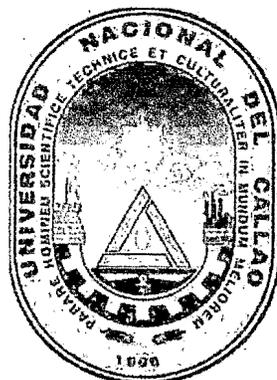


7/510/C45

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



# “REPRESENTACIÓN FINITA DEL GRUPO TRENZAS PURAS”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

LEO MOISÉS CERIN SOTO

Callao, Noviembre, 2013

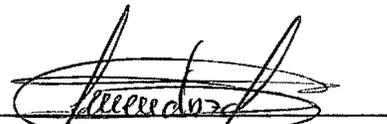
PERÚ

## HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

Representación finita del grupo trenzas puras

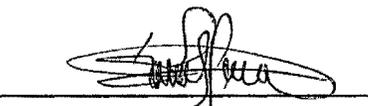
Leo Moisés Cerin Soto

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.



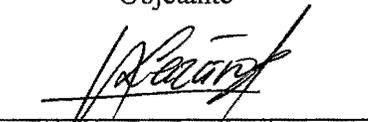
---

Lic. Wilfredo Mendoza Quispe  
Presidente



---

Mg. Ruth Medina Aparcana  
Objetante



---

Lic. Moisés Lázaro Carrión  
Secretario

Callao - Perú

noviembre - 2013

## AGRADECIMIENTOS

1. A Dios, quien creó el universo y la vida, y así mismo la sustenta de la Eternidad a la Eternidad.
2. A mis padres, Leonidas Cerin Vasquez y Guadalupe Soto Palomino, mis progenitores que supieron orientarme en este difícil camino de la vida,, a ellos mi eterna gratitud.
3. Al profesor Lic. Ezequiel Fajardo Campos por sus sabias enseñanzas y buenos consejos en el aula y fuera de ella. Estoy con el en deuda, ciertamente.
4. Al profesor Lic. Absalón Castillo Valdivieso por su paciente revisión del manuscrito, fundamentalmente en lo concerniente en la corrección de la redacción del mismo. Le debo mi especial agradecimiento sincero.
5. Finalmente, mi agradecimiento infinito a los profesores de la Escuela Profesional de Matemática, por sus acertadas enseñanzas en las distintas materias de la Carrera Profesional de Matemática. Nunca olvidaré sus atinados consejos, los llevaré hasta cuando me haga viejo.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN</b>	<b>10</b>
1.1	IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	10
1.2	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	10
1.3	OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	10
1.3.1	Objetivos Generales . . . . .	10
1.3.2	Objetivos Específicos . . . . .	10
1.4	JUSTIFICACIÓN . . . . .	11
1.5	IMPORTANCIA . . . . .	11
<b>2</b>	<b>MARCO TEÓRICO</b>	<b>12</b>
2.1	Preliminares . . . . .	12
2.1.1	Espacios Topológicos . . . . .	12
2.1.2	Aplicaciones entre Espacios Topológicos y Homeomorfismo	33
2.1.3	Variedad Topológica . . . . .	39
2.1.4	Variedad diferenciable . . . . .	41
2.1.5	Grupos y Homomorfismo . . . . .	46
2.1.6	El grupo de permutación . . . . .	52
2.1.7	Grupos libres y secuencias exactas . . . . .	54
2.2	Grupos de Homotopía . . . . .	60
2.2.1	Espacios de Recubrimiento . . . . .	60
2.2.2	Grupo Fundamental . . . . .	63
2.2.3	Homotopía de Dimensión Mayor . . . . .	74
2.3	El Grupo de Trenzas de Artin . . . . .	79

2.3.1	Trenzas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	79
2.3.2	Trenzas Equivalentes . . . . .	80
2.3.3	Diagrama de Trenzas . . . . .	86
2.3.4	El Grupo de Trenzas de Artin . . . . .	90
2.3.5	Sistema de generadores del grupo trenza . . . . .	99
2.4	Representación finita del grupo trenzas puras . . . . .	112
2.4.1	Trenzas puras . . . . .	112
2.4.2	Configuraciones y Trenzas Puras . . . . .	115
2.4.3	Generación finita de Grupo de trenza pura . . . . .	122
<b>3</b>	<b>VARIABLES E HIPÓTESIS</b>	<b>144</b>
3.1	Variables de la investigación . . . . .	144
3.2	Operacionalización de la variable . . . . .	144
3.3	HIPÓTESIS GENERAL E HIPÓTESIS ESPECÍFICAS . . . . .	145
3.3.1	Hipótesis general . . . . .	145
3.3.2	Hipótesis específicas . . . . .	145
<b>4</b>	<b>METODOLOGÍA</b>	<b>146</b>
4.1	TIPO DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	146
4.2	DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	146
4.3	POBLACIÓN Y MUESTRA . . . . .	147
4.4	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	147
4.5	PROCEDIMIENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS . . . . .	147
4.6	PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO Y ANÁLISIS DE DATOS . .	147
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>148</b>
<b>6</b>	<b>DISCUSIONES DE RESULTADOS</b>	<b>149</b>

<b>7</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>150</b>
<b>8</b>	<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>151</b>
<b>9</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>152</b>

## TABLAS DE CONTENIDO

2.1	$A$ es vecindad de $x$ . . . . .	14
2.2	$\bar{A}$ es la cerradura de $A$ . . . . .	16
2.3	En un espacio $T_0$ , dados dos puntos diferentes es posible hallar un abierto que contenga a uno de los puntos pero no al otro. . . . .	21
2.4	En espacios $T_1$ , es posible que haya vecindades de un punto $x$ que intersecten a cualquier vecindad de otro punto $y$ . No obstante, existe una vecindad de $x$ que no contiene a $y$ y viceversa. . . . .	22
2.5	En los espacios Hausdorff, dos puntos diferentes $x$ y $y$ , siempre tienen vecindades ajenas que los contienen . . . . .	25
2.6	Axioma de separación $T_3$ : el conjunto $F$ es cerrado y $x \notin F$ . . . . .	27
2.7	Función cerrada no abierta. . . . .	37
2.8	Variedad diferenciable. . . . .	42
2.9	Cambio de coordenadas. . . . .	43
2.10	Aplicación diferenciable. . . . .	45
2.11	Un cubrimiento de $S^1$ . . . . .	61
2.12	Recubrimiento del abierto $U$ por $p$ . . . . .	61
2.13	Compatibilidad del producto de caminos. . . . .	65
2.14	Homotopias isomorfas en un espacio arco conexo, $f$ une “ $x$ ” e “ $y$ ” y $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ . . . . .	68
2.15	Ejemplo de una 3-trenza. . . . .	80
2.16	El movimiento elemental $\Omega$ : reemplazando $\overline{AB}$ por $\overline{AC} \cup \overline{BC}$ . . . . .	81
2.17	El movimiento elemental $\Omega^{-1}$ reemplazando $\overline{AC} \cup \overline{BC}$ con $\overline{AB}$ . . . . .	82
2.18	Una trenza y su proyección. . . . .	86

2.19	Cuando dos líneas paralelas en la proyección intersectan, podemos inclinar ligeramente una así que la intersección resulta un punto. . . . .	87
2.20	Cuando a lo mas dos líneas cruzan un punto podemos doblar cada dos de las líneas al rededor del punto. . . . .	88
2.21	Cuando un vértice está recostado sobre un punto intersección, simplemente truncamos el vértice. . . . .	88
2.22	Un doble punto, y las dos posibles modificaciones señaladas con líneas horizontales puestas arriba y abajo. . . . .	89
2.23	Un diagrama regular, retrasado sin algunos puntos señalados con líneas horizontales puestas arriba y abajo. . . . .	90
2.24	Dos 3-trenzas atraídos uno encima del otro, entonces pegados dá su producto. . . . .	91
2.25	Dos 3-trenzas $\alpha, \beta$ con los productos $\alpha\beta, \beta\alpha$ . . . . .	93
2.26	Diagramas $A, B, C$ para trenzas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ respectivamente. . . . .	93
2.27	Un diagrama para $(\beta_1\beta_2)\beta_3$ y para $\beta_1(\beta_2\beta_3)$ . . . . .	94
2.28	Diagrama para $\beta, 1_n$ y su producto $\beta 1_n$ . . . . .	95
2.29	Contractando la base de las cuerdas verticales de un diagrama para $\beta 1_n$ se obtiene diagrama para $\beta$ . . . . .	95
2.30	El cruzamiento $X$ y su imagen reflejo sobre $J$ . . . . .	97
2.31	El cruzamiento $X$ y su imagen reflejo sobre $J$ . . . . .	97
2.32	Un diagrama para $\sigma_i$ y su inversa $\sigma_i^{-1}$ . . . . .	99
2.33	Un diagrama regular re-trazado donde los dos cruzamientos a la misma altura no son grandes. . . . .	100
2.34	Una trenza con planos de nivel entre cada par de cruzamientos, re-trazados, así mas cuerdas son verticales. . . . .	101
2.35	Un diagrama para $\sigma_i\sigma_j$ y después realizando el movimiento elemental punteado tenemos un diagrama para $\sigma_j\sigma_i$ . . . . .	102

2.36	Un diagrama para $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ y después de realizado el movimiento elemental punteado tenemos un diagrama para $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ . . . . .	102
2.37	Los diagramas $C_{\sigma_i}$ y $C_{\sigma_i}^{-1}$ de $\sigma_i$ y $\sigma_i^{-1}$ respectivamente. . . . .	104
2.38	Concatenando los diagramas $C_1^{-1}$ , $C_3$ , $C_2$ para tener el diagrama $C_1^{-1} C_3 C_2$ . . . . .	104
2.39	El diagrama $D^1$ para la trenza trivial $1_n$ . . . . .	105
2.40	Un movimiento elemental sobre $d$ donde $\Delta ABC$ es vacío. . . . .	106
2.41	Un movimiento elemental sobre $d$ , donde $\Delta ABC$ contiene parte de otra cuerda $d'$ que entra y sale de $\Delta ABC$ bajo $\overline{AB}$ . . . . .	107
2.42	Un movimiento elemental sobre $d$ , donde $\Delta ABC$ contiene parte de otra cuerda $d'$ que entra a $\Delta ABC$ y sale bajo $BC$ . . . . .	108
2.43	Un movimiento elemental sobre $d$ , donde $\Delta ABC$ contiene parte de otra cuerda $d'$ que entra y sale de $\Delta ABC$ bajo uno de $BC$ , $AC \cup BC$ y sale bajo la otra. . . . .	109
2.44	Un movimiento elemental sobre $d$ , donde $\Delta ABC$ contiene parte de dos cuerdas con un cruzamiento entre ellos, donde ambas cuerdas del cruzamiento entran a $\Delta ABC$ bajo $AC$ y sale bajo $BC$ . . . . .	110
2.45	Generadores del grupo de trenzas puras, $n$ -trenza $A_{ij}$ con $1 \leq i < j \leq n$ . . . . .	113
2.46	Los generadores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$ . . . . .	123
2.47	Gráfica de la trenza unidad $1$ . . . . .	124
2.48	Elemento de $U^{(1)}$ . . . . .	124
2.49	Elemento de $U^{(2)}$ . . . . .	126
2.50	El primero es elemento de $U^{(3)}$ . . . . .	126
2.51	La trenza $A_{12}$ y el producto de las trenzas $A_{12} A_{12}$ . . . . .	127
2.52	La trenza $A_{ij}$ y su inversa $A_{ij}^{-1}$ . . . . .	128
2.53	Descomposición de $A_{ij}$ , $A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rj} = A_{ij}$ , $i < r < s < j$ . . . . .	129
2.54	Diagrama de $l_{ij}^+(b) = 1$ . . . . .	130

2.55	Diagrama de $l_{ij}^-(b) = 1$ . . . . .	130
2.56	Descomposición de $\alpha_{25}\beta\alpha_{25}^{-1}$ , (al eliminar su última cuerda), en los generadores: $\sigma_4, \sigma_3, \sigma_2$ . . . . .	133
2.57	Gráfica de la Trenza $\Delta_5$ , cuyo cuadrado es el generador de $P_5$ . . . . .	135
2.58	Trenza $\gamma_5 = A_{1,5}A_{2,5} \cdots A_{4,5}$ . . . . .	136
2.59	Trenza $\Delta_5^2$ , generador de $P_5$ . . . . .	137
2.60	Trenzas $\sigma_3\Delta_5$ y $\Delta_5\sigma_2$ se ve que son equivalentes . . . . .	138
2.61	Trenzas $\sigma_1\Delta_5$ y $\Delta_5\sigma_4$ , que son equivalentes . . . . .	139

## RESUMEN

Representación finita del grupo trenzas puras

LEO MOISÉS CERIN SOTO

Asesor: Lic. Ezequiel Fajardo Campos.

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En principio señalamos que el objetivo principal de ésta tesis es presentar el subgrupo de trenzas puras  $P_n$  mediante un número finito de generadores, y asimismo obtener el orden de éste subgrupo y presentar el centro como subgrupo cíclico infinito para  $n \geq 3$ . En este caso, los grupos de homotopías de los espacios de configuraciones constituyen una herramienta importante en el presente trabajo.

**Palabras claves:** Grupo de trenza, espacio de configuraciones, espacios de recubrimientos, fibraciones, grupos de homotopías.

## ABSTRACT

Finite representation of pure braid group

LEO MOISES CERIN SOTO

Adviser: Lic. Ezequiel Fajardo Campos

Obtained degree: Mathematician

At first we note that the main objective of this thesis is to present the pure braid subgroup  $P_n$  by a finite number of generators, and also obtain the order of this subgroup and present the center as cyclic subgroup infinite for  $n \geq 3$ . In this case, the groups of homotopies of the spaces configurations are an important tool in this work.

**Keywords:** Braid group, configuration space, covering spaces, fibrations, homotopy group.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Cuando el grupo de trenzas puras de Artin queda identificado con el espacio de configuraciones sobre  $R^2$ . Tenemos el problema de identificar los elementos de cada uno de estos grupos.

### 1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Identificado ya el problema podemos ahora formular las siguientes interrogantes:

¿Tendrá el Grupo de Trenzas de Artin una presentación finita mediante generadores?

¿El subgrupo de trenzas puras de Artin será finitamente generado por elementos del mismo subgrupo de trenzas puras?

### 1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

#### 1.3.1 Objetivos Generales

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo general presentar los grupos de trenzas mediante un número finito de generadores.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

1. Introducir y establecer el concepto de espacios de configuraciones.

2. Introducir y determinar el concepto de grupo de homotopía en dimensión superior.
3. Determinar generadores del grupo de trenzas de Artin y sus subgrupos de trenzas puras de Artin.
4. Determinar el orden del subgrupo de trenzas puras.
5. El centro del subgrupo de trenzas puras de Artin es un subgrupo cíclico infinito, para dimensiones mayores.

#### **1.4 JUSTIFICACIÓN**

El presente trabajo queda plenamente justificado pues en cierta medida continúa el estudio de la teoría de nudos y enlaces, así mismo el grupo fundamental de los espacios de configuraciones sobre  $R^2$  se pueden expresar como grupo de trenzas puras, donde los espacios de configuraciones son usados actualmente en la robótica.

#### **1.5 IMPORTANCIA**

La importancia de este trabajo radica principalmente en que su resultado permite determinar subgrupos del grupo de trenzas, que son finitamente generados. Por otro lado también abre las puertas para determinar grupos de homotopías en distintas dimensiones, los cuales son muy usados en el estudio de estructuras algebraicas y topológicas; como por ejemplo, la existencia de campos vectoriales linealmente independientes sobre superficies, así como teorema del punto fijo.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1 Preliminares

En ésta sección presentamos algunos conceptos de topología y estructura de grupo, ya que ellos constituyen la base sobre la cual desarrollaremos la teoría de trenzas, que son fundamental para el objetivo principal tratado en este trabajo.

#### 2.1.1 Espacios Topológicos

**Definición 2.1.1.** Dada una familia  $\mathcal{F} = \{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$  de subconjuntos de un conjunto dado  $X$ , la unión de la familia de conjuntos  $\mathcal{F}$  se define como la unión de los conjuntos que son elementos de  $\mathcal{F}$ , es decir:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$$

que es el conjunto de todos los elementos de  $X$  que pertenecen al menos a un conjunto de la familia  $\mathcal{F}$ .

De ésta manera y en forma análoga definimos la intersección de una familia de conjuntos  $\mathcal{F}$  como

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha,$$

que es el conjunto de los elementos de  $X$  que pertenecen a todos los conjuntos de la familia  $\mathcal{F}$ .

El caso en que la  $\mathcal{F} = \emptyset$  resulta ser de particular importancia.

**Definición 2.1.2.** Una *topología* sobre el conjunto  $X$  es una familia de subconjuntos  $\tau \subseteq 2^X$  que satisface los axiomas siguientes ( $2^X$  denota el conjunto de partes)

1. La unión de una familia arbitraria de elementos de  $\tau$  es un elemento de  $\tau$ .
2. La intersección de una familia finita de elementos de  $\tau$  es un elemento de  $\tau$ .
3. El vacío y el mismo  $X$  pertenecen a la topología.

Los elementos de una topología  $\tau$  se denominan conjuntos *abiertos* respecto de  $\tau$ . Con ésta terminología los axiomas anteriores pueden reescribirse afirmando que la unión arbitraria de abiertos es un conjunto abierto y que la intersección finita de abiertos es un conjunto abierto, además del axioma 3. Denotamos un espacio topológico  $X$ , con topología  $\tau$  como  $(X, \tau)$

Un *espacio topológico* es un par  $(X, \tau)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una topología sobre  $X$ , y se dice que el conjunto  $X$  es el *conjunto subyacente* al espacio topológico  $(X, \tau)$ . Si no hay lugar a confusión acerca de la referencia a la topología  $\tau$  haremos referencia al espacio topológico  $X$ , prescindiendo de la referencia a la topología  $\tau$ . Los elementos de un espacio topológico se llaman *puntos*.

**Definición 2.1.3.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, se dice que la colección de abiertos  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  es una base para  $\tau$  si todo abierto es unión de elementos de  $\mathcal{B}$ . Se dice que  $\mathcal{S}$  es una *subbase* para  $\tau$  si la familia  $\mathcal{B}$  de todas las intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{S}$  es una base para  $\tau$ .

**Teorema 2.1.1.** La familia  $\mathcal{B} \subseteq 2^X$  es base para alguna topología sobre el conjunto  $X$  si y sólo si:

1.  $\cup \mathcal{B} = X$ .
2. Toda intersección finita de elementos de  $\mathcal{B}$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Demostración.** Ver [8]. □

**Proposición 2.1.1.** La familia  $\mathcal{S} \subseteq 2^X$  es subbase para alguna topología sobre el conjunto  $X$  si y sólo si  $\cup \mathcal{S} = X$ .

**Demostración.** Ver [8]. □

Consideremos un conjunto  $X$  y dos topologías  $\tau_1$  y  $\tau_2$  definidas sobre  $X$ , si  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  decimos que  $\tau_2$  es *más fina* que  $\tau_1$  o bien que  $\tau_1$  es *más gruesa* que  $\tau_2$ , lo que denotamos por  $\tau_1 \preceq \tau_2$ . Coloquial mente decimos que la topología más fina es la que tiene más abiertos.

**Proposición 2.1.2.** La intersección de topologías es una topología.

**Demostración.** Ver [8]. □

**Definición 2.1.4.** Una *vecindad* de un punto es un conjunto que contiene un abierto que y dicho abierto contenga al punto, es decir, si  $x \in A$  y existe un abierto  $U$  tal que  $x \in U \subseteq A$ , decimos que  $A$  es una *vecindad* de  $x \in X$ . En ese caso también  $U$  es claramente una vecindad de  $x$ , se dice de hecho que es una *vecindad abierta*.

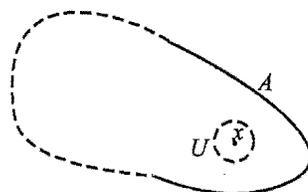


Figura 2.1:  $A$  es vecindad de  $x$ .

Dados un espacio topológico  $X$  y un punto  $x \in X$ , denotamos por  $\mathcal{N}(x)$  la colección de todas las vecindades del punto  $x$ . Este conjunto  $\mathcal{N}(x)$  es el *sistema de vecindades* del punto  $x \in X$ .

**Teorema 2.1.2.** La familia de las colecciones de vecindades  $\{\mathcal{N}(x)|x \in X\}$  tiene las propiedades siguientes:

1. Si  $B \in \mathcal{N}(x)$  y  $B \subseteq A$ , entonces  $A \in \mathcal{N}(x)$ .
2. Toda intersección finita de elementos de  $\mathcal{N}(x)$  es un elemento de  $\mathcal{N}(x)$ .
3. Si  $A \in \mathcal{N}(x)$ , entonces existe  $B \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $A \in \mathcal{N}(y)$  para todo  $y \in B$ .

**Demostración.** Ver [8]. □

**Proposición 2.1.3.** Un conjunto  $U$  es abierto si y sólo si  $U \in \mathcal{N}(x)$  para todo  $x \in U$ .

**Demostración.** Si  $U$  es abierto, entonces claramente  $U$  es vecindad de todos sus puntos. Recíprocamente, suponiendo que  $U$  es una vecindad de cada uno de sus puntos, para cada  $x \in X$  elijamos un abierto  $V_x \subseteq U$  tal que  $x \in V_x$ , claramente entonces

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x$$

de donde  $U$  es unión de abiertos y en consecuencia es a su vez un conjunto abierto. □

**Definición 2.1.5.** Dado un espacio topológico  $(X, \tau)$ , un conjunto  $F \subseteq X$  se dice que es un *conjunto cerrado* si su complemento  $X - F = F^c$  es abierto. La colección de los conjuntos cerrados será denotada por  $\mathcal{F}$  y queda definida mediante

$$\mathcal{F} = \{U^c | U \in \tau\}$$

**Teorema 2.1.3.** La familia  $\mathcal{F}$  de los conjuntos cerrados de  $X$  tiene las siguientes propiedades:

1. La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

2. La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Además un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

**Demostración.** Basta usar las leyes de DeMorgan.  $\square$

Se sigue inmediatamente que  $\emptyset$  y  $X$  son conjuntos cerrados, de manera que estos dos conjuntos son simultáneamente abiertos y cerrados, el ejemplo de conjuntos como  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  muestra que en una topología puede haber conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

**Corolario 2.1.1** (Sierpiński, 1927). La colección de los complementos de los elementos de una colección de conjuntos que satisfacen las condiciones del Teorema 2.1.3 es una topología para el conjunto  $X$ .

**Demostración.** Ver [8].  $\square$

**Definición 2.1.6.** La *cerradura*  $\bar{A}$  de un conjunto  $A$  es la intersección de todos los cerrados que contienen a  $A$ . Por la discusión previa, la cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado. De la definición se desprende que  $A \subseteq \bar{A}$  y que  $A = \bar{A}$  si y sólo si  $A$  es cerrado. Una consecuencia inmediata es que  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ . La cerradura de  $A$  se llaman entonces *puntos de adherencia* o *puntos de clausura*.

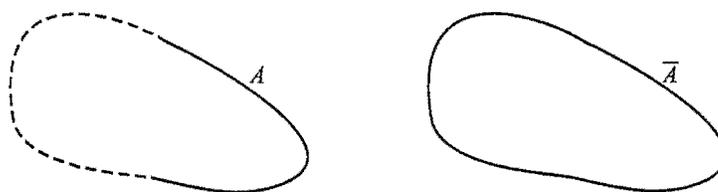


Figura 2.2:  $\bar{A}$  es la cerradura de  $A$ .

**Proposición 2.1.4.** Sea  $\mathcal{A}$  una colección finita de conjuntos en un espacio topológico. La cerradura de la unión de  $\mathcal{A}$  es la unión de las de las cerraduras de los elementos de  $\mathcal{A}$ .

**Demostración.** Para fijar ideas consideremos  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ , si denotamos  $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}\}$ , lo que pretendemos demostrar es entonces que

$$\overline{\cup \mathcal{A}} = \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k} = \cup \overline{\mathcal{A}}.$$

Cada cerrado que contiene a  $\cup \mathcal{A}$  contiene a cada elemento de  $\mathcal{A}$ , de manera que  $\overline{\cup \mathcal{A}} \subseteq \overline{\cup \mathcal{A}}$ . Recíprocamente, un conjunto cerrado que contiene a cada elemento de  $\mathcal{A}$  contiene a la unión, con lo que se obtiene  $\overline{\cup \mathcal{A}} \subseteq \overline{\cup \mathcal{A}}$  quedando demostrada la afirmación.  $\square$

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos que satisface las condiciones del teorema que caracteriza a los conjuntos cerrados, entonces, la colección de los complementos de los elementos de  $\mathcal{F}$  es una topología. La siguiente es una caracterización de la cerradura en términos de vecindades.

**Proposición 2.1.5.** Dados un espacio topológico  $X$  y  $A \subseteq X$ , un punto  $x \in X$  es tal que  $x \in \overline{A}$  si y sólo si  $U \cap A \neq \emptyset$  para toda  $U \in \mathcal{N}(x)$ .

**Demostración.** Si  $x \in \overline{A}$ , entonces  $x$  es un elemento de cada cerrado que contenga al conjunto  $A$ , en particular, si  $U$  es un abierto y  $x \in U$ , entonces, si  $U \cap A = \emptyset$ , y en consecuencia  $U^c$  es cerrado,  $A \subseteq U^c$  y  $x \notin U^c$ , lo que contradice la hipótesis. Recíprocamente, sea  $F \subseteq X$  un cerrado con  $A \subseteq F$ , si  $x \notin F$ , entonces  $F^c$  es una vecindad de  $x$  que no tiene elementos comunes con  $A$ , de forma que nuevamente encontramos una contradicción.  $\square$

**Definición 2.1.7.** El interior de  $X$  ( $X^\circ$ ) es el conjunto de puntos  $x$ , tales que existe un abierto  $U$  tal que  $U \subseteq X$

**Proposición 2.1.6.** El *interior* de  $A$  es el máximo abierto contenido en  $A$ .

**Demostración.** Supongamos que  $U$  es un abierto tal que  $A^\circ \subseteq U \subseteq A$ , entonces, por definición de interior  $U \subseteq A^\circ$ , de manera que  $A^\circ = U$  con lo que queda demostrada la proposición.  $\square$

**Definición 2.1.8.** El *exterior* de  $A$  es la unión de todos los abiertos ajenos con  $A$ , es decir, la unión de todos los abiertos contenidos en  $A^c$ . En consecuencia, el exterior de  $A$  es el interior de  $A^c$ , o sea, el conjunto  $(A^c)^\circ = \bar{A}^c$ .

**Proposición 2.1.7.** Un conjunto  $U$  es abierto si y sólo si para todo  $x \in U$  existe un abierto  $V_x$  tal que  $x \in V_x \subseteq U$ .

**Demostración.** Supongamos que  $U$  es abierto, entonces basta hacer  $V_x = U$  para todo  $x \in U$ . Recíprocamente, dada la existencia de tales  $V_x$  abiertos, entonces claramente

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x,$$

de donde  $U$  es unión de abiertos y por consecuencia es abierto.  $\square$

La siguiente es una útil caracterización del interior de un conjunto.

**Proposición 2.1.8.** Dado un conjunto  $A$  se satisface que  $A^\circ = (\bar{A}^\circ)^c$ .

**Demostración.** Ver [8].  $\square$

**Definición 2.1.9.** Está claro que el exterior  $(A^c)^\circ$  y el interior  $A^\circ$  de un conjunto dado  $A$  son abiertos ajenos, y los puntos que no son ni exteriores ni interiores son llamados *puntos frontera*. La *frontera* del conjunto  $A$  es el conjunto de sus puntos frontera, y la denotaremos por  $\partial A$ .

**Proposición 2.1.9.** Para todo conjunto  $A \subseteq X$  se satisface que  $\partial A = \bar{A} \cap \bar{A}^c$ .

**Demostración.** Claramente  $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$  y  $((A^c)^\circ)^c = \overline{A}$ , de donde

$$\partial A = [A^\circ \cup (A^c)^\circ]^c = (A^\circ)^c \cap ((A^c)^\circ)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

como se quería demostrar. □

**Definición 2.1.10.** Un conjunto es *perfecto* si es cerrado y denso en sí mismo.

**Definición 2.1.11.** Dados un espacio topológico  $X$  y un subconjunto, podemos definir una topología sobre  $A$  en la que los abiertos tienen la forma  $A \cap U$  donde  $U$  es un abierto en  $X$ . Del hecho que

$$A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap U_\alpha)$$

y

$$A \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n) = (A \cap U_1) \cap \dots \cap (A \cap U_n)$$

queda claro que los conjuntos recién definidos determinan una topología sobre  $A$  que depende de la topología de  $X$ . Esta topología se conoce como la *topología relativa* ó *topología de subespacio*. Una vez que  $A$  se ha topologizado de la manera descrita, pasa de ser un subconjunto a ser un *subespacio* de  $X$ .

**Proposición 2.1.10.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . La topología sobre  $A$  es la topología de subespacio si y sólo si  $A \cap F$  es cerrado en  $A$  para todo cerrado  $F$  en  $X$ .

**Demostración.** Basta observar que los cerrados son los complementos de los abiertos y  $A - (A \cap F) = A - F = A \cap F^c$ . □

**Proposición 2.1.11.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$  un subespacio. Si  $\mathcal{B}$  es una base para la topología de  $X$ , entonces  $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$  es una base para la topología de subespacio de  $A$ .

**Demostración.** Ver [8]. □

**Proposición 2.1.12.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$  un subespacio. Si  $\mathcal{S}$  es una subbase para la topología de  $X$ , entonces  $\mathcal{S}_A = \{S \cap A \mid S \in \mathcal{S}\}$  es una subbase para la topología de subespacio de  $A$ .

**Demostración.** Ver [8]. □

**Definición 2.1.12.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico.

1.  $(X, \mathcal{T})$  es separable si contiene un subconjunto denso numerable.
2. El espacio  $(X, \mathcal{T})$  es primero numerable si cada punto  $x \in X$  posee una base local de vecindades numerable.
3. El espacio  $(X, \mathcal{T})$  es segundo numerable si existe una base numerable para  $\mathcal{T}$ .

Las propiedades “primero numerable” y “segundo numerable” son conocidas como el primer axioma de numerabilidad y el segundo axioma de numerabilidad, respectivamente.

**Definición 2.1.13.** Dados dos espacios topológicos  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{S})$ , llamaremos topología producto  $\mathcal{P}$ , o topología de Tychonoff, en  $X \times Y$ , a la topología  $\pi_X, \pi_Y \mathcal{T}$ ; es decir,  $\mathcal{P}$  es la menor de las topologías en  $X \times Y$  que convierte a  $\pi_X$  y a  $\pi_Y$  en funciones continuas.

**Proposición 2.1.13.** Las proyecciones  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  son funciones continuas y abiertas cuando consideramos en  $X \times Y$  la topología producto.

**Demostración.** Por la definición de la topología producto en  $X \times Y$ ,  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son continuas.

Demostremos ahora que  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son funciones abiertas. Haremos la demostración sólo para  $\pi_X$ . Sea  $V$  un subconjunto abierto de  $X \times Y$  y sea  $x \in \pi_X[V]$ . Vamos a demostrar que existe un subconjunto abierto  $W$  de  $X$  que satisfice  $x \in W \subseteq \pi_X[V]$ . Como  $x \in \pi_X[V]$ , podemos asegurar que existe  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in V$ . Además, la definición de la topología producto en  $X \times Y$  nos garantiza que podemos tomar un abierto  $A$  de  $X$  y un abierto  $B$  de  $Y$  tales que  $(x, y) \in A \times B \subseteq V$ . Tenemos ahora que  $x \in \pi_X[A \times B] \subseteq \pi_X[V]$ . Pero  $\pi_X[A \times B] = A$ . Haciendo  $A = W$ , obtenemos lo deseado.  $\square$

**Observación 2.1.1.** Cuando una propiedad topológica  $P$  que comparten dos espacios  $X$  y  $Y$ , se conserva cuando consideramos la topología producto en  $X \times Y$ , diremos que  $P$  es una propiedad finitamente productiva.

**Definición 2.1.14.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  será llamado espacio  $T_0$  (también se dice que  $\mathcal{T}$  es una topología  $T_0$ ) si para cada par de puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$  existe un subconjunto abierto  $U$  tal que  $U$  contiene a uno de los puntos  $x$  ó  $y$ , pero no al otro; esto es, para cada par de puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$ , existe un abierto  $U$  tal que  $|U \cap \{x, y\}| = 1$ . (Véase Figura 2.3)

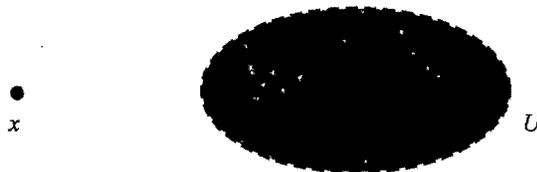


Figura 2.3: En un espacio  $T_0$ , dados dos puntos diferentes es posible hallar un abierto que contenga a uno de los puntos pero no al otro.

**Proposición 2.1.14.** Si  $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$  es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces el producto  $\prod_{j \in J} X_j$  es un espacio  $T_0$  si y sólo si cada espacio  $X_j$  es un espacio  $T_0$ .

**Demostración.** Ver [16]. □

**Teorema 2.1.4.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio  $T_0$  si y sólo si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , se tiene que  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ .

**Demostración.**  $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $x, y \in X$  son tales que  $x \neq y$ . Como  $X$  es un espacio  $T_0$ , existe  $U \in \mathcal{T}$  tal que  $|U \cap \{x, y\}| = 1$ . Podemos suponer, sin perder generalidad en el argumento, que  $\{x\} = U \cap \{x, y\}$ . Entonces  $U$  es una vecindad de  $x$  que no intersecta al conjunto  $\{y\}$ . Por este motivo,  $x \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$ .

