERMEO CARRASCO

Adviser: Mg Edison Montoro Alegre.

Obtained Degree: Mathematician

In this work of thesis we will investigate like, to find the solutions of a multiobjective or vectorial problem in dimensional finite spaces of the form

$$\begin{aligned} & \text{Min}(\max) f(x) \\ & \text{s.a:} \\ & x \in S \end{aligned} \tag{P}$$

Where we assume that  $S$  is a not empty subset of  $\mathbb{R}^n$  and  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  is a vectorial given function.

To solve the problem (P) we introduce the basic concepts of vectorial optimization.

Immediately afterwards(Continuously), we will present like to arrange vectors in  $\mathbb{R}^n$ , under the theory of sets partially tidily, where we can use convex cones for characteriazar a partial classification, immediately afterwards(continuously) we will present the concepts of the variants of the notion of efficiency, weak, own(proper), strong and eficiencia essential. The relations between (among) these different concepts are investigated and studied by examples simply.

Also we will study the escalarizacion of problems of optimazacion vectorially being based on several concepts of monotony, the results are described of escalarizacion and there are investigated in detail the approach of sum of weight or praises (deliberations, weighting). We will announce Kunh-Tuker's conditions for vectorial optimization.

In the last section we will study the method of major descending earring (slope) for optimization multiobjectively or vectorially.

**Key words:** vectorial optimization programming I multitarget, convex cone ,polar cone convex capsule ,efficient solution, ideally of pareto, major earring(slope), gradient, escalarizacion.

# Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1 Nociones de Optimización Vectorial	6
1.2 Relaciones de orden	9
1.3 Resultados de Análisis de Convexo	15
2. Conceptos de Solución en Maximización Vectorial	19
3. Método de Escalarización	34
3.1 Resultados generales	34
3.2 Enfoque de suma de pesos	41
3.3 Condiciones de Kuhn-Tucker en Programación Multiobjetivo	60
4. Método de mayor pendiente descendente	63
4.1 Definiciones Básicas	63
4.2 Método de K-mayor pendiente	74
Conclusiones	97
Bibliografía	98



# Introducción

Gran parte de los problemas del mundo real implican la optimización simultánea de varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre ellos; es decir, la mejora en uno conduce a un deterioro en el otro. La presencia de tales tipos de problemas es tan significativa, que consume gran parte de nuestro tiempo cotidiano en tomar una decisión. Se trata por ejemplo, de escoger el medio ideal para llegar al trabajo, establecer el orden de nuestras tareas, elegir el restaurante para el almuerzo, hacer las compras en el supermercado, preparar la cena y la distribución de actividades en el tiempo de ocio restante. También es el mismo tipo de problemas que enfrentan los ingenieros, economistas y técnicos a la hora de diseñar e implementar sistemas de todo tipo: existen múltiples objetivos a cumplir y se espera lograrlos todos en la medida de lo posible. Aunque la mayoría de los problemas de decisión involucran este tipo de situaciones, las propuestas computacionales de automatización que se han presentado para resolverlos habitualmente se limitan a convertir el problema de objetivos múltiples en uno en que existe un solo objetivo.

Esta reducción es debida a los modelos matemáticos empleados y puede realizarse de varias maneras, por ejemplo se prioriza uno de los objetivos y los demás se colocan como restricciones, o también se genera un objetivo compuesto otorgando pesos a los objetivos en juego y armando una suma ponderada de los mismos. De todos modos, ninguna de

estas reducciones refleja fielmente al problema y, por tanto, tampoco otorga soluciones completamente satisfactorias.

Se pone como ejemplo el problema de la compra de un automóvil. El comprador desea un automóvil óptimo y por tanto no puede preocuparse solamente en minimizar el precio del auto, ya que también le interesan otros factores. Si se tratase de un problema de objetivo único, se conformaría con llamar a todos los distribuidores y hacer una lista de precios (sin considerar marcas, modelos, tamaño, confort, etc.) y escogería el automóvil de menor precio sin mayores complicaciones. Sin dudas, el modelo matemático que está empleando en su búsqueda ¡no es el más apropiado! Por ende, los resultados tampoco son satisfactorios, y por ahorrarse unos pesos inicialmente, el comprador acaba gastando todos sus ahorros en combustible y costos de mantenimiento. Sin embargo, el estado actual de la ciencia podría generar mejores resultados ya que existen modelos matemáticos que se ajustan mejor a la naturaleza de éstos problemas. Tales modelos provienen de un área de la Investigación de Operaciones conocida como optimización con objetivos múltiples o multiobjetivo.

En los problemas de optimización de un solo objetivo (SOPs, del inglés Single Objective Problem) el resultado óptimo deseado está claramente definido. Partiendo del ejemplo anterior el objetivo sería minimizar precio del automóvil, y el resultado sería el automóvil con menor precio. Sin embargo, esta condición no se cumple para los problemas de optimización multiobjetivo (MOPs, por sus siglas en inglés: Multiobjective Optimization Problem) donde, en vez de un único óptimo, contamos con todo un conjunto de soluciones de compromiso.

Para evidenciar este hecho se vuelve al ejemplo del problema de la compra de un automóvil. El comprador tiene varios objetivos que desearía alcanzar, pero también múltiples restricciones. En cuanto a objetivos podríamos mencionar, minimizar el costo del automóvil, la cantidad de combustible consumida en una distancia dada, los gastos de mantenimiento implicados, etc. Además, deseará maximizar el confort, el espacio, la

confiabilidad.

La seguridad, tiempo transcurrido entre mantenimientos, costos de reventa, etc. Cuando se plantean las restricciones descubrimos que este comprador cuenta con un presupuesto limitado, desea un vehículo fabricado en la región y confía más en algunas marcas que en otras. Los conflictos que surgen entre los objetivos mencionados son obvios e inmediatamente -considerando la propia experiencia- surgen posibles soluciones. Así tenemos el automóvil que tiene el menor precio, pero está bastante alejado de los objetivos relacionados al confort, la seguridad y la confiabilidad. También tenemos el de costo superior a los demás pero con óptimas características, aunque amplio consumo de combustible. Así podemos citar numerosos ejemplos. Entre éstos se encuentran los automóviles promedio, que cumplen con las restricciones dadas y que implican una solución de compromiso entre todos los factores en juego. Entre ellos no se puede decir que alguno sea mejor, ya que al alterar un factor para mejorarlo, estamos empeorando otro. Así, en un problema de optimización multiobjetivo cotidiano, resulta evidente la existencia de múltiples soluciones y la imposibilidad de decidir cuál de ellas es mejor si se consideran todos los objetivos al mismo tiempo. En el caso del comprador, para realizar su elección deberá necesariamente contar con algún criterio, posiblemente de índole subjetiva, que le permita optar por una u otra alternativa.

Se dice que las soluciones de un problema con objetivos múltiples son óptimas porque ninguna otra solución, en todo el espacio de búsqueda, es superior a ellas cuando se tienen en cuenta todos los objetivos al mismo tiempo, i.e. ningún objetivo puede mejorarse sin degradar a los demás.

Para ilustrar mejor la idea ponemos un ejemplo de un problema de ingeniería estructural en esta tesis. A continuación haremos una reseña histórica de la optimización multiobjetivo el primer tratado de un problema de optimización multiobjetivo fue dado por el economista político F.Y .Edgeworth (1845- 1926) en su obra *Mathematical Psychics* (1881) . otro economista Wilfredo Pareto (1848-1923) , en su obra *manuale de economía*

política (1896), extendió la teoría y proporciono condiciones necesarias para lo que hoy denominamos óptimo de Pareto .El concepto de multicriterio también fue tratado por otros autores en el marco de la teoría de juegos , es el caso de Borel en los años 20 , de Von Neumann o de la obra clásica de éste último y Morgenstern theory of games and Economic Behavior (1943) sin embargo el primer tratamiento matemático formal de un problema de optimización vectorial en espacios de dimensión finita se encuentra incluido en el célebre trabajo de programación no lineal de Kuhn y Tucker (1951) , y el primero de los casos vectoriales fue dado por otro economista L .Hurwicz en 1958 .

El primer resultado sobre condiciones de optimalidad, para un programa multiobjetivo Pareto con restricciones de desigualdad fue dado por Kuhn y Tucker utilizando el lema de Farkas . Es obligado decir que este resultado ya había sido establecido por Karush , en 1939 , en su tesis doctoral bajo la dirección Graves . La razón de la falta de difusión es que ,en aquel momento , el centro de interés era el cálculo de variaciones y no se podía prever el potencial de aplicaciones que tendría .Sin embargo , el trabajo de Kuhn y Tucker tuvo un gran impacto ya que se publicó después del desarrollo por Dantzig del algoritmo simplex lo que había despertado gran interés por los programas con restricciones de desigualdad.

Dado la referencia anteriores donde Kuhn y Tucker ya proporcionaron resultados sobre la programación multiobjetivo también destacó otro trabajo crucial el libro de Charnes y Cooper (1961) y desde entonces puede decirse que empezó la importancia y auge de la optimización multiobjetivo con trabajos como Zeleny (1974) Thibiez y Zionts (1976), Ignizio (1976), Cohon (1978) Zionts (1978). Durante la década de los 80 se produce la gran explosión dando lugar a grandes clásicos dentro de la materia, como los trabajos de Zeleny (1982), Yu (1985), Ignizio (1982 y 1985), Ríos y Ríos-Insua (1989), etc. La larga lista de aportación en este campo se completa con la aparición de los últimos trabajos importantes como los de Carlos Romero (1991 y 1993), Ríos-Insua (1990), Vincke (1992), Jahn (1991), Miettnien K.M (1999), Jahn J (2004) y Ehrgott. M (2005). Desde los

puntos de vista de los tipos de problemas a resolver hay que destacar que una gran parte de la biografía citada hace énfasis en los problemas multiobjetivos lineales. El trabajo que presentamos se centra en el caso convexo por ser éste el que presenta mejores propiedades tanto del punto de vista teórico como para la obtención en la práctica. Así el problema que estudiaremos en general será

$$\text{Min(max)} f(x)$$

s.a:

$$x \in X$$

Este trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el capítulo 1, presentamos algunos ejemplos y nociones de optimización vectorial las relaciones de orden en  $R^n$  y los resultados del análisis convexo.

En el capítulo 2 estudiaremos los conceptos de solución en maximización vectorial y ejemplos de aplicación.

En el capítulo 3 desarrollaremos el Método de Escalarización para el problema de optimización vectorial, así como algunas caracterizaciones usando los conceptos de monotonía también estudiaremos el enfoque de suma de pesos o ponderaciones y las condiciones de Kuhn-Tucker en programación multiobjetivo.

En el capítulo 4 presentaremos el Método de Mayor Pendiente Descendente, donde hacemos énfasis a la regla de armijo el cono polar positivo y algunos conceptos de análisis convexo. Para concluir con dos algoritmos generados por el método.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Nociones de Optimización Vectorial

Los problemas de optimización vectorial, es decir con múltiples criterios aparecen con mucha frecuencia en economía, ingeniería, matemática aplicada y en la física por citar algunos de ellos. A continuación, como un ejemplo didáctico discutiremos un problema de ingeniería estructural:

#### Ejemplo 1.1.

Consideremos el diseño de una viga con una sección rectangular y una longitud dada  $l$  (ver Figura 1.1 y 1.2). La altura  $x_1$  y el ancho  $x_2$  tiene que ser determinado.

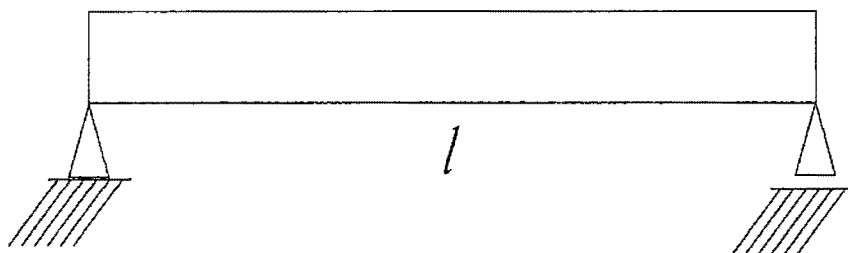


Figura 1.1

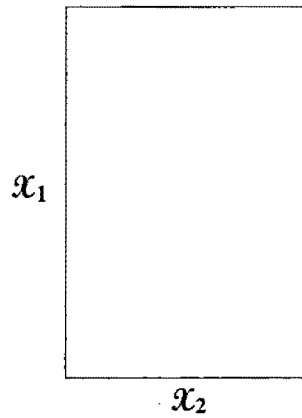


Figura 1.2

Las variables de diseño  $x_1$  y  $x_2$  tienen que ser elegidas en un área que tenga sentido en la práctica. Ciertas condiciones de tensión deben satisfacerse, es decir, las tensiones presentes deben ejercer una tensión factible. Esto conduce a la desigualdad

$$2000 \leq x_1^2 x_2$$

Además debe garantizarse cierta condición de tensión, con el fin de evitar una viga demasiado delgada requerimos

$$x_1 \leq 4x_2, \quad x_2 \leq x_1$$

Finalmente, las variables de diseño deberían ser no negativas lo cual significa

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

De entre todos los valores factibles para  $x_1$  y  $x_2$  estamos interesados en aquellos que conduzcan a una construcción ligera y barata. En lugar del peso podemos también tomar el volúmen de la viga dado por  $l$ ,  $x_1$  y  $x_2$  como un posible criterio (donde asumimos que el material es homogéneo), como una medida para los costos tomamos el área seccional de un tronco del cual una viga de altura  $x_1$  y ancho  $x_2$  pueda ser cortada.

Por simplicidad este tronco es asumido para ser un cilindro. El área seccional esta dada por  $\frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2)$  (ver Figura. 1.3).

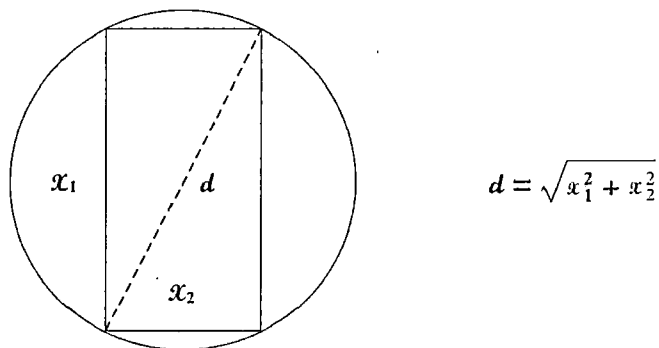


Figura 1.3

De aquí, obtenemos un problema de optimización vectorial de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \max \quad & \left\{ \begin{array}{l} -lx_1x_2 = V \\ -\frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2) = A \end{array} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & 2000 - x_1^2x_2 \leq 0 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

En éste capítulo investigamos problemas de optimización vectorial en espacios dimensionales finitos de la forma general

$$\text{"max"}_{x \in S} f(x) \tag{1.1}$$

Asumimos que  $S$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) es una función vectorial dada.

En el caso de  $m = 1$  este programa reduce a un problema de optimización standard con una función escalar  $f$ .



Desde que  $f$  es una función vectorial se habla de problema de optimización vectorial también llamado problema de optimización multi-objetivo. El conjunto  $S$  es llamado conjunto de restricción y la función vectorial  $f$  es llamada función objetivo. De hecho no tiene importancia si investigamos problemas de maximización o minimización. En este capítulo consideraremos solamente problemas de maximización vectorial.

La maximización de una función real  $f$  significa que buscamos el máximo valor de todos los valores de la función  $f(x)$  con  $x \in S$ . En el caso de evaluación vectorial tenemos que aclarar en que sentido maximizamos vectores  $f(x) \in \mathbb{R}^m$  con  $x \in S$  (ver fig. 1.4). La importante pregunta de cómo ordenar vectores en  $\mathbb{R}^m$  es investigada en la siguiente sección.

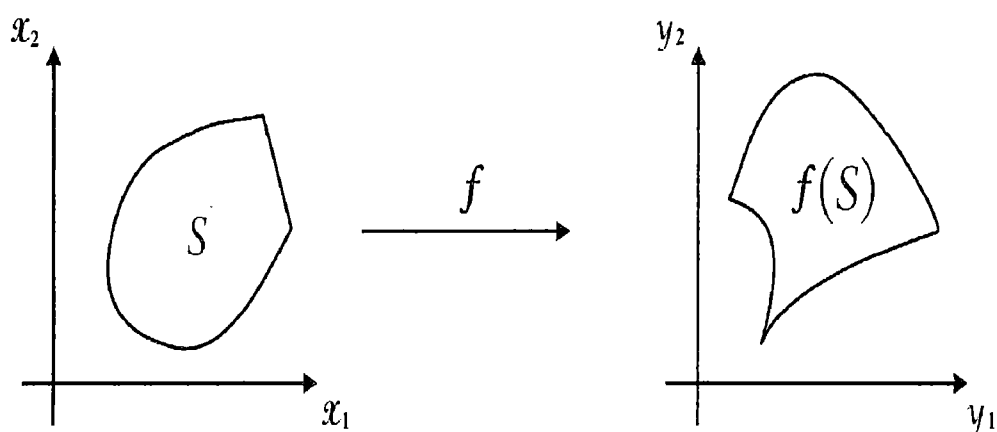


Figura 1.4

## 1.2 Relaciones de orden

La teoría matemática de conjuntos parcialmente ordenados, proporciona la herramienta fundamental para la pregunta sobre cómo ordenar vectores en  $\mathbb{R}^m$ . Un ordenamiento parcial en  $\mathbb{R}^m$  es definido como sigue.

**Definición 1.1.**

- (a) Todo subconjunto no vacío  $\mathcal{R}$  del espacio producto  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  es llamado una relación binaria  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathbb{R}^m$  (se escribe  $x\mathcal{R}y$  para  $(x, y) \in \mathcal{R}$ ).
- (b) Toda relación binaria  $\leq$  sobre  $\mathbb{R}^m$  es llamada un ordenamiento parcial sobre  $\mathbb{R}^m$ , si para vectores arbitrarios  $w, x, y, z \in \mathbb{R}^m$  se cumple las siguientes propiedades
- (i)  $x \leq x$  (reflexiva)
  - (ii)  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ . (transitiva)
  - (iii)  $x \leq y, w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z$ . (compatibilidad con la adición)
  - (iv)  $x \leq y, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$ . (compatibilidad con la multiplicación escalar)
- (c) Un ordenamiento parcial  $\leq$  sobre  $\mathbb{R}^m$  es llamado antisimétrico, si para vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}^m$  se tiene

$$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y.$$

En el caso en que el espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$  es dotado de un ordenamiento parcial diremos que es un *espacio vectorial parcialmente ordenado*.

**Ejemplo 1.2.** Definamos el ordenamiento parcial denotado  $\leq_m$  sobre  $\mathbb{R}^m$  por

$$\leq_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m / x_i \leq y_i \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Así,  $\mathbb{R}^m$  es un espacio vectorial parcialmente ordenado.

Nótese que dos elementos arbitrarios de un espacio vectorial parcialmente ordenado no siempre pueden ser comparados con respecto al ordenamiento parcial. Por ejemplo, el vector  $(1, 2)$  no es ni más grande ni más pequeño que el vector  $(2, 1)$  con respecto al ordenamiento parcial dado en el Ejemplo 1.1.

La siguiente definición muestra que también es posible introducir un ordenamiento completo sobre  $\mathbb{R}^m$  permitiendo comparar vectores arbitrarios.

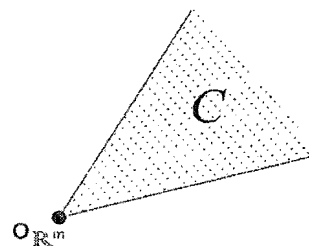
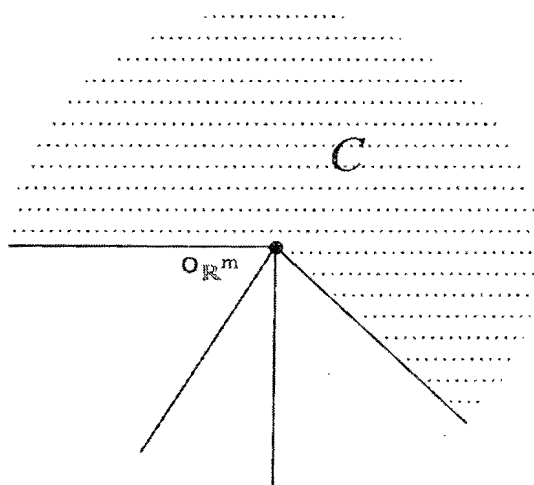
**Definición 1.2.** *Un vector  $x \in \mathbb{R}^m$  es llamado lexicográficamente mas grande que un vector  $y \in \mathbb{R}^m$ , si  $x \neq y$  y el primer componente de  $x - y$  es positivo distinto de cero.*

Es obvio que para vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}^m$  la siguiente afirmación cumple: o  $x = y$  o  $x$  es lexicográficamente mas grande que  $y$  o  $y$  es lexicográficamente mas grande que  $x$ . Por ejemplo, el vector  $(2, 1)$  es lexicográficamente más grande que  $(1, 2)$ .

