T/510/M22

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE DESIGUALDAD VARIACIONAL EN $\mathbb{R}^n$ USANDO EL MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL EXACTO CON DISTANCIA DE BREGMAN

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

JEMY ALEX MANDUJANO VALLE

CALLAO - PERÚ
Febrero-2013

HOJA DE PRESENTACION

Solución de un Problema de Desigualdad Variacional en IR^n Usando el Método del Punto Proximal Exacto con Distancia de Bregman

Jemy Alex Mandujano Valle

Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Mg. Ruth Medina Aparcana

Lic. Moisés Lázaro Carrión

Lic. Edinson Raúl Montoro Alegre

CALLAO - PERU

FEBRERO – 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

MANDUJANO VALLE, JEMY ALEX

Solución de un Problema de Desigualdad Variacional en $\mathbb{R}^n$ Usando el Método del Punto Proximal Exacto con Distancia de Bregman, Callao [2013].
ix, 100 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2013)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
Matemática.
I. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

Dedicatoria

A Dios, a mi mamá y hermano

AGRADECIMIENTOS

Al concluir con este trabajo, que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

- ⋆ En primer lugar agradezco a Dios por su bendición que me brinda en mi camino.
- ⋆ A mi familia: Jhoel, Ana, Jhon, Abel, Rosy y Gaby, por el apoyo constante, cariño, comprensión, ejemplo y paciencia, digno a ser admirados, cada uno de ellos, en la vida.
- ⋆ A mis sobrinos que me motivan para realizar mis metas y no decaer ante las dificultades de la vida.
- ⋆ A mi asesor de tesis, el Profesor Edinson Raúl Montoro Alegre, por su valiosa colaboración y dirección en la realización de la tesis.
- ⋆ A los profesores de la facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por ser parte de mi formación profesional.
- ⋆ A todos los profesores que hacen parte de mi jurado de Tesis, por la disponibilidad y paciencia que mostraron en la ardua tarea de la revisión del trabajo.
- ⋆ En general, a mis profesores y amigos que me apoyaron en la realización de esta tesis.
- ⋆ A mi compañera, amiga y enamorada, Yeny Asto Alanya, por su apoyo y comprensión constante.

RESUMEN

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE DESIGUALDAD VARIACIONAL EN $\mathbb{R}^n$ USANDO EL MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL EXACTO CON DISTANCIA DE BREGMAN

JEMY ALEX MANDUJANO VALLE
Febrero-2013

Asesor: Mg Edinson Raúl Montoro Alegre
Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En esta Tesis se hará la extensión del siguiente problema

$$min \ \ f(x) \ \ sujeto \ \ a \ ; \ \ x \in C$$

Donde $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y convexo, f una función convexa. Extendemos el problema anterior a operadores monótonos maximales el cual es llamado el problema de desigualdad variacional.

El problema de desigualdad variacional consiste en encontrar $z \in C$ tal que exista $u \in T(z)$ satisfaciendo

$$\langle u, x - z \rangle \geq 0 \ ; \ \forall \, x \in C$$

Donde $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ es un operador punto-conjunto, es decir para cada valor del dominio le corresponde dos o más valores.

Para resolver el problema de desigualdad variacional utilizamos el algoritmo de punto proximal generalizado, definido de la siguiente manera.

1. Inicialmente.- escogemos

$$x_0 \in C^0 \ \ e \ \ \lambda_0 \in (0, \bar{\lambda}]$$

2. Iteración.- Para $k = 1, 2, 3...$
   Dado $x_k \in C^0$ escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$, y encontrar $x_{k+1} \in C^0$ tal que

$$0 \in T_k(x_{k+1})$$

Bajo ciertas hipótesis este algoritmo genera una sucesión convergente el cual es la solución del problema de desigualdad variacional.

Palabras claves: Operadores Monótonos maximales, Distancia de Bregman, Método del Punto Proximal y el Problema de Desigualdad Variacional.

ABSTRACT

SOLUTION OF A PROBLEM OF VARIATIONAL INEQUALITY IN $\mathbb{R}^n$ USING THE METHOD OF THE POINT PROXIMAL EXACT WITH DISTANCE OF BREGMAN

JEMY ALEX MANDUJANO VALLE
Febrero-2013

Advisor: Mg Edinson Raúl Montoro Alegre
Obtained Degree: Mathematician

In this thesis we will extension the following problem

$$min \;\; f(x) \;\; sujeto \;\; a\; ; \;\; x \in C$$

Where $C \subset \mathbb{R}^n$ is closed and convex and f is convex. We extend the previous problem to maximal monotone operators which is called the variational inequality problem.

The variational inequality problem is to find $z \in C$ such that there exists $u \in T(z)$ satisfying

$$\langle u, x - z \rangle \geq 0 \; ; \; \forall \, x \in C$$

Where $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ is an operator point-set , ie for each domain value corresponds to two or more values.

To solve the variational inequality problem we use the generalized proximal point algorithm, defined as follows.

1. Initially.- Choose
$$x_0 \in C^0 \;\; e \;\; \lambda_0 \in (0, \bar{\lambda}]$$
2. Iteration.- For $k = 1, 2, 3...$
Given $x_k \in C^0$ choose the regularization parameter $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ and find $x_{k+1} \in C^0$ such that
$$0 \in T_k(x_{k+1})$$

Under certain assumptions this algorithm generates a convergent sequence which is the solution of variational inequality problem.

Keywords: Maximal monotone operators, Bregman distance, Proximal Point Method and Variational Inequality Problem.

Contenido

Introducción

En la actualidad en ciencias e ingenierías existen problemas matemáticos que podemos expresarlo como un problema de desigualdad variacional. Cuya solución de dicho problema se obtiene mediante el algoritmo de punto proximal con distancia de Bregman

Comenzaremos con una breve exposición de aquellos tópicos que serán esenciales para una buena comprensión de los problemas y algoritmos que serán tratados en este trabajo.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y limitada inferiormente, el problema de optimización convexa es definido como:

$$(P_1)\begin{cases} minf(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ya que, si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un minimizador de f, si solo si, $0 \in \partial f(x^*)$ (ver Teorema 1.3.9) podemos escribir el problema (P_1) utilizando el subdiferencial ∂f de f

$$(P_2)\begin{cases} Encontrar \ \ x^* \in \mathbb{R}^n) \\ Tal \ \ que \ \ 0 \in \partial f(x^*) \end{cases}$$

Ahora cuando x está restringido a un conjunto convexo y cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$ obtenemos el problema de optimización convexa con restricción

$$(P_3)\begin{cases} minf(x) \\ x \in C \end{cases}$$

Ya que, si $x^* \in C$ es un minimizador de f en C, si y solo si $\exists\ w \in f(x^*)$ tal que $\langle w, y - x^* \rangle \geq 0 \,; \forall \ \ y \ \in C$ (ver Teorema 1.3.10) podemos escribir el problema (P_3) utilizando el subdiferencial ∂f de f

$$(P_4)\begin{cases} Encontrar \ \ x^* \in C \ \ tal \ \ que \ \ para \ \ algún \\ w \in \partial f(x^*) \ se \ \ tiene \ \ \langle w, y - x^* \rangle \geq 0 \ ; \ \ \forall \, y \in C \end{cases}$$

Cuando f es una función convexa, tenemos que $\partial f : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono maximal (ver Teorema 2.1.4). Obtenemos así, las extensiones naturales de los problemas (P_2) y (P_4), generalizando el operador ∂f por cualquier otro operador monótono maximal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera

$$(P_5) \begin{cases} Encontrar \;\; x^* \in \mathbb{R}^n) \\ Tal \;\; que \;\; 0 \in T(x^*) \end{cases}$$

y

$$(P_6) \begin{cases} Encontrar \;\; x^* \in C \;\; tal \;\; que \;\; para \;\; alg\acute{u}n \\ w \in T(x^*) \;\; se \;\; tiene \;\; \langle w, y - x^* \rangle \geq 0 \; ; \;\; \forall \, y \in C \end{cases}$$

Respectivamente.

De esta forma, el problema (P_5) asocia a un operador monótono maximal, es el problema de encontrar ceros de T. El problema P_6, es llamado el problema de desigualdad variacional para operadores T en el conjunto C, el cual será denotado por $PDV(T, C)$

Para resolver el problema (P_2) o más general el problema (P_5) se utiliza el método de punto proximal para operadores monótonos.

Para resolver el problema (P_3) se utiliza el método de punto proximal con distancia de Bregman

Para resolver el problema (P_4) o más general P_6 se utiliza el método de punto proximal con distancia de Bregman para el problema de desigualdad variacional.

Nuestra atención estará centrada en resolver el problema (P_6) ya que es una generalización de los demás problemas.

Cabe mencionar que el objetivo principal de la Tesis es obtener la solución del $PDV(T, C)$ en $\mathbb{R}^n$ mediante el método de punto proximal exacto con distancia de Bregman

La Tesis consta de dos partes, la primera parte está constituido por el Capítulo 1, Capítulo 2 y el Capítulo 3 en estos Capítulos damos Definiciones, Proposiciones, Teorema, Lemas, Corolario y Ejemplos de Análisis en $\mathbb{R}^n$, Operadores Monótonos y Distancia de Bregman

La segunda parte está constituido por el Capítulo 4 aquí estudiaremos la solución del problema (P_6) basándonos en los Capítulos anteriores.

El trabajo está constituido de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, presentaremos las herramientas necesarias para el desarrollo del trabajo y algunos conceptos básicos de análisis en $\mathbb{R}^n$, optimización en $\mathbb{R}^n$, conjuntos convexos, funciones convexas y funciones conjugada de una función convexa.

En el capítulo 2, estudiaremos las definiciones y resultados de: operadores monótonos, operadores monótonos maximales, operadores paramonótonos y operadores pseudomonótonos. Obteniendo que la subdiferencial ∂f de f es un operador monótono maximal, paramonótono y pseudomonótono

En el Capítulo 3, estudiaremos las definiciones y resultados de: distancia, cuasidistancia, función de Bregman y distancia de Bregman.

En el Capítulo 4, presentaremos nuestro principal aporte siendo este la parte central de la Tesis. Este Capítulo se divide en 3 secciones. En la primera sección daremos la definición del problema de desigualdad variacional, en la segunda sección veremos el método de punto proximal exacto para el $PDV(T,C)$ en $\mathbb{R}^n$ y en la tercera sección veremos que la sucesión generada por el método de punto proximal exacto converge a la solución del $PDV(V,C)$ en $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección presentaremos la simbología en utilización y daremos un resumen de resultados básicos de análisis real, nociones de convexidad y condiciones necesarias de la convergencia de una sucesión, para obtener la solución del problema

1.1 Símbolos y Notaciones

A lo largo de esta sección adoptaremos las siguientes terminologías:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x > 0\}$

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n\}$: espacio euclidiano n-dimensional.

$\langle x, z \rangle$: producto interno (euclidiano) entre $x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^n$.

$||x||$: norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.

C^0: interior del conjunto C.

$\bar{C}$: cerradura del conjunto C.

C': conjunto de puntos de acumulación de C.

$\partial f(x)$: subdiferencial de una función convexa en un punto x.

$L_f(\alpha)$: conjunto de nivel de f.

$epi(f)$: epígrafo de una función f.

$\nabla h(x)$: gradiente de una función en el punto x.

f': derivada de la función f.

$PDV(T, C)$: Problema de Desigualdad Variacional

SOL: Conjunto de soluciones del PDV

lim inf : Límite inferior

lim sup : Límite superior

$P(\mathbb{R}^n)$: Conjunto de de $\mathbb{R}^n$

1.2 Resultados de Análisis

Definición 1.2.1 *Definimos. La bola abierta* $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, *la bola cerrada* $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$ *y la esfera* $S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$ *donde* a *es el centro y* $r>0$ *el radio.*

Teorema 1.2.1 *Toda bola* $B \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo*

Demostración. Ver [8], página 12. ∎

Definición 1.2.2 *Se dice que un subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado cuando existe un número real* $c>0$ *tal que* $|x| < c$ *para todo* $x \in X$. *Esto equivale a decir que* X *está contenido en la bola cerrada de centro en el origen y radio c.*

Teorema 1.2.2 *Un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado, si y solo si, está contenido en alguna bola (cuyo centro no está necesariamente en el origen)*

Demostración. Ver [8], página 13. ■

Definición 1.2.3 *Una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$*.Escribimos* $\{x, \ldots, x_k, \ldots\}$ *o* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, o simplemente* $\{x_k\}$*, para indicar la sucesión* x

Definición 1.2.4 *Una subsucesión es la restricción de la sucesión* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *a un subconjunto infinito* $\mathbb{N}^* = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\} \subset \mathbb{N}$*. La subsucesión es indicada por la notación* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ *o* $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$*, o simplemente* $\{x_{k_i}\}$

Definición 1.2.5 *Una sucesión* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$*es acotado cuando existe un* $c>0$ *tal que* $|x_k| \leq c \ \forall \ k \in \mathbb{N}$

Proposición 1.2.1 *Una sucesión* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *está acotado, si y solo si,* $\pi_i(x_k)$ *está acotado para todo* $i = 1, 2 \ldots, n$

Demostración. Ver [8], página 13. ■

Definición 1.2.6 *Diremos que a es el límite de la sucesión de puntos* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *cuando; para todo* $\epsilon>0$ *dado, es posible obtener un* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_k - a| < \epsilon$ *siempre que* $k>k_0$*.*
En el lenguaje simbólico:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, k_0 \in \mathbb{N}/k>k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \epsilon$$

Teorema 1.2.3 *Dado* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$*, son equivalentes:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_i(x_k) = \pi_i(a), \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$

Demostración. Ver [8], página 15. ■

Proposición 1.2.2 *Dado* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$*. Si* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$

Demostración.
Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k - a = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$
Si $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k - a = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ■

Teorema 1.2.4 *(Unicidad del Límite).Dado* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, *si* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, *entonces* $a = b$

Demostración. Ver [7], página 86 y Teorema 1.2.3. ■

Teorema 1.2.5 *Toda sucesión* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *convergente está acotada*

Demostración. Ver [7], página 87 y Teorema 1.2.3. ■

El recíproco es falso: Si $a \neq b$, la sucesión $\{a, b, a, b, \ldots\}$ es divergente y limitada

Teorema 1.2.6 *Si* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *entonces toda subsucesión de* $\{x_k\}$ *converge hacia* a

Demostración. Ver [7], página 86 y Teorema 1.2.3. ■

Corolario 1.2.1 *Dadas las sucesiones convergentes de puntos* x_k, $y_k \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha_k \in \mathbb{R}$, *si* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ *.Entonces:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k.x_k = \alpha.a$;
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle a, b\rangle$;
4. $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |a|$.

Demostración. Ver [8], página 15. ■

Teorema 1.2.7 *Toda sucesión limitada en* $\mathbb{R}^n$ *posee una subsucesión convergente*

Demostración. Ver [8], página 16. ■

Teorema 1.2.8 *Sean* x_k *e* y_k *sucesiones en* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \theta$ *donde* $\theta = (0, \ldots, 0)$ *y* $\{y_k\}$ *es una sucesión acotada, entonces* $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = 0$ *(aunque no exista* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$*)*

Demostración. Ver [7], página 91, Teorema 1.2.3 y Proposición 1.2.1. ■

Teorema 1.2.9 *Toda sucesión* $\{x_k\}$ *monótona y acotada es convergente*

Demostración. Ver [7], página 88 y Teorema 1.2.3 ■

Teorema 1.2.10 *Si una sucesión monótona* $\{x_k\}$ *posee una subsucesión convergente, entonces* $\{x_k\}$ *es convergente.*

Demostración. Ver [7], página 88 y Teorema 1.2.3. ■

Definición 1.2.7 *Una sucesión* $\{x_k\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *se dice que es de Cauchy cuando para todo* $\epsilon>0$ *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $k, r>k_0$ *entonces* $|x_k - x_r|<\epsilon$

Teorema 1.2.11 *Una sucesión* $\{x_k\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es de Cauchy, si y solo si, es convergente*

Demostración. Ver [8], página 17. ■

Definición 1.2.8 *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Un punto* $a \in \mathbb{R}^n$ *es llamado punto de acumulación del conjunto* X *cuando toda bola de centro* a *contiene algún punto de* X, *diferente del punto* a. *Nosotros tenemos,* $\forall\epsilon>0$, $\exists\, x \in X \;/\; 0<|x-a|<\epsilon$

Observación 1.2.1 *Si* $a \in \mathbb{R}^n$ *no es punto de acumulación lo llamamos punto aislado*

Teorema 1.2.12 *Dado* $X \subset \mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}^n$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *a es punto de acumulación de X.*

2. *Existe una sucesión de puntos* $x_k \in X$, *con* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *y* $x_k \neq a$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$

3. *Toda bola de centro a contiene una infinidad de puntos de X*

Demostración. Ver [8], página 20. ■

Corolario 1.2.2 *Si* $X' \neq \emptyset$ *entonces* X *es infinito*

Demostración. Ver [8], página 20. ■

Teorema 1.2.13 *Si* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es infinito y acotado entonces* $X' \neq \emptyset$

Demostración. Ver [8], página 20. ∎

Teorema 1.2.14 *Toda sucesión acotada admite al menos un punto de acumulación*

Demostración.
Por ser $\{x_n\}$ acotada
Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ convergente

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$$

$\forall \, \epsilon > 0 : \exists \;\; x_{n_{k_0}} \in \mathbb{N} : n_k > n_{k_0} \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon$

$\forall \, \epsilon > 0; \exists \;\; x_{n_k} \in \{x_n\} / 0 < |x_{n_k} - a| < \epsilon$
Por lo tanto

$$a \text{ es punto de acumulación de } \{x_n\}$$

∎

Teorema 1.2.15 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, entonces $X' \subset X$*

Demostración. Sea $a \in X'$ entonces existe $\{x_k\} \subset X$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = a$ como X es cerrado se tiene que $a \in X$. ∎

Definición 1.2.9 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es continua en $a \in X$, si y solo si,*

$$\forall \, \epsilon > 0 \;\; : \exists \rho > 0 : \|x - a\| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Observación 1.2.2 *Si a es un punto aislado entonces f es continua en $a \in X \subset \mathbb{R}^n$*

Definición 1.2.10 *Una función $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en X, si y solo si, f es continua en a, para todo $a \in X$.*

Teorema 1.2.16 *Una aplicación $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en X, si y solo si, para toda sucesión de puntos $x_k \in X$ con $\lim_{k \to \infty} x_k = a$, entonces $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$.*

1.3 Elementos de Análisis Convexo

En esta sección, presentamos algunas definiciones y resultados de análisis convexo.

1.3.1 Minimización de funciones

Definición 1.3.1 *Sea un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ y $f : C \to \mathbb{R}$ una función. Un problema de optimización es un problema de la forma.*

$$min\ f(x) \quad s.a \quad x \in C \tag{1.1}$$

Cuando $C = \mathbb{R}^n$, diremos que el problema de optimización es irrestricto, y cuando $C \neq \mathbb{R}^n$ diremos que el problema de optimización es con restricción.