$\Leftarrow$ ] Sean  $x, y$  puntos distintos de  $X$ . Supongamos que  $\overline{\{y\}} \setminus \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ . Elijamos un punto  $z \in \overline{\{y\}} \setminus \overline{\{x\}}$ . Como  $z \notin \overline{\{x\}}$ , existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $z \in U$  y  $U \cap \{x\} = \emptyset$ . Entonces  $y \in U$  y  $x \notin U$ . La demostración del otro posible caso es análoga. □

**Definición 2.1.15.** Diremos que un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio  $T_1$ , o que  $\mathcal{T}$  es una topología  $T_1$ , si para cualesquiera puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$ , existen subconjuntos abiertos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $x \in U \setminus V$  y  $y \in V \setminus U$ . (Véase figura 2.4)

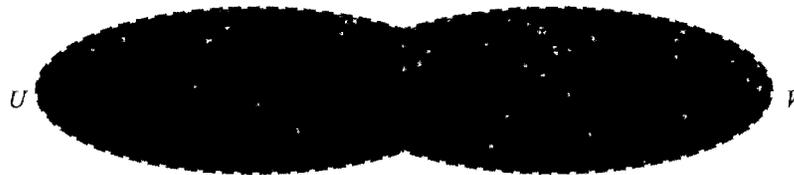


Figura 2.4: En espacios  $T_1$ , es posible que haya vecindades de un punto  $x$  que intersecten a cualquier vecindad de otro punto  $y$ . No obstante, existe una vecindad de  $x$  que no contiene a  $y$  y viceversa.

**Observación 2.1.2.** Es claro que todo espacio  $T_1$  es un espacio  $T_0$ . Pero el recíproco no es cierto.

**Observación 2.1.3.** La relevancia de los espacios  $T_1$  es que en todos ellos los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados; de hecho, como veremos a continuación, esto caracteriza a los espacios  $T_1$ .

**Teorema 2.1.5.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{S})$  es un espacio  $T_1$  si y sólo si para todo  $x \in X$ , el conjunto  $\{x\}$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .

**Demostración.**  $\Rightarrow$ ] Sean  $x \in X$  y  $y \in X \setminus \{x\}$  arbitrarios. Como  $X$  es un espacio  $T_1$ , existen abiertos  $U$  y  $V$  tales que  $x \in U \setminus V$  y  $y \in V \setminus U$ . Note ahora que  $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$ . De esta forma,  $X \setminus \{x\}$  es abierto.

$\Leftarrow$ ] Sean  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Entonces  $U = X \setminus \{y\}$  y  $V = X \setminus \{x\}$  son subconjuntos abiertos de  $X$  tales que  $x \in U \setminus V$  y  $y \in V \setminus U$ . Por ello,  $X$  es un espacio  $T_1$ .  $\square$

**Corolario 2.1.2.** Un espacio topológico  $X$  es  $T_1$  si y sólo si todo subconjunto finito de  $X$  es un subconjunto cerrado.

**Demostración.** Ver [16].  $\square$

**Corolario 2.1.3.** Si  $(X, \mathcal{S})$  es un espacio para el cual se tiene que toda sucesión definida en él tiene a lo más un límite entonces  $X$  es un espacio  $T_1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $x \in X$  es arbitrario, y que  $y \in \overline{\{x\}}$ . Puesto que tanto  $y$  como  $x$  son límites de la sucesión  $x_n = x$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , la propiedad que posee  $X$  implica que  $y = x$ . Ello nos asegura en particular que  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ . En consecuencia,  $X$  es un espacio  $T_1$ .  $\square$

**Proposición 2.1.15.** Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico  $X$ .

1.  $X$  es un espacio  $T_1$ ;

2. Cada  $A \subseteq X$  es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de  $X$  que lo contienen;
3. Para cada  $x \in X$ , el conjunto  $\{x\}$  es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de  $X$  que lo contienen.

**Demostración.** Ver [16]. □

**Proposición 2.1.16.** Sea  $(X, \mathcal{F})$  un espacio  $T_1$ . Un punto  $x \in X$  es un punto de acumulación de un subconjunto  $E$  de  $X$  si, y sólo si, cada abierto que contiene a  $x$  contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto  $E$ .

**Demostración.** Supongamos que  $x$  es un punto de acumulación de  $E$ . Consideremos un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  que contenga a  $x$ . Si ocurriera que  $U \cap E$  fuera un conjunto finito no vacío, entonces el conjunto  $(U \setminus \{x\}) \cap E$  es también un subconjunto finito de  $X$ . Supongamos que  $(U \setminus \{x\}) \cap E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (es claro que  $(U \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$  contradice ya la hipótesis sobre  $x$ ). Como  $X$  es un espacio  $T_1$ , el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es cerrado por ser un conjunto finito. Así,  $B = U \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un subconjunto abierto de  $X$  que contiene a  $x$  y satisface  $B \cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$ . Lo cual contradice nuestra hipótesis sobre  $x$ . Por lo cual, el conjunto  $U \cap E$  debe ser infinito.

Por otro lado, si cada abierto que contiene a  $x$  contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto  $E$ , entonces para cualquier vecindad  $V$  de  $x$ , siempre se tiene que  $(V \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ . Por tal motivo,  $x$  es un punto de acumulación de  $E$ . □

**Teorema 2.1.6.** Si  $\{(X_j, \mathcal{F}_j) : j \in J\}$  es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces el producto  $\prod_{j \in J} X_j$  es un espacio  $T_1$  si y sólo si cada espacio  $X_j$  es un espacio  $T_1$ .

**Demostración.** Ver [16]. □

**Definición 2.1.16.** Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio de Hausdorff o  $T_2$  si  $X$  satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$ , existen abiertos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $x \in U, y \in V$ , y  $U \cap V = \emptyset$ . (Véase la figura 2.5).

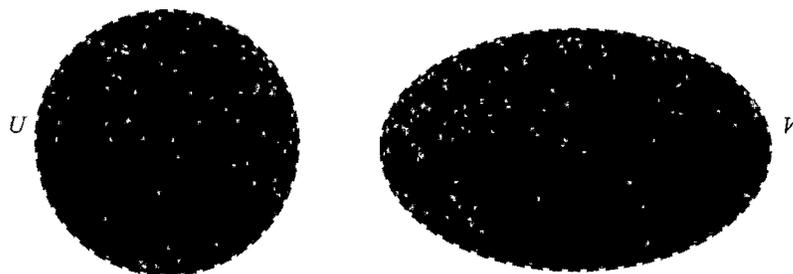


Figura 2.5: En los espacios Hausdorff, dos puntos diferentes  $x$  y  $y$ , siempre tienen vecindades ajenas que los contienen

**Observación 2.1.4.** No es difícil verificar que todo espacio  $T_2$  es un espacio  $T_1$  (y por lo tanto, también un espacio  $T_0$ ). Pero la implicación  $T_2 \rightarrow T_1$  no puede ser revertida.

**Proposición 2.1.17.** Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ .

1.  $X$  es un espacio  $T_2$ ;
2. Para cada  $x \in X$ , el conjunto  $\{x\}$  es igual a la intersección de las cerraduras de todos los subconjuntos abiertos de  $X$  que lo contienen; esto es,

$$\{x\} = \bigcap \{\overline{U} : x \in U \in \mathcal{T}\}.$$

3. La diagonal  $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  es un subconjunto cerrado de  $X \times X$ .

**Demostración.** Ver [16].

□

## Espacios regulares

Los axiomas de separación que han sido introducidos hasta este momento permiten la separación de puntos diferentes utilizando subconjuntos abiertos. Intuitivamente uno puede pensar que los objetos topológicos que siguen en grado de complejidad a los puntos de un espacio topológico son los subconjuntos cerrados del mismo (esto es así, por lo menos, en los espacios  $T_1$  ya que, recuerde, en dichos espacio los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados).

Por ello una pregunta muy natural es: ¿en cuáles espacios topológicos es posible separar puntos de subconjuntos cerrados, utilizando para ello a subconjuntos abiertos ajenos? O en forma mucho más general podemos preguntarnos: ¿en cuáles espacios topológicos es siempre posible hallar subconjuntos abiertos ajenos que separen a subconjuntos cerrados que son ajenos?

Ambas preguntas fueron estudiadas por L. Vietoris, quien en 1921 introdujo los llamados espacios regulares o espacios  $T_3$ .

**Definición 2.1.17.** Un espacio topológico  $X$  es un espacio regular o  $T_3$  si satisface las siguientes condiciones:

1.  $X$  es un espacio  $T_1$ ;
2. Para cualquier  $F \subseteq X$  cerrado y  $x \in X \setminus F$  existen conjuntos abiertos ajenos  $U$  y  $V$  tales que  $x \in U$  y  $F \subseteq V$ . (Véase la figura 2.6)

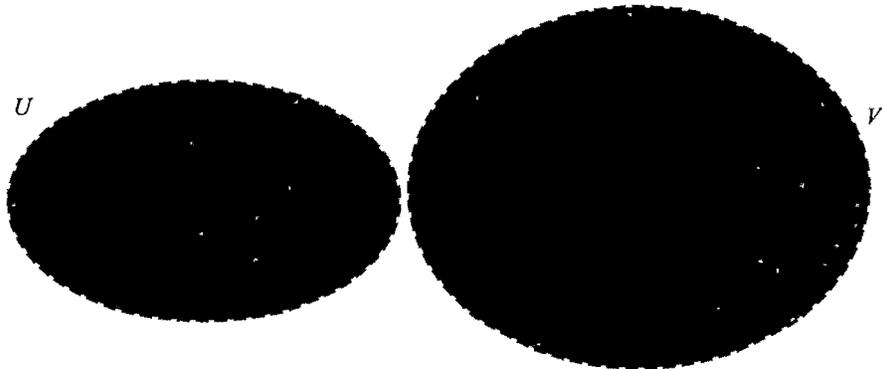


Figura 2.6: Axioma de separación  $T_3$ : el conjunto  $F$  es cerrado y  $x \notin F$ .

### Espacios compactos

**Definición 2.1.18.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Una colección  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $X$  es una cubierta de  $X$  si  $X = \bigcup \mathcal{U}$ . si además cada uno de los elementos de  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces a  $\mathcal{U}$  le llamaremos cubierta abierta de  $X$ . Por otro lado, si  $\mathcal{U}$  es una cubierta de  $X$  y  $\mathcal{V}$  es un subcolección de  $\mathcal{U}$ , diremos que  $\mathcal{V}$  es una subcubierta de  $\mathcal{U}$  si  $\bigcup \mathcal{V} = X$  es claro que aqui es la union de los elementos de  $\mathcal{V}$ .

**Definición 2.1.19.** Un espacio topológico  $X$  es un espacio compacto si toda cubierta abierta de  $X$  tiene un subcubierta finita.

### Observación 2.1.5.

- Diremos que un subconjunto  $F$  de un espacio topológico  $X$  es compacto si al ser considerado con la topología relativa, es un espacio compacto. Por ejemplo, todo subconjunto finito de un espacio topológico es siempre un subconjunto compacto.

**Definición 2.1.20.** Sea  $X$  un espacio no compacto. La compactación de Alexandroff  $A(X)$  de  $X$  es el espacio  $X \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty$  es un punto que no pertenece a  $X$ , con la siguiente topología:

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \cup \{\infty\} : U \cap X \text{ es abierto en } X \text{ y} \\ U \subseteq X \text{ ó } X \setminus U \text{ es subespacio compacto de } X\}$$

Al espacio  $A(X)$  también se le llama compactificación por un punto de  $X$ . Es fácil ver que  $\mathcal{T}$  es una topología en el conjunto  $A(X)$  y que la topología que el conjunto  $X$  hereda de  $A(X)$  coincide con su topología original. Además, el espacio  $A(X)$  es un espacio compacto. En efecto, suponga que  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $A(X)$ . Sea  $U_0 \in \mathcal{U}$  tal que  $\infty \in U_0$ . Por la definición de la topología de  $A(X)$ ,  $X \setminus U_0$  es compacto. Sean  $U_1, \dots, U_n \subseteq \mathcal{U}$  tales que  $X \setminus U_0 \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Entonces  $\{U_0, \dots, U_n\}$  es una subcubierta finita de  $\mathcal{U}$ .

**Proposición 2.1.18.** Un espacio  $X$  es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados en  $X$  con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

**Demostración.** Sea  $X$  compacto, y sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos cerrados en  $X$ . Si  $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ , entonces la familia  $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Por la compacidad de  $X$ , la cubierta  $\mathcal{U}$  tiene una subcubierta finita  $\mathcal{U}'$ . Sea  $\mathcal{F}' = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}'\}$ . Entonces  $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$ , y  $\mathcal{F}$  no tiene la propiedad de intersección finita.

Ahora supongamos que toda familia de conjuntos cerrados en  $X$  con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Entonces  $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$  es una familia de conjuntos cerrados en  $X$ , y  $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$ . Esto implica que  $\mathcal{F}$  no tiene la propiedad de la intersección finita, y entonces existe  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  finito tal que  $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$ . Entonces la familia  $\mathcal{V} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}'\}$  es una subcubierta finita de  $\mathcal{U}$ . □

**Proposición 2.1.19.** Sean  $X$  un espacio compacto y  $F$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces  $F$  es compacto.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{V}$  una cubierta abierta de  $F$ . Para todo  $V \in \mathcal{V}$  sea  $U_V$  un conjunto abierto en  $X$  tal que  $V = U_V \cap F$ . Entonces  $\mathcal{U} = \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \cup \{X \setminus F\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Sea  $\mathcal{U}'$  una subcubierta finita de  $\mathcal{U}$ . La familia  $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}'\}$  es una subcubierta finita de  $\mathcal{V}$ .  $\square$

**Observación 2.1.6.**

- Por la anterior proposición, todo espacio cociente de un espacio compacto es también un espacio compacto.
- La compacidad es una propiedad de suma importancia y gran fuerza. Por ejemplo, en el siguiente teorema se puede apreciar cómo los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff satisfacen propiedades de separación análogas a las que cumplen los puntos.

**Teorema 2.1.7.**

1. Sea  $X$  un espacio de Hausdorff, y  $K_1, K_2 \subseteq X$  subespacios compactos de  $X$ . Si  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  entonces existen subconjuntos abiertos ajenos  $U$  y  $V$  en  $X$  tales que  $K_1 \subseteq U$  y  $K_2 \subseteq V$ .
2. Sea  $X$  un espacio regular. Si  $F \subseteq X$  es cerrado y  $K \subseteq X$  es compacto y  $F \cap K = \emptyset$ , entonces existen abiertos ajenos  $U$  y  $V$  tales que  $F \subseteq U$  y  $K \subseteq V$ .

**Demostración.**

1. Fijamos un punto  $y \in K_1$ . Para todo  $x \in K_2$ , sean  $U_x^y, V_x^y$  abiertos tales que  $x \in U_x^y, y \in V_x^y$  y  $U_x^y \cap V_x^y = \emptyset$ . La familia  $\mathcal{U} = \{U_x^y \cap K : x \in K_2\}$  es una

cubierta abierta de  $K_2$ . Sea  $\{U_{x_1}^y \cap K, \dots, U_{x_m}^y \cap K\}$  una subcubierta finita de  $\mathcal{U}$ . Hagamos  $A_y = U_{x_1}^y \cup \dots \cup U_{x_m}^y$  y  $B_y = V_{x_1}^y \cap \dots \cap V_{x_m}^y$ .

Note ahora que la colección  $\mathcal{W} = \{B_y \cap K_1 : y \in K_1\}$  es una cubierta abierta de  $K_1$ . Como  $K_1$  es compacto, existen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  en  $K_1$  tales que

$\{(B_{y_1} \cap K_1), \dots, (B_{y_n} \cap K_1)\}$  es un subcubierta finita de  $\mathcal{W}$ . Definamos  $U = B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$  y  $V = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$ . Entonces  $K_1 \subseteq U, K_2 \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

2. Como  $X$  es regular, para cada  $x \in K$  existen abiertos ajenos  $U_x$  y  $V_x$  tales que  $F \subseteq U_x$  y  $x \in V_x$ . Note que la familia  $\mathcal{V} = \{V_x \cap K : x \in K\}$  es una cubierta abierta de  $K$ . Siendo  $K$  compacto, existen  $x_1, \dots, x_n$  en  $K$  tales que  $\{V_{x_1} \cap K, \dots, V_{x_n} \cap K\}$  es una subcubierta abierta de  $\mathcal{V}$ . Definamos ahora a  $U = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$  y  $V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ . Entonces  $U$  y  $V$  son abiertos ajenos tales que  $F \subseteq U$  y  $K \subseteq V$ .

□

#### Corolario 2.1.4.

1. Si  $X$  es un espacio de Hausdorff y  $K$  es subespacio compacto de  $X$ , entonces  $K$  es cerrado en  $X$ .
2. Sean  $X$  un espacio compacto,  $Y$  un espacio de Hausdorff, y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  es una función cerrada.

#### Demostración.

1. Si  $x \in X \setminus K$ , aplicando el teorema 2.1.7 a los compactos  $K_1 = \{x\}$  y  $K_2 = K$ , podemos concluir que existen subconjuntos abiertos ajenos  $U$  y  $V$  tales que  $K_1 \subseteq U$  y  $K_2 \subseteq V$ . Entonces  $x \in U \subseteq X \setminus K$ . De esta manera hemos comprobado que  $K$  es cerrado.

2. Si  $F \subseteq X$  es cerrado, entonces  $F$  es compacto. La función  $f \upharpoonright F : F \rightarrow f[F]$  es continua y sobreyectiva. Siendo  $F$  compacto,  $f[F]$  es compacto. Pero todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff, es un subconjunto cerrado.

□

**Corolario 2.1.5.** Sean  $X$  un espacio compacto,  $Y$  espacio de Hausdorff, y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

**Demostración.** Sale inmediato del Teorema 2.1.7 y la hipótesis del absurdo. □

**Proposición 2.1.20.** Sean  $X$  un espacio y  $X_1, \dots, X_n$  subespacios compactos de  $X$  tales que  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ . Entonces  $X$  es compacto.

**Demostración.** Si  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $X$ , entonces para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{U}_i = \{U \cap X_i : U \in \mathcal{U}\}$  es una cubierta abierta de  $X_i$ , y existe una subfamilia finita  $\mathcal{U}'_i \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $U \cap X_i : U \in \mathcal{U}'_i$  cubre a  $X_i$ .

La familia  $\mathcal{U}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}'_n$ , entonces, es una subcubierta finita de  $\mathcal{U}$ . □

**Teorema 2.1.8 (Tychonoff).** Sea  $\{X_j : j \in J\}$  un colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El producto de Tychonoff  $X = \prod_{j \in J} X_j$  es un espacio compacto si y sólo si el espacio  $X_j$  es compacto para cada  $j \in J$ .

**Demostración.** Ver [7]. □

### Espacios localmente compactos

**Definición 2.1.21.** Un espacio  $X$  se llama localmente compacto si todo punto de  $X$  tiene una vecindad compacta.

**Definición 2.1.22.** Diremos que un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  es conexo si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos. De lo contrario, decimos que  $(X, \mathcal{T})$  es desconexo.

**Definición 2.1.23.** Una pareja  $(U, V)$  de subconjuntos de un espacio  $X$  es una separación de  $X$  si  $U$  y  $V$  son abiertos,  $X = U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$  y  $U \neq \emptyset \neq V$ .

**Observación 2.1.7.** • Claramente, un espacio  $X$  es conexo si y sólo si no existe una separación de  $X$ .

- Naturalmente, la expresión “el subconjunto  $A$  de  $X$  es conexo (o desconexo)” se referirá al conjunto  $A$  con la topología relativa heredada de  $X$ . En algunas ocasiones también se usará la expresión: “ $A$  es un subespacio conexo de  $X$ ”. Observe que si  $A \subseteq Y \subseteq X$ , entonces  $A$  es un subespacio conexo de  $Y$ , cuando y sólo cuando  $A$  es un subespacio conexo de  $X$ .

**Proposición 2.1.21.** Sea  $X$  un espacio conexo y  $g : X \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva. Entonces  $Y$  es un espacio conexo.

**Demostración.** Supongamos que  $Y = U \cup V$  en donde  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos de  $Y$ ,  $U \cap V = \emptyset$ ,  $U \cup V = Y$  y  $U \neq \emptyset \neq V$ . Tenemos que

$$X = g^{-1}[U] \cup g^{-1}[V] \text{ y } g^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] = \emptyset.$$

Además, como  $g$  es continua y suprayectiva,  $g^{-1}[U]$  y  $g^{-1}[V]$  son subconjuntos abiertos no vacíos de  $X$ . Es decir,  $X$  no es conexo. □

**Teorema 2.1.9.** El espacio producto  $\prod_{j \in J} X_j$  es un espacio conexo si y sólo si cada  $X_j$  es conexo.

**Demostración.** Ver [7]. □

**Proposición 2.1.22.** Un espacio  $X$  es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de cada subconjunto abierto de  $X$  son conjuntos abiertos de  $X$ .

**Demostración.** Ver [7]. □

**Corolario 2.1.6.** Cualquier subespacio abierto de un espacio localmente conexo es también localmente conexo.

## 2.1.2 Aplicaciones entre Espacios Topológicos y Homeomorfismo

Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos. Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *continua* si para todo  $U \subseteq Y$  abierto se tiene que  $f^{-1}(U) \subseteq X$  es abierto. En términos locales, supóngase que  $f(x) = y$ , la aplicación  $f$  es *continua en  $x \in X$*  si y sólo si  $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$  para toda  $U \in \mathcal{N}(y)$ .

**Proposición 2.1.23.** La composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua.

**Demostración.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas, y sea  $U \subseteq Z$  abierto, entonces  $g^{-1}(U) \subseteq Y$  es abierto por la continuidad de  $g$  y

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$$

es abierto por la continuidad de  $f$ . □

**Proposición 2.1.24.** La restricción de una continua es continua.

**Demostración.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua y  $A$  un subespacio de  $X$ , entonces, para  $U \subseteq Y$  abierto, claramente  $(f|_A)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$  que es abierto en  $A$ . □

Es siempre útil tener caracterizaciones distintas de un fenómeno, y en este caso de la continuidad, de manera que pueda ser reconocible bajo circunstancias distintas.

**Teorema 2.1.10.** Si  $f$  es una función del espacio topológico  $X$  en el espacio topológico  $Y$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes.

1.  $f$  es continua.
2. Para cualquier abierto  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}[U]$  es abierto en  $X$ .
3.  $f^{-1}[F]$  es cerrado en  $X$  para cualquier cerrado  $F$  de  $Y$ .
4.  $f[\text{cl}_X(A)] \subseteq \text{cl}_Y(f[A])$  para cualquier  $A \subseteq X$ , donde  $\text{cl}_X$  y  $\text{cl}_Y$  son los operadores cerradura en  $X$  y  $Y$ , respectivamente.
5.  $\text{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\text{cl}_Y(B)]$  para cada  $B \subseteq Y$ .

**Observación 2.1.8.**  $\text{Cl}_X(A)$  es la clausura de  $A$  con respecto a la topología de  $X$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f$  es continua y que  $U$  es abierto en  $Y$ . Dado  $x \in f^{-1}[U]$ , tenemos que existe  $B_x$ , abierto en  $X$  que contiene a  $x$ , de tal forma que  $f[B_x] \subseteq U$  y, por ende,  $x \in B_x \subseteq f^{-1}[U]$ .  $f^{-1}[U] = \bigcup B_x$  que es abierto.

Demos por válido el inciso (2) y sea  $F$  un subconjunto cerrado de  $Y$ . Tenemos que  $Y \setminus F$  es un abierto en  $Y$  y, por lo tanto,  $f^{-1}[Y \setminus F]$  debe ser abierto en  $X$ . Ahora, la igualdad  $f^{-1}[Y \setminus F] = X \setminus f^{-1}[F]$  nos garantiza que  $f^{-1}[F]$  es cerrado en  $X$ .

Sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . Sabemos que  $\text{cl}_X(f[A])$  es un subconjunto cerrado de  $Y$ , así que si (3) es cierto, entonces  $f^{-1}[\text{cl}_Y(f[A])]$  es cerrado en  $X$ . Por otro lado, la condición  $f[A] \subseteq \text{cl}_Y(f[A])$ , implica que  $A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\text{cl}_Y(f[A])]$ . De aquí obtenemos que  $\text{cl}_X(A) \subseteq f^{-1}[\text{cl}_Y(f[A])]$  y, finalmente,  $f[\text{cl}_X(A)] \subseteq \text{cl}_Y(f[A])$ , tal y como se quería.

Para probar que (4) implica (5), tomemos un subconjunto  $B$  de  $Y$  y hagamos  $A = f^{-1}[B]$ . Por (4) sabemos que  $f[\text{cl}_X(A)] \subseteq \text{cl}_Y(f[A])$  y como  $f[A] \subseteq B$ , obtenemos  $f[\text{cl}_X(A)] \subseteq \text{cl}_Y(B)$ , con lo cual  $\text{cl}_X(A) \subseteq f^{-1}[\text{cl}_Y(B)]$ ; es decir,  $\text{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\text{cl}_Y(B)]$ .

Finalmente, tomemos por hipótesis el inciso (5) y concluyamos que  $f$  es continua. Sea  $x \in X$  un punto arbitrario y sea  $N$  un abierto en  $Y$  que contiene a  $f(x)$ . El conjunto  $B = Y \setminus N$  es cerrado, así que la contención del inciso (5) toma la forma:  $\text{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[B]$ . De esto último se infiere que  $f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus N] = X \setminus f^{-1}[N]$  es cerrado en  $X$  o, en otras palabras,  $M = f^{-1}[N]$  es abierto. En resumen,  $M$  es un abierto en  $X$  que contiene a  $x$  y además  $f[M] \subseteq N$ .  $\square$

**Proposición 2.1.25.** La aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si la preimagen de todo básico de  $Y$  es abierto en  $X$ .

**Demostración.** Si  $f$  es continua la conclusión es obvia. Recíprocamente, supóngase que la preimagen de todo básico es un abierto, y sea  $U \subseteq Y$  un abierto arbitrario, escribamos  $U$  como unión de básicos

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha,$$

dado que, entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f^{-1}(B_\alpha),$$

es claro que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .  $\square$

**Corolario 2.1.7.** La aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si la preimagen de todo subbásico de  $Y$  es abierto en  $X$ .

**Demostración.** Nuevamente, si  $f$  es continua la conclusión es obvia. Supóngase ahora que las preimágenes de subbásicos son abiertas y sea  $B \subseteq Y$  un básico arbitrario, escribamos  $B$  como intersección finita de subbásicos

$$B = S_1 \cap \dots \cap S_n,$$

y puesto que, entonces

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n),$$

es claro que  $f^{-1}(B)$  es abierto en  $X$ , de manera la conclusión se sigue del resultado previo.  $\square$

**Proposición 2.1.26** (Lema de pegadura para cerrados). Sean  $A, B \subseteq Y$  subespacios cerrados tales que  $A \cup B = X$ , y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si tanto  $f|_A$  como  $f|_B$  son continuas, entonces  $f$  es continua.

**Demostración.** Sea  $F \subseteq Y$  cerrado, entonces, por continuidad, tanto  $f|_A^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap A$  como  $f|_B^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap B$  son cerrados en  $X$ , y dado que además

$$f^{-1}(F) = f|_A^{-1}(F) \cup f|_B^{-1}(F),$$

se sigue que  $f^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ .  $\square$

El nombre de estos resultados, aludiendo a la pegadura, proviene del hecho de que permiten “pegar continuamente” aplicaciones continuas; una notación alegórica que se usa con frecuencia es  $f = f|_A \cup f|_B$ .

**Proposición 2.1.27** (Lema de pegadura para abiertos). Sean  $\mathcal{U} = \{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$  una colección de abiertos de  $X$  tales que  $\cup \mathcal{U} = X$ , y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si tanto  $f_\alpha = f|_{A_\alpha}$  es continua para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , entonces  $f$  es continua.

**Demostración.** Basta notar que, para  $U \subseteq Y$  abierto,  $f_\alpha^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_\alpha$  es abierto en  $A_\alpha$ , y en consecuencia es abierto en  $X$ . Por otra parte, es claro que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha^{-1}(U),$$

de donde  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .  $\square$

**Definición 2.1.24.** Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se dice que es una *aplicación abierta* si la imagen de todo abierto es abierta, y análogamente, se dice que es una *aplicación cerrada* si la imagen de todo cerrado es cerrada.

**Ejemplo 2.1.1.** Considérese la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada como sigue.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

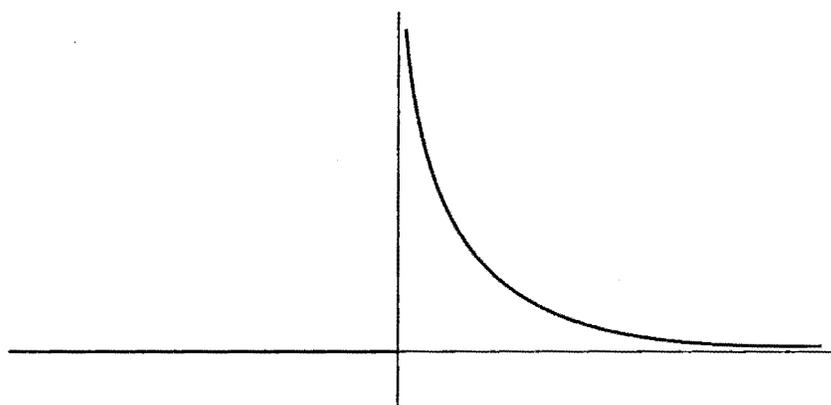


Figura 2.7: Función cerrada no abierta.

Esta función es cerrada, pero no es abierta, para convencerse basta considerar las imágenes de los intervalos  $(-1, 1)$  y  $[-1, 1]$ .

**Definición 2.1.25 (homeomorfismo).** Un *homeomorfismo* es una aplicación biyectiva y bicontinua, es una biyección continua con inversa continua. Si la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, se dice que los espacios  $X$  y  $Y$  son *espacios homeomorfos*. Claramente, dado que la composición de aplicaciones es una aplicación continua, se sigue que la relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia sobre la colección de los espacios topológicos.

**Observación 2.1.9.**

- Los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  serán llamados homeomorfos si existe un homeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ . La expresión  $X \approx Y$  significará que los espacios  $X$  y  $Y$  son homeomorfos.
- Es inmediato, de la definición que si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f^{-1}$  también lo es.

Cuando dos espacios  $X$  y  $Y$  son homeomorfos, los consideramos como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por el otro en nuestros discursos y argumentaciones sin que las conclusiones se alteren. Como hemos mencionado, ellos son el mismo objeto topológico.

**Definición 2.1.26.** Una propiedad  $P$  es topológica si cada vez que un espacio  $X$  tiene la propiedad  $P$ , también la posee cualquier espacio topológico homeomorfo a  $X$ .

**Observación 2.1.10.** Sea  $\mathcal{B}$  una base del espacio topológico  $X$ . Si  $Y$  es un espacio topológico y  $f$  es una función de  $X$  en  $Y$ , entonces el Teorema 2.1.10 implica que  $f$  es abierta si, y sólo si,  $f[B]$  es abierto en  $Y$  para cada  $B \in \mathcal{B}$ .

Es posible encontrar funciones continuas que son abiertas y no son cerradas, y viceversa; e incluso, se pueden hallar funciones que no son continuas pero sí abiertas o cerradas.

**Observación 2.1.11.** Un homeomorfismo de un espacio en sí mismo es un *automorfismo*, y es además claro que la composición de homeomorfismos es un tercer homeomorfismo. Entonces la colección de espacios en una clase de homeomorfismo tiene estructura de grupo, dado que la identidad  $1_X : X \rightarrow X$  es obviamente un automorfismo.

**Proposición 2.1.28.** Si  $f$  es una función biyectiva entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1.  $f^{-1}$  es continua.
2.  $f$  es abierta.
3.  $f$  es cerrada.

**Demostración.** Sea  $A$  un subconjunto abierto de  $X$ . Si  $f^{-1}$  es continua entonces  $(f^{-1})^{-1}[A]$  es un subconjunto abierto de  $Y$ , y como  $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ , ya podemos concluir que  $f$  es abierta.

Supongamos que  $f$  es abierta y sea  $F$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Esto último implica que  $U = X \setminus F$  es abierto en  $X$ , así que  $f[U]$  debe ser abierto en  $Y$ . Ahora, la biyectividad de  $f$  garantiza que  $f[F] = f[X \setminus U] = Y \setminus f[U]$  y, por consiguiente,  $f[F]$  es cerrado en  $Y$ .

Finalmente demostraremos que si  $f$  es cerrada, entonces  $f^{-1}$  es continua. Si  $F$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , tenemos que  $f[F]$  es cerrado en  $Y$ ; este hecho, junto con la igualdad  $(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$ , nos prueban la continuidad de  $f^{-1}$ .  $\square$

**Corolario 2.1.8.** Una función biyectiva y continua  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo si satisface alguna de las condiciones equivalentes (1),(2),(3) de la Proposición 2.1.28.

### 2.1.3 Variedad Topológica

En esta sección veremos aquellos espacios topológicos que localmente son como los espacios Euclidianos.

**Definición 2.1.27** (Variedad topológica). Una  $n$ -variedad ó variedad topológica  $n$ -dimensional es un espacio de Hausdorff en el que cada punto posee un entorno abierto homeomorfo al disco  $n$ -dimensional abierto  $\overset{\circ}{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ .

Notese que  $\overset{\circ}{D}^n \approx \mathbb{R}^n$  por lo que podríamos exigir que cada punto tenga un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Los siguientes espacios son variedades topológicas

1. El espacio  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es una  $n$ -variedad.
2. Todo subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es una  $n$ -variedad. Pues si  $u \in U$  entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $u \in B_\varepsilon(u) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$  y desde luego  $B_\varepsilon(u) \approx \overset{\circ}{D}^n$ .
3. La esfera  $S^n$  es una  $n$ -variedad. Pues vía proyección estereográfica todo punto  $x \in S^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}$  posee un entorno abierto el mismo  $S^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}$  que es homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^n$ . Además el punto  $(0, 0, \dots, 1)$  posee el entorno abierto  $S^n - \{(0, 0, \dots, -1)\}$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .
4. Si  $M$  es una  $m$ -variedad y  $N$  es una  $n$ -variedad entonces el producto  $M \times N$  es una  $m + n$ -variedad ya que  $\overset{\circ}{D}^m \times \overset{\circ}{D}^n \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \approx \overset{\circ}{D}^{m+n}$  y el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.
5. El grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$  actúa de modo propiamente discontinuo sobre  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , por la aplicación  $x \rightarrow tx$ , donde  $t \in \mathbb{R}^*$ . El espacio clases de equivalencias de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{R}^*$  puede ser interpretado como el conjunto de las rectas pasando a través del origen en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El espacio proyectivo  $n$ -dimensional es el espacio de las clases de equivalencia de la acción de  $\mathbb{R}^*$  sobre  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , dadas por las aplicaciones dichas anteriormente. El espacio  $\mathbb{R}P^n$  es una  $n$ -variedad. Para lo cuál se considera la aplicación  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  que aplica  $x \in S^n$  en el par  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ . Si  $U_x$  es un entorno abierto de  $x$  homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^n$  y de diámetro menor que  $\sqrt{2}$ . En este caso  $p(U_x)$  es un entorno abierto de  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$  homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^n$  esto

debido a que  $p$  es una aplicación continua y abierta.