A partir de que tenemos un ordenamiento parcial sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$ , no es necesario trabajar con la estructura algebraica de la Definición 1.1 pero podemos usar conos convexos caracterizando un ordenamiento parcial.

**Definición 1.3.** *Sea  $C$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^m$ . Diremos que*

- (a)  *$C$  es un cono, si dados  $x \in C$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\lambda x \in C$  (ver figura 1.5).*
- (b) *Un cono  $C$  es llamado puntiagudo, si dados  $x \in C$  y  $-x \in C$ , entonces  $x = 0_{\mathbb{R}^m}$  (ver figura 1.6).*



Figuras 1.5 y 1.6. Cono y cono puntiagudo.

**Ejemplo 1.3.** El conjunto

$$\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m / x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

es un cono puntiagudo.

**Definición 1.4.** Un conjunto  $T \subset \mathbb{R}^m$  es llamado convexo si para cada  $x, y \in T$ , entonces

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in T, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

(ver Figura 1.7 y 1.8)

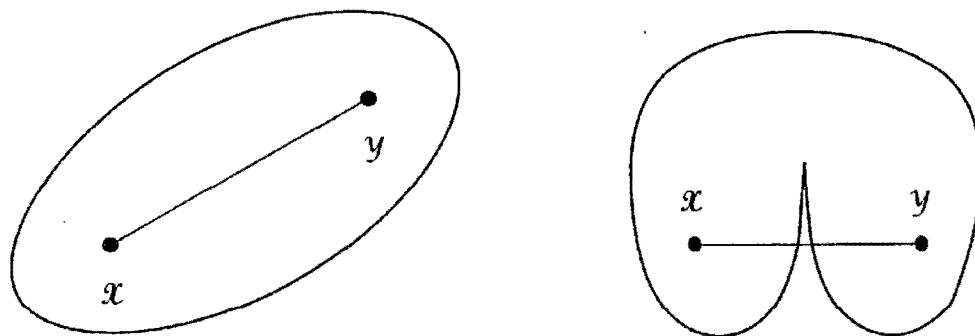


Figura 1.7 y 1.8 conjunto convexo , conjunto no-convexo

Si  $T$  es un cono, entonces la convexidad es simplemente caracterizada por el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** Un cono  $C \subset \mathbb{R}^m$  es convexo si y sólo si  $x + y \in C$ , para todo  $x, y \in C$ .

**Demostración.**

(a) Como  $C$  es un cono convexo, se sigue que para todo  $x, y \in C$

$$\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$$

luego por ser  $C$  cono , para  $\lambda = 2, 2\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \in C$

lo cual implica que  $x + y \in C$ .

(b) Sean vectores arbitrarios  $x, y \in C$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , por la Definición 1.3 (a) tenemos  $\lambda x \in C$  y  $(1 - \lambda)y \in C$ , y luego, por hipótesis concluimos que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C,$$

i.e., el cono  $C$  es convexo. ■

Ahora llegamos a una relación central entre un orden parcial y un cono convexo.

### **Teorema 1.2.**

(a) Si  $\leq$  es un ordenamiento parcial sobre  $\mathbb{R}^m$ , entonces el conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m / 0_{\mathbb{R}^m} \leq x\}$$

es un cono convexo. Además si el ordenamiento parcial es antisimétrico, entonces  $C$  es puntiagudo.

(b) Si  $C$  es cono convexo en  $\mathbb{R}^m$ , entonces la relación binaria

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m / y - x \in C\},$$

es un ordenamiento parcial en  $\mathbb{R}^m$ . Además si  $C$  es puntiagudo, entonces el ordenamiento parcial  $\leq$  es antisimétrica.

### **Demostración.**

**Prueba de (a).** Desde que el ordenamiento parcial  $\leq$  es compatible con la multiplicación escalar, es evidente que  $C$  es un cono. Ahora, tomando vectores arbitrarios  $x, y \in C$ , se sigue que  $0_{\mathbb{R}^m} \leq x$  y  $0_{\mathbb{R}^m} \leq y$ , y usando la Definición 1.1 (b) obtenemos  $0_{\mathbb{R}^m} \leq x + y$ , lo cual significa que  $x + y \in C$ . Entonces usando el Teorema 1.1, concluimos que  $C$  es

convexo. Luego al asumir que  $x \in C$  y  $-x \in C$ , esto implica que  $0_{\mathbb{R}^m} \leq x$  y  $x \leq 0_{\mathbb{R}^m}$ , y por la definicion de antisimetría de  $\leq$  tenemos que  $x = 0_{\mathbb{R}^m}$ . Así,  $C$  es puntiagudo.

**Prueba de (b)** Desde que  $0_{\mathbb{R}^m}$  esta siempre contenido en un cono, la relación binaria  $\leq$  es reflexiva. Para  $x \leq y$  y  $y \leq z$  ( $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ ) tenemos  $y - x \in C$  y  $z - y \in C$ . La convexidad de  $C$  implica que  $z - x \in C$  o  $x \leq z$ . Esto muestra la transitividad de  $\leq$ , para  $x, y, w, z \in \mathbb{R}^m$  arbitrarios con  $x \leq y$  y  $w \leq z$ , tenemos que  $y - x \in C$  y  $z - w \in C$  y a causa de la convexidad concluimos que  $(y + z) - (x + w) \in C$ , i.e.  $x + w \leq y + z$ . Así, la relación binaria  $\leq$  es compatible con la adición. Para la prueba de la compatibilidad con la multiplicación escalar tomamos  $x, y \in \mathbb{R}^m$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  con  $x \leq y$ . Luego  $y - x \in C$ , y a causa de que  $C$  es un cono, concluimos que  $\alpha y - \alpha x \in C$ . Finalmente, asumimos que el cono  $C$  es puntiagudo y toma todo  $x, y \in \mathbb{R}^m$  con  $x \leq y$  y  $y \leq x$ . Entonces  $y - x \in C$  y  $-(y - x) \in C$  implicando que  $y - x = 0_{\mathbb{R}^m}$  o  $x = y$ . Consecuentemente, el ordenamiento parcial  $\leq$  es antisimétrico.

**Definición 1.5.** un cono convexo que caracteriza el ordenamiento parcial sobre  $\mathbb{R}^m$  es llamado un cono de ordenamiento .(o tambien un cono positivo)

**Ejemplo 1.3.**

(a).Para el ordenamiento parcial de componentes dado en el ejemplo 1.1 dan al cono de ordenamiento en ejemplo 1.2

(b).Elcono de ordenado

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 = 0\},$$

induce el ordenamiento parcial  $\leq_C$  con

$$x \leq_C y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ y } x_2 = y_2.$$

En lo sucesivo denotamos al ordenamiento parcial inducido por un cono ordenado  $C \subset \mathbb{R}^m$  por  $\leq_C$ , y asumiremos que el cono ordenado es puntiagudo implicando que el ordenamiento parcial inducido  $\leq_C$  es antisimétrico.

## 1.3 Resultados del Análisis Convexo

**Definición 1.6.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Diremos que la función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en  $C$  si,

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

**Proposición 1.1. (Convexidad de suma de funciones convexas)** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y las funciones convexas  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i = 1, \dots, p$ . Entonces para cualquier  $t_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, m$ , la función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^m t_i f_i(x),$$

es convexa en  $C$ .

**Demostración.** Sean  $x, y \in C$  y  $\alpha \in [0, 1]$ . Por la definición de  $f$  tenemos que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \sum_{i=1}^m t_i f_i(\alpha x + (1 - \alpha)y)$$

donde  $t_i \geq 0$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Entonces usando el hecho de que las funciones  $f_i$  son convexas en  $C$ , tenemos que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \sum_{i=1}^m t_i (\alpha f_i(x) + (1 - \alpha) f_i(y))$$

Pero

$$\sum_{i=1}^m t_i (\alpha f_i(x) + (1 - \alpha) f_i(y)) = \alpha \sum_{i=1}^m t_i f_i(x) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m t_i f_i(y)$$

Así,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

i.e.,  $f$  es convexa en  $C$ .

**Lema 1.1. (Lema de Minkowski)** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Si  $x \notin cl(D)$ , entonces existen  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle a, x \rangle = c, \quad \langle a, y \rangle > c, \quad \forall y \in D.$$

**Demostración.** Ver [11].

**Lema 1.2.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Si  $x \in fr(D)$ , entonces existen  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle a, x \rangle = c, \quad \langle a, y \rangle > c, \quad \forall y \in D.$$

**Demostración.** Ver [11].

**Teorema 1.3.** Sea  $S$  un conjunto convexo cerrado no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y  $y \notin S$ . Entonces existen un vector  $p$  no nulo y un escalar  $\alpha$  tal que  $p^t y < \alpha$  y  $p^t x \geq \alpha$  para cada  $x \in S$ .

**Demostración.** Ver [1].

**Teorema 1.4. (Teorema de separación)** Sean  $C_1$  y  $C_2$  conjuntos convexos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $intC_1 \cap intC_2 = \emptyset$ . Entonces existen  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle a, x^1 \rangle \leq \alpha \leq \langle a, x^2 \rangle, \quad \forall x^1 \in C_1, \quad \forall x^2 \in C_2.$$

**Demostración.** Es claro que el conjunto  $C = C_2 - C_1$  es convexo y no vacío, puesto que  $C_1$  y  $C_2$  son convexos con  $intC_1 \cap intC_2 = \emptyset$ . Ahora hay dos posibilidades: ó  $0 \notin cl(C)$ , ó  $0 \in fr(C)$  para separar  $0$  del conjunto  $C$  en el primer caso usaremos el Lema 1.1 y en



el segundo caso usamos el Lema 1.2, concluimos que existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que

$$\langle a, x \rangle \geq 0, \forall x \in C,$$

i.e.,

$$\langle a, x^2 - x^1 \rangle \geq 0 \text{ para todo } x^2 \in C_2, x^1 \in C_1.$$

De aquí

$$\langle a, x^2 \rangle \geq \langle a, x^1 \rangle, \forall x^2 \in C_2, \forall x^1 \in C_1.$$

En particular, la función  $\langle a, \cdot \rangle$  es limitada inferiormente en  $C_2$  y limitada superiormente en  $C_1$ . Además de la relación de arriba obtenemos que

$$y_2 = \inf_{x^2 \in C_2} \langle a, x^2 \rangle \geq \sup_{x^1 \in C_1} \langle a, x^1 \rangle = y_1.$$

Definimos  $\alpha = (y_1 + y_2)/2$  tomemos que  $y_2 \geq \alpha \geq y_1$ ,

$$\forall x^1 \in C_1, \langle a, x^1 \rangle \leq \sup_{x^1 \in C_1} \langle a, x^1 \rangle = y_1 \leq C:$$

$$\forall x^2 \in C_2, \langle a, x^2 \rangle \leq \inf_{x^2 \in C_2} \langle a, x^2 \rangle = y_2 \leq C \blacksquare.$$

En el caso en que la estructura de ordenación en  $\mathbb{R}^m$  venga dada por el cono constante  $\mathbb{R}_+^m$  (ortante positivo) el concepto de eficiencia da lugar al de Optimalidad de Pareto, el más usado dentro de la Programación Multiobjetivo. Esto nos motiva, a dar la siguiente definición

**Definición 1.7. (De Optimalidad de Pareto).** *Un punto  $\bar{x} \in X$  se dice que es un óptimo Pareto del problema (1.1) si no existe ningún  $x \in X$  tal que*

$$f(\bar{x}) \neq f(x) \text{ y } f(\bar{x}) \in f(x) - \mathbb{R}_+^m$$

*o, dicho de otra forma, si no existe un  $x \in X$ , tal que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$ . Expresado por componentes,  $x \in X$  será un óptimo Pareto del problema (1.1), si no existe ningún  $x \in X$ , tal que*

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) &\leq f_i(x), \forall i \in \{1, \dots, p\} \\ f_s(\bar{x}) &< f_s(x), \forall s \in \{1, \dots, p\} \end{aligned}$$

Dicho de otra forma,  $\bar{x}$  es un óptimo de Pareto de (1.1) si y sólo si, para cada  $x \in X$  tal que  $f_s(\bar{x}) < f_s(x)$ , para algún  $s \in \{1, \dots, p\}$ , existe entonces un  $r \in \{1, \dots, p\}$  tal que  $f_r(x) < f_r(\bar{x})$ . Esta visión emana del concepto de optimalidad dado por el economista italiano Wilfredo Pareto en 1896. Según éste, una colectividad se encuentra en su estado óptimo si ningún individuo puede mejorar su situación sin que empeore la de otro.

# Capítulo 2

## Conceptos de Solución en Maximización Vectorial

Consideremos el problema de optimización vectorial (1.1) con  $\phi \neq S \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ahora asumimos que el espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$  está parcialmente ordenado por una relación binaria  $\leq_C$  inducida por un cono ordenado puntiagudo  $C$ . Esta es la suposición habitual para esta sección.

**Definición 2.1.** Sea  $T$  un subconjunto arbitrario no vacío de  $\mathbb{R}^m$ . Se dice que

(a)  $\bar{y} \in T$  es un elemento maximal de  $T$ , si

*no existe  $y \in T$  con  $y \neq \bar{y}$  y  $\bar{y} \leq_C y$ .*

(b)  $\bar{y} \in T$  es un elemento minimal de  $T$ , si

*no existe  $y \in T$  con  $y \neq \bar{y}$  y  $y \leq_C \bar{y}$ .*

Ver figura 2.1.

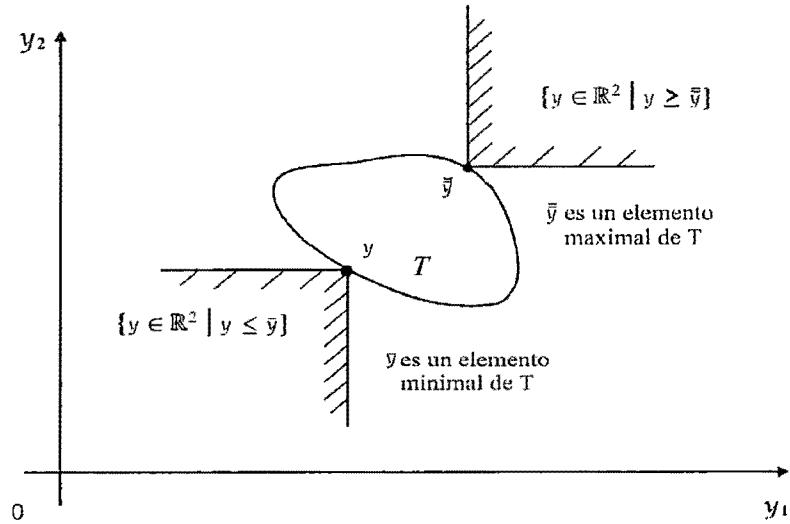


Figura 2.1 Elementos maximal y minimal de  $T$  con respecto a  $C=\mathbb{R}$

**Ejemplo 2.1.** Considerando el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$

$$T = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$$

y asumiendo que  $C = \mathbb{R}_+^2$ , el conjunto de todos los elementos maximales de  $T$  esta dado por

$$\left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \in [0, 1] , y_2 = \sqrt{1 - y_1^2} \right\},$$

y el conjunto de todos los elementos minimales de  $T$  puede ser escrito como

$$\left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \in [-1, 0] , y_2 = -\sqrt{1 - y_1^2} \right\}.$$

En la práctica los elementos maximales de  $T = f(S)$  no desempeñan el rol central sino sus preimagenes.

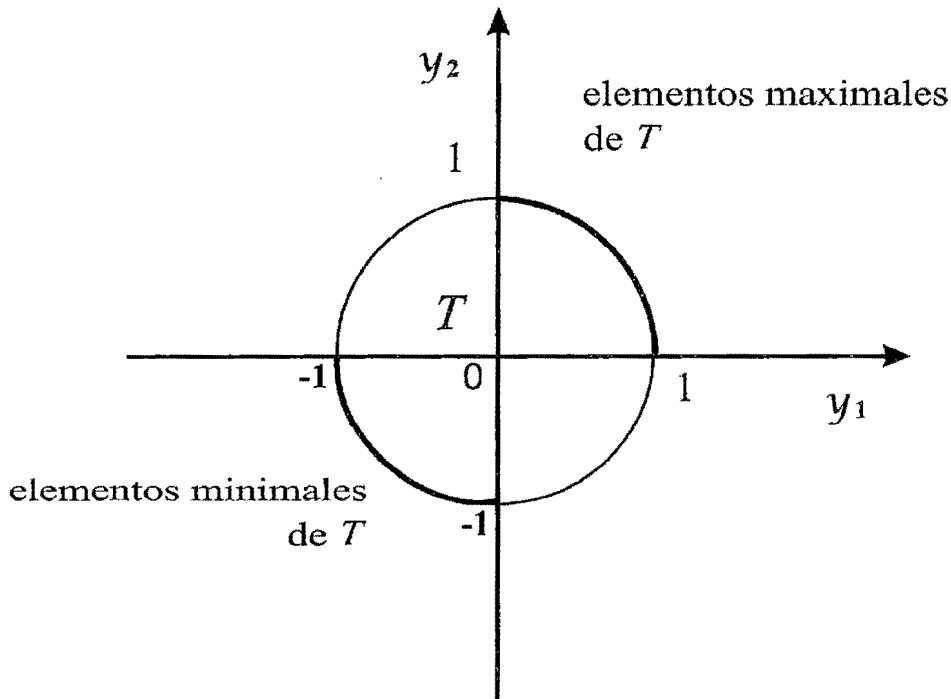


Figura 2.2

**Definición 2.2.** Diremos que  $\bar{x} \in S$  es una solución eficiente (o un punto óptimo edgeworth pareto o una solución maximal o un punto no dominado) del problema (1.1) si  $f(\bar{x})$  es un elemento maximal del conjunto imagen  $f(S)$ .

La noción de soluciones eficientes usadas en economía, mientras que la noción "Edgeworth - pareto óptimo" se pueden encontrar en ingeniería y en las matemáticas aplicadas se llaman soluciones maximales. El concepto de eficiencia ha sido introducido por Koopmans.

**Ejemplo 2.2.** Considerar el conjunto de restricción

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 - x_2 \leq 0, x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0\},$$

y la función vectorial  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  con

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2^2 \end{pmatrix}, \forall (x_1, x_2) \in S.$$

Suponinedo que  $C = R_+^2$ , calcularemos el conjunto de todos los elementos maximales de  $f(S)$ . Sea  $x_2 = x_1^2$  y  $-\frac{3}{2} \leq x_1 \leq 1$ , entonces

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_1^2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ w(y_1) \end{pmatrix}$$

donde  $w(y_1) = -y_1 - y_1^4$ . De la misma manera, si  $x_2 = \frac{3-x_1}{2}$  se sigue que

$$f(x_1, x_2) = f\left(x_1, \frac{3-x_1}{2}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ R(y_1) \end{pmatrix},$$

donde

$$R(y_1) = -\frac{1}{2} [y_1^2 - 4y_1 + 9] = -\frac{1}{2} [(y_1 - 2)^2 + 5]$$

Ahora encontremos el máximo de  $w$ , usando el criterio de la segunda derivada.

$$w'(y_1) = -1 - 4y_1^3 = 0,$$

entonces

$$y_1 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Luego

$$w''(y_1)|_{y_1 = -\sqrt[3]{2}/2} = (-12y_1^2)|_{y_1 = -\sqrt[3]{2}/2} = -3\sqrt[3]{4} < 0.$$

Entonces el conjunto maximal esta dado

$$\left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \in \left[-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, 1\right], y_2 = y_1 - y_1^4 \right\} \subset f(S)$$

y el conjunto de soluciones eficientes sera

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], x_2 = x_1^2 \right\}$$

(ver fig. 2.3).