Definición 1.3.2 *Diremos que $\bar{x} \in D$ es*

1. *Un minimizador global del problema* (1.1) *si*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad , \forall\, x \in\ D \tag{1.2}$$

2. *Un minimizador local del problema* (1.1) *si existe ϵ>0 tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad , \forall\, x \in C \cap B[\bar{x}, \epsilon] \tag{1.3}$$

   Si para todo $x \neq \bar{x}$ la desigualdad (1.2) *y* (1.3) *es estricta, $\bar{x}$ es llamado minimizador estricta (global o local, respectivamente)*

Observación 1.3.1 *Todo problema de maximización puede ser transformado en uno de minimización, es por ello que consideramos solo problemas de minimización*

1.3.2 Existencia de Soluciones

Definición 1.3.3 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f es semicontinua inferior en $\bar{x} \in C$, si para toda sucesión $\{x_k\}$ de C converge en $\bar{x}$ se tiene que:*

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \geq f(\bar{x})$$

Donde

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(x_k)$$

Si f es semicontinua inferior para todo $x \in C$, entonces decimos que f es semicontinua inferior en C.

Teorema 1.3.1 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es semicontinua inferior en un conjunto no vacío y compacto C entonces existe un punto de mínimo global*

Demostración. Ver [9], página 34 . ∎

Corolario 1.3.1 *(Teorema de Weierstras) sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua en C entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [12], página 7, Teorema 1.2.1. ∎

Definición 1.3.4 *El conjunto de nivel de la función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asociado a $\alpha \in \mathbb{R}$, es el conjunto dado por:*

$$L_f(\alpha) = \{x \in C / f(x) \leq \alpha\}$$

Corolario 1.3.2 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $L_f(\alpha)$ es no vacío y compacto para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y f es semicontinua inferior en $L_f(\alpha)$, entonces existe un punto de mínimo global de f en C.*

Demostración. Ver [9], página 35. ∎

Corolario 1.3.3 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si C es cerrado y $L_f(\alpha)$ es no vacío y limitado para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y f es semicontinua inferior en $L_f(\alpha)$, entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [9], página 36. ∎

Definición 1.3.5 *Decimos que una sucesión $\{x_k\}$ en C es crítica (en relación al conjunto C) si:*

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k\| = +\infty \quad o \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = \bar{x} \in \bar{C} \backslash C$$

Definición 1.3.6 *La función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada coerciva en C si para toda sucesión crítica $\{x_k\}$ se tiene*

$$\limsup_{k \to +\infty} f(x_k) = +\infty$$

Donde

$$\limsup_{k \to +\infty} f(x_k) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f(x_k)$$

Corolario 1.3.4 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es coerciva y semicontinua inferior en un conjunto no vacío C, entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [9], página 37. ∎

1.3.3 Conjuntos Convexos

Definición 1.3.7 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, si para todo par de puntos x e y en C se tiene*

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C, \forall\, \alpha \ \in [0,1]$$

Teorema 1.3.2 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo entonces se satisface las siguiente condiciones*

i) rC *es un conjunto convexo* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $v + C = \{x = v + c/c \in C\}$ *es un conjunto convexo para* $v \in \mathbb{R}^n$ *un vector fijo*

iii) Si C_1, C_2 *son conjuntos convexos entonces*

$$C_1 + C_2 = \{z \in \mathbb{R}^n / x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, z = x_1 + x_2\}$$

Es un conjunto convexo.

Demostración. Ver [5], página 11 . ■

Lema 1.3.1 *Sea $\{C_\alpha\}$ una colección de conjuntos convexos tal que*

$$C = \bigcap_\alpha C_\alpha$$

Es no vacio, entonces C es convexo

Demostración. Ver [1], página 36. ■

Proposición 1.3.1 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces, cl C y int C son conjuntos convexos*

Demostración. Ver [12], página 73. ■

1.3.4 Funciones Convexas

Definición 1.3.8 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es llamada convexa en C cuando para cualquier $x \in C; y \in C$ e $\alpha \in [0,1]$, entonces*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

La función f es llamada estrictamente convexa cuando la desigualdad anterior es estricta para todo $x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$

Ejemplo 1.3.1 *Demostrar que* $g(z) = \langle u, x - z \rangle$ *es una función convexa*

Prueba Sean z_1 , $z_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in [0,1]$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \langle u, x - (\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \rangle$$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \langle u, x - \alpha z_1 - (1-\alpha)z_2 \rangle$$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \langle u, \alpha x - \alpha x + x - \alpha z_1 - (1-\alpha)z_2 \rangle$$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \langle u, \alpha x - \alpha z_1 \rangle + \langle u, -\alpha x + x - (1-\alpha)z_2 \rangle$$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \alpha \langle u, x - z_1 \rangle + \langle u, (1-\alpha)x - (1-\alpha)z_2 \rangle$$

$$\alpha \langle u, x - z_1 \rangle + (1-\alpha) \langle u, x - z_2 \rangle$$

$$g(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) = \alpha g(z_1) + (1-\alpha)g(z_2)$$

Teorema 1.3.3 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función convexa y* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *otra función convexa, entonces* $f + g$ *es una función convexa*

Demostración. Sean

$$x, y \in dom(f+g) \;\; y \;\; \alpha \in [0,1]$$

Entonces

$$x, y \in dom(f) \;\; e \;\; x, y \in dom(g)$$

Como f y g son funciones convexas

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$$

Sumando estas dos desigualdades

$$(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha(f+g)(x) + (1-\alpha)(f+g)(y)$$

■

Proposición 1.3.2 *Sea* $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función convexa y* $g : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función estrictamente conexa, entonces* $f + g$ *es una función estrictamente convexa.*

Demostración. Sean

$$x, y \in dom(f+g) \;\; y \;\; \alpha \in (0,1)$$

Entonces

$$x, y \in dom(f) \;\; e \;\; x, y \in dom(g)$$

Como f es convexo y g es estrictamente convexa

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$$

Sumando estas dos desigualdades

$$(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha(f+g)(x) + (1-\alpha)(f+g)(y)$$

■

Definición 1.3.9 *El epigrafo de una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$E_f = \{(x,c) \in C \times \mathbb{R} / f(x) \leq c\}$$

Proposición 1.3.3 *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es convexa en C, si y solo si, el epígrafo de f es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*

Demostración. Ver [12], página 67. ■

Proposición 1.3.4 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa en C. Entonces el conjunto de nivel $L_f(\alpha)$ es convexo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

Demostración. Ver [12], página 133. ■

Proposición 1.3.5 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Supongamos que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto de nivel $L_f(\beta)$ es no vacío y limitado. Entonces $L_f(\alpha)$ es limitado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

Demostración. Ver [12], página 140. ■

Teorema 1.3.4 (*Teorema de minimización convexa*)
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo e f una función convexa en C. Entonces todo minimizador local del problema (1.1) *es minimizador global. Además, el conjunto de minimizadores es convexo.*
Si f es estrictamente convexo, no puede haber más de un minimizador.

Demostración. Ver [12], página 69. ■

Teorema 1.3.5 (*Continuidad de funciones convexas*)
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo y abierto,* $f : C \to \mathbb{R}$ *una función convexa en* C. *Entonces,* f *es localmente Lipschitz- continua en* C. *En particular,* f *es continua en* C.

Demostración. Ver [12], página 136 . ■

Teorema 1.3.6 (*Caracterización de funciones convexas diferenciables*)
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo abierto y* $f : C \to \mathbb{R}$ *una función diferenciables en* C.
Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

a) *La función* f *es convexa en* C

b) $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$; $\forall\, x, y \in C$

c) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$; $\forall\, x, y \in C$

Cuando f *es dos veces diferenciable en* C *las propiedades anteriores también son equivalentes a*

d) $\langle f''(x)\, d, d \rangle \geq 0$; $\forall\, x \in C, \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$

Demostración. Ver [12], página 146 . ■

Corolario 1.3.5 *Sea* $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo abierto y* $f : C \to \mathbb{R}$ *una función diferenciables en* C.
Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

a) *La función* f *es estrictamente convexa en* C

b) $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$; $\forall\, x, y \in C$ *tal que* $x \neq y$

c) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle > 0$; $\forall\, x, y \in C$ *tal que* $x \neq y$

Cuando f *es dos veces diferenciable en* C *las propiedades anteriores también son equivalentes a*

d) $\langle f''(x)\, d, d \rangle > 0$; $\forall\, x \in C, \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

Demostración. Ver [12], página 150, Ejercicio 3.4.19 . ■

Corolario 1.3.6 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y diferenciable en x^*. Si $\nabla f(x^*) = 0$, entonces x^* es un mínimo global de f en $\mathbb{R}^n$*

Demostración.

Como f es convexa y diferenciable en x^* por el Teorema 1.3.6 se tiene

$$f(y) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \ ; \ \ \forall\, y \ \in \mathbb{R}^n$$

Por hipótesis $\nabla f(x^*) = 0$, entonces

$$f(y) \geq f(x^*) \ ; \ \ \forall\, y \ \in \mathbb{R}^n$$

■

Teorema 1.3.7 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $s \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \, ; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$*

Demostración. Ver [23], página 86. ■

Definición 1.3.10 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. El vector $s \in \mathbb{R}^n$ es el subgradiente de f en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ si*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \, ; \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en x, denotado por $\partial f(x)$, es llamado el subdiferencial de f en x, esto es:

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n ; f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \, , \forall\, y \in \mathbb{R}^n \}$$

Ejemplo 1.3.2 *Sea $f(x) = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Encontrar el subdiferencial de f*

solución
Como f es convexa

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}; \ s(y - x) \leq f(y) - f(x), \ \forall\, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}; \ s(y - x) \leq |y| - |x| , \ \forall\, y \in \mathbb{R} \}$$

i) Si $x > 0$

$$s(y-x) \leq |y| - x \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Tomamos para $y = 0$

$$s(0-x) \leq |0| - x$$

$$s(-x) \leq -x$$

$$s \geq 1$$

Tomamos para $y = 2x$

$$s(2x-x) \leq 2x - x$$

$$sx \leq x$$

$$s \leq 1$$

Por lo tanto

$$s = 1$$

ii) Si $x<0$

$$s(y-x) \leq |y| + x \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

Tomamos para $y = 0$

$$s(0-x) \leq |0| + x$$

$$s(-x) \leq x$$

$$s \leq -1$$

Tomamos para $y = 2x$

$$s(2x-x) \leq |2x| + x$$

$$s(x) \leq -x$$

$$s \geq -1$$

Por lo tanto

$$s = -1$$

iii) Si $x = 0$

$$sy \leq |y| \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$y \geq 0 \ \ \vee \ \ y<0$$

Tomamos para $y \geq 0$

$$sy \leq y$$

$$s \leq 1$$

Tomamos para $y<0$

$$sy \leq -y$$

$$s \geq -1$$

Por lo tanto

$$-1 \leq s \leq 1$$

De i) , ii) y iii) obtenemos

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}; & si \quad x>0 \\ [-1,1]; & si \quad x=0 \\ \{-1\}; & si \quad x<0 \end{cases}$$

Proposición 1.3.6 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces el conjunto $\partial f(x)$ es no vacio, convexo y compacto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

Demostración.
Paso 1 Mostremos que $\partial f(x)$ es no vacio
Por el teorema 1.3.7

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \exists\, s = s(x) \ / \ f(y) \geq f(x) + \langle s, y-x \rangle \ , \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \neq \emptyset \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Paso 2 Mostremos que $\partial f(x)$ es convexo Sean

$$s \in \partial f(x) \ \ ; \quad w \in \partial f(x) \ \ y \quad t \in [0,1]$$

Entonces

$$f(x) + \langle s, y-x \rangle \leq f(y) \ \ ; \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$
$$f(x) + \langle w, y-x \rangle \leq f(y) \ \ ; \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Luego

$$f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle = f(x) + (1-t)\langle s, y-x \rangle + t\langle w, y-x \rangle$$

$$f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle = f(x) - tf(x) + tf(x) + (1-t)\langle s, y-x \rangle + t\langle w, y-x \rangle$$

$$f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle = (1-t)(f(x) + \langle s, y-x \rangle) + t(f(x) + \langle w, y-x \rangle)$$

$$f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle \leq (1-t)f(y) + tf(y)$$

$$f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle \leq f(y) \ \ ; \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Luego

$$(1-t)s + tw \in \partial f(x) \ \ ; \quad \forall\, t \in [0,1]$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es convexo } \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Paso 3 Mostremos que $\partial f(x)$ es cerrado Sea

$$s \in \overline{\partial f}(x)$$

Entonces

$$\exists \{s_k\} \subset \partial f(x) \;\; / \;\; \lim_{k\to\infty} s_k = s$$

Como

$$s_k \in \partial f(x)$$

Tenemos

$$f(y) \leq f(x) + \langle s_k, y - x\rangle \;\; ; \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \;\; e \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Tomando límite

$$f(y) \geq f(x) + \lim_{k\to\infty} \langle s_k, y - x\rangle = f(x) + \langle s, y - x\rangle \;\; ; \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Luego

$$s \in \partial f(x)$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es cerrado } \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Paso 4 Mostremos que $\partial f(x)$ es acotado Sea

$$s \in \partial f(x)\,, \;\; s \neq 0$$

Considere

$$r > 0 \;\; / \;\; y = x + r\frac{s}{\|s\|}$$

Entonces

$$y \in B[x, r]$$

Como f es convexa por el Teorema 1.3.5, f es Localmente Lipschitz-continua. Luego para

$$y \in B[x, r]\,, \;\; \exists\, M > 0 \;\; / \;\; f(y) - f(x) \leq M\,\|y - x\|$$

$$f(y) - f(x) \leq Mr \tag{1.4}$$

Por otro lado como $s \in \partial f(x)$, entonces

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle s, r\frac{s}{\|s\|}\right\rangle$$

$$f(y) \geq f(x) + r\,\|s\|$$

$$f(y) - f(x) \geq r \|s\| \tag{1.5}$$

De 1.4 y 1.5

$$\|s\| \leq M$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es acotado } \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

■

Proposición 1.3.7 *Una función convexa $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $x \in C$, si y solo si, el conjunto $\partial f(x)$ contiene un único punto. Además,$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$*

Demostración. Ver [12], página 167. ■

Teorema 1.3.8 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. El punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es minimizador de f, si y solo si, $0 \in \partial f(\bar{x})$*

Demostración.
Por hipotesis $0 \in \partial f(\bar{x})$

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle \;; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(y) \geq f(\bar{x}) \;\; ; \; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} \text{ es mínimo de } \{f(x) : \;\; s.a \;\; x \in \mathbb{R}^n\}$$

Recíprocamente
Por hipótesis $\bar{x}$ es solución del problema $\min\{f(x) : \;\; s.a \;\; x \in \mathbb{R}^n\}$

$$f(y) \geq f(\bar{x}) \;; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle \;; \forall\, y \;\in \mathbb{R}^n$$

$$0 \in \partial f(\bar{x})$$

■

2243

Teorema 1.3.9 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un minimizador de f en C, si y solo si,*

$$\exists\, y \in \partial f(\bar{x}) \text{ tal que } \langle y, x - \bar{x}\rangle \geq 0\,; \forall\, x \in C$$

Demostración. Ver [12], página 168. ■

Proposición 1.3.8 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ y $y_k \in \partial f(x_k)$ para todo k. Entonces la sucesión $\{y_k\}$ es acotada y todos sus puntos de acumulación pertenecen a $\partial f(x)$*

Demostración. Ver [12], página 171 . ■

Teorema 1.3.10 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\bar{x}$ es minimizador, local de f. Entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Demostración. Ver [12], página 15. ■

Definición 1.3.11 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cerrada si epigrafo E_f es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Proposición 1.3.9 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *f es semicontinua inferior en $\mathbb{R}^n$*

b) *$\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado para cada $\alpha \in \mathbb{R}$*

c) *f es cerrada*

Demostración. Ver [28], Teorema 7.1 . ■

Definición 1.3.12 *Una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es propia si:*

a) *$dom(f) \neq \emptyset$*

b) *$\forall\, x \in domf : f(x) > -\infty$*

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
BIBLIOTECA CENTRAL
2244
UNAC

1.3.5 Función conjugada de una función convexa

Una extensión de la definición 1.3.8 es dada por la siguiente definición

Definición 1.3.13 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, no idénticamente $+\infty$, es llamada convexa cuando, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in (0, 1)$, se tiene*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Como una desigualdad en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Observación 1.3.2 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función convexa $f : C \to \mathbb{R}$ como en la definición 1.3.8 puede ser extendida a una función convexa como en la definición 1.3.13 de la forma siguiente*

$$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$x \mapsto \bar{f} = \begin{cases} f(x), & si \quad x \in C \\ +\infty, & si \quad x \notin C \end{cases}$$

Definición 1.3.14 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es llamado convexo propio si $f(x) < +\infty$ para por lo menos un punto $x \in \mathbb{R}^n$, y $f(x) > -\infty$.*

Definición 1.3.15 *El dominio efectivo de una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, es el conjunto denotado por $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$*

Definición 1.3.16 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es llamada cerrada si su epigrafo es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; o equivalente, si su conjunto de nivel son cerrados.*

Definición 1.3.17 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. El subdiferencial de f en $x \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $\partial f(x)$ definido por*

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{s \in \mathbb{R}^n; f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n\}, & si \quad x \in dom(f) \\ \emptyset, & si \quad x \notin dom(f) \end{cases}$$

Definición 1.3.18 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacio, La función $I_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Definido por:*

$$I_C(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in C \\ +\infty, & si \quad x \notin C \end{cases}$$

Es llamada función indicatriz de C.

Proposición 1.3.10 *La función $I_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, si y solo si, C es convexa*

Demostración. Supongamos que I_C es convexa
Sean

$$x \ , \quad y \ \in C$$

Supongamos que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $\quad \alpha x + (1-\alpha)y \ \notin C$
Por ser I_C convexa

$$I_C(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha I_C(x) + (1-\alpha)I_C(y)$$

$$+\infty \leq \alpha.0 + (1-\alpha)0$$

$$+\infty \leq 0$$

Contradictorio, entonces

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C \ ; \ \ \forall \, \alpha \in [0,1]$$

Por lo tanto

$$C \quad es \quad convexa$$

Recíprocamente
Supongamos que C es convexa
Sean

$$(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad y \quad \alpha \in (0,1)$$

Vemos dos casos
Si $x \notin C \ \ o \ \ y \notin C$ la demostración es trivial
Si $x \in C \ \ e \ \ y \in C$
Entonces

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C \quad \forall \, \alpha \in (0,1)$$

$$I_C(\alpha x + (1-\alpha)y) = 0 = \alpha 0 + (1-\alpha)0 = \alpha I_C(x) + (1-\alpha)I_C(y)$$

$$I_C(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha I_C(x) + (1-\alpha)I_C(y)$$

Por lo tanto

$$I_C \quad es \quad convexa$$

■

Ejemplo 1.3.3 *Ahora calculamos el subdiferencial de la función indicadora I_C.*

Sea $s \in \partial I_C(x)$, entonces.