Más general si  $X$  es un  $G$ -espacio donde  $G$  actúa libremente sobre  $X$  entonces  $X$  es una  $n$ -variedad compacta si solo si  $\frac{X}{G}$  también lo es.

**Definición 2.1.28.** Una  $n$ -variedad con borde  $M$  es un espacio de Hausdorff en el que cada punto posee un entorno abierto homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  ó al semiespacio superior de  $\mathbb{R}^n$  esto es  $\{(x_1, \dots, x_n); x_n \geq 0\}$ . El conjunto de puntos de  $M$  que poseen entornos homeomorfos al semiespacio superior pero que no poseen entornos homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  se llama el borde de  $M$  el cuál es una  $(n - 1)$ -variedad.

#### 2.1.4 Variedad diferenciable

**Definición 2.1.29** (Variedades diferenciables). El par  $(M^m, \mathcal{H})$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y clase  $C^k$  ó  $M$  es una  $m$ -variedad diferenciable de clase  $C^k$  si se verifican las siguientes condiciones:

1.  $M$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.
2.  $\mathcal{H}$  es una colección de homeomorfismos (sistema coordenado)  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de conjuntos abiertos  $U \subset M$  sobre conjuntos abiertos  $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ . Es usual denotar  $(U, x) = (U; x^1, \dots, x^m)$  donde los  $x^i = r_i x$  son las funciones coordenadas y  $r_i$  son las coordenadas canónicas tal que  $r_i(a) = a_i$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$  da esta representación. Ver figura (2.8)

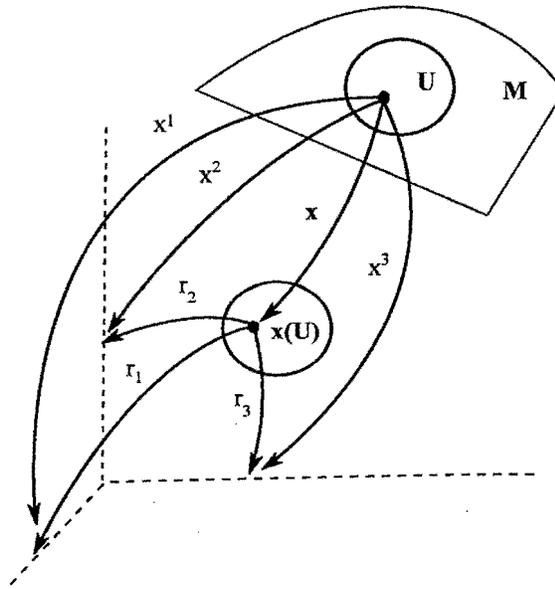


Figura 2.8: Variedad diferenciable.

3. Los dominios  $U$  de los homeomorfismos  $x \in \mathcal{H}$  cubren  $M$ .
4. Dados  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  pertenecientes a  $\mathcal{H}$  con  $U \cap V \neq \Phi$  entonces el cambio de coordenadas  $\phi_{xy} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  es homeomorfismo de clase  $C^k$ . Ver figura (2.9)

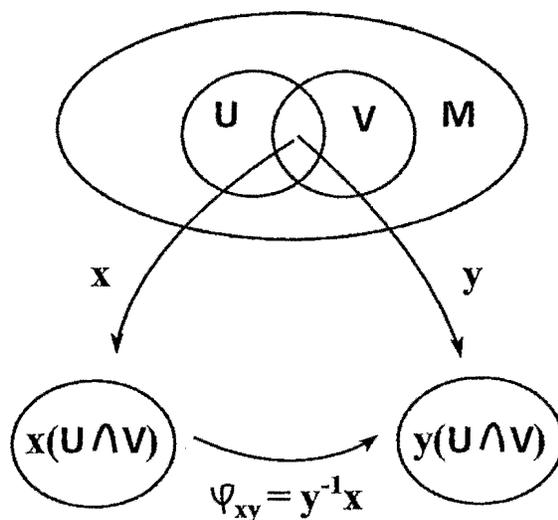


Figura 2.9: Cambio de coordenadas.

5. Dado un homeomorfismo  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  de un abierto  $W \subset M$  sobre un abierto  $z(W) \subset \mathbb{R}^m$  tal que  $\varphi_{xz}, \varphi_{zx}$  son de clase  $C^k$  para cada  $x \in \mathcal{H}$  entonces  $z \in \mathcal{H}$  (Condición de Maximalidad).

A veces denotaremos simplemente  $M = (M^m, \mathcal{H})$ .

La colección  $\mathcal{H}$  con las condiciones (2),(3),(4),(5) es llamado Atlas Maximal de dimensión  $m$  y clase  $C^k$  sobre  $M$ .

**Definición 2.1.30** (Subvariedades abiertas). Un conjunto abierto  $W$  de una variedad  $M$  de clase  $C^k$  tiene una estructura natural de variedad de clase  $C^k$  dada por el atlas maximal en  $M$  conformado por todas las coordenadas admisibles  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $M$ , cuyos dominios  $U$  están contenidos en  $W$ .

**Definición 2.1.31** (Codimensión). Si  $M$  es una  $n$ -variedad diferenciable y  $B$  una subvariedad de  $M$  la codimensión de  $B$  en  $M$  es definida

$$\text{codim}(B) = \text{dim}(M) - \text{dim}(B)$$

Notar que las subvariedades abiertas tienen codimensión cero.

**Definición 2.1.32** (Producto de Variedades). Sean  $(M^m, \mathcal{H})$  y  $(N^n, \mathcal{B})$  variedades de clase  $C^k$ . En el espacio topológico producto  $M \times N$  podemos definir una estructura de variedad de dimensión  $m + n$  y clase  $C^k$  por medio del atlas  $\mathcal{H} \times \mathcal{B}$  formado por los sistemas de coordenadas  $x \times y: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  dado por  $x \times y(p, q) = (x(p), y(q)); x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{B}$

Como  $(\tilde{x} \times \tilde{y})(x \times y)^{-1} = (\tilde{x} \times \tilde{x}^{-1})(\tilde{y} \times \tilde{y}^{-1})$  se sigue que  $\mathcal{H} \times \mathcal{B}$  es un atlas de clase  $C^k$ . Este atlas está contenido en un único atlas maximal de clase  $C^k$  que define en  $M \times N$  una estructura de variedad producto.

**Definición 2.1.33** (Variedades diferenciables con borde). Una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $M$  con borde es un espacio de Hausdorff tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo al disco abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  ó al semiespacio  $H^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ . El borde del semiespacio  $H^n$  es dado por  $\partial(H^n) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  el borde de  $M$  denotado por  $\partial(M)$  será el conjunto de todos los puntos de  $M$  que por el homeomorfismo corresponden a puntos de  $\partial(H^n)$ . Además  $M - \partial(M)$  es llamado el interior de  $M$ .

**Ejemplo 2.1.3.** El disco cerrado ó bola  $E^n = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| \leq 1\}$  es una variedad topológica  $n$ -dimensional con borde. La esfera  $S^{n-1}$  es su borde y el disco abierto  $U^n$  su interior.

**Observación 2.1.12.** El conjunto de puntos del borde y el conjunto de puntos interiores son mutuamente disjuntos. Se ve fácilmente que el conjunto de puntos interiores es un subconjunto abierto denso, por tanto el conjunto de puntos del borde es un conjunto cerrado. El conjunto de puntos del borde de una variedad  $n$ -dimensional es una variedad  $(n - 1)$ -dimensional.

**Definición 2.1.34** (Aplicaciones entre variedades diferenciables). Sean las variedades  $M, N$  de clase  $C^r$ ; ( $r \geq 1$ ) con dimensiones  $m, n$  respectivamente se dice que una aplicación  $f: M \rightarrow N$  es diferenciable en el punto  $p \in M$  si existen sistemas de coordenadas  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $M$ ,  $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $N$ , con  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$  tales que  $y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$  es diferenciable en el punto  $x(p)$ . La aplicación  $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$  es la expresión de  $f$  en las coordenadas locales  $x, y$ . Ver figura (2.10)

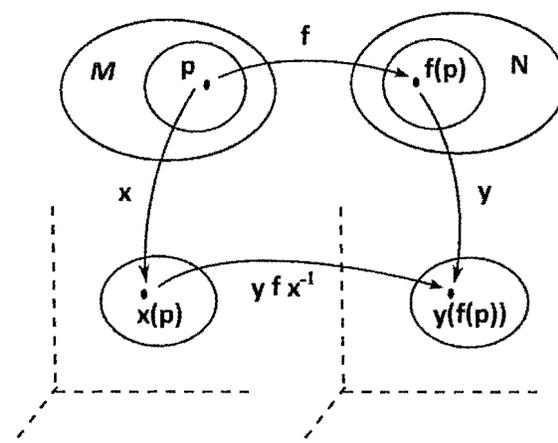


Figura 2.10: Aplicación diferenciable.

Si  $f: M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable en el punto  $p \in M$  directamente se tiene que  $f$  es continua en  $p \in M$ .

**Observación 2.1.13.** Como los cambios de coordenadas en  $M, N$  son difeomorfismos de clase  $C^r$ , la diferenciable depende de las coordenadas  $x': U' \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $M$ ,  $y': V' \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $N$ , con  $p \in U'$ ,  $f(U') \subset V'$  la aplicación  $f_{x'y'} = y' \circ f \circ (x')^{-1}$  será diferenciable en  $x'(p)$ .

Diremos que  $f: M \rightarrow N$  es diferenciable si es diferenciable en todo punto de  $M$ .

Finalmente  $f: M \rightarrow N$  es de clase  $C^k$ ; ( $k \leq r$ ) si para cada  $p \in M$  existen sistemas

de coordenadas locales  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $M$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $N$ , con  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$  tal que  $yfx^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$  es de clase  $C^k$ . Cuando decimos que  $f : M \rightarrow N$  es de clase  $C^k$  admitiremos al menos implícitamente que  $M, N$  son de clase  $C^r$ ,  $r \geq k$ . Dadas  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow P$  de clase  $C^k$  la compuesta es de clase  $C^k$ .

**Ejemplo 2.1.4.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^m$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación. Podemos considerar  $U$  como variedad de clase  $C^k$  entonces  $f$  es diferenciable como aplicación entre variedades diferenciables si solo si  $f$  es diferenciable.

**Ejemplo 2.1.5.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad de clase  $C^k$  y  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema de coordenadas en  $M$ . Consideremos en  $U$  la estructura de subvariedad abierta de  $M$ . Entonces  $x$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$  de  $U$  sobre  $x(U)$ . De hecho la expresión de  $x$ ,  $x^{-1}$  son dadas en los sistemas de coordenadas locales  $x, i_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  identidad de  $x(U)$ .

En particular dada una parametrización  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset M$  (clase  $C^k$ ).  $M^n \subset \mathbb{R}^n$  se tiene que  $\varphi, \varphi^{-1}$  son difeomorfismos de clase  $C^k$ .

**Ejemplo 2.1.6.** Sean  $M, N_1, N_2$  variedades de clase  $C^r$ . Una aplicación  $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$  es de clase  $C^k$ ,  $k \leq r$  si solamente si  $f = (f_1, f_2)$  donde las coordenadas  $f_1 : M \rightarrow N_1$ ,  $f_2 : M \rightarrow N_2$  son de clase  $C^k$ . Consideremos  $N_1 \times N_2$  los sistemas de coordenadas locales de tipo:  $y_1 \times y_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  entonces se tiene que  $(y_1 \times y_2)fx^{-1} = (y_1 f_1 x^{-1} y_2 f_2 x^{-1})$  así se tiene que  $g = (g_1, g_2) : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  es de clase  $C_k$  si solo si  $g_1 : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g_2 : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son de clase  $C_k$ .

## 2.1.5 Grupos y Homomorfismo

**Definición 2.1.35.** Definimos operación binaria o ley de composición. Sea  $G$  un conjunto no vacío. Una **operación binaria** o **ley de composición** en  $G$  es una función  $f : G \times G \rightarrow G$  donde  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ .

**Definición 2.1.36.** Un grupo es una pareja  $(G, \circ)$ , con  $G$  un conjunto no vacío, o una función de  $G \times G \rightarrow G$  llamada operación binaria y denotada por  $\circ(x, y) := x \circ y$ , la cual satisface:

- (i) La operación  $\circ$  es asociativa  $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$  para todos  $x, y, z \in G$ .
- (ii) Existe  $e \in G$  tal que  $e \circ x = x$ , para todo  $x \in G$  (neutro por la izquierda), y  $x \circ e = x$  (neutro por la derecha)
- (iii) Dado  $x' \in G$ , existe  $x \in G$  tal que  $x' \circ x = e$  (inverso por la izquierda), y  $x \circ x' = e$  (inverso por la derecha)

**Ejemplo 2.1.7.** (a)  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo con la adición usual de enteros.

(b) El conjunto de matrices invertibles  $n \times n$ , con entradas en  $\mathbb{R}$  y operación, el producto usual de matrices forma un grupo el cual se conoce como el grupo lineal general, denotado por  $GL(n, \mathbb{R})$ .

(c) Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $S_X = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$ ,  $S_X$  es un grupo con la operación composición de funciones, llamado el grupo de permutaciones en  $X$ . A los elementos de  $S_X$  se les llama permutaciones.

(d) Sea  $G = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ . Definiendo en  $G$  la operación  $(A, X) * (B, Y) := (AB, X + Y)$ , se verifica que  $(G, *)$  es un grupo.

**Definición 2.1.37.** Dado un grupo  $G$  y  $g \in G$ , se define el **orden** de  $g$  como el mínimo entero positivo  $n$  tal que  $g^n = e$ , si tal entero existe, de otra forma se dice que  $g$  tiene **orden infinito**. El orden de  $g$  se denotará por  $|g| = n$ .

**Definición 2.1.38.** Sea  $G$  un grupo,  $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ . Se dice que  $H$  es un **subgrupo** de  $G$  si la operación de  $G$  restringida a  $H$  hace de éste un grupo.

Si  $H$  es subgrupo de  $G$ , se usará la notación  $H \leq G$  y se lee “ $H$  es subgrupo de  $G$ ”. El contexto de grupos, no hay lugar a confundir la notación anterior con la relación de orden en un conjunto.

**Teorema 2.1.11.** Sea  $G$  un grupo,  $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i)  $H$  es un subgrupo de  $G$ .
- (ii) (a)  $\forall x, y \in H, xy \in H$ ,  
 (b)  $\forall x \in H, x^{-1} \in H$ .  
 (c) Para todos  $x, y \in H$  se tiene  $xy^{-1} \in H$ .

**Demostración.** (i)  $\implies$  (ii) Es claro, pues al ser  $H$  un subgrupo se deben tener satisfechas las condiciones (a) y (b).

(ii)  $\implies$  (iii) Dados,  $x, y \in H$ , (b) implica  $xy^{-1} \in H$ . La conclusión se obtiene de la parte (a).

(iii)  $\implies$  (i) Primeramente notemos que al ser  $H$  no vacío, existe un  $x \in H$  y de esto se concluye, tomando  $x = y$ , que  $e = xx^{-1} \in H$ . Ahora tomando  $y = x$  y  $x = e$  se obtiene  $x^{-1} = ex^{-1} \in H$ . Solo falta demostrar que  $H$  es cerrado bajo la operación definida en  $G$ . Sean  $x, y \in H$ . Por lo probado,  $x = y^{-1} \in H$ . Aplicando la hipótesis a  $x$  y a  $z$  se tiene que  $xz^{-1} = xy \in H$ .  $\square$

**Teorema 2.1.12.** Sea  $G$  un grupo,  $\{H_\lambda\}_{\lambda \in I}$  una colección de subgrupos. Entonces

$$H = \bigcap_{\lambda \in I} H_\lambda,$$

es un subgrupo de  $G$ .

**Demostración.** Directa aplicando el Teorema 2.1.11.  $\square$

**Observación 2.1.14.** La unión de subgrupos no es necesariamente un subgrupo, de hecho el siguiente ejercicio caracteriza cuando la unión de dos subgrupos es subgrupo.

**Ejercicio 2.1.1.** (a) Sean  $H$  y  $K$  subgrupos de  $G$ . Se demuestra que  $H \cup K \leq G \Leftrightarrow K \subseteq H$  o  $H \subseteq K$ .

(b) Sea  $G$  un grupo,  $\mathcal{C}$  una cadena de subgrupos. Se Demuestra que la unión de elementos de  $\mathcal{C}$  es un subgrupo.

**Teorema 2.1.13.** Sea  $G$  un grupo,  $S$  un subconjunto no vacío de  $G$ ,

$$\langle S \rangle := \{s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n} | s_i \in S, i_j = \pm 1, j = 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces  $\langle S \rangle \leq G$ . De hecho este subgrupo es el mínimo que contiene a  $S$ . La minimalidad es en el siguiente sentido.  $\langle S \rangle = \bigcap_{s \subseteq H \leq G} H$ .

**Demostración.** En virtud del Teorema 2.1.12, es suficiente mostrar que dados dos elementos  $x, y \in \langle S \rangle$ , se tiene  $xy^{-1} \in \langle S \rangle$ . Para mostrar lo anterior basta observar que dado  $y = s_1^{i_1} \cdots s_k^{i_k} \in \langle S \rangle, y^{-1} = s_k^{-i_k} \cdots s_1^{-i_1}$  con  $i_j = \pm 1$ , por lo tanto  $y^{-1} \in \langle S \rangle$ . De esto último se tiene lo deseado. Para mostrar lo restante, note que

$\bigcap_{s \subseteq H \leq G} H \subseteq \langle S \rangle$ , por ser  $\langle S \rangle$  uno de los elementos sobre los cuales se toma la intersección. La inclusión de conjuntos se obtiene del hecho que los elementos de  $\langle S \rangle$  son productos de elementos de  $S$  y  $S \subseteq H$ , por lo tanto  $\langle S \rangle \subseteq \bigcap_{s \subseteq H \leq G} H$ .  $\square$

**Definición 2.1.39.** Con la notación del teorema anterior, al subgrupo  $\langle S \rangle$  se le llama el **subgrupo generado** por  $S$ . Un grupo  $G$  se dice **finitamente generado**, abreviado f.g., si  $G$  contiene un subconjunto finito  $S$  tal que  $G = \langle S \rangle$ . Si  $S$  tiene un solo elemento,  $G$  se dice cíclico.

**Definición 2.1.40.** Sean  $(G, \circ)$  y  $(G_1, *)$  dos grupos,  $f: G \rightarrow G_1$  una función.

(i) si  $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G, f$  se llama un **homomorfismo**.

(ii) Si  $f$  es inyectiva y satisface i),  $f$  se llama un **monomorfismo**.

(iii) Si  $f$  es suprayectiva y satisface i),  $f$  se llama un **epimorfismo**.

(iv) Si  $f$  satisface ii) y iii),  $f$  se llama un **isomorfismo**.

Si  $f: G \rightarrow G_1$  es un isomorfismo, se dice que  $G$  es isomorfo a  $G_1$  y se usa la notación  $G \cong G_1$ .

**Observación 2.1.15.** La composición de homomorfismos, cuando esto tiene sentido, es nuevamente un homomorfismo.

**Observación 2.1.16.** “Ser isomorfos” define una relación de equivalencia en la clase de todos los grupos, cuyas clases de equivalencia están formadas precisamente por los grupos que son isomorfos.

**Definición 2.1.41.** Sea  $f: G \rightarrow G_1$  un homomorfismo, se define:

(i) El **núcleo** de  $f$ , denotado  $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ .

(ii) La **imagen** de  $f$ , denotada  $\text{Im } f = \{h \in G_1 \mid f(g) = h \text{ para algún } g \in G\}$ .

**Definición 2.1.42.** Un grupo  $G$  se dice **cíclico** si  $G = \langle g \rangle$ , para algún  $g \in G$ . El siguiente resultado es una de las consecuencias útiles e inmediatas del Teorema de Lagrange.

**Definición 2.1.43.** Sea  $G$  un grupo,  $N \leq G$ . Se dice que  $N$  es un **subgrupo normal** si  $gNg^{-1} = N$  para todo  $g \in G$ . Cuando  $N$  es normal los denotaremos por  $N \triangleleft G$ .

**Observación 2.1.17.** Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , y  $g \in G, gHg^{-1}$  es un subgrupo de  $G$  llamado *subgrupo conjugado* de  $H$  y  $|gHg^{-1}| = |H|$ . Note que  $H$  es normal  $\iff H$  coincide con todos sus conjugados.

**Teorema 2.1.14.** Las siguientes condiciones sobre un subgrupo  $N$  son equivalentes

- (i)  $N$  es normal.
- (ii)  $gNg^{-1} \subseteq N$  para todo  $g \in G$ .
- (iii)  $gN = Ng$  para todo  $g \in G$ .

**Demostración.** Ver [11]. □

**Teorema 2.1.15.** (Grupo cociente) Sea  $G$  un grupo,  $N \triangleleft G$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{R}$  los conjuntos de clases laterales izquierda y derecha, respectivamente. Entonces  $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ , más aún, estos conjuntos forman un grupo el cual es llamado grupo cociente módulo  $N$  y se denota por  $G/N$ .

- (i) Asociatividad.
- (ii) Existencia de identidad. Tomando la clase  $Ne = N$ , con  $e$  la identidad en  $G$ , se demuestra que  $NaN = Na$  para toda clase  $Na$ .
- (iii) Existencia de inversos. Dada una clase  $Na$ , tomando  $Na^{-1}$  se cumple que  $Na^{-1}Na = Ne = N$ .

De las condiciones anteriores se concluye que  $G/N$ , con la operación de clases definida, es un grupo. □

**Corolario 2.1.9.** Si  $G$  es finito y  $N \triangleleft G$ , entonces

$$\left| \frac{G}{N} \right| = \frac{|G|}{|N|}$$

**Teorema 2.1.16** (Primer Teorema de Isomorfismo). Sea  $f : G \rightarrow G_1$  un homomorfismo con núcleo  $N$ , entonces  $N \triangleleft G$  y  $G/N \cong \text{Im } f$ .

**Demostración.** Ver [11]. □

**Teorema 2.1.17.** Sea  $G$  un grupo,  $H \leq G$ . Entonces  $H \triangleleft G \iff H = \ker f$ , para algún homomorfismo  $f$ .

**Demostración.** Ver [11]. □

**Definición 2.1.44.** Se obtiene del Comentario 3 antes del teorema anterior. considere  $G/H$  y definase  $\pi : G \rightarrow G/H$  como sigue:

$$\pi(a) := Ha.$$

### 2.1.6 El grupo de permutación

**Definición 2.1.45.** Una **permutación** del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  es una aplicación biyectiva de  $\{1, \dots, n\}$  en si mismo.

Se define el conjunto

$$\Sigma_n = \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} | f \text{ es una permutación}\}$$

En este conjunto definimos el **producto** de dos permutaciones  $f, g \in \Sigma_n$  mediante  $fg = g \circ f$ , donde  $\circ$  es composición usual de aplicaciones

**Proposición 2.1.29.**  $(\Sigma_n, \cdot)$  es un grupo, llamado **grupo de permutaciones**.

**Demostración.** Ver [11]. □

Una notación sencilla para denotar las permutaciones  $f \in \Sigma_n$  es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(x) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 2.1.8.**

1. La permutación  $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  definida por

$$\begin{aligned} f(1) = 3 & \quad f(2) = 7 & \quad f(3) = 2 & \quad f(4) = 5 \\ f(5) = 6 & \quad f(6) = 4 & \quad f(7) = 1 & \quad f(8) = 8 \end{aligned}$$

se escribirá

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.46.** Una **transposición** de  $(\Sigma_n, \cdot)$  es una permutación  $f \in \Sigma_n$  que verifica que existen dos elementos distintos  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , tales que

$$f(i) = j, \quad f(j) = i \quad f(k) = k, \forall k \in \{1, \dots, n\} - \{i, j\} \quad (2.1)$$

Las transposiciones son denotados por  $(i \ j)$ , donde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  verifican (2.1)

**Definición 2.1.47.** Un **ciclo de longitud  $r$**  de  $\Sigma_n$  es una permutación  $f$  de  $\Sigma_n$  para la que existen  $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , donde  $i_j \neq i_k$  si  $j \neq k$ , tales que

$$\begin{aligned} f(i_j) &= i_{j+1}, \text{ para } j = 1, \dots, r-1, \\ f(i_r) &= i_1 \\ f(k) &= k, \text{ si } k \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_r\} \end{aligned}$$

Los  $r$ -ciclos se suelen denotar por  $(i_1 \dots i_r)$ .

Dos ciclos de  $\Sigma_n$ ,  $(i_1 \dots i_r)$  y  $(j_1 \dots j_s)$  se dice que son **disjuntos** si  $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}$  es el conjunto vacío.

**Proposición 2.1.30.** Sea  $f \in \Sigma_n$  una permutación. Entonces,  $f$  se expresa de forma única como producto de ciclos disjuntos, salvo el orden de los factores.

**Demostración.** Ver [11]. □

**Proposición 2.1.31.** Sea  $(i_1 \dots i_r) \in \Sigma_n$  un ciclo de longitud  $r$ . Entonces,  $(i_1 \dots i_r)$  se descompone como producto de trasposiciones.

**Demostración.** Ver [11]. □

**Corolario 2.1.10.** Cada permutación de  $\Sigma_n$  se expresa como producto de trasposiciones.

**Demostración.** Ver [11]. □

**Proposición 2.1.32.** Sea  $f$  una permutación de  $\Sigma_n$ . Si se descompone como un número par (impar) de trasposiciones, entonces cualquier descomposición de  $f$  en producto de trasposiciones tendrá un número par (impar) de trasposiciones.

**Demostración.** Ver [11]. □

**Definición 2.1.48.** Sea  $f$  una permutación de  $\Sigma_n$ . Se llama **signatura** de  $f$ , y se denota por  $e_f$ , a

$$e_f = \begin{cases} 1, & \text{si } f \text{ se descompone como un producto de un número par de trasposiciones} \\ -1, & \text{si } f \text{ se descompone en un producto de un número impar de trasposiciones} \end{cases}$$

### 2.1.7 Grupos libres y secuencias exactas

Supongamos que tenemos un conjunto  $X$ . No hay ninguna operación en juego así que los elementos no están relacionados de ninguna manera. Si consideramos los elementos del conjunto como letras, podemos empezar a concatenarlos para formar palabras, de manera totalmente “libre”, i.e. nunca va a haber cancelaciones. Ésta es la idea de un grupo libre de base  $X$ : va a ser el mayor grupo que tenga como generadores a los elementos de  $X$ .

**Teorema 2.1.18.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Existe un grupo  $F(X)$  y una función inyectiva  $\iota : X \rightarrow F(X)$  tal que para todo grupo  $G$  y toda función  $\varphi : X \rightarrow G$  existe

un único morfismo de grupos  $\tilde{\varphi} : F(X) \rightarrow G$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ F(X) & & \end{array}$$

En otras palabras,  $F(X)$  es un grupo tal que para definir un morfismo desde él hacia otro grupo  $G$ , basta definir una función desde  $X$  hacia  $G$ . En aún otras palabras, toda función definida sobre  $X$  hacia  $G$  se extiende a un único morfismo de  $F(X)$  hacia  $G$ .  $F(X)$  se llama grupo libre de base  $X$ .

**Demostración.** Llamamos a  $X$  el conjunto de letras. Sea  $X^{-1}$  otro conjunto tal que  $X \cap X^{-1} = \emptyset$  y  $|X^{-1}| = |X|$ . Elegimos una biyección  $X \rightarrow X^{-1}$ , y a la imagen de  $x$  por esta biyección la denotamos  $x^{-1}$ .

Elegimos un elemento que no pertenezca a  $X \cup X^{-1}$ : lo denotamos con  $1$  (la letra vacía).

Una palabra en  $X$  es una sucesión  $(a_1, a_2, \dots) \subset X \cup X^{-1} \cup \{1\}$  tal que existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  de manera que  $a_i = 1$  para todo  $i \geq n$  (las palabras son sucesiones “finitas” de letras). Los elementos  $a_i$  y  $a_{i+1}$  se dicen adyacentes para todo  $i$ .

La palabra constante  $\{1, 1, \dots\}$  es la palabra vacía y por abuso de notación la denotamos  $1$ .

Una palabra  $(a_1, a_2, \dots)$  es reducida si:

I.  $\forall x \in X, x$  y  $x^{-1}$  no son adyacentes en  $(a_1, a_2, \dots)$ .

II. Si  $k \in \mathbb{N}$  es tal que  $a_k = 1$  entonces  $a_i = 1 \forall i \geq k$ .

El primer ítem es que queremos tratar a  $x^{-1}$  como la inversa de  $x$ ; el segundo ítem es que no queremos frases sino sólo palabras. Observar que  $1$  es una palabra reducida. Definiendo  $x^{+1}$  como  $x$ , toda palabra reducida es de la forma  $(x_1^{\lambda_1}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \dots)$ ,

donde  $\lambda_i = \pm 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . La escribiremos como  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ . Observar que  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  si y sólo si  $n = m, x_i = y_i, \lambda_i = \delta_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $F(X) = \{\text{palabras reducidas en } X\}$ . Definimos el producto  $F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$  mediante:

si  $p = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}, q = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ , entonces  $pq$  es el resultado de reducir la concatenación  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ . El neutro es la palabra vacía 1, y el inverso de  $p$  es  $p^{-1} = x_1^{-\lambda_1} \dots x_n^{-\lambda_n}$ . Se demuestra que esto forma grupo.

Definimos  $\iota : X \rightarrow F(X)$  como  $x \mapsto (x, 1, 1, \dots) = x$ . Es una función inyectiva. Veamos que  $(F(X), \iota)$  verifica la propiedad universal: sea  $G$  grupo,  $\varphi : X \rightarrow G$  función.

Si  $\tilde{\varphi} : F(X) \rightarrow G$  es un morfismo tal que  $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ , entonces  $\tilde{\varphi}(x^{-1}) = \varphi(x)$  para todo  $x$ , luego  $\tilde{\varphi}(x^{-1}) = \tilde{\varphi}(x^{-1})^{-1}$ , por lo tanto

$$\tilde{\varphi}(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = \varphi(x_1)^{\lambda_1} \dots \varphi(x_n)^{\lambda_n}$$

Entonces todo elemento en  $F(X)$  es de la forma  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ , esto determina  $\tilde{\varphi}$  de manera única. Es directo verificar que esta fórmula define efectivamente un morfismo.  $\square$

**Observación 2.1.18.** • Como  $\iota$  es inyectiva, identificamos  $X$  con  $\iota(X)$  en  $F(X)$ . De esta manera,  $X \subset F(X)$  y  $X$  genera  $F(X)$  como grupo.

- Si  $|X| = 1$  entonces  $F(X) \simeq \mathbb{Z}$ . En efecto, si  $X = \{a\}$ , la función  $X \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto 1$  se extiende a un isomorfismo  $F(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ .
- Si  $|X| \geq 2$  entonces  $F(X)$  no es abeliano. En efecto, sean  $x, y \in X, x \neq y$ . Entonces  $xy \neq yx$ . Formalmente,  $xyx^{-1}y^{-1} \in F(X)$  por ser una palabra reducida; además  $xyx^{-1}y^{-1} = (x, y, x^{-1}, y^{-1}, 1, 1, \dots) \neq (1, 1, \dots) = 1$  luego  $xyx^{-1}y^{-1} \neq 1$ .

**Teorema 2.1.19** (Nielsen-Schreier). Todo subgrupo de un grupo libre es libre.

**Demostración.** Ver [15]. □

**Proposición 2.1.33.** Todo grupo es cociente de un grupo libre.

**Demostración.** Ver [15]. □

**Definición 2.1.49.** Una sucesión de grupos y morfismos de grupos

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} G_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots$$

es exacta si  $\text{Im } \varphi_{i+1} = \ker \varphi_i$  para todo  $i$ . Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \longrightarrow e \tag{2.2}$$

donde  $e$  denota el grupo trivial, y los morfismos inicial y final son los únicos posibles. De esta manera, una sucesión de la forma (2.2) es exacta si y sólo si  $i$  es inyectiva,  $p$  es sobreyectiva e  $\text{Im } i = \ker p$ . Por lo tanto cumple  $pi = 0$ .

**Definición 2.1.50.** Una extensión de un grupo  $Q$  por un grupo  $N$  es una sucesión exacta corta

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q \longrightarrow e$$

Diremos también que  $G$  es una extensión de  $Q$  por  $N$ .

**Observación 2.1.19.** En este caso se tiene  $N \simeq i(N) = \ker p$  luego  $i(N) \triangleleft G$ , y  $Q \simeq G/N$ . Podemos pensar entonces que  $N$  es un subgrupo normal de  $G$  y que  $Q$  es el cociente de  $G$  por  $N$ . De esta manera, el problema de conocer un grupo  $G$  conociendo un subgrupo normal  $N$  y el cociente  $G/N$  se traduce al problema de conocer las extensiones de  $Q$  por  $N$ : es el llamado problema de la extensión. El problema de la extensión intenta explicitar las extensiones de un grupo  $Q$  en términos manejables, i.e. a través de construcciones conocidas, y en general no está resuelto.

**Ejemplo 2.1.9.** Sea  $N \triangleleft G$ , entonces tenemos una sucesión exacta corta

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/N \longrightarrow e \quad (2.3)$$

donde  $i$  es la inclusión y  $p$  la proyección.