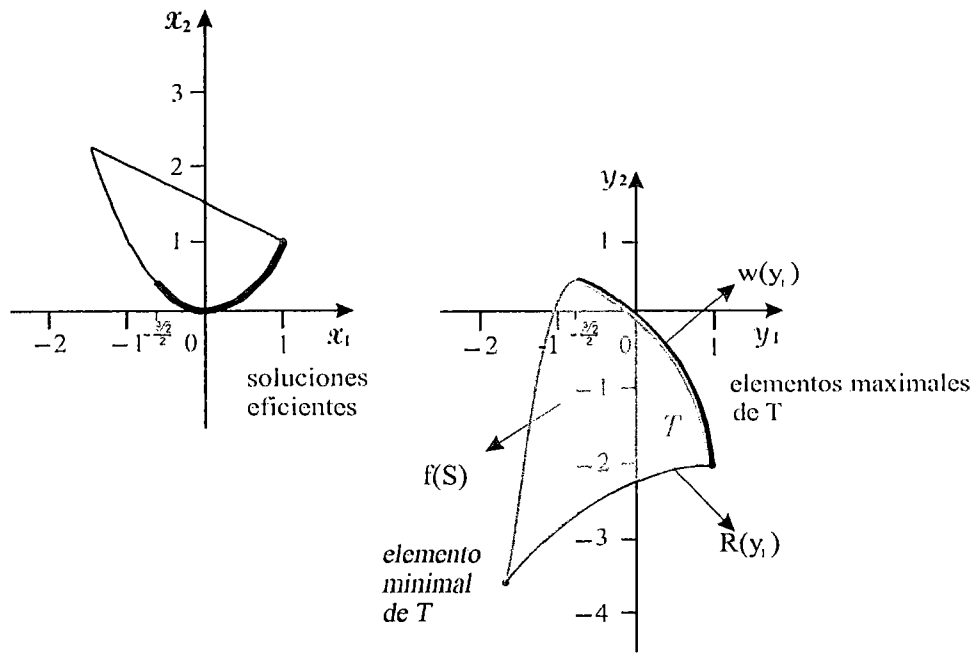


Figura 2.3

El concepto de eficiencia es la principal noción de optimalidad empleada en la optimización vectorial, pero hay también otros conceptos que son más débilmente o más fuertemente formulados. Primero presentamos una noción de optimalidad más débil.

**Definición 2.3** *Sea el cono ordenado puntiagudo  $C$  que tiene un interior no vacío  $\text{int}(C)$ . Diremos que  $\bar{x} \in S$  es una solución débilmente eficiente (o un punto débilmente óptimo de edgeworth-pareto, o una solución débilmente maximal) del problema (1.1), si hay un  $x \in S$  con*

$$f(x) - f(\bar{x}) \in \text{int}(C).$$

Esta noción de eficiencia débil es con frecuencia solamente empleada si es difícil representar teóricamente las soluciones eficientes o determinarlas numéricamente. En general, en las aplicaciones uno no se interesa en las soluciones débilmente eficientes; esta noción de optimalidad es solamente de interés matemático.

**Ejemplo 2.3.** Consideremos el problema de optimización vectorial (1.1) con el conjunto

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

La identidad  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$  para todo  $(x_1, x_2) \in S$ , y asumimos  $C = \mathbb{R}_+^2$ ,  $S$  describe un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$ . A partir de que  $f$  es la identidad, el conjunto imagen  $f(S)$  equivale a  $S$ . El punto  $(1,1)$  es la única solución eficiente, además el conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in S / x_1 = 1 \text{ o } x_2 = 1\},$$

es el conjunto de todas las soluciones débilmente eficientes (ver fig. 2.4).



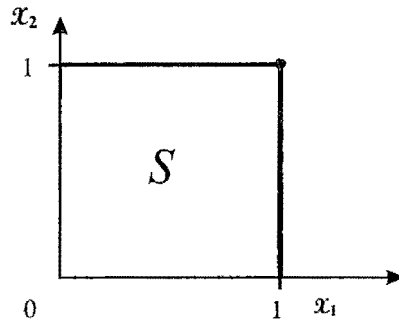


Figura 2.4

### Prueba de solución débilmente eficiente

Veamos que el punto  $(x_0, 1)$  cumple con la definición de solución débilmente eficiente. En efecto, sea  $\bar{x} = (x_0, 1)$  una solución débilmente eficiente por lo tanto no existe un  $x \in S$  tal que

$$f(\bar{x}) < f(x), \forall x \in S.$$

supongamos que lo hubiera

i e.,  $(x_0, 1) < (x, 1)$  implica que  $0 < (x - x_0, 0)$ . Luego

$$(0, 0) < (x - x_0, 0) \Leftrightarrow 0 \not< 0 \wedge 0 < x - x_0$$

Por lo tanto, las soluciones de la forma  $(x_0, 1)$  son débilmente eficientes.

Similarmente para las soluciones de la forma  $(1, y_0)$  cumple con la definición.

### Prueba de solución eficiente

Probaremos que  $(1, 1)$  cumple con la definición de solución eficiente, i.e., que no existe un  $x \neq \bar{x}$ , con  $x \in S$  tal que  $f(\bar{x}) < f(x)$ . En efecto, si

$$\bar{x} = (1, 1),$$

$$x = (x_0, 1)$$

$$\begin{aligned}
(1, 1) &\leq (x_0, 1) \\
0 &\leq (x_0, 1) - (1, 1) \\
0 &\leq (x_0 - 1, 0) \\
(0, 0) &\leq (x_0 - 1, 0) \Leftrightarrow 0 \not\leq x_0 - 1 \wedge 0 \leq 0
\end{aligned}$$

$0 \not\leq x_0 - 1$  no se cumple porque  $0 \leq x_0 \leq 1$  (contradicción), de aquí  $(1, 1)$  es solución eficiente.

En el ejemplo previo el conjunto de soluciones eficientes está contenido en el conjunto de soluciones débilmente eficientes. Este hecho se cumple en general (en el caso de  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ ) y es probado en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Sea  $C$  el cono ordenado puntiagudo que tiene un interior no vacío. Entonces toda solución eficiente del problema (1.1.) es una solución débilmente eficiente del problema (1.1.).*

**Demostración.** Si  $\bar{x} \in S$  es una solución eficiente del problema (1.1). Entonces no hay un  $x \in S$  con  $f(x) \neq f(\bar{x})$  y

$$f(\bar{x}) \leq_C f(x)$$

o equivalentemente

$$f(x) - f(\bar{x}) \in C,$$

consecuentemente, no hay tampoco un  $x \in S$  con

$$f(x) - f(\bar{x}) \in \text{int}(C).$$

Esto significa que  $\bar{x} \in S$  es una solución débilmente eficiente.

Nótese que la recíproca del Teorema 2.1 no es cierta en general (comparar el ejemplo

2.3).

**Definición 2.4.** Sea  $C = \mathbb{R}_+^n$ . Se dice que  $\bar{x} \in S$  es una solución propiamente eficiente (o punto de Edgeworth - Pareto propiamente optimal o una solución propiamente maximal) del problema (1.1), si  $\bar{x}$  es una solución eficiente y existe algún número real  $\mu > 0$ , talque para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  y cada  $x \in S$  que verifiquen  $f_i(x) > f_i(\bar{x})$  existe al menos un  $j \in \{1, \dots, m\}$  talque  $f_j(x) < f_j(\bar{x})$  y

$$\frac{f_i(x) - f_i(\bar{x})}{f_j(\bar{x}) - f_j(x)} \leq \mu,$$

una solución eficiente la cual no es propiamente eficiente es también llamada una solución impropriamente eficiente.

En las aplicaciones las soluciones impropriamente eficientes no son deseadas porque un posible arreglo de un componente conduce a un deterioro práctico de otro componente.

**Ejemplo 2.4.** Por simplicidad investigamos el problema de optimización vectorial (1.1) con el círculo unitario

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

la identidad  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  con

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in S,$$

y  $C = \mathbb{R}_+^2$  por ejemplo 2.1, el conjunto de soluciones eficientes se lee

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in [0, 1] \text{ y } x_2 = \sqrt{1 - x_1^2} \right\}$$

(Ver fig. 2.2).

Excepto los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  todas las otras soluciones eficientes son también

soluciones propiamente eficientes. A continuación mostramos que el punto  $x = (0, 1)$  es una solución impropiaamente eficiente. Para un  $n \in \mathbb{N}$  arbitrariamente consideramos el punto

$$x(n) = \left( \frac{1}{n} \sqrt{2n-1}, 1 - \frac{1}{n} \right)$$

del círculo unitario. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $f_1(x(n)) > f_1(\bar{x})$  y  $f_2(x(n)) < f_2(\bar{x})$  y concluimos

$$\frac{f_1(\bar{x}) - f_1(x(n))}{f_2(x(n)) - f_2(\bar{x})} = \frac{\bar{x}_1 - x_1(n)}{x_2(n) - \bar{x}_2} = \frac{0 - \frac{1}{n} \sqrt{2n-1}}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \sqrt{2n-1}.$$

Es obvio que una cota superior  $\mu > 0$  de este término no existe. Consecuentemente,  $\bar{x} = (0, 1)$  es una solución impropiaamente eficiente.

A continuación vayamos a una noción de optimalidad muy fuerte.

**Definición 2.5.**  $\bar{x} \in S$  es llamada una solución fuertemente eficiente (o un punto fuertemente optimal de Edgeworth Pareto o una solución fuertemente maximal) o del problema (1.1) si

$$f(x) \leq_C f(\bar{x}) \quad \forall x \in S,$$

o equivalentemente si no hay  $x \in S$  tal que  $f_i(\bar{x}) \leq f_i(x)$  para  $i = 1, \dots, m$  y para al menos un valor  $i$ ,  $f_i(\bar{x}) < f_i(x)$ .

**Ejemplo 2.5.** Consideremos el problema de optimización vectorial en el ejemplo 2.3 donde el punto  $(1, 1)$  es una solución fuertemente eficiente. Además, el problema, discutido en el ejemplo 2.4 no tiene soluciones fuertemente eficientes.

Del ejemplo 2.3 tenemos que

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\},$$

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ con } f(x_1, x_2) = (x_1, x_2); C = \mathbb{R}_+^2.$$

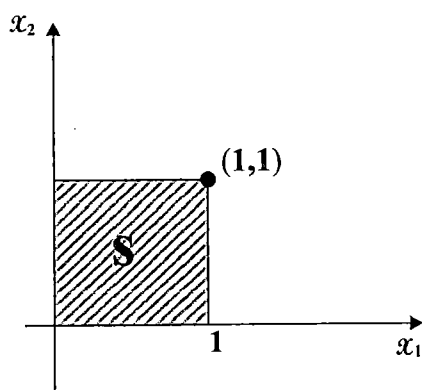


figura 2.5

Probaremos que  $\bar{x} = (1, 1)$  es una solución fuertemente eficiente, veamos que no existe un  $x \in S$ ,  $x \neq \bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$ ; si  $f$  es la identidad tenemos;  $(1, 1) \leq (x_1, x_2)$ , de aquí  $1 \leq x_1 \wedge 1 \leq x_2$  y por el conjunto de solución tenemos  $x_1 \leq 1$  y  $x_2 \leq 1$  por lo tanto la contradicción, de aquí  $(1, 1)$  es una solución fuertemente eficiente.

Del ejemplo 2.4 tenemos que

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

La identidad  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  con

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in S,$$

y  $C = \mathbb{R}_+^2$ , por lo desarrollado en el ejemplo 2.1 el conjunto de soluciones eficientes está dado por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in [0, 1] \text{ y } x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}, \}.$$

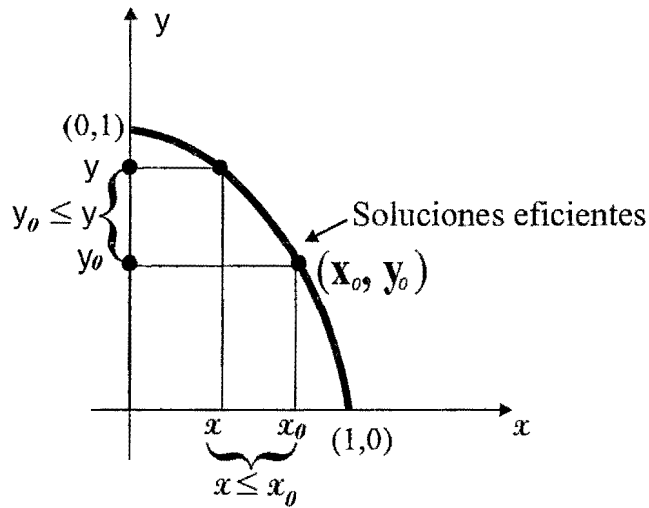


figura 2.6

Probaremos que la solución eficiente  $(x_0, y_0) \in S$  no es fuertemente eficiente, i.e., hay un  $x \in S$  tal que.

$$f(\bar{x}) \leq_c f(x), \forall x \in S.$$

Veamos,  $(x_0, y_0) \leq (x, y)$  con  $(x, y) \in S$  de aquí:

$x_0 \leq x \wedge y_0 \leq y$  variando  $x$  e  $y$ , tenemos ( ver figura 2.6 ):

(i)  $x_0 \leq x \wedge y \leq y_0$

(ii)  $x \leq x_0 \wedge y_0 \leq y$

De (i) y (ii) concluimos que la solución eficiente  $(x_0, y_0)$  no es comparable con las demás soluciones eficientes, por lo tanto el resultado.

**Teorema 2.2.** *Toda solución fuertemente eficiente es una solución eficiente.*

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in S$  una solución fuertemente eficiente, i.e.,

$$f(x) \leq_C f(\bar{x}) \forall x \in S.$$

Entonces no hay  $x \in S$  con  $f(x) \neq f(\bar{x})$  y  $f(\bar{x}) \leq_C f(x)$ . De aquí,  $\bar{x}$  es una solución

eficiente.

**Definición 2.6.**  $\bar{x} \in S$  es llamada una solución esencialmente eficiente (o un punto esencialmente optimal de Edgeworth - Pareto o una solución esencialmente maximal) del problema (1.1), si  $f(\bar{x})$  es un elemento maximal de la envoltura convexa del conjunto imagen  $f(S)$ .

A partir que el conjunto imagen  $f(S)$  esta contenido en su envoltura convexa es evidente que toda solución esencialmente eficiente  $\bar{x} \in S$  es tambien una solución eficiente. Ademas hay tambien una relación con el concepto de eficiencia fuerte.

**Definición 2.7.** Sea  $\phi \neq S \subset R^n$  y  $C$  un cono ordenado puntiagudo, definimos que un elemento  $f(\bar{x}) \in f(S)$  es llamado un elemento fuertemente maximal del conjunto  $f(S)$ , si  $f(S) \subset \{f(\bar{x})\} - C$  o  $(f(x) \leq_C f(\bar{x}) \forall x \in S)$

**Teorema 2.3.** Cada solución fuertemente eficiente es una solución esencialmente eficiente.

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in S$  una solución fuertemente eficiente entonces tenemos

$$f(x) \leq_c f(\bar{x}), \forall x \in S$$

o equivalentemente

$$f(S) \subset \{f(\bar{x})\} - C, \text{ por definición 2.7.}$$

( " denota la diferencia algebraica de conjuntos).

Si  $C$  es cono convexo entonces  $\{f(\bar{x})\} - C$  es convexo a partir de que el conjunto  $\{f(\bar{x})\} - C$  es convexo, concluimos que la envoltura convexa  $C_0(f(S))$  de  $f(S)$  es la

intersección de todos los subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^m$  conteniendo  $f(S)$ .

$$C_0(f(S)) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i / f(S) \subset A_i \text{ donde } A_i \text{ convexo}$$

$$C_0(f(S)) \subset \{f(\bar{x})\} - C$$

Luego no hay  $y \in C_0(f(S))$  con  $y \neq f(\bar{x})$  y  $f(\bar{x}) \leq_c y$  de aquí,  $f(\bar{x})$  es un elemento maximal del conjunto  $C_0(f(S))$ , i.e.  $\bar{x}$  es una solución esencialmente eficiente.

**Ejemplo 2.6.** Considerese el problema de optimización vectorial (1.1) con el conjunto de restricción discreto.

$$S = \{(0, 3), (1, 1), (3, 0)\}.$$

La identidad como función objetivo  $f$  y  $C = \mathbb{R}_+^2$  (ver fig 2.7).

Todo punto factible es una solución eficiente, pero solo los puntos  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$  son soluciones esencialmente eficientes.

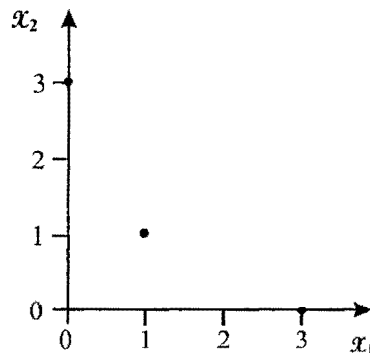


figura 2.7

Resumiendo las relaciones entre los conceptos de optimalidad presentados obtenemos el diagrama en la tabla 2.1. Notese que las implicancias inversas no son ciertas. En general



Eficiencia Fuerte



Eficiencia Esencial



Eficiencia propia  $\xRightarrow{C=\mathbb{R}_+^m}$  Eficiencia  $\xRightarrow{int(C)\neq\emptyset}$  Eficiencia débil.

tabla 2.1

# Capítulo 3

## Método de Escalarización

En general, esclarización significa la sustitución de un problema de optimización vectorial por un problema de optimización escalar apropiado, el cual es un problema de optimización con una función objetivo evaluada en los reales. Este principio hace posible que las soluciones de un problema de optimización vectorial pueda ser caracterizado y tambien resuelto usando estos problemas escalares. En economia estos problemas son tambien llamados problemas auxiliares, programas auxiliares o modelos de compromiso .

En esta sección discutimos problemas de optimización escalar los cuales pueden ser usados para esclarización y presentamos sus bases teóricas. Estas investigaciones encierran la eficiencia y los conceptos de eficiencia débil y propia.

### 3.1 Resultados generales

Para la formulación de una condición suficiente general para soluciones eficientes del problema de optimización vectorial (1.1) necesitamos conceptos de monotonía apropiados. Empleamos la misma notacion standard empleada en el capítulo 2.

**Definición 3.1.** Sea  $M$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^m$ .

(a) Una función  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada monótonamente creciente en  $M$  si

$$x, y \in M, x \leq_C y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

(b) Una función  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada fuertemente monótona creciente sobre  $M$  si

$$x, y \in M, x \neq y, x \leq_C y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y).$$

(c) Dado  $C \subset \mathbb{R}^m$  con  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ , una función  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada monótona estrictamente creciente sobre  $M$  si

$$x, y \in M, y - x \in \text{int}(C) \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y).$$

Es evidente en el caso que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$  que cada función fuertemente monótona estrictamente monótona es creciente también.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $C = \mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m / x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ .

(a) Para números reales arbitrarios  $t_1, \dots, t_m \geq 0$ , sea la función  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m t_i y_i, \forall (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces  $\varphi$  es monótona creciente sobre  $\mathbb{R}^m$ . Con el fin de ver esto, fijamos vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}^m$  con  $x \leq_{\mathbb{R}_+^m} y$ . Dado que  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  y

$$x_i \leq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

concluimos que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m t_i x_i \leq \sum_{i=1}^m t_i y_i = \varphi(y).$$

Esto completa la prueba.