1. *Si $x \notin C$, se tiene $I_C(x) = +\infty$ de ahi*

$$I_C(y) \geq I_C(x) + \langle s, y - x \rangle \ ; \ \forall \, y \in \mathbb{R}^n$$
$$I_C(y) \geq +\infty + \langle s, y - x \rangle \ ; \ \forall \, y \in \mathbb{R}^n$$
$$I_C(y) \geq +\infty \ ; \ \forall \, y \in \mathbb{R}^n$$

Lo cual es absurdo.
Por lo tanto

$$\partial I_C(x) = \emptyset \quad ; \quad si \quad x \notin C$$

2. *Si $x \in C$, se tiene $I_C(x) = 0$, de ahí*

$$I_C(y) \geq I_C(x) + \langle s, y - x \rangle \ ; \ \forall \, y \in \mathbb{R}^n$$
$$I_C(y) \geq \langle s, y - x \rangle$$

De ahí, consideramos dos casos.

i) si $y \notin C$, obtenemos
$$\langle s, y - x \rangle \leq +\infty$$

ii) si $y \in C$, obtenemos
$$\langle s, y - x \rangle \leq 0$$

Por lo tanto, de i) y ii) obtenemos

$$\partial I_C(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n ; \langle s, y - x \rangle \leq 0, \ \forall \, y \ \in \ C \}$$

Luego
$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{ s \in \mathbb{R}^n ; \langle s, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C \}, & si \quad x \in C \\ \emptyset \, , & si \quad x \notin C \end{cases}$$

Definición 1.3.19 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. La función $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por*

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, s \rangle - f(x) \}$$

Para todo $s \in \mathbb{R}^n$, es llamado la conjugada de la función f.

Observación 1.3.3 *Sean $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Tenemos que*

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n / \langle s, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \ , \ \ \forall \, y \in \ \mathbb{R}^n \}.$$

De ahí,

$$\langle s,y\rangle - f(y) \leq \langle s,x\rangle - f(x) \leq f^*(s)$$

Luego, $\forall\ s \in \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x,s\rangle - f(x)\}$$

Ejemplo 1.3.4 *Sea una función convexa* $f(x) = |x|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$; $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, *encontrar su función conjugada.*

Solución

Por la definición de conjugada

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x,s\rangle - f(x)\}\ ;\ \ \forall\ s \in \mathbb{R}^n$$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{xs - |x|\}\ ;\ \ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

Si $x \geq 0$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(s-1)x\}\ ;\ \ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

Si $x<0$

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(s+1)x\}\ ;\ \ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

i) Sea, $s \in \langle -\infty, -1\rangle$
Para $x \geq 0$

$$s-1<-2$$

$$(s-1)x<-2x$$

$$f^*(s) = \sup_{x\geq 0}\{(s-1)x\} = 0$$

Para $x<0$

$$s+1<0$$

$$(s+1)x>0$$

$$f^*(s) = \sup_{x>0}\{(s+1)x\} = +\infty$$

Para los dos casos

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xs - |x|\} = +\infty$$

ii) Sea, $s \in \langle 1, +\infty\rangle$
Para $x \geq 0$

$$s-1<0$$
$$(s-1)x \leq 0$$
$$f^*(s) = \sup_{x\geq 0}\{(s-1)x\} = 0$$

Para $x<0$

$$s+1<2$$
$$(s+1)x>2x$$
$$f^*(s) = \sup_{x<0}\{(s+1)x\} = +\infty$$

Para los dos casos

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xs - |x|\} = +\infty$$

iii) Sea, $s \in [-1, 1]$
Para $x \geq 0$

$$-2 \leq s-1 \leq 0$$
$$-2x \leq (s-1)x \leq 0$$
$$f^*(s) = \sup_{x\geq 0}\{(s-1)x\} = 0$$

Para $x<0$

$$0 \leq s+1 \leq 2$$
$$2x \leq (s+1)x \leq 0$$
$$f^*(s) = \sup_{x<0}\{(s+1)x\} = 0$$

Para los dos casos

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xs - |x|\} = 0$$

Por lo tanto

$$f^*(s) = \begin{cases} +\infty, & si \quad |s|>1 \\ 0, & si \quad |s| \leq 1 \end{cases}$$

Observación 1.3.4 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *De la definición* 1.3.19, *tenemos* $f^*(s) \geq \langle x, s\rangle - f(x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *y cada* $s \in \mathbb{R}^n$, *luego,*

$$f^*(s) + f(x) \geq \langle x, s\rangle$$

Esta última relación es llamada la desigualdad de Frechel.

Teorema 1.3.11 *Sean $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. Entonces $s \in \partial f(x)$ si y solo si, $f^*(s) = \langle s, x\rangle - f(x)$*

Demostración.
Supongamos que $s \in \partial f(x)$.
Entonces

$$\langle s, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle s, y\rangle - f(y) \leq \langle s, x\rangle - f(x) \ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Por lo tanto

$$f^*(s) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, y\rangle - f(y)\} \leq \langle s, x\rangle - f(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, x\rangle - f(x)\} = f^*(s)$$

Luego

$$f^*(s) = \langle s, x\rangle - f(x)$$

Recíprocamente.
Supongamos que $f^*(s) = \langle s, x\rangle - f(x)$
Si $f^*(s) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, y\rangle - f(y)\} = \langle s, x\rangle - f(x)$ tenemos que $f^*(s) < +\infty$. Entonces,

$$\langle s, y\rangle - f(y) \leq \langle s, x\rangle - f(x)$$

Por lo tanto

$$\langle s, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall\, y \ \in \mathbb{R}^n$$

Luego

$$s \in \partial f(x)$$

$\blacksquare$

Este teorema garantiza que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa y $s \in \partial f(x)$ para algun $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f^*(x) < +\infty$.

Teorema 1.3.12 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. Entonces la conjugada f^* es una función convexa.*

Demostración. Dados s_1 , $s_2 \in \mathbb{R}^n$. Haremos la prueba en dos casos

i) Si $f^*(s_1) < +\infty$ y $f^*(s_2) < +\infty$
Entonces para cada $t \in [0, 1]$, tenemos

$$f^*((1-t)s_1 + ts_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, (1-t)s_1 + ts_2\rangle - f(x)\}$$

$$f^*((1-t)s_1 + ts_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, (1-t)s_1 + ts_2\rangle - f(x) + tf(x) - tf(t)\}$$

$$f^*((1-t)s_1+ts_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1-t)[\langle x,s_1\rangle - f(x)] + t[\langle x,s_2\rangle - f(x)]\}$$

$$f^*((1-t)s_1+ts_2) \leq (1-t)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,s_1\rangle - f(x)\} + t\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,s_2\rangle - f(x)\}$$

Por la definición 1.3.19

$$f^*((1-t)s_1+ts_2) \leq (1-t)f^*(s_1) + tf^*(s_2)$$

Por lo tanto

$$f^* \text{ es una función convexa}$$

ii) Si $f^*(s_1) = +\infty$ o $f^*(s_2) = +\infty$, Entonces tenemos trivialmente que

$$f^*((1-t)s_1+ts_2) \leq (1-t)f^*(s_1) + tf^*(s_2)$$

Por lo tanto

$$f^* \text{ es una función convexa}$$

■

Definición 1.3.20 *Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. La función $f^{**}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es llamada la conjugada de la conjugada de f.*

Proposición 1.3.11 *Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. Entonces f^{**} es el supremo del conjunto de todas las funciones afins que minora f, definido como $f^{**}(y) = \sup_{s\in\mathbb{R}^n}\{\langle y,s\rangle - f^*(s)\}$*

Demostración.
Hagamos unas definiciones previas para la demostración.

$$g(x) = \langle x,s\rangle - f^*(s)$$

g es llamado función afin.
Si

$$g(x) \leq f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n g$$

g es llamado función minorante de f.
Sea un conjunto $A = \{g/g$ función afin que minora a $f\}$

$$f^{**}(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,s\rangle - f^*(s)\} \quad , \quad u = sup\{g : g \in A\}$$

Probemos que

$$f^{**} = u$$

Del dato, para cada $s \in \mathbb{R}^n$, la función $g(x) = \langle x, s\rangle - f^*(s)$ es una función afin.
Por la desigualdad de Frechel

$$f(x) + f^*(s) \geq \langle x, s\rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x) = \langle x, s\rangle - f^*(s) \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Así, g es una minorante de f. Entonces, $g \in A$
Por lo tanto

$$f^{**}(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f^*(s)\} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) = u(x)$$

Luego

$$f^{**}(x) \leq u(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

Ahora, sea $h \in A$, entonces h es de la forma $h(x) = \langle x, s\rangle - \alpha$
Donde $s \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, que implica

$$\langle x, s\rangle - \alpha \leq f(x) \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, s\rangle - f(x) \leq \alpha \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f(x)\} \leq \alpha$$

Así

$$-\alpha \leq -f^*(s)$$

Sigue que

$$h(x) = \langle x, s\rangle - \alpha \leq \langle x, s\rangle - f^*(s)$$

Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} h(x) \leq \sup_{s\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f^*(s)\} = f^{**}(x)$$

Luego

$$u(x) \leq f^{**}(x) \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

De (1.6) y (1.7) obtenemos

$$u = f^{**}$$

∎

Proposición 1.3.12 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. Entonces $f = f^{**}$*

Demostración.

i) Mostraremos que $f^{**} \leq f$

Por definición

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f(x)\}$$
$$f^*(y) = \sup_{s\in\mathbb{R}^n} \{\langle y, s\rangle - f(s)\}$$

Por definición de supremo

$$f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f(x)\} \geq \langle x, s\rangle - f(x) \quad ,\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Cambiamos de variable x por y

$$f^*(s) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{\langle y, s\rangle - f(y)\} \geq \langle y, s\rangle - f(y) \quad ,\forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f^*(s) \geq \langle y, s\rangle - f(y) \quad ,\forall\, y \in \mathbb{R}^n$$
$$\langle y, s\rangle - f^*(s) \leq f(y) \quad ,\forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Por definición de supremo

$$\langle y, s\rangle - f^*(s) \leq f^{**}(y) \leq f(y) \quad ;\forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f^{**} \leq f.$$

ii) Mostramos que $f \leq f^{**}$

Supongamos que no ocurra $f \leq f^{**}$, entonces

$$\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n \ /\ f(x_0) > f^{**}(x_0)$$

Luego,

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^n \ /\ f^{**} < \alpha < f(x_0)$$

Como f es convexo por Teorema 1.3.7

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \exists\, s \in \mathbb{R}^n \ /\ f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \ ;\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

En particular para $x = x_0$ *e* $y = x$

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle s, x - x_0\rangle \ ;\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Como $\alpha < f(x_0)$, entonces

$$f(x) > \alpha + \langle s, x - x_0\rangle \ ;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces existe una función afín $h(x) = \alpha + \langle s, x - x_0 \rangle$ minorando f. Donde

$$h(x_0) = \alpha$$

Como $h<f$ por el proposición 1.3.11

$$h(x) \leq f^{**}(x)$$

En particular para $x = x_0$, tenemos

$$h(x_0) \leq f^{**}(x_0)$$

Como $\alpha = h(x_0)$ y $f^{**}(x_0)<\alpha<f(x_0)$

$$h(x_0) \leq f^{**}(x_0)<\alpha<f(x_0)$$

$$\alpha<\alpha$$

Contradictorio, por lo tanto

$$f \leq f^{**}$$

De $i)$ y $ii)$, obtenemos

$$f = f^{**}$$

■

Observación 1.3.5 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y supongamos que el problema, $min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ posee solución. Entonces f es acotado inferiormente*

Proposición 1.3.13 *Sea $z \in \mathbb{R}^n$ fijo con f convexa y acotada inferiormente, definamos*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}\|x - z\|^2 \end{aligned}$$

$h(x) = \frac{1}{2}\|x - z\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces $F(x) = f(x) + h(x)$ pose un único mínimo global*

Demostración.
Paso 1 Probemos que h es estrictamente convexo
Sean $u_1 \in \mathbb{R}^n$ *e* $u_2 \in \mathbb{R}^n$ / $u_1 \neq u_2$
Entonces

$$\nabla h(u_1) = u_1 - z \quad , \nabla h(u_2) = u_2 - z$$

Luego

$$\langle \nabla(u_1) - \nabla h(u_2), u_1 - u_2 \rangle = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = \|u_1 - u_2\|^2 >0$$

Por el Corolario 1.3.5

$$\text{h es estrictamente convexa}$$

Paso 2 Probemos que $F = f + h$ es estrictamente convexa
Como h es estrictamente convexa y f es convexa
Por el Proposición 1.3.2

$$\text{F es estrictamente convexa}$$

Paso 3 Probemos que h es coerciva en $\mathbb{R}^n$
De la Definición 1.3.5
Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$$

Podemos notar que

$$\|x_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\| \ \text{ó} \ \|x_k - z\| \leq \|x_k - z\|^2$$

Si

$$\|x_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|$$
$$\|x_k - z\| \leq 1$$
$$\|x_k\| - \|z\| \leq 1$$
$$\|x_k\| \leq 1 + \|z\|$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| \leq \lim_{k\to\infty} 1 + \|z\|$$
$$+\infty \leq \|z\| + 1$$

Lo cual es imposible
Entonces

$$\|x_k - z\| \leq \|x_k - z\|^2$$
$$\|x_k\| - \|z\| \leq \|x_k - z\| \leq \|x_k - z\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} (\|x_k\| - \|z\|) \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - z\|^2$$
$$+\infty \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - z\|^2$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z\|^2 = +\infty$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \|x_k - z\|^2 = +\infty$$
$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = +\infty$$

Por lo tanto

$$h \text{ es coerciva en } \mathbb{R}^n$$

Paso 4 Probemos que $F = f + h$ es coerciva en $\mathbb{R}^n$
Por ser f limitada inferiormente

$$\exists\ \beta \in \mathbb{R}\ /\ \ \beta \leq f(x)\ ;\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Sea $\{x_k\}$ una sucesión . Entonces

$$\beta \leq f(x_k)\ ;\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\beta + \frac{1}{2}\left\|x_k - z\right\|^2 \leq f(x_k) + \frac{1}{2}\left\|x_k - z\right\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} (\beta + \frac{1}{2}\left\|x_k - z\right\|^2) \leq \lim_{k\to\infty} (f(x_k) + \frac{1}{2}\left\|x_k - z\right\|^2)$$

$$\beta + \infty \leq \lim_{k\to\infty} F(x_k)$$

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k) = +\infty$$

Por lo tanto

$$F \text{ es coerciva en } \mathbb{R}^n$$

Paso 5 Probemos que F es continua
Como f es convexo e $\mathbb{R}^n$ es convexo y abierto entonces por el Teorema 1.3.5

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n$$

También

$$h(x) = \tfrac{1}{2}\left\|x - z\right\|^2 \text{ es continua en } \mathbb{R}^n$$

Entonces

$$F(x) = f(x) + h(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}^n$$

Paso 6 Probemos que F posee un único minimizador global.
Del Paso 4, Paso 5 y por el Corolario 1.3.4

$$F \text{ posee un minimizador global}$$

Del Paso 2 y por el Teorema 1.3.4

$$\text{El minimizador de } F \text{ es único}$$

$\blacksquare$

Definición 1.3.21 *Por la Proposición 1.3.13, podemos definir $prox_f$ como:*

$$prox_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$z \mapsto prox_f(z) = argmin_{x \in \mathbb{R}^n}\{f(x)+\frac{1}{2}\|x-z\|^2\}$$

Observación 1.3.6 *$f^*(s)$ es acotado inferiormente.*

Sea $s_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario

$$\langle s_0, y\rangle - f(y) \leq f^*(s_0)\ ;\ \forall \quad y \in \mathbb{R}^n$$

En particular para un y_0 fijo

$$\langle s_0, y_0\rangle - f(y_0) \leq f^*(s_0)$$

Entonces

$$\forall\ s\ \in\ \mathbb{R}^n, \exists\ \alpha\ /\ \alpha \leq f^*(s)$$

Proposición 1.3.14 *Sea $z \in \mathbb{R}^n$ fijo, con f convexo, definamos:*

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$y \mapsto G(y) = f^*(y) + \frac{1}{2}\|y-z\|^2$$

Si $h(x) = \frac{1}{2}\|y-z\|^2 \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n$. Entonces $G(y) = f^*(y) + h(y)$ Posee un único mínimo global

Demostración.

Paso 1 Probemos que h es estrictamente convexa

La demostración similar a la Proposición 1.3.13 Paso 1

Paso 2 Probemos que $G = f^* + h$ es estrictamente convexa
Como f es convexa por el Teorema 1.3.12 f^* es convexa
Como h es estrictamente convexa y f^* es convexa
Por el Proposición 1.3.2

G es estrictamente convexa

Paso 3 Probemos que h es coerciva en $\mathbb{R}^n$

La demostración similar a la Proposición 1.3.13 Paso 3

Paso 4 Probemos que $G = f^* + h$ es coerciva en $\mathbb{R}^n$

La demostración similar a la Proposición 1.3.13 Paso 4

Paso 5 Probemos que G es continua

La demostración similar a la Proposición 1.3.13 Paso 5

Paso 6 Probemos que G posee un único minimizador global

La demostración similar a la Proposición 1.3.13 Paso 6

■

Definición 1.3.22 *Por la Proposición 1.3.14 podemos definir $prox_{f^*}$ como:*

$$prox_{f^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$z \mapsto prox_{f^*}(z) = argmin_{x\in\mathbb{R}^n}\{f^*(x)+\frac{1}{2}\|y-z\|^2\}$$

Lema 1.3.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y acotada inferiormente. Considere x, y e z en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $z = x + y \quad e \quad f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle$

ii) $x = prox_f(z) \quad e \quad y = prox_{f^*}(z)$

Demostración. Supongamos que $i)$ es válido.
Probemos que $x = prox_f(z)$
Como

$$f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle$$

$$f^*(y) = \langle x, y\rangle - f(x)$$

Entonces por el Teorema 1.3.11

$$y \in \partial f(x)$$

Como

$$0 = y + (x - z) \quad e \quad y \in \partial f(x)$$

Entonces

$$0 \in \partial f(x) + \{x - z\} = \partial f(x) + \partial h(x) = \partial F(x)$$

Por el Teorema 1.3.8

$$\text{x es minimizador de } F$$

Siendo F estrictamente convexo por la Proposición 1.3.13 Pasó 2. Entonces

$$x = prox_f(z).$$

Probemos que $\quad y = prox_{f^*}(z)$
De la hipótesis

$$f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$$

Por la Proposición 1.3.12 $f = f^{**}$

$$f(x)^{**} + f^*(y) = \langle x, y \rangle$$

$$f(y)^* + f^{**}(x) = \langle x, y \rangle$$

Entonces por el Teorema 1.3.11

$$x \in \partial f^*(y)$$

Como

$$0 = x + (y - z) \quad e \quad x \in \partial f^*(y)$$

Entonces

$$0 \in \partial f^*(y) + \{y - z\} = \partial f(y) + \partial h(y) = \partial F(y)$$

Por el Teorema 1.3.8

$$\text{y es minimizador de } G$$

Siendo G estrictamente convexa por la Proposición 1.3.13 Paso 2. Entonces

$$y = prox_{f^*}(z).$$

Recíprocamente
Supongamos que $ii)$ es válido. Como

$$x = prox_f(z) = argmin_{v \in \mathbb{R}^n}\{F(v) = f(v) + \frac{1}{2}\|v - z\|^2\}$$