**Definición 2.1.51.** Dos sucesiones exactas cortas (las filas del diagrama siguiente) son equivalentes si existen isomorfismos (las columnas) tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & e \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ e & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{i} & G' & \xrightarrow{p} & K' & \longrightarrow & e \end{array}$$

**Observación 2.1.20.** • Decir que dos sucesiones exactas cortas son equivalentes no es sólo decir que los grupos son uno a uno isomorfos. Lo adicional es conmutatividad del diagrama, que nos dice informalmente que  $H$  se inyecta en  $G$  de la misma manera que  $H'$  en  $G'$ , y que  $K$  es cociente de  $G$  de la misma manera que  $K'$  lo es de  $G'$ .

- Toda sucesión exacta corta es equivalente a una de la forma (2.3):

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & K & \longrightarrow & e \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \tilde{\beta} & & \\ e & \longrightarrow & \alpha(H)' & \xrightarrow{i} & G' & \xrightarrow{p} & G/\ker\beta & \longrightarrow & e \end{array}$$

- Dos pares de grupos isomorfos  $Q, Q'$  y  $N, N'$  pueden dar lugar a extensiones  $G, G'$  no isomorfas.

**Ejemplo 2.1.10.** Dados  $H$  y  $K$  grupos, tenemos una sucesión exacta corta

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{i} H \times K \xrightarrow{p} K \longrightarrow e \quad (2.4)$$

donde el primer mapa es la inyección y el segundo la proyección.

Más en general, si  $\theta : Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ , entonces los mismos mapas determinan otra sucesión exacta corta.

$$e \longrightarrow H \longrightarrow H \times_e K \longrightarrow K \longrightarrow e \quad (2.5)$$

**Teorema 2.1.20.** Sea  $e \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow e$  una sucesión exacta corta.

Son equivalentes:

1. Existe  $\alpha' : G \rightarrow H$  morfismo tal que  $\alpha' \alpha = \text{id}_H$ .

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow e \quad (2.6)$$

$\swarrow$   
 $\alpha'$

2. La sucesión es equivalente a (2.4), de esta manera: existe un isomorfismo  $\phi : G \rightarrow H \times K$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 e & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & K & \longrightarrow & e \\
 & & \text{id} \downarrow & & \phi \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\
 e & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{i} & H \times K & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & e
 \end{array} \quad (2.7)$$

**Demostración.** Ver [19]. □

**Teorema 2.1.21.** Sea  $e \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow e$  una sucesión exacta corta.

Son equivalentes:

1. Existe  $\beta' : K \rightarrow G$  morfismo tal que  $\beta \beta' = \text{id}_K$ .

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow e \quad (2.8)$$

$\swarrow$   
 $\beta'$

2. La sucesión es equivalente a (2.5), de esta manera: existe un isomorfismo  $\phi : G \rightarrow H \times K$  y un morfismo  $\theta : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 e & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & K & \longrightarrow & e \\
 & & \text{id} \downarrow & & \phi \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\
 e & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & H \times_{\theta} K & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & e
 \end{array} \quad (2.9)$$

**Demostración.** Ver [19].

□

## 2.2 Grupos de Homotopía

En este capítulo describiremos los espacios de recubrimiento y los grupos de homotopía. Estos conceptos constituyen herramientas importantes para el objetivo de este trabajo.

### 2.2.1 Espacios de Recubrimiento

**Definición 2.2.1.** Sea  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua. Se dice que un subconjunto abierto  $U \subset X$  es recubierto por  $p$  si existe un cubrimiento abierto  $\{U_j\}_{j \in J}$  de  $\bar{X}$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$  unión disjunta de conjuntos abiertos en  $\bar{X}$ , cada uno de los cuales es homeomorfo, bajo  $p$ , a  $U$  para cada  $j \in J$ .

**Definición 2.2.2.** Un **espacio de recubrimiento** de un espacio topológico  $X$  es un par  $(\bar{X}, p)$  donde  $\bar{X}$  es un espacio topológico y  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua verificando:

1.  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua y sobreyectiva.
2. Para cada  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$  para alguna colección  $\{U_j : j \in J\}$  de subconjuntos abiertos en  $\bar{X}$ , con  $U_i \cap U_k = \Phi$ ,  $i \neq k$  y  $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

Para simplificar diremos que  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento de  $X$ .

**Ejemplo 2.2.1.** En la figura 2.11. Sean  $U$  abierto de  $S^1$  en color verde y  $V$  abierto de  $S^1$  en color rojo claramente  $S^1 = U \cup V$ . Considere la aplicación continua  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$

dada por  $p(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ .

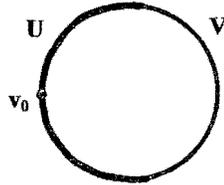


Figura 2.11: Un cubrimiento de  $S^1$ .

La figura 2.12 muestra  $p^{-1}(U)$ , donde la recta real  $\mathbb{R}$  ha sido identificada en  $\mathbb{R}^3$  en forma de un resorte, para que sea más fácil apreciar que  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de abiertos (los pintados en verde) cada uno homeomorfo a  $U$ .

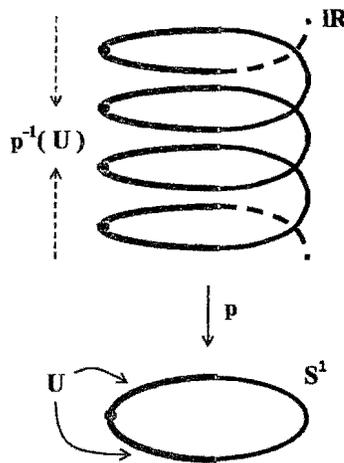


Figura 2.12: Recubrimiento del abierto  $U$  por  $p$ .

Note que con esta identificación en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , la aplicación  $p$  se convierte en la proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ .

Por tanto, el par  $(\mathbb{R}, p)$  es un espacio de recubrimiento para  $S^1$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Recubrimientos inmediatos

1. La aplicación  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1 = T^2$  dada por

$$p(t, s) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$$

2. Si  $h : \bar{X} \rightarrow X$  es un homeomorfismo entonces es recubrimiento.

**Definición 2.2.3.** Un haz es una terna  $(E, p, B)$  donde  $E, B$  son espacios topológicos y  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua. Al espacio  $B$  se le denomina espacio base, al espacio  $E$  espacio total y a la aplicación  $p$  la proyección del haz. Para cada  $b \in B$  al subespacio  $p^{-1}(b)$  se denomina la **fibra** del haz sobre  $b$ .

**Ejemplo 2.2.3.**  $(B \times F, \pi, B)$  donde  $\pi : B \times F \rightarrow B$  es la proyección en el primer factor, es un haz con fibra  $F$  denominado **haz trivial**

**Definición 2.2.4.** Una fibración  $p : E \rightarrow B$  es un haz localmente trivial con una fibra fija  $F$ , con mayor precisión para cualquier  $b \in B$ , existe una vecindad  $U$  de  $b$  tal que  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  es un haz trivial, esto es, existe un homeomorfismo  $\varphi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \rightarrow & p^{-1}(U) \\ \pi \searrow & & \swarrow p_U \\ & U & \end{array} \tag{2.10}$$

conmuta, esto es,  $p_U \circ \varphi_U(x, y) = x$  para  $x \in U, y \in F$ .

De esta conmutatividad para cada  $b \in U$ ,  $\varphi_U$  se restringe a un homeomorfismo de  $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F \approx F$  en  $p^{-1}(b)$ . Por esto se dice que la fibra es  $F$ .

## 2.2.2 Grupo Fundamental

Como de costumbre, para todo par de números reales  $a$  y  $b$  tales que  $a < b$  designaremos por  $[a, b]$  el intervalo cerrado de la recta real de extremos  $a$  y  $b$ . Por brevedad pondremos  $I = [0, 1]$ .

**Definición 2.2.5.** Un camino o arco en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua de algún intervalo cerrado  $[a, b]$  en  $X$ . Las imágenes de los extremos del intervalo se llaman *extremos* del camino o arco.

**Definición 2.2.6.** Un espacio  $X$  se llama *arco-conexo* o *conexo por caminos* si dos puntos cualesquiera de  $X$  pueden unirse por un arco. Un espacio arco-conexo, es conexo, pero el recíproco no es cierto.

**Definición 2.2.7.** Sean  $f_0, f_1 : [a, b] \rightarrow X$  dos caminos en  $X$ , tales que  $f_0(a) = f_1(a), f_0(b) = f_1(b)$  (esto es, los dos caminos tiene el mismo origen y el mismo extremo). Diremos que estos dos caminos son *equivalentes*, y lo designaremos por  $f_0 \sim f_1$ , si y sólo si existe una aplicación continua

$$f : [a, b] \times I \rightarrow X,$$

tal que

$$\left. \begin{aligned} f(t, 0) &= f_0(t) \\ f(t, 1) &= f_1(t) \end{aligned} \right\} t \in [a, b],$$
$$\left. \begin{aligned} f(a, s) &= f_0(a) = f_1(a) \\ f(b, s) &= f_0(b) = f_1(b) \end{aligned} \right\} s \in I.$$

Se demuestra que  $\sim$  es una relación de equivalencia, y la clase de  $f$  se denota por  $[f]$

**Observación 2.2.1.**

- 1) Nuestra segunda definición básica es la de producto de dos caminos. El producto de dos caminos está sólo definido si el extremo del primer camino coincide con el origen del segundo. Si se verifica esta condición, se recorre el camino producto recorriendo el primer camino y a continuación el segundo, en el orden dado. Para ser precisos supongamos que

$$f: [a, b] \rightarrow X$$

$$g: [b, c] \rightarrow X$$

son caminos tales que  $f(b) = g(b)$  (suponemos  $a < b < c$ ). Entonces el producto  $f \cdot g$  se define por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b] \\ g(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

que es una aplicación  $[a, c] \rightarrow X$ .

- 2) En lo que sigue, estaremos únicamente interesados en clases de equivalencia de caminos y no en los propios caminos. Por «clase de equivalencia» entendemos las clases respecto la relación de equivalencia definida anteriormente y también respecto a la relación de equivalencia evidente definida de la siguiente forma: si  $f: [a, b] \rightarrow X$  y  $g: [c, d] \rightarrow X$  son caminos tales que  $g = f \circ h$ , donde  $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$  es un homeomorfismo lineal que conserva la orientación, entonces consideraremos  $f$  y  $g$  como equivalentes.

De ahora en adelante, por un camino en  $X$  entenderemos una aplicación continua  $I \rightarrow X$  (donde  $I = [0, 1]$ ). Si  $f$  y  $g$  son caminos en  $X$  tales que el extremo de  $f$  coincide con el origen de  $g$ , entonces el producto  $f \cdot g$  estará definido por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Lema 2.2.1.** La relación de equivalencia y el producto que hemos definido son compatibles en el siguiente sentido: Si  $f_0 \sim f_1$  y  $g_0 \sim g_1$ , entonces  $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$  (se supone, desde luego, que el extremo de  $f_0$  coincide con el origen de  $g_0$ ).

**Demostración.** Sean  $F, G : I \times I \rightarrow X$  homotopías, con  $F : \alpha \sim \beta$  y  $G : \delta \sim \theta$ , ambas con respecto a  $\{0, 1\}$ . Definamos  $H : I \times I \rightarrow X$  por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t - 1, s) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

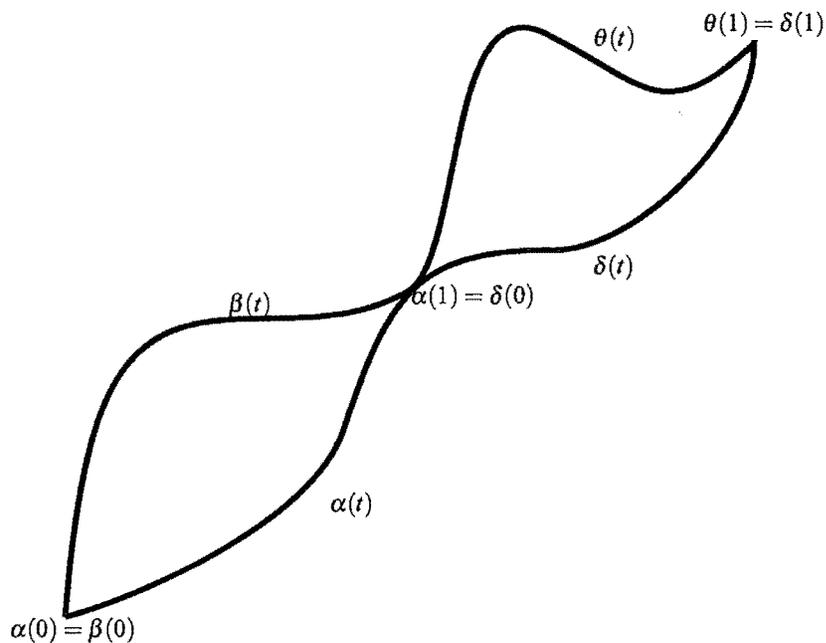


Figura 2.13: Compatibilidad del producto de caminos.

tenemos que  $H$  es continua y satisface

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \begin{cases} F(2t,0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1,0) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \alpha \cdot \delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t,1) &= \begin{cases} F(2t,1) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1,1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \theta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \beta \cdot \theta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H(0,s) = F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0) \\ H(1,s) = G(1,s) = \delta(1) = \theta(1) \end{cases}$$

Lo que completa la prueba.  $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, podemos definir el producto de clases de equivalencia de caminos, es decir, si  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son caminos con  $\alpha(1) = \beta(0)$ , podemos definir  $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ . Este producto no tiene buenas propiedades, por ejemplo, no siempre podemos multiplicar un par de caminos.

**Lema 2.2.2.** La multiplicación de clases de equivalencia de caminos es asociativa.

**Demostración.** Ver [15].  $\square$

**Definición 2.2.8.** Dado un punto  $x \in X$  cualquiera, designemos por  $\varepsilon_x$  la clase de equivalencia de la aplicación constante de  $I$  en el punto  $x$  de  $X$ . Esta clase de caminos verifica la siguiente propiedad fundamental:

**Lema 2.2.3.** Sea  $[\alpha]$  una clase de equivalencia de caminos con origen el punto  $x$  y extremo el punto  $y$ . Entonces  $\varepsilon_x \cdot [\alpha] = [\alpha]$  y  $[\alpha] \cdot \varepsilon_y = [\alpha]$ .

**Demostración.** Ver [15]. □

**Lema 2.2.4.** Sean  $[\alpha]$  y  $[\bar{\alpha}]$  las clases de equivalencia de los caminos  $f$  y  $\bar{f}$  respectivamente. Entonces

$$[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = \varepsilon_x, \quad [\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = \varepsilon_y,$$

donde  $x$  y  $y$  denotan el origen y el extremo del camino  $f$ .

**Demostración.** Ver [18]. □

**Definición 2.2.9.** Sea  $[\alpha]$  una clase equivalencia, a la clase  $[\bar{\alpha}]$  anterior lo denotaremos por  $[\alpha]^{-1}$ .

**Definición 2.2.10.** Un camino, o clase de caminos, se llama *cerrado*, o *lazo*, o que se trata de un lazo con *base* en el extremo común.

Sea  $x$  un punto arbitrario de  $X$ ; se ve en seguida que el conjunto de todos los lazos con base en  $x$  es un grupo. Este grupo se llama el *grupo fundamental* o *Homotopía en dimensión uno* de  $X$  en el punto base  $x$ , y se denota por  $\pi(X, x)$  o  $\pi_1(X, x)$ .

**Teorema 2.2.1.** Si  $X$  es arco-conexo, los grupos  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$  son isomorfos, para todo par de puntos  $x, y \in X$ .

**Demostración.** Probemos algo más general:

Sean  $x, y \in X$ . Supongamos que  $x$  e  $y$  están en la misma componente conexa por caminos de  $X$  entonces los grupos  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(X, y)$  son isomorfos.

Supongamos que  $x, y \in X$  están en la misma componente conexa por caminos de  $X$ . Sea  $f: I \rightarrow X$  un camino con  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$

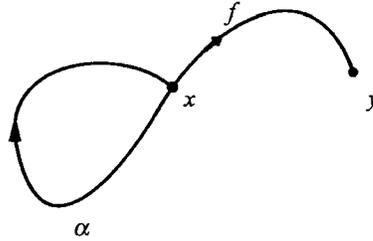


Figura 2.14: Homotopias isomorfas en un espacio arco conexo,  $f$  une “ $x$ ” e “ $y$ ” y  $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ .

Definamos la aplicación  $u_f : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$  por  $u_f([\alpha]) = [\bar{f} \cdot \alpha \cdot f]$ . Tenemos que

1.  $u_f$  es un homomorfismo de grupos.

Sean  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$  entonces

$$\begin{aligned}
 u_f([\alpha][\beta]) &= u_f([\alpha \cdot \beta]) \\
 &= [\bar{f} \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot f] \\
 &= [(\bar{f} \cdot \alpha \cdot f) \cdot (\bar{f} \cdot \beta \cdot f)] \\
 &= [\bar{f} \cdot \alpha \cdot f][\bar{f} \cdot \beta \cdot f] \\
 &= u_f([\alpha])u_f([\beta])
 \end{aligned}$$

2. Usando el camino inverso  $\bar{f} : I \rightarrow X$ , definimos el homomorfismo  $u_{\bar{f}} : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$ , dado por  $u_{\bar{f}}([\gamma]) = [f \cdot \gamma \cdot \bar{f}]$ .

3. Sea  $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 u_{\bar{f}} \cdot u_f([\alpha]) &= u_{\bar{f}}([\bar{f} \cdot \alpha \cdot f]) \\
 &= [f \cdot (\bar{f} \cdot \alpha \cdot f) \cdot \bar{f}] \\
 &= [(f \cdot \bar{f}) \cdot \alpha \cdot (f \cdot \bar{f})] \\
 &= [\varepsilon_x \cdot \alpha \cdot \varepsilon_x] \\
 &= [\varepsilon_x][\alpha][\varepsilon_x] \\
 &= [\alpha],
 \end{aligned}$$

es decir,  $u_{\bar{f}} \circ u_f = Id_{\pi_1(X, x)}$ . Análogamente, se muestra que  $u_f \circ u_{\bar{f}} = Id_{\pi_1(X, y)}$ . Esto completa la prueba.

**Observación 2.2.2.** Aquí  $\alpha, \beta$  son caminos y  $[\alpha], [\beta]$  sus clases.

□

En adelante denotaremos a  $[\alpha], [\beta]$  por  $\alpha, \beta$  si no hay confusión.

**Definición 2.2.11.** Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, y  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  y  $\alpha$  la clase que contiene a  $f_0, f_1$ .  $\varphi_*(\alpha)$  es la clase de caminos que contiene a  $\varphi f_0$  y  $\varphi f_1$ .

**Propiedad.**  $\varphi_*(\alpha)$  es la imagen de la clase de caminos  $\alpha$  en el espacio  $Y$ , y se comprueba en seguida que la aplicación  $\varphi_*$ , que aplica  $\alpha$  en  $\varphi_*(\alpha)$  verifica las siguientes propiedades:

(a) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos clases de caminos en  $X$  tales que  $\alpha \cdot \beta$  está definido, entonces

$$\varphi_*(\alpha \cdot \beta) = (\varphi_*\alpha) \cdot (\varphi_*\beta).$$

(b) Para todo punto  $x \in X$ ,  $\varphi_*(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\varphi(x)}$ .

(c)  $\varphi_*(\alpha^{-1}) = (\varphi_*\alpha)^{-1}$ .

Por estas razones llamaremos a  $\varphi_*$  «homomorfismo», o bien, el «homomorfismo inducido por  $\varphi$ ».

Si  $\psi : Y \rightarrow Z$  es también una aplicación continua, entonces podemos comprobar fácilmente la siguiente propiedad:

$$(d) (\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$$

Finalmente, si  $\varphi : X \rightarrow X$  es la identidad, entonces

$$(e) \varphi_*(\alpha) = \alpha, \text{ para toda clase de caminos } \alpha \text{ en } X; \text{ es decir, } \varphi_* \text{ es el homomorfismo identidad.}$$

**Demostración.**

$$(a) \text{ Sean } f_0 \in \alpha, f_1 \in \beta.$$

$$\varphi_*(\alpha.\beta) \text{ es } \varphi(f_0.f_1) = (\varphi f_0).(\varphi f_1) \quad (*)$$

$$\varphi f_0 \in \varphi_*(\alpha) \text{ y } \varphi f_1 \in \varphi_*(\beta)$$

$$\text{Entonces: } \varphi_*(\alpha.\beta) = \varphi_*(\alpha).\varphi_*(\beta)$$

Justificamos \*:

$$\begin{aligned} \varphi(f_0.f_1) &= \begin{cases} \varphi(f_0(2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(f_1(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= (\varphi_* f_0).(\varphi_* f_1) \end{aligned}$$

$$(b) \xi(I) = \{x\}$$

$$(\varphi \circ \xi_x)(a) = \varphi(\xi(a)) = \varphi(x) = \xi_{\varphi(x)}$$

es constante para todo punto pero

$$\varphi \circ \xi_x \in \varphi_*(\xi_x)$$

$\xi_{\varphi(x)}$  también pertenece.

(c) Sea  $f \in \alpha$  entonces  $\bar{f} \in \alpha^{-1}$

$$\varphi \circ f \in \varphi * (\alpha^{-1})$$

$$(\varphi \circ \bar{f})(t) = \varphi(\bar{f}(t)) = \varphi(f(1-t))$$

Sabemos que  $\varphi \circ f(t) \in \varphi * \alpha$

entonces  $(\varphi \circ f)(1-t) \in (\varphi * \alpha)^{-1}$

$$\varphi(f(1-t)) \in (\varphi * \alpha)^{-1}$$

(d) Sea  $f \in \alpha$  y  $\varphi \circ f \in \varphi * \alpha$  y  $\psi \circ \varphi \circ f \in \psi * (\varphi * \alpha)$

pero

$$(\psi \circ \varphi)(f) \in (\psi \circ \varphi) * (\alpha) \text{ entonces}$$

$$(\psi \circ \varphi) * = \psi * \varphi *$$

(e) Ver [18].

□

Obsérvese que en virtud de estas propiedades, una aplicación continua  $\varphi : X \rightarrow Y$  induce un homomorfismo  $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ ; y, si  $\varphi$  es un homeomorfismo, entonces  $\varphi_*$  es un isomorfismo. Este homomorfismo inducido será extraordinariamente importante en el estudio del grupo fundamental.

**Definición 2.2.12.** Dos aplicaciones continuas  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  son *homotópicas* si y sólo si existe una aplicación continua  $\varphi : X \times I \rightarrow Y$  tal que, para todo  $x \in X$ ,

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x),$$

$$\varphi(x, 1) = \varphi_1(x).$$

Si dos aplicaciones  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  son homotópicas, escribiremos  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ . Esta relación es efectivamente de equivalencia sobre el conjunto de todas las aplicaciones continua de  $X$  en  $Y$ . Las clases de equivalencia se denominan *clases de homotopía* de aplicaciones.

**Definición 2.2.13.** Dos aplicaciones  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  se dicen *homotópicas relativamente* al subconjunto  $A$  de  $X$  si y sólo si existe una aplicación continua  $\varphi : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), & x \in X, \\ \varphi(x, 1) &= \varphi_1(x), & x \in X, \\ \varphi(a, t) &= \varphi_0(a) = \varphi_1(a), & a \in A, t \in I.\end{aligned}$$

Obsérvese que esta condición implica  $\varphi_0|_A = \varphi_1|_A$ .

**Teorema 2.2.2.** Sean  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  aplicaciones homotópicas relativas al subconjunto  $\{x\}$ . Entonces

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi_0(x)),$$

es decir, los homomorfismos inducidos son el mismo.

**Demostración.** Ver [15]. □

**Definición 2.2.14.** Diremos que un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es un *retracto* de  $X$  si existe una aplicación continua  $r : X \rightarrow A$  (llamada una *retracción*) tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ .

Sea ahora  $r : X \rightarrow A$  una retracción como en la definición anterior, e  $i : A \rightarrow X$  la inclusión. Para todo punto  $a \in A$ , consideremos los homomorfismos inducidos

$$\begin{aligned}i_* : \pi(A, a) &\rightarrow \pi(X, a) \\ r_* : \pi(X, a) &\rightarrow \pi(A, a).\end{aligned}$$

Puesto que  $ri$  es la identidad en  $A$ ,  $r_*i_*$  es el homomorfismo identidad del grupo  $\pi(A, a)$ , en virtud de las propiedades (d) y (e) dadas al principio de esta sección. De esto resulta que  $i_*$  es un *monomorfismo* y  $r_*$  un *epiformismo*.

**Definición 2.2.15.** Un subconjunto  $A$  de  $X$  es un *retracto de deformación* de si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  y un homotopía  $f : X \times I \rightarrow A$  tal que

$$\left. \begin{aligned} f(x, 0) &= x \\ f(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\} x \in X, \\ f(a, t) &= a, \quad a \in A \text{ y } t \in I.$$

**Teorema 2.2.3.** Si  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ , entonces la inclusión  $i : A \rightarrow X$  induce un isomorfismo de  $\pi(A, a)$  sobre  $\pi(X, a)$  para todo  $a \in A$

**Demostración.** Ver [15]. □

**Definición 2.2.16.** Un espacio topológico  $X$  es *contráctil* a un punto si existe punto  $x_0 \in X$  tal que  $\{x_0\}$  es un retracto de deformación de  $X$ .

**Proposición 2.2.1.** Un espacio  $X$  es *contractible* si y sólo si la aplicación identidad  $Id_X : X \rightarrow X$  es homotópica a una aplicación constante  $c : X \rightarrow X$ , digamos  $c(x) = p$  para todo  $x \in X$ .

**Demostración.** Supongamos que  $X$  es contractible. Sea  $f : X \rightarrow \{p\}$  una equivalencia homotópica y sea  $g : \{p\} \rightarrow X$  su inversa homotópica. Tenemos que  $g \circ f \sim Id_X$ , es claro que  $g \circ f$  es una aplicación constante.

Recíprocamente, si  $Id_X : X \rightarrow X$  es homotópica a la aplicación constante  $c : X \rightarrow X$ , digamos  $c(x) = p$  para cada  $x \in X$ , entonces  $Id_X$  y  $c$  son equivalentes homotópicas. □

**Definición 2.2.17.** Un espacio topológico  $X$  es *simplemente conexo* si es arco conexo y  $\pi(X, x) = \{1\}$  para algún (y por tanto para todo)  $x \in X$ .

**Corolario 2.2.1.** Si  $X$  es contráctil a un punto, entonces es simplemente conexo.

**Demostración.** Ver [15]. □

**Proposición 2.2.2.** Todo espacio contractible es conexo por caminos.

**Demostración.** Sea  $X$  un espacio contractible. Fijemos  $p \in X$ . Sea  $H : X \times I \rightarrow X$  una homotopía entre  $Id_X$  y una aplicación constante  $c : X \rightarrow X$  dada por  $c(x) = p$  para cada  $x \in X$ . Para cada  $x$  sea  $\alpha_x : I \rightarrow X$  dado por  $\alpha_x(t) = H(x, t)$ . Es claro que  $\alpha_x$  es un camino en  $X$  uniendo  $x$  y  $p$ . □

**Proposición 2.2.3.** Si  $X \circ Y$  es contractible entonces cualquier aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es homotópica a una aplicación constante.

**Demostración.** Supongamos que  $X$  es contractible. Sea  $H : X \times I \rightarrow X$  una homotopía entre  $Id_X$  y una aplicación constante. Entonces  $f \circ H : X \times I \rightarrow Y$  es una homotopía entre  $f$  y una aplicación constante.

Ahora, si  $Y$  es contractible, sea  $K : Y \times I \rightarrow Y$  una homotopía entre  $Id_Y$  y una aplicación constante. Entonces  $H : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $H(x, t) = K(f(x), t)$  es una homotopía entre  $f$  y una aplicación constante. □

### 2.2.3 Homotopía de Dimensión Mayor

**Definición 2.2.18.** Una aplicación de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subseteq B$ . Dos aplicaciones de pares  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son homotópicas si existe una aplicación de pares  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ .

Nótese que para todo  $t \in I$  y todo  $a \in A$  se tiene  $F(a, t) \in B$

Considérese ahora los espacios de clases de homotopía

$$\text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0) = \{[\varphi] : \varphi : (I^n, \partial(I^n)) \rightarrow (X, x_0)\}$$

$$\text{Map}(S^n, p_0; X, x_0) = \{[\psi] : \psi : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)\}$$

**Proposición 2.2.4.** Existe una correspondencia biyectiva entre los siguientes espacios  $\text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$  y  $\text{Map}(S^n, p_0; X, x_0)$ .

**Demostración.**

Primero nótese que  $\bar{h} : \frac{I^n}{\partial(I^n)} \approx S^n$  donde el interior del cubo  $I^n$  corresponde a  $S^n - \{p_0\}$ , como indica el triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{h} & S^n \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{h} & \\ I^n & & \\ \hline & & \partial(I^n) \end{array}$$

$h$  es la composición de  $\pi$  y  $\bar{h}$ .

Ahora dada  $f : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$  asociamos a ella la aplicación

$f \circ h : (I^n, \partial(I^n)) \rightarrow (X, x_0)$  la cuál induce una aplicación

$\Gamma : \text{Map}(S^n, p_0; X, x_0) \rightarrow \text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$  dada por  $\Gamma([f]) = [f \circ h]$ .

Para la inversa consideramos  $\Gamma^{-1} : \text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0) \rightarrow \text{Map}(S^n, p_0; X, x_0)$

donde para  $g : (I^n, \partial(I^n)) \rightarrow (X, x_0)$  asociamos la aplicación  $\bar{g} : (S^n, p_0) \rightarrow (X, x_0)$  que coincide con  $g \circ h^{-1}$  sobre  $S^n - \{p_0\}$  y que lleva  $p_0$  en  $x_0$ .  $\square$

**Teorema 2.2.4.** El espacio  $\text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$ ,  $n > 1$  es un grupo Abeliano.

**Demostración.**

Sean  $[\varphi], [\psi] \in \text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$ .

Definimos la suma  $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$  donde

$$(\varphi + \psi)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

está bien definida y es asociativa. Definimos el elemento neutro como la clase de la aplicación constante  $\theta : (I^n, \partial(I^n)) \rightarrow (X, x_0)$  dada por  $\theta(I^n) = x_0$ . Luego  $[\varphi] + [\theta] = [\varphi]$  para toda  $[\varphi]$ , es decir,  $\varphi + \theta$  es homotópica a  $\varphi$  para ello se considera la homotopía  $F : (I^n \times I, \partial(I^n) \times I) \rightarrow (X, x_0)$  dada por

$$F(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t_1}{1+s}, t_2, \dots, t_n\right) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1+s}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Así mismo se verifica  $[\theta] + [\varphi] = [\varphi]$ .

Para  $[\varphi] \in \text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$  definimos su inverso como  $[\varphi \circ \eta]$  donde  $\eta : I^n \rightarrow I^n$  es dada por  $\eta(t_1, \dots, t_n) = (1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ , es decir,

$(\varphi \circ \eta)(t_1, \dots, t_n) = \varphi(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Ahora para verificar que  $[\varphi] + [\varphi \circ \eta] = [\theta]$  consideramos la siguiente homotopía  $G$  entre  $\varphi + \theta$  y  $\theta$ .

$$G(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{s}{2} \\ \varphi(2t_1 - s, t_2, \dots, t_n) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(-2t_1 + 2 - s, t_2, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{1-s}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Finalmente mostremos que  $\text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$  es un grupo Abelianiano.

Sean  $[\varphi], [\psi] \in \text{Map}(I^n, \partial(I^n); X, x_0)$  mostremos que las aplicaciones  $\varphi + \psi$  y  $\psi + \varphi$  son homotópicas a la misma aplicación.

Consideremos la homotopía  $H_1(t, s)$  donde  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

$$H_1(t, s) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x_0 \quad \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{s}{2} \\ \varphi\left(2t_1, \frac{2t_2 - s}{2 - s}, t_3, \dots, t_n\right) \quad \text{si } \frac{s}{2} \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}, & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \left. \begin{array}{l} \psi\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2 - s}, t_3, \dots, t_n\right) \quad \text{si } 0 \leq t_2 \leq 1 - \frac{s}{2} \\ x_0 \quad \text{si } 1 - \frac{s}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

entonces  $H_1(t, 0) = (\varphi + \psi)(t)$ , y

$$H_1(t, 1) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} x_0 & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \left. \begin{array}{ll} \psi(2t_1 - 1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Si consideramos otra homotopía

$$H_2(t, s) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} \varphi\left(\frac{2t_1}{1+s}, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n\right) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1+s}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{array} \right\}, & \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \left. \begin{array}{ll} x_0 & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1-s}{2} \\ \psi\left(\frac{2t_1 - 1 + s}{1+s}, 2t_2, t_3, \dots, t_n\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{array} \right\}, & 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

entonces  $H_2(t, 0) = H_1(t, 1)$  y

$$H_2(t, 1) = \begin{cases} \varphi(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1, \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \psi(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego tenemos  $(\varphi + \psi) \sim H_1(t, 1) \sim H_2(t, 0) \sim H_2(t, 1)$ .

Para la suma  $(\psi + \varphi)$  podemos considerar las homotopías

$$K_1(t, s) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} \psi\left(2t_1, \frac{2t_2}{1-s}, t_3, \dots, t_n\right) & \text{si } 0 \leq t_2 \leq 1 - \frac{s}{2} \\ x_0 & \text{si } 1 - \frac{s}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \left. \begin{array}{ll} x_0 & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{s}{2} \\ \varphi\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2 - s}{2-s}, t_3, \dots, t_n\right) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

tenemos que  $K_1(t, 0) = (\psi + \varphi)(t)$  y

$$K_1(t, 1) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} \psi(2t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_2 \leq 1 - \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \left. \begin{array}{ll} x_0 & \text{si } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(2t_1 - 1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{array} \right\}, & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$



4.  $\pi_k(S^n)$  ;  $k > n$  es desconocido en general para todo  $k$  ,  $n \geq 2$  aunque muchos elementos no cero son conocidos.

## 2.3 El Grupo de Trenzas de Artin

En este capítulo describiremos el grupo de trenzas de Artin y su presentación en términos de generadores y relaciones. Esto posibilita llevar nuestras ideas sin ambigüedades y así probaremos interesantes y reveladores resultados.