- (b) Sean los números reales arbitrarios  $t_1, \dots, t_m > 0$ , y la función  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\varphi(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m t_i y_i, \quad \forall (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces  $\varphi$  es fuertemente monótona creciente sobre  $\mathbb{R}^m$ . Para la prueba de esta afirmación elegimos vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}^m$  con  $x \neq y$  y  $x \leq_{\mathbb{R}_+^m} y$ . Entonces tenemos

$$t_i x_i \leq t_i y_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

donde para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  esta desigualdad es estricta. Consecuentemente, tenemos

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m t_i x_i < \sum_{i=1}^m t_i y_i = \varphi(y).$$

- (c) En  $\mathbb{R}^m$  las normas pueden fácilmente ser estrictamente o fuertemente monótonas crecientes sobre  $M = \mathbb{R}_+^m$ . Cada norma de peso  $l_p$  con  $p \in [1, +\infty)$  es fuertemente monótona creciente sobre  $\mathbb{R}_+^m$  (y, por tanto, también estrictamente monótona creciente sobre  $\mathbb{R}_+^m$ ). Para la prueba basta tomar para un  $p \in [1, +\infty)$  y la norma de peso  $l_p$   $\|\cdot\|_p$  definida

$$\|y\|_p = \left( \sum_{i=1}^m w_i |y_i|^p \right)^{1/p}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

donde los pesos  $w_1, \dots, w_m$  son números reales positivos (ver fig. 3.1) para vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}_+^m$  con  $x \neq y$  y  $x \leq_{\mathbb{R}_+^m} y$ . se sigue

$$0 \leq x_i^p \leq y_i^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

donde la desigualdad de la derecha es estricta para al menos  $i \in \{1, \dots, m\}$ . En-

tonces concluimos que

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^m w_i |x_i|^p \right)^{1/p} < \left( \sum_{i=1}^m w_i |y_i|^p \right)^{1/p} = \|y\|_p.$$

De aquí, la norma de peso  $l_p$   $\|\cdot\|_p$  con  $p \in [1, +\infty)$  es fuertemente monótona creciente sobre  $\mathbb{R}_+^m$ .

Por otro lado la norma de peso máxima  $\|\cdot\|_\infty$  definida como.

$$\|y\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{w_i |y_i|\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m,$$

( $w_1, \dots, w_m > 0$ ) es monótona estrictamente creciente sobre  $\mathbb{R}_+^m$ . Para la prueba tomar vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}_+^m$  con  $x_i < y_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Luego, obtenemos que

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{w_i |x_i|\} < \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{w_i |y_i|\} = \|y\|_\infty.$$

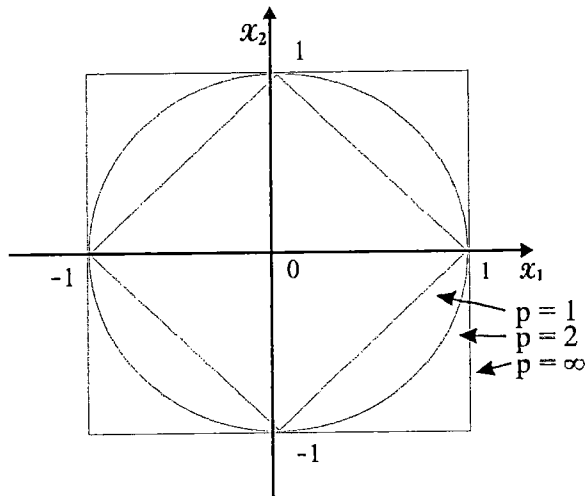


Figura 3.1

(d) Sea la función definida por  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m t_i y_i, \quad \forall (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces  $\varphi$  es monótona estrictamente creciente sobre  $\mathbb{R}^m$ . Para la prueba de esta afirmación elegimos vectores arbitrarios  $x, y \in \mathbb{R}^m$  tales que  $x_i < y_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces se sigue

$$\varphi(x) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{x_i\} < \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{y_i\} = \varphi(y).$$

El siguiente teorema proporciona un resultado de escatorización básica.

**Teorema 3.1.**

(a) Sea  $\varphi : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$  una función fuertemente monótona creciente sobre  $f(S)$ . Si hay un  $\bar{x} \in S$  con

$$\varphi(f(\bar{x})) \geq \varphi(f(x)), \quad \forall x \in S. \quad (3.1)$$

Entonces  $\bar{x}$  es una solución eficiente del problema (1.1).

(b) Sea  $\varphi : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótonamente creciente sobre  $f(S)$ . Si hay un  $\bar{x} \in S$  con

$$\varphi(f(\bar{x})) > \varphi(f(x)), \quad \forall x \in S \text{ con } f(x) \neq f(\bar{x}). \quad (3.2)$$

Entonces  $\bar{x}$  es una solución eficiente del problema (1.1).

(c) Teniendo  $C$  un interior no vacío  $\text{int}(C)$ , y siendo  $\varphi : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente monótona creciente sobre  $f(S)$  si hay un  $\bar{x} \in S$  con

$$\varphi(f(\bar{x})) \geq \varphi(f(x)), \quad \forall x \in S. \quad (3.3)$$

Entonces  $\bar{x}$  es una solución debilmente eficiente del problema (1.1).

(d) Sea  $C = \mathbb{R}_+^m$ , y  $t_1, \dots, t_m > 0$  números reales dados si hay un  $\bar{x} \in S$  con

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S. \quad (3.4)$$

Entonces  $\bar{x}$  es una solución propiamente eficiente del problema (1.1).

**Demostración.**

En los dos primeros casos asumimos que  $\bar{x}$  no es solución eficiente. Entonces hay un  $x \in S$ , con

$$f(\bar{x}) \leq_c f(x) \text{ y } f(x) \neq f(\bar{x}).$$

**Prueba de (a).** Aplicando la definición de función fuertemente monótona creciente obtenemos  $\varphi(f(\bar{x})) < \varphi(f(x))$ , el cual es una contradicción con la desigualdad (3.1). Por lo tanto,  $\bar{x}$  es una solución eficiente del problema (1.1).

**Prueba de (b).** Aplicando la definición de función monótona creciente obtenemos  $\varphi(f(\bar{x})) \leq \varphi(f(x))$ , el cual es una contradicción con la desigualdad (3.2). Por lo tanto,  $\bar{x}$  es una solución eficiente del problema (1.1).

**Prueba de (c).** Asumiendo que  $\bar{x}$  no es una solución débilmente eficiente del problema (1.1), entonces hay un  $x \in S$  con

$$f(x) - f(\bar{x}) \in \text{int}(C),$$

a partir de que  $\varphi$  es estrictamente monótona creciente sobre  $f(S)$  se sigue que

$$\varphi(f(\bar{x})) < \varphi(f(x))$$

es una contradicción con la desigualdad (3.3). Luego,  $\bar{x}$  es una solución débilmente eficiente del problema (1.1).

**Prueba de (d).** Desde que la función  $\varphi : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^m t_i y_i, \quad \forall y \in f(S).$$

Es fuertemente monótona creciente sobre  $f(S)$  (comparar el ejemplo 3.1 de la parte (b)). Por la parte (a) de este teorema  $\bar{x}$  es una solución eficiente del problema (1.1). Asumir que  $\bar{x}$  no es solución propiamente eficiente. Luego podemos elegir.

$$\mu = (m - 1) \max_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \frac{t_j}{t_i} \right\}, \quad \text{para } m \geq 2$$

y obtenemos para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$  y algún  $x \in S$  con  $f_i(x) > f_i(\bar{x})$

$$\frac{f_i(x) - f_i(\bar{x})}{f_j(\bar{x}) - f_j(x)} > \mu, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \text{ con } f_j(x) < f_j(\bar{x})$$

esto implica

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) > \mu(f_j(\bar{x}) - f_j(x)) \geq (m - 1) \frac{t_j}{t_i} (f_j(\bar{x}) - f_j(x))$$

para todo  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ .

Multiplicando con  $\frac{t_i}{m - 1}$  y sumando con respecto a  $j \neq i$  conduce a

$$\begin{aligned} f_i(x) - f_i(\bar{x}) &> (m - 1) \frac{t_j}{t_i} (f_j(\bar{x}) - f_j(x)) \\ \frac{t_i}{(m - 1)} (f_i(x) - f_i(\bar{x})) &> t_j (f_j(\bar{x}) - f_j(x)) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{t_i}{(m - 1)} (f_i(x) - f_i(\bar{x})) &> \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j (f_j(\bar{x}) - f_j(x)) \\ \frac{t_i}{(m - 1)} (f_i(x) - f_i(\bar{x})) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m 1 &> \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j (f_j(\bar{x}) - f_j(x)) \end{aligned}$$



$$\frac{t_i}{(m-1)}(f_i(x) - f_i(\bar{x}))(m-1) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j(f_j(\bar{x}) - f_j(x))$$

$$t_i(f_i(x) - f_i(\bar{x})) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j(f_j(\bar{x}) - f_j(x))$$

y

$$t_i f_i(x) - t_i f_i(\bar{x}) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j f_j(\bar{x}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j f_j(x)$$

$$t_i f_i(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j f_j(x) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m t_j f_j(\bar{x}) + t_i f_i(\bar{x})$$

$$\sum_{j=1}^m t_j f_j(x) > \sum_{j=1}^m t_j f_j(\bar{x})$$

contradiciendo la desigualdad (3.4) por tanto el resultado. ■

## 3.2 Enfoque de suma de pesos

Si se combina las afirmaciones del Teorema 3.1, (b), (c) para  $C = \mathbb{R}_+^m$  con las observaciones del ejemplo 2.12, (a), (b) (i.e.,  $\varphi$  es elegido como una función lineal especial), entonces obtenemos los resultados de escalarización dados en la tabla 3.1., el resultado del Teorema 3.1, (d) también es considerado. Este enfoque emplea la suma de pesos de los componentes de la función vectorial objetivo. Por lo tanto se habla de un enfoque de suma de pesos.

<p>Toda solución del problema de optimización escalar</p> $\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m t_i f_i(x)$		
$t_1, t_2, \dots, t_m > 0$	$t_1, t_2, \dots, t_m > 0$ (Condición suficiente)  $t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0$ $t_i > 0$ para alg n $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ (Condición necesaria)	$t_1, t_2, \dots, t_m > 0$ $t_i > 0$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
es		
Una solución propiamente eficiente del problema (1.1)	Una solución eficiente del problema (1:1)	Una solución débilmente eficiente del problema (1.1)

Tabla 3.1 Condiciones suficientes para soluciones óptimas.

**Ejemplo 3.2.**

(a) En el ejemplo 2.2 hemos ya investigado el siguiente problema de optimización vectorial (ver también la fig 2.3)

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} \max \left( \begin{array}{c} x_1 \\ -x_1 - x_2^2 \end{array} \right) \\ \text{s.a. } x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \end{array} \right.$$

Para el cálculo de una solución propiamente eficiente de este problema se puede elegir, por ejemplo  $t_1 = 1$  y  $t_2 = 2$ . Entonces se resuelve el problema de optimización escalar

$$(p_1) \begin{cases} \max & -x_1 - 2x_2^2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \end{cases}$$

donde  $\bar{x} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  es la solución única del problema  $(p_1)$ , por el teorema 3.1 (d)  $\bar{x}$  es también una solución propiamente del problema de optimización vectorial  $(p)$

acontinuacion probaremos que  $\bar{x} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  es la única solución del problema  $(p_1)$ .

Sea la función objetivo  $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2$  donde

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

al ser su matriz semidefinida positiva podemos asegurar que  $f$  es una función convexa. sean las restricciones.

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0$$

donde  $g_2$  es lineal por lo tanto convexa y como  $g_1$  es no lineal, veamos si es convexa.

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al tener matriz hessiana semidefinida positiva podemos asegurar que  $g_1$  es una función convexa.

1. Luego, bajo estas características, las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes para obtener el mínimo global del problema, el cual no puede ser único.

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1(x_1^2 - x_2) &= 0 \\ \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 3) &= \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

• La resolución de las condiciones de Kuhn-Tucker se reduce a los siguientes casos:

◦ Si  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto no existe solución.

◦ Si  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 x_1 \\ 4x_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{2\lambda_1}$$

$$4x_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1}{4}$$

Ahora reemplazando  $x_1, x_2$  en  $g_1$  obtenemos el valor de  $\lambda_1$ .

$$\lambda_1 \left( \left( \frac{-1}{2\lambda_1} \right)^2 - \left( \frac{\lambda_1}{4} \right) \right) = 0$$

$$\lambda_1 \left( \frac{1 - \lambda_1^3}{4\lambda_1^2} \right) = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda > 0$$

$$(1 - \lambda_1^3) = 0,$$

De aquí,  $\lambda_1 = 1$ . La solución será  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}$ .

o Si  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda_2 \\ 4x_2 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o Si  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \\ 4x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos,

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1(1 + \lambda_2)}{2\lambda_1} \\ 4x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{4} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1^2 - x_2) &= 0 \\ \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 3) &= 0 \end{aligned} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_2) &= 0 \Rightarrow x_1^2 = x_2 \\ (x_1 + 2x_2 - 3) &= 0 \Rightarrow x_1 - 3 = -2x_2 \end{aligned}$$

Ahora reemplazando  $x_1, x_2$  en  $g_1$  y  $g_2$ , concluimos que

$$13\lambda_1^4 + 13\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \neq 0. \blacksquare$$

(b) La aplicación del Teorema 3.1 para problemas discretos permite un cálculo rápido de soluciones eficientes. A continuación presentaremos el siguiente

ejemplo, sea el conjunto discreto

$$S = \{(16, 9), (6, 14), (11, 13), (10, 10)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

y la función vectorial  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in S,$$

donde, los elementos maximales de  $S$  son exactamente las soluciones eficientes del problema

$$\max_{x \in S} f(x),$$

para el cálculo de estas soluciones eficientes se puede escoger el vector de peso  $t = (\alpha, 1 - \alpha)$  con  $\alpha \in [0, 1]$  y se obtiene el problema de optimización escalar,

$$\max_{(x_1, x_2) \in S} \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2,$$

para  $\alpha \in [0, 1]$  arbitrario. Los elementos maximales del conjunto  $S$  están dados en la tabla 3.2.

$\alpha$	$\bar{x}$	$\alpha\bar{x}_1 + (1 - \alpha)\bar{x}_2$
$0 < \alpha < \frac{1}{6}$	(6, 14)	$6\alpha + 14(1 - \alpha)$
$\alpha = \frac{1}{6}$	(6, 14) o (11, 13)	$\frac{38}{3}$
$\frac{1}{6} < \alpha < \frac{4}{9}$	(11, 13)	$11\alpha + 13(1 - \alpha)$
$\alpha = \frac{4}{9}$	(11, 13) o (16, 9)	$\frac{109}{9}$
$\frac{4}{9} < \alpha < 1$	(16, 9)	$16\alpha + 9(1 - \alpha)$

Tabla 3.2. Elementos maximales y valores de función para diferentes parámetros

### Cálculo de las soluciones eficientes.

Sea  $L(x_1, x_2) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  y evaluando en cada punto  $(x_1, x_2) \in S$ , tenemos

$$L(6, 14) = 6\alpha + (1 - \alpha)14 = 1 - 8\alpha$$

$$L(16, 9) = 16\alpha + (1 - \alpha)9 = 7\alpha + 9$$

$$L(11, 13) = 11\alpha + (1 - \alpha)13 = 13 - 2\alpha$$

$$L(10, 10) = 10\alpha + (1 - \alpha)10 = 10$$

Ahora encontrando la variación del parámetro  $\alpha$ , consideremos:  $\bar{x} = (6, 14)$  como solución eficiente. Por lo tanto, tendremos

$$L(6, 14) \geq \{L(16, 9); L(11, 13); L(10, 10)\}$$

$$\diamond 14 - 8\alpha \geq 9 + 7\alpha; 5 \geq 15\alpha; \frac{1}{3} \geq \alpha$$

$$\diamond 14 - 8\alpha \geq 13 - 2\alpha; 1 \geq 6\alpha; \frac{1}{6} \geq \alpha$$

$$\diamond 14 - 8\alpha \geq 10; 4 \geq 8\alpha; \frac{1}{2} \geq \alpha$$

$$\text{De aquí } 0 < \alpha < \frac{1}{6}.$$

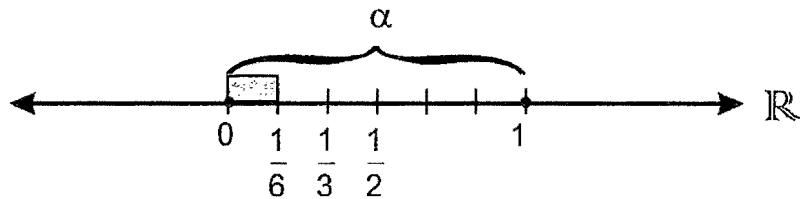


figura 3.2

Sea  $\bar{x} = (11, 13)$  tendremos,

$$L(11, 13) \geq \{L(6, 14); L(16, 9); L(10, 10)\}.$$

- ◇  $13 - 2\alpha \geq 14 - 8\alpha; 6\alpha \geq 1; \alpha \geq \frac{1}{6}$
- ◇  $13 - 2\alpha \geq 9 + 7\alpha; 4 \geq 9\alpha; \frac{4}{9} \geq \alpha$
- ◇  $13 - 2\alpha \geq 10; 3 \geq 2\alpha; \frac{3}{2} \geq \alpha$

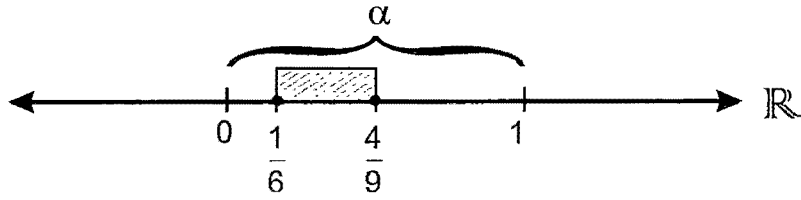


figura 3.3

Sea  $\bar{x} = (16, 9)$  tendremos,

$$L(16, 9) \geq \{L(6, 14); L(11, 13); L(10, 10)\}.$$

- ◇  $9 + 7\alpha \geq 14 - 8\alpha; 15\alpha \geq 5; \alpha \geq \frac{1}{3}$
- ◇  $9 + 7\alpha \geq 13 - 2\alpha; 9\alpha \geq 4; \alpha \geq \frac{4}{9}$
- ◇  $9 + 7\alpha \geq 10; 7\alpha \geq 1; \alpha \geq \frac{1}{7}$

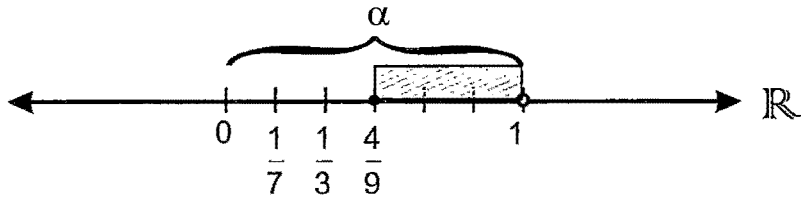


figura 3.4

Sea  $\bar{x} = (10, 10)$  tendremos,  $L(10, 10) \geq \{L(6, 14); L(16, 9); L(11, 13)\}.$

- ◇  $10 \geq 14 - 8\alpha; \quad 8\alpha \geq 4; \quad \alpha \geq \frac{1}{2}$
- ◇  $10 \geq 9 + 7\alpha; \quad 1 \geq 7\alpha; \quad \frac{1}{7} \geq \alpha$
- ◇  $10 \geq 13 - 2\alpha; \quad 2\alpha \geq 3; \quad \alpha \geq \frac{3}{2}$



En este caso no cumple  $L(10, 10) \not\subseteq L(11, 13)$ . Por lo tanto,  $\bar{x} = (10, 10)$  no es solución.

**Observacion.**

Notar que para problemas de optimización vectorial no lineal generales no toda solución eficiente puede ser determinada usando el enfoque de suma de pesos, por ejemplo, la figura 3.3 muestra que solamente dos puntos maximales del conjunto  $T$  pueden determinarse de tal manera. Solamente estos dos puntos son puntos de apoyo de una función de apoyo apropiada.

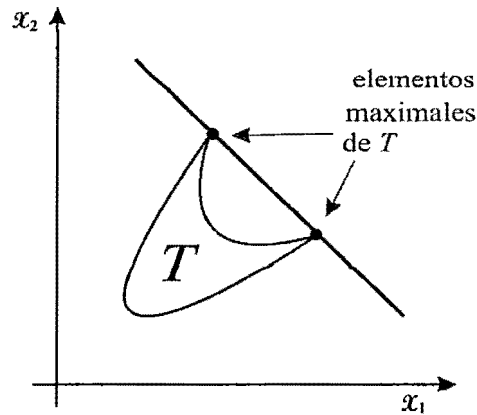


Figura 3.3

El enfoque de suma de pesos parece ser solo adecuado para problemas convexos, como para problemas lineales. En general, este enfoque no puede ser usado para problemas de optimización vectorial que aparecen en ingeniería, para estos problemas son mas adecuados otros enfoques, por ejemplo, el enfoque de la norma máxima de peso. A continuación respondemos para que problemas en especial el enfoque de suma de pesos es apropiado.