Por el Teorema 1.3.8

$$0 \in \partial F(x) = \partial f(x) + \partial h(x)$$

$$0 \in \partial F(x) = \partial f(x) + \{x - z\}$$

Entonces

$$\exists\, y \in \partial f(x) \;/\; 0 = y + (x - z)$$

$$z = x + y$$

Luego, como

$$y \in \partial f(x)$$

Entonces por el Teorema 1.3.11

$$f^*(y) = \langle x, y\rangle - f(x)$$

$$f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle \tag{1.8}$$

Por otro lado, como

$$y = prox_{f^*}(z)$$

Por el Teorema 1.3.8

$$0 \in \partial G(y) = \partial f^*(y) + \partial h(y)$$

$$0 \in \partial G(y) = \partial f^*(y) + \{y - z\}$$

Entonces

$$\exists\, w \in \partial f^*(x) \ / \ 0 = w + (y - z)$$

$$z = w + y$$

Lugo, como

$$w \in \partial f^*(y)$$

Entonces por el Teorema 1.3.11

$$f^{**}(w) = \langle y, w\rangle - f^*(y)$$

$$f^*(y) + f^{**}(w) = \langle y, w\rangle$$

Por la Proposición 1.3.12 $f = f^{**}$. Entonces

$$f^*(y) + f(w) = \langle y, w\rangle \tag{1.9}$$

Como $\quad z = x + y \quad e \quad z = w + y \quad$ entonces $\quad x = w$
Así las ecuaciones (1.8) y (1.9) coinciden.
Por lo tanto

$$z = x + y \quad e \quad f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle$$

■

Capítulo 2

Operadores Monótonos

2.1 Operadores Monótonos Maximales

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal semidefinida positivamente, esto es $\langle x, T(x)\rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, para cualquier x, y en $\mathbb{R}^n$, tenemos.

$$0 \leq \langle x - y, T(x - y)\rangle = \langle x - y, T(x) - T(y)\rangle$$

Un operador monótono es una generalización de una transformación lineal semidefinida positivamente en el caso no lineal

Definición 2.1.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador (no necesariamente lineal)*

1. *T es llamado monótono cuando*

$$\langle T(x) - T(y), x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

2. *T es llamado estrictamente monótono cuando es monótono y cuando se tiene*

$$\langle T(x) - T(y), x - y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Teorema 2.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y diferenciable. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono*

Demostración.
Como f es convexa y diferenciable, por el Teorema 1.3.6

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle \ ; \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ahora podemos hacer lo siguiente

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle \ ; \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Sumando estas dos desigualdades tenemos lo siguiente

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \ ; \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

■

Corolario 2.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa y diferenciable. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono estricto*

Demostración.
Como f es convexa y diferenciable, por el Corolario 1.3.5

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \ ; \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ / \ x \neq y$$

También se cumple

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \ ; \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ / \ x \neq y$$

Sumando estas dos desigualdades

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0 \ ; \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ / x \neq y$$

■

Como $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$. Asociado para cada $x \in \mathbb{R}^n$ no nos da exactamente un vector, nos da un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces es preciso extender la definición de operador monótono punto a punto para operadores punto -conjunto

Definición 2.1.2 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador punto-conjunto*

1. *T es llamado monótono cuando $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, u \in T(x)$ y $\forall\, v \in T(y)$ se tiene:*

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

2. *T es estrictamente monótono cuando es monótono y cumple la condición, para cualquier $u \in T(x)$ y $v \in T(y)$ se tiene:*

$$\langle u - v, x - y \rangle = 0 \Rightarrow x = y$$

Teorema 2.1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexo. Entonces, $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono*

Demostración.
Sean
$$x, y \in \mathbb{R}^n,\ u \in \partial f(x) \quad y \quad v \in \partial f(y)$$

Por defnción de subgradiente de f en x
$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Por defnción de subgradiente de f en y
$$f(x) \geq f(y) + \langle v, x - y \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sumando las dos desigualdades tenemos
$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

■

Definición 2.1.3 *La suma $T + Q$ de dos operadores $T, Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se define como*
$$T + Q = \{(x, y + w)/(x, y) \in T\ ;\ \ (x, w) \in Q\}$$

Definición 2.1.4 *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y un operador $T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, el producto λT se define como*
$$\lambda\, T = \{(x, \lambda\, y)/(x, y) \in T; \lambda\ \in \mathbb{R}\}$$

Definición 2.1.5 *Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y un operador $T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la suma $T + a$ se define como*
$$T + a = \{(x, y + a)/(x, y) \in T;\ a \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema 2.1.3 *Si T y Q son dos operadores monótonos. Entonces*

a.- $T + Q$ es un operador monótono

b.- $\lambda\, T$ es un operador monótono; $\forall\ \lambda \geq 0$

c.- $T + a$ es un operador monótono; $\forall\ a \in \mathbb{R}^n$

Demostración.

a.- Sean

$$(x_1, y_1 + w_1)\ ;\ \ (x_2, y_2 + w_2) \in T + Q$$

Entonces

$$(x_1, y_1)\ y\ \ (x_2, y_2) \in T\ \ ;\ \ \ (x_1, w_1)\ y\ \ (x_2, w_2) \in Q$$

Por ser T operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

Por ser Q operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, w_1 - w_2 \rangle \geq 0$$

Sumando estas dos desigualdades

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + w_1) - (y_2 + w_2) \rangle \geq 0$$

b.- Sean

$$(x_1, \lambda\, y_1)\ ;\ \ \ (x_2, \lambda\, y_2) \in \lambda\, T$$

Para un $\lambda \geq 0$ fijo y arbitrario
Entonces

$$(x_1, y_1)\ \ y\ \ \ (x_2, y_2) \in T$$

Por ser T operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

Multiplicamos por $\lambda \geq 0$

$$\langle x_1 - x_2, y_1\, \lambda - y_2\, \lambda \rangle \geq 0$$

c.- Sean

$$(x_1, y_1 + a)\ ;\ \ \ (x_2, y_2 + a) \in T + a$$

Para un $a \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario
Entonces

$$(x_1, y_1)\ y\ \ (x_2, y_2)\ \ \ \in T$$

Por ser T operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + a) - (y_2 + a) \rangle \geq 0$$

$\blacksquare$

Corolario 2.1.2 *Sea T un operador monótono estricto y Q un operador monótono. Entonces,*

a.- $T+Q$ es operador monótono estricto

b.- $\lambda\, T$ es operador monótono estricto, $\forall\ \lambda>0$

c.- $T+a$ es operador monótono estricto, $\forall\ a \in \mathbb{R}^n$

Demostración.

a.- Sean

$$(x_1, y_1+w_1)\ ;\ \ (x_2, y_2+w_2) \in T+Q\ \ /\ \ x_1 \neq x_2$$

Entonces

$$(x_1, y_1)\ y\ \ (x_2, y_2) \in T\ \ ;\ \ (x_1, w_1)\ y\ \ (x_2, w_2) \in Q$$

Por ser T operador monótono estricto

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle > 0$$

Por ser Q operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, w_1 - w_2 \rangle \geq 0$$

Sumando estas dos desigualdades

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + w_1) - (y_2 + w_2) \rangle > 0$$

b.- Sean

$$(x_1, \lambda\, y_1)\ ;\ \ (x_2, \lambda\, y_2) \in \lambda\, T\ \ /\ \ x_1 \neq x_2$$

Para un $\lambda>0$ fijo y arbitrario
Entonces

$$(x_1, y_1)\ \ y\ \ (x_2, y_2) \in T$$

Por ser T operador monótono estricto

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle > 0$$

Multiplicamos por $\lambda>0$

$$\langle x_1 - x_2, y_1\, \lambda - y_2\, \lambda \rangle > 0$$

c.- Sean

$$(x_1, y_1 + a)\ ; \quad (x_2, y_2 + a) \in T + a \ / \ x_1 \neq x_2$$

Para un $a \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario
Entonces

$$(x_1, y_1) \ y \ (x_2, y_2) \ \in T$$

Por ser T operador monótono estricto

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle > 0$$

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + a) - (y_2 + a) \rangle > 0$$

■

Observación 2.1.1 *Si T y Q son operadores monótonos. En general no se cumple, que $T - Q$ sea un operador monótono.*

Ejemplo 2.1.1 *T y Q operadores definidos:*

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto T(x) = x$$

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Q(x) = \begin{cases} 1\ ; & si\ x > 0 \\ 0\ ; & si\ x = 0 \end{cases}$$

T es monótono ya que

$$(x - y)^2 \geq 0$$

$$\langle x - y, x - y \rangle \geq 0$$

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0$$

Q es monótono. Sean x e y

i) Si $x>0$; $y>0$

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0$$

ii) Si $x = 0$; $y = 0$

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0$$

iii) Si $x>0$; $y = 0$

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle$$

Ahora hallemos el $dom(T-Q)$

$$dom(T-Q) = dom(T) \cap domQ = \mathbb{R}_{++} \neq \emptyset$$

Entonces

$$(T-Q)(x) = \begin{cases} x-1\,; & si\ x > 0 \\ 0\,; & si\ x = 0 \end{cases}$$

Para

$$x = \frac{1}{2}\,;\ \ T(x) = \frac{-1}{2}\ \ e\ \ y = 0\,;\ \ T(y) = 0$$

$$\langle 1/2 - 0; -1/2 - 0\rangle < 0$$

$$\langle x - y; T(x) - T(y)\rangle < 0$$

Por lo tanto

$$T - Q \text{ no es monótono.}$$

Definición 2.1.6 *Un operador* $T : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ *es llamado monótono maximal cuando*

1. T *es monótono*

2. *Si existe un operador monótono* $T' : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $T(x) \subset T'(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T(x) = T'(x)\ \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Teorema 2.1.4 *Si* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *es una función convexa. Entonces,* $\partial f : \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R})$ *es un operador monótono maximal*

Demostración. Por el Teorema 2.1.2 ∂f es un operador monótono
Demostremos que ∂f es maximal
Sea

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow p(\mathbb{R}^n)$$

Un operador monótono tal que

$$\partial f(x) \subset T(x)\ ;\ \ \forall\, x\ \in\ \mathbb{R}^n$$

Mostremos que

$$T(x) \subset \partial f(x)\ ;\ \ \forall\, x \in\ \mathbb{R}^n$$

Sea

$$y_0 \in T(x_0) \tag{2.1}$$

Considere

$$x_1 = prox_f(x_0 + y_0) \;\; e \;\; y_2 = prox_{f^*}(x_0 + y_0)$$

Por el Lema 1.3.2

$$x_0 + y_0 = y_1 + x_1 \;\; e \;\; f(x_1) + f^*(y_1) = \langle x_1, y_1 \rangle$$

Luego

$$x_0 - x_1 = y_1 - y_0 \tag{2.2}$$

Por el Teorema 1.3.11

$$y_1 \in \partial f(x_1) \;\; , \;\; x_1 \in \partial f^*(y_1)$$

Como

$$\partial f(x) \subset T(x) \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces

$$y_1 \in T(x_1) \tag{2.3}$$

De $(2.1), (2.3)$ y por ser T monótono

$$0 \leq \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0 \rangle$$

$$0 \leq - \langle x_0 - x_1, y_1 - y_0 \rangle$$

De (2.2)

$$0 \leq - \langle x_0 - x_1, y_1 - y_0 \rangle = - \|y_1 - y_0\|^2$$

$$0 \leq \|y_1 - y_0\|^2 \leq 0$$

Entonces

$$y_1 = y_0$$

De la igualdad anterior y por (2.2)

$$x_1 = x_0$$

Ya que

$$y_1 \in \partial f(x_1)$$

Tenemos

$$y_0 \in \partial f(x_0) \tag{2.4}$$

Como y_0 e x_0 son arbitrarios, de (2.1) y (2.4) tenemos

$$T(x) \subset \partial f(x) \; ; \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

$$T(x) = \partial f(x) \; ; \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

Por lo tanto

$$\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n) \text{ es un operador monótono maximal}$$

■

Corolario 2.1.3 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y convexa. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R})$ es un operador monótono maximal*

Demostración.
Por la Proposición 1.3.7 tenemos.

$$\partial f = \nabla f$$

Por el Teorema 2.1.4

$$\partial f \text{ es un operador monótono maximal}$$

Por lo tanto

$$\nabla f \text{ es un operador monótono maximal}$$

■

Corolario 2.1.4 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y estrictamente convexa. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono maximal estricto*

Demostración.
Por el Corolario (2.1.1)

$$\nabla f \text{ es un operador monótono estricto}$$

Por el Corolario (2.1.3)

$$\nabla f \text{ es un operador monótono maximal}$$

Por lo tanto

$$\nabla f \text{ es un operador monótono maximal estricto}$$

■

Teorema 2.1.5 *Sea T un operadores monótono maximal. Entonces,*

a.- λT es un operador monótono maximal ; $\forall\, \lambda > 0$

b.- $T + a$ es un operador monótono maximal ; $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$

Demostración.

a.- Mostremos que $\lambda\, T$ es monótono.
Por el Teorema 2.1.3 (b)

$$\lambda\, T \text{ es un operador monótono;} \quad \forall\, \lambda > 0$$

Mostremos que $\lambda\, T$ es maximal.
Sean

$$x \in \mathbb{R}^n \,,\ \lambda \,\in\, \mathbb{R}_{++}$$

Y

$$T' : \mathbb{R}^n \to p(\mathbb{R}^n)$$

Un operador monótono, tal que.

$$\lambda\, T(x) \subset T'(x)$$

Como λ>0

$$T(x) \subset \frac{T'(x)}{\lambda}$$

Por el Teorema 2.1.3 (b) , $\frac{T'(x)}{\lambda}$ es un operador monótono.
Por hipótesis T es un operador monótono maximal. Entonces,

$$T(x) = \frac{T'(x)}{\lambda}$$

$$\lambda\, T(x) = T'(x)$$

Por lo tanto.

$$\lambda T \text{ es un operador monótono maximal; } \forall\, \lambda > 0$$

b.- Mostremos que $T + a$ es monótono.
Por el Teorema 2.1.3 (c)

$$T + a \text{ es un operador monótono;} \quad \forall\, a \,\in\, \mathbb{R}^n$$

Mostremos que $T + a$ es maximal.
Sean

$$x \in \mathbb{R}^n \,,\ a \in \mathbb{R}^n$$

Y

$$T' : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$$

Un operador monótono, tal que.

$$T(x) + a \subset T^{'}(x)$$

$$T(x) \subset T^{'}(x) - a$$

Por el Teorema 2.1.3 (c) , $T^{'}(x) - a$ es un operador monótono.
Por hipótesis T es un operador monótono maximal. Entonces,

$$T(x) = T^{'}(x) - a$$

$$T(x) + a = T^{'}(x)$$

Por lo tanto.

$$T + a \text{ es un operador monótono maximal; } \forall\, a \in \mathbb{R}^n$$

■

Corolario 2.1.5 *Sea T un operador monótono maximal estricto. Entonces,*

a.- $\lambda\, T$ es un operador monótono maximal estricto ; $\forall\, \lambda > 0$

b.- $T + a$ es un operador monótono maximal estricto ; $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$

Demostración.

a.- Mostremos que $\lambda\, T$ es monótono estricto
Por el Corolario 2.1.2 (b)

$$\lambda\, T \text{ es un operador monótono estricto ; } \forall\, \lambda > 0$$

Mostremos que $\lambda\, T$ es maximal
La demostración es similar al Teorema 2.1.5 (a)
Por lo tanto

$$\lambda\, T \text{ es un operador monótono maximal estricto ; } \forall\, \lambda > 0$$

b.- Mostremos que $T + a$ es monótono estricto
Por el Corolario 2.1.2 (c)

$$T + a \text{ es un operador monótono estricto ; } \forall\, a \in \mathbb{R}^n$$

Mostremos que $T + a$ es maximal
La demostración es similar al Teorema 2.1.5 (b)
Por lo tanto

$$T + a \text{ es un operador monótono maximal estricto ; } \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^n$$

■

Observación 2.1.2 *Si T y Q son operadores monótonos maximales. En general no se cumple que $T+Q$ sea un operador monótono maximal.*

Ejemplo 2.1.2 *De la definición 1.3.18 tenemos*

$$I_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto I_C(x) = \begin{cases} 0 & ; \ si \ x \in C \\ +\infty \,; & si \ x \notin C \end{cases}$$

Por el ejemplo 1.3.3

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{s \in \mathbb{R}^n ; \langle s, y - x\rangle \leq 0;\ \forall\, y \in C\}, & si \quad x \in C \\ \emptyset & si \quad x \notin C \end{cases}$$

Para

$$C = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x^2 \leq \lambda\}$$

$$T = \partial I_C : \mathbb{R}^2 \to p(\mathbb{R}^2)$$

En $(0,0) \in C$

$$\partial I_c(0,0) = \{0\} \times \mathbb{R}_-$$

Para

$$D = \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$Q = \partial I_D : \mathbb{R}^2 \to p(\mathbb{R}^2)$$

En $(0,0) \in D$

$$\partial I_D(0,0) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Por otro lado

$$dom(T+Q) = domT \cap domQ = C \cap D = \{(0,0)\}$$

$$(T+Q)(0,0) = T(0,0) + Q(0,0) = \partial I_C(0,0) + \partial I_D(0,0) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Para

$$E = \{(0,0)\}$$

$$R = \partial I_E : \mathbb{R}^2 \to p(\mathbb{R}^2)$$

En $(0,0) \in E$

$$\partial I_E(0,0) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Entonces

$$(T+Q)(0,0) = \{0\} \times \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = R(0,0)$$

Por lo tanto

$$T + Q \text{ no es operador monótono maximal}$$

Teorema 2.1.6 *Sean* $T_1 : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *y* $T_2 : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *Operadores Monótonos Maximales tal que* $(domT_1) \cap (domT_2)^0 \neq \emptyset$

i) Entonces $T_1 + T_2$ *es un Operador Monótono Maximal.*
En adición, tenemos

ii) Si T_2 *es el subdiferencial de una función convexa propia cerrada y* T_2 *es sobreyectivo, entonces* $T_1 + T_2$ *es Sobreyectivo*

Demostración. Ver [2], Corolario 2.2. ■

Corolario 2.1.6 *Si.* T *es un operador monótono maximal estricto,* Q *es un operador monótono maximal y* $(dom(T)) \cap (dom(Q)) \neq \emptyset$. *Entonces,* $T + Q$ *es un operador monótono maximal estricto.*

Demostración.
Por el Corolario 2.1.2 (a)

$$T + Q \text{ es un operador monótono estricto}$$

Por el Teorema 2.1.6

$$T + Q \text{ es un operador manótono maximal}$$

Por lo tanto

$$T + Q \text{ es un operador monótono maximal estricto}$$

■

Definición 2.1.7 *Un punto* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *es llamado cero de* $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *cuando* $0 \in T(\bar{x})$

Definición 2.1.8 *Dado* $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *un operador* $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$*es definido por la siguiente relación*

$$y \in T^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in T(y)$$

Definición 2.1.9 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono. El dominio de T es el siguiente conjunto:*

$$dom(T) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ T(x) \neq \emptyset\}$$