### 2.3.1 Trenzas en $\mathbb{R}^3$

Empezamos dando una definición formal de una trenza, describiendo de manera conveniente como trazar una trenza y de la definición estaremos en posición de explorar algunas consecuencias directas.

**Definición 2.3.1.** Se define plano de nivel como  $E_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = s\}$

Así  $E_s$  es el plano horizontal infinito que intersecta el eje  $X$  en  $z = s$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $\mathbb{D}$  el cubo unitario en el octante positivo de  $\mathbb{R}^3$  con un vertice en el origen. Seguidamente definimos  $n$  puntos  $p_1, \dots, p_n$  sobre la cara superior de  $\mathbb{D}$  por:

$$p_i = \left( \frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 1 \right) ; 1 \leq i \leq n$$

Similarmente definimos  $n$  puntos  $q_1, \dots, q_n$  sobre la cara inferior de  $\mathbb{D}$  por:

$$q_i = \left( \frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 0 \right) ; 1 \leq i \leq n$$

Ahora agregamos  $n$  arcos poligonales  $d_1, \dots, d_n$  a  $\mathbb{D}$  tal que se tiene lo siguiente:

- I. Los arcos  $d_1, \dots, d_n$  son mutuamente disjuntos.

- II. Cada  $d_i$  empieza en algún punto  $p_j$  y finaliza en algún punto  $q_k$  y estos puntos son únicos para  $d_i$ .
- III. Para cada  $0 \leq s \leq 1$  y cada  $0 \leq i \leq 1$  se tiene  $E_s \cap d_i$  es un punto
- IV. Cada  $d_i$  está contenido completamente en  $\mathbb{D}$ .

La colección resultante de  $n$  arcos  $d_1, \dots, d_n$  es llamado una **n-trenza** y cada  $d_i$ ;  $1 \leq i \leq n$  es llamada **i-esima cuerda trenza** (Nos referiremos a ellas como cuerdas ó arcos). Así para cada  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto de todas las n-trenzas es denotado por  $\mathcal{B}_n$ .

Para aclarar la condición III de la definición anterior, aseguremos que nuestras cuerdas trenza son estrictamente decrecientes. En la figura 2.15 damos un ejemplo de una 3-trenza. Note que por simplicidad trazaremos nuestras cuerdas trenza como arcos suaves, pero recordar que estamos tratando aquí con arcos poligonales.

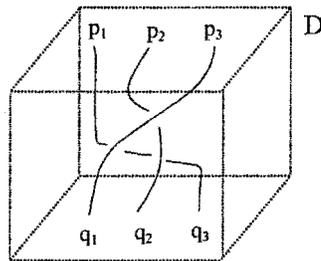


Figura 2.15: Ejemplo de una 3-trenza.

### 2.3.2 Trenzadas Equivalentes

Deseamos dar una definición concreta de que entendemos por trenzas equivalentes. Intuitivamente dos trenzas son las mismas si podemos deformar una hasta parecerse a la otra. Con nuestra definición de una trenza aclararemos lo anterior. Empezamos

definiendo el conjunto de movimientos fundamentales, que realizamos sobre una trenza que iguale a nuestra idea intuitiva de deformación.

**Definición 2.3.3.** Sea  $\beta \in \mathcal{B}_n$  una  $n$ -trenza, y sea  $AB$  el borde de alguna cuerda trenza  $d$  de  $\beta$ . Sea  $C$  otro punto en  $\mathbb{D}$  tal que el triangulo sólido  $ABC$  tiene las siguientes propiedades:

1. No hay otra cuerda trenza de  $\beta$  a parte de " $d$ " que intersecte a nuestro triángulo  $ABC$ .
2.  $ABC$  intersecta a  $d$  solo a lo largo de  $AB$ .
3. Para cada  $0 \leq s \leq 1$  el plano de nivel  $E_s$  intersecta a  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  en a lo mas un punto.

Entonces definimos una operación  $\Omega$  como sigue: Reemplazar el borde  $\overline{AB}$  en  $d$  por los dos bordes  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  como muestra la figura 2.16

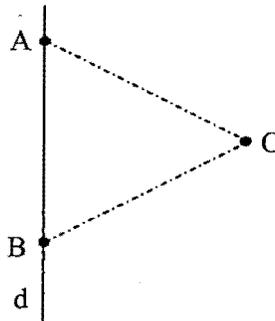


Figura 2.16: El movimiento elemental  $\Omega$ : reemplazando  $\overline{AB}$  por  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$ .

En cambio si  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  están en  $d$  y el plano de nivel  $E_s$  intersecta a  $\overline{AB}$  en a lo mas un punto, entonces podemos definir una operación  $\Omega^{-1}$  de manera inversa:

Reemplace los bordes  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  en  $d$  por  $\overline{AB}$  como muestra la figura 2.17

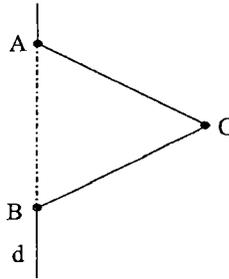


Figura 2.17: El movimiento elemental  $\Omega^{-1}$  reemplazando  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  con  $\overline{AB}$ .

Los movimientos  $\Omega, \Omega^{-1}$  son llamados movimientos elementales sobre la trenza  $\beta$ .

**Teorema 2.3.1.** Si  $\beta$  es una  $n$ -trenza y realizamos un movimiento elemental sobre  $\beta$  obteniendo una colección de arcos  $\beta'$  entonces  $\beta'$  es también una  $n$ -trenza.

**Demostración.** Cada cuerda en  $\beta$  alterada por un movimiento elemental esta contenida en  $\mathbb{D}$  (Pues  $A, B, C$  viven en  $\mathbb{D}$ ) y por 2.3.2 las cuerdas de  $\beta'$  siguen siendo decrecientes (IV) y la condición 3 de la definición 2.3.3 asegura que los movimientos elementales no crean intersecciones extras de cuerdas con planos de nivel ni entre ellas (II y III). Un punto no remueve una cuerda entera, pues no introducimos nuevas cuerdas.

El punto inicial y final de las cuerdas en  $\beta$  siguen fijas. Por tanto nuestra colección resultante de cuerdas  $\beta'$  es una  $n$ -trenza.

Por tanto se cumplen (I), (II), (III) y (IV) de (2.3.2). □

**Definición 2.3.4.** Sean  $\beta, \beta'$  dos  $n$ -trenzas. Suponga que existe una secuencia finita

de movimientos elementales que transforman  $\beta$  a  $\beta'$ . Entonces se dice que  $\beta$  es equivalente a  $\beta'$  y es denotado por  $\beta \sim \beta'$ .

Note que todos los movimientos elementales están por definición realizados dentro de  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 2.3.2.** La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre  $\mathcal{B}_n$ .

**Demostración.** Reflexividad: Sea  $\beta \in \mathcal{B}_n$  entonces hacemos una operación elemental cualquiera y luego su operación inversa  $\Omega^{-1}$  y volvemos a obtener  $\beta$ .

Simetría: Sean  $\beta, \beta' \in \mathcal{B}_n$  tal que  $\beta \sim \beta'$  entonces existe una secuencia finita de movimientos elementales  $\Omega_1^{\epsilon_1}, \dots, \Omega_m^{\epsilon_m}$  que transforma  $\beta$  en  $\beta'$ .

Así tenemos  $\beta \xrightarrow{\Omega_1^{\epsilon_1}} \dots \xrightarrow{\Omega_m^{\epsilon_m}} \beta'$ .

Pero  $\beta' \xrightarrow{\Omega_m^{-\epsilon_m}} \dots \xrightarrow{\Omega_1^{-\epsilon_1}} \beta$ .

Así la secuencia finita de movimientos elementales  $\Omega_m^{-\epsilon_m}, \dots, \Omega_1^{-\epsilon_1}$  transforma  $\beta'$  en  $\beta$  por lo que  $\beta' \sim \beta$ .

Transitividad: Sean  $\beta, \beta', \beta'' \in \mathcal{B}_n$  tal que  $\beta \sim \beta'$ ,  $\beta' \sim \beta''$  entonces existe una secuencia finita de movimientos elementales  $\Omega_1^{\epsilon_1}, \dots, \Omega_m^{\epsilon_m}$  que transforma  $\beta$  en  $\beta'$  y una secuencia finita de movimientos elementales  $\bar{\Omega}_1^{\bar{\epsilon}_1}, \dots, \bar{\Omega}_k^{\bar{\epsilon}_k}$  que transforma  $\beta'$  en  $\beta''$ . Obteniéndose  $\beta \xrightarrow{\Omega_1^{\epsilon_1}} \dots \xrightarrow{\Omega_m^{\epsilon_m}} \beta'$  y  $\beta' \xrightarrow{\bar{\Omega}_1^{\bar{\epsilon}_1}} \dots \xrightarrow{\bar{\Omega}_k^{\bar{\epsilon}_k}} \beta''$ . Así la secuencia finita de movimientos elementales  $\Omega_1^{\epsilon_1}, \dots, \Omega_m^{\epsilon_m}, \bar{\Omega}_1^{\bar{\epsilon}_1}, \dots, \bar{\Omega}_k^{\bar{\epsilon}_k}$  transforma  $\beta$  en  $\beta''$  así  $\beta \sim \beta''$ .  $\square$

Ahora introducimos otras tres relaciones de equivalencia sobre trenzas.

**Definición 2.3.5.** Sean  $\beta, \beta'$  dos  $n$ -trenzas en  $\mathbb{D}$ . Suponer que existe un homeomorfismo  $H : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \times [0, 1]$  tal que  $H(x, t) = (h_t(x), t)$ ;  $x \in \mathbb{D}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Además

supongase que para todo  $t \in [0, 1]$  el homeomorfismo  $h_t : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisface:

1.  $h_t|_{\partial\mathbb{D}} = id : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$
2.  $h_0 = id : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$
3.  $h_1(\beta) = \beta'$

Entonces se dice que  $\beta$  es ambiente isotópico a  $\beta'$  y lo denotamos por  $\beta \approx \beta'$ . El homeomorfismo  $H$  es llamado isotopía ambiente.

La idea anterior de isotopía ambiente es deformar  $\beta$  a su imagen homeomorfica  $\beta'$  además preservamos la estructura del espacio circundante. Dada algún  $n \in \mathbb{N}$  es fácil mostrar que cada dos  $n$ -trenzas son homeomorfas como espacios topológicos de  $\mathbb{R}^3$ . La manera de distinguirlos es parecida a la estructura del resto de  $\mathbb{D}$ .

**Definición 2.3.6.** Sean  $\beta$ ,  $\beta'$  y  $H$  como en la definición anterior. Si además  $H$  satisface: “Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t(\beta)$  es una  $n$ -trenza.”

Entonces se dice que  $\beta$  es una isotopía fuerte a  $\beta'$  denotado por  $\beta \sim_s \beta'$  y el homeomorfismo  $H$  es llamada isotopía fuerte ó una  $s$ -isotopía.

Isotopía fuerte es justamente una forma fuerte de isotopía donde imponemos que la condición que la imagen de  $\beta$  debe ser además trenza por deformación. Veremos más adelante que si dos trenzas son isotópicas ambiente entonces ellos son isotópicos fuerte. En otras palabras deformar una trenza en otra implica que existe una mejor manera de hacer esto en cada etapa pararemos al tener una trenza.

**Definición 2.3.7.** Sean  $\beta$ ,  $\beta'$  dos  $n$ -trenzas en  $\mathbb{D}$ . Suponga que existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  tal que:

1.  $h(\beta) = \beta'$

$$2. h|_{\partial\mathbb{D}} = id : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$$

Entonces  $\beta$  se dice h-equivalente a  $\beta'$ , denotado por  $\beta \sim_h \beta'$  y el homeomorfismo  $h$  es llamado una h-equivalencia.

Una h-equivalencia lleva  $\mathbb{D}$  en si mismo sin alterar el borde de  $\mathbb{D}$ .

Todas las relaciones definidas anteriormente están entrelazadas con nuestra idea de equivalencia de trenzas como mostraremos seguidamente.

**Teorema 2.3.3.** Isotopía ambiente, isotopía fuerte y h-equivalencia son relaciones de equivalencia.

**Demostración.** La prueba es simple topología en la teoría de trenzas. Ver [21].  $\square$

Nuestro conocimiento previo dice que todas estas definiciones son la misma cosa. Esto es que cada dos n-trenzas  $\beta, \beta'$  son las mismas, si en  $\mathbb{D}$  podemos deformar una en la otra. Las relaciones anteriores formalizan la deformación de trenzas y aunque ellos pueden parecer diferentes ellos no lo son. Dos trenzas equivalentes bajo una de las relaciones anterior lo es bajo las otras. El siguiente teorema afirma esto.

**Teorema 2.3.4.** Sean  $\beta, \beta'$  dos n-trenzas en  $\mathbb{D}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\beta \sim \beta'$
2.  $\beta \approx \beta'$
3.  $\beta \sim_h \beta'$
4.  $\beta \sim_s \beta'$

**Demostración.** Ver [21].  $\square$

### 2.3.3 Diagrama de Trenzas

Ahora con un conjunto de diversas relaciones de equivalencias sobre  $\mathcal{B}_n$  podemos mejorar la interpretación de trenza. Aunque tenemos formalizado una presentación visual de una trenza. Dibujando  $\mathbb{D}$  deseamos describir una trenza, lo cual puede ser engorroso y confundirnos especialmente cuando tenemos una trenza sobre un gran número de cuerdas ó con un gran número de cruces. Así definimos una simple forma de proyectar una trenza sobre el plano que preserve bastante información permitiendo recuperar la trenza (equivalencia). En el proceso descubrimos un manera de generar trenzas por simple edificación de bloques, lo cuál veremos después.

**Definición 2.3.8.** Sea  $\beta \in \mathcal{B}_n$  en  $\mathbb{D}$  empezamos proyectando  $\mathbb{D}$  a el plano  $YZ$  vía la aplicación proyección  $\rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} ; \rho(x,y,z) = (0,y,z)$  el efecto de esta es aplastar la cuerdas trenza  $d_1 \dots d_n$  de  $\beta$  sobre la cara posterior de  $\mathbb{D}$ . Por simplicidad trataremos nuestra página como el plano  $YZ$  denotamos  $\rho(\beta)$  por  $\hat{\beta}$ . Ver figura 2.18

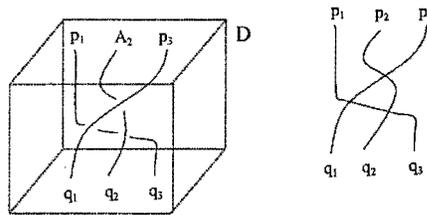


Figura 2.18: Una trenza y su proyección.

La proyección  $\rho(\beta)$  da un conjunto de  $n$ -curvas  $\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n$  en el plano cada  $\hat{d}_i$  existe la imagen de  $d_i$  bajo  $\rho$ . Estas curvas pueden tener muchos puntos de intersección (posiblemente infinitos), llamados **puntos intersección**. Cada proyección  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  satisfaciendo las siguientes tres condiciones se dice que es proyección regular de  $\beta$ :

1.  $\rho(\beta)$  tiene solo un número finito de puntos intersección.
2. Si  $\mathcal{Q}$  es un punto intersección de  $\hat{\beta}$  entonces la imagen inversa  $\rho^{-1}\mathcal{Q} \cap \beta$  de  $\mathcal{Q}$  en  $\beta$  tiene exactamente dos puntos. Que no son mas que dos puntos distintos de  $\beta$  mapeados sobre cada punto en  $\hat{\beta}$  tal punto  $\mathcal{Q}$  se dice que es un doble punto de  $\hat{\beta}$ .
3. Ningun vértice de  $\beta$  es aplicado a algún doble punto de  $\hat{\beta}$ .

Decimos que dos proyecciones regulares son equivalentes si ellas son las proyecciones de dos trenzas equivalentes.

**Teorema 2.3.5.** Toda trenza tiene una proyección regular.

**Demostración.** Dada una proyección  $\hat{\beta}$  de nuestra trenza  $\beta$  (donde  $\hat{\beta} = \rho(\beta)$ ) como antes). Como tenemos un número finito de arcos poligonales entonces se tiene asegurado un número finito de puntos intersección, solo necesitamos asegurar que no dos líneas rectas una encima de la otra. Si esto ocurre podemos corregir inclinando una de las líneas como muestra la figura 2.19

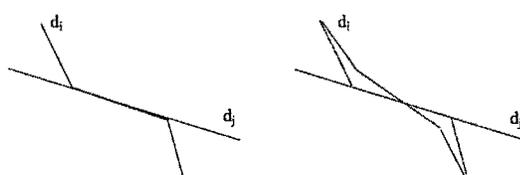


Figura 2.19: Cuando dos líneas paralelas en la proyección intersectan, podemos inclinar ligeramente una así que la intersección resulta un punto.

Suponga que un punto intersección tiene una pre-imagen de a lo mas dos puntos. Entonces podemos mover arcos subsecuentes al rededor de la intersección

de puntos asegurar que solo dos arcos cruzan el punto como muestra la figura 2.20

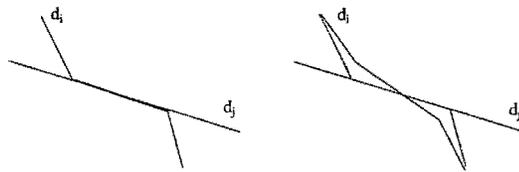


Figura 2.20: Cuando a lo mas dos líneas cruzan un punto podemos doblar cada dos de las líneas al rededor del punto.

Supongase que tenemos un vértice aplicado a un doble punto. Entonces simplemente truncamos el vértice, así el vértice no se alarga recostado sobre el punto intersección. Como se muestra en la figura 2.21

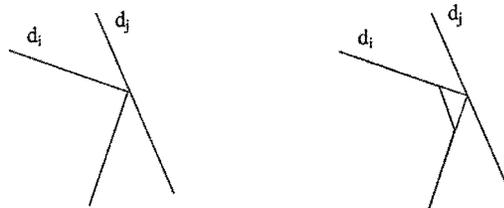


Figura 2.21: Cuando un vértice está recostado sobre un punto intersección, simplemente truncamos el vértice.

Ahora puede haber solo un número finito de violaciones de las condiciones 1-3 y cada movimiento corrección se tiene definido y se puede realizar no teniendo mas violaciones. Así despues de un número finito de movimientos correccionales tenemos una proyección regular. (Recordar que los puntos de intersección son finitos) □

Ahora cambiamos nuestras proyecciones regulares para dar una percepción visual mas intuitiva de nuestra trenza. Hacemos esto indicando cruzamientos arriba-abajo como en la siguiente definición.

**Definición 2.3.9.** Consideremos la proyección  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; r(x,y,z) = x$  sobre el eje  $X$ . Sean  $\beta \in \mathcal{B}_n$  y  $\hat{\beta}$  una proyección regular de  $\beta$ . Para cada punto doble  $\mathcal{Q}$  de  $\hat{\beta}$  (se dice una intersección de  $d_i, d_j$ ), decidiendo cual  $d_i, d_j$  está en frente viendo cuál  $r(d_i \cap \rho^{-1}(\mathcal{Q}))$  ó  $r(d_j \cap \rho^{-1}(\mathcal{Q}))$  es grande. Esto equivale a ver cuál  $d_i \cap \rho^{-1}(\mathcal{Q})$  ó  $d_j \cap \rho^{-1}(\mathcal{Q})$  vive pegado a la cara de enfrente de  $\mathbb{D}$ . Sin perdida de generalidad podemos decir que  $d_i$  está en frente. Entonces removemos una pequeña sección de  $\rho(d_j)$  alrededor de  $\mathcal{Q}$  en  $\hat{\beta}$ . Esto dá una idea de cuál cuerda recorre sobre y cuál recorre abajo. La figura 2.22 dá un ejemplo de un doble punto y las dos posibles modificaciones que puede hacerse a  $\hat{\beta}$ .

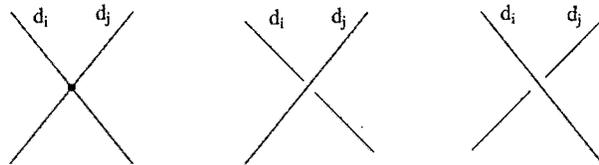


Figura 2.22: Un doble punto, y las dos posibles modificaciones señaladas con líneas horizontales puestas arriba y abajo.

Esta proyección regular modificada es llamada **diagrama regular** ó diagrama para la trenza  $\beta$ . Dos diagramas se dicen equivalentes si ellos son diagramas de trenzas equivalentes.

De aquí trazamos nuestros diagramas regulares sin los  $p_i$  y los  $q_i$  señalados y ubicar una línea horizontal a la tapa y la base del diagrama. La figura 2.23 dá un ejemplo de esto.

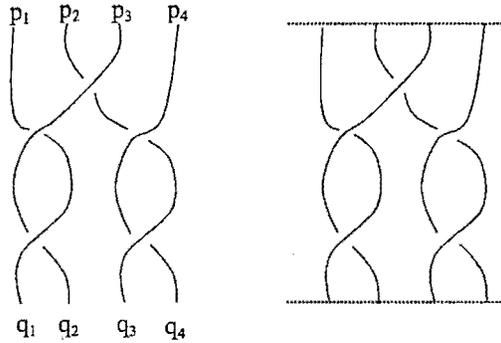


Figura 2.23: Un diagrama regular, retrasado sin algunos puntos señalados con líneas horizontales puestas arriba y abajo.

En esta sección desarrollaremos una forma de ver las trenzas como elementos de un grupo, con una operación natural conocida como producto trenza y estaremos capacitados para dar una presentación finita de este grupo.

### 2.3.4 El Grupo de Trenzas de Artin

Pasaremos a definir operaciones sobre el conjunto de trenzas, como un paso preliminar se muestra que el conjunto de  $n$ -trenzas puede ser visto como un grupo. Conocido como **Grupo de  $n$ -trenzas de Artin's** ó grupo de  $n$ -trenzas. Empezamos introduciendo una manera de multiplicar trenzas dando como resultado otra trenza.

**Definición 2.3.10.** Sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}_n$  a partir de  $\beta_1, \beta_2$  definiremos la trenza producto  $\beta_1\beta_2$  como sigue; Para  $\beta_1, \beta_2$  en los cubos unitarios  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$  respectivamente. Pegamos la base de  $\mathbb{D}_1$  ;  $z = 0$  con la tapa de  $\mathbb{D}_2$  ;  $z = 1$ . Entonces la unión escalera  $\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2$  por el factor  $\frac{1}{2}$  y llamando a esto  $\mathbb{D}$ . Claramente los puntos finales de arcos en  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son emparejados en esta identificación. La colección resultante de  $n$ -arcos en  $\mathbb{D}$  es denotado por  $\beta_1\beta_2$  el producto trenza de  $\beta_1$  con  $\beta_2$ . La figura 2.24 dá un ejemplo de dos 3-trenzas y su producto.

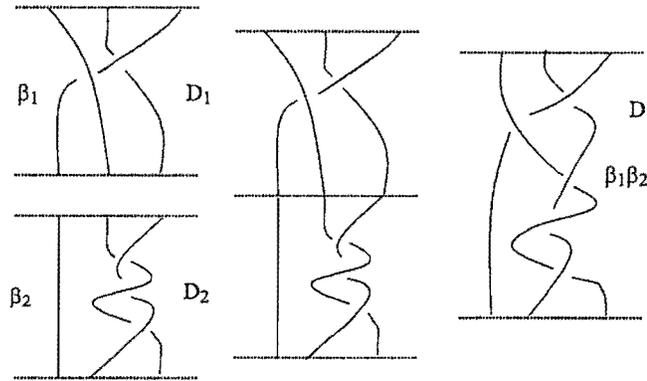


Figura 2.24: Dos 3-trenzas atraídos uno encima del otro, entonces pegados da su producto.

**Teorema 2.3.6.** Sean  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}_n$  entonces  $\beta_1\beta_2 \in \mathcal{B}_n$ .

**Demostración.** Si  $\beta_1$  vive en  $\mathbb{D}_1$  con cuerdas trenza  $\{d_1^1, \dots, d_n^1\}$  donde cada  $d_i^1$  empieza en  $p_i^1$  y finaliza en  $q_{j_1(i)}^1$ . Si  $\beta_2$  vive en  $\mathbb{D}_2$  con cuerdas trenza  $\{d_1^2, \dots, d_n^2\}$  donde cada  $d_i^2$  empieza en  $p_i^2$  y finaliza en  $q_{j_2(i)}^2$ . Luego identificamos la base de  $\mathbb{D}_1$  con la tapa de  $\mathbb{D}_2$  y cada  $q_i^1$  es identificado con  $p_i^2$ . Así para cada  $1 \leq i \leq n$  el fin de  $d_i^1$  (esto es  $q_{j_1(i)}^1$ ) conecta al inicio de  $d_{j_1(i)}^2$ . Así  $\{d_i^1 \cup d_{j_1(i)}^2; 1 \leq i \leq n\}$  es un conjunto de n-arcos poligonales en  $\mathbb{D}$  y denotamos cada  $d_i^1 \cup d_{j_1(i)}^2$  por  $d_i$ . En la figura 2.24 ilustramos esto para el producto trenza de dos 3-trenzas. Mostraremos que los  $d_i$  forman las cuerdas trenza de una n-trenza verificando la definición de una n-trenza.

- Como  $\beta_1$  (respectivamente  $\beta_2$ ) es una trenza, entonces todos los  $d_i^1$  (respectivamente  $d_i^2$ ) son disjuntos. Así los  $d_i$  deben ser disjuntos siendo la unión de  $d_i^1$  y  $d_{j_1(i)}^2$ .
- Por definición, cada  $d_i$  empieza en  $p_i^1$  y finaliza en  $q_{j_2(j_1(i))}^2$ .

- Como  $\beta_1$  (respectivamente  $\beta_2$ ) es una trenza entonces cada plano de nivel en  $\mathbb{D}_1$  (respectivamente  $\mathbb{D}_2$ ) intersectan cada  $d_i^1$  (respectivamente  $d_i^2$ ) una vez. Así cada plano de nivel en  $\mathbb{D}$  intersecta  $d_i$  una vez.
- Cada  $d_i^1$  (respectivamente  $d_i^2$ ) está contenido en  $\mathbb{D}_1$  (respectivamente  $\mathbb{D}_2$ ). Así cada  $d_i$  está contenido en  $\mathbb{D}$ .

Así la colección de n-arcos  $d_1, \dots, d_n$  satisfacen la definición de una n-trenza, por lo que  $\beta_1\beta_2$  es una n-trenza.  $\square$

Antes de probar que  $\mathcal{B}_n$  es un grupo debemos probar los siguientes lemas.

**Lema 2.3.1.** Supongase  $\beta, \beta', \bar{\beta}, \bar{\beta}' \in \mathcal{B}_n$  con  $\beta \sim \beta'$  y  $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}'$  entonces  $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$ .

**Demostración**

Tenemos  $\beta \sim \beta'$ . Por tanto existe la secuencia finita de movimientos elementales:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega_0} \beta_1 \dots \xrightarrow{\Omega_{m-1}} \beta_m = \beta'$$

Esto induce la siguiente secuencia:

$$\beta\bar{\beta} = \beta_0\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega_0} \beta_1\bar{\beta} \dots \xrightarrow{\Omega_{m-1}} \beta_m\bar{\beta} = \beta'\bar{\beta}$$

Así  $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}$ . Además tenemos  $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}'$  por tanto existe una secuencia finita de movimientos elementales:

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_0 \xrightarrow{\bar{\Omega}_0} \bar{\beta}_1 \dots \xrightarrow{\bar{\Omega}_{k-1}} \bar{\beta}_k = \bar{\beta}'$$

Esto induce la siguiente secuencia

$$\beta'\bar{\beta} = \beta'\bar{\beta}_0 \xrightarrow{\bar{\Omega}_0} \beta'\bar{\beta}_1 \dots \xrightarrow{\bar{\Omega}_{k-1}} \beta'\bar{\beta}_k = \beta'\bar{\beta}'$$

Así  $\beta'\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$ . Entonces por transitividad  $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$ .

Note sin embargo que el producto trenza no es en general conmutativo. La figura 2.25 muestra un ejemplo dando dos 3-trenzas  $\alpha$ ,  $\beta$  donde  $\alpha\beta$  y  $\beta\alpha$  son no equivalentes.

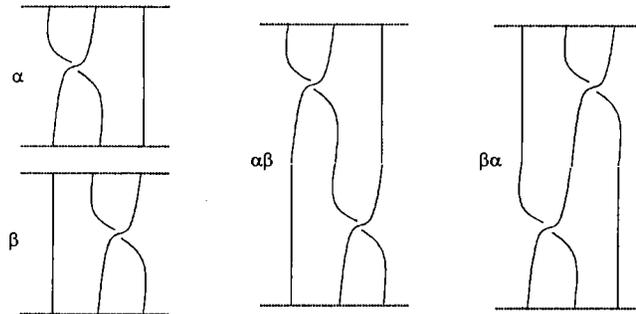


Figura 2.25: Dos 3-trenzas  $\alpha$ ,  $\beta$  con los productos  $\alpha\beta$ ,  $\beta\alpha$ .

**Lema 2.3.2.** Sean  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathcal{B}_n$ . Entonces  $(\beta_1\beta_2)\beta_3 \sim \beta_1(\beta_2\beta_3)$ . Esto dice que el producto trenza es asociativo.

**Demostración**

Fijar los diagramas  $A, B, C$  para  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  como muestra la figura 2.26 entonces la figura 2.27 dá diagramas  $(\beta_1\beta_2)\beta_3$ ,  $\beta_1(\beta_2\beta_3)$  los cuales son diagramas idénticos por lo que representan trenzas equivalentes.

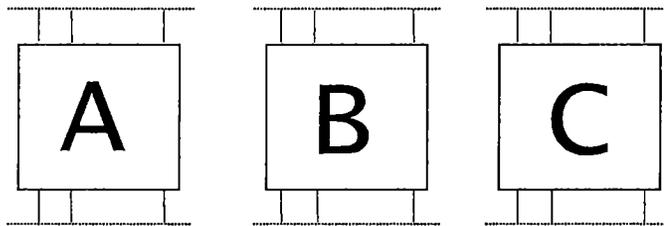


Figura 2.26: Diagramas  $A, B, C$  para trenzas  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  respectivamente.

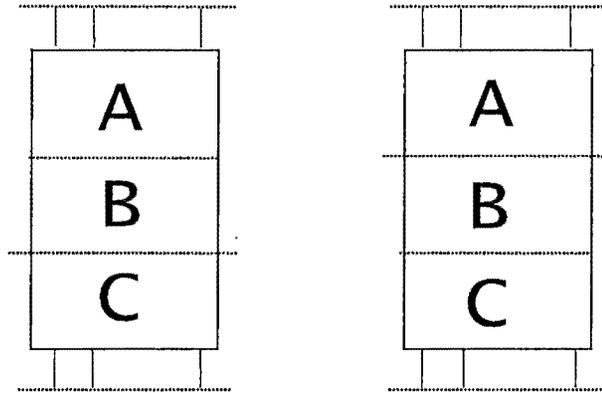


Figura 2.27: Un diagrama para  $(\beta_1\beta_2)\beta_3$  y para  $\beta_1(\beta_2\beta_3)$ .

**Definición 2.3.11.** Sea  $e$  una  $n$ -trenza definida como sigue: Para cada  $1 \leq i \leq n$  juntar  $p_i$  con  $q_i$  vía un segmento de recta  $d_i$ . La trenza  $e$  es llamada identidad o trenza trivial denotada  $1_n$ .

La trenza trivial puede ser graficada; esto es la  $n$ -trenza que tiene un diagrama sin cruzamientos. A la trenza  $1_n$  se le puede hacer movimientos elementales.

**Lema 2.3.3.** Para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  tenemos que  $\beta 1_n \sim \beta$  y  $1_n \beta \sim \beta$ . Así  $1_n$  actúa como elemento identidad para el producto de trenzas

**Demostración.** Fijar un diagrama para  $\beta$  como en la figura 2.28. Sabemos que  $1_n$  tiene un diagrama como en la figura 2.28. Así  $\beta 1_n$  tiene como diagrama el final de la figura 2.28. Sin embargo podemos contractar las cuerdas verticales a la base del diagrama de  $\beta 1_n$  como muestra la figura 2.29 y esto es una equivalencia de trenzas. Por tanto  $\beta 1_n \sim \beta$  y por un argumento análogo  $1_n \beta \sim \beta$ .  $\square$

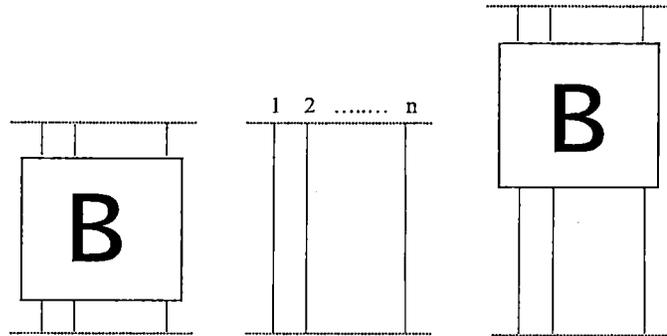


Figura 2.28: Diagrama para  $\beta$ ,  $1_n$  y su producto  $\beta 1_n$ .

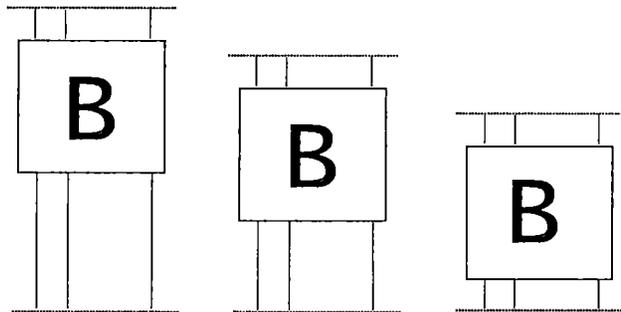


Figura 2.29: Contractando la base de las cuerdas verticales de un diagrama para  $\beta 1_n$  se obtiene diagrama para  $\beta$ .

Así agregando la  $n$ -trenza trivial sobre cada final de una  $n$ -trenza  $\beta$  esta no cambia. Esto tiene sentido pues estamos efectuando un alargamiento a la tapa o a la base final de las cuerdas de  $\beta$ .