**Teorema 3.2.** Sean  $C = \mathbb{R}_+^m$  y el conjunto convexo

$$f(S) - \mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m / y \leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x), \text{ para algún } x \in S\}.$$

Si  $\bar{x} \in S$  es una solución débilmente eficiente del problema (1.1), entonces hay números reales  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  con  $t_i > 0$ , para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  y que

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S.$$

**Demostración.** Sea  $\bar{x} \in S$  una solución débilmente eficiente del problema (1.1), entonces no hay  $x \in S$  con

$$f_i(x) > f_i(\bar{x}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Si definimos los conjuntos

$$A = \{y \in \mathbb{R}_+^m / y_i > f_i(\bar{x}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

y

$$B = \{y \in \mathbb{R}_+^m / y \leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x), \text{ para algún } x \in S\}.$$

Concluimos

$$A \cap B = \phi.$$

Es evidente que el conjunto  $A$  es convexo y abierto. Por asunción el conjunto  $B$  es convexo también. Por el Teorema 1.3, hay números reales  $t_1, \dots, t_m$  con  $t_i \neq 0$  para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  y un número real  $\alpha$  y que

$$\sum_{i=1}^m t_i a_i > \alpha \geq \sum_{i=1}^m t_i b_i \quad \forall (a_1, \dots, a_m) \in A \quad \text{y} \quad \forall (b_1, \dots, b_m) \in B. \quad (3.5)$$

Si  $cl(A)$  denota la cerradura de  $A$ , i.e.,

$$cl(A) = \{y \in \mathbb{R}^m / y_i \geq f_i(\bar{x}), \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Entonces  $f(\bar{x}) \in cl(A) \cap B$  y se obtiene por (3.5),  $\alpha = \sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x})$ . Entonces concluimos

$$\sum_{i=1}^m t_i (f_i(\bar{x}) + z_i) \geq \sum_{i=1}^m t_i (f_i(\bar{x})), \forall z_1, \dots, z_m \geq 0$$

o

$$\sum_{i=1}^m t_i z_i \geq 0, \forall z_1, \dots, z_m \geq 0.$$

Esto implica que  $t_1, \dots, t_m$  son no negativos. Finalmente, del lado derecho de la desigualdad (3.5), tenemos que

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \forall x \in S.$$

Esto completa la prueba. ■

El teorema precedente puede ser fácilmente extendido para conos ordenados arbitrariamente con interior no vacío. Para conos con interior vacío se tiene que aplicar un teorema de separación especial en  $\mathbb{R}^m$ .

Con el fin de señalar la importancia del enfoque de suma de pesos para problemas de optimización vectorial convexa (i.e., para problemas en los cuales  $f(S) - \mathbb{R}_+^m$  es un conjunto convexo), combinamos los resultados del teorema 3.1 (c) (en conexión con el ejemplo 3.1, (a)) y del teorema 3.2 en el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.** Sean  $C = \mathbb{R}_+^m$  y el conjunto convexo

$$f(S) - \mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m / y \leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x) \text{ para algún } x \in S\}.$$

Entonces  $\bar{x} \in S$  es una solución débilmente eficiente del problema (1.1) si y sólo si hay números reales  $t_1, \dots, t_m > 0$  con  $t_i > 0$  para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  y que

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S.$$

Aunque el concepto de eficiencia débil no es apropiado en aplicaciones (ver ejemplo 2.7), el corolario previo muestra que una representación teóricamente refinada es posible bajo asunciones de convexidad.

El siguiente corolario ilustra que el concepto de eficiencia no puede ser tratado en una forma teóricamente uniforme.

**Corolario 3.2.** Sea  $C = \mathbb{R}^m$ .

(a) Sean  $t_1, \dots, t_m > 0$  números reales dados o si existe un  $\bar{x} \in S$  con

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S,$$

entonces  $\bar{x}$  es una solución del problema (1.1).

(b) Sea el conjunto  $f(S) - \mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m / y \leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x) \text{ para algún } x \in S\}$  convexo. Si  $\bar{x} \in S$  es una solución eficiente del problema (1.1) entonces existen números reales  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  con  $t_i > 0$ , para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S.$$

**Demostración.**

**Prueba de (a).** Consideremos la afirmación del Teorema 3.1 (a). En conexión con el ejemplo 3.1 (b). Es decir que para números reales arbitrarios  $t_1, \dots, t_m > 0$ , la función  $\varphi : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\varphi(f(x)) = \sum_{i=1}^m t_i f_i(x) \text{ para todo } x \in S,$$

es fuertemente monótona creciente y por la parte (a) del Teorema 3.1 hay  $\bar{x} \in S$  tal que

$$\varphi(f(\bar{x})) \geq \varphi(f(x)) \text{ para todo } x \in S.$$

De aquí

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x) \text{ para todo } x \in S.$$

Luego  $\bar{x}$  es una solución del problema (1.1).

**Prueba de (b).** Por el Teorema 3.2 tenemos que toda solución eficiente del problema (1.1), es una solución débilmente eficiente del problema (1.1). Por lo tanto,  $\bar{x} \in S$  es una solución débilmente eficiente, y por el Teorema 2.1 hay números reales  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  con  $t_i > 0$  para al menos  $i \in \{1, \dots, m\}$  y

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x) \text{ para todo } x \in S,$$

por lo tanto el resultado.

En economía el resultado del Corolario 3.2 también es llamado *Teorema de Eficiencia*. Ahora completamos esta suma de pesos con una investigación del concepto de eficiencia propia.

**Corolario 3.3.** Sea  $C = \mathbb{R}_+^m$  y el conjunto convexo

$$f(S) - \mathbb{R}_+^m = \{ y \in \mathbb{R}^m / y \leq_{\mathbb{R}_+^m} f(x) \text{ para algún } x \in S \}.$$

Entonces  $\bar{x} \in S$  es una solución propiamente eficiente del problema (1.1) si y sólo si hay números reales  $t_1, \dots, t_m > 0$  y que

$$\sum_{i=1}^m t_i f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m t_i f_i(x), \quad \forall x \in S.$$

**Demostración.**

Para la parte inversa: asumimos que  $\bar{x} \in S$  es una solución propiamente eficiente de (1.1) luego hay un número real  $\mu > 0$  y así para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  y cada  $x \in S$  con  $f_i(\bar{x}) < f_i(x)$  existe al menos un  $j \in \{1, \dots, m\}$  con  $f_j(\bar{x}) > f_j(x)$  y

$$\frac{f_i(x) - f_i(\bar{x})}{f_j(\bar{x}) - f_j(x)} \leq \mu \quad (3.6)$$

Consecuentemente consideremos para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  el sistema

$$f_i(\bar{x}) < f_i(x) \quad (3.7)$$

$$f_i(\bar{x}) + \mu f_j(\bar{x}) < f_i(x) + \mu f_j(x), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \quad (3.8)$$

No tiene una solución  $x \in S$ , para ver esta implicación asumimos que para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$  el sistema (3.7) y (3.8) tendrá una solución  $x \in S$ . Si no hay un  $j \in \{1, \dots, m\}$  con  $f_j(\bar{x}) > f_j(x)$ ,  $\bar{x}$  no puede ser propiamente eficiente. De otro lado si hay algún  $j \in \{1, \dots, m\}$  con  $f_j(\bar{x}) > f_j(x)$  obtendremos de (3.8)

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) > \mu(f_j(\bar{x}) - f_j(x))$$

contradiciendo la desigualdad (3.6).

Ahora procedemos con la prueba del corolario y elegimos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  arbitrario. Definamos el conjunto no vacío.

$M_i$  :

$$\left\{ \begin{pmatrix} f_i(x) + \mu f_1(x) \\ \vdots \\ f_i(x) \\ f_i(x) + \mu f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ / x \in S \right\}$$

desde que  $f(S) - \mathbb{R}_+^m$  es asumido como convexo, uno puede demostrar con cálculos simples que el conjunto  $M$  es convexo, si tomamos

$$\bar{y}_i = \begin{pmatrix} f_i(\bar{x}) + \alpha_i + \mu(f_1(\bar{x}) + \alpha_1) \\ \vdots \\ f_i(\bar{x}) + \alpha_i \\ f_i(\bar{x}) + \alpha_i + \mu(f_m(\bar{x}) + \alpha_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \text{ con } \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$$

hacemos notar que el sistema (3.7) y (3.8) no es solucionable. Concluimos

$$M_i \cap \text{int}(\{\bar{y}_i\} + \mathbb{R}_+^m) = \phi.$$

Entonces por el Teorema de separación, existen números reales  $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_m^{(i)}$  con  $\lambda^{(i)} \neq 0_{\mathbb{R}_+^m}$  y

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{(i)}(f_i(\bar{x}) + \alpha_i + \mu(f_1(\bar{x}) + \alpha_1)) + \dots + \lambda_j^{(i)}(f_i(\bar{x}) + \alpha_i) + \dots \\ & + \lambda_m^{(i)}(f_i(\bar{x}) + \alpha_i + \mu(f_m(\bar{x}) + \alpha_m)) \tag{3.9} \\ & \geq \lambda_1^{(i)}(f_i(x) + \mu(f_1(x))) + \dots + \lambda_j^{(i)}(f_i(x)) + \dots + \lambda_m^{(i)}(f_i(x) + \mu f_m(x)) \end{aligned}$$

Para todo  $x \in S$  y para todo  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$

Para  $x = \bar{x}$  obtenemos inmediatamente  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ , para  $\alpha_1 = 0 = \alpha_m = 0$ ,

concluimos de (3.9)

$$f_i(\bar{x}) \sum_{j=1}^m \lambda_j + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \lambda_j^{(i)} f_i(\bar{x}) \geq f_i(x) \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(i)} + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \lambda_j^{(i)} f_i(x)$$

y como  $\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(i)} > 0$ , tenemos

$$f_i(\bar{x}) + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\lambda_j^{(i)}}{\sum_{k=1}^m \lambda_k^{(i)}} f_j(\bar{x}) \geq f_i(x) + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\lambda_j^{(i)}}{\sum_{k=1}^m \lambda_k^{(i)}} f_j(x), \text{ para todo } x \in S. \quad (3.10)$$

La desigualdad (3.10) se mantiene para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , seguidamente sumamos estas  $m$  desigualdades y obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{\left( 1 + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\lambda_j^{(i)}}{\sum_{k=1}^m \lambda_k^{(i)}} \right)}_{t_i > 0} f_i(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m \underbrace{\left( 1 + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\lambda_j^{(i)}}{\sum_{k=1}^m \lambda_k^{(i)}} \right)}_{t_i > 0} f_i(x)$$

Consecuentemente  $\bar{x}$  es una solución eficiente. ■

Los resultados concernientes al enfoque de suma de pesos son resumidos en la tabla 3.4, los resultados matemáticos correspondientes pueden encontrarse



en los Corolarios 3.1, 3.2 y 3.3.

<p>Si el conjunto <math>f(S) \rightarrow \mathbb{R}^n_+</math> es convexo  entonces una solución del problema  de optimización escalar</p> $\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m t_i f_i(x)$		
<p>es</p>		
<p>Una solución  propriadamente  eficiente del  problema (1.1)</p>	<p>Una solución  eficiente del  problema (1.1)</p>	<p>Una solución  débilmente  eficiente del  problema (1.1)</p>
<p>Si y sólo si</p>		
<p><math>t_1, t_2, \dots, t_m &gt; 0</math></p>	<p><math>t_1, t_2, \dots, t_m &gt; 0</math>  (Condición suficiente)</p> <p><math>t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0</math>  <math>t_i &gt; 0</math> para algún  <math>i \in \{1, 2, \dots, m\}</math>  (Condición necesaria)</p>	<p><math>t_1, t_2, \dots, t_m &gt; 0</math>  <math>t_i &gt; 0</math> para algún  <math>i \in \{1, 2, \dots, m\}</math></p>

Tabla 3.4 Condiciones necesaria y suficiente para soluciones óptimas

En economía los problemas de optimización vectorial son con frecuencia lineales i.e., son de la forma

$$\begin{aligned}
 &\max \quad Cx \\
 &\text{s.a.} \quad Ax \leq b \\
 &\quad \quad x \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde  $C$  y  $A$  son matrices apropiadas (notar que  $\mathbb{R}^m_+$  es el cono ordenado y  $b$  es un vector dado (comparar ejemplo 3.2, (c))). Para estos problemas el conjunto  $f(S) - \mathbb{R}^m_+$  es siempre convexo y por lo tanto los resultados de la tabla 3.4 pueden ser aplicados. Además,

puede mostrarse que las soluciones eficientes y propiamente eficientes coinciden en este caso. Esto es resultado del siguiente teorema.

**Teorema 3.3.** *Sea el problema de optimización vectorial (3.11) dado, donde  $C$  es una matriz real de orden  $n \times m$ ,  $A$  es una matriz real de orden  $k \times n$  y  $b \in \mathbb{R}^k$  es un vector dado. Sea el conjunto restricción no vacío y acotado*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\},$$

*y sea el cono ordenado  $\mathbb{R}_+^m$ . Entonces  $\bar{x} \in S$  es una solución eficiente del problema de optimización vectorial (3.11) si y sólo si  $\bar{x} \in S$  es una solución propiamente eficiente del problema (1.1).*

**Demostración.**

$\Leftarrow$ ) Por la definición 2.4 tenemos que cada solución propiamente eficiente es también una solución eficiente.

$\Rightarrow$ ) Sea  $\bar{x} \in S$  una solución eficiente del problema (3.11), es decir  $f(\bar{x}) = c\bar{x} \in T$  es un elemento máximo del conjunto imagen.

$$T = \{cx \in \mathbb{R}^m / x \in S\}$$

*Afirmación:* 
$$(\{c\bar{x}\} + \mathbb{R}_+^m) \cap T = \{c\bar{x}\}$$

En efecto, es claro ver que  $c\bar{x} \in \{c\bar{x}\} + \mathbb{R}_+^m$  pues  $c\bar{x} = c\bar{x} + 0_{\mathbb{R}_+^m}$  donde  $0_{\mathbb{R}_+^m} \in \mathbb{R}_+^m$ . Así

$$\{c\bar{x}\} \subset (\{c\bar{x}\} + \mathbb{R}_+^m) \cap T.$$

Probemos la otra inclusión. Sea  $z \in (\{c\bar{x}\} + \mathbb{R}_+^m) \cap T$ , entonces

$$z = c\bar{x} + y \text{ con } y \in \mathbb{R}_+^m \tag{3.12}$$

$$z \in T \quad (3.13)$$

Supongamos que

$$y \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\} \text{ es decir } y \neq \theta_{\mathbb{R}^m} \quad (3.14)$$

De (3.13), existe  $x' \in S$  tal que  $z = cx'$ , luego de (3.12) tenemos,  $cx' = c\bar{x} + y$  por (3.14), obtenemos  $cx' \neq c\bar{x}$  y  $c\bar{x} \leq_{\mathbb{R}_+^m} cx'$ , el cual es un absurdo pues  $c\bar{x}$  elemento maximal de tal afirmación concluimos que

$$\mathbb{R}_+^m \cap (T - \{c\bar{x}\}) = \{0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Ahora, desde que  $S$  es acotado, entonces  $T$  es acotado por tanto es un politopo (ver [6]) en consecuencia  $T$  es un poliedro, además si  $T$  es un poliedro, es convexo por lo tanto  $T - c\bar{x}$  convexo. Entonces el cono generado por  $T - c\bar{x}$  es un cono poliedrico. Es decir,

$$\text{cone}(T - \{c\bar{x}\}) = \{w \in \mathbb{R}^n / w = \lambda(cx - c\bar{x}), cx \in T, \lambda \geq 0, x \in S\}$$

y concluimos

$$\mathbb{R}_+^m \cap \text{cone}(T - \{c\bar{x}\}) = \theta_{\mathbb{R}_+^m}$$

Por el teorema de separación, para conos (ver [12]) existen números reales  $t_1, t_2, \dots, t_m$  con  $t_i \neq 0$  para al menos un  $i \in \{1, \dots, m\}$  y

$$\sum_{i=1}^m t_i z_i \leq 0 \leq \sum_{i=1}^m t_i y_i, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^m \text{ y } \forall z \in \text{cone}(T - \{c\bar{x}\}), \quad (3.15)$$

y

$$\sum_{i=1}^m t_i y_i > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}, \quad (3.16)$$

si tomamos los vectores unitarios en  $\mathbb{R}^m$ , obtenemos de la desigualdad (3.16),  $t_1, t_2, \dots, t_m >$

0. La desigualdad (3.15) implica

$$\sum_{i=1}^m t_i (cx_i - c\bar{x}_i) \leq 0, \text{ para todo } x \in S,$$

y

$$\sum_{i=1}^m t_i cx_i \leq \sum_{i=1}^m t_i c\bar{x}_i, \text{ para todo } x \in S,$$

consecuentemente por el Teorema 3.1 (d) concluimos que  $\bar{x}$  es una solución propiamente eficiente.

### 3.3 Condiciones de Kuhn-Tucker en Programación Multiobjetivo.

Consideremos el problema de Programación Multiobjetivo.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s.a.} \quad & x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq 0\} \end{aligned} \tag{P}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  son al menos de clase 2 y convexas en su respectivo dominio de definición.

**Definición 3.2 (Eficiencia propia de Kuhn Tucker).** *Un punto  $x^* \in X$  se dice que es propiamente eficiente en el sentido de Kuhn-Tucker del problema*

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

*si es eficiente y no existe ningún  $h \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\nabla f_i(x^*)^t h \leq 0, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\},$$

$$\begin{aligned}\nabla f_s(x^*)^t h &< 0, \text{ para alg\u00fan } s \in \{1, \dots, m\}, \text{ y} \\ \nabla g_j(x^*)^t h &\leq 0, \text{ para todo } j \in J(x^*) = \{j \in \{1, \dots, p\} / g_j(x^*) = 0\}.\end{aligned}$$

Este concepto de eficiencia propia exige que, a partir de un punto eficiente, no existan direcciones factibles (es decir, de descenso para las restricciones activas en  $x^*$ ), que sean a la vez de descenso para todas las funciones objetivo  $f_i$ , siendo dicho descenso estricto para alguna de ellas.

**Caracterizaci\u00f3n de la eficiencia propia.** Al igual que para los problemas con un \u00fanico objetivo, a partir de la definici\u00f3n de una funci\u00f3n lagrangiana, tambi\u00e9n se pueden establecer condiciones de Kuhn-Tucker para problemas multiobjetivo. En este caso, es necesario construir una funci\u00f3n de Lagrange generalizada, donde cada funci\u00f3n objetivo lleve tambi\u00e9n su correspondiente multiplicador. El siguiente teorema da condiciones de Kuhn-Tucker para la eficiencia propia.

As\u00ed pues, a partir del problema de programaci\u00f3n multiobjetivo (P), donde las funciones

$$f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

son continuamente diferenciables, definimos la funci\u00f3n de Lagrange generalizada

$$\phi(x, \mu, \lambda) = \sum_{i=1}^p \mu_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x),$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^p$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ . Adem\u00e1s, denotamos por

$$\phi'_x(x, \mu, \lambda) = \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x).$$

En estas condiciones, se verifica el siguiente teorema, que nos proporciona condiciones necesarias para que un punto sea propiamente eficiente en el sentido de Kuhn-Tucker.