Definición 2.1.10 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monńotono. La imagen de T es el siguiente conjunto:*

$$R(T) = \bigcup_{x \in dom(T)} T(x)$$

2.2 Operadores Paramonótonos

Definición 2.2.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador. Diremos que T es paramonótono cuando es monótono y cumple la condición,*

$$\langle T(x) - T(y), x - y\rangle = 0 \Rightarrow T(x) = T(y)$$

La extensión de esta definición para operadores de punto-conjunto es:

Definición 2.2.2 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador. Diremos que T es paramonótono cuando es monótono y para $u \in T(x)$, $v \in T(y)$*

$$\langle u - v, x - y\rangle = 0 \Rightarrow u \in T(y),\ v \in T(x)$$

Teorema 2.2.1 *Sea $T = \partial f$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, T es un operador paramonótono*

Demostración. Por el Teorema 2.1.2, ∂f es un operador monótono.
Sean

$$x, y \ \in \ \mathbb{R}^n / \langle u - v, x - y\rangle = 0$$

Con

$$u \ \in \ \partial f(x)\ , \quad v \ \in \ \partial f(y)$$

Paso 1 Demostremos que $u \in \partial f(y)$

Definamos la función

$$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \bar{f}(z) = f(z) + \langle u, x - z\rangle \tag{2.5}$$

Por el Ejemplo 1.3.1

$$g(z) = \langle u, x - z\rangle \ \ es \ \ convexa \tag{2.6}$$

Por hipótesis

$$f(z) \ es \ \ convexa \tag{2.7}$$

De (2.6), (2.7) y por el teorema 1.3.3

$$\bar{f} = f + g \text{ es convexa}$$

Entonces, podemos hallar la subdiferencial de $\bar{f}$ en z

$$\partial\bar{f}(z) = \partial f(z) - \{u\} = \{w - u/w \in \partial f(z)\} \tag{2.8}$$

Para $z = x$

$$\partial\bar{f}(x) = \partial f(x) - \{u\} = \{w - u/w \in \partial f(x)\} \tag{2.9}$$

De (2.5) cuando $z = x$ tenemos

$$\bar{f}(x) = f(x) \tag{2.10}$$

Por hipotesis $u \in \partial f(x)$, entonces de (2.9) tenemos

$$0 \in \partial\bar{f}(x) = \partial f(x) \tag{2.11}$$

Por otro lado, de la hipótesis tenemos

$$\langle u - v, x - y\rangle = 0$$

$$\langle u, x - y\rangle = \langle v, x - y\rangle \tag{2.12}$$

Como $u \in \partial f(x)$

$$f(x) - f(y) \leq \langle u, x - y\rangle \tag{2.13}$$

Como $v \in \partial f(x)$

$$\langle v, x - y\rangle \leq f(x) - f(y) \tag{2.14}$$

De (2.12), (2.13) y (2.14) tenemos

$$f(x) - f(y) \leq \langle u, x - y\rangle = \langle v, x - y\rangle \leq f(x) - f(y) \tag{2.15}$$

$$f(x) - f(y) = \langle u, x - y\rangle$$

$$f(x) = f(y) + \langle u, x - y\rangle \tag{2.16}$$

De (2.5) tenemos

$$\bar{f}(x) = f(y) + \langle u, x - y\rangle \tag{2.17}$$

De (2.10), (2.16) y (2.17) tenemos

$$\bar{f}(x) = f(x) = \bar{f}(y)$$

De (2.11) $0 \in \partial\bar{f}(x) = \partial f(x)$, entonces

$$0 \in \partial\bar{f}(y)$$

De (2.8)

$$w - u = 0 \ \in \ \partial\bar{f}(y) \ / \ w \in \partial f(y)$$

Como $w = u$, tenemos

$$u \in \partial f(y)$$

Paso 2 Demostremos que $v \in \partial f(x)$
Definamos la función

$$\bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \bar{g}(z) = f(z) + \langle v, y - z \rangle \tag{2.18}$$

Por el Ejemplo 1.3.1

$$g(z) = \langle v, y - z \rangle \;\; es \;\; convexa \tag{2.19}$$

Por hipótesis

$$f(z) \; es \;\; convexa \tag{2.20}$$

De (2.19), (2.20) y por el teorema 1.3.3

$$\bar{g} = f + g \text{ es convexa}$$

Entonces, podemos hallar la subdiferencial de $\bar{g}$ en z

$$\partial \bar{g}(z) = \partial f(z) - \{v\} = \{w - v / w \in \partial f(z)\} \tag{2.21}$$

Para $z = y$

$$\partial \bar{g}(y) = \partial f(y) - \{v\} = \{w - v / w \in \partial f(y)\} \tag{2.22}$$

De (2.18) cuando $z = y$ tenemos

$$\bar{g}(y) = f(y) \tag{2.23}$$

Por hipotesis $v \in \partial f(y)$, entonces de (2.22) tenemos

$$0 \in \partial \bar{g}(y) = \partial f(y) \tag{2.24}$$

De (2.15)

$$f(x) - f(y) \leq \langle u, x - y \rangle = \langle v, x - y \rangle \leq f(x) - f(y)$$

$$f(x) - f(y) = \langle v, x - y \rangle$$

$$f(y) = f(x) + \langle v, y - x \rangle \tag{2.25}$$

De (2.18) tenemos

$$\bar{g}(x) = f(x) + \langle v, y - x \rangle \tag{2.26}$$

De (2.24), (2.25) y (2.26) tenemos

$$\bar{g}(y) = f(y) = \bar{g}(x)$$

De (2.24)

$$0 \in \partial \bar{g}(y) = \partial f(y)$$

Entonces

$$0 \in \partial \bar{g}(x)$$

De (2.21)

$$w - v = 0 \ \in \ \partial \bar{g}(x) \ / \ w \in \partial f(x)$$

Como $w = v$ tenemos

$$v \in \partial f(x)$$

■

Proposición 2.2.1 *Si $T_1 : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ y $T_2 : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ son operadores paramonótonos, tal que $dom(T_1) \cap dom(T_2) \neq \emptyset$. Entonces, $T_1 + T_2$ es un operador paramonótono.*

Demostración. Siendo T_1 e T_2 operadores monótonos, entonces por el Teorema 2.1.3 (a) , $T_1 + T_2$ es un operador monótono
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle u - v, x - y \rangle = 0 \ \ con \ \ u \in (T_1 + T_2)(x) \ , \ \ v \in (T_1 + T_2)(y)$$

Mostremos que $u \in (T_1 + T_2)(y)$ e $v \in (T_1 + T_2)(x)$
Para

$$u \in (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

Existen

$$u_1 \in T_1(x) \ e \ \ u_2 \in T_2(x) \ \ / \ \ u = u_1 + u_2$$

Para

$$v \in (T_1 + T_2)(y) = T_1(y) + T_2(y)$$

Existen

$$v_1 \in T_1(y) \ e \ \ v_2 \in T_2(y) \ \ / \ \ v = v_1 + v_2$$

Por otro lado, como

$$\langle u - v, x - y \rangle = 0$$

Entonces

$$\langle u_1 + u_2 - (v_1 + v_2), x - y \rangle = 0$$

$$\langle u_1 - v_1, x - y \rangle + \langle u_2 - v_2, x - y \rangle = 0$$

Como T_1 y T_2 son operadores monótonos

$$\langle u_1 - v_1, x - y \rangle \geq 0 \ \ ; \ \ \ \langle u_2 - v_2, x - y \rangle \geq 0$$

$$\langle u_1 - v_1, x - y \rangle = 0 \ \ ; \ \ \ \langle u_2 - v_2, x - y \rangle = 0$$

Más aun T_1 y T_2 son paramonótonos, entonces

$$u_1 \in T_1(y)\ ,\quad u_2 \in T_2(y)\ ,\quad v_1 \in T_1(x) \quad e \quad v_2 \in T_2(x)$$

Luego

$$u = u_1 + u_2 \in T_1(y) + T_2(y) = (T_1 + T_2)(y) \quad e \quad v = v_1 + v_2 \in T_1(x) + T_2(x) = (T_1 + T_2)(x)$$

Por lo tanto

$$T_1 + T_2 \text{ es paramonótono.}$$

■

2.3 Operadores Pseudomonótonos

Definición 2.3.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador tal que $dom(T)$ es convexo y cerrado. Diremos que T es pseudomonótono si satisface la siguiente condición:*

Si para toda sucesión $\{x_k\} \subset dom(T)$ convergiendo en el punto $\bar{x} \in dom(T)$ y todo $u_k \in T(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\limsup_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Entonces, existe $\bar{u} \in T(\bar{x})$ tal que

$$\langle \bar{u}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - y\rangle \ ; \quad \forall\, y \in dom(T).$$

Proposición 2.3.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa.*
Entonces, $T = \partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador pseudomonótono.

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $dom(\partial f)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \ \in dom(\partial f)$$

Y

$$\limsup_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Donde

$$u_k \in \partial f(x_k)$$

Por definición de subdiferencial, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\langle u_k, y - x_k\rangle \leq f(y) - f(x_k)\ ; \quad \forall\, y \in dom(\partial f)$$

$$\langle u_k, x_k - y\rangle \geq f(x_k) - f(y)$$

$$\liminf_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - y\rangle \geq \liminf_{k\to\infty}[f(x_k) - f(y)] = f(\bar{x}) - f(y) \tag{2.27}$$

Por ser f convexa y por el Teorema 1.3.7

$$\exists\ \bar{u} \in \partial f(\bar{x})\ /\quad f(y) \leq f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, y - \bar{x}\rangle$$

$$\langle \bar{u}, \bar{x} - y\rangle \leq f(\bar{x}) - f(y) \tag{2.28}$$

Luego de (2.27) y (2.28)

$$\exists\ \bar{u}\ \in\ \partial f(\bar{x})\ /\quad \langle \bar{u}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - y\rangle$$

Por lo tanto

$$T = \partial f \quad \text{es pseudomonótono}$$

■

Ejemplo 2.3.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador monótono continuo. Entonces, T es un ejemplo de operador pseudomonótono que no es el subdiferencial de una función convexa.*

Proposición 2.3.2 *Sea T_1 , $T_2 : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ operadores pseudomonótonos tal que $dom(T_1) \cap dom(T_2) \neq \emptyset$. Entonces $T_1 + T_2$ es pseudomonótono.*

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $dom(T_1 + T_2)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}\ \in\ dom(\partial f)$$

Y

$$\limsup_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Donde

$$u_k \in (T_1 + T_2)(x_k)$$

Entonces, existen

$$a_k \in T_1(x_k)\ e\quad b_k \in T_2(x_k)\ \ /\ \ u_k = a_k + b_k$$

Como

$$\limsup_{k\to\infty} \langle u_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Tenemos

$$\limsup_{k\to\infty} \langle a_k + b_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \langle a_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \langle a_k + b_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

$$\limsup_{k\to\infty} \langle b_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \langle a_k + b_k, x_k - \bar{x}\rangle \leq 0$$

Como T_1 y T_2 son pseudomonótonos, existen

$$\bar{a} \in T_1(\bar{x}) \;\; e \;\; \bar{b} \in T_2(\bar{x})$$

Tal que

$$\langle \bar{a}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle a_k, x_k - y\rangle$$

$$\langle \bar{b}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle b_k, x_k - y\rangle$$

Para todo $y \in dom(T_1 + T_2)$ Sumando estas dos últimas desigualdades, tenemos

$$\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle a_k + b_k, x_k - y\rangle$$

Como

$$\bar{u} = \bar{a} + \bar{b} \in T_1(\bar{x}) + T_2(\bar{x}) = (T_1 + T_2)(\bar{x})$$

Entonces

$$\langle \bar{u}, \bar{x} - y\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle a_k + b_k, \bar{x} - y\rangle \quad \forall\, y \in \; dom(T_1 + T_2)$$

Por lo tanto

$$T_1 + T_2 \text{ es pseudomonótono}$$

■

Capítulo 3

Función y Distancia de Bregman

3.1 Distancia

Definición 3.1 *Sea X un conjunto, se define distancia o métrica como cualquier función binaria $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:*

1. $d(a, b) \geq 0$; $\forall\, a, b \in X$
2. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
3. $d(a, b) = d(b, a)$; $\forall a, b \in X$
4. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$; $\forall a, b, c \in X$
5. $d(a, a) = 0$; $\forall a \in X$

Un espacio métrico es un par(X, d) donde $X \neq \emptyset$ y d es una función real definida en $X \times X$.

Ejemplos

i) $(\mathbb{R}^n, d)$ Es un Espacio Métrico con métrica d definida
$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$

ii) $(\mathbb{R}^n, d)$ Es un espacio métrico con métrica d definida
$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i)|$

iii) $(\mathbb{R}^n, d)$ Es un Espacio Métrico con métrica d definida
$d(x, y)$=máx$\{|(x_i - y_i)|\}$

3.1.1 Cuasidistancia

Definición 3.2 *Sea X un conjunto, se define Cuasidistancia o Medida divergente como cualquier función binaria $D : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:*

1. $D(x, y) \geq 0 \; ; \; \forall \; x, y \in X$
2. $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Ejemplos

i) $D(x, y) = (x - y)^2$ es una cuasidistancia, para $X = \mathbb{R}$

ii) $D(x, y) = log\frac{x}{y}$ es una cuasidistancia, para $X = \mathbb{R}_{++}$

iii) $D(x, y) = xlog\frac{x}{y}$ es una cuasidistancia, para $X = \mathbb{R}_{++}$

Entre las cuasidistancias que son usando para generalizar el método de punto proximal, están las llamadas distancias de Bregman y las $\varphi-$ divergencias, ambas son casos particulares de las llamadas medidas divergentes.

Definición 3.1.1 *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, una función $D : S \times S \to \mathbb{R}$ es llamada medida divergente en S si:*

1. $\forall \, x, \; y \in S \; D(x, y) \geq 0$;
2. *Si* $\{x_k\} \subset S$ *y* $x \in S \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} D(x, x_k) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$
3. *Los conjuntos de nivel* $\Gamma_1(y, v) = \{x \in S : D(x, y) \leq v\}$ *son acotados para todo* $y \in S$ *y todo* $v > 0$;
4. *Los conjuntos de nivel* $\Gamma_2(x, v) = \{y \in S : D(x, y) \leq v\}$ *son acotados para todo* $x \in S$ *y todo* $v > 0$

Observación: Toda medida divergente es una cuasi distancia, ya que podemos tomar a $\{y\} = \{x_k\}$ sucesión constante de (2) $\lim\limits_{k \to \infty} D(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x = y$ entonces $x = y$

Hay dos casos particulares de medida divergencia que son Φ : divergente y la Distancia De Bregman (la cual es de nuestro interés)

3.1.2 Función y Distancia de Bregman

Definición 3.1.2 *Sea $C^0 \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, C un conjunto cerrado. Consideremos una función real convexo sobre C*

$$h : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$D_h : C \times C^0 \to \mathbb{R}$$

Definido por

$$D_h(x,y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), (x-y) \rangle$$

h es llamado una función de bregman con zona C^0 (y D_h la distancia de Bregman inducida por h) si se cumpla las siguientes condiciones:

B1: *h es continuamente diferenciable en C^0*

B2: *h es estrictamente convexa y continúa en C*

B3: *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos de nivel parcial*
$\Gamma_1(y,\alpha) = \{x \in C : D_h(x,y) \leq \alpha\}$, $\Gamma_2(x,\alpha) = \{y \in C^0 : D_h(x,y) \leq \alpha\}$
están acotados para todo $y \in C^0$, todo $x \in C$ respectivamente

B4: *Si $\{y_k\} \subset C^0$ converge a y^* entonces $\lim\limits_{k\to\infty} D_h(y^*, y_k) = 0$*

B5: *Si $\{x_k\} \subset C$ y $\{y_k\} \subset C^0$ son sucesiones tal que $\{x_k\}$ están acotados, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y^*$ y $\lim\limits_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) = 0$ entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = y^*$*

Existen dos subclases de funciones de Bregman que requieren de condiciones adicionales a las mencionadas anteriormente. Las cuales se denominan coerciva en la frontera y coerciva en la zona.

Decimos que una función de Bregman h es coerciva en la frontera si satisface la siguiente condición:
B6: *Si $\{y_k\} \subset C^0$ y tal que $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y \in \partial C^0$, entonces*

$$lim_{k\to\infty} \langle \nabla h(y_k), x - y_k \rangle = -\infty; \quad \forall \ x \in C^0$$

Decimos que h es zona coerciva si satisface la siguiente condición:
B7: *Para todo $y \in \mathbb{R}^n$ existe $x \in C^0$ tal que $\nabla h(x) = y$.*

Mostremos algunos ejemplos de función de bregman con su respectiva distancia de Bregman:

Ejemplo 3.1.1 *Sea* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*; tal que* $h(x) = \|x\|^2$*. En este caso* $D_h(x,y) = \|x-y\|^2$

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*; tal que* $h(x) = x^t M x$*, con* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simetrica y definida positiva. En este caso* $D_h(x,y) = (x-y)^t M(x-y) = \|x-y\|_M^2$

Ejemplo 3.1.3 $C = \mathbb{R}^n_{++}$; $\quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$*. Extendido con continuidad en la frontera de* $\mathbb{R}^n_{++}$ *usando la convención de que* $0log0 = 0$*. En este caso* $D_h(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i log\frac{x_i}{y_i} + y_i - x_i\right)$

Ejemplo 3.1.4 $C = \mathbb{R}^n_{++}$; $\quad h(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^\alpha - x_i^\beta\right)$*. Con* $\alpha \geq 1$*,* $\beta \in (0,1)$*.*

Para $\alpha = 2$ *e* $\beta = \frac{1}{2}$ *, tenemos* $D_h(x,y) = \|x-y\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i}\right)^2$

Y para $\alpha = 1$ *e* $\beta = \frac{1}{2}$ *, tenemos* $D_h(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i}\right)^2$

Lema 3.1.1 *(Desigualdad Triangular Estricta)*
Sea C^0 *un conjunto abierto y convexo, y* $h : C \to \mathbb{R}$ *una función convexa que satisface las Siguientes condiciones:*

1. *h es estrictamente convexa y continua en C.*
2. *h es continuamente diferenciable en* C^0*.*

Si $x \in C$*,* $y \in C^0$ *y w es una combinación convexa propia de x e y, esto es,*

$$w = (1-\alpha)x + \alpha y$$

Con $\alpha \in (0,1)$*, entonces*

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) \leq D_h(x,y).$$

Demostración.
Por hipótesis

$$w = \alpha x + (1-\alpha)y \tag{3.1}$$

Con

$$\alpha \in (0,1)$$

Como C^0 es convexo, entonces

$$w \in C^0$$

Como h es Convexa y diferenciable en C^0, entonces por el

Teorema 2.1.1 ∇h es un Operador Monótono, es decir

$$\langle \nabla h(x) - \nabla h(y), x - y\rangle \geq 0 \ ; \ \forall\, x, y \in C^0$$

En particular para $w, y \in C^0$

$$0 \leq \langle w - y, \nabla h(w) - \nabla h(y)\rangle$$

$$0 \leq \langle w - y, \nabla h(w) - \nabla h(y)\rangle = \langle w - y, \nabla h(w)\rangle - \langle w - y, \nabla h(y)\rangle$$

$$\langle w - y, \nabla h(y)\rangle \leq \langle w - y, \nabla h(w)\rangle \tag{3.2}$$

Remplazando (3.1) en (3.2)

$$\langle \alpha x + (1-\alpha)y - y, \nabla h(y)\rangle \leq \langle \alpha x + (1-\alpha)y - y, \nabla h(w)\rangle$$

$$\langle \alpha(x - y), \nabla h(y)\rangle \leq \langle \alpha(x - y), \nabla h(w)\rangle$$

Como $\alpha \in (0,1)$

$$\langle x - y, \nabla h(y)\rangle \leq \langle x - y, \nabla h(w)\rangle$$

Ya que $(1-\alpha) \in (0,1)$

$$-(1-\alpha)\langle x - y, \nabla h(w)\rangle \leq -(1-\alpha)\langle x - y, \nabla h(y)\rangle \tag{3.3}$$

Por otro lado

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) = h(x) - h(w) - \langle \nabla h(w), x - w\rangle + h(w) - h(y) - \langle \nabla h(y), w - y\rangle$$

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(w), x - \alpha x - (1-\alpha)y\rangle - \langle \nabla h(y), \alpha x + (1-\alpha)y - y\rangle$$

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) = h(x) - h(y) - (1-\alpha)\langle \nabla h(w), x - y\rangle - \alpha\langle \nabla h(y), x - y\rangle$$

De (3.3)

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) \leq h(x) - h(y) - (1-\alpha)\langle \nabla h(y), x - y\rangle - \langle \nabla h(y), x - y\rangle$$

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) \leq h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y\rangle$$

$$D_h(x,w) + D_h(w,y) \leq D_h(x,y)$$

■

Lema 3.1.2 *Sea C^0 un conjunto abierto y convexo, y $h : C \to \mathbb{R}$ una función convexa que satisface las Siguientes condiciones:*

1. h es estrictamente convexa y continua en C.