**Lema 2.3.4.** Para cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  existe  $\beta' \in \mathcal{B}_n$  tal que  $\beta\beta' \sim 1_n$  y  $\beta'\beta \sim 1_n$ . Tal trenza  $\beta'$  es llamada la inversa de  $\beta$ , denotado por  $\beta^{-1}$ .

**Demostración.** Sea  $\beta$  una  $n$ -trenza en  $\mathbb{D}$ . Construir una nueva trenza  $\beta'$  reflejando  $\beta$  en la cara base de  $\mathbb{D}$  (esto es en el plano  $z = 0$ ) el cual llamamos  $J$ .

Entonces formar la  $n$ -trenza  $\beta\beta'$ . Ahora realizamos movimientos elementales sobre  $\beta\beta'$  para transformarla en una trenza trivial como sigue: empezamos con la unión de  $\beta$  y  $\beta'$  es decir donde finaliza  $\beta$  y empieza  $\beta'$  el cuál es el plano de reflexión. Transversamos sobre el diagrama para  $\beta\beta'$  (llamar esto  $B$ ) venimos a el primer cruzamiento (esto es el cruzamiento cerrado a  $J$ ). Si hay cruces multiples elegimos cada uno. Así tenemos hallado nuestro primer cruzamiento  $X$ , hablamos de las cuerdas  $d_i$  y  $d_j$  y sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $d_i$  es la sobrecuerda. Así tenemos  $B$  mirando localmente la figura 2.30. Esto es pues conocemos que  $B$  tiene simetría semejante al rededor de  $J$ , y no existe otro cruzamiento y es imagen bajo  $J$ . Así algún movimiento simple elemental elimina el cruzamiento  $X$  y es imagen semejante como se muestra en la figura 2.31. Sin embargo tenemos realizado estos movimientos sin introducir nuevos cruzamientos y preservando la simetría semejante en el diagrama. Así ahora tenemos un nuevo diagrama  $B'$  para  $\beta\beta'$  con solo dos cruzamientos. Entonces iteramos este proceso sobre el diagrama  $B'$  y así en adelante se sigue reduciendo el número de cruzamientos por dos y preservando la simetría. Eventualmente estamos a izquierda con una  $n$ -trenza sin cruces el cuál es equivalente a la trenza trivial. Así  $\beta\beta' \sim 1_n$ . Ahora poniendo  $\beta'$  en  $\mathbb{D}'$  y reflejando en la cara inferior de  $\mathbb{D}'$  dá  $\beta$ , un argumento idéntico muestra  $\beta'\beta \sim 1_n$ .

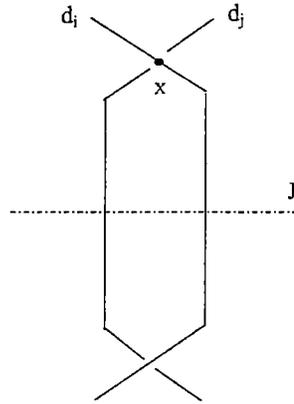


Figura 2.30: El cruzamiento  $X$  y su imagen reflejo sobre  $J$ .

□

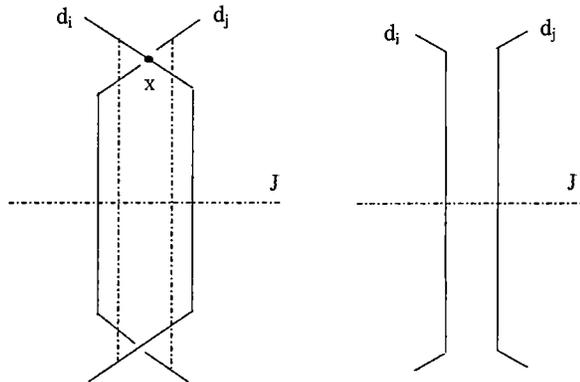


Figura 2.31: El cruzamiento  $X$  y su imagen reflejo sobre  $J$ .

Así como podemos ver es fácil construir la inversa  $\beta^{-1}$  de una  $n$ -trenza  $\beta$  la existencia de tal trenza dice que podemos desatar una trenza  $\beta$  (arriba) como sigue. Este es un contraste a la teoría de nudos donde es conocido que la suma conexa de cada dos nodos no triviales darán otro nudo no trivial.

Nuestro paso final es de definir un conjunto en el cuál dos trenzas equivalentes son consideradas las mismas. El cociente de  $\mathcal{B}_n$  será el comienzo y fin de nuestro grupo de n-trenzas.

**Definición 2.3.12.** Sea  $\beta \in \mathcal{B}_n$ . Según la relación  $\sim$  denotemos la clase de equivalencia de  $\beta$  por  $[\beta]$ . Denote por  $B_n$  el conjunto de todas las clase de equivalencias de n-trenzas por  $B_n = \frac{\mathcal{B}_n}{\sim}$ .

**Definición 2.3.13.** Sean  $[\beta], [\beta'] \in B_n$  se define una operación sobre las clases de equivalencias de trenzas como sigue  $[\beta].[\beta'] = [\beta\beta']$  donde  $\beta\beta'$  es el producto de trenzas.

**Teorema 2.3.7.** El conjunto  $B_n$  forman un grupo con la operación “.” definida anteriormente. Este grupo es llamado el n-grupo trenza ó n-grupo trenza de Artin’s.

**Demostración.** Sean  $[\beta_1], [\beta_2], [\beta_3] \in B_n$ .

1.  $[\beta_1].[\beta_2] = [\beta_1\beta_2]$  por el lema 2.3.1.  
Así  $B_n$  es cerrado con la operación “.”
2.  $([\beta_1].[\beta_2]).[\beta_3] = [\beta_1\beta_2].[\beta_3] = [(\beta_1\beta_2)\beta_3]$  por lema 2.3.2  
 $= [\beta_1].[\beta_2\beta_3] = [\beta_1].([\beta_2].[\beta_3])$   
Así “.” es una operación asociativa sobre  $B_n$ .
3.  $[1_n].[\beta_1] = [1_n\beta_1] = [\beta_1]$  por lema 2.3.3.  
 $[\beta_1].[1_n] = [\beta_1 1_n] = [\beta_1]$  por lema 2.3.3.  
asi  $1_n$  es el elemento identidad para  $B_n$ .
4.  $[\beta_1].[\beta_1^{-1}] = [\beta_1\beta_1^{-1}] = [1_n]$  por el lema 2.3.4  
 $[\beta_1^{-1}].[\beta_1] = [\beta_1^{-1}\beta_1] = [1_n]$  por el lema 2.3.4  
Así  $[\beta_1^{-1}]$  es la inversa de  $[\beta_1]$  denotada por  $[\beta_1]^{-1}$ .

Así  $(B_n, \cdot)$  satisface la definición de un grupo. □

**Nota:** Para evitar notación incómoda denotaremos una  $n$ -trenza  $\beta \in B_n$  por su clase de equivalencia  $[\beta]$  y por tanto las clases equivalentes como si fueran ella misma.

### 2.3.5 Sistema de generadores del grupo trenza

Ahora daremos una presentación explícita finita para  $B_n$ .

**Definición 2.3.14.** Para  $1 \leq i \leq n-1$  definir la  $n$ -trenza  $\sigma_i$  como la trenza presentada en la figura 2.32. Esto es  $\sigma_i$  es la trenza con solo un cruzamiento donde la cuerda de  $p_i$  a  $q_{i+1}$  cruza bajo la cuerda de  $p_{i+1}$  a  $q_i$ . La  $n$ -trenza inversa de  $\sigma_i$  es la trenza representada por el diagrama en el final de la figura 2.32. Así  $\sigma_i^{-1}$  es la trenza con solo un cruzamiento donde la cuerda de  $A_i$  a  $B_{i+1}$  cruza sobre la cuerda de  $A_{i+1}$  a  $B_i$ . El conjunto  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  es conocido como el conjunto de generadores de Artin para el grupo trenza  $B_n$ .

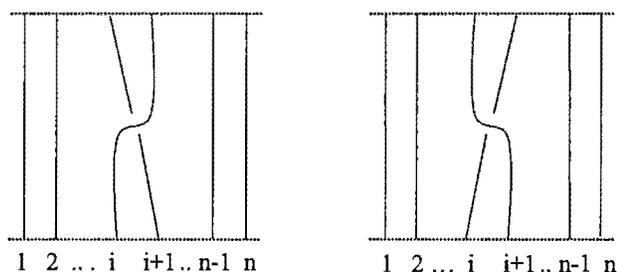


Figura 2.32: Un diagrama para  $\sigma_i$  y su inversa  $\sigma_i^{-1}$ .

Los  $\sigma_i$  son las  $n$ -trenzas simples (después trenzas triviales) teniendo diagramas con solo un cruzamiento (necesariamente entre dos trenzas adyacentes). No será

difícil ver que cada  $n$ -trenza puede ser particionada en las  $\sigma_i$  y sus inversas y cortamente veremos que estas forman un conjunto generando  $B_n$ .

**Teorema 2.3.8.** Sea  $\beta \in B_n$  entonces  $\beta$  puede ser escrito como producto de los  $\sigma_i$  y sus inversos, esto es  $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$  con  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n-1$ ;  $\varepsilon_i \in \pm 1$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Dada una  $n$ -trenza  $\beta$  sabemos que existe un diagrama para  $\beta$ . Este diagrama tiene un número finito de cruzamientos. Cambiando ligeramente los cruzamientos arriba y abajo podemos tener un diagrama para  $\beta$  donde dos cruzamientos no están a la misma altura como en la figura 2.33.

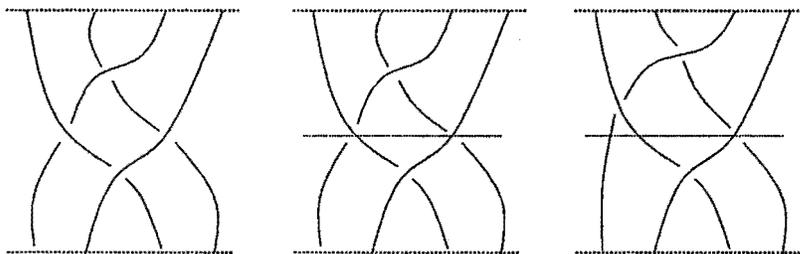


Figura 2.33: Un diagrama regular re-trazado donde los dos cruzamientos a la misma altura no son grandes.

Podemos separar los cruzamientos por planos de nivel y así particionar  $\beta$  en secciones con cada sección teniendo solo un cruzamiento en este diagrama, podemos realizar entonces un conjunto de movimientos elementales para transformar cada sección en la cuál cada dos cuerdas adyacentes son completamente verticales. Así tenemos particionada nuestra trenza como el producto de los  $\sigma_i$  y sus inversas. La figura 2.34 da un ejemplo de este particionamiento y enderezando subsecuencia. Por tanto podemos usar un número finito de planos de nivel a la partición de  $\beta$  en secciones, cada sección es equivalente a  $\sigma_i^\varepsilon$  para algún  $1 \leq i \leq n-1$ . Así  $\beta$  es

equivalente al producto finito de estos ( $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}$ ).

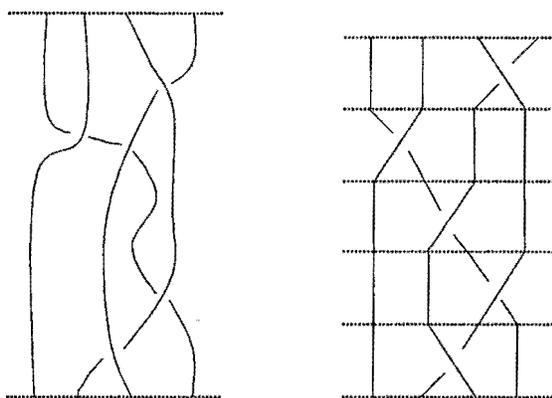


Figura 2.34: Una trenza con planos de nivel entre cada par de cruzamientos, re-trazados, así mas cuerdas son verticales.

□

Ahora describimos algunas relaciones entre los generadores de Artin, los cuales son consecuencias de algunos movimientos elementales simples. Lo que no es obvio sin embargo es que las relaciones deben estar presentadas en  $B_n$ .

**Teorema 2.3.9.** Las siguientes relaciones se tienen en  $B_n$ .

1.  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  para cada  $1 \leq i, j \leq n-1$ ;  $|i-j| \geq 2$ .
2.  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  para cada  $1 \leq i \leq n-2$ .

**Demostración. Primero:** En la figura 2.35 tenemos un diagrama para  $\sigma_i \sigma_j$  para algunos  $1 \leq i, j \leq n-1$ ;  $|i-j| \geq 2$  podemos además trazar movimientos elementales sobre este diagrama. El final de la figura 2.35 es el diagrama resultante después de este movimiento elemental siendo un diagrama para  $\sigma_j \sigma_i$ .

**Segundo:** En la figura 2.36 tenemos un diagrama para  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$  para algún

$1 \leq i \leq n - 2$  con un movimiento elemental trazado (esto es la composición de algún número de movimientos elementales). El final de la figura 2.36 es el diagrama resultante después que este movimiento elemental es realizado, siendo un diagrama para  $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ . □

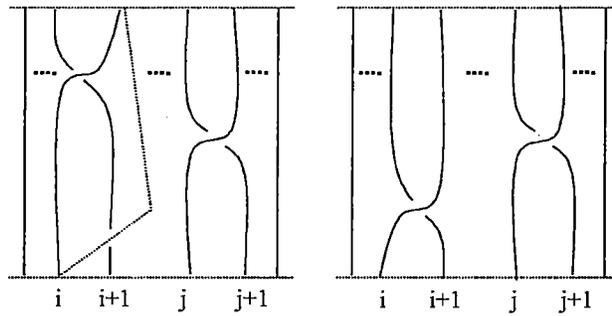


Figura 2.35: Un diagrama para  $\sigma_i\sigma_j$  y después realizando el movimiento elemental punteado tenemos un diagrama para  $\sigma_j\sigma_i$ .

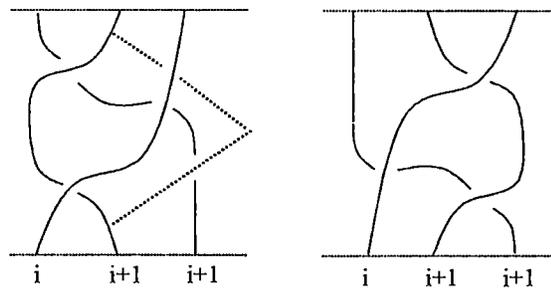


Figura 2.36: Un diagrama para  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$  y después de realizado el movimiento elemental punteado tenemos un diagrama para  $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ .

**Teorema 2.3.10.** Para cada  $n \geq 1$  el grupo-trenza  $B_n$  tiene la presentación:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle ; \begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2, 0 \leq i, j \leq n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, \dots, n-2 \end{cases}$$

**Demostración.** Empezamos definiendo un grupo  $G$  tal que:

$$G = \langle x_1 \dots x_{n-1} \rangle$$

Donde:  $x_i x_j = x_j x_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n-1$ ,  $|i-j| \geq 2$  y

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-2.$$

El teorema 2.3.8 muestra que los generadores de Artin  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  forman un conjunto de generadores para  $B_n$ .

Así definimos una aplicación  $\bar{\phi} : \{x_1 \dots x_{n-1}\} \rightarrow B_n$ ;  $\bar{\phi}(x_i) = \sigma_i$ . Lo cuál se extiende a una aplicación  $\phi : G \rightarrow B_n$  además se tiene que:

Si  $|i-j| > 1$  entonces:

$$\phi(x_i x_j) = \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i = \phi(x_j x_i). \text{ Por teorema 2.3.9}$$

Si  $1 \leq i < n-2$  entonces:

$$\phi(x_i x_{i+1} x_i) = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \phi(x_{i+1} x_i x_{i+1}). \text{ Por teorema 2.3.9}$$

Así  $\phi$  es homomorfismo y claramente cada  $\sigma_i$  vive en la imagen de  $\phi$  luego  $\phi(x_i) = \sigma_i$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ . Así  $\phi$  es suryectiva.

Para probar la inyectividad de  $\phi$  procedemos como sigue:

Mostraremos que  $Ker(\phi) = \{1\}$  para esto fijar un elemento  $g \in Ker(\phi)$  y fijar una expresión  $\omega = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$  representando  $g$ . Así  $\phi(g) = \phi([\omega]) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1_{B_n}$  pues  $g \in Ker(\phi)$ . Formamos un representante  $\beta \in \mathcal{B}_n$  para  $\phi(g)$  como sigue: definir un diagrama  $C_{\sigma_i}$  para cada  $\sigma_i$  y similarmente definimos  $C_{\sigma_i}^{-1}$  para cada  $\sigma_i^{-1}$  ver la figura 2.37 como ejemplo de estos diagramas. Ahora formamos un diagrama  $D^\omega$  por concatenamiento  $C_{\sigma_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots C_{\sigma_{i_k}}^{\varepsilon_k}$  esta definición se puede extender a cada expresión  $\omega$  sobre los generadores de Artin representando un elemento en  $G$ . La figura 2.38 dá un ejemplo del diagrama  $D^{\sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2}$  formado por concatenamiento

de  $C_1^{-1}$ ,  $C_3$ ,  $C_2$  para dar el diagrama  $C_1^{-1}C_3C_2$ .

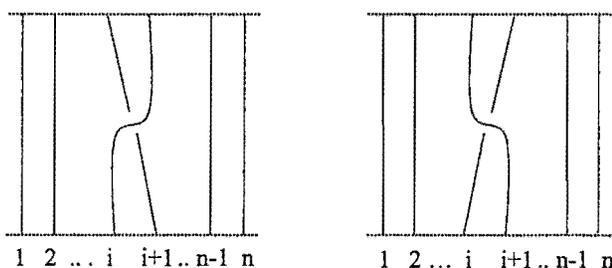


Figura 2.37: Los diagramas  $C_{\sigma_i}$  y  $C_{\sigma_i}^{-1}$  de  $\sigma_i$  y  $\sigma_i^{-1}$  respectivamente.

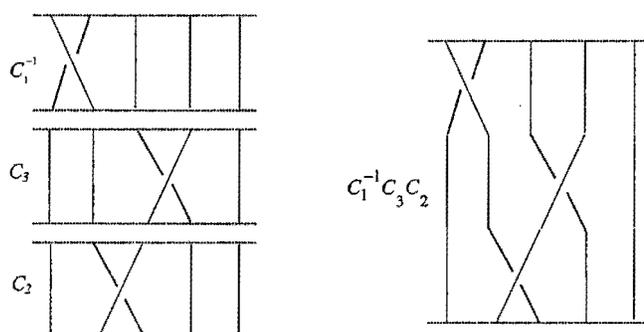


Figura 2.38: Concatenando los diagramas  $C_1^{-1}$ ,  $C_3$ ,  $C_2$  para tener el diagrama  $C_1^{-1}C_3C_2$ .

Denotemos por  $\beta^\omega \in \mathcal{B}_n$  la  $n$ -trenza representada por el diagrama  $D^\omega$  (extendiendo la definición a cada  $\omega$  para representar el elemento en  $G$ ). Claramente  $\beta^\omega$  es un representante para  $\phi(g)$  pues  $[\beta^\omega] = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}$ . Es importante aquí ver que si dos diagramas  $D^\omega$ ,  $D^{\omega'}$  son idénticos (equivalentes) entonces  $\omega$  y  $\omega'$  deben ser expresiones idénticas. Ahora como  $\phi(g) = 1_{B_n}$  tenemos que  $[\beta]^\omega = 1_{B_n}$ ;  $\beta^\omega \sim 1_n$ . Así existe una secuencia finita de  $l$  movimientos elementales y sus inversas  $\Omega_1^{m_1} \dots \Omega_l^{m_l}$  donde  $m_j \in \{\pm 1\}$ ;  $1 \leq j \leq l$  que transforma  $\beta^\omega$  en  $1_n$  finalizamos

con

$$\beta^\omega = \beta_0 \xrightarrow{\Omega_1^{m_1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega_2^{m_2}} \dots \xrightarrow{\Omega_l^{m_l}} \beta_l = 1_n$$

Donde todos los  $\beta_i$  son n-trenzas intermedias. Podemos ver los movimientos elementales actuando sobre los diagramas para cada trenza intermedia descrita arriba. Así definiendo  $D_i$  como el diagrama para  $\beta_i$  y cada  $i$  y denotando un movimiento elemental sobre un diagrama por  $\bar{\Omega}^{\pm 1}$  obtenemos la siguiente secuencia:

$$D^\omega = D_0 \xrightarrow{\bar{\Omega}_1^{m_1}} D_1 \xrightarrow{\bar{\Omega}_2^{m_2}} \dots \xrightarrow{\bar{\Omega}_l^{m_l}} D_l = D^1$$

Donde  $D^1$  es el diagrama trivial para la trenza trivial  $1_n$  (esto es n líneas verticales). La figura 2.39 da un ejemplo de este diagrama. Podemos rescatar que dadas dos expresiones  $\omega_1, \omega_2$  sobre los  $x_i$ , si  $D^{\omega_1}, D^{\omega_2}$  difieren por el movimiento elemental  $\bar{\Omega}$  (esto es  $D^{\omega_1} \xrightarrow{\bar{\Omega}} D^{\omega_2}$ ) entonces  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

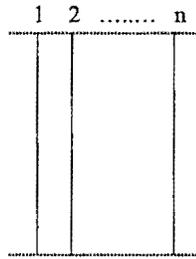


Figura 2.39: El diagrama  $D^1$  para la trenza trivial  $1_n$ .

Confirmamos esto con un número finito de casos.

Así dadas  $\omega_1 = x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$ ,  $\omega_2 = x_{\rho_1}^{\gamma_1} \dots x_{\rho_z}^{\gamma_z}$  empezamos con el diagrama  $D^{\omega_1}$  y realizamos el movimiento elemental  $\bar{\Omega}^s (s \in \{\pm 1\})$  el cuál actúa sobre alguna cuerda trenza  $d$  y transforma  $D^{\omega_1}$  en  $D^{\omega_2}$ . Así tenemos un triángulo  $\Delta ABC$  en el plano y reemplazamos  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  con  $\overline{AB}$  (si  $s = -1$ ) ó reemplazamos  $\overline{AB}$  con  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  (si  $s = 1$ ). Deseamos ver en que caso es falso

dentro del triángulo  $\Delta ABC$  (Aquí el triángulo es proyectado en el plano; obviamente dicho triángulo se hace vacío en el 3-espacio por definición de movimiento elemental).

**Caso 1.**  $\Delta ABC$  es vacío como en la figura 2.40

Entonces la expresión  $\omega_1$  tiene como diagrama  $D^{\omega_2}$  pues no tenemos movida no rompiendo cada cruzamiento. Así  $\omega_1 = \omega_2$  por lo que  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

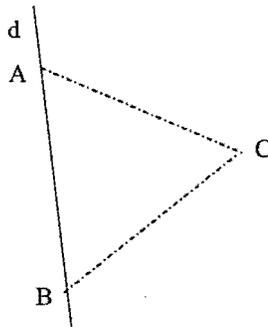


Figura 2.40: Un movimiento elemental sobre  $d$  donde  $\Delta ABC$  es vacío.

**Caso 2.**  $\Delta ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que entra y sale en  $\Delta ABC$  bajo  $AB$  como en la figura 2.41

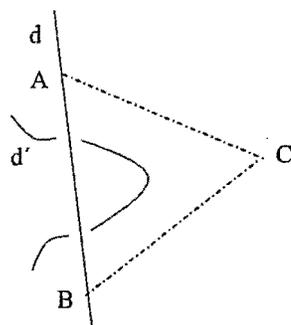


Figura 2.41: Un movimiento elemental sobre  $d$ , donde  $\triangle ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que entra y sale de  $\triangle ABC$  bajo  $\overline{AB}$ .

Si  $s = 1$  entonces tenemos(para algún  $i$ ) removido el subdiagrama  $C_i C_i^{-1}$  de algún lado en nuestro diagrama y así tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  donde  $x_{\tau_j}^{\alpha_j} = x_i$  y  $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = x_i^{-1}$  el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ .

Si  $s = -1$  entonces tenemos(para algún  $i$ ) agregado el subdiagrama  $C_i C_i^{-1}$  de algún lado en nuestro diagrama y así tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i x_i^{-1} x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ . Para acabar debemos realizar cancelación libre(ó inversa) sobre  $\omega_1$  y así  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

**Caso 3.**  $\triangle ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que está dentro de  $\triangle ABC$  bajo  $\overline{AC}$  como en la figura 2.42

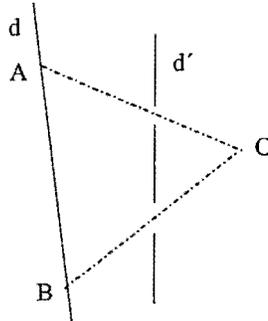


Figura 2.42: Un movimiento elemental sobre  $d$ , donde  $\Delta ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que entra a  $\Delta ABC$  y sale bajo  $BC$ .

Si  $s = 1$  entonces tenemos(para algún  $i$ ) agregado el subdiagrama  $C_i^{-1}C_i$  de algún lado en nuestro diagrama y así tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i^{-1} x_i x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ .

Si  $s = -1$  entonces tenemos(para algún  $i$ ) removido el subdiagrama  $C_i^{-1}C_i$  de algún lado en nuestro diagrama y así tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  donde  $x_{\tau_j}^{\alpha_j} = x_i^{-1}$  y  $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = x_i$  el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ . Para acabar debemos realizar cancelación libre(ó inversa) sobre  $\omega_1$  y así  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

**Caso 4.**  $\Delta ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que está dentro de  $\Delta ABC$  bajo  $\overline{AB}$  ó  $\overline{AC} \cup \overline{BC}$  y sale bajo la otra como en la figura 2.43

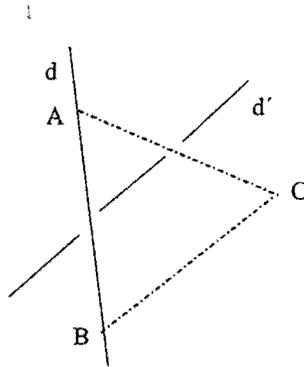


Figura 2.43: Un movimiento elemental sobre  $d$ , donde  $\Delta ABC$  contiene parte de otra cuerda  $d'$  que entra y sale de  $\Delta ABC$  bajo uno de  $BC$ ,  $AC \cup BC$  y sale bajo la otra.

Respecto del signo de  $s$  tenemos (para algún  $i$  y algún  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ ) cambiado en el subdiagrama  $C_i^\varepsilon$  el orden arriba ó abajo en nuestro diagrama después de algún número de los otros  $C_r^{\pm 1}$  con  $r \neq i-1, i, i+1$ . Así ahora tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i^\varepsilon x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_{v-1}}^{\alpha_{v-1}} x_{\tau_{v+1}}^{\alpha_{v+1}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  si  $C_i^\varepsilon$  es cambiado sobre ( $x_{\tau_v}^{\alpha_v} = x_i^\varepsilon$  y  $|\tau_q - i| \geq 2$ ;  $j+1 \leq q \leq v-1$ ) ó el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_{v-1}}^{\alpha_{v-1}} x_{\tau_{v+1}}^{\alpha_{v+1}} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i^\varepsilon x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  si  $C_i^\varepsilon$  es cambiado sobre ( $x_{\tau_v}^{\alpha_v} = x_i^\varepsilon$  y  $|\tau_q - i| \geq 2$ ;  $v+1 \leq q \leq j$ ) de una ó de otra forma la expresión resultante debe ser idéntica a la expresión  $\omega$ . Tenemos completamente cambiado  $x_i^\varepsilon x_j^{\pm 1}$  con  $x_j^{\pm 1} x_i^\varepsilon$  (ó viceversa) para  $|i-j| \geq 2$  algún número de veces en  $\omega_1$  el cuál es una equivalencia en  $G$  pues  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  así  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

**Caso 5.**  $\Delta ABC$  contiene parte de dos cuerdas  $d'$ ,  $d''$  con un cruce entre ellos donde ambas cuerdas de los cruces entran a  $\Delta ABC$  bajo  $\overline{AC}$  y sale bajo  $\overline{BC}$  como en la figura 2.44

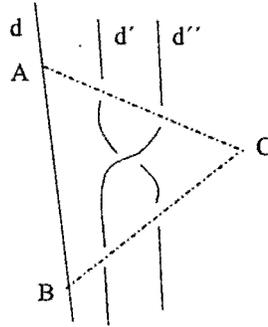


Figura 2.44: Un movimiento elemental sobre  $d$ , donde  $\triangle ABC$  contiene parte de dos cuerdas con un cruzamiento entre ellos, donde ambas cuerdas del cruzamiento entran a  $\triangle ABC$  bajo  $AC$  y sale bajo  $BC$ .

Si  $s = 1$  entonces para algún  $i$  tenemos reemplazado el subdiagrama  $C_{i+1}^{\varepsilon}$  con el subdiagrama  $C_i^{-1}C_{i+1}^{-1}C_i^{\varepsilon}C_{i+1}C_i$  con el subdiagrama  $C_{i+1}^{\varepsilon}$ . Así ahora tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i^{\varepsilon} x_{i+1}^{\varepsilon} x_i x_{\tau_{j+2}}^{\alpha_{j+2}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  (donde  $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = x_{i+1}^{\varepsilon}$ ) el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ .

Si  $s = -1$  entonces para algún  $i$  tenemos reemplazado el subdiagrama  $C_{i+1}^{\varepsilon}$  con el subdiagrama  $C_i^{-1}C_{i+1}^{-1}C_i^{\varepsilon}C_{i+1}C_i$  con el subdiagrama  $C_{i+1}^{\varepsilon}$ . Así ahora tenemos el diagrama de  $x_{\tau_1}^{\alpha_1} \dots x_{\tau_j}^{\alpha_j} x_{i+1}^{\varepsilon} x_{\tau_{j+6}}^{\alpha_{j+6}} \dots x_{\tau_y}^{\alpha_y}$  (donde  $x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i^{\varepsilon} x_{i+1}^{\varepsilon} x_i$ ,  $x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \dots x_{\tau_{j+1}}^{\alpha_{j+1}}$  son idénticas como expresiones) el cuál debe ser idéntico a la expresión  $\omega_2$ . Pero tenemos completamente intercambiado  $x_{i+1}^{\varepsilon}$  con  $x_i^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i^{\varepsilon} x_{i+1}^{\varepsilon} x_i$  (ó viceversa) el cuál es una equivalencia en  $G$  pues  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  así  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

**Caso 6.**  $\triangle ABC$  contiene un cruzamiento, donde las cuerdas del cruzamiento entran y salen  $\triangle ABC$  bajo  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  en una manera arbitraria.

Es obvio que podemos partir sobre  $\overline{\Omega^s}$  con los casos de 1-4 después del cuál las cuerdas del cruzamiento entran a  $\triangle ABC$  bajo  $AC$  y sale bajo  $BC$ .

Aplicando 5 concluimos que  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

Note que para los casos de arriba las cuerdas entran y salen  $\Delta ABC$  como subcuerdas y que el punto  $C$  está siempre a derecha de  $AB$ . Argumentos similares muestran que  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$  cuando las cuerdas entran y salen de  $\Delta ABC$  como sobrecuerdas y/o cuando  $C$  está a izquierda de  $AB$ .

**Caso 7.**  $\Delta ABC$  contiene parte de muchas cuerdas tendremos muchas intersecciones entre ellas.

Podemos aplicar sobre  $\bar{\Omega}^s$  un número finito de casos de arriba, donde a cada etapa intermedia las expresiones son todavía equivalentes en  $G$ . Así tenemos  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

Si  $\bar{\Omega}^s$  es movimiento elemental transformando  $D^{\omega_1}$  en  $D^{\omega_2}$  entonces  $[\omega_1] =_G [\omega_2]$ .

Así para completar la prueba que  $\phi$  es inyectiva recordamos el inicio de nuestra prueba y emplear un número finito de movimientos elementales transformando  $D^\omega$  en  $D^1$ . Así te-

nenemos que  $[\omega] =_G [1]$ . (esto es  $g =_G 1_G$ ). Pero  $g$  fue un elemento arbitrario de  $Ker(\phi)$ . Así  $Ker(\phi) = \{1_G\}$  y así  $\phi$  es inyectiva por tanto un isomorfismo por lo que  $B_n$  tiene una presentación idéntica a  $G$ .

Dado que tenemos una presentación finita para  $B_n$  podemos obtener mas resultados de la presentación de  $B_n$  sin conocer la geometría anterior. Sin embargo podemos trazar algunos gráficos para garantizar que mantenemos una idea intuitiva para el sujeto sin perder el álgebra. □

## 2.4 Representación finita del grupo trenzas puras

El grupo de trenzas puras como subgrupo del grupo de trenzas de Artin es presentado por un número finito de generadores y relaciones, lo cual constituye el resultado principal de este trabajo.

### 2.4.1 Trenzas puras

Podemos generalizar la definición del grupo trenzas como:

**Definición 2.4.1.** Una trenza geométrica de  $n \geq 1$  cuerdas es un conjunto  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  donde:  $I = [0, 1]$ ; formado por  $n$  intervalos topológicos (grafo de un camino en  $\mathbb{R}^3$ ) disjuntos llamados cuerdas de  $b$  tal que la proyección

$$\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$$

es una cuerda que es homomórficamente a  $I$  y:

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$$

La intersección de cada cuerda con el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  con  $t \in I$  fijo es exactamente un punto y conecta cada punto  $(i, 0, 0)$  a un punto  $(s(i), 0, 1)$ , donde  $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La secuencia  $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\}$  es una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  llamado la permutación trazo de  $b$ .

**Definición 2.4.2.** El núcleo de la proyección

$$\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$$

es llamado el grupo de las trenzas puras denotado por  $P_n$ :

$$P_n = \text{Ker}(\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n)$$

donde  $\Sigma_n$  es el grupo simétrico  $n$  (grupo de permutaciones).

Los elementos de  $P_n$  son llamados trenzas puras de  $n$  cuerdas, la geometría en  $n$  cuerdas presenta un elemento de  $P_n$  si y sólo si  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  la cuerda de ésta comienza en  $(i, 0, 0)$  y finaliza en  $(i, 0, 1)$ . Tal geometría de trenzas son llamadas trenzas puras.