**Teorema 3.4.** Una condición necesaria para que  $x^* \in X$  sea una solución propiamente eficiente en el sentido de Kuhn-Tucker del problema (P) es que existan multiplicadores y tales que

$$(i) \phi'_x(x^*, \mu^*, \lambda^*) = 0,$$

$$(ii) \forall j = 1, \dots, m, \lambda_j^* g_j(x^*) = 0,$$

$$(iii) \mu^* > 0, \lambda^* \geq 0.$$

**Demostración.** De la definición de eficiencia propia de Kuhn-Tucker, se sigue que no existe ningún  $h \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f_i(x^*)'h \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, p$  con desigualdad estricta para, al menos, algún  $i \in \{1, \dots, p\}$ , y tal que

$$\nabla g_j(x^*)'h \leq 0, \text{ para todo } j \in J(x^*).$$

Entonces, por el Teorema de la Alternativa de Tucker (Mangasarian, 1969), existen  $\mu_i^* > 0$ , ( $i = 1, \dots, p$ ) y  $\lambda_j^* \geq 0$  ( $j \in J(x^*)$ ), tales que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0.$$

Tomando  $\lambda_j^* = 0$ , para todo  $j \notin J(x^*)$ , el teorema queda demostrado. ■

# Capítulo 4

## Método de mayor pendiente descendente para el Problema Multiobjetivo

### 4.1 Definiciones Básicas

Sea  $K$  un cono convexo puntiagudo cerrado de  $\mathbb{R}^m$  con interior no vacío. El orden parcial en  $\mathbb{R}^m$  inducido por  $K$ , denotado por  $\leq_K$ , es definido como

$$u \leq_K v \leftrightarrow v - u \in K.$$

Considerando también el orden parcial inducido por  $\text{int}(K)$  en  $\mathbb{R}^m$ , es decir

$$u \leq_K v \leftrightarrow v - u \in \text{int}(K).$$

Dada una función continua diferenciable  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , consideraremos el problema de hallar un  $K$ - minimizador irrestricto de  $F$ , i.e. un punto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que no existe otro  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $F(x) \leq_K F(x^*)$  y  $F(x) \neq F(x^*)$ . En otras palabras estamos buscando

minimizadores de pareto irrestrictos, para  $F$  en el orden parcial inducido por el cono  $K$ . Denotemos este problema como:

$$\min_K F(x) \quad (4.1)$$

El siguiente teorema formaliza una condición necesaria, (pero en general no suficiente) para la  $K$ - optimalidad de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es

$$-int(K) \cap Imagen(JF(x)) = \phi \quad (4.2)$$

donde  $JF(x)$  establece el jacobiano de  $F$  en  $x$ .

**Teorema 4.1.** *Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  solución de  $\min_K F(x)$  entonces*

$$-int(K) \cap Imagen(JF(x)) = \phi.$$

**Demostración.** Sabemos que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Así,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} : \begin{matrix} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \rightarrow \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \end{matrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

$$JF(x) = \left[ \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \right]_{m \times n} : \begin{matrix} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ v \rightarrow JF(x) \cdot v \end{matrix}$$

Así podemos ver el jacobiano como una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  definida por el producto de matrices. Entonces,

$$JF(x) \cdot v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, tiene sentido hablar de la intersección de  $-int(K)$  con la  $Imagen(JF(x))$ .



Supongamos que el teorema no es cierto, i.e.,

$$\exists w / w \in -\text{int}(K) \wedge w \in \text{Imagen}(JF(x)). \quad (4.3)$$

De (4.3),  $w \in \text{Imagen}(JF(x))$ , entonces existe

$$v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } JF(x) \cdot v = w.$$

Por otro parte, como  $F$  es diferenciable en  $x$ , tenemos que para todo  $y \in \mathbb{R}^n$  :

$$F(x + y) = F(x) + JF(x).y + r(y) \text{ con } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{r(y)}{|y|} = 0$$

En particular para  $y = v$  tenemos

$$\begin{aligned} F(x + v) &= F(x) + JF(x).v + r(v), \text{ con } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0 \\ F(x + v) - F(x) &= JF(x).v + r(v) \\ F(x + v) - F(x) &= w + r(v) \\ (F(x) - F(x + v)) &= \underbrace{-w}_{\in \text{int}(K)} - r(v) \end{aligned}$$

podemos hacer  $r(v)$  muy pequeña.

De (4.3),  $-w \in \text{int}(K)$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(-w, \varepsilon) \subset \text{int}(K) \subset K$ .  
Siendo  $-r(v)$  muy pequeño, podemos suponer que

$$\| -w - r(v) \| < \varepsilon,$$

Así,  $-w - r(v) \in \text{int}(K)$  o también  $-(F(x+v) - F(x)) \in \text{int}(K)$ . Luego,  $F(x) - F(x+v) \in \text{int}(K)$ , entonces

$$F(x + v) <_K F(x). \quad (4.4)$$

Como  $x$  solución de  $\min_k F(x)$  entonces,  $F(x) \leq_K F(y)$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,

$$F(y) - F(x) \in K, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

En particular si  $y = x + v$ , entonces

$$F(x + v) - F(x) \in K,$$

y por (4.4),

$$F(x) - F(x + v) \in K.$$

Luego, siendo  $K$  puntiagudo tenemos que  $F(x + v) = F(x)$ . Por lo tanto,

$$0 = F(x) - F(x + v) \in \text{int}(K),$$

lo cual es un absurdo puesto que  $\text{int}(K)$  no contiene al origen.

**Lema 4.1.** *Sea  $K$  un cono puntiagudo convexo entonces  $0 \notin \text{int}(K)$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $0 \in \text{int}(K)$ , entonces como  $\text{int}(K)$  es abierto  $\exists \varepsilon > 0$  /  $B(0, \varepsilon) \in \text{int}(K)$  pero también  $B(0, \varepsilon) \subset \text{int}(K) \subset K$ . Sea  $\bar{x} \neq 0 \in B(0, \varepsilon)$ , como es simétrica entonces  $-\bar{x} \in B(0, \varepsilon)$ , ambos están en  $K$ . Esto es  $\bar{x}, -\bar{x} \in K$ , por definición de cono puntiagudo,  $\bar{x} = 0$  (contradicción). Luego  $0 \notin \text{int}(K)$ . ■

**Definición 4.1.** *Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  satisfaciendo (4.2) es llamado  $k$ -crítico.*

**Definición 4.2.** *Si el punto  $x \in \mathbb{R}^n$  no es  $K$ -crítico entonces existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $JF(x) \cdot v \in -\text{int}(K)$  o también*

$$JF(x) \cdot v \prec_K 0 \tag{4.5}$$

donde  $v$  es llamada una dirección  $K$ -descendiente de la función objetivo  $F$ .

**Lema 4.2.** Si  $v$  satisface (4.5) entonces existe  $\bar{t} > 0$  tal que

$$F(x + tv) \prec_K F(x), \forall t \in (0, \bar{t}] \quad (4.6)$$

**Demostración.** Por la diferenciabilidad de  $F$ , tenemos que

$$F(x + tv) = F(x) + JF(x)(tv) + r(tv) : \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

También por satisfacer  $v$  la relacion (4.5),  $tJF(x).v \in -int(K)$

$$F(x + tv) - F(x) = \underbrace{tJF(x).v}_{\in -int(K)} + r(tv), \quad t > 0$$

podemos hacer  $r(tv)$  muy pequeño tal que

$$tJF(x).v + r(tv) \in -int(K) \quad \forall t \in (0, \bar{t}].$$

Así, existe  $\bar{t} > 0$  tal que ,

$$tJF(x) \cdot v + r(tv) \in -int(K) \quad \forall t \in (0, \bar{t}].$$

Luego  $F(x+tv) - F(x) \in -int(K), \forall t \in (0, \bar{t}]$  o también  $F(x+tv) \prec_K F(x), \forall t \in (0, \bar{t}]$ . ■

**Definición 4.3.** Si  $v$  es una dirección  $k$ - descendiente en  $x$  diremos que  $t > 0$  satisface la  $k$  regla de Armijo, para algunos  $t$ , si  $F(x + tv) \prec_K F(x) + \beta t JF(x).v, \beta \in (0, 1)$ .

**Definición 4.4.** Diremos que  $v \in \mathbb{R}^n$  es una dirección descendiente de la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x + tv) < f(x), \forall t \in (0, \varepsilon]$ .

**La Regla de Armijo caso escalar.** Sea  $f$  diferenciable en  $x^k$ , fijamos  $\hat{t} > 0, \beta, \theta \in$

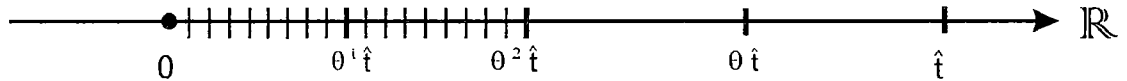
$(0, 1)$ , tomamos  $t := \hat{t}$ .

**Paso 1.** Verificamos si la desigualdad

$$f(x^k + td^k) \leq f(x^k) + \beta t \nabla f(x^k) \cdot d^k \quad (4.7)$$

**Paso 2.** Si (4.7) no es satisfecha, tomamos  $t := \theta t$  y retornamos al paso 1.

Caso contrario, aceptamos  $t^k = t$  como el valor de longitud de paso.



En otras palabras  $t_k$  es el mayor número entre todos los números de la forma  $t = \hat{t}\theta^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  que satisfaga la desigualdad (4.7).

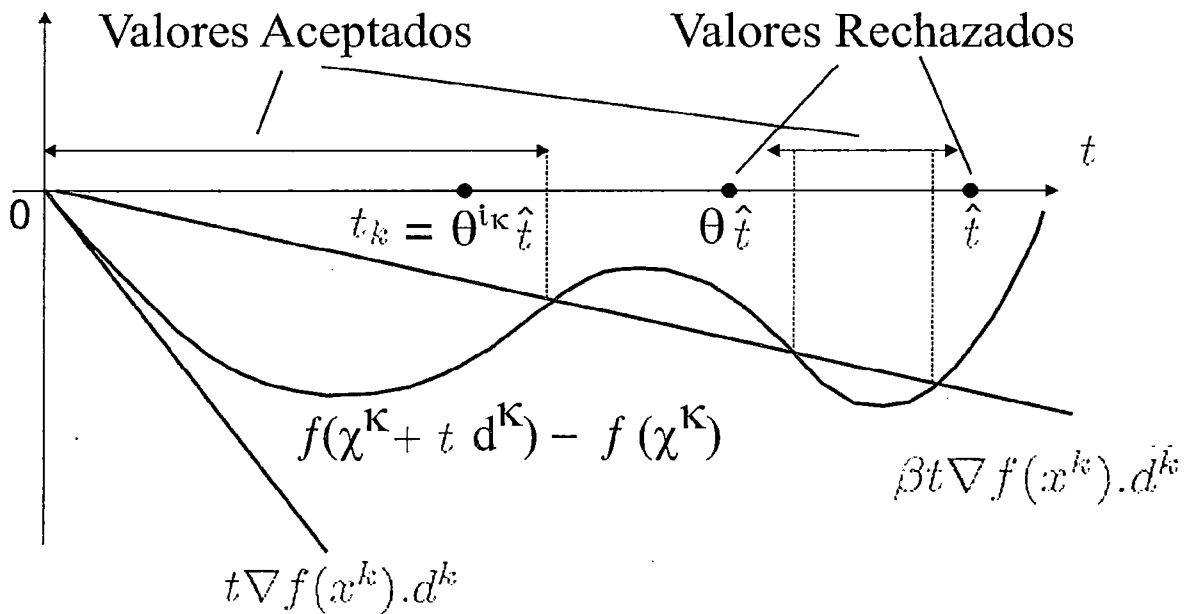


Figura 4.1

**Lema 4.3. (Regla de Armijo)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en  $x^k \in \mathbb{R}^n$  y suponga que  $d^k \in \mathbb{R}^n$  satisface  $\langle f'(x), d^k \rangle < 0$ . Entonces la desigualdad (4.7) es satisfecha para todo  $t > 0$  suficientemente pequeño. En particular la regla de armijo esta definida y

termina con un  $t_k > 0$ .

**Demostración.** Sea  $t > 0$  suficientemente pequeño, además desde que  $f$  es diferenciable en  $x^k$ , tenemos

$$\begin{aligned} f(x^k + td^k) &= f(x^k) + f'(x^k).td^k + r(td^k) \\ f(x^k + td^k) - f(x^k) &= t \langle f'(x^k), d^k \rangle + \theta(t) \\ &= \beta t \langle f'(x^k), d^k \rangle + (1 - \beta)t \langle f'(x^k), d^k \rangle + \theta(t) \\ &= \beta t \langle f'(x^k), d^k \rangle + t \left[ (1 - \beta) \langle f'(x^k), d^k \rangle + \frac{\theta(t)}{t} \right] \end{aligned}$$

como  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(td^k)}{\|td^k\|} = 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta(t)}{t} = 0, \quad t > 0. \quad (4.8)$$

Desde que  $\langle f'(x^k), d^k \rangle < 0$ , entonces

$$(1 - \beta)t \langle f'(x^k), d^k \rangle < 0.$$

Por (4.8), existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < t < \delta$ , entonces

$$(1 - \beta) \langle f'(x^k), d^k \rangle + \frac{\theta(t)}{t} < 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x^k + td^k) - f(x^k) &\leq \beta t \langle f'(x^k), d^k \rangle \\ f(x^k + td^k) &\leq f(x^k) + \beta t \langle f'(x^k), d^k \rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición 4.1.** Sea  $\beta \in (0, 1)$ , si  $JF(x) \cdot v \prec_K 0$ , entonces existe  $\bar{t} > 0$  tal que

$$F(x + tv) \prec_K F(x) + \beta t JF(x).v; \quad \forall t \in (0, \bar{t}].$$

**Demostración.** Siendo  $F$  diferenciable tenemos

$$F(x + tv) = F(x) + JF(x) \cdot (tv) + r(tv) \cdot \|tv\|, \text{ con } \lim_{t \rightarrow 0} r(tv) = 0$$

$$F(x + tv) = F(x) + t(JF(x) \cdot v + \underbrace{r(tv) \cdot \|v\|}_{R(t)})$$

$$F(x + tv) = F(x) + t(JF(x) \cdot v + R(t)), \text{ con } \lim_{t \rightarrow 0} R(t) = 0 \quad (4.9)$$

como  $JF(x) \cdot v \prec_K 0$  entonces  $JF(x) \cdot v \in -\text{int}(K)$  por otro lado consideremos  $\beta \in (0, 1)$ , entonces

$$(1 - \beta)JF(x) \cdot v \in -\text{int}(K),$$

pues  $-\text{int}(K)$  es cono. De aquí existe  $\bar{t} > 0$  tal que

$$\forall t \in (0, \bar{t}]; (1 - \beta)JF(x) \cdot v + R(t) \in -\text{int}(K)$$

o también

$$R(t) \prec_k -(1 - \beta)JF(x) \cdot v, \forall t \in (0, \bar{t}].$$

Luego en (4.9) tenemos

$$F(x + tv) = F(x) + t(JF(x) \cdot v + R(t))$$

$$F(x + tv) = F(x) + (\beta JF(x) \cdot v + \underbrace{(1 - \beta)JF(x) \cdot v + R(t)}_{\in -\text{int}(K)})$$

$$\Rightarrow F(x + tv) - F(x) - t\beta JF(x) \cdot v \in -\text{int}(K)$$

$$\Rightarrow F(x + tv) \prec_k F(x) + t\beta JF(x) \cdot v, \forall t \in (0, \bar{t}]. \blacksquare$$

### Algoritmo 1 (Generando un método $K$ -descendiente)

1. Tomar  $\beta \in (0, 1)$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , sea  $k = 0$ .
2. Si  $x^k$  es  $k$ -crítico, parar; caso contrario.

3. Encuentre una  $v^k$  dirección  $k$ - descendiente en  $x^k$ .
4. Calcule  $t_k > 0$  tal que

$$F(x^k + t_k v^k) \preceq_K F(x^k) + \beta t_k JF(x^k).v^k.$$

5. Sea  $x^{k+1} = x^k + t_k v^k$ ;  $k := k + 1$  e ir a 2.

Para éste algoritmo solo se pueden probar propiedades generales.

**Proposición 4.2.** *Sea  $\{x^k\}$  una sucesión infinita generada por el algoritmo 1. Si  $\bar{x}$  es un punto de acumulación de  $\{x^k\}$  entonces:*

$$F(\bar{x}) \preceq_K F(x^k), \quad \forall k \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k) = F(\bar{x}).$$

*En particular,  $F$  es constante en el conjunto de los puntos de acumulación de  $\{x^k\}$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\{x^k\}$  es la sucesión generada por el algoritmo 1, y además que todos los  $x^k$  no son  $k$ - críticos,  $\{F(x^k)\}$  es  $k$ - decreciente, i.e.,  $F(x^k) \preceq_k F(x^i)$ , si  $k \geq i$ .

Suponga que  $x^k \rightarrow \bar{x}$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces para  $j$  suficientemente grande, tal que  $k_j > k$  tenemos

$$F(x^{k_j}) \preceq_K F(x^k)$$

en el límite  $F(\bar{x}) \preceq_k F(x^k)$ ,  $\forall k$ . ■

Sea ahora  $\hat{x}$  otro punto de acumulación, entonces existe una subsucesión  $\{k^{k_p}\}$  de  $\{x^k\}$  /  $x^{k_p} \rightarrow \hat{x}$  y además,

$$F(\bar{x}) \preceq_k F(x^{k_p}); \quad \forall k_p.$$

Tomando límite

$$F(\bar{x}) \preceq_K F(\hat{x}) \tag{4.10}$$

También

$$F(x^{k_p}) \preceq_K F(x^k), \text{ para } k_p > k.$$

Tomando  $x^{k_p} \rightarrow \hat{x}$

$$F(\hat{x}) \leq_K F(x^k).$$

Similarmente cuando  $k \rightarrow \infty$

$$F(\hat{x}) \leq_K F(\bar{x}). \tag{4.11}$$

de (4.10) y (4.11) concluimos que  $F(\hat{x}) = F(\bar{x})$ .

A continuacion presentaremos un procedimiento para obtener los  $t_k$

**Obtención de los  $t_k$  :**

1. Sea  $t := 1$ .
2. Si  $F(x^k + tv^k) \preceq_K F(x^k) + \beta t JF(x^k)$ , entonces  
Hacemos  $t^k = t$ . Caso contrario.
3. Establecer  $t = t/2$  e ir a 2.

Observar que el procedimiento recursivo previo tiene siempre terminación finita, gracias a la proposición 4.1 más aún.

$$t_k = \max \{ 2^{-j} / j \in \mathbb{N}, F(x^k + 2^{-j}v^k) \preceq_K F(x^k) + \beta 2^{-j} JF(x^k).v^k. \}$$

por otro lado veamos una manera de obtener los  $v_k$

**Obtención de los  $v_k$  :**

Supongamos que hemos dado un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y definimos

$$A = JF(x),$$



y la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , como

$$f_x(v) = \max\{(Av)_i / i = 1, \dots, m\},$$

Aquí  $f_x$  es convexa y homogénea positiva de grado 1. Es decir

$$f_x(\lambda v) = \lambda f_x(v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Considerar el problema de minimización sin restricciones.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \\ \text{s.a.} \quad & v \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para este problema usamos la *Optimización Clásica* con  $m = 1$ ;  $k = \mathbb{R}_+$ , en este caso escogemos

$$v^k = -\nabla F(x^k)$$

la cual es una dirección de descenso y una solución de:

$$\min \langle v, \nabla F(x^k) \rangle + \frac{1}{2} \|v\|^2, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

y la *Optimización Multiobjetivo* con ( $m \geq 1$ ), donde  $K$  es el octante positivo  $\mathbb{R}_+^m$  Fliege y Svaiter (ver [11]) propusieron tomar  $v^k$  como la solución de:

$$\min_v \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} (\langle v, \nabla F_i(x) \rangle) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \right\}, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad (4.12)$$

donde  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ .

En la siguiente sección extenderemos la noción de dirección de mayor pendiente para el orden parcial  $\leq_K$  y propondremos el método de  $K$ - mayor pendiente.

## 4.2 Método de K - mayor pendiente

**Definición 4.5.** El cono polar positivo de un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  es el conjunto

$$A^* = \{w \in \mathbb{R}^m / \langle y, w \rangle \geq 0, \forall y \in A\}.$$

**Ejemplo 4.1.** Sea  $X = \{(1, 1), (1, 0)\}$ . Su cono polar viene dado por

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0\}.$$

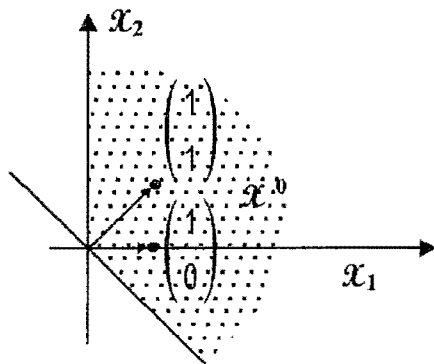


Figura 4.2

**Proposición 4.3.** Sea  $K$  un cono convexo cerrado no vacío de  $\mathbb{R}^m$  entonces

(i)  $K^*$  es un cono convexo y cerrado.

(ii)  $K = K^{**}$

**Demostración.**

(i) Sean  $x \in K^*$  y  $y \in K^*$ , i.e.,  $\langle x, w \rangle \geq 0$  y  $\langle y, w \rangle \geq 0$ , para todo  $w \in K$ , tenemos que

$$\langle \alpha x + (1 - \alpha)y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + (1 - \alpha) \langle y, w \rangle \geq 0,$$

es decir,  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K^*$ , por tanto  $K^*$  es convexo.

Veamos ahora la cerradura.

Sea  $\{y^k\} \subset K^*$ ,  $\{y^k\} \rightarrow y$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Fijando  $w \in K$  arbitrario y tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  es  $\langle y^k, w \rangle \geq 0$ , obtenemos que  $\langle y, w \rangle \geq 0$ . Por lo tanto como  $w \in K$  era arbitrario, entonces  $y \in K^*$ , con esto  $K^*$  es cerrado.

(ii)  $\Rightarrow$ ) Sea  $x \in K$ , arbitrario por demostrar  $\langle y, x \rangle \geq 0$ ,  $\forall y \in K^*$ ,

i.e.,  $x \in K^{**}$ , ( $K \subset K^{**}$ ).

En efecto, para todo  $y \in K^*$  y  $x \in K$ ,  $\langle x, y \rangle \geq 0$ , pero  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  de aquí tenemos que  $\langle y, x \rangle \geq 0$  para todo  $y \in K^*$ , en consecuencia  $x \in K^{**}$  así  $K \subset K^{**}$ .

$\Leftarrow$ ) Por demostrar que  $K^{**} \subset K$ .

En efecto:

Supongamos que  $x \notin K$  por el teorema 1.3 existen  $p \neq \theta$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\langle x, p \rangle < \alpha \tag{4.13}$$

$$\langle y, p \rangle \geq \alpha, \forall y \in K \tag{4.14}$$

Como  $K$  es un cono, entonces contiene el origen, luego de (4.14)

$$\langle 0, p \rangle \geq \alpha,$$

i.e.,  $\alpha \leq 0$ , y en (4.13) tenemos

$$\langle x, p \rangle < 0 \tag{4.15}$$

Afirmación:  $p \in K^*$ .

Supongamos que  $p \notin K^*$ , i.e.,

$$\langle y, p \rangle < 0, \text{ para algún } y \in K.$$

Tomando  $\lambda > 0$  suficientemente grande tenemos que  $\lambda y \in K$ , pues  $K$  es un cono, luego

$$\langle \lambda y, p \rangle < 0,$$

ésta última desigualdad es un absurdo así  $p \in K^*$  y de (4.15) se sigue que  $x \notin K^{**}$ . ■

Dado que  $K = K^{**}$  por la proposición anterior, por tanto tenemos

$$-K = \{y \in \mathbb{R}^m / \langle y, w \rangle \leq 0, \forall w \in K^*\}$$

y

$$-int(K) = \{y \in \mathbb{R}^m / \langle y, w \rangle < 0, \forall w \in K^* \setminus \{0\}\}.$$

**Definición 4.6.** La envoltura convexa de  $A$  es el menor subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  que contiene a  $A$ , i.e.,  $Conv(A) = \cap\{D \subset \mathbb{R}^m : D \text{ es convexo y } A \subset D\}$ .

**Definición 4.7.** La envoltura cónica de  $A \subset \mathbb{R}^m$  es el menor cono convexo que contiene a  $A$ , i.e.,  $Cone(A) = \cap\{C \subset \mathbb{R}^m : C \text{ es un cono convexo y } A \subset C\}$ .

De aquí en adelante asumimos que tenemos un conjunto compacto  $C \subseteq \mathbb{R}^m$  tal que

$$0 \notin C \tag{4.16}$$

$$Cone(conv(C)) = K^* \tag{4.17}$$

### Observación

1. Dado que  $0 \notin C$  tenemos que  $C \subseteq K^* \setminus \{0\}$ . En efecto, si

$$C \subseteq conv(C) \subseteq cone(conv(C)),$$

tenemos que  $C \subseteq cone(conv(C))$ . Por (4.17),  $C \subseteq K^*$  y por la definición de cono polar se sigue que  $0 \in K^*$ . Así, como  $0 \notin C$ , concluimos  $C \subseteq K^* \setminus \{0\}$ . ■

2. Dado que  $C \subseteq K^* \setminus \{0\}$ , tenemos que  $\text{conv}(C) \subseteq \text{conv}(K^* \setminus \{0\})$ , dado que  $K^* \setminus \{0\}$  es convexo,  $\text{conv}(C) \subseteq K^* \setminus \{0\}$ , así  $0 \notin \text{conv}(C)$ . Por lo tanto tenemos

$$-K = \{u \in \mathbb{R}^m / \langle u, w \rangle \leq 0, \forall w \in C\} \quad (4.18)$$

$$-\text{int}(K) = \{u \in \mathbb{R}^m / \langle u, w \rangle < 0, \forall w \in C\} \quad (4.19)$$

Consideremos lo siguiente para  $C$ .

3. En la optimización clásica  $K = \mathbb{R}_+$  y podríamos tomar  $C = \{1\}$ , donde  $C$  es compacto y además cumple con (4.16) y (4.17). i.e.,

$$\begin{aligned} 0 &\notin C \\ \text{cone}(\text{conv}(C)) &= \mathbb{R}_+, \text{conv}(\{1\}) = \{1\} \\ \text{cone}\{1\} &= \mathbb{R}_+ \blacksquare. \end{aligned}$$

4. Para la optimización multiobjetivo  $K, K^*$  son el octante positivo de  $\mathbb{R}^m$ . i.e., si  $K = \mathbb{R}_+^m$  y además el polar siguiendo la definición sera

$$K^* = \{w \in \mathbb{R}^m / \langle y, w \rangle \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}_+^m\}$$

y podríamos tomar  $C$  como las bases canónicas de  $\mathbb{R}^m$ , i.e.,  $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ , siendo  $C$  compacto y cumpliendo con las condiciones (4.16) y (4.17).

**Definición 4.8.** Sea el conjunto

$$C = \{w \in K^* / \|w\|_1 = 1\}$$

(donde  $\|w\|_1 = |w_1| + \dots + |w_n|$ ), que satisface las condiciones (4.16), (4.17). Se define ahora  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(y) = \sup_{w \in C} \langle y, w \rangle \quad (4.20)$$

En vista de (4.18) y (4.19) y la compacidad de  $C$ , la función  $\varphi$  proporciona una caracterización de  $-K$  y  $-int(K)$  :

$$-K = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi(y) \leq 0\} \quad (4.21)$$

y

$$-int(K) = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi(y) < 0\}. \quad (4.22)$$

Con el siguiente lema establecemos algunas propiedades elementales de la función  $\varphi$  las cuales serán utilizadas en lo sucesivo.

**Lema 4.4.**

- (i) Sean  $y, y' \in \mathbb{R}^m$ , entonces  $\varphi(y + y') \leq \varphi(y) + \varphi(y')$  y  $\varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y')$ .
- (ii) Sean  $y, y' \in \mathbb{R}^m$ , si  $y <_K y'$  ( $y \leq_K y'$ ), entonces  $\varphi(y) < \varphi(y')$  ( $\varphi(y) \leq \varphi(y')$ ).
- (iii) La función  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz continua.

**Demostración.**

(i) Sean  $y, y' \in \mathbb{R}^m$  y

$$\begin{aligned} \varphi(y + y') &= \sup_{w \in C} \langle y + y', w \rangle \\ \varphi(y + y') &= \sup_{w \in C} \{ \langle y, w \rangle + \langle y', w \rangle \} \\ \varphi(y + y') &\leq \sup_{w \in C} \langle y, w \rangle + \sup_{w \in C} \langle y', w \rangle \\ \varphi(y + y') &\leq \varphi(y) + \varphi(y') \end{aligned}$$

Además, es claro ver que para algún  $w_0 \in C$ ,  $\sup_{w \in C} \langle y, w \rangle = \langle y, w_0 \rangle$ . Además,

$$\langle y', w \rangle \leq \sup_{w \in C} \langle y', w \rangle, \text{ para todo } w \in C.$$

En particular para  $w = w_0$  tenemos

$$-\sup_{w \in C} \langle y', w \rangle \leq -\langle y', w_0 \rangle.$$

Así,

$$\varphi(y) - \varphi(y') = \sup_{w \in C} \langle y, w \rangle - \sup_{w \in C} \langle y', w \rangle \leq \langle y, w_0 \rangle - \langle y', w_0 \rangle.$$

i.e.,

$$\varphi(y) - \varphi(y') \leq \langle y - y', w \rangle \leq \sup_{w \in C} \langle y - y', w \rangle$$

Por tanto,  $\varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y')$  ■.

(ii) El hecho que  $y - y' \in -\text{int}(K)$  ( $y - y' \in -k$ ) es equivalente a  $\varphi(y - y') < 0$  ( $\varphi(y - y') \leq 0$ ), por definición (4.21) y (4.22) y por (i) tenemos  $\varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y') \leq 0$  de aquí  $\varphi(y) - \varphi(y') \leq 0$ , por tanto,  $\varphi(y) < \varphi(y')$ , ( $\varphi(y) \leq \varphi(y')$ ) ■.

(iii) En virtud de lo establecido en (i),

$$\varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y') \quad y \quad \varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y').$$

De aquí tenemos que

$$\varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y'), \quad \varphi(y') - \varphi(y) \leq \varphi(y' - y)$$

y además  $-\varphi(y' - y) \leq \varphi(y) - \varphi(y')$ . Así

$$-\varphi(y' - y) \leq \varphi(y) - \varphi(y') \leq \varphi(y - y') \tag{4.23}$$

Consideremos  $\alpha = \sup \{ \varphi(y - y'), \varphi(y' - y) \}$  donde  $\varphi(y' - y) \leq \alpha$  y  $\varphi(y - y') \leq \alpha$ . Luego,  $-\alpha \leq -\varphi(y' - y)$ . De (4.23) tenemos

$$-\alpha \leq \varphi(y) - \varphi(y') \leq \alpha$$

i.e.,

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| \leq \sup\{\varphi(y - y'), \varphi(y' - y)\},$$

y por la definición (4.20)

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| \leq \left\{ \sup_{w \in C} \langle y - y', w \rangle, \sup_{w \in C} \langle y' - y, w \rangle \right\}$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(y')| &\leq \left\{ \sup_{w \in C} \|y - y'\| \|w\|, \sup_{w \in C} \|y' - y\| \|w\| \right\} & (4.24) \\ &\leq \|y - y'\| \sup\{\|w\| \mid w \in C\} \\ |\varphi(y) - \varphi(y')| &\leq L \|y - y'\|, \text{ donde } L = \sup\{\|w\| \mid w \in C\}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 4.9.** Se define ahora para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\begin{aligned} f_x(y) &= \varphi(JF(x)v) & (4.25) \\ &= \sup_{w \in C} \langle w, JF(x)v \rangle \end{aligned}$$

**Proposición 4.4.** Considerando (4.18) y (4.19) y la compactibilidad de  $C$ , además de la caracterización de  $\varphi$  en  $-int(K)$ , donde  $-int(K) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \varphi(y) < 0\}$ , se sigue que  $v$  es dirección  $k$ -descendiente en  $x$  si y sólo si  $f_x(v) < 0$ .

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $v$  una dirección  $K$ -descendiente por lo tanto  $JF(x).v \in -int(K)$  y por la caracterización de  $\varphi$  tenemos  $\varphi(F(x).v) < 0$ , así  $f_x(v) < 0$ , por la definición anterior.

$\Leftarrow$ ) Sea  $f_x(v) < 0$ , así  $\varphi(F(x).v) < 0$ , de aquí  $JF(x).v \in -int(K)$  y por definición  $v$  es una dirección  $k$ -descendiente.  $\blacksquare$



**Proposición 4.5.** *Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es  $K$ -crítico si y solo si  $f_x(v) \geq 0$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .*

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un punto  $k$ -crítico por definición tenemos que

$$-int(K) \cap imagen(JF(x)) = \phi \quad (4.26)$$

asi no existe un elemento en (4.26).

Consideremos que  $y \in imagen(JF(x))$  entonces existe  $v \in \mathbb{R}^n$ , tal que

$$y = JF(x).v \quad (4.27)$$

Por otro lado  $y \notin -int(K)$  y por la caracterización de  $\varphi$  tenemos

$$\varphi(y) \geq 0,$$

así de (4.27) concluimos  $\varphi(F(x).v) \geq 0$  por tanto  $f_x(v) \geq 0$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $f_x(v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  por definición de  $f_x$ ,  $\varphi(JF(x).v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  y por la caracterización de  $\varphi$ ,  $JF(x).v \notin -int(K)$  para algún  $v$  y por la definición concluimos que  $x$  es  $k$ -crítico. ■

Ahora podemos extender la noción de dirección de mayor pendiente al caso vectorial con un cono arbitrario  $K$  que satisface las condiciones establecidas al inicio de este capítulo.

**Definición 4.10.** *Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , la dirección de mayor  $K$ -pendiente (para  $F$  en  $x$ ), denotado por  $v_x$  es la solución de:*

$$\min \left\{ f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \right\}, v \in \mathbb{R}^n. \quad (4.28)$$

*el valor optimal de este problema será denotado por  $\alpha_x$ .*

### Observación.

1. En el caso de la minimización escalar donde  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{R}_+$  tomando  $C = \{1\}$  la dirección de mayor  $k$ -pendiente para  $F$  es exactamente la dirección de mayor pendiente clásico, en efecto.

Usando la ecuación (4.25), tenemos

$$f_x(v) = \sup\{\langle w, JF(x)v \rangle; w \in C\}.$$

En nuestro caso  $JF(x)$  no es mas que el gradiente de  $F$  en el punto  $x$  y como  $C = \{1\}$ , entonces

$$f_x(v) = \langle 1, \nabla F(x)v \rangle = \nabla F(x)v = \langle \nabla F(x), v \rangle,$$

por otro lado  $(\|\nabla F(x) + v\|)^2 \geq 0$  para cualquier  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$0 \leq \|\nabla F(x)\|^2 + 2 \langle \nabla F(x), v \rangle + \|v\|^2,$$

en consecuencia

$$-\frac{1}{2} \|\nabla F(x)\|^2 \leq \nabla F(x)v + \frac{1}{2} \|v\|^2,$$

para cualquier  $v \in \mathbb{R}^m$ . Pero, podemos escribir  $-\frac{1}{2} \|\nabla F(x)\|^2$  del siguiente modo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|\nabla F(x)\|^2 &= \langle \nabla F(x), -\nabla F(x) \rangle + \frac{1}{2} \|-\nabla F(x)\|^2 \\ &= f_x(-\nabla F(x)) + \frac{1}{2} \|-\nabla F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Entonces tenemos la siguiente desigualdad

$$f_x(-\nabla F(x)) + \frac{1}{2} \|-\nabla F(x)\|^2 \leq f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2,$$

para cualquier  $v \in \mathbb{R}^m$ . Esta desigualdad prueba que el

$$\min\{f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2\},$$

es alcanzado en  $-\nabla F(x)$ . Así,  $v_x = -\nabla F(x)$  por tanto el valor optimal  $\alpha_x = -\frac{1}{2} \|\nabla F(x)\|^2$  ■.

2. Para la optimización multicriterio donde  $K = \mathbb{R}_+^m$  con  $C$  dado por la base canónica de  $\mathbb{R}^m$ , i.e.,  $C = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , recuperamos la dirección de mayor pendiente propuesta en (4.12). Es decir, dado que  $f_x(v) = \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).v \rangle$  consideremos que en  $e_i$  alcanza el supremo, así

$$\begin{aligned} f_x(v) &= \langle e_i, JF(x).v \rangle \\ &= (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0)(JF(x).v) \\ &= (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \frac{\partial F_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) (v_1, \dots, v_n) \\ &= \nabla F_i(x).v \\ &= \langle v, \nabla F_i(x) \rangle. \end{aligned}$$

Así en (4.28) tenemos

$$\min f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2, \text{ donde } f_x(v) = \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).v \rangle$$

$$\min_{i=1, \dots, m} \max \langle v, \nabla F_i(x) \rangle + \frac{1}{2} \|v\|^2 \equiv \min_{w \in C} \sup \langle w, JF(x).v \rangle + \frac{1}{2} \|v\|^2$$

donde  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ .

3. Además como  $v \rightarrow f_x(v)$  es una función real convexa cerrada,  $v_x, \alpha_x$  están bien definidas.

En efecto, sea

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow h(v) = f_x(v), \text{ donde } f_x(v) = \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).v \rangle$$

$$= \varphi(JF(x).v)$$

Veamos que

- (i)  $h(v)$  es convexa.

Consideremos  $v, u \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$ , así

$$\begin{aligned} h(tv + (1-t)u) &= \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).(tv + (1-t)u) \rangle \\ &= \sup_{w \in C} \langle w, JF(x)tv + JF(x)(1-t)u \rangle \\ &= \sup_{w \in C} \{t \langle w, JF(x).v \rangle + (1-t) \langle w, JF(x).u \rangle\} \\ &\leq t \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).v \rangle + (1-t) \sup_{w \in C} \langle w, JF(x).u \rangle \\ h(tv + (1-t)u) &\leq th(v) + (1-t)h(u) \blacksquare. \end{aligned}$$

- (ii)  $h(v)$  es convexa cerrada.

Por definición debemos probar que  $h(v)$  es cerrada si se cumple que su epigrafo es

un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , i.e.,

$$\{(v, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} / h(v) \leq \lambda\} = \mathcal{E}pih.$$

Sea  $(v^k, \lambda^k) \in \mathcal{E}pih$ , una sucesión convergente a  $(v, \lambda)$  para  $k \rightarrow \infty$  siendo  $h(v^k) \leq \lambda^k$  para todo  $k$ .

Así  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h(\lambda^k)$  y por la continuidad de  $h$  tenemos  $\lambda \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h(\lambda^k) = h(v)$ .

Por tanto  $\lambda \geq h(v)$  así  $(v, \lambda) \in \mathcal{E}pih$  ■.

(iii) Dado que  $h(v)$  es una función real convexa cerrada  $v_x, \alpha_x$  están bien definidas.

4. Dado que  $F$  es continuamente diferenciable y  $\varphi$  es lipchitz continua, la aplicación  $(x, v) \rightarrow f_x(v)$  es también continua.

En efecto,

- Dado que el Jacobiano  $JF(x)$  es continuo en todo  $x \in \mathbb{R}^n$  en particular será para  $x' \in \mathbb{R}^n$ , así  $\forall \varepsilon' > 0$  existirá  $\delta_1 > 0$ ,  $\|x - x'\| < \delta$ , tal que

$$\|JF(x) - JF(x')\| < \varepsilon'.$$

- Por otro lado la aplicación

$$\begin{aligned} JF(x) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\rightarrow JF(x).v \end{aligned}$$

para un  $x$  fijo arbitrario es una transformación lineal entonces es lipschitziana, por tanto continua.

i.e.,  $\forall \varepsilon'' > 0$ , existirá  $\delta_2 > 0$ ,  $\|v - v'\| < \delta_2$ ;  $\|JF(x)v - JF(x)v'\| \leq \varepsilon''$ .

Además consideremos que  $h(x, v) = f_x(v) = \varphi(JF(x).v)$  y por la lipschitzianidad

de  $\varphi$  tenemos que existe un  $L' > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(JF(x).v) - \varphi(JF(x').v')\| &\leq L' \|JF(x).v - JF(x').v'\| \\
&\leq L' \|JF(x).v - JF(x).v' + JF(x).v' - JF(x').v'\| \\
&\leq L' \|JF(x).v - JF(x).v'\| + L' \|JF(x).v' - JF(x').v'\| \\
&\leq L' \frac{\varepsilon}{2L'} + L' \|v'\| \|JF(x) - JF(x')\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + L' \|v'\| \frac{\varepsilon}{2L' \|v'\|} \\
\|\varphi(JF(x).v) - \varphi(JF(x').v')\| &\leq \varepsilon \blacksquare.
\end{aligned}$$

**Lema 4.5.**

- (i) Si  $x$  es  $K$  crítico entonces  $v_x = 0, \alpha_x = 0$ .
- (ii) Si  $x$  es no  $K$  crítico entonces  $v_x \neq 0, \alpha_x < 0, f_x(v_x) < -\frac{1}{2} \|v_x\|^2 < 0$  y  $v_x$  es una dirección  $k$ -pendiente.
- (iii) Las aplicaciones  $x \mapsto v_x, x \mapsto \alpha_x$  son continuas.

**Demostración.**

**Prueba de (i).** Si  $x$  es  $K$ -crítico, entonces por la Proposición 4.5,  $f_x(v) \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$ . Dado que buscamos el mínimo para (4.28), así  $f_x(0) = 0$ . Por lo tanto  $v_x = 0$ . Ahora reemplazando  $v_x$  en la expresión

$$\min f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que

$$\min f_x(0) + \frac{1}{2} \|0\|^2 = 0.$$

Así  $\alpha_x = 0$ . ■

**Prueba de (ii).** Si  $x$  es no  $K$  - crítico, entonces para algún  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_x(v) < 0$ . Observar que  $f_x(\cdot)$  homogénea positiva de grado 1, i.e.,

$$f_x(\lambda v) = \sup_{w \in C} \langle w, JF(x) \cdot \lambda v \rangle = \lambda \sup_{w \in C} \langle w, JF(x) \cdot v \rangle = \lambda f_x(v).$$

Tomando

$$\tilde{t} = -\frac{f_x(v)}{\|v\|^2}, \quad \tilde{v} = \tilde{t}v$$

y dado que  $f_x(\cdot)$  es homogénea positiva de grado 1, tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(\tilde{v}) + \frac{1}{2} \|\tilde{v}\|^2 &= \tilde{t} f_x(v) + \frac{1}{2} \tilde{t}^2 \|v\|^2 \\ &= \frac{-f_x(v)}{\|v\|^2} \cdot f_x(v) + \frac{1}{2} \frac{f_x^2(v)}{\|v\|^4} \cdot \|v\|^2 \\ &= \frac{-f_x^2(v)}{\|v\|^2} + \frac{1}{2} \frac{f_x^2(v)}{\|v\|^2} \\ &= -\frac{f_x^2(v)}{\|v\|^2} < 0 \end{aligned}$$

De aquí  $\alpha_x < 0$ , seguidamente  $\tilde{v}_x \neq 0$ , además la dirección de mayor  $K$  - pendiente en  $x$  es  $\tilde{v}_x$  la cual es solución de

$$\min f_x(\tilde{v}) + \frac{1}{2} \|\tilde{v}\|^2, \quad \tilde{v} \in \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

**Prueba de (iii).** Sea  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > 0$  se define

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n / \|v_{x^0} - v\| = \varepsilon\}$$

Notar que  $v_{x^0}$  es solución para (4.28) y además veamos que función objetivo es fuertemente convexa de módulo  $\frac{1}{2}$ , en efecto, consideremos

$$h(v) = f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2.$$

Por demostrar  $h(v+(1-t)v_{x^0}) \leq th(v)+(1-t)h(v_{x^0})-\frac{1}{2}t(1-t)\|v-v_{x^0}\|$ , con  $v, v_{x^0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Veamos que  $h(v)$  es fuertemente convexa, i.e.,

$$h(vt + (1-t)v_{x^0}) \leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) - \frac{t(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} h(vt + (1-t)v_{x^0}) &= f_x(vt + (1-t)v_{x^0}) + \frac{1}{2} \|vt + (1-t)v_{x^0}\|^2 \\ &\leq tf_x(v) + (1-t)f_x(v_{x^0}) + \frac{1}{2} \|vt + (1-t)v_{x^0}\|^2 \\ &\leq tf_x(v) + (1-t)f_x(v_{x^0}) + \frac{1}{2} (\|tv\| + (1-t)\|v_{x^0}\|)^2 \\ &\leq tf_x(v) + (1-t)f_x(v_{x^0}) + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + \frac{(1-t)^2}{2} \|v_{x^0}\|^2 + t(1-t)\|v\|\|v_{x^0}\| \\ &\leq tf_x(v) + \frac{t}{2} \|v\|^2 + (1-t)f_x(v_{x^0}) + \frac{(1-t)}{2} \|v_{x^0}\|^2 + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 - \frac{t}{2} \|v\|^2 \\ &\quad + \|v_{x^0}\|^2 \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)}{2} \|v_{x^0}\|^2 + t(1-t)\|v\|\|v_{x^0}\| \\ &\leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) + \frac{t^2-t}{2} \|v\|^2 + \frac{(1-t)^2 - (1-t)}{2} \|v_{x^0}\|^2 + t(t-1)\|v\|\|v_{x^0}\| \\ &\leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) + \frac{(t^2-t)}{2} \|v\|^2 + \frac{(t^2-t)}{2} \|v_{x^0}\|^2 - t(t-1)\|v\|\|v_{x^0}\| \\ &\leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) + \frac{(t^2-t)}{2} (\|v\|^2 + \|v_{x^0}\|^2 - 2\|v\|\|v_{x^0}\|) \\ &\leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) + \frac{(t^2-t)}{2} (\|v\| - \|v_{x^0}\|)^2 \\ &\leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) - \frac{t(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \end{aligned}$$

$$h(vt + (1-t)v_{x^0}) \leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) - \frac{t(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \blacksquare$$

Ahora dado que  $h(v)$  es fuertemente convexa y además  $v_{x^0}$  es solución de  $h(v)$  se sigue que

$$h(vt + (1-t)v_{x^0}) \leq th(v) + (1-t)h(v_{x^0}) - \frac{t(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2$$



$$h(v_{x^0} + t(v - v_{x^0}) - h(v_{x^0}) + \frac{t(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \leq th(v) - h(v_{x^0})$$

$$\frac{h(v_{x^0} + t(v - v_{x^0}) - h(v_{x^0}))}{t} + \frac{(1-t)}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \leq h(v) - h(v_{x^0})$$

y tomando limite cuando  $t \rightarrow 0$ , tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(v_{x^0} + t(v - v_{x^0}) - h(v_{x^0}))}{t} + \frac{1}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \leq h(v) - h(v_{x^0})$$

$$dh(v_{x^0}).v + \frac{1}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \leq h(v) - h(v_{x^0})$$

$$\nabla h(v_{x^0}).v + \frac{1}{2} \|v - v_{x^0}\|^2 \leq h(v) - h(v_{x^0}), \text{ y}$$

como  $v_{x^0}$  es solución de  $h(v)$  tenemos  $\nabla h(v_{x^0}) = 0$ , de aqui

$$h(v) \geq h(v_{x^0}) + \frac{1}{2} \|v - v_{x^0}\|^2$$

$$f_{x^0}(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \geq f_{x^0}(v_{x^0}) + \frac{1}{2} \|v_{x^0}\|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2, \forall v \in S.$$

Siendo la aplicación  $(x, v) \rightarrow f_x(v)$  continua y  $S$  compacto, de aqui concluimos que existe  $\delta > 0$ , tal que si  $\|x - x^0\| < \delta$ , entonces

$$f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 > f_x(v_x) + \frac{1}{2} \|v_x\|^2, \forall v \in S.$$

Tomar ahora  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x - x^0\| \leq \delta$  y como  $v \rightarrow f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2$  es convexa concluimos de la desigualdad previa que  $v_x$  es minizador de  $f_x(\cdot) + \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$  no esta en la región  $\|v_x - v_{x^0}\| \geq \varepsilon$ . i.e. consideremos  $\beta = \{v \in \mathbb{R}^n / \|v_x - v_{x^0}\| \geq \varepsilon\}$ , donde  $v_x \notin \beta$ .

Supongamos que  $v_x \in \beta$ , entonces;  $\|v_x - v_{x^0}\| \geq \varepsilon$ ;  $0 \geq \varepsilon > 0$ , por tanto contradicción.

Asi  $\|v - v_{x^0}\| < \varepsilon$ , por lo tanto continua. Además si  $v_x$  es continua tenemos que  $f_x(v_x) + \frac{1}{2} \|v_x\|^2$  continua de aqui concluimos que  $\alpha_x$  continua ■.

**Definición 4.11.** Sea  $\sigma \in [0, 1 >$  decimos que  $v$  es una dirección mayor  $k$  - pendiente  $\sigma$  -aproximada en  $x \in \mathbb{R}^n$  si

$$f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 \leq (1 - \sigma)\alpha_x$$

o equivalentemente

$$f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 - (f_x(v_x) + \frac{1}{2} \|v_x\|^2) \leq \sigma |\alpha_x|.$$

Observar: Que la dirección de mayor  $K$  - pendiente en  $x$  es siempre una dirección de mayor  $K$  - pendiente  $\sigma$  - aproximada, porque asumimos  $\sigma \in [0, 1)$ .

La dirección de mayor  $K$  - pendiente exacta en  $x$  es la única dirección de mayor  $K$  - pendiente  $\sigma = 0$  aproximada.

**Lema 4.5.** Sea  $\sigma \in [0, 1)$ , si  $v$  es una dirección mayor  $k$  - pendiente  $\sigma$  - aproximada entonces

$$\|v_x - v\|^2 \leq 2\sigma |\alpha_x|.$$

**Demostración.**

La función  $v \mapsto f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2$  es fuertemente convexa con módulo  $\frac{1}{2}$ . Como  $v_x$  es el minimizador de esta función,

$$f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 - (f_x(v_x) + \frac{1}{2} \|v_x\|^2) \geq \frac{1}{2} \|v_x - v\|^2 \tag{a}$$

empleando la Definición 4.11, i.e.,

$$f_x(v) + \frac{1}{2} \|v\|^2 - (f_x(v_x) + \frac{1}{2} \|v_x\|^2) \leq \sigma |\alpha_x| \tag{b}$$

ahora de (a) y (b) concluimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v_x - v\|^2 &\leq \sigma |\alpha_x| \\ \|v_x - v\|^2 &\leq 2\sigma |\alpha_x|. \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación.**

Sea  $\sigma \in [0, 1)$  una tolerancia preestablecida. Del Lema 4.4 se sigue que  $v = 0$  es una dirección de mayor  $K$  - pendiente  $\sigma$  - aproximada en  $x$  si y sólo si,  $x$  es  $K$  - crítica, notar también que, si  $x$  es no  $K$  - crítica y  $v$  es una dirección de mayor  $K$  - pendiente  $\sigma$  aproximada en  $x$ , entonces  $v$  es una dirección de  $K$ - pendiente, y en particular  $v \neq 0$  ahora formalmente establecemos el método de mayor  $K$  - pendiente. Este algoritmo es un caso particular del algoritmo 1.

**Algoritmo 2 (Método de Mayor  $K$  - pendiente)**

1. Elegir  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in [0, 1)$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  establecer  $k = 0$ .
2. Si es  $x^k$  es  $k$  - crítica (i.e. si  $f_{x^k}(v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$ ) detenerse, de otra forma.
3. Calcular  $v^k$ , una dirección de mayor  $k$  - pendiente  $\sigma$  - aproximada en  $x^k$ .
4. Calcular la longitud de paso  $t_k \in (0, 1]$  de la siguiente forma

$$t_k = \max \{2^{-j} / j \in \mathbb{N}, \varphi(F(x^k + 2^{-j}v^k) - F(x^k) - \beta 2^{-j} JF(x) \cdot v^k) \leq 0\}$$

5. Establecer e ir a 2.

**Observación.** Si  $x^k$  es no  $k$  - crítica, entonces  $v^k$  obtenida en el paso 3 es una dirección de  $k$  - pendiente y  $t_k$  en el paso 4 está bien definida. Además, tal  $t_k$  puede ser obtenido por un procedimiento recursivo como se discutió previamente. Además  $x^{k+1}$  satisface  $F(x^{k+1}) \leq_K F(x^k)$ . Así la sucesión de valores objetivos  $\{F(x^k)\}$  es  $K$  - no creciente.

**Proposición 4.6.** Sea  $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $x$  y  $v$  tales que  $JF(x)v \prec_K 0$ . Entonces existe  $\hat{t}$ ,  $\delta$  y  $\delta' > 0$  tal que

$$v' \text{ es una dirección } K\text{-descendiente en } x,$$

$$F(x' + tv') \leq_K F(x') + \beta t JF(x')v',$$

para algún  $t \in [0, \hat{t}]$ ,  $x' \in \beta(x, \delta)$ ,  $v' \in \beta(v, \delta')$ .

**Demostración.** Por la afirmación  $JF(x)v \in -\text{int}(K)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$JF(x)v + y \in -\text{int}(K), \forall y \in \mathbb{R}^m, \|y\| \leq \varepsilon.$$

Como  $JF$  es continuo, existe  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tal que si  $\|x' - x\| \leq \delta_1$ ,  $\|v' - v\| \leq \delta_2$ , entonces

$$\|JF(x')v' - JF(x)v\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y así  $JF(x')v' \prec_K 0$ . Por la continuidad de  $JF$ ,

$$F(z + tu) = F(z) + JF(z)u + tR(z, tu).$$

Con

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|R(z, tu)\| = 0$$

uniformemente para  $z$  y  $u$  en conjuntos compactos, por lo tanto existe  $\bar{t} > 0$  tal que para  $t \in \langle 0, \bar{t} \rangle$ ,  $\|x' - x\| \leq \delta_1$  y  $\|v' - v\| \leq \delta_2$ , entonces

$$\|R(x', tv')\| \leq \frac{\varepsilon}{[2(1 - \beta)]}.$$

Luego, concluimos que para  $t \in \langle 0, \bar{t} \rangle$ ,  $\|x' - x\| \leq \delta_1$  y  $\|v' - v\| \leq \delta_2$

$$F(x' + tv') = F(x') + tJF(x')v' + R(x', tv')$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(x' + tv') &= F(x') + t\beta JF(x')v' + t[(1 - \beta)JF(x')v' + R(x', tv')] \\ &= F(x') + t\beta JF(x')v' + t(1 - \beta)[JF(x)v + (JF(x')v' - JF(x)v) \\ &\quad + \frac{1}{(1 - \beta)}R(x', tv')] \\ &< \kappa F(x') + t\beta JF(x')v. \end{aligned}$$

# Métodos y Materiales

Para la realización de este trabajo de tesis se reviso bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionados al tema de interes. Así realizando un minucioso estudio de cada tema adecuado al objetivo de la tesis. La investigación realizada es básicamente teórica y algunos ejemplos basados en las fuentes bibliográficas dadas en esta investigación.

Con respecto a la digitación de la Tesis se usó el procesador de texto Latex, el cual es indicado para la escritura de textos científicos.

# Resultados

Los resultados en esta investigación son los siguientes:

1. Para poder solucionar un problema multiobjetivo ya sea irrestricto o con restricciones necesitamos previamente establecer una relación de orden en espacios de dimensión superior a 1 en el cual es caracterizado por cono. Dado que resulta básico en la programación multiobjetivo ya que nos va permitir definir los distintos conceptos de optimalidad.
2. En la programación multiobjetivo encontramos un conjunto de soluciones a diferencia de la programación escalar. Cuyas soluciones son llamadas soluciones eficientes u optimo de Pareto.
3. Dentro de los conceptos de soluciones para los problemas de programación multiobjetivo convexa. El concepto de eficiencia u optimo de Pareto es la principal noción eficiencia.
4. Los resultados más utilizados dentro de la programación multiobjetivo es la escalarización por ponderaciones, utilizado en la Economía, Ingeniería y otras áreas, etc.

# Discusiones

1. La bibliografía existente sobre programación multiobjetivo convexa muestra las definiciones, proposiciones, teoremas y corolario pero no da un ejemplo claro de minimización y maximización, en la tesis hemos dado una interpretación y mostrado los conceptos de solución eficiente o optimo de Pareto. Con ejemplos sencillos.
2. Los métodos para programación multiobjetivo convexa mas usada son el método de ponderaciones o suma de pesos y el método de la restricción. En esta investigación hacemos mención del método de ponderación o suma de pesos en detalle en alguna literatura sugiere que los pesos sean establecidos de tal manera que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $w \geq 0$  lo cual resulta una combinación convexa de funciones objetivos, pero no hay ninguna restricción a los valores de los pesos más que  $w > 0$  lo cual asegura la optimalidad-paretiana.



# Conclusiones

De esta investigación realizada obtenemos las siguientes conclusiones.

1. Se ha estudiado los diferentes conceptos de los problemas de programación multiobjetivo de la forma general

$$\begin{aligned} \max f(x) \\ x \in S \end{aligned}$$

donde  $S$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) es una función vectorial.

2. Se ha revisado la técnica de escalarización para la generación de puntos eficientes u óptimo de Pareto, así como la caracterización, propiedades y además las condiciones suficientes de primer orden de eficiencia propia de Kunh-Tuker.
3. Se ha analizado el método de mayor pendiente para optimización multiobjetivo en la cual se asume que las funciones de restricciones y objetivo son continuamente diferenciables y bajo estas condiciones, se muestra que este método converge a un punto que satisface ciertas condiciones de primer orden, para la optimalidad de Pareto. Un trabajo para futuras tesis de Licenciatura puede ser el estudio del método de Newton para optimización multiobjetivo.

# Bibliografía

- [1] Bazaraa , M.S., Sherald, and Shetty , C.M., Nonlinear Programming : theory and Algorithms , Second Edition , Jhon Wiley & Sons , 1993.
- [2] Berkovitz, L., Convexity and Optimization in  $R^n$  , Jhon Wiley & Sons , Inc. New York , 2002.
- [3] Bartle, R. Introducción al Análisis Matemático . México : Limusa, 1984.
- [4] Canales, P., Convexidad y Aplicaciones , Sociedad de Matematica Peruana XXII Coloquio , 19-23 de julio del 2004.
- [5] Cohon, J.L. Multiobjective Programing Planning, Academic press, (1978).
- [6] Castillo E., Conejo A .J., Pedregal P., Garcia R., y Alguacil N. Formulacion y Resolucion de Modelos de Programacion en Ingenieria y Ciencia ., Universidad de Oviedo. España 2002.
- [7] Ehrgott M. Multicriteria Optimización. Springer, Verlag Berlín, 2000.
- [8] Geoffrion, A.M.: Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization. Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- [9] Henig, M.I.: Proper Efficiency with Respect to Cones. Journal in Optimization Theory and Application.
- [10] Ignazio, J.P. Goal Programming and Extensions.. Lexington Books, (1976).

- [11] Izmailov , A., and Solodov . M., Otimizacao -volume 1 , IMPA , Rio de Janeiro, Brasil , 2005.
- [12] Jahn, J.: Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces. Peter Lang, Frankfurt 1986.
- [13] Jahn, J.: Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization. Springer, Verlag. Berlín 2000.
- [14] Jorg Fliege and B .F . Svaiter. Steepest Descent Methods for Multicriteria Optimi- zation . Mathematical Methods of Operations Research 51(3):479-494, 2000.
- [15] Koopmans ; T .C.: "Analysis of production as an Efficient Combination of Activi- ties" . New York (1951).
- [16] Kunh, H.W., A.W. Toker: "Nonlinear Programing . In J . Neyman (ed):Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Uni- versity of California Press , Berkeley (1951).
- [17] Lima , E ., Curso de Analise I . , Instituto de Matematica Pura y Aplicada, 1991.
- [18] Lima , E ., Curso de Analise II . , Instituto de Matematica Pura y Aplicada, 1989.
- [19] Ríos Insua, D.: Sensitintg Analysis in Multiobjective. Decisión Marking. Sprin- ger,Verlag ,1990.
- [20] Rokafellar , R .T ., Convex Analysis , Princeton University Press , Princeton New York , 2005.
- [21] Romero C. Teoría de la Decisión Multicriteria. Alianza Editorial. Madrid. 1993.
- [22] Ruiz de la Rúa . F. Programacion multiobjetivo convexa Fudamentos y Metodos de determinación de soluciones Malaga , 1994.
- [23] Zeleny, M. Multiple Criteria Decisión. Mc Graw Hill, Nueva York, 1982.

[24] T.D .Luc. Theory of Vector Optimization , volume 319 of Lect : Notes in Econ .  
And Math. Systems Springer-Verlag , 1989.

[25] Tiel ,Jan Van . Convex Analysis. Jhon Wiley & Sons . New York 1984.