2. h es continuamente diferenciable en C^0.

Si $\{x_k\}, \{y_k\}$ son sucesiones en C^0

Tales que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad , \quad \lim_{k\to\infty} y_k = y, \quad con \ y \neq x,$$

Entonces

$$\liminf_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) > 0.$$

Demostración.

Definamos

$$z_k = \frac{1}{2}(x_k + y_k) \ ; \ \ \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Por ser C^0 convexo

$$z_k \in C^0 \ ; \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Por (B_2), h es estrictamente convexa

$$h(y_k) + \langle \nabla h(y_k), z_k - y_k \rangle \leq h(z_k) \tag{3.5}$$

Remplazando (3.4) en (3.5)

$$h(y_k) + \left\langle \nabla h(y_k), \frac{x_k + y_k}{2} - y_k \right\rangle \leq h\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)$$

$$-h\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) \leq -h(y_k) - \left\langle \nabla h(y_k), \frac{x_k + y_k}{2} - y_k \right\rangle$$

$$\frac{h(x_k) + h(y_k)}{2} - h\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) \leq \frac{h(x_k) + h(y_k)}{2} - h(y_k) - \left\langle \nabla h(y_k), \frac{x_k + y_k}{2} - y_k \right\rangle$$

$$\frac{h(x_k) + h(y_k)}{2} - h\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(h(x_k) - h(y_k) - \langle \nabla h(y_k), x_k - y_k \rangle\right)$$

$$\frac{h(x_k) + h(y_k)}{2} - h\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2} D_h(x_k, y_k)$$

Tomando limite y por la continuidad de (B_2)

$$\frac{h(x)}{2} + \frac{h(y)}{2} - h\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \liminf_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) \tag{3.6}$$

De (B_2), h es estrictamente convexa y $x \neq y$, entonces

$$h\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(y)$$

$$0 < \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(y) - h\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \tag{3.7}$$

Remplazando (3.7) en (3.6)

$$0<\frac{h(x)}{2}+\frac{h(y)}{2}-h\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\liminf_{k\to\infty}D_h(x_k,y_k)$$

$$0<\liminf_{k\to\infty}D_h(x_k,y_k)$$

■

Teorema 3.1.1 *Sea C^0 un conjunto abierto y convexo, y $h: C \to \mathbb{R}$ una función convexa que satisface las Siguientes condiciones:*

1. h es estrictamente convexa y continua en C.

2. h es continuamente diferenciable en C^0.

Si $\{x_k\},\{y_k\}$ son sucesiones en C^0 tales que

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_k,y_k)=0,$$

y una de las sucesiones converge, entonces la otra sucesión también converge para el mismo punto.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que si una de las sucesiones converge la otra no converge, o no converge al mismo punto.
Entonces existe algún $0<\epsilon$ y una subsucesión de índices $\{k_j\}$ satisfaciendo.

$$\epsilon<\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|$$

Supongamos primero que

$$\lim_{k\to\infty} y_k=y$$

Luego

$$0<\epsilon<\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|$$

$$0<\frac{\epsilon}{\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|}<1$$

Expresando $\bar{x}_j$ como una combinación convexa propia de x_{k_j} e y_{k_j}

$$\bar{x}_j=\frac{\epsilon}{\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|}x_{k_j}+\left(1-\frac{\epsilon}{\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|}\right)y_{k_j}$$

$$\bar{x}_j=y_{k_j}+\frac{\epsilon}{\left\|x_{k_j}-y_{k_j}\right\|}\left(x_{k_j}-y_{k_j}\right) \tag{3.8}$$

Por ello

$$\{\bar{x}_j\}\subset C^0$$

Del Lema 3.1.1

$$D_h(x_{k_j},\bar{x}_j)+D_h(\bar{x}_j,y_{k_j})\leq D_h(x_{k_j},y_{k_j})$$

Así

$$D_h(\bar{x}_j, y_{k_j}) \le D_h(x_{k_j}, y_{k_j}) \tag{3.9}$$

Como

$$\{D_h(x_{k_j}, y_{k_j})\} \subset \{D_h(x_k, y_k)\}$$

Y por hipótesis tenemos

$$\lim_{j\to\infty} D_h(x_{k_j}, y_{k_j}) = 0 \tag{3.10}$$

Tomando limite en (3.9)

$$\lim_{j\to\infty} 0 \le \lim_{j\to\infty} D_h(\bar{x}_j, y_{k_j}) \le \lim_{j\to\infty} D_h(x_{k_j}, y_{k_j})$$

De (3.10)

$$0 \le \lim_{j\to\infty} D_h(\bar{x}_j, y_{k_j}) \le 0$$

$$\lim_{j\to\infty} D_h(\bar{x}_j, y_{k_j}) = 0 \tag{3.11}$$

De (3.8)

$$\left\|\bar{x}_j - y_{k_j}\right\| = \epsilon \tag{3.12}$$

$$\|\bar{x}_j\| = \left\|\bar{x}_j - y_{k_j} + y_{k_j}\right\| \le \left\|\bar{x}_j - y_{k_j}\right\| + \left\|y_{k_j}\right\|$$

De (3.12)

$$\|\bar{x}_j\| \le \epsilon + \left\|y_{k_j}\right\| \tag{3.13}$$

Como $\{y_k\}$ es convergente y $\{y_{k_j}\} \subset \{y_k\}$, entonces

$$\{y_{k_j}\} \text{ esta acotada}$$

Es decir

$$\exists M>0 \ / \ \left\|y_{k_j}\right\| \le M \tag{3.14}$$

Remplazando (3.14) en (3.13)

$$\|\bar{x}_j\| \le \epsilon + \left\|y_{k_j}\right\| \le \epsilon + M$$

Entonces

$$\{\bar{x}_j\} \text{ esta acotada}$$

Por ello existe una subsucesión $\{\bar{x}_{j_i}\} \subset \{\bar{x}_j\}$ convergente, es decir

$$\lim_{i\to\infty} \bar{x}_{j_i} = \bar{x} \tag{3.15}$$

Además

$$\{\left\|\bar{x}_{j_i} - y_{k_{j_i}}\right\|\} \subset \{\left\|\bar{x}_j - y_{k_j}\right\|\}$$

Entonces, de (3.12)

$$\left\|\bar{x}_{j_i} - y_{k_{j_i}}\right\| = \epsilon \tag{3.16}$$

Por hipótesis

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{k_{j_i}} = y \tag{3.17}$$

Tomando limite a (3.16)

$$\lim_{i\to\infty} \left\|\bar{x}_{j_i} - y_{k_{j_i}}\right\| = \epsilon$$

De (3.15) y (3.17)

$$\|\bar{x} - y\| = \epsilon$$

Entonces

$$\bar{x} \neq y \tag{3.18}$$

De (3.15), (3.17), (3.18) y por el Lema 3.1.2

$$0 < \lim_{i\to\infty} D_h(\bar{x}_{j_i}, y_{k_{j_i}})$$

Como $\{D_h(\bar{x}_{j_i}, y_{k_{j_i}})\} \subset \{D_h(\bar{x}_j, y_{k_j})\}$ y de (3.11) tenemos

$$\lim_{i\to\infty} D_h(\bar{x}_{j_i}, y_{k_{j_i}}) = 0$$

De modo que

$$0 < \lim_{i\to\infty} D_h(\bar{x}_{j_i}, y_{k_{j_i}}) = 0$$

$$0 < 0$$

Lo que es una contradicción

Admitiendo que la sucesión $\{x_k\}$ converge, obtenemos análogamente, una contradicción.

Por lo tanto, si una sucesión converge, la otra sucesión converge al mismo punto. ∎

Proposición 3.1.1 *Toda distancia de Bregman $D_h(x,y)$ es una cuasidistancia*

Demostración.

(i) $D_h(x,y) \geq 0$.

Sean $x \in \overline{S}$ e $y \in S$,
Como h es convexa

$$h(x) \geq h(y) + \langle \nabla h(y), x - y \rangle ,$$

Entonces,

$$h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$D_h(x, y) \geq 0$$

(ii) $D_h(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$

Sean $x \in C, y \in C^0$.

Supongamos que $x \neq y$, Por ser h estrictamente convexa en C

$$h(x) - h(y) > \langle \nabla h(y), x - y \rangle$$

$$h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle > 0 \tag{3.19}$$

Por hipótesis

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle = 0 \tag{3.20}$$

De (3.19) y (3.20)

$$0 > 0$$

Contradicción, por lo tanto

$$x = y$$

Si $x = y$ entonces $D_h(x, y) = 0$

$$D_h(x, y) = D_h(x, x) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(x), x - x \rangle = 0$$

■

Observación.- En general toda distancia de Bregman no es una distancia. Veremos 2 ejemplos. Donde en el primer ejemplo mostraremos que no cumple la desigualdad triangular y en el segundo ejemplo no cumple la simetría.

Ejemplo 1

Sean $C^0 = \mathbb{R}$ e $C = \mathbb{R}$
Definamos

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = x^2$$

$$D_h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto D_h(x, y) = (x - y)^2$$

Donde h es una función de Bregman y D_h es la distancia de Bregman inducida por h ya que cumple las condiciones B1-B5.

D_h no cumple la desigualdad triangular.

$$D_h(x, y) \leq D_h(x, z) + D_h(z, y)$$

Para $x = 5$; $y = 2$ y $z = 3$

$$(x - y)^2 \leq (x - z)^2 + (z - y)^2$$

$$(x - y)^2 \leq (x - z)^2 + (z - y)^2$$

$$(5 - 2)^2 \leq (5 - 3)^2 + (3 - 2)^2$$

$$3^2 \leq 2^2 + 1^2$$

$$9 \leq 5$$

Contradicción, entonces

$$D_h(5, 2) \not\leq D_h(5, 3) + D_h(3, 2)$$

Ejemplo 2

Sean $C^0 = \mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, $C = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ Definamos

$$h : C \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = xlogx$$

Extendida con continuidad en $\partial\mathbb{R}_+$, con la condición que $0\ log\ 0 = 0$ en este caso

$$D_h : C \times C^0 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto D_h(x, y) = xlog\frac{x}{y} + y - x$$

h es función de Bregman y D_h es la distancia de Bregman inducida por h ya que cumple las condiciones B1-B5

D_h no es simétrica

Para $x = y \quad y \quad y = 2$

$$D_h(1,2) = 1log\frac{1}{2} + 2 - 1 = 1 + log\frac{1}{2}$$

$$D_h(2,1) = 2log2 + 1 - 2 = -1 + log4$$

$$1 + log\frac{1}{2} \neq -1 + log4$$

$$D_h(1,2) \neq D_h(2,1)$$

Proposición 3.1.2 *Si h es una función de Bregman con zona* C^0 *, entonces* $D_h(x,y)$ *es cerrada.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L_D(\alpha) = \{(x,y) \in C \times C^0 / D_h(x,y) \leq \alpha\} \tag{3.21}$$

Demostremos que $L_D(\alpha)$ es cerrado

Sea

$$(x,y) \in \overline{L_D(\alpha)}$$

Entonces

$$\exists \ \{(x_k, y_k)\} \subset L_D(\alpha)$$

Tal que

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x,y) \tag{3.22}$$

$$(x_k, y_k) \in L_D(\alpha); \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

Luego de (3.21)

$$D_h(x_k, y_k) \leq \alpha$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) \leq \alpha \tag{3.23}$$

Por definición de distancia de Bregman

$$D_h(x_k, y_k) = h(x_k) - h(y_k) - \langle \nabla h(y_k), (x_k - y_k) \rangle$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} (h(x_k) - h(y_k) - \langle \nabla h(y_k), (x_k - y_k) \rangle \tag{3.24}$$

Por ser h continua en C y continuamente diferenciable en C^0 y de (3.22)

$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = h(x) \; ; \quad \lim_{k\to\infty} h(y_k) = h(y) \text{ y } \lim_{k\to\infty} \nabla h(y_k) = \nabla h(y)$$

Remplazando en (3.24)

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_k, y_k) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle = D_h(x, y) \tag{3.25}$$

De (3.23) y (3.25)

$$D_h(x, y) \leq \alpha$$

Entonces de (3.21)

$$(x, y) \in L_D(\alpha)$$

Luego

$$L_D(\alpha) \;\; es \;\; cerrado$$

Por la proposición (1.3.9)

$$D_h(x, y) \;\; es \;\; cerrado$$

■

Proposición 3.1.3 *Si h es una función de Bregman con zona C^0, entonces $D_h(x, y)$ es propia.*

Demostración.
Como

$$dom(h) \neq \emptyset$$

Entonces

$$dom(D_h) \neq \emptyset$$

Ya que

$$D_h(x, y) \geq 0 \; ; \;\; \forall \;\; (x, y) \in C \times C^0$$

Entonces

$$D_h(x, y) > -\infty$$

Por lo tanto

$$dom(D_h) \neq \emptyset \;\; y \;\; D_h(x, y) > -\infty$$

■

Proposición 3.1.4 *Si h es una función de Bregman con zona C^0 entonces:*

a) $D_h(x, y) - D_h(x, z) - D_h(z, y) = \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), z - x \rangle \; ; \forall \; x \in C, \forall \; z, y \in C^0$

b) $\nabla_x D_h(x, y) = \nabla h(x) - \nabla h(y); \quad \forall \; x, y \in C^0$

c) $D_h(., y)$ *es estrictamente convexa;* $\forall \; y \in C^0$.

Demostración.
a) Sean $x \in C$ e $y \in C^0$.

Por definición de distancia de Bregman

$D_h(x,y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle$

Sea $z \in C^0$

$= h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - z + z - y \rangle$

$= h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - z \rangle - \langle \nabla h(y), z - y \rangle$

Por (B_1) h es diferenciable en C^0

$= h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y) - \nabla h(z) + \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(y), z - y \rangle$

$= h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(y), z - y \rangle$

$= h(x) - h(z) + h(z) - h(y) - \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(y), z - y \rangle$

$= h(z) - h(y) - \langle \nabla h(y), z - y \rangle + h(x) - h(z) - \langle \nabla h(z), x - z \rangle - \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), x - z \rangle$

Por definición de distancia de Bregman $z \in C^0 \subset C$, $y \in C^0$ y $x \in C$, $z \in C^0$

$$D_h(x,y) = D_h(z,y) + D_h(x,z) + \langle \nabla h(x) - h(y), x - z \rangle$$

b) Sean $x, y \in C^0$.

Por la definición de D_h :

$$D_h(x,y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle,$$

Derivando respecto a x obtenemos:

$$\nabla_x D_h(x,y) = \nabla h(x) - \nabla h(y).$$

c) Sea $y \in C^0$. Sean $x_1, x_2 \in C$, $\alpha \in (0,1)$ / $x_1 \neq x_2$

$D_h(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y) = h(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - h(y) - \langle \nabla h(y), \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - y \rangle$

Por $(B2)$ h es estrictamente convexa

$$< \alpha h(x_1)+(1-\alpha)h(x_2)-(1-\alpha+\alpha)h(y)-\langle \nabla h(y), \alpha x_1+(1-\alpha)x_2-(1-\alpha+\alpha)y\rangle$$

$$= \alpha(h(x_1)-h(y))+(1-\alpha)(h(x_2)-h(y))-\alpha\langle \nabla h(y), x_1-y\rangle-(1-\alpha)\langle \nabla h(y), x_2-y\rangle$$

$$= \alpha(h(x_1)-h(y)-\langle \nabla h(y), x_1-y\rangle)+(1-\alpha)(h(x_2)-h(y)-\langle \nabla h(y), x_2-y\rangle)$$

$$= \alpha D_h(x_1,y)+(1-\alpha)D_h(x_2,y).$$

Por lo tanto;

$$D_h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,y) < \alpha D_h(x_1,y)+(1-\alpha)D_h(x_2,y)$$

■

Proposición 3.1.5 *Si h es una función de Bregman con zona C^0. Entonces, $\lambda\nabla_x Dh(x,y)$ es un operador monótono maximal estricto; $\forall\ \lambda>0$*

Demostración.
Por la Proposición 3.1.4 (b)

$$\nabla_x D_h(x,y)=\nabla h(x)-\nabla h(y)\ ;\quad \forall\, x,y\in C^0$$

Como h es estrictamente convexa y diferenciable en C^0
Por el Corolario 2.1.4 tenemos

$\nabla h(x)$ es un operador monótono maximal estricto

Como $\nabla h(y)$ es una constante, por el Corolario 2.1.4

$$\nabla_x D_h(x,y)=\nabla h(x)-\nabla h(y)\ ;\quad \forall\, x,y\in C^0$$

Es un operador monótono maximal estricto.
Como $\lambda>0$, por el Corolario 2.1.4

$\lambda\nabla_x D_h(x,y)$ es un operador monótono maximal estricto $\forall\ \lambda>0$

■

Capítulo 4

Método del punto proximal generalizado para resolver PDV en $\mathbb{R}^n$

4.1 Problema de Desigualdad Variacional

Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y limitada inferiormente, donde C es un conjunto cerrado y convexo
El problema de optimización convexa con restricción es:

$$min \;\; f(x) \;\; sujeto \;\; a \;\; x \in C \tag{4.1}$$

Proposición 4.1.1 *Si existe $z \in C$ con $u \in \partial f(z)$ tal que $\langle u, x - z\rangle \geq 0$, entonces z minimiza a f en C*

Demostración. Como $u \in \partial f(z)$

$$f(x) \geq f(z) + \langle u, x - z\rangle \;\; ; \;\; \forall \, x \in C$$

Por hipótesis

$$\langle u, x - z\rangle \geq 0 \, ; \;\; \forall \, x \in C$$

Entonces

$$f(x) \geq f(z) \, ; \;\; \forall \, x \in C$$

Por lo tanto

$$z \text{ minimiza a } f \text{ en } C$$

■

Ya que ∂f es un operador monótono maximal, por el Teorema 2.1.4. La extensión del problema (4.1) a operadores monótonos maximales es llamado el problema de desigualdad variacional, el cual es definido de la siguiente manera.