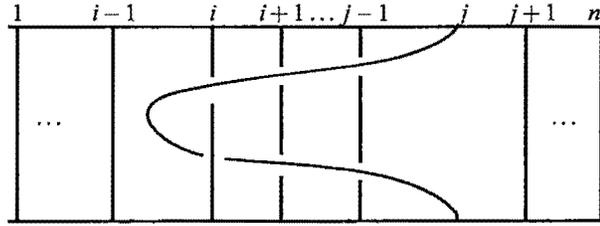


Figura 2.45: Generadores del grupo de trenzas puras,  $n$ -trenza  $A_{ij}$  con  $1 \leq i < j \leq n$ .

Un rol importante jugará el conjunto  $A_{ij}$  de trenzas puras que se muestran en la Figura 2.45 con  $1 \leq i < j \leq n$ , estas trenzas se pueden expresar mediante los generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  por:

$$A_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

Las trenzas  $\{A_{ij}\}_{ij}$  son conjugadas con otra en  $B_n$ . Definimos:

$$\alpha_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_i, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

Para  $1 \leq i < j \leq n$  y  $1 \leq i < j < k \leq n$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} A_{ij} \alpha_{jk}^{-1} &= \sigma_{k-1} \cdots \sigma_j (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1}) (\sigma_{k-1} \cdots \sigma_j)^{-1} \\ &= \sigma_{k-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} \cdots \sigma_{k-1}^{-1} \\ &= A_{ik} \end{aligned} \tag{2.11}$$

De la misma forma se demuestra

$$\alpha_{ik} A_{ij} \alpha_{ik}^{-1} = A_{jk} \tag{2.12}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &\sim A_{il} \\
 A_{il} &\sim A_{lk} \\
 \Rightarrow A_{ij} &\sim A_{lk}
 \end{aligned}$$

La conmutatividad de:

$$\begin{array}{ccc}
 B_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\
 \downarrow l & & \downarrow \\
 B_{n+1} & \longrightarrow & \Sigma_{n+1}
 \end{array}$$

implica que la inclusión  $l : B_n \rightarrow B_{n+1}$  mapea  $P_n$  en  $P_{n+1}$ . El homomorfismo  $P_n \rightarrow P_{n+1}$  inducido por  $l$  es denotado también por  $l$ . En el lenguaje geométrico  $l : P_n \rightarrow P_{n+1}$  agrega una cuerda identidad a la trenza pura “ $b$ ” de  $P_n$ , es decir, resultando esta última en  $P_{n+1}$ .

Se demuestra que  $l : P_n \rightarrow P_{n+1}$  es inyectivo.

Es conveniente ver a  $P_n$  como un subgrupo de  $P_{n+1}$  via  $l$ . En este sentido se obtienen los subgrupos  $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ . Es claro que  $P_1 = \{1\} \wedge P_2$  es un subgrupo cíclico generado por  $A_{1,2} = \sigma_1^2$ .

De la misma forma eliminando la  $n$ -ava cuerda de  $b$ , obtenemos una trenza  $f_n(b)$  en  $n - 1$  cuerdas. Es obvio que si  $b$  es isotópico a  $b'$ , entonces  $f_n(b)$  es isotópico a  $f_n(b')$ . Pasando a isotopías de clase obtenemos una buena definición del mapeo de  $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ .

De la definición de multiplicación para trenzas es claro que  $f_n$  es un homomorfismo de grupos.

De la descripción geométrica de la inclusión natural

$$l : P_{n-1} \rightarrow P_n$$

$$f_n \circ l = \text{id}_{P_{n-1}}$$

Notar que como  $l$  es inyectivo  $f_n$  es sobreyectivo.

Para  $n \geq 2$  sea el conjunto  $U_n = \text{Ker}(f_n : P_n \rightarrow P_{n-1})$ . Si  $f_n$  es definido como antes,  $P_n$  es isomorfo al producto semi directo de  $P_{n-1}$  por  $U_n$ . Toda trenza pura  $\beta \in P_n$  puede ser expandida de manera única en la forma:

$$\beta = l(\beta')\beta_n$$

con  $\beta' \in P_{n-1}$  y  $\beta_n \in U_n$ . Aquí  $\beta' = f_n(\beta)$  y  $\beta_n = l^{-1}(\beta')\beta$ . Aplicando esta expansión inductivamente nosotros concluimos que:  $\beta$  puede escribirse de manera única por:

$$\beta = \beta_2\beta_3 \cdots \beta_n \tag{2.13}$$

donde  $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n \forall j = 2, \dots, n$ . La expansión (2.13) es llamado la combinación (o normal) forma de  $\beta$ .

### 2.4.2 Configuraciones y Trenzas Puras

Sea  $M$  un espacio topológico y sea  $M^n = M \times M \times \cdots \times M$  el producto de  $n$ -adas ( $n \geq 1$ ) con la topología producto; y el conjunto

$$F_n(M) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in M^n / u_i \neq u_j \forall i \neq j\}$$

Es un sub-espacio de  $M^n$  llamado el espacio de configuraciones de orden  $n$ , que consta de las  $n$ -uplas de elementos distintos de  $M$ .

Si  $M$  es una variedad topológica (posiblemente con frontera acotada  $\partial M$ ) entonces el espacio de configuraciones  $F_n(M)$  es una variedad topológica de dimensión  $n = \dim(M)$ . Ciertamente toda  $n$ -upla de puntos en  $M$  puede ser deformada en otra  $n$ -upla del interior  $M^\circ = M - \partial M$  de  $M$ .

Si  $\dim(M) \geq 2$  y  $M$  es conexo entonces toda  $n$ -upla de  $M^\circ$  puede ser deformada en otra  $n$ -upla de  $M^\circ$ . Por tanto para tal  $M$ , la variedad que resulte de  $F_n(M)$  es conexa, su grupo fundamental es llamado el grupo de trenzas puras de  $M$ . Para  $M = \mathbb{R}^2$  nosotros volvemos al grupo de trenzas puras  $P_n$ . Justificamos esto solo de manera geométrica como sigue:

Vemos mejor esto si cada geometría de un camino  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  de  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$ ; que va de  $I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  es decir a  $t \in I$  lo asociamos  $(u_1(t), u_2(t), \dots)$  creando  $n$  funciones  $t \rightarrow u_i(t)$  y la gráfica  $(u_i(t), t)$  es la  $i$ -ésima cuerda de la definida por los puntos  $(u_i(t), t) \in \mathbb{R}^2 \times \{t\} \forall i = 1, 2, \dots, n$  cuyo punto inicial y final es

$$q_n((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)) \in F_n(\mathbb{R}^2) \text{ (pues es un camino cerrado)}$$

Todo camino  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  empezando y terminando en  $q_n$ , lo podemos asociar con las trenzas puras cuya geometría es

$$\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{t \in I} (\alpha_i(t), t)$$

Estas construcciones son mutuamente inversibles y se da una correspondencia biyectiva entre trenzas puras vistas geoméricamente y los caminos en  $(F_n(\mathbb{R}^2))$ .

Bajo esta correspondencia la isotopía de trenzas corresponde a la homotopía de caminos (lazos) en [5] se demuestra que:

$$P_n = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), q_n).$$

Regresando a una variedad topológica convexa  $M$  de dimensión  $n \geq 2$ , se puede generalizar la definición de  $F_n(M)$  por la restricción de puntos  $M^\circ = M - \partial M$ . Más precisamente, fijando un conjunto finito  $Q_m \subset M^\circ$  de  $m \geq 0$  puntos se crea el conjunto

$$F_{m,n}(M) = F_n(M - Q_m)$$

Donde  $n$  es el número de componentes de la  $n$ -ada y  $m$  el número de puntos a quitar. Este espacio topológico depende de  $M, m$  y  $n$  pero no de los puntos de  $Q_m$  ciertamente  $F_{0,n}(M) = F_n(M)$  y  $F_{m,1}(M) = M - Q_m$ .

**Lema 2.4.1.** Sea  $V_1, V_2, \dots, V_r$  bolas abiertas de centros  $u_1^\circ, u_2^\circ, \dots, u_r^\circ$  puntos distintos dos a dos respectivamente.

Sea  $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  vecindad de  $u_0 = (u_1^\circ, \dots, u_r^\circ)$  en  $F_r(M)$ , entonces existe  $r$  mapeos continuos

$$O_i : V_i \times \bar{V}_i \rightarrow \bar{V}_i$$

tal que  $\forall u \in V_i$  y existe un mapeo  $O_i^u$  tal que este mapeo  $O_i^u : \bar{V}_i \rightarrow \bar{V}_i$  lleva  $v \in \bar{V}_i$  a  $O_i(u, v)$  y este homeomorfismo lleva la esfera acotada  $\partial \bar{V}_i$  a la misma esfera punto a punto y enviando  $u_i^\circ$  a  $u_i$  donde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ .

**Demostración.** Podemos asumir que  $V_i = V$  es la bola abierta en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^{\dim M}$  con centro en el origen desde que  $F_r(M)$  es una variedad topológica conexa.

Fijando una función suave de 2 variables

$$\lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $\lambda(x,y) = 1$  si  $x \geq y$  y  $\lambda(x,y) = 0$ , si  $\frac{(x+1)}{2} < y$ , donde  $x \in [0,1]$  y  $y \in [0,1]$ .

Para  $u \in V$ , define un campo vectorial  $f^u$  en la cerradura de la bola unidad

$$\bar{V} = \{v \in \mathbb{R}^{\dim M} / \|v\| \leq 1\}$$

definida por:

$$f^u(v) = \lambda(\|u\|, \|v\|) \cdot u$$

La elección de  $\lambda$  asegura que  $f^u = u$  en la bola cerrada de radio  $\|u\|$  con centro en el origen y  $f^u = 0$  fuera de la bola de radio  $(\frac{\|u\|+1}{2})$  con centro en el origen

Sea  $\{O^{u,t} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}\}_{t \in \mathbb{R}}$  el flujo determinado por  $f^u$ , esto es la familia (única) de difeomorfismos de  $\bar{V}$  tal que  $O^{u,0} = id$  y

$$\frac{dO^{u,t}(v)}{dt} = f^u(v) \quad \forall v \in \bar{V}, t \in \mathbb{R}$$

Integrando:

$$O^{u,t}(v) = f^u(v)t + w \text{ para algún } w$$

$$O^{u,0}(v) = w = v \rightarrow O^{u,t}(v) = f^u(v)t + v$$

$$O^{u,t} = f^u(v)t + v \quad \forall v \in \partial V \quad (\|v\| > \|u\|)$$

$$O^{u,t}(v) = v \quad \forall v \in \partial V$$

$$O^{u,t}(0) = f^u(0)t + 0 = ut \quad (\|0\| \leq \|u\|)$$

El difeomorfismo  $O^{u,t}$  depende de  $u, t$  y fija la esfera  $\partial \bar{V}$  punto a punto, y envía el origen a  $tu$ .

Por tanto el mapeo  $O_i : V \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  definido por

$$O_i(u, v) = O^{u,1}(v) = f^u(v) + v$$

para  $u \in V, v \in \bar{V}$  satisface las condiciones requeridas. □

**Lema 2.4.2.** Sea  $M$  una variedad topológica conexa de dimensión mayor o igual a 2 con  $\partial M = \emptyset$  para  $n > r \geq 1$ , el siguiente mapeo

$$\begin{aligned} p: F_n(M) &\longrightarrow F_r(M) \\ (u_1, \dots, u_n) &\longrightarrow (u_1, u_2, \dots, u_r) \end{aligned}$$

es una fibración local trivial con fibra  $F_{r, n-r}(M)$ .

**Demostración.** Sea  $u^\circ = (u_1^\circ, \dots, u_r^\circ) \in F_r(M)$ . La fibra  $p^{-1}(u^\circ)$  consiste en las uplas  $(u_1^\circ, \dots, u_r^\circ, v_1, \dots, v_{n-r}) \in M^n$ , donde los  $u_1^\circ, \dots, u_r^\circ, v_1, \dots, v_{n-r}$  son distintos. Haciendo  $Q_r = \{u_1^\circ, \dots, u_r^\circ\}$  obtenemos

$$F_{r, n-r}(M) = \{(v_1, \dots, v_{n-r}) \in (M - Q_r)^{n-r} / v_i \neq v_j \text{ para } i \neq j\}$$

Se puede demostrar que fórmula

$(u_1^\circ, \dots, u_r^\circ, v_1, \dots, v_{n-r}) \rightarrow (v_1, \dots, v_{n-r})$  define un homomorfismo  $p^{-1}(u^\circ) \approx F_{r, n-r}(M)$ .

Nosotros probaremos la trivialidad local de  $p$  en una vecindad  $u^\circ$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, r$  tomamos una vecindad  $V_i \subset M$  de  $u_i^\circ$  tal que la clausura  $\bar{V}_i$  es una bola cerrada con interior  $V_i$ . Siendo  $u_1^\circ, \dots, u_r^\circ$  distintos podemos asumir que  $V_1, V_2, \dots, V_r$  son mutuamente disjuntos.

Entonces

$$V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$$

es una vecindad de  $V^\circ$  en  $F_r(M)$ . Nosotros veremos que la restricción de  $p$  a  $V$  es trivial acotado es decir  $p^{-1}(V) \rightarrow V \times F_{r, n-r}(M)$  conmuta con la proyección a  $V$ , para lo que nos ayudará el lema anterior.

Para cada  $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$  definimos el mapeo

$$O^u : M \rightarrow M \text{ por}$$

$$O^u(v) = \begin{cases} O_i(u_i, v) & \text{si } v \in V_i \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, r \\ v & \text{si } v \in M - \bigcup_i V_i \end{cases}$$

donde  $O_i$  es como en el lema anterior.

Es claro que  $O^u : M \rightarrow M$  es un homeomorfismo continuo dependiendo en  $u$  y llevando los puntos  $u_1^0, \dots, u_r^0$  a  $u_1, u_2, \dots, u_r$  respectivamente.

Que sea homeomorfismos porque

$$O^u \Big|_{V_i}(v) = O_i(u_i, v) \text{ si } v \in V_i, \text{ para algún } i$$

$$O^u \Big|_{M - (\cup_i V_i)}(v) = v$$

entonces  $O^u$  es continuo.

Además  $O(u_i, v)$  es inyectiva  $\rightarrow O^u$  es inyectiva y  $O^u$  es un homeomorfismo.

También  $O_i^u(v) = v \quad \forall v \in \partial \bar{V}_i$ , definimos

$$(u, v_1, \dots, v_{n-r}) \mapsto (u, O_{(v_1)}^u, \dots, O_{(v_{n-r})}^u)$$

La fórmula:  $\psi : (u, v_1, v_2, \dots, v_{n-r}) \rightarrow (u, (O^u)^{-1}(v_1), \dots, (O^u)^{-1}(v_{n-r}))$  define un homeomorfismo  $V \times F_{r, n-r}(M) \rightarrow p^{-1}(V)$  conmutando con la proyección de  $U$ .

$$\begin{array}{ccc} \psi : V \times F_{r, n-r}(M) & \xrightarrow{\psi} & p^{-1}(V) \quad V \subset \mathbb{R}^r \\ \pi_V \downarrow & & \swarrow p \\ & & V \end{array}$$

$$p(u, (O^u)^{-1}(v_1), \dots, (O^u)^{-1}(v_{n-r})) = u \quad V \subset F_r(M) \text{ y } p^{-1}(V) \subset F_n(M)$$

Entonces  $p \Big|_U : p^{-1}(V) \rightarrow V$  es una fibración localmente trivial. □

**Lema 2.4.3.** Sea  $M$  una variedad topológica conexa de dimensión mayor o igual a 2 con  $\partial M = \emptyset$  para  $m \geq 0, n > r \geq 1$ , el mapeo levantamiento

$$p : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,r}(M)$$

definida por  $p(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_r)$  es una fibración local trivial con fibra  $F_{m+r,n-r}(M)$ .

**Demostración.** En Lema 2.4.2 hacer  $M = M - Q_m$ . □

**Definición 2.4.3.** Una variedad es esférica, si es contractible o equivalentemente si la homotopía de grupos  $\pi_i(M)$  es nula  $\forall i \geq 2$ .

**Lema 2.4.4.** Para todo  $m \geq 0, n \geq 1$ , la variedad  $F_{m,n}(\mathbb{R}^2)$  es esférica

**Demostración.** Consideremos la fibración  $F_{m,n} \rightarrow F_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - Q_m$  con fibra  $F_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)$  por el lema anterior, entonces las siguientes secuencias homotópicas de fibras tienen una secuencia exacta:

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - Q_m) \xrightarrow{\phi_*} \pi_i(F_{m+1,n-1}, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\psi} \pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \dots$$

Donde  $\phi_*$  es el homomorfismo conexión para lo cual podemos consultar [20].

Nótese que  $\mathbb{R}^2 - Q_m$ , contiene  $m$  círculos que constituyen un retracto por deformación contractible con homotopía cero como  $\mathbb{R}^2 - Q_m$  y este retracto son homotópicamente  $\pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) = 0$  para  $i \geq 2$ . Entonces  $\pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - Q_m) = 0$  y  $\psi$  es inyectiva.

Así

$$\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(F_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2))$$

entonces

$$\begin{aligned}
\pi_i(F_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)) &\cong \pi_i(F_{m+2,n-2}(\mathbb{R}^2)) \\
&\vdots \\
&\cong \pi_i(F_{m+n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \\
&\cong \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_{m+n-1}) \\
&\cong 0
\end{aligned}$$

□

### 2.4.3 Generación finita de Grupo de trenza pura

**Teorema 2.4.1.** Para  $n \geq 2$ , el grupo  $u_n = \text{Ker}(f_n : P_n \rightarrow P_{n-1})$ , es libre con  $n-1$  generadores  $\{A_{i,n}\}_{i=1,2,\dots,n}$

**Demostración.** Aplicando el Lema 2.4.2 a  $M = \mathbb{R}^2$  obtenemos una fibración trivial  $p : F_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$  con fibra  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$  de esto se obtiene una secuencia exacta corta

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 1 \quad (2.14)$$

donde usamos la trivialidad de  $\pi_2(F_{n-1}(\mathbb{R}^2))$  (lema 2.4.4) (con  $F_{0,n-1}(M) = F_{n-1}(M)$ ) y la trivialidad de  $\pi_0(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$  siendo  $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$  conexo. Bajo el isomorfismo

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \cong P_n \text{ y } \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \cong P_{n-1}$$

El homomorfismo  $p_*$  en (2.14) es identificado como el homomorfismo omisión  $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$  estudiado antes. Reescribiendo (2.14)

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow 1 \quad (2.15)$$

Por las funciones

$$\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1})$$

Tomando como  $Q_{n-1} \subset \mathbb{R}^2$  el conjunto  $\{(1,0), (2,0), \dots, (n-1,0)\}$  y haciendo  $a_0 = (n,0)$  el punto base de  $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$  ciertamente, el grupo  $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$  es un grupo libre de generadores  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , como se muestra en la figura 2.46. (trebol de n-1 lazos)

El homomorfismo  $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow P_n = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$  en (2.15) es inducido por la inclusión  $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1} = F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$  asignando el punto  $a \in \mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$ .

La  $n$ -upla de puntos  $((1,0), (2,0), \dots, (n-1,0), a)$  comparando las figuras 2.46 y 2.45. Observamos que este homomorfismo lleva  $x_i$  a  $A_{i,n}$  para todo  $i$  de 1 a  $n-1$ , de la secuencia exacta (2.15) se tiene directamente el teorema 2.4.1.

Tenemos que para cada  $t$  el camino  $x_i(t)$ , asocia un camino en  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$   $((1,0), (2,0), \dots, (n-1,0), (x_i(t), t))$  que es  $A_{i,n}$ . Por tanto los generadores de la imagen son los  $A_{i,n}$  con  $i=1,2,\dots,n-1$  por ser (2.15) secuencias exacta, estos son generadores del *kernel*( $f_n$ ) es decir  $U_n$

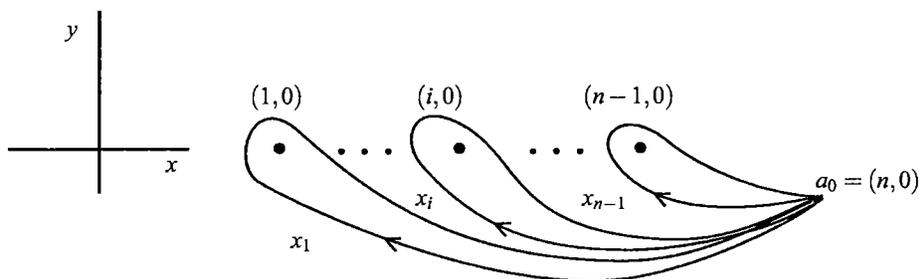


Figura 2.46: Los generadores  $x_1, \dots, x_{n-1}$  de  $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$ .

□

**Proposición 2.4.1.** El grupo  $P_n$  admite una filtración normal:

$$1 = U_n^{(0)} \subset U_n^{(1)} \subset U_n^{(2)} \dots \subset U_n^{(n-1)} = P_n$$

tal que:  $\frac{U_n^{(i)}}{U_n^{(i-1)}}$  es un grupo libre de rango  $n - i$  para todo  $i$ .

Donde

$$U_n^{(i)} = \text{Ker}(f_{n-i+1} \cdots f_{n-1} f_n : P_n \rightarrow P_{n-i})$$

**Demostración.**  $U_n^{(0)} = \{1\}$  y para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  los conjuntos

$$U_n^{(i)} = \text{Ker}(f_{n-i+1} \cdots f_{n-1} f_n : P_n \rightarrow P_{n-i})$$

$$\text{Además } U_{n-i+1} = \text{Ker}(f_{n-i+1} : P_{n-i+1} \rightarrow P_{n-i})$$

entonces

$$U^0 = \{1\}$$

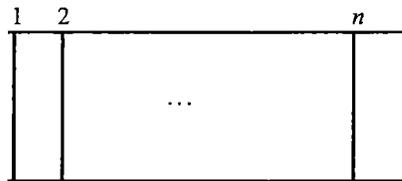


Figura 2.47: Gráfica de la trenza unidad 1.

$$f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$$

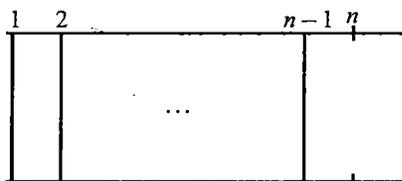


Figura 2.48: Elemento de  $U^{(1)}$

donde la hebra "n" no necesariamente es la hebra proyección, los elementos de  $U^{(1)} = \text{Ker}(f_n)$  tiene las hebras  $1, 2, 3, \dots, n-1$  igual a la identidad

$$U^{(2)} = \text{Nuc}(f_{n-1} \circ f_n)$$

tienen las hebras  $1, 2, \dots, n-2$  igual a la identidad y  $n-1, n$  no necesariamente.

En general el núcleo de

$$f_{n-i+1} \cdots f_n : P_n \rightarrow P_{n-i}$$

tiene las hebras  $1, 2, \dots, n-i$  igual a la identidad y las  $i$  restantes no necesariamente.

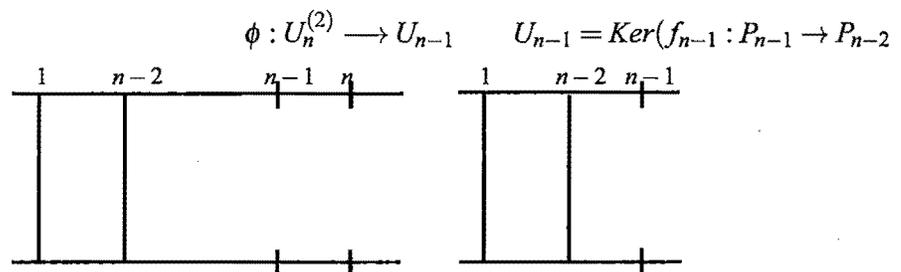
Sea

$$\phi : U_n^{(1)} \rightarrow U_n \quad (U_n = \text{ker}(f_n))$$

que consiste en la identidad

$$\text{Ker}\phi = U^{(0)}, \text{ entonces } \frac{U_n^{(1)}}{U^{(0)}} = U_n \quad U_n = \text{Ker}(f_n : P_n \rightarrow P_{n-1})$$

Ahora sea



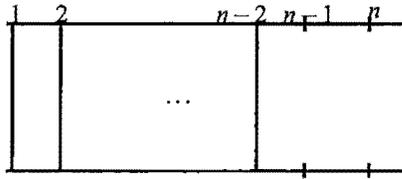


Figura 2.49: Elemento de  $U(2)$

Donde las hebras  $n-1$  y  $n$  no necesariamente son la identidad.

$$\text{Ker}\phi = U^{(1)}$$

Por tanto

$$\frac{U_n^{(2)}}{U_n^{(1)}} \cong U_{n-1}$$

Sea

$$\phi : U_n^{(3)} \rightarrow U_{n-2}$$

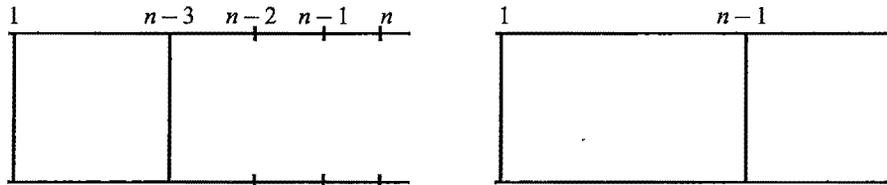


Figura 2.50: El primero es elemento de  $U(3)$

$$\text{Ker}\phi = U_n^{(2)} \text{ entonces: } \frac{U_n^{(3)}}{U_n^{(2)}} \cong U_{n-2} \quad (U_{n-2} = \text{Ker}(f_{n-2} : P_{n-2} \rightarrow P_{n-3}))$$

En general

$$\phi : U_n^{(i)} \rightarrow P_{n-2}$$

$$\text{Ker}\phi = U_n^{(i)}$$

$$\frac{U_n^i}{U_n^{i-1}} \cong U_{n-i+1}$$

Además

$$U_n^{(0)} \subset U_n^{(1)} \subset U_n^{(2)} \subset \dots \subset U_n^{(n-1)} = P_n$$

entonces

$$\frac{U_n^{(i)}}{U_n^{(i-1)}} \cong \text{Ker}(f_{n-i+1} : P_{n-i+1} \rightarrow P_{n-i}) = U_{n-i+1}$$

$$\text{Ker}(f_{n-i+1} : P_{n-i+1} \rightarrow P_{n-i}) = \phi(U_n^{(i)})$$

Sabemos que  $U_n$  es libre por el Teorema 2.4.1

Por tanto  $\frac{U_n^{(i)}}{U_n^{(i-1)}}$  es libre y su número de generadores se da por el Teorema 2.4.1. □

**Corolario 2.4.1.** El grupo  $P_2$  es de torsión libre, es decir no tiene un elemento de orden finito.

**Demostración.** Sea  $b \in P_n$  y del gráfico

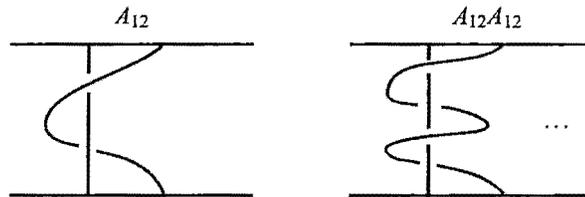


Figura 2.51: La trenza  $A_{12}$  y el producto de las trenzas  $A_{12}A_{12}$ .

Si continuamos por inducción

$P_2$  no tiene un elemento de orden finito. Por el homomorfismo inclusión  $P_2 \subset P_3 \subset P_4 \subset \dots \subset P_n$  no tiene un elemento de orden finito. Recuerde que  $A_{ij}$  son generadores de  $U_n \subset P_n$  por el Teorema 2.4.1. □

**Corolario 2.4.2.**  $P_n$  es generado por  $\frac{n(n-1)}{2}$  elementos  $A_{ij}$   $1 \leq i < j \leq n$

**Demostración.** Recuerde que  $f \in P_n$  se puede escribir como  $\beta = \beta_2 \cdot \beta_3 \dots \beta_n$  con  $\beta_j \in U_j \subset P_j$  de (2.13)  $U_j$  es generado por  $\{A_{i,j}\}_{i=1,2,\dots,j-1}$   $\square$

Por el Teorema 2.4.1.

Los  $i$  y  $j$  varían de la siguiente forma

Si  $i = n - 1$  entonces  $j = n$ ; Si  $i = n - 2$  entonces  $j = n, n - 1$ ; si  $i = n - 3$  entonces  $j = n, n - 1, n - 2; \dots$  si  $i = 1$  entonces  $j = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\text{Total } 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Esto por el Teorema 2.4.1.

Ahora definimos las relaciones de los generadores  $\{A_{ji}\}_{1 \leq i < j \leq n}$  de  $P_n$ :

$$A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} = \begin{cases} A_{ij} & s < i < r < s < j \\ A_{rj} A_{ij} A_{rs}^{-1} & s = i \\ A_{rj} A_{sj} A_{ij} A_{sj}^{-1} A_{rj}^{-1} & i = r < s < j \\ A_{rj} A_{sj}^{-1} A_{sj}^{-1} A_{ij} A_{sj} A_{rj} A_{sj}^{-1} A_{rj}^{-1} & r < i < s < j \end{cases}$$

Algunos ejemplos:  $1 < r < s < j$

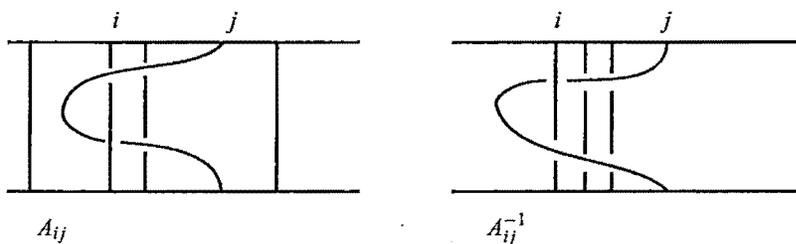


Figura 2.52: La trenza  $A_{ij}$  y su inversa  $A_{ij}^{-1}$ .

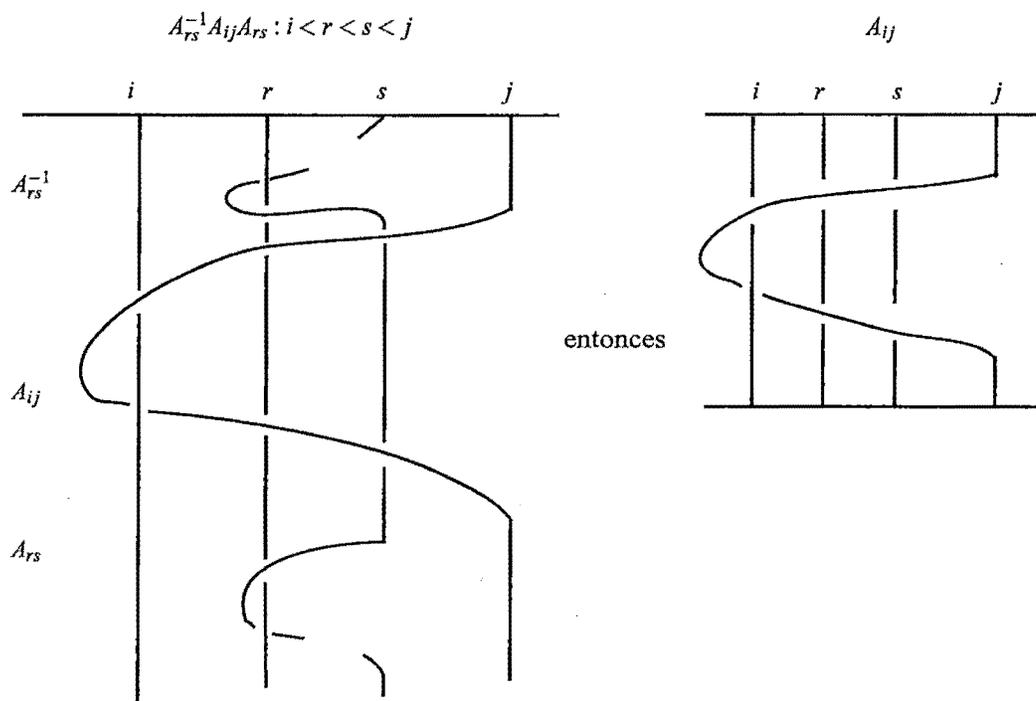


Figura 2.53: Descomposición de  $A_{ij}$ ,  $A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} = A_{ij}$ ,  $i < r < s < j$ .

De la misma forma se pueden demostrar las otras propiedades.

**Corolario 2.4.3.**

$$\frac{P_n}{[P_n, P_n]} \cong Z^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

donde  $[P_n, P_n]$  es el conmutador.

**Demostración.** Por el Corolario 2.4.2 el grupo abeliano:

$$\frac{P_n}{[P_n, P_n]}$$

es generado por los elementos de la forma  $A_{ij}$  cuando  $1 \leq i < j \leq n$ .

Para probar que estos elementos son L.I. es suficiente construir para cada  $1 \leq i < j \leq n$  un grupo de homeomorfismos

$$l_{ij} : P_n \rightarrow Z$$

tal que

$$l_{i,j}(A_{r,s}) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = r \wedge j = s \\ 0, & \text{si } i \neq r \vee j \neq s \end{cases}$$

para  $\beta \in P_n$  cuyo diagrama es  $D$ . Orientamos todas las cuerdas de  $D$ . de la parte superior ( $t = 0$ ) a la parte inferior ( $t = 1$ ) sea  $l_{ij}^+(D)$  el número de cuerdas de  $D$ . donde la  $i$ -ésima cuerda pasa sobre la  $j$ -ésima cuerda de izquierda a derecha

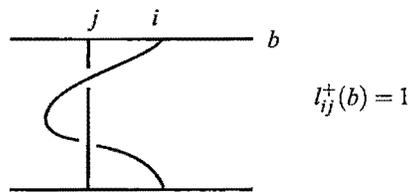


Figura 2.54: Diagrama de  $l_{ij}^+(b) = 1$ .