Definición 4.1.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to p(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal y $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado el problema de desigualdad variacional PDV(T,C) consiste en encontrar $z \in C$ tal que existe $u \in T(z)$ satisfaciendo*

$$\langle u, x - z\rangle \geq 0\,; \;\; \forall\, x \, \in \, C \tag{4.2}$$

4.2 Metodo del Punto proximal Generalizado para el PDV (T,C)

El algoritmo del punto proximal con distancia de Bregman para el (4.1) es de la siguiente manera

1. **Inicialmente.-** Escogemos

$$x_0 \in C^0 \;\; e \;\; \lambda_0 \in [0, \bar{\lambda}]$$

2. **Iteración.-** Para $k = 1, 2, 3, \ldots$.
   Dado $x_k \in C^0$ escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ y encontrar un $x_{k+1} \in C^0$ tal que

$$x_{k+1} = argmin_{x \in C}\{f(x) + \lambda_k D_h(x, x_k)\}$$

   Dónde. $C^0 \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, $\bar{C}$ la cerradura de C^0 y h es una función de Bregman con zona C^0.

   Por el Teorema (1.3.8)

$$0 \in \partial[f(x) + \lambda_k D_h(x, x_k)](x_{k+1})$$

   Luego

$$0 \in [\partial f(x) + \lambda_k \nabla_x D_h(x, x_k)](x_{k+1})$$

Como ∂f es un operador monótono maximal, podemos extender el algoritmo de punto proximal con distancia de Bregman para resolver el $PDV(T, C)$

Definamos

$$T_k : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto T_k(x) = T(x) + \lambda_k \nabla_x D_h(x, x_k) \qquad (4.3)$$

El algoritmo del punto proximal generalizado para el $PDV(T, C)$ es definido de la siguiente forma

1. **Inicialmente.-** Escogemos

$$x_0 \in C^0 \;\; e \;\; \lambda_0 \in (0, \bar{\lambda}] \qquad (4.4)$$

2. **Iteración.-** Para $k = 1, 2, 3 \ldots$.
   Dado $x_k \in C^0$, escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ y encontrar un $x_{k+1} \in C^0$ tal que

$$0 \in T_k(x_{k+1}) \qquad (4.5)$$

4.3 Resultados de Convergencia

Lema 4.3.1 *Sea x_k una sucesión generada por* (4.4) *e* (4.5) *supongamos que $dom(T) \cap C^0 \neq \emptyset$ y la función de Bregman es zona coerciva con zona C^0. entonces, $\{x_k\}$ está bien definida e contenida en C^0*

Demostración. Haremos la demostración por inducción.
De (4.4) tenemos

$$x_0 \in C^0$$

Supongamos

$$x_k \in C^0$$

Paso 1
Demostremos que

$$\exists \, x_{k+1} \in C^0 \; / \; 0 \in T(x_{k+1})$$

De (4.3) tenemos

$$T_k(x) = T(x) + \lambda_k \nabla_x D_h(x, x_k)$$

Denotemos

$$B_k(x) = \lambda_k \nabla_x D_h(x, x_k)$$

Con

$$dom(B_k) = C^0$$

Así

$$T_k = T + B_k$$

Donde

$$dom(T) \cap dom(B_k) = dom(T) \cap C^0 \neq \emptyset \qquad (4.6)$$

Por la proposición 3.1.5

$$B_k \textit{ es un operador monotono maximal estricto} \tag{4.7}$$

Por hipótesis

$$T \textit{ es un operador monotono maximal} \tag{4.8}$$

De (4.6), (4.7), (4.8) y por el Corolario 2.1.6

$$T_k \text{ es un operador monótono maximal estricto}$$

Por otro lado. Como h es zona Coerciva, entonces

$$B_k \text{ es sobreyectiva}$$

Ademas

$$T \text{ es un operador monótono maximal}$$

Por el Teorema 2.1.6

$$T_k = T + B_k \text{ es sobreyectiva}$$

Como $0 \in \mathbb{R}^n$

Entonces

$$\exists\, x_{k+1} \in dom(T_k) = dom(T) \cap C^0 \tag{4.9}$$

Tal que

$$0 \in T_k(x_{k+1})$$

Por lo tanto

$$\exists\, x_{k+1} \in C^0 \;/\; 0 \in T(x_{k+1}) \tag{4.10}$$

Paso 2

Demostremos que x_{k+1} es único

Supongamos que exista otro

$$z_{k+1} \in C^0 \;/\; 0 \in T_k(z_{k+1}) \tag{4.11}$$

Entonces de (4.10) y (4.11)

$$\langle 0 - 0, x_{k+1} - z_{k+1} \rangle = 0$$

Por ser T_k un operador manótono estricto

$$x_{k+1} = z_{k+1}$$

■

Lema 4.3.2 *Sea $\bar{x}$ la solución del $PDV(T, C)$, la sucesión $\{x_k\}$ generada por (4.4) y (4.5) satisface la siguiente desigualdad*

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(x_{k+1}, x_k) \ ; \ \forall\, k \geq 0$$

Demostración. Sea

$$x_{k+1} \in C^0 \ / \ 0 \in T_k(x_{k+1})$$
$$0 \in [T(x_{k+1}) + B_k(x_{k+1})]$$
$$0 \in [T(x_{k+1}) + \lambda_k \nabla_x D_h(x_{k+1}, x_k)]$$
$$0 \in [T_{k+1} + \lambda_k(\nabla h(x_{k+1}) - \nabla h(x_k))]$$
$$\lambda_k[\nabla h(x_k) - \nabla h(x_{k+1})] \in T(x_{k+1})$$

Entonces

$$\exists\, u_k \ \in T(x_{k+1})$$

Tal que

$$u_k = \lambda_k[\nabla h(x_k) - \nabla h(x_{k+1})] \in T(x_{k+1}) \tag{4.12}$$

Por otro lado por la Proposición 3.1.4 (a)

$$D_h(x, y) - D_h(x, z) - D_h(z, y) = \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), z - x\rangle \ ; \ \ \forall\, x \in C \ , \ \forall\, y, z \in C^0$$

Tomando

$$y = x_k \ \ e \ \ z = x_{k+1}$$

Obtenemos

$$\langle \nabla h(x_k) - \nabla h(x_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle = D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)$$

$$\langle \lambda_k(\nabla h(x_k) - \nabla h(x_{k+1})), x_{k+1} - x\rangle = \lambda_k[D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] \tag{4.13}$$

De (4.12) y (4.13), tenemos

$$\langle u_k, x_{k+1} - x\rangle = \lambda_k[D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] \tag{4.14}$$

Tomando

$$x = \bar{x}$$

$$\langle u_k, x_{k+1} - \bar{x}\rangle = \lambda_k[D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] \tag{4.15}$$

Por hipótesis $\bar{x}$ es solución de $PDV(T, C)$ y tomemos $v \in T(\bar{x})$ tal que

$$\langle v, x - \bar{x}\rangle \ ; \ \ \forall\, x \in C \tag{4.16}$$

Como T es monótono

$$\langle u_k - v, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq 0$$

$$\langle u_k, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq \langle v, x_{k+1} - \bar{x}\rangle$$

Como $x_{k+1} \in C$ y de (4.16) tenemos

$$\langle u_k, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq \langle v, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq 0 \tag{4.17}$$

De (4.15) y (4.17) obtenemos

$$\lambda_k[D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] \geq 0$$

Como $\lambda_k > 0$, $\forall\, k \geq 0$

$$0 \leq D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)$$

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(x_{k+1}, x_k)$$

■

Lema 4.3.3 *Sea $\bar{x}$ la solución del $PDV(T;C)$, la sucesión $\{x_k\}$ generada por* (4.4) *y* (4.5), *satisface la siguiente desigualdad*

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) \;\; \forall\, k \geq 0$$

Demostración.
Por la proposición 3.1.1 (i)

$$D_h(\bar{x}, x_k) \geq 0 \; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

Por el Lema 4.3.2

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(x_{k+1}, x_k) \; ; \; \forall\, k \geq 0$$

Por la Proposición 3.1.1 (i)

$$D_h(x_{k+1}, x_k) \geq 0 \; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) \; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

■

Lema 4.3.4 *La sucesión $\{x_k\}$ generada por* (4.4) *y* (4.5) *es limitada y posee puntos de acumulación contenidas en C*

Demostración.
Por el Lema 4.3.3 la sucesión $\{D_h(\bar{x}, x_k)\}$ es no creciente y no negativo. Entonces para todo $k \geq 0$ y todo $\bar{x}$ solución del $PDV(T, C)$, se tiene

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k) \leq \ldots \leq D_h(\bar{x}, x_0)$$

Por lo tanto

$$\{x_k\} \subset \{x \in C;\ D_h(\bar{x}, x) \leq D_h(\bar{x}, x_0)\}$$

Por (B_3)

$$\{x \in C;\ D_h(\bar{x}, x) \leq D_h(\bar{x}, x_0)\}$$

Esta acotado, entonces

$$\{x_k\}\ \textit{esta acotado} \tag{4.18}$$

Por el Teorema 1.2.14

$$\{x_k\} \text{ posee puntos de acumulación}$$

Sea a un punto de acumulación de $\{x_k\}$, por el Teorema 1.2.12

$$\exists\ \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \subset C$$

Tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_j} = a$$

Por ser C cerrado

$$a \in C$$

Por lo tanto

$$\{x_k\} \text{ posee puntos de acumulación contenidas en } C$$

■

Lema 4.3.5 *Demostrar que* $\lim\limits_{k\to\infty} D_h(x_{k+1}, x_k) = 0$

Demostración. Por el Lema 4.3.2

$$D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \leq D_h(\bar{x}, x_k - D_h(x_{k+1}, x_k))\ ;\ \ \forall\, k \geq 0$$

Por la Proposición 3.1.1 (i)

$$D_h(x_{k+1}, x_k) \geq 0\ ;\ \ \forall\, k \geq 0$$

$$0 \leq D_h(x_{k+1}, x_k) \leq D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) \tag{4.19}$$

Por la Proposición 3.1.1 (i)

$$D_h(\bar{x}, x_k) \geq 0 \ ; \ \forall\, k \geq 0$$

Por el Lema 4.3.3 $\{D_h(\bar{x}, x_k)\}$ es no negativo y no decreciente
Entonces por el Teorema 1.2.9

$$\{D_h(\bar{x}, x_k)\} \ \textit{es convergente}$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty}[D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1})] = 0 \tag{4.20}$$

Tomando limite en (4.19)

$$\lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} D_h(x_{k+1}, x_k) \leq \lim_{k\to\infty}[D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1})]$$

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} D_h(x_{k+1}, x_k) \leq 0$$

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_{k+1}, x_k) = 0$$

■

Lema 4.3.6 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ pseudomonótono. Si x^* es un punto de acumulación de $\{x_k\}$, entonces existe $u^* \in T(x^*)$ tal que $\langle u^*, \bar{x} - x^*\rangle = 0$ para todo $\bar{x}$ solución del $PDV(T, C)$*

Demostración. Sea x^* un punto de acumulación de $\{x_k\}$, entonces
Por el Teorema 1.2.12

$$\exists\, \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \subset C^0$$

Tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_j} = x^* \tag{4.21}$$

Por ser C cerrado

$$x^* \in C$$

Por otro lado Por el Lema 4.3.4

$$\{x_{k_j}\} \ \textit{es limitado} \tag{4.22}$$

Por el Leman 4.3.5

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x_{k_j+1}, x_{k_j}) = 0 \tag{4.23}$$

De (4.21), (4.22), (4.23) y por (B_5) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_j+1} = x^* \tag{4.24}$$

Para las sucesiones $\{x_{k_j}\}$ y $\{x_{k_j+1}\}$
De (4.21) y (4.24) y por (B_4) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} D_h(x^*, x_{k_j}) = \lim_{k\to\infty} D_h(x^*, x_{k_j+1}) = 0 \tag{4.25}$$

De (4.23) y (4.25) tenemos

$$\lim_{k\to\infty}[D_h(x^*, x_{k_j}) - D_h(x^*, x_{k_j+1}) - D_h(x_{k_j+1}, x_{k_j})] = 0$$

Como $\{\lambda_{k_j}\} \subset \{\lambda_k\} \subset <0, \bar{\lambda}]$ esta limitado y por el Teorema 1.2.8

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{k_j}[D_h(x^*, x_{k_j}) - D_h(x^*, x_{k_j+1}) - D_h(x_{k_j+1}, x_{k_j})] = 0 \tag{4.26}$$

De (4.14)

$$\langle u_k, x_{k+1} - x\rangle = \lambda_k[D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)]$$

Tomando $x = x^*$ y $k = k_j$

$$\left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - x^*\right\rangle = \lambda_{k_j}[D_h(x^*, x_{k_j}) - D_h(x^*, x_{k_j+1}) - D_h(x_{k_j+1}, x_{k_j})]$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - x^*\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \lambda_{k_j}[D_h(x^*, x_{k_j}) - D_h(x^*, x_{k_j+1}) - D_h(x_{k_j+1}, x_{k_j})] = 0$$

Entonces para todo

$$u_{k_j} \in T(x_{k_j+1})\ ;\ \ \forall\, j \in \mathbb{N} \tag{4.27}$$

Se tiene

$$\limsup_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - x^*\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - x^*\right\rangle = 0 \tag{4.28}$$

Por otro lado de (4.9)

$$x_{k+1} \in dom(T)\ ;\ \forall\, k \geq -1$$

Entonces

$$\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \subset dom(T) \tag{4.29}$$

De (4.21)

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_j} = x^* \tag{4.30}$$

Como T es pseudomonótono, $dom(T)$ es cerrado

$$x^* \in dom(T) \tag{4.31}$$

De (4.27), (4.28), (4.29), (4.30), (4.31) y por ser T pseudomonótono . Tenemos

$$\exists\, u^* \in T(x^*) \tag{4.32}$$

Tal que
$$\langle u^*, x^* - \bar{x}\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - \bar{x}\right\rangle \tag{4.33}$$
Para todo $\bar{x} \in dom(T)$
Como
$$\emptyset \neq SOL(T, C) \subset C \subset dom(T)$$
Entonces también se cumple
$$\forall\, \bar{x} \in SOL(T, C)$$
Por otro lado de (4.20)
$$\lim_{k\to\infty} [D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1})] = 0$$
Del Lema 4.3.5
$$\lim_{k\to\infty} D_h(\bar{x}_{k+1}, x_k) = 0$$
Entonces
$$\lim_{k\to\infty} [D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] = 0$$
Siendo $\{\lambda_k\}$ limitado
$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k[D_h(\bar{x}, x_k) - D_h(\bar{x}, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] = 0 \tag{4.34}$$
De (4.14)
$$\langle u_k, x_{k+1} - x\rangle = \lambda_k[D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)]$$
Tomando limite y de (4.34)
$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, x_{k+1} - x\rangle = \lim_{k\to\infty} \lambda_k[D_h(x, x_k) - D_h(x, x_{k+1}) - D_h(x_{k+1}, x_k)] = 0$$
Como $\bar{x} \in SOL(T, C) \subset C$; para $x = \bar{x}$
$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, x_{k+1} - \bar{x}\rangle = 0$$
$$\liminf_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - \bar{x}\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - \bar{x}\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, x_{k+1} - \bar{x}\rangle = 0$$
Entonces de (4.33)
$$\langle u^*, x^* - \bar{x}\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \left\langle u_{k_j}, x_{k_j+1} - \bar{x}\right\rangle = 0$$
$$\langle u^*, x^* - \bar{x}\rangle \leq 0 \tag{4.35}$$
Luego como $\bar{x} \in SOL(T, C)$
$$\exists\, v \in T(\bar{x}) \tag{4.36}$$

Tal que

$$\langle v, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \ ; \ \forall \, y \in C \tag{4.37}$$

De (4.32), (4.36) y por ser T monótono

$$\langle u^* - v, x^* - \bar{x} \rangle \geq 0$$

$$\langle u^*, x^* - \bar{x} \rangle \geq \langle v, x^* - \bar{x} \rangle$$

Como $x^* \in C$ y de (4.37) tenemos

$$\langle u^*, x^* - \bar{x} \rangle \geq \langle v, x^* - \bar{x} \rangle \geq 0$$

$$0 \leq \langle u^*, x^* - \bar{x} \rangle \tag{4.38}$$

Por lo tanto de (4.35) y (4.38)

$$\langle u^*, x^* - \bar{x} \rangle = 0 \ ; \ \ \forall \, \bar{x} \in SOL(T, C)$$

■

Teorema 4.3.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal. Considere el $PDV(T, C)$, donde $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y cerrado. Sea h una función de Bregman con zona C^0. Supongamos que las siguientes condiciones son validas*

i) $dom(T) \cap C^0 \neq \emptyset$

ii) *PDV(T,C) posee soluciones*

iii) *T es pseudomonótono*

iv) $0 < \lambda_k \leq \bar{\lambda}$, *para algun* $\bar{\lambda} > 0$

v) *h es zona coerciva*

vi) *T es paramonótono en C*

Entonces la sucesión generada por (4.4) *e* (4.5), *converge para una solución $\bar{x}$ del $PDV(T, C)$*

Demostración.
Por el Lema 4.3.1

$$\{x_k\} \text{ está bien definido y contenido en } C^0$$

Por el Lema 4.3.4

$$\{x_k\} \text{ posee puntos de acumulación contenida en } C$$

Sea $x^* \in C$ un punto de acumulación de $\{x_k\}$
Por el Lema 4.3.6

$$\exists\, u^* \in T(x^*) \tag{4.39}$$

Tal que

$$\langle u^*, \bar{x} - x^* \rangle = 0 \ ; \ \forall ; \bar{x} \in SOL(T;C) \tag{4.40}$$

Como $\bar{x}$ es solución del $PDV(T,C)$

$$\exists\, u \in T(\bar{x}) \tag{4.41}$$

Tal que

$$\langle u, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \ ; \ \forall\, x \in C \tag{4.42}$$

En particular para el punto de acumulación $x^* \in C$

$$\langle u, x^* - \bar{x} \rangle \geq 0$$

$$\langle u, \bar{x} - x^* \rangle \leq 0 \tag{4.43}$$

De (4.39), (4.41) y por la monótocidad de T

$$0 \leq \langle u - u^*, \bar{x} - x^* \rangle$$

$$\langle u, \bar{x} - x^* \rangle \leq \langle u, \bar{x} - x^* \rangle$$

De (4.40) y (4.43)

$$0 = \langle u^*, \bar{x} - x^* \rangle \leq \langle u, \bar{x} - x^* \rangle \leq 0$$

$$\langle u^*, \bar{x} - x^* \rangle = \langle u, \bar{x} - x^* \rangle = 0 \tag{4.44}$$

$$\langle u, \bar{x} - x^* \rangle - \langle u^*, \bar{x} - x^* \rangle = 0$$

$$\langle u - u^*, \bar{x} - x^* \rangle = 0$$

Con

$$u \in T(\bar{x}) \ \text{ y } \ u^* \in T(x^*)$$

Por la paramonótocidad de T, obtenemos

$$u \in T(x^*) \tag{4.45}$$

De (4.42) y (4.44) obtenemos

$$\langle u, x - \bar{x} \rangle + \langle u, \bar{x} - x^* \rangle \geq 0$$

$$\langle u, x - x^* \rangle \geq 0 \ ; \ \ \forall\, x \in C \tag{4.46}$$

De (4.45) y (4.46) concluimos que

$$x^* \text{ es solución del } PDV(T, C)$$

Como x^* es un punto de acumulación de $\{x_k\}$, entonces

$$\exists \ \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \subset C^0 \ / \ \lim_{k_j \to \infty} x_{k_j} = x^*$$

Entonces, por (B_4)

$$\lim_{k \to \infty} D_h(x^*, x_{k_j}) = 0 \tag{4.47}$$

Por el Lema 4.3.3

$$\{D_h(x^*, x_k)\} \text{ es no creciente y no negativa}$$

Por el Teorema 1.2.9

$$\{D_h(x^*, x_k)\} \ \textit{es convergente} \tag{4.48}$$

(4.47) y (4.48) obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} D_h(x^*, x_k) = 0 \tag{4.49}$$

Ya que $\{x_k\}$ esta acotado, tomamos

$$\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \subset C^0 \ / \ \lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x'$$

De (4.49)

$$\lim D_h(x^*, x_{k_j}) = 0$$

Entonces por (B_5)

$$\lim_{j \to \infty} x^* = x'$$

$$x^* = x'$$

Entonces toda subsucesión convergente de $\{x_k\}$ converge a x^*

Por lo tanto

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$

■

Capítulo 5

Aplicaciones

Ejemplo 5.1 *Sea* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *una función convexa*

$$(P_1)\begin{cases} min \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \quad Sujeto \ \ a \\ \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\partial f(x,y) = \nabla f(x,y) = \{(2x, 2y)\}$$

Solucionar el problema (P_1) *es lo mismo que solucionar el siguiente problema*

$$(P)\begin{cases} \quad Encontrar \ \ x^* \ \ tal \ \ que \ \ para \ \ algun \\ w \in \partial f(x^*) \ \ se \ tiene \ \langle w, y - x^* \rangle \geq 0 \ ; \quad \forall \, y \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Solución

1. Dado $x_0 = (1,1)$

2. a) Para $k = 0$; $x_0 = (1,1)$ y escogemos $\lambda_0 = 1$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_0}\partial f\right)^{-1}(x_0)$$

$$x_1 \in (I + (x,y))^{-1}(1,1)$$

$$(1,1) \in (I + (x,y))(x_1)$$

$$(1,1) \in 2x_1$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in x_1$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Para $k=1$; $x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y escogemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_2 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_1}\partial f\right)^{-1}(x_1)$$

$$x_2 \in (I + (2x, 2y))^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in (I + (2x, 2y))\,(x_2)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in (3x_2)$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \in x_2$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

c) Para $k=2$; $x_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ y escogemos $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

$$x_3 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_2}\partial f\right)^{-1}(x_2)$$

$$x_3 \in (I + (3x, 3y))^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \in (I + 3(x, y))\,(x_3)$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \in (4x_3)$$

$$\left(\frac{1}{24}, \frac{1}{24}\right) \in (x_3)$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{24}, \frac{1}{24}\right)$$

La sucesión generada es:

$$\{x_k\} = \left\{\frac{1}{n!}, \frac{1}{n!}\right\}$$

Tomando limite

$$\lim_{k\to\infty} x_k = (0, 0)$$

Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Encontramos } (0,0) \textit{ tal que para algun} \\ w \in \partial f(0,0) \text{ se tiene } \langle w, y-(0,0)\rangle \geq 0\ ;\ \ \forall\, y \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

La solución del problema (P) resuleve el problema (P_1), de la siguiente manera.

$$\langle w, y-(0,0)\rangle \geq 0 \ ; \quad \forall\, y \ \in \mathbb{R}^2$$

$$f(0,0)+\langle w, y-(0,0)\rangle \geq f(0,0) \ ; \quad \forall\, y \ \in \mathbb{R}^2$$

Como $w \in \partial f(0,0)$, por definición de subgradiente

$$f(y) \geq f(0,0)+\langle w, y-(0,0)\rangle \geq f(0,0) \ ; \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^2$$

$$f(y) \geq f(0,0) \ ; \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 5.2 *Sea $f(x) = |x-1|$ una función convexa*

$$(P_2)\begin{cases} min \quad f(x) = |x-1| \\ \quad Sujeto \ \ a \\ \quad\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x<1 \\ [-1,1] & ; \ x=1 \\ 1 & ; \ x>1 \end{cases}$$

Solucionar el problema (P_2) es lo mismo que solucionar el siguiente problema

$$(P)\begin{cases} \qquad Encontrar \ \ x^* \ \ tal \ \ que \ \ para \ \ algun \\ w \in \partial f(x^*) \ se \ tiene \ \langle w, y-x^*\rangle \geq 0 \ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solución

1. Dado $x_0 = 2$

2. a) Para $k=0$; $x_0 = 2$ y escogemos $\lambda_0 = 1$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_0}\partial f\right)^{-1}(x_0)$$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)^{-1}(2)$$

$$2 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)(x_1)$$

i) Si $x_1<1$
$2 \in (x_1 - \frac{1}{2})$
$\frac{5}{2} \in (x_1)$ Absurdo

ii) Si $x_1 = 1$
$2 \in \left(1 + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$
$2 \in \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ Absurdo

iii) Si $x_1 > 1$
$2 \in \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)$
$\frac{3}{2} \in (x_1)$ Cumple

b) Para $k = 1$; $x_1 = \frac{3}{2}$ y escogemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_2 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_1}\partial f\right)^{-1}(x_1)$$

$$x_2 \in (I + \partial f)^{-1}(\frac{3}{2})$$

$$\frac{3}{2} \in (I + \partial f)(x_2)$$

i) Si $x_2 < 1$
$\frac{3}{2} \in (x_2 - 1)$
$\frac{5}{2} \in (x_2)$ Absurdo

ii) Si $x_2 = 1$
$\frac{3}{2} \in (1 + [-1, 1])$
$\frac{1}{2} \in ([-1, 1])$ Cumple

iii) Si $x_2 > 1$
$\frac{3}{2} \in (x_2 + 1)$
$\frac{1}{2} \in (x_2)$ Absurdo

c) Para $k = 2$; $x_2 = 1$ y escogemos $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

$$x_3 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_2}\partial f\right)^{-1}(x_2)$$

$$x_3 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)^{-1}(1)$$

$$1 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)(x_3)$$

i) Si $x_3 < 1$
$1 \in \left(x_3 - \frac{3}{2}\right)$
$\frac{5}{2} \in (x_3)$ Absurdo

ii) Si $x_3 = 1$
$1 \in \left(1 + \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$
$0 \in \left(\left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$ Cumple

iii) Si $x_3 > 1$
$1 \in \left(x_3 + \frac{3}{2}\right)$
$\frac{1}{2} \in (x_3)$ Absurdo

La sucesión generada es:

$$\{x_k\} = \{2, \frac{3}{2}, 1, 1, 1, ...\}$$

Tomando limite

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 1$$

Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Encontramos } 1 \textit{ tal que para algun} \\ w \in \partial f(1) \text{ se tiene } \langle w, y - 1 \rangle \geq 0 \; ; \; \forall \, y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La solución del problema (P) resuelve el problema (P_2), de la siguiente manera.

$$\langle w, y - 1 \rangle \geq 0 \; ; \; \forall \, y \; \in \mathbb{R}$$

$$f(1) + \langle w, y - 1 \rangle \geq f(1) \; ; \; \forall \, y \; \in \mathbb{R}$$

Como $w \in \partial f(1)$, por definición de subgradiente

$$f(y) \geq f(1) + \langle w, y - 1 \rangle \geq f(1) \; ; \; \forall \, y \in \mathbb{R}$$

$$f(y) \geq f(1) \; ; \; \forall \, y \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa, definida de la siguiente manera:*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 1 - x & ; & x < 1 \\ x^2 - 1 & ; & x \geq 1 \end{array} \right.$$

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{c} min \;\; f(x) \\ Sujeto \;\; a \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\partial f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} -1 & ; & x < 1 \\ [-1, 2] & ; & x = 1 \\ 2x & ; & x > 1 \end{array} \right.$$

Solucionar el problema (P_3) es lo mismo que solucionar el siguiente problema

$$(P) \left\{ \begin{array}{c} \textit{Encontrar } x^* \textit{ tal que para algun} \\ w \in \partial f(x^*) \textit{ se tiene } \langle w, y - x^* \rangle \geq 0 \; ; \; \forall \, y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Solución

1. *Dado* $x_0 = 2$

2. a) *Para* $k = 0;\ \ x_0 = 2$ *y escogemos* $\lambda_0 = 1$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_0}\partial f\right)^{-1}(x_0)$$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)^{-1}(2)$$

$$2 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)(x_1)$$

i) *Si* $x_1 < 1$
$2 \in (x_1 - \frac{1}{2})$
$\frac{5}{2} \in (x_1)$ *Absurdo*

ii) *Si* $x_1 = 1$
$2 \in \left(1 + \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$
$1 \in \left(\left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ *Cumple*

iii) *Si* $x_1 > 1$
$2 \in (x_1 + x_1)$
$1 \in (x_1)$ *Absurdo*

b) *Para* $k = 1;\ \ x_1 = 1$ *y escogemos* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_2 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_1}\partial f\right)^{-1}(x_1)$$

$$x_2 \in (I + \partial f)^{-1}(1)$$

$$1 \in (I + \partial f)(x_2)$$

i) *Si* $x_2 < 1$
$1 \in (x_2 - 1)$
$2 \in (x_2)$ *Absurdo*

ii) *Si* $x_2 = 1$
$1 \in (1 + [-1, 2])$
$0 \in ([-1, 2])$ *Cumple*

iii) *Si* $x_2 > 1$
$1 \in (x_2 + 2x_2)$
$\frac{1}{3} \in (x_2)$ *Absurdo*

c) Para $k=2$; $x_2 = 1$ *y escogemos* $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

$$x_3 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_2}\partial f\right)^{-1}(x_2)$$

$$x_3 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)^{-1}(1)$$

$$1 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)(x_3)$$

i) Si $x_3<1$
$1 \in \left(x_3 - \frac{3}{2}\right)$
$\frac{5}{2} \in (x_3)$ *Absurdo*

ii) Si $x_3 = 1$
$1 \in \left(1 + \left[\frac{-3}{2}, 3\right]\right)$
$0 \in \left(\left[\frac{-3}{2}, 3\right]\right)$ *Cumple*

iii) Si $x_3>1$
$1 \in (x_3 + 3x_3)$
$\frac{1}{4} \in (x_3)$ *Absurdo*

La sucesión generada es:

$$\{x_k\} = \{2, \frac{3}{2}, 1, 1, 1, ...\}$$

Tomando limite

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 1$$

Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Encontramos 1 tal que para algun} \\ w \in \partial f(1) \textit{ se tiene } \langle w, y-1\rangle \geq 0 \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La solución del problema (P) *resuleve el problema* (P_3)*, de la siguiente manera.*

$$\langle w, y-1\rangle \geq 0 \ ; \ \ \forall\, y \ \in \mathbb{R}$$

$$f(1) + \langle w, y-1\rangle \geq f(1) \ ; \ \ \forall\, y \ \in \mathbb{R}$$

Como $w \in \partial f(1)$*, por definición de subgradiente*

$$f(y) \geq f(1) + \langle w, y-1\rangle \geq f(1)\ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$f(y) \geq f(1)\ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

Materiales y Métodos

Para realizar el trabajo de Tesis se revisó y recolecto gran cantidad de bibliografía, entre los más destacados están: Elon [7], Elon [8], Izmailov [12], Izmailov [13], Iusem [14], Kiwiel [21] y Rockafellar [29]. Además, se hizo la búsqueda en internet con el fin de hallar los artículos mas recientes relacionados con la investigación, donde se utilizó discos compactos y USB para guardar la información encontrada.

Para la elaboración y digitación de la Tesis se usó Látex este procesador de texto es indicado para la escritura de textos científicos.

Terminada la digitación se entregó un ejemplar al profesor asesor para las correcciones y sugerencias, errores de redacción, correcciones de ortografía y para que realice las correcciones de forma y fondo.

Para presentar los resultados de la tesis, se entregaron cuatro ejemplares para lo cual se necesitó el siguiente materia: hoja bond, cartucho de impresora, material de anillado, tóner.

Resultados

En el trabajo de Tesis se obtuvo la solución del problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$, mediante el método de punto proximal exacto con distancia de Bregman, los resultados más importantes son:

1. Presentamos los resultados mas importantes de Operadores Monótonos y Distancia de Bregman
2. La subgradiente de una función convexa es un operador monótono maximal, paramonótono y pseudomonótono
3. El problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$ es una generalización del problema de optimización convexa con restricción en $\mathbb{R}^n$
4. Demostramos que la sucesión generada por el algoritmo de punto proximal exacto con Distancia de Bregman converge a la solución del problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$.

Discusiones

1. La importancia y necesidad de resolver el Problemas de Desigualdad Variacional se justifica por las múltiples aplicaciones en los campos de ciencias e ingenierías, tal es el caso que al resolver un problema de Desigualdad Variacional se está resolviendo un problema de Optimización Convexa.

2. En las bibliografías no existen mucha información sobre la solución del Problema de Desigualdad Variacional. En la tesis hemos resuelto el problema utilizando el Algoritmo de punto proximal exacto con Distancia de Bregman

3. La solución del Problema de Desigualdad Variacional, solamente resuelve problemas de optimización convexa. La Tesis se puede considerar como un primer paso importante, para resolver problemas de optimización más generales y que tienen aplicación en diversas áreas.

Conclusiones

1. Para resolver un Problema de Desigualdad Variacional, se utiliza el algoritmo de punto proximal con distancia de Bregman

2. Al obtener la solución de un Problema de Desigualdad Variacional estamos obteniendo la solución de un problema de optimización convexa.

3. Para obtener la convergencia del algoritmo de punto proximal hemos introducido una nueva clase de distancias generalizadas, llamada distancia de Bregman, la cual es muy importante para la convergencia.

4. Con demostración de que la subdiferencial de una función convexa sea un Operador Monótono Maximal, nos permite generalizar el Problema de Optimización Convexa a un Problema de Desigualdad Variacional

5. Toda distancia de Bregman es una Cuasidistancia, pero en general toda distancia de Bregman no es un Distancia

Bibliografía

[1] BERKOVITZ, L,Convexity and Optimization in $\mathbb{R}^n$, Jhon Wiley and Sons, Inc. New York, 2002

[2] BRÉZIS H., *Opérateurs Monotones Maximaux et Semigrus de Contraction dans les Espaces de Hilbert*, Mathematics Studies S, North-Holland, New york, 1973.

[3] B.T POLYAK, *Introduction to Optimization Software.* Optimization Software. New York. 1987.

[4] BURACHIK R., IUSEM A., *A Generalized Proximal Point algorithm for the Variational Inequality Problem in a Hilbert Space. SIAM J. OPTIM. 8, 197-216. 1998.*

[5] CANALES, P., *Convexidad y Aplicaciones*, Sociedad de Matemática Peruana, XXII Coloquio, 2004.

[6] CUNHA, F.G.M., CRUZ NETO, J.X. and OLIVEIRA, P.R., *A Proximal Point Algorithm with- Divergence to Quasiconvex Programming, Prepint, 2006.*

[7] ELON LAGES LIMA , *Curso de Análisis Matemático I, Edición española, 1991.*

[8] ELON LAGES LIMA , *Curso de Análisis , Volumen II, Rio de Janeiro: IMPA, 1981.*

[9] ERIK ALEX PAPA QUIROZ, *Una Introducción a la Optimización*,UNAC 2008

[10] GULER, O., *On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization. SIAM J. Control and Optimization, 29 (2), 403-4019, 1991.*

[11] HARKER P.T., PANG J.S., Finite dimencional variational inequalities and nonlinear complementarity problems. SIAM J. Control Optim., 29, pp. 403-429. 1991.

[12] IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, *Otimização Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade, IMPA, 2005.*

[13] IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, *Otimização Volumen 2: Métodos Computaciones*, IMPA, 2007.

[14] IUSEM A. N., *Métodos do Ponto Proximal em Otimização, 20 Coloquio Brasileiro de Matemática. IMPA.*

[15] IUSEM A. N., On dual Convergence and the rate of Primal Convergence of Bregman's Convex Programming method. SIAM J. Optimization. Vol. 1, Nº 3, pp. 401-423. 1991.

[16] IUSEM A. N., B. F. SVAITER, AND MARC TEBOULLE, Entropy-Like Proximal methods in Convex Programming. Mathematics of Operations Resarch, Vol. 19. Nº 4. 1994.

[17] JOFRÉ A., ROCAFELLAR T., *Variational Inequalities and Economic Equilibrim. Center for Math. Modelling and Dept. of Math. Engineering, Univ. of Chile.*

[18] JAVIER MÁRQUEZ DIEZ-CANEDO, *Fundamentos de Teoría de Optimización, Editorial Limusa*

[19] JONATHAN ECKSTEIN, *Aproximate iterations in Bregman-function-based Proximal algorithm. Matematical Programming 83, pp. 113-123. 1998.*

[20] KINDERLEHRER D., STAMPACCHIA G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, New York, 1980.*

[21] K. C. KIWIEL, *Proximal Minimization Methods with Generalized Bregmen Functions. SIAM Journal on Control and Optimization. V. 35, pp. 1142-1168, 1997.*

[22] KRZYSZTOF C. KIWIWL, Proximal Minimizatión Methods with Generalized Bregman functions. SIAM J. Control Optim. Vol. 35. Nº 3. pp. 1142-1168. 1997.

[23] LAZARO VELÁQUEZ MARCO.A.,*Trajetória central, Métodos de punto proximal generalizado y Trajetória De Cauchy en variedades riemannianas, Brazil 2007*

[24] MOREIRA NETO, A., *Método do Ponto Proximal Usando Distancias Generalizadas Separáveis , Brazil. 2008.*

[25] MINTY, B., *Monotone nonlinear Operators in Hilbert space. Duke Mathematical Journal 29, 341-346. 1978.*

[26] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princenton University Press, Princenton, NJ. 1970.

[27] ROCKAFELLAR, R.T., *On The Maximality Of Sums Of Nonlinear Monotone Operador, Press, Princenton, NJ. 1970.*

[28] ROCKAFELLAR, R. T., *Aumented Lagrangians and Application of Proximal Point Algorithm in Convex Programming, Mathematics of Operation Research, Vol.1,pp. 97-116.1976.*

[29] ROCKAFELLAR, R. T., *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm, SIAM Journal on Control and Optimization, V. 14, pp. 877-898, 1976.*

[30] VALENTIN SANTAMARIA J.,*Un método de multiplicadores basados en Shifts con una penalidad no coerciva*, España, 2004.