Sea  $l_{ij}^-(D)$  el número de cruces de  $D$ , cuando la  $i$ -ésima cuerda pasa sobre la  $j$ -ésima cuerda de derecha a izquierda

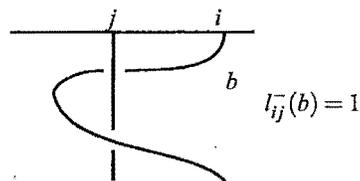


Figura 2.55: Diagrama de  $l_{ij}^-(b) = 1$

tenemos que:

$$l_{ij}(\beta) = l_{ij}^+(D) - l_{ij}^-(D)$$

Se puede comprobar que es invariante por isotopías.

Por el teorema de 1.6 de [13]  $l_{i,j}(\beta)$  está bien definido sobre  $\beta$ . El mapeo  $l_{ij} : P_n \rightarrow Z$  es un homomorfismo de grupos tal que:

$$l_{ij}(A_{rs}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq r \vee j \neq s \\ 1, & \text{si } i = r \wedge j = s \end{cases}$$

$$[P_n, P_n] \subset \text{Ker}(l_{ij})$$

$$\Rightarrow A_{ij} \notin [P_n, P_n]$$

$$\therefore [P_n; P_n] A_{ij} \text{ genera}$$

$$\frac{P_n}{[P_n; P_n]}$$

□

**Corolario 2.4.4.** El grupo  $B_n$  y todo los sub-grupos son residualmente finitos.

**Demostración.** Recordar que  $G$  es residualmente finito, si  $\forall \beta \in G - \{1\} \exists f$  homomorfismo y  $G'$  grupo de dimensión finita tal que  $f : G \rightarrow G', \wedge f(\beta) \neq 1$ .

El corolario es cierto pues como  $B_n$  es un grupo libre entonces es residualmente finito. Además el Teorema 2.4.1 implica por inducción en  $n$  que  $P_n$  es residualmente finito. □

**Definición 2.4.4.** Un grupo es de Hopfian si todo endomorfismo suryectivo es inyectivo.

**Corolario 2.4.5.** El grupo  $B_n$  y todos sus sub-grupos finitamente generados son de Hopfian.

**Demostración.** Todo subgrupo finitamente generado es de Hopfian. □

**Corolario 2.4.6.** Para  $i = 1, 2, \dots, n$  quitando la  $i$ -ésima cuerda definimos un grupo de homomorfismos  $f_n^i : P_n \rightarrow P_{n-1}$  el núcleo de  $f_n^i$  es un grupo libre de rango  $n - 1$  con generadores libres:

$$A_{1,i}; \dots; A_{i,i-1}; A_{i,i+1}; \dots; A_{1,n}$$

**Demostración.** Sean

$$\alpha_{i,n} = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_i$$

y observe que para cualquier  $\beta \in P_n$  le quitamos su cuerda  $n$ , la trenza que se genera es la misma que quitarle a  $\alpha_{i,n} \beta \alpha_{i,n}^{-1}$  su cuerda “ $n$ ”.

$$\text{Es claro que } 1_{n-1} f_n^i(\beta) 1_{n-1} = f_n^i(\beta)$$

Así

$$f_n^i(\beta) = f_n(\alpha_{i,n} \beta \alpha_{i,n}^{-1}) = \alpha_{i,n} f_n(\beta) \alpha_{i,n}^{-1}$$

donde  $f_n = f_n^n$ , (quitamos la  $n$ -ésima cuerda) Por tanto

$$\text{Sea } \beta \in \ker f_n^i \rightarrow f_n^i(\beta) = e \text{ entonces } f_n(\alpha_{i,n} \beta \alpha_{i,n}^{-1}) = e$$

$$\alpha_{i,n} \beta \alpha_{i,n}^{-1} = \beta' \text{ con } \beta' \in \ker f_n$$

$$\beta = \alpha_{i,n}^{-1} \beta' \alpha_{i,n}$$

$$\beta' \in \ker f_n$$

$$\beta \in \alpha_{i,n}^{-1}(\ker f_n) \alpha_{i,n}$$

$$\ker f_n^i \subset \alpha_{i,n}^{-1}(\ker f_n) \alpha_{i,n}$$

De la misma forma:

$$\alpha_{i,n}^{-1}(\ker f_n) \alpha_{i,n} \subset \ker f_n^i$$

$$\text{Ker } f_n^i = \alpha_{i,n}(\text{Ker } f_n) \alpha_{i,n}^{-1}$$

Explicación para el caso  $n = 5, i = 2$

$$\alpha_{i,n} = \alpha_{2,5} = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2$$

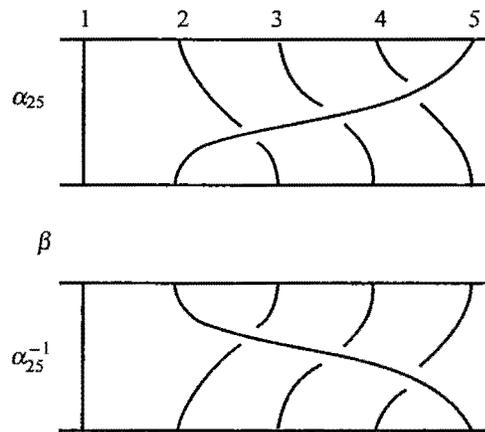


Figura 2.56: Descomposición de  $\alpha_{2,5} \beta \alpha_{2,5}^{-1}$ , (al eliminar su última cuerda), en los generadores:  $\sigma_4, \sigma_3, \sigma_2$

Notar que al eliminar la cuerda 5 del producto se va la cuerda 2 de  $\beta$ . Además en lo que queda de  $\alpha_{2,5}$  y  $\alpha_{2,5}^{-1}$  es la identidad (no hay cruces)

$$\text{Ker} f_n^i = \alpha_{i,n}^{-1} U_n \alpha_{i,n}$$

Usando el Teorema 2.4.1 y observando que la conjugación  $\alpha_{i,n}$  transforma  $\{A_{j,n}\}_{j=1,2,\dots,n-1}$  en el conjunto

$$\{A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots, A_{i,n}\}$$

De 2.11:

$$\alpha_{jk}A_{ij}\alpha_{jk}^{-1} = A_{ik}$$

$$A_{ij} = \alpha_k^{-1}A_{ik}\alpha_{jk}$$

$$A_{i,j} = \alpha_{j,k}^{-1}A_{i,k}\alpha_{j,k}$$

$$A_{j,i} = \alpha_{ik}^{-1}A_{jk}\alpha_{ik}$$

$$A_{j,i} = \alpha_{in}^{-1}A_{jn}\alpha_{in}$$

$$A_{1,i} = \alpha_{i,n}^{-1}A_{1,n}\alpha_{i,n} \quad j = 1$$

$$A_{2,i} = \alpha_{i,n}^{-1}A_{2,n}\alpha_{i,n} \quad j = 2$$

⋮    ⋮

$$A_{i-1,i} = \alpha_{i,n}^{-1}A_{i-1,n}\alpha_{i,n} \quad j = i - 1$$

De otro lado de (2.12)

$$\alpha_{ik}A_{ij}\alpha_{ik}^{-1} = A_{jk}$$

$$A_{ij} = \alpha_{ik}^{-1}A_{jk}\alpha_{ik}$$

$$A_{i,j} = \alpha_{i,k}^{-1}A_{jk}\alpha_{ik}$$

$$A_{i,j} = \alpha_{i,n}^{-1}A_{jn}\alpha_{in}$$

$$A_{i,i+1} = \alpha_{i,k}^{-1}A_{i+1,n}\alpha_{i,n}$$

$$A_{i,i+2} = \alpha_{ik}^{-1}A_{i+2,n}\alpha_{in}$$

⋮    ⋮

$$A_{i,n-1} = \alpha_{ik}^{-1}A_{n-1,n}\alpha_{in}$$

se deja para el lector

$$A_{i,n} = \alpha_{i,n}^{-1} A_{i,n} \alpha_{i,n}$$

□

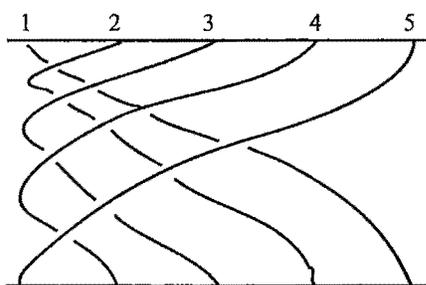
**Definición 2.4.5** (El centro de  $B_n$ ). El centro del grupo  $G$  es el subgrupo de  $G$  que consiste en todos los  $g \in G$  tal que:

$$gx = xg \quad \forall x \in G.$$

El centro del grupo  $G$  es denotado por  $Z(G)$ .

**Teorema 2.4.2.** Si  $n \geq 3$  entonces  $Z(B_n) = Z(P_n)$  es un grupo cíclico infinito generado por  $\theta_n = \Delta_n^2$  donde:

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n$$



Trenza  $\Delta_5$

Figura 2.57: Gráfica de la Trenza  $\Delta_5$ , cuyo cuadrado es el generador de  $P_5$ .

**Demostración.** Siendo  $\theta_n \in P_n$  (esto es simple de probar) hacemos inducción sobre  $l(\theta_{n-1})$  donde  $l: P_{n-1} \rightarrow P_n$  es la inclusión natural. Sea  $\theta_n = l(\theta_{n-1})\gamma$

donde:

$$\gamma = \gamma_n = A_{1,n} A_{2,n} \cdots A_{n-1,n} \in P_n$$

ver la Figura ?? por el diagrama de  $\gamma_5$

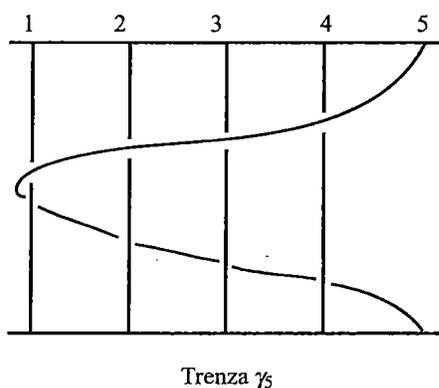


Figura 2.58: Trenza  $\gamma_5 = A_{1,5}A_{2,5} \cdots A_{4,5}$ .

Además tenemos:

$$\sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

Notar que  $\sigma_i$  cruza  $i$  con  $i+1$  en la identidad pero  $\Delta_n$  lleva  $i+1$  a  $n - (i+1) + 1$  luego  $\sigma_i$  lleva “ $i+1$ ” a “ $i$ ” pero  $\Delta_n$  lleva  $i$  a  $n - i + 1$  así en la parte inferior se cruzan de  $\Delta$   $n - i$  y  $n - i + 1$  esto es  $\sigma_{n-i}$  ver los gráficos 2.57

La trenza  $\Delta_n$  puede obtenerse de la trenza trivial  $1_n$  girandola  $180^\circ$  a la derecha con punto de giro a la mitad de la barra superior y manteniendo fija la barra inferior.

Ver Figura de la trenza  $\theta_n = \Delta_n^2$

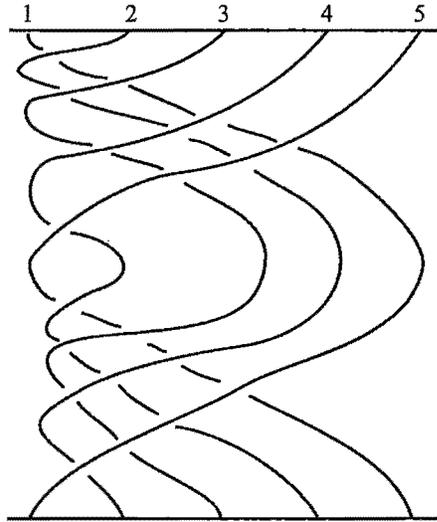


Figura 2.59: Trenza  $\Delta_5^2$ , generador de  $P_5$

Puede obtenerse de  $1_n$  haciéndolo girar la barra superior de  $1_n$   $360^\circ$  con punto de giro en la mitad de la barra superior y manteniendo fija la barra inferior

$$\pi(\Delta_n) = (n, n-1, n-2, \dots, 1) \in \Sigma_n$$

$$\sigma_3 \Delta_5 = \Delta_5 \sigma_2$$

además:

$$\sigma_1 \Delta_5 = \Delta_5 \sigma_4$$

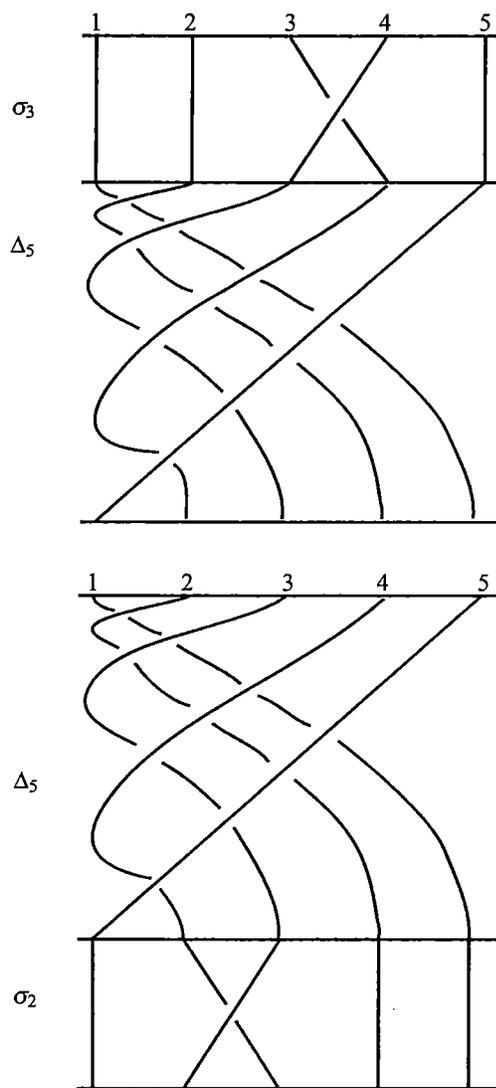


Figura 2.60: Trenzas  $\sigma_3 \Delta_5$  y  $\Delta_5 \sigma_2$  se ve que son equivalentes

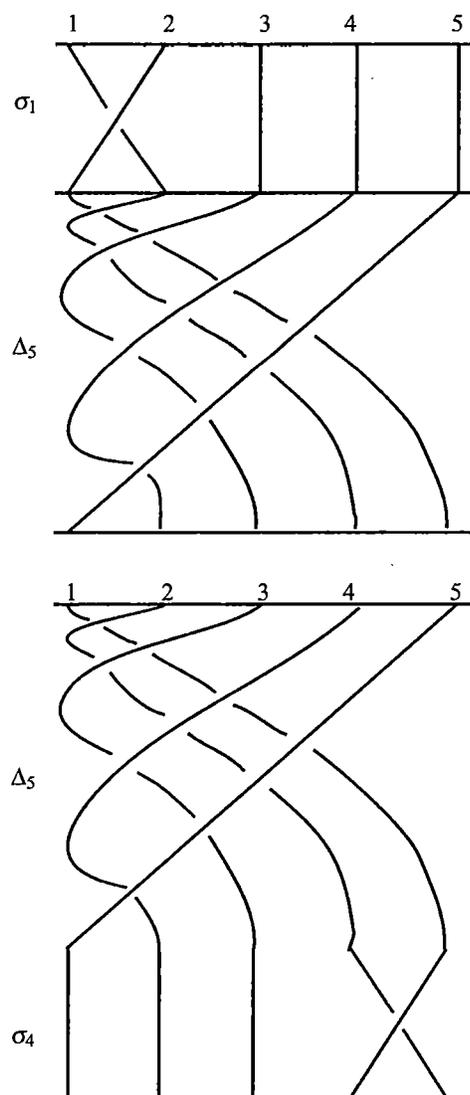


Figura 2.61: Trenzas  $\sigma_1 \Delta_5$  y  $\Delta_5 \sigma_4$ , que son equivalentes

$\theta_n$  conmuta con los generadores de  $B_n$ :

$$\sigma_i \theta_n = \sigma_i \Delta_n \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i} \Delta_n$$

$$\sigma_i \theta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_{n-(n-i)}$$

$$\sigma_i \theta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_i$$

$$\sigma_i \theta_n = \theta_n \sigma_i$$

Así:  $\theta_n \in Z(B_n)$

Nosotros probamos por inducción en  $n \geq 2$ .

Para todo elemento de  $Z(P_n)$  son generados por  $\theta_n$ . Para  $n = 2$ , esto es obvio siendo  $P_2$  generado por  $A_{1,2} = \theta_2 = \sigma_1^2$  y  $\Delta_2 = \sigma_1$ .

Sea  $\beta \in Z(P_n)$  donde  $n \geq 3$  por la fórmula

$$\left( \beta = l(\beta') \beta_n, \beta' \in P_{n-1} \wedge \beta_n \in U_n \right)$$

$$\beta = l(\beta') \beta, \text{ con } \beta' = f_n(\beta) \in P_{n-1} \quad \beta_n \in U_n.$$

Un argumento geométrico fácil de comprender muestra que  $\gamma = \gamma_n$  conmuta con todo elemento de  $l(P_{n-1}) \subset P_n$  y en particular con  $l(\beta')$ . Desde que  $\beta$  está en el centro de  $P_n$ , este conmuta con  $\gamma$ . Así,  $\gamma$  conmuta con  $\beta_n = l^{-1}(\beta') \beta$ .

$$\begin{aligned} \left( \gamma \beta = \beta \gamma \Rightarrow \gamma l(\beta') l^{-1}(\beta') \beta = \beta \gamma \right. \\ \Rightarrow l(\beta') \gamma l^{-1}(\beta') \beta = \beta \gamma \\ \left. \Rightarrow \gamma l^{-1}(\beta') \beta = l^{-1}(\beta') \beta \gamma \right) \end{aligned}$$

El grupo  $G \subset U_n$  generado por  $\beta_n$  y  $\gamma$  es abeliano.

Por el Teorema 2.4.1 el grupo  $U_n$  es libre y por tanto, todos sus sub-grupos son libres. Esto implica que  $G$  es un grupo cíclico infinito (pues si tendría más de un generador no sería abeliano). Recordar ahora el homomorfismo  $l_{i,j} : P_n \rightarrow Z$  definida por el Corolario 2.4.3 para  $1 \leq i < j \leq n$  ciertamente  $l_{1,n}(\gamma) = 1(\gamma = \gamma_n)$  entonces  $\gamma$  es un generador de  $G$ .

(Sea  $w$  generador de  $G \Rightarrow w^k = \gamma$  para algún  $k$   
 $\Rightarrow l_{1,n}(w^k) = l_{1,n}(\gamma) \Rightarrow kl_{1,n}(w) = 1$  como  $k, l_{1,n}(w) \in Z$   
 $k = 1 \wedge l_{1,n}(w) = 1$   
 $\vee k = -1 \wedge l_{1,n}(w) = -1$   
 $\Rightarrow \gamma = w \vee \gamma = w^{-1}$   
 $\Rightarrow \gamma$  es un generador)

Entonces  $\beta_n = \gamma^k$  para algún entero  $k$

Siendo el homomorfismo que elimina la cuerda  $n : f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$  entonces  $\beta' = f_n(\beta) \in Z(P_{n-1})$  ya que  $\beta \in Z(P_n)$ . Por la hipótesis inductiva asumimos:  
 $\beta' = (\theta_{n-1})^m$  para algún entero  $m$  (mas adelante se prueba que  $k = m$ ) Como  $\gamma$  conmuta con  $l(\theta_{n-1})$  con esto:

$$\begin{aligned} \beta &= l(\beta')\beta_n = l((\theta_{n-1})^m)\gamma^k = l((\theta_{n-1})^k)\gamma^k \\ &= l^k(\theta_{n-1})\gamma^k = (l(\theta_{n-1})\gamma)^k = (\theta_n)^k \\ \rightarrow \beta &= (\theta_n)^k \end{aligned}$$

luego  $Z(P)$  es cíclico generador por  $\theta_n$  siendo:

$$\beta = l((\theta_{n-1})^m)\gamma^k$$

además  $l(\theta_{n-1})$  es tal que su cuerda  $n$  es la misma que la identidad y por definición

de  $l_{i,n}$

$$l_{i,n}(l(\theta_{n-1})) = 0$$

Luego

$$\begin{aligned} l_{i,n}(\beta) &= l_{i,n}((l(\theta_{n-1}))^m \gamma^k) \\ &= 0 + l_{i,n}(\gamma^k) \\ &= k \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

En particular  $l_{i,n}(\beta)$  no depende de  $i$  siendo  $\beta \in Z(P_n)$

Hacemos  $\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1}$ . Por el resultado anterior, el entero  $l_{i,n}(\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1})$  no depende de  $i = 1, 2, \dots, n-1$

Usando ahora la definición de  $l_{i,j}$  y resolviendo con la expansión  $\beta = l((\theta_{n-1})^m)\gamma^k$  obtenemos:

$$l_{1,n}(\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1}) = l_{1,n-1}(\beta)$$

El número de cruces de  $\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1}$  de  $n$  con  $i$  es el mismo número de cruces de  $n-1$  con respecto a  $i$  de  $\beta$

$$\begin{aligned} l_{1,n}(\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1}) &= l_{1,n-1}(\beta) \\ &= l_{1,n-1}(l(\theta_{n-1})^m \gamma^k) \\ &= l_{1,n-1}(l(\theta_{n-1})^m) + 0 \\ &= m \end{aligned}$$

y

$$l_{n-1,n}(\sigma_{n-1}\beta\sigma_{n-1}^{-1}) = l_{n-1,n}(\beta) = k$$

Por tanto:  $m = k$

Se ha demostrado  $Z(P_n) \subset (\theta_n)$  además  $\theta_n \in Z(B_n)$

El centro de  $B_n$  con  $n \geq 3$  lo proyectamos al subgrupo trivial de  $G_n$  siendo:  $Z(G_n) = \{1\}$ . Recordar que si  $A \subset B \Rightarrow Z(B) \subset Z(A)$ . Luego:

$$Z(B_n) \subset Z(P_n) \subset (\theta_n) \subset Z(B_n)$$

pues  $\theta_n \in Z(B_n)$  y  $(\theta_n) \subset Z(B_n)$

$$\text{Así: } Z(B_n) = Z(P_n) = (\theta_n)$$

Por el Corolario 2.4.1  $(\theta_n)$  es un grupo cíclico infinito □

**Corolario 2.4.7.** Para  $m \neq n$  el grupo  $B_m$  y  $B_n$  no son isomorfos.

**Demostración.** Por el Teorema 2.4.2 la imagen de  $Z(B_n)$  es

$$\frac{B_n}{[B_n, B_n]} \cong Z$$

es un subgrupo de  $Z$  de  $n(n-1)$  índices. Si  $B_m$  es isomorfo a  $B_n$ , entonces:

$$m(m-1) = n(n-1)$$

entonces

$$m = n, \text{ pues } m, n \in \mathbb{N}.$$

□

# CAPÍTULO III

## VARIABLES E HIPÓTESIS

### 3.1 Variables de la investigación

$B_n$  : Grupo de trenzas de Artin.

$P_n$  : Subgrupo de trenzas puras de "Artin".

$Z(P_n)$  : Centro de el subgrupo de trenzas puras de Artin.

### 3.2 Operacionalización de la variable

Variable	Definición Conceptual	Definición Operacional	Indicadores
$B_n$	Grupo de trenzas de Artin	$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle$ , subespacio generado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \mid i - j \geq 2,$ $0 \leq i, j \leq n - 1$ $\sigma_1 \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ $i = 1, \dots, n - 2$	$n - 1$ es el número degeneradores de $B_n$
$P_n$	subgrupo de trenzas puras de "Artin"	$\langle A_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n$ donde: $A_{ij} =$ $\sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}$	$\frac{n(n-1)}{2}$ es el número de generadores de $P_n$
$Z(P_n)$	Centro de el subgrupo de trenzas puras de Artin	$\langle \theta_n = \Delta_n^2 \rangle$ para $n \geq 3$ $\Delta_n =$ $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$	$Z(P_n)$ es un grupo cíclico infinito.

### 3.3 HIPÓTESIS GENERAL E HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

#### 3.3.1 Hipótesis general

El grupo de trenzas puras  $P_n$  es representado mediante un número finito de generadores  $A_{ij}$  donde  $1 \leq i < j \leq n$

#### 3.3.2 Hipótesis específicas

Las hipótesis específicas son:

1. Es posible determinar el orden del subgrupo de trenzas puras?
2. El centro del subgrupo de trenzas puras  $P_n$  será cíclico infinito para  $n \geq 3$ .

# CAPÍTULO IV

## METODOLOGÍA

### 4.1 TIPO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación es de tipo científico-teórica y la metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo mas exhaustivo posible en cada demostración.

### 4.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño del proyecto de tesis se dio inicio con el estudio de los espacios topológicos, homeomorfismos, grupos, subgrupos e isomorfismos. Seguidamente se introdujeron los espacios de recubrimientos, los grupos fundamentales de dimensión 1 o simplemente grupos fundamentales, extendiéndose a los grupos de homotopía de dimensión mayor. Seguidamente se estudiaron los grupos de trenzas de Artin, definiendo los subgrupos de trenzas puras. Finalmente se presenta un número finito de generadores para el grupo de trenza de Artin  $B_n$  y, el número finito de generadores para el grupo de trenzas puras  $P_n$ , diseñando para ello dos aplicaciones.

Este diseño hace posible determinar el orden del subgrupo de trenzas puras  $P_n$  así como también el centro de las trenzas puras  $P_n$  es cíclico infinito para  $n \geq 3$

### **4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA**

En este trabajo podemos considerar que nuestra población está constituida por los grupos de trenzas en distintas dimensiones constituyéndose la muestra en el subgrupo de trenzas puras  $P_n$

### **4.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

Para la realización del trabajo de tesis se revisó una bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

### **4.5 PROCEDIMIENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimiento de recolección de datos más que la revisión de la bibliografía.

### **4.6 PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO Y ANÁLISIS DE DATOS**

No hay procesamiento estadístico alguno ni tampoco análisis de datos.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS

Los principales resultados son:

Representación finita del grupo de trenzas de Artin, mediante generadores y relaciones.

Representación finita del subgrupo de trenzas puras mediante generadores y relaciones.

Obtención del orden del subgrupo de trenzas puras  $P_n$  que es dado por  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

El centro del subgrupo de trenzas puras  $P_n$ ,  $Z(P_n)$  es cíclico e infinitamente generado.

Ha resultado que el grupo de trenzas puras es de torsión libre.

## CAPÍTULO VI

### DISCUSIONES DE RESULTADOS

Considerando que el presente trabajo no tiene resultados experimentales obtenidos en gabinete o laboratorio no es posible realizar una discusión en ese sentido. Sin embargo podemos realizar una discusión respecto de otros trabajos.

En [1] E. Artin. en su tratado "Theory of braids" realiza la construcción del grupo de Trenzas, sin embargo en este trabajo nosotros hacemos este estudio detalladamente sobre el grupo de trenzas puras.

Asi mismo FADELL-NEUWRTH Lograron expresar la Homotopía del espacio de configuraciones, como un grupo de trenzas y en este trabajo usamos esta identificación en la determinación del conjunto de generadores para el grupo de trenzas puras.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES

La representación de los diagramas trenzas y las trenzas equivalentes se constituyen en una herramienta decisiva para la presentación finita del grupo de trenzas de Artin.

El subgrupo de trenzas puras puede ser presentado mediante un número finito de generadores, de una filtración normal, mas aún en una dimensión se pueden obtener los generadores.

Para  $n \geq 3$  el centro del grupo trenzas puras coincide con el centro del grupo de trenzas de Artin.

El grupo de trenzas puras es de torsión libre, no tiene un elemento de orden finito.

El presente trabajo permite tener una herramienta efectiva a fin de obtener más aplicaciones del grupo de trenzas de Artin en la solución de problemas algebraicos y topológicos, a través de la homotopía de espacios de configuraciones.

## CAPÍTULO VIII

### RECOMENDACIONES

1. El trabajo de tesis desarrollado presenta el grupo de trenzas puras como el grupo de homotopía de espacios de configuraciones sobre  $R^2$  es decir  $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$ , sin embargo puede realizarse este estudio también sobre superficies o variedades, para lo cual se recomienda la lectura de [5], esta referencia realiza una generalización del teorema de Fadell-Neuwirth, sobre superficies  $M$   $\pi_1(F_n(M))$
2. Dada la presentación del grupo de trenzas puras mediante un número finito de generadores se tiene que este resultado puede llevarse a otros estudios en Topología Algebraica como por ejemplo, en la determinación de grupos de homotopía en dimensiones superiores en las esferas citeBrma0.
3. El presente trabajo ha resultado de gran utilidad y recomendable para estudiantes de Ciencias e Ingeniería.

## CAPÍTULO IX

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. Artin, "Theory of braids". *Annals of Math.*, 48 (1946), 101-126.
- [2] Birman, J.S, Braids, Links and Mapping. Class Groups, *Annals of Math, Studies no. 82*, Princeton Univ. Press, New York, 1976, 3-21.
- [3] Edgar Carballo Domínguez, El Teorema de Seifert-Van Kampen y Algunas Aplicaciones (Tesis de licenciatura), Universidad de Sonora División de Ciencias Exactas y Naturales Departamento De Matemáticas
- [4] Maurice Chiodo. *An Introduction to Braid Theory*. 2005
- [5] Fadell, E. and Neuwirth, L, configuration Spaces, *Math Scand.* 10,(1962),
- [6] Frederick R. Cohen. Elizabeth Hambury Yang- Loing Wong Jie Wu, *Braids*, 2010
- [7] James Dugundji, Allyn and Acon, Inc., Boston (1966).
- [8] Francisco García Salinas. Topología libro electrónico de la universidad Autónoma de zacatecas, Hecho por el departamento Unidad académica de matemáticas matemáticas.reduaz.mx/home/materiales/topologia/libro/TopoConjuntos02.pdf 2013
- [9] Gonzales-Menesses, B. Wiest.: *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*37., On the Structure of the centralizer of a Braid,(2004)
- [10] Gonzales-Menesses.: *Algr. Geom. Topol.*3., The nth-root of a Braid is unique up to conjugacy,(2003),1103-1118

- [11] I.N. Herstein. Algebra abstracta. Grupo editorial iberoamerica 1998
- [12] Seiichi Kamada Braid Knot theory in dimension four, American Mathematical Society (1964)
- [13] Christian Kassel Vladimir Turaev, Braid Groups, Springer 2008.
- [14] Marta Macho Stadler, Topología Algebraica Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencia y Tecnología Universidad del País Vasco (2006)
- [15] William S. Massey. Introducción a la topología algebraica. Editorial Reverté S.A. 1972.
- [16] José Luis Navarro. Libro electrónico topología general III Departamento de matemáticas Universidad de Zaragoza. 2013
- [17] Saheed Ojo Akindeinde, The Braid Group, African Institute for Mathematical Sciences (AIMS), May 2007
- [18] Sergio Plaza. Topología Algebraica: Una Introducción, Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile (2010)
- [19] Bruno Stonek. Teoría de Grupos, Teoría de Cuerpos y Teoría de Galois (Notas ampliadas de un curso de álgebra)- Libro electrónico. 2012.
- [20] Sze-Tsen Hu. Homology Theory. Holden-Day, Inc. 1966.
- [21] K. Murasugi and B. Kurpita . A study of Braids. Kluwer Academic publishers. 1999.
- [22] Allen Hatcher. Algebraic Topology- Libro electrónico. 2012.

# ANEXOS

## ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p><b>Identificación del problema</b>            Cuando el grupo de trenzas puras de Artin queda identificado con el espacio de configuraciones sobre <math>R^2</math>. Tenemos el problema de identificar los elementos de cada uno de estos grupos.</p> <p><b>Formulación del problema</b>            Identificado ya el problema podemos ahora formular las siguientes interrogantes:            ¿Tendrá el Grupo de Trenzas de Artin una presentación finita mediante generadores?            ¿El subgrupo de trenzas puras de Artin será finitamente generado por elementos del mismo subgrupo de trenzas puras?</p>	<p><b>Objetivos Generales</b>            El presente trabajo de tesis tiene como objetivo general presentar los grupos de trenzas mediante un número finito de generadores.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Introducir y establecer el concepto de espacios de configuraciones.</li> <li>2. Introducir y determinar el concepto de grupo de homotopía en dimensión superior.</li> <li>3. Determinar generadores del grupo de trenzas de Artin y sus subgrupos de trenzas puras de Artin.</li> <li>4. Determinar el orden del subgrupo de trenzas puras.</li> <li>5. El centro del subgrupo de trenzas puras de Artin es un subgrupo cíclico infinito, para dimensiones mayores.</li> </ol>	<p><b>Hipótesis general</b>            El grupo de trenzas puras <math>P_n</math> es representado mediante un número finito de generadores <math>A_{ij}</math> donde <math>1 \leq i &lt; j \leq n</math></p> <p><b>Hipótesis específicas</b>            Las hipótesis específicas son:            Es posible determinar el orden del subgrupo de trenzas puras?              El centro del subgrupo de trenzas puras <math>P_n</math> será cíclico infinito para <math>n \geq 3</math></p>	<p><b>TIPO DE LA INVESTIGACIÓN</b>            La investigación es de tipo científico-teórica y la metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.</p> <p><b>DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN</b>            El diseño del proyecto de tesis se dio inicio con el estudio de los espacios topológicos, homeomorfismos, grupos, subgrupos e isomorfismos. Seguidamente se introdujeron los espacios de recubrimientos, los grupos fundamentales de dimensión 1 o simplemente</p>	<p><b>POBLACIÓN Y MUESTRA</b>            En este trabajo podemos considerar que nuestra población está constituida por los grupos de trenzas en distintas dimensiones constituyéndose la muestra en el subgrupo de trenzas puras <math>P_n</math></p>

			<p>grupos fundamentales, extendiéndose a los grupos de homotopía de dimensión mayor. Seguidamente se estudiaron los grupos de trenzas de Artin, definiendo los subgrupos de trenzas puras. Finalmente se presenta un número finito de generadores para el grupo de trenza de Artin <math>B_n</math> y, el número finito de generadores para el grupo de trenzas puras <math>P_n</math>, diseñando para ello dos aplicaciones. Esto hace posible determinar el orden del subgrupo de trenzas puras <math>P_n</math> así como también el centro de las trenzas puras <math>P_n</math> es cíclico infinito para <math>n &gt; 3</math></p>	
--	--	--	--	--

## ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo

