UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE SEMIGRUPOS DE OPERADORES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Tesis para Optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Shila Antuanett Neciosup Salas

CALLAO - PERÚ
Febrero - 2005

Aplicaciones de la Teoría de Semigrupos de Operadores a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Shila Antuanett Neciosup Salas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Presidente)

Lic. Wilfredo Mendoza Quispe (Secretario)

Lic. Cesar Ávila Celis (Objetante)

Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini (Asesor)

CALLAO - PERÚ

Febrero - 2005

CALLAO - PERÚ

Febrero - 2005

FICHA CATALOGRÁFICA

NECIOSUP SALAS, SHILA ANTUANETT

Aplicaciones de la Teoría de Semigrupos de Operadores a las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Callao (2005).

ix, 117p., 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2005).

Tesis, Universidad Nacional del Callao

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 1. Matemática

1. UNAC/ FCNM II. Titulo (Serie).

AGRADECIMIENTOS

Por intermedio del presente trabajo que me permite obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud a las siguientes personas:

- A mi asesor el Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini mi profundo agradecimiento, por haberme sugerido el tema, por su orientación constante de una manera segura y precisa durante el desarrollo de este trabajo, y además por la revisión y valiosas sugerencias profesionales para la mejor presentación de esta Tesis.
- Al Dr. Cabanillas Lapa, Lic. Wilfredo Mendoza y Lic. Cesar Ávila por su aceptación a formar parte del Cuerpo Docente en la Sustentación de la Tesis.
- A todos los Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas-UNAC quienes me brindaron su comprensión y sapiencia contribuyendo en mi formación profesional.
- Al Dr. Ortiz, por su amistad y sus sabios consejos.
- A los amigos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, especialmente a Orlando Moreno y Carlos Deudor por sus valiosos consejos.

DEDICATORIA

A mi querida madre Ana María Salas

por su constante apoyo y aliento en la

culminación del presente trabajo.

A toda la juventud estudiosa, así

mismo a todos mis profesores

de las diversas instituciones.

RESUMEN

Aplicaciones de la Teoría de Semigrupos de Operadores a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

SHILA ANTUANETT NECIOSUP SALAS

Febrero - 2005

Asesor: Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

El presente trabajo tiene por objetivo estudiar algunos *Problemas de Evolución* mediante la *Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales.*

Dentro de la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales estudiamos los semigrupos de operadores de clase C_0, operadores disipativos, m-disipativos así como condiciones necesarias y suficientes para que un operador genere un semigrupo de clase C_0.

Usando los Teoremas de Hille-Yosida, Lumer-Phillips y de Stone abordamos el problema de existencia y unicidad para los problemas de valor inicial y frontera asociados a las ecuaciones de ondas, del calor y de Schrödinger.

Palabras Claves. Teorema de Hille-Yosida, Teorema de Lumer-Phillips, Teorema de Stone, Semigrupo de Clase C_0, Problema de Cauchy.

ABSTRAC

Applications of the Semigroup Theory to Partial Differential Equations

SHILA ANTUANETT NECIOSUP SALAS

February - 2005

Assessor: Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini

Title Obtained: Licensed in Mathematic

The subject of this work is to study some evolution problems by means of semigroup theory of linear operators.

In semigroup theory we study the semigroups of C_0 class, dissipative and m-dissipative operators, as well as necessary and sufficient conditions so that an operator generates a semigroup of C_0 class.

Using Hille-Yosida, Lumer-Phillips and Stone theorems we approach the problem of existence and uniqueness of solutions of problems of initial and boundary value associated to the heat , waves and Schrödinger equations.

Key Words. Hille-Yosida theorem, Lumer-Phillips theorem, Stone theorem, Semigroup of C_0 class, Cauchy Problem.

INDICE

Aplicaciones de la Teoría de Semigrupos de Operadores a las Ecuaciones diferenciales Parciales

Agradecimientos

Dedicatoria

Resumen

Abstract

Capítulo 1. Introducción 1

Capítulo 2. Semigrupos de Operadores Lineales Acotados 4

Semigrupo de Clase C_0 4

Generador Infinitesimal del Semigrupo 5

Capítulo 3. Generación de Semigrupos 22

Teorema de Hille-Yosida 26

Teorema de Lumer-Phillips 48

Capítulo 4. Grupos de Clase C_0 52

Teorema de Stone 57

Capítulo 5. El Problema de Cauchy Abstracto 63

La Ecuación Homogénea 63

Capítulo 6. Aplicaciones 83

La Ecuación de Ondas 83

La Ecuación del Calor 93

La Ecuación de Schrödinger 98

Métodos y Materiales 112

Resultados y/o Aportes 115

Conclusiones 116

Bibliografía 117

Capítulo 1

Introducción

La presente tesis es una *Introducción a la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales y sus aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución.*

Hemos tratado de que nuestro trabajo sea autosuficiente, para lo cual hemos hecho una revisión de la Teoría de Operadores Lineales, del Problema de Cauchy Abstracto y luego, con estas herramientas hemos estudiado la existencia de soluciones para algunos Problemas de Evolución.

A lo largo de este trabajo hemos mencionado algunos resultados sin incluir su demostración, pero mencionando siempre la fuente de la que han sido extraidos por si algún lector se interesa en la demostración de los mismos. En estas páginas hemos tratado de usar un lenguaje sencillo y de ser bastante didácticos y claros en la exposición y demostración de los resultados. Para tal fin hemos dividido el trabajo en capítulos.

En la primera parte (Capítulo 1-Capítulo 4) son estudiados los Semigrupos de Operadores Lineales Acotados, en especial se estudian los *Semigrupos de Clase* C_0 o fuertemente continuos, los conceptos de *generador infinitesimal*, *operadores disipativos*, *m-disipativos* y también la noción de *conjunto resolvente* asociado al generador infinitesimal de un semigrupo de modo que estos resultados son aplicados a la demostración de un teorema fundamental en la Teoría de Semigrupos, el *Teorema de Lumer-Phillips.*

En la segunda parte del trabajo (Capítulo 5), utilizaremos todo el material expuesto en el Capítulo 1 al Capítulo 4, para resolver tres *problemas de evolución*:

La ecuación de las ondas con condición de frontera de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} u'' - \Delta u &= 0 & \text{en } (0,\infty)\times\Omega \\ u &= 0 & \text{en } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

La ecuación del calor con condición de frontera homogénea de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} u' - \Delta u &= 0 & \text{en } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) &= 0 & \text{en } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}u' &= \Delta u - qu \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son prototipos de ecuaciones hiperbólica y parabólica respectivamente y la ecuación de Schrödinger es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica no relativista.

Aunque la teoría de semigrupos de operadores se puede aplicar en muchas situaciones más, nos hemos centrado en el estudio de estos tres modelos.

Debemos mencionar que esta Monografía está basada en los Capítulos I y II del libro *"Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução"* del Profesor Alvercio Moreira Gomes, recientemente fallecido.

Nuestra intención al escribir este trabajo ha sido la de motivar a los estudiantes que se inclinen por el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, de la cual, la Teoria de Operadores Lineales proporciona un método elegante y eficaz para abordar problemas de evolución.

Uno de nuestros objetivos al escribir este trabajo ha sido el que los estudiantes puedan llenar los vacíos que muchas veces quedan cuando uno lee un texto sobre Teoría de Operadores. Esperamos haber alcanzado este objetivo.

Capítulo 2

Semigrupos de Operadores Lineales Acotados

A lo largo del trabajo consideraremos un espacio de Banach X cuya norma será denotada en adelante por $\| \, . \, \|$.

Definición 2.1. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de operadores lineales acotados de X. Se dice que una aplicación*

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

es un Semigrupo de Operadores Lineales Acotados en X si se satisfacen las siguientes condiciones

i) $S(0) = I$ *, donde I es el operador identidad de $\mathcal{L}(X)$.*

ii) $S(t+s) = S(t).S(s)$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}^+$

Si además se cumple que

$$\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall \, x \in X$$

se dirá que el semigrupo S es de clase C_0.

Definición 2.2. *El operador lineal* $A : D(A) \subset X \to X$ *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \ \lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ existe \right\}$$

y

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \ \ \forall \, x \in D(A)$$

es llamado generador infinitesimal del semigrupo S, $D(A)$ es el dominio de A.

Denotaremos por A_h el operador lineal acotado

$$A_h = \frac{S(h) - I}{h} \ , \ \ h > 0.$$

Definición 2.3. *Un semigrupo S, de operadores lineales acotados es llamado Fuertemente Continuo si*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x \ \ para \ cada \ x \in X.$$

Observación. Los semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados en X son también conocidos por Semigrupos de Clase C_0 o simplemente C_0.

Proposición 2.4. *Si S es un semigrupo de clase C_0. Entonces $\|S(.)\|$ es una función acotada en todo intervalo acotado* $[0, T]$.

Demostración.

Primero mostraremos que para algún $r > 0$,

$$\|S(.)\| \text{ es acotada en } [0, r] \tag{2.1}$$

es decir, existe $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M, \ \ \forall \, t \in [0, r]$.

Supongamos que (2.1) es falso entonces existe una sucesión (t_n) tal que $t_n \to 0^+$ y

$$\|S(t_n)\| \geq n, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Además por el Teorema de la Acotación Uniforme, para algún $x \in X$ la sucesión $\|S(t_n)x\|$ no es acotada. Pero por la Definición 2.3 la sucesión $\|S(t_n)x\|$ es convergente y así $\|S(t_n)x\|$ es acotada lo cual es una contradicción.

Luego $\|S(t)\| \leq M$, para $0 \leq t \leq r$ y como para $t = 0$ se tiene

$$1 = \|I\| = \|S(0)\| \leq M$$

Luego $M \geq 1$.

Ahora si $t \in [0, T]$, entonces $t = n\delta + r$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ y algún real r tal que $0 \leq r < \delta$. Luego usando la propiedad de semigrupos tenemos

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(n\delta + r)\| = \|S(n\delta)S(r)\| = \|S(\delta)^n S(r)\| \\ &\leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\| \leq M^n M = M^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $t = n\delta + r \geq n\delta$ entonces $M^{\frac{t}{\delta}} \geq M^n$, pues $M \geq 1$. Usando la desigualdad anterior en (2.2)

$$\|S(t)\| \leq MM^{\frac{t}{\delta}}$$

y también

$$MM^{\frac{t}{\delta}} = M\left(e^{\log M}\right)^{\frac{t}{\delta}} = M\left(e^{\frac{1}{\delta}\log M}\right)^t$$

de donde, si denotamos $w = \dfrac{1}{\delta}\log M \geq 0$, tenemos $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo $t \in [0, T]$, es decir $\|S(.)\|$ es una función acotada en $[0, T]$.

Corolario 2.5. *Todo semigrupo de clase C_0 es fuertemente continuo en $\mathbb{R}^+$, es decir, si $t \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x \ , \ \forall\, x \in X$$

Demostración.

Sea $t \in \mathbb{R}^+$. Si $h > 0$ se ve que

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)\,[S(h) - I]\,x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}}\,\|(S(h) - I)\,x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow 0$. Para $0 < h < t$, tenemos

$$\begin{aligned} \|S(t-h)x - S(t)x\| &= \|S(t-h)x - S(t-h+h)x\| = \|S(t-h)x - S(t-h)S(h)x\| \\ &= \|S(t-h)\,[I - S(h)]\,x\| \leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}}\,\|(S(h) - I)\,x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow 0$.

Ahora si se toma $h = t - s$, y como $h \rightarrow 0$ se tiene $s \rightarrow t$. Luego

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x \;,\; \forall\, x \in X. \;\blacksquare$$

Observación. Sea A un operador lineal acotado de X, se sabe que $\forall\, t \geq 0$,

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

tomando norma

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} \tag{2.3}$$

Si $w \geq \|A\|$, entonces $e^{tw} \geq e^{t\|A\|} \geq \left\|e^{tA}\right\|$.

Volviendo a (2.3) y por la desigualdad anterior se tiene

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{tw},\; \forall\, t \geq 0. \;\blacksquare$$

Definición 2.6. *Si X es un espacio vectorial real o complejo y p un funcional en X. Se dice que p es subaditiva si para todo x, $y \in X$ se cumple*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

y además para todo escalar α se satisface

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x).$$

En la siguiente proposición, será necesario el siguiente resultado.

Lema 2.7. *Sea p una función subaditiva en $\mathbb{R}^+$ y acotada superiormente en todo intervalo acotado, entonces $\frac{p(t)}{t}$ tiene límite cuando $t \to +\infty$ y*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}$$

Demostración. Ver [G].

Proposición 2.8. *Sea S un semigrupo de clase C_0. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\|S(t)\|}{t} = w_0$$

y para cada $w > w_0$, existe una constante $M \geq 1$, tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall\, t \geq 0$$

Demostración.

Como S es un semigrupo entonces

$$\begin{aligned} \log\|S(t+s)\| &= \log\|S(t).S(s)\| \\ &\leq \log\|S(t)\|\,\|S(s)\| \\ &= \log\|S(t)\| + \log\|S(s)\| \end{aligned}$$

de la desigualdad anterior se observa que la función $\log\|S(t)\|$ es subaditiva en $\mathbb{R}^+$. Por la Proposición 2.4, $\|S(t)\|$ es acotada superiormente en todo intervalo acotado, entonces $\log\|S(t)\|$ es acotada en todo intervalo acotado.

Ahora como log$\|S(t)\|$ satisface las hipótesis del Lema 2.7, denotando $p(t) = \log\|S(t)\|$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\|S(t)\|}{t} = w_0$$

Si $w > w_0$ entonces

$$w > w_0 = \inf_{t>0} \frac{\log\|S(t)\|}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t}. \tag{2.4}$$

Como $w > w_0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $w_0 + \dfrac{1}{n} < w$.

Luego por la definición de límite en (2.4) se tendrá que para todo $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, existirá $t_0 > 0$ tal que si $t > t_0$ entonces

$$\left|\frac{\log\|S(t)\|}{t} - w_0\right| < \varepsilon = \frac{1}{n}$$

$$w_0 - \frac{1}{n} < \frac{\log\|S(t)\|}{t} < w_0 + \frac{1}{n}$$

como existe $t_0 > 0$ tal que $t > t_0$, en la desigualdad anterior se tiene

$$\frac{\log\|S(t)\|}{t} < w_0 + \frac{1}{n} < w$$

tomando los extremos tenemos

$$\frac{\log\|S(t)\|}{t} < w \tag{2.5}$$

Además, como $\|S(t)\|$ es acotada en $[0, t_0]$, es decir, $\|S(t)\| \leq M_0, \quad \forall\ t \in [0, t_0]$ entonces, en particular se tiene que $M_0 \geq \|S(0)\| = \|I\| = 1$.

Primer caso. Si $w \geq 0$.

De (2.5) tenemos que $\dfrac{\log\|S(t)\|}{t} < w$, entonces

$$\log\|S(t)\| < wt \tag{2.6}$$

Como $M_0 \geq 1$, entonces $\log M_0 \geq \log 1 = 0$. De (2.6)

$$\log \|S(t)\| < wt \leq wt + \log M_0 \quad , \quad \forall\, t \geq 0$$

tomando exponencial y haciendo $M = M_0$ se tiene

$$e^{\log \|S(t)\|} \leq e^{wt + \log M_0} = e^{wt} e^{\log M_0},$$

luego

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}. \tag{2.7}$$

Segundo caso. Si $w < 0$.

En este caso se tiene que $wt_0 \leq 0$, pues $t \in [0, t_0]$ entonces $-wt_0 \geq 0$; y como $\log M_0 \geq 0$, se tiene

$$-wt_0 + \log M_0 \geq 0 \tag{2.8}$$

además, de (2.6) y (2.8) llegamos a

$$\log \|S(t)\| < wt \leq wt - wt_0 + \log M_0, \quad \forall\, t \geq 0$$

tomando exponencial se tiene $\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{-wt_0} M_0$; denotando $M = M_0 e^{-wt_0}$ tenemos

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.9}$$

De (2.7) y (2.9) concluimos que

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall\, t \geq 0$$

luego $M \geq 1$.■

Definición 2.9. *Sea S un semigrupo de clase C_0,* *i) Si $\|S(t)\| \leq M, \ \ \forall\, t \geq 0$, diremos que S es uniformemente acotado.*

ii) Si $\|S(t)\| \leq 1$, diremos que S es un semigrupo de contracciones.

Observación. Sea E un espacio de Banach real o complejo.

Para funciones $T : I \to E$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, nociones tales como $\dfrac{dT}{dt}$, $\displaystyle\int_a^b T(t)\,dt$ están definidas de la misma manera que en el caso $E = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, los límites de los cocientes de Newton o de las sumas de Riemann son tomados según la topología de la norma en E. Todos los teoremas usuales se verifican.

Lema 2.10. *Sea T un semigrupo de clase C_0 y sea A su generador infinitesimal. Entonces, para cada $x \in X$ se tiene*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

Demostración.

Como T es un semigrupo de clase C_0 se tiene que

$$\lim_{s\to 0^+} T(s)x = x, \ \ \forall\, x \in X,$$

es decir $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < s < \delta$ entonces $\|T(s)x - x\| < \dfrac{\varepsilon}{Me^{wt}}$.

Sea h tal que $0 < h < s < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_0^{h} T(t+s)xds - T(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_0^{h} T(t)T(s)xds - T(t)x\right\| \\
&\leq \|T(t)\| \left\|\frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)xds - x\right\| \leq \|T(t)\|\,\frac{1}{h}\int_0^{h} \|T(s)x - x\|\,ds \\
&\leq Me^{wt}.\frac{h}{h}.\frac{\varepsilon}{Me^{wt}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x. \ \blacksquare$$

Proposición 2.11. *Sea S un semigrupo de clase C_0 y sea A su generador infinitesimal.*

i) *Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A)$ $\forall\, t \geq 0$ y*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

ii) *Si $x \in D(A)$, entonces*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(u)xdu = \int_s^t S(u)Axdu$$

iii) *Si $x \in X$, entonces*

$$\int_0^t S(u)xdu \in D(A)$$

y

$$S(t)x - x = A\left(\int_0^t S(u)xdu\right)$$

Demostración.

i) Sea $x \in D(A)$ y $h > 0$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{S(t+h)-S(t)}{h}x &= \frac{S(t)S(h)-S(t)}{h}x = S(t)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x \\ &= \left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)x \end{aligned} \tag{2.10}$$

cuando $h \to 0^+$ y como $x \in D(A)$ el primer término tenderá a $\frac{d^+}{dt}S(t)x$; también $S(t)A_hx \to S(t)Ax$ y el término final $A_hS(t)x \to AS(t)x$, luego se tiene que $S(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \tag{2.11}$$

Por otro lado, para $0 < h < t$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{S(t)x-S(t-h)x}{h}-S(t)Ax\right]\\
&\qquad=\lim_{h\to 0^+} S(t-h)\left[\frac{S(h)x-x}{h}\right]-\lim_{h\to 0^+}S(t)Ax\\
&\qquad=\lim_{h\to 0^+} S(t-h)\left[\frac{S(h)x-x}{h}-Ax+Ax\right]-\lim_{h\to 0^+}S(t)Ax \qquad (2.12)\\
&\qquad=\lim_{h\to 0^+} S(t-h)\left[\frac{S(h)x-x}{h}-Ax\right]+\lim_{h\to 0^+}S(t-h)Ax\\
&\qquad\quad-\lim_{h\to 0^+}S(t)Ax
\end{aligned}
$$

y se sabe que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)x-x}{h}=Ax,$$

Volviendo a (2.12) cuando $h\to 0^+$. Tenemos que la última expresión tiende a cero.

Luego

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x=S(t)Ax \qquad (2.13)$$

Finalmente de (2.11) y (2.13) se tiene que

$$\frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax. \ \square$$

ii) Como

$$\frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax, \qquad (2.14)$$

entonces integrando (2.14) de s a t , tenemos

$$
\begin{aligned}
S(u)x\,|_s^t=\int_s^t\frac{d}{du}S(u)xdu=\int_s^t AS(u)xdu=\int_s^t S(u)Axdu\\
S(t)x-S(s)x=\int_s^t AS(u)xdu=\int_s^t S(u)Axdu. \ \square
\end{aligned}
$$

iii) Para todo $x\in X$ y $h>0$, tenemos

$$A_h\int_0^t S(u)xdu \;=\; \frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(u)xdu$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_0^t (S(h)-I)S(u)xdu \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t S(h)S(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t S(u)xdu \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(h+u)xdu - \int_0^t S(u)xdu\right]
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
A_h \textstyle\int_0^t S(u)xdu &= \frac{1}{h}\left[\textstyle\int_h^{t+h} S(h+u-h)xdu - \int_0^t S(u)xdu\right]; \text{ como } 0<h<t \\
&= \frac{1}{h}\left[\textstyle\int_h^{t+h} S(u)xdu - \left(\int_0^h S(u)xdu + \int_h^t S(u)xdu\right)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\textstyle\int_h^{t+h} S(u)xdu - \int_0^h S(u)xdu + \int_t^h S(u)xdu\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\textstyle\int_t^{t+h} S(u)xdu - \int_0^h S(u)xdu\right] \\
&= \frac{1}{h}\textstyle\int_t^{t+h} S(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h S(u)xdu
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

por el Lema 2.10 cuando $h \to 0$ en (2.15) se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(u)xdu = S(t)x - x.$$

Luego $\int_0^t S(u)xdu \in D(A)$ pues el límite existe y además

$$A\left(\int_0^t S(u)xdu\right) = S(t)x - x$$

lo cual completa la prueba. ■

Proposición 2.12. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, entonces*

a) A es un operador lineal y cerrado.

b) $D(A)$ es denso en X.

c) *Un operador lineal A, cerrado y con dominio denso en X, es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 como máximo.*

Demostración.

Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.

a) A es evidentemente lineal, probaremos que el operador A es cerrado.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Por demostrar que $x \in D(A)$ y $Ax = y$

En efecto.

Por (ii) de la Proposición 2.11 tenemos que, como $x_n \in D(A)$ entonces

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_n dt \tag{2.16}$$

pues $S(t)Ax_n = \dfrac{d}{dt}S(t)x_n$; y $S(0) = I$ ya que S es un semigrupo de clase C_0.

Además, por Proposición 2.4 tenemos que si S es un semigrupo de clase C_0 entonces $\|S(t)\|$ es una función acotada, i.e., existe $M > 0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall\, t \in [0,h]\,;$$

luego, si $t \in [0,h]$

$$\begin{aligned}\|S(t)Ax_n - S(t)y\| &= \|S(t)\,[Ax_n - y]\| \leq \|S(t)\|\,\|Ax_n - y\| \\ &\leq M\,\|Ax_n - y\|\end{aligned}$$

Como $Ax_n \to y$, el último término converge a cero, luego $S(t)Ax_n \to S(t)y$, uniformemente en $t \in [0,h]$.

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, tenemos de (2.16)

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)y dt;$$

pues $x_n \to x,\ Ax_n \to y$. Luego multiplicando por $\dfrac{1}{h}$

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y dt$$

y como $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h S(t)y dt \to y$, cuando $h \to 0^+$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x = y,$$

entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$. Luego A es un operador cerrado.

b) Bastará probar que $\overline{D(A)} = X$; denotemos

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x dt$$

para cada $x \in X$ y $h > 0$, se tiene por la parte (*iii*) de la Proposición 2.11 que $x_h \in D(A)$ y por el Lema 2.10 $x_h \to x$ cuando $h \to 0^+$, resulta que $x \in \overline{D(A)}$. Luego $\overline{D(A)} = X$.

c) Si S_1 y S_2 son semigrupos de clase C_0 y A es el generador infinitesimal de los semigrupos S_1 y S_2.

Si $0 \leq s \leq t < \infty$, para cada $x \in D(A)$, la función

$$\phi(s)x = S_1(t-s)\, S_2(s)\, x$$

es diferenciable en el intervalo $0 \leq s \leq t$, y por la Proposición 2.11 parte (i)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\phi(s)x &= \frac{d}{ds}\left(S_1\left(t-s\right)S_2\left(s\right)x\right)\\
&= \frac{d}{ds}S_1\left(t-s\right)\left(S_2\left(s\right)x\right)+S_1\left(t-s\right)\frac{d}{ds}S_2\left(s\right)x\\
&= -AS_1\left(t-s\right)S_2\left(s\right)x+S_1\left(t-s\right)AS_2\left(s\right)x\\
&= -S_1\left(t-s\right)AS_2\left(s\right)x+S_1\left(t-s\right)AS_2\left(s\right)x\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego por el Teorema 3.1 del apéndice de [G] se tiene que $\phi(s)x$ es constante para $0 \leq s \leq t$.

Para $s=0$, $\phi(0)x = S_1\left(t\right)x$.

Para $s=t$, $\phi(t)x = S_2\left(t\right)x$, de donde

$$S_1\left(t\right)x = S_2\left(t\right)x, \ \ \forall\, x \in X$$

pues $D\left(A\right)$ es denso en X y $S_1\left(t\right),\ S_2\left(t\right) \in \mathcal{L}\left(X\right)$. De donde concluimos que $S_1 = S_2$. ∎

Ejemplos

1) Son ejemplos de semigrupos de clase C_0 las funciones exponenciales e^{tA}. Su generador infinitesimal es A.

   Veamos que e^{tA} cumpla las condiciones de la Definición 2.1.Denotemos

   $$e^{tA} = S(t)$$

   i) $S(0) = e^{0A} = I$

   ii) $S(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA}.e^{sA} = S(t).S(s)$

iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)\,x\| = 0$

En efecto. Como

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

desarrollando la sumatoria

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + ... + \frac{t^nA^n}{n!} + ... \tag{2.17}$$

pero esto se puede escribir como

$$e^{tA} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

luego se tiene que

$$e^{tA} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

tomando norma a ambos miembros

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA} - I\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| = \left\|tA + \frac{t^2A^2}{2!} + ... + \frac{t^nA^n}{n!} + ...\right\| \\
&\leq \|tA\| + \left\|\frac{t^2A^2}{2!}\right\| + ... + \left\|\frac{t^nA^n}{n!}\right\| + ... \\
&= t\,\|A\| + \frac{t^2}{2!}\left\|A^2\right\| + ... + \frac{t^n}{n!}\left\|A^n\right\| + ...
\end{aligned}$$

y como $\left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$ y $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{n!}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA} - I\right\| &\leq t\,\|A\| + \frac{t^2}{2!}\|A\|^2 + ... + \frac{t^n}{n!}\|A\|^n + ... \\
&\leq t\,\|A\| + \frac{t^2}{1!}\|A\|^2 + ... + \frac{t^n}{(n-1)!}\|A\|^n + ... \\
&= t\,\|A\|\left(1 + \frac{t}{1!}\|A\| + \frac{t^2}{2!}\|A\|^2 + ... + \frac{t^n}{n!}\|A\|^n + ...\right) \\
&= t\,\|A\|\,e^{t\|A\|}
\end{aligned}$$

tomando extremos

$$\left\|e^{tA} - I\right\| \leq t\,\|A\|\,e^{t\|A\|},$$

de donde, haciendo $t \to 0$, $\left\|e^{tA} - I\right\| \to 0$, es decir,

$$\|S(t) - I\| \to 0 \tag{2.18}$$

cuando $t \to 0^+$; de esto se observa que se satisface (iii).

Entonces $S(t) = e^{tA}$ es un semigrupo de clase C_0.

Hallemos el generador infinitesimal de $S(t) = e^{tA}$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{e^{hA} - I}{h}x - Ax\right\| &= \frac{1}{h}\left\|e^{hA}x - Ix - hAx\right\| \\
&= \frac{1}{h}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}x - Ix - hAx\right\| \\
&= \frac{1}{h}\left\|Ix + hAx + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}x - Ix - hAx\right\| \\
&= \frac{1}{h}\left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!}x\right\| \leq \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}h^n\|A\|^n\|x\| \\
&= \frac{1}{h}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}h^n\|A\|^n\|x\| + h\|A\|\|x\| - h\|A\|\|x\|\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}h^n\|A\|^n\|x\| - h\|A\|\|x\|\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-1}\left\|A^{n-1}\right\|\|x\|\|A\| - \|A\|\|x\|
\end{aligned}$$

haciendo $n - 1 = k$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{e^{hA} - I}{h}x - Ax\right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}h^k\left\|A^k\right\|\|x\|\|A\| - \|A\|\|x\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}h^k\left\|A^k\right\|\|x\|\|A\| - \|A\|\|x\| \\
&\leq \|x\|\|A\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}h^k\|A\|^k - \|A\|\|x\| \\
&= \|x\|\|A\|\left(e^{h\|A\|} - 1\right)
\end{aligned}$$

Finalmente tomando extremos se llega a que

$$\left\|\frac{e^{hA}-I}{h}x - Ax\right\| \leq \|x\| \, \|A\| \left(e^{h\|A\|}-1\right) \to 0,$$

cuando $h \to 0$, lo cual prueba que A es el generador infinitesimal del semigrupo $S(t) = e^{tA}$.

2) Sea S un semigrupo de clase C_0, con generador infinitesimal A, y sea

$$\widetilde{S}(t) = e^{-\lambda t}S(t)$$

Probemos que $\widetilde{S}$ es un semigrupo de clase C_0 y que su generador infinitesimal es $A - \lambda I$.

En efecto. Para que sea un semigrupo de clase C_0 debe de cumplir 3 condiciones. Veamos que cumple cada una de ellas

i) Por demostrar que $\widetilde{S}(0) = I$

Tenemos que $\widetilde{S}(0) = e^{-\lambda 0}S(0)$ y como S es un semigrupo de clase C_0 se cumple que $S(0) = I$; luego $\widetilde{S}(0) = I$.

ii) Por demostrar que $\widetilde{S}(t+s) = \widetilde{S}(t).\widetilde{S}(s)$

Como $\widetilde{S}(t+s) = e^{-\lambda(t+s)}S(t+s)$ y como S es un semigrupo

$$\widetilde{S}(t+s) = e^{-\lambda t}.e^{-\lambda s}S(t)S(s) = e^{-\lambda t}S(t)e^{-\lambda s}S(s) = \widetilde{S}(t)\widetilde{S}(s).$$

iii) Veamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(t) - I &= e^{-\lambda t}S(t) - I \\
&= e^{-\lambda t}S(t) - I + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t}\left(S(t) - I\right) + \left(e^{-\lambda t} - 1\right) I
\end{aligned}$$

se tiene que,

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)\,x\| = 0, \quad \forall\, x\in X$$

pues S es un semigrupo de clase C_0 y además $e^{-\lambda t}-1\to 0$ cuando $t\to 0^+$. Por lo cual

$$\left\|\left(\widetilde{S}(t)-I\right)x\right\| \to 0, \quad \forall\, x\in X$$

cuando $t\to 0^+$. Luego $\widetilde{S}$ es un semigrupo de clase C_0.

Hallemos el generador infinitesimal del semigrupo $\widetilde{S}$

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{S}(h)-I}{h}x &= \frac{e^{-\lambda h}S(h)-I}{h}x = \frac{e^{-\lambda h}S(h)-e^{-\lambda h}+e^{-\lambda h}-I}{h}x \\
&= \frac{e^{-\lambda h}\,(S(h)-I)}{h}x + \frac{e^{-\lambda h}I-I}{h}x \\
&= e^{-\lambda h}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x + \left(\frac{e^{-\lambda h}-I}{h}\right)x
\end{aligned}$$

cuando $h\to 0$ se tiene

$$e^{-\lambda h}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x + \left(\frac{e^{-\lambda h}-I}{h}\right)x \to Ax-\lambda Ix$$

Ahora

$$(A-\lambda I)\,x = \lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{S}(h)-I}{h}x,$$

luego denotando con $\widetilde{A} = A-\lambda I$ se tiene que $\widetilde{A}$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\widetilde{S}$.

Capítulo 3

Generación de Semigrupos

3.1 **Definiciones.** Sea A un operador lineal de X.

i) El conjunto de los números $\lambda \in \mathbb{C}$, para los cuales el operador lineal $(\lambda I - A)$ es invertible y su inverso es acotado y tiene dominio denso en X, es llamado *Conjunto Resolvente* de A y se denota por $\rho(A)$.

ii) El conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ es llamado *espectro* de A.

iii) El operador lineal $(\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ se denota por $R(\lambda, A)$ y es llamado *Resolvente de A*.

El caso particular en que $X = \mathbb{C}$, todo operador lineal A de X es de la forma $Ax = \alpha x$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si consideramos $S(t)\,x = e^{\alpha t}x$ para $x \in \mathbb{C}$ tendriamos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t) - I}{t} x = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\alpha t}x - I}{t} x = \alpha x.$$

Luego, $A = \alpha$ es el generador infinitesimal del semigrupo $S(t)$ definido antes y

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda - \alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\alpha t} dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\alpha$$

Teorema 3.1. *Sea S un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A. Si $Re\lambda > w_0$, donde*

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$$

entonces $\lambda \in \rho(A)$ y

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt\,, \quad \forall\, x \in X. \tag{3.1}$$

Demostración. Si $\mathrm{Re}\lambda \geq \mu > w > w_0$ y como S es un semigrupo de clase C_0, existe por la Propósición 2.8 una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}\,,\ \forall\, t \geq 0$$

Además se tiene que

$$\int_0^\infty e^{(w-\mu)t} dt = \frac{1}{\mu - w} \tag{3.2}$$

y como la función exponencial es continua, entonces $S(t)$ es continua, luego la función

$$f(t, \lambda) = e^{-\lambda t} S(t)$$

es continua. Luego

$$\begin{aligned}
\|f(t,\lambda)x\| &= \left\|e^{-\lambda t} S(t)x\right\| \leq \left|e^{-\lambda t}\right| \|S(t)\|_{\mathcal{L}} \|x\| \\
&= e^{-(\mathrm{Re}\,\lambda)t}. \|S(t)\|_{\mathcal{L}} \|x\| \leq e^{-(\mathrm{Re}\,\lambda)t}.Me^{wt} \|x\| \\
&= Me^{(w-\mathrm{Re}\,\lambda)t} \|x\| \leq Me^{(w-\mu)t} \|x\|
\end{aligned}$$

denotando $N(t) = Me^{(w-\mu)t}$ y como $\displaystyle\int_0^\infty N(t)dt$ converge por (3.2) entonces

$$\int_0^\infty f(t,\lambda)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

es convergente por el Teorema de Weierstrass, ver [G].

Denotemos

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > w, \quad x \in X. \tag{3.3}$$

Afirmación. R_λ es lineal y acotado.

Linealidad. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned}
R_\lambda(\alpha x + y) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)(\alpha x + y) dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) y dt \\
&= \alpha R_\lambda(x) + R_\lambda(y).
\end{aligned}$$

Acotación

$$\begin{aligned}
|R_\lambda(x)| &\leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|S(t)x\| \, dt \leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| \|S(t)\|_{\mathcal{L}} \|x\|_X \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| M e^{wt} \|x\| \, dt = M \|x\| \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| e^{wt} dt.
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{|R_\lambda(x)|}{\|x\|} \leq M \int_0^\infty \left|e^{-\lambda t}\right| e^{wt} dt < \infty, \tag{3.4}$$

como $\left|e^{-\lambda t}\right| = e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} . \left|e^{-i \operatorname{Im}(\lambda)t}\right| = e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t}$ se tiene, tomando $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \neq 0}}$ en (3.4)

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}} \leq M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} . e^{wt} dt$$

pero como

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\alpha t} dt \ \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\alpha$$

tenemos $\|R_\lambda\| \leq M . \left(\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda - w}\right)$. Luego, tenemos que $\lambda \in \rho(A)$.

Ahora, por la definición dada en (3.3) y como S es un semigrupo de clase C_0 tenemos

$$A_h R_\lambda x = \frac{S(h) - I}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt = \frac{1}{h} \int_0^\infty (S(h) - I) e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(S(t+h)-S(t)\right)xdt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $r = t + h$ en la primera integral obtenemos

$$\begin{aligned} A_h R_\lambda x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(r-h)}S(r)xdr - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)xdr \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{\lambda h}e^{-\lambda r}S(r)xdr - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)xdr \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)xdr - \int_0^h e^{-\lambda r}S(r)xdr\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)xdr \end{aligned}$$

es decir

$$A_h R_\lambda x = \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)xdr - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda r}S(r)xdr \tag{3.5}$$

notemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{\lambda h}-1}{h} = \lambda$ y $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda r}S(r)xdr = x$. Luego, tomando límite cuando $h \to 0^+$ en (3.5) tenemos

$$\lim_{h\to 0^+} A_h R_\lambda x = \lambda R_\lambda(x) - x \; ; \quad \forall\, x \in X$$

Ahora, como el $\lim\limits_{h\to 0^+} A_h R_\lambda x$ existe, entonces para cada $x \in X$, $R_\lambda x \in D(A)$ y $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$ es decir

$$(\lambda I - A)R_\lambda(x) = x \tag{3.6}$$

Por otro lado, si $x \in D(A)$ y como A es el generador infinitesimal del semigrupo S, por la Proposición 2.11 parte (i) se tiene que $S(t)Ax = AS(t)x$ y

$$\begin{aligned} R_\lambda(Ax) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Axdt = \int_0^\infty Ae^{-\lambda t}S(t)xdt \\ &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt = AR_\lambda x \end{aligned}$$

Luego, $R_\lambda(Ax) = AR_\lambda x$, $\forall\, x \in D(A)$. Reemplazando en (3.6) tenemos

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x \; ; \; \forall\, x \in D(A)$$

i.e., $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$. Luego de (3.3)

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

lo cual prueba la fórmula (3.1).■

Observación 1. Probaremos que $AR(\lambda, A) = R(\lambda, A)A$.

En efecto.

$$\begin{aligned} AR(\lambda, A) &= A(\lambda I - A)^{-1} = \left((\lambda I - A)A^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\lambda I A^{-1} - AA^{-1}\right)^{-1} = \left(\lambda I A^{-1} - I\right)^{-1} \\ &= \left(A^{-1}(\lambda I) - A^{-1}A\right)^{-1} = \left(A^{-1}(\lambda - A)\right)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} A = R(\lambda, A)A, \end{aligned}$$

i.e., A y $R(\lambda, A)$ conmutan.

Corolario 3.2. Sea S *un semigrupo de clase* C_0, *con generador infinitesimal* A. *Si* $\mathrm{Re}\lambda > w_0$, donde

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$$

entonces

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \tag{3.7}$$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n S(t) x dt\ ,\ \forall\, x \in X \tag{3.8}$$

Demostración. Ver [G].

Teorema (Hille-Yosida). *Un operador lineal* $A : D(A) \subset X \to X$ *es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase* C_0 *si y solo si*

i) A *es cerrado y* $\overline{D(A)} = X$.

ii) Existen números reales M y w tales que para cada número real $\lambda > w$ se tiene $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

Demostración.

Necesidad.

Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Se probó en la Proposición 2.12 que A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$. Resta probar la fórmula (3.9).

Para cada $w > w_0$, donde $w_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log\|S(t)\|}{t}$ se tiene por la Proposición 2.8 que existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

y por el Teorema 3.1, si $\lambda > w$ entonces $\lambda \in \rho(A)$.

De (3.7) se tiene

$$R(\lambda, A)^{n+1}x = \frac{1}{n!}\frac{1}{(-1)^n}\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x,$$

y por (3.8)

$$R(\lambda, A)^{n+1}x = \frac{1}{n!}\frac{1}{(-1)^n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(-1)^n t^n S(t)x\,dt\,, \;\forall\, x \in X.$$

Luego, si $n \geq 1$ llegamos a

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n-1}S(t)x\,dt.$$

Luego, tomando norma en la igualdad anterior tenemos

$$\|R(\lambda, A)^n\| \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{n-1}S(t)\,dt\right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \left\| e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t) \right\| dt \\
&\leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-w)t} dt \ , \ n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{M}{(\lambda-w)^n} \ , \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Tomando extremos se tiene

$$
\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-w)^n}\ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}
$$

lo cual prueba la fórmula (3.9).

Suficiencia.

Sea A un operador que satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema y sea $R(\lambda, A)$ el resolvente de A.

Definamos

$$
B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I, \quad \lambda > w
$$

la cual es llamada *la Aproximación Yosida de A*. Debemos mostrar que el semigrupo (función exponencial) e^{tB_λ} tiende cuando $\lambda \to +\infty$, a un semigrupo de clase C_0 cuyo generador infinitesimal es A.

$a)$ Primero probaremos que

$$
\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax, \quad \forall\, x \in D(A).
$$

En efecto. Como $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, entonces $(\lambda I - A)R(\lambda, A) = I$, distribuyendo $R(\lambda, A)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\lambda I R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) &= I \\
\lambda I R(\lambda, A) - I &= AR(\lambda, A)
\end{aligned}
$$

y como fue probado en la Observación 1, A conmuta con $R(\lambda, A)$, entonces

$$\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A$$

de donde, si $x \in D(A)$:

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax \tag{3.11}$$

tomando norma en (3.11)

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\| \, \|Ax\| \\ &\leq \frac{M}{(\lambda - w)} \|Ax\| = M \|Ax\| (\lambda - w)^{-1} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $\lambda \to \infty$, es decir, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \ \forall \, x \in D(A)$.

Además, tenemos por la hipótesis que

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| = |\lambda| \, \|R(\lambda, A)\| \leq |\lambda| \frac{M}{\lambda - w}$$

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M \, |\lambda| \, (\lambda - w)^{-1}$$

para un λ suficientemente grande, $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 2M$ pues

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)\| &\leq M \frac{\lambda}{\lambda - w} = M \left(\frac{\lambda - w + w}{\lambda - w} \right) = M \left(1 + \frac{w}{\lambda - w} \right) \\ &\leq 2M. \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall \, x \in X. \tag{3.12}$$

pues por hipótesis $\overline{D(A)} = X$.

Luego, como

$$B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I = \lambda \left[\lambda R(\lambda, A) - I \right] = \lambda R(\lambda, A) A \tag{3.13}$$

para cada $x \in D(A)$ se tiene por (3.12) que

$$\lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A) A x = Ax. \tag{3.14}$$

lo cual prueba la afirmación hecha en (a).

$b)$ De la definición de B_λ y como A satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema Hille-Yosida se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tB_\lambda}\right\| &= \left\|e^{t(\lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda I)}\right\| = \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}.e^{-\lambda t I}\right\| \\
&\leq \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\| \left\|e^{-\lambda t I}\right\| \leq e^{-\lambda t}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\| \\
&= e^{-\lambda t}\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t\lambda^2 R(\lambda,A)\right)^n}{n!}\right\| \\
&\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{t^n \lambda^{2n} R(\lambda,A)^n}{n!}\right\| \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^{2n}}{n!} \left\|R(\lambda,A)^n\right\| \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t\lambda^2\right)^n}{n!} \left\|R(\lambda,A)^n\right\|
\end{aligned}$$

pero por la parte (ii) del Teorema de Hille-Yosida tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tB_\lambda}\right\| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n M}{n!(\lambda - w)^n} = M e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!(\lambda - w)^n} \\
&= M e^{-\lambda t}.e^{t\lambda^2(\lambda - w)^{-1}} = M e^{\lambda w t(\lambda - w)^{-1}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Además, consideremos la función $f(\lambda) = \dfrac{w\lambda}{\lambda - w}$, la cual es continua $\forall\ \lambda \in \mathbb{R} - \{w\}$ y además $\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = w$.

Entonces, dado $\xi > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(\lambda) - w| < \xi, \ \ \forall\ \lambda > M$. Luego, para cada $\gamma > w$, podemos tomar $\xi = \gamma - w$, entonces existirá $M = \lambda(\gamma)$ tal que

$$|f(\lambda) - w| < \xi, \quad \forall\ \lambda > M = \lambda(\gamma)$$

luego $f(\lambda) - w < \xi = \gamma - w$, i.e.,

$$f(\lambda) = \frac{\lambda w}{\lambda - w} < \gamma, \quad \forall\ \lambda > \lambda(\gamma)$$

entonces, volviendo a (3.15)

$$\left\|e^{tB_\lambda}\right\| \leq Me^{tw\lambda(\lambda-w)^{-1}} < Me^{t\gamma},\ \forall\,\lambda > \lambda(\gamma) \tag{3.16}$$

c) Probaremos ahora que e^{tB_λ} tiende fuertemente para un operador lineal acotado cuando $\lambda \to \infty$.

Denotemos $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$. Como para cada λ y cada $\mu, R(\lambda, A)$ conmuta con $R(\mu, A)$ se tiene que $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$.

En efecto, por (3.13)

$$\begin{aligned} B_\lambda B_\mu &= [\lambda AR(\lambda,A)]\,[\mu AR(\mu,A)] = [\mu AR(\lambda,A)]\,[\lambda R(\mu,A)A] \\ &= \mu A\,[R(\lambda,A)\lambda R(\mu,A)]\,A = \mu A\,[R(\mu,A)\lambda R(\lambda,A)]\,A \\ &= [\mu AR(\mu,A)]\,[\lambda AR(\lambda,A)] = B_\mu B_\lambda \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B_\lambda^n}{n!}$$

entonces se tiene que $B_\lambda S_\mu = S_\mu B_\lambda$.

En efecto

$$\begin{aligned} B_\lambda S_\mu &= B_\lambda \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n B_\mu^n}{n!} \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n B_\lambda B_\mu^n}{n!} \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n B_\mu^n}{n!} \right) B_\lambda = S_\mu B_\lambda. \end{aligned}$$

Ahora por (*ii*) de la Proposición 2.11 se tiene que para cada $x \in D(A)$,

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = \int_0^t \frac{d}{du}\left[S_\mu(t-u)S_\lambda(u)x\right] du$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{d}{du}\left[e^{(t-u)B_\mu}.e^{uB_\lambda}\right] xdu \\
&= \int_0^t \left[e^{(t-u)B_\mu}(B_\lambda - B_\mu)e^{uB_\lambda}\right] xdu \\
&= \int_0^t S_\mu(t-u)\left[B_\lambda - B_\mu\right] S_\lambda(u)xdu \\
&= \int_0^t S_\mu(t-u)S_\lambda(u)\left[B_\lambda - B_\mu\right] xdu
\end{aligned}
$$

tomando norma en los extremos de la igualdad anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\right\| &\leq \int_0^t \left\|S_\mu(t-u)\right\| \left\|S_\lambda(u)\right\| \left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| du \\
&= \int_0^t \left\|e^{(t-u)B_\mu}\right\| \left\|e^{uB_\lambda}\right\| \left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| du
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

pero en (3.16) se probó que para todo $\lambda > \lambda(\gamma)$; $\left\|e^{tB_\lambda}\right\| \leq Me^{t\gamma}$, luego volviendo a (3.17) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\right\| &\leq \int_0^t Me^{(t-u)\gamma}.Me^{u\gamma}\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| du \\
&= M^2e^{t\gamma}\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| \int_0^t du \\
&= M^2te^{t\gamma}\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\|, \ \forall\ \lambda,\ \mu > \lambda(\gamma)
\end{aligned}
$$

y como $\lim\limits_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax,\ x \in D(A)$ se tiene $\left\|B_\lambda x - B_\mu x\right\| \to 0$ cuando $\lambda, \mu \to \infty$, $\forall\ x \in D(A)$. Finalmente

$$
\left\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\right\| \to 0
$$

es decir $\forall\ x \in D(A)$, $S_\lambda(t)x$ converge, siendo la convergencia uniforme en relación a t en cada intervalo finito donde $t \in [0, T]$.

Además por hipótesis tenemos $D(A)$ es denso en X y $S_\lambda(t)$ es acotado cuando $\lambda \to \infty$. Luego de (3.16) y por el Teorema de Banach- Steinhaus, existe un operador lineal acotado $S(t)$ tal que

$$
\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x = S(t)x,\ \forall\ x \in X \tag{3.18}
$$

este límite es uniforme en intervalos acotados.

d) Probaremos ahora que $S(t)$ es un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.

En efecto.

i) $S(t)$ es un operador lineal

$$
\begin{aligned}
S(t)\,(\alpha x + y) &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda}\,(\alpha x + y) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(e^{tB_\lambda}\alpha x + e^{tB_\lambda} y\right) \\
&= \alpha \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda} x + \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda} y = \alpha S(t)x + S(t)y
\end{aligned}
$$

ii) $S(t)$ cumple las propiedades de semigrupo.

Tenemos que para cada $\lambda > w,\ S_\lambda$ es un semigrupo. Luego

a) $S(0) = I$

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(0)x = x$$

b) $S(t+s) = S(t)S(s)$

$$S(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = S(t)S(s)x$$

c) $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x$

$$\|S(t)x - x\| \le \left\|S(t)x - e^{tB_\lambda}x\right\| + \left\|e^{tB_\lambda}x - x\right\| \to 0$$

cuando $t \to 0^+$(hemos utilizado la continuidad uniforme en $t = 0$ de e^{tB_λ}).

De todo esto se ve que S es un semigrupo de clase C_0.

e) Falta demostrar que el generador infinitesimal de $S(t)$ es A. Para ello probaremos primero que

$$e^{tB_\lambda} B_\lambda x \to S(t)Ax$$

cuando $\lambda \to +\infty$.

Tenemos en (3.16) que, para todo $\lambda > \lambda(\gamma)$, $\left\|e^{tB_\lambda}\right\| \leq Me^{t\gamma}$ luego

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax\| &= \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax + S_\lambda(t)Ax - S_\lambda(t)Ax\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)\left[B_\lambda x - Ax\right]\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}} \|B_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq Me^{t\gamma} \|B_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \end{aligned} \tag{3.19}$$

Se vio en (3.14) que cuando $\lambda \to \infty$, $B_\lambda x \to Ax$, $\forall\ x \in D(A)$ y además en (3.18), $S_\lambda(t)Ax \to S(t)Ax$ uniformemente en $[0, T]$, $\forall\ x \in D(A)$.

Luego reemplazando en (3.19) tenemos que cuando $\lambda \to +\infty$

$$S_\lambda(t)B_\lambda x \to S(t)Ax.$$

como se quería probar.

Por otra parte

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (S_\lambda(t)x - x) &&= \lim_{\lambda\to\infty} \textstyle\int_0^t S_\lambda(\mu)B_\lambda x d\mu \\ &= \textstyle\int_0^t \left(\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(\mu)B_\lambda x\right) d\mu &&= \textstyle\int_0^t S(\mu)Axd\mu,\ x \in D(A). \end{aligned} \tag{3.20}$$

tomando extremos

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\mu)Axd\mu. \tag{3.21}$$

Ahora, si B es el generador infinitesimal de $S(t)$ y $x \in D(A)$, tenemos

$$Bx = \lim_{t\to0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\mu)Axd\mu = Ax \tag{3.22}$$

Como x fue tomado en $D(A)$, se llega de la existencia del límite anterior a que $x \in D(B)$, entonces se tiene que

$$D(A) \subset D(B). \tag{3.23}$$

además, de (3.22) y (3.23) se sigue que $A \subset B$.

Por hipótesis $\lambda \in \rho(A)$, $\forall\ \lambda > w$ y como B es el generador infinitesimal de S entonces por el Teorema 3.1 se tiene que $\lambda \in \rho(B)$.

Si λ es suficientemente grande tenemos $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

Para tales λ se tiene

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\,(D(A)) &= X \\ (\lambda I - B)\,(D(B)) &= X \end{aligned} \tag{3.24}$$

y como $B \supset A$ se tiene $(\lambda I - B) \supset (\lambda I - A)$, entonces

$$(\lambda I - B)\,(D(A)) \supset (\lambda I - A)\,(D(A)) = X$$

entonces

$$\begin{aligned} (\lambda I - B)\,(D(A)) &\supset X \\ (\lambda I - B)^{-1}\,[(\lambda I - B)\,(D(A))] &\supset (\lambda I - B)^{-1}\,(X) \end{aligned}$$

por (3.24) tenemos

$$D(A) \supset (\lambda I - B)^{-1}\,(X) = D(B)$$

luego

$$D(A) \supset D(B) \tag{3.25}$$

De (3.23) y (3.25) se tiene que $D(A) = D(B)$. Luego $A = B$, pues

$$D(A) = D(B) \quad \text{y} \quad Bx = Ax$$

para cada $x \in D(A) = D(B)$.

Finalmente como B es el generador infinitesimal de S se tiene entonces que A es el generador infinitesimal de S. Esto finaliza la demostración del Teorema de Hille-Yosida.■

Corolario 3.3. *Para que un operador lineal A sea generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 tal que $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, $t \geq 0$ es suficiente que A sea cerrado, su dominio sea denso y exista un número real w tal que si $\lambda > w$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$$

Demostración. Por hipótesis se tiene que

i) A es cerrado, $D(A)$ es denso en X

ii) Existe un número real w tal que si $\lambda > w$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w} \tag{3.26}$$

De (3.26) y por propiedad de operadores se tiene

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \leq \left(\frac{1}{\lambda - w}\right)^n$$

luego $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \dfrac{1}{(\lambda - w)^n}$.

Se observa que A está cumpliendo las condiciones del Teorema de Hille Yosida con $M = 1$, luego A es el generador infinitesimal del semigrupo S.■

Corolario 3.4. *Para que A sea generador infinitesimal de un semigrupo de Contracciones lineales de clase C_0 es necesario y suficiente que: A sea cerrado, su dominio sea* *denso,* $(0,\infty) \subset \rho(A)$ *y* $\forall\, \lambda > 0$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$$

Demostración.

Condición Necesaria. Si A es el generador infinitesimal de S entonces por el Teorema de Hille-Yosida, A es cerrado, $D(A)$ denso en X. Como S es un semigrupo de contracciones $M = 1$.

Existe un número real w tal que si $\lambda > w$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$$

Tomemos $w = 0$ entonces $\forall\ \lambda > w = 0$; $\lambda \in (0,\infty)$ y como $\lambda \in \rho(A)$, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ luego

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &\leq \frac{1}{\lambda} \\ \lambda \,\|R(\lambda, A)\| &\leq 1 \text{ pues } \lambda > 0 \\ |\lambda| \,\|R(\lambda, A)\| &\leq 1 \\ \|\lambda R(\lambda, A)\| &\leq 1 \qquad \square \end{aligned}$$

Condición Suficiente. Tenemos que

A es cerrado, $D(A)$ es denso en X, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ y $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, es decir, existe un número real $w = 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$$

luego se tiene que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0, S. ■

Corolario 3.5. *Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Si*

$$B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \ , \quad \lambda \geq w > w_0,$$

es la aproximación de Yosida de A, entonces

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tB_\lambda} x, \quad \forall\, x \in X$$

Demostración.

Del Teorema de Hille-Yosida parte 2) Suficiencia; consideramos

$$B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I;$$

luego en la parte (c) del mismo Teorema se denotó $e^{tB_\lambda} = S_\lambda(t)$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x \ \ \forall\, x \in X$$

Luego

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tB_\lambda} x = \lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x \ \blacksquare$$

Notación 3.6. Denotaremos con $A \in G(M, w)$ para decir que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineales acotados de clase C_0, S, que satisface la condición

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \ t \geq 0.$$

Dado un espacio de Banach X, denotaremos por X^* el dual topológico de X.

Denotaremos el valor del funcional $x^* \in X^*$ en $x \in X$ por $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. El símbolo $\langle \ , \ \rangle$ representa la dualidad entre X^* y X.

Definamos para cada $x \in X$, el conjunto

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^*;\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2 \right\}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, se puede probar que $J(x) \neq \phi, \ \forall\, x \in X$, ver [B].

Definición 3.7. *Una aplicación dualidad es una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} j & : & X & \rightarrow & X^* \\ & & x & \mapsto & j(x) \end{array}$$

tal que $j(x) \in J(x), \forall\, x \in X$.

Luego como $j(x) \in J(x)$ se tiene que

$$\|j(x)\|_{X^*} = \|x\|_X \tag{3.27}$$

Definición 3.8. *Se dice que un operador lineal* $A : X \to X$ *es disipativo si, para todo* $x \in Dom(A)$*, existe un elemento* $j(x) \in J(x)$ *tal que*

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0$$

Definición 3.9. *Se dice que un operador* $A : X \to X$ *es m-disipativo, si es disipativo y además* $Im(\lambda - A) = X$*, para algún* $\lambda > 0$.

Proposición 3.10. *Si el operador lineal A es disipativo, entonces*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \ \forall\, \lambda > 0 \ \text{ y } \ \forall\, x \in D(A) \tag{3.28}$$

Demostración.

Dado $x \in D(A)$, como A es disipativo, entonces existe $j(x) \in J(x)$ tal que

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle &= \langle \lambda x - Ax, j(x)\rangle \\
&= \langle \lambda x, j(x)\rangle - \langle Ax, j(x)\rangle \\
&= \lambda \langle x, j(x)\rangle - \langle Ax, j(x)\rangle \\
&= \lambda \langle x, x\rangle - \langle Ax, j(x)\rangle \\
&= \lambda \|x\|^2 - \langle Ax, j(x)\rangle
\end{aligned}$$

Tomando los extremos de esta cadena de igualdades se tiene que

$$\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle = \lambda \|x\|^2 - \langle Ax, j(x)\rangle .$$

Luego tomando la parte real de esta igualdad se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle &= \operatorname{Re}\left[\lambda \|x\|^2 - \langle Ax, j(x)\rangle\right] \\
&= \operatorname{Re}\lambda \|x\|^2 - \operatorname{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \\
&= \lambda \|x\|^2 - \operatorname{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \\
&\geq \lambda \|x\|^2 + 0 = \lambda \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ahora como

$$\lambda \|x\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle \tag{3.29}$$

y como $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ entonces

$$\operatorname{Re}\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle \leq |\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle| .$$

Luego, por la desigualdad de Schwartz

$$|\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle| \leq \|(\lambda - A)x\| \, \|j(x)\| = \|(\lambda - A)x\| \, \|x\| . \tag{3.30}$$

Finalmente, de (3.29) y (3.30) obtenemos:

$$\lambda \|x\|^2 \leq \|(\lambda - A)x\| \, \|x\|$$

luego

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad , \forall \, \lambda > 0 \text{ y } \forall \, x \in D(A). \blacksquare$$

Proposición 3.11. *Si A es m-disipativo y Im($\lambda_0 - A$)= X, $\lambda_0 > 0$ entonces*

i) $\lambda_0 \in \rho(A)$ *y A es cerrado.*

ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

iii) $Im(\lambda - A) = X$, $\forall \, \lambda > 0$.

Demostración.

(i) De la hipótesis tenemos que $\text{Im}(\lambda_0 - A) = X$, $\forall \, \lambda_0 > 0$ y como A es disipativo (pues A es $m-$disipativo), se cumple que

$$\|(\lambda_0 - A)x\| \geq \lambda_0 \|x\| \, , \, \forall \, x \in D(A).$$

Como $\text{Im}(\lambda_0 - A) = X$, entonces $\lambda_0 - A$ es sobreyectiva.

Afirmación. $\lambda_0 - A$ es inyectiva.

En efecto. Tenemos por (3.28) que

$$\|(\lambda_0 - A)x\| \geq \lambda_0 \|x\| \, .$$

Supongamos que

$$(\lambda_0 - A)x = (\lambda_0 - A)y,$$

i.e.,

$$(\lambda_0 - A)x - (\lambda_0 - A)y = 0.$$

Tomando norma, se tiene de (3.28)

$$\begin{aligned} 0 &= \|(\lambda_0 - A)x - (\lambda_0 - A)y\| = \|(\lambda_0 - A)(x - y)\| \\ &\geq \lambda_0 \|(x - y)\| \geq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda_0 \|(x - y)\| = 0$$

de donde obtenemos que $x = y$ i.e., $(\lambda_0 - A)$ es inyectiva. Esto prueba la afirmación.

Como $(\lambda_0 - A)$ es inyectiva y sobreyectiva se tiene que $(\lambda_0 - A)$ es biyectiva, luego existe $(\lambda_0 - A)^{-1} : X \to D(A)$.

Ahora, $\forall\, x \in X$ tenemos

$$\|x\| = \left\|(\lambda_0 - A)(\lambda_0 - A)^{-1}x\right\| \geq \lambda_0 \left\|(\lambda_0 - A)^{-1}x\right\|$$

de ello se obtiene

$$\left\|(\lambda_0 - A)^{-1}x\right\| \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right) \|x\|, \ \forall\, x \in X \ \text{ y } \ \forall\, \lambda_0 > 0,$$

i.e.,

$$\left\|(\lambda_0 - A)^{-1}x\right\| \leq \lambda_0^{-1} \|x\|. \tag{3.31}$$

Luego

$$\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right), \ \ \forall\, \lambda_0 > 0 \tag{3.32}$$

Por (3.32) llegamos a que $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, donde $\mathcal{L}(X)$ denota el espacio vectorial de los operadores lineales y acotados en X.

Luego, como existe $(\lambda_0 - A)^{-1}$, es acotado y densamente definido, se tiene que $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Ahora veamos que A es cerrado, para ello usaremos el siguiente Lema.

Lema. *Sea $B : X \to X$ un operador biyectivo tal que B^{-1} es lineal y acotado. Entonces B es cerrado.*

Demostración. Siendo B biyectivo entonces existe B^{-1} y $B : D(B) \to X$ es sobreyectivo e inyectivo.

Consideremos una sucesión $(x_n)_n$ en $D(B)$ tal que $x_n \to x$ y $Bx_n \to y$. Debemos demostrar que $x \in D(B)$ y $Bx = y$. Veamos:

Sea $y_n = Bx_n$ entonces $(y_n)_n$ es una sucesión en X tal que $y_n = Bx_n \to y$, como X es de Banach entonces $y \in X$.

Además como B^{-1} es continuo, y se tiene que $y_n \to y$ entonces

$$B^{-1}(y_n) \to B^{-1}(y)$$

luego, como $y \in X$ entonces

$$B^{-1}(y) \in D(B). \tag{3.33}$$

Ahora $B^{-1}(y_n) = B^{-1}(Bx_n) \to B^{-1}(y)$, i.e., $x_n \to B^{-1}(y)$. Pero $x_n \to x$. Por la unicidad del límite se tiene

$$B^{-1}(y) = x \tag{3.34}$$

Entonces, aplicando B a (3.34) tenemos,

$$y = B(x), \text{ además } x \in D(B) \tag{3.35}$$

luego, $x = B^{-1}(y) \in D(B)$, por (3.33).

Por tanto de (3.35) concluimos que B es cerrado.□

Volviendo a la demostración de la Proposición 3.11 vemos que, aplicando este resultado al operador $\lambda_0 - A$, tenemos que $\lambda_0 - A$ es un operador en X y existe $(\lambda_0 - A)^{-1}$ siendo lineal y acotado tal que

$$D\left((\lambda_0 - A)^{-1}\right) = \mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = X$$

entonces $\lambda_0 - A$ es cerrado por el Lema anterior.

Como $\lambda_0 I$ es cerrado, se tiene $-\lambda_0 I$ también es cerrado, luego

$$(-\lambda_0 I) + (\lambda_0 - A) = -A$$

es cerrado. Entonces A es cerrado.

Esto demuestra la parte (i) de la Proposición 3.11.

(ii) De la hipótesis, como $\lambda_0 > 0$ y por $i)$ $\lambda_0 \in \rho(A)$. Entonces el conjunto $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$ es no vacío, y como $\rho(A)$ es abierto (ver [G]), entonces se tiene Λ es abierto en $(0, \infty)$.

Vamos a mostrar que Λ es cerrado en $(0,\infty)$. Sea $\lambda_n \in \Lambda$ y $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in (0, \infty)$. De $\lambda_n \in \Lambda$ y como $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$ tenemos que $\lambda_n \in \rho(A)$ i.e., existe $(\lambda_n I - A)^{-1}$ es acotado y densamente definido. Luego

$$\mathrm{Im}(\lambda_n - A) = X, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Luego si $y \in X$, existe para cada $n \in \mathbb{N}$, un x_n tal que $(\lambda_n - A)x_n = y$. Pero

$$x_n = (\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}x_n$$

tomando norma a ambos miembros y usando (3.31) se tiene

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\|(\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}x_n\right\| \\ &\leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n - A)x_n\| \end{aligned}$$

es decir

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n - A)x_n\|$$

pero como $y = (\lambda_n - A)x_n$ tenemos

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n - A)x_n\| = \lambda_n^{-1} \|y\|$$

luego $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\|$.

Sea $\|y\| = C_1$ y como $\lambda_n \to \lambda$ donde $\lambda > 0$, se tiene que $\dfrac{1}{\lambda_n} \to \dfrac{1}{\lambda}$ entonces $\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\right)$ es acotada, luego existirá $k > 0$, tal que $\dfrac{1}{\lambda_n} < k$ y

$$\frac{1}{\lambda_n} \|y\| < k.C_1 = C$$

finalmente

$$\|x_n\| \leq C \tag{3.36}$$

Ahora por (3.28) se tiene que

$$\lambda_n \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda_n - A)(x_n - x_m)\| = \|\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\|. \tag{3.37}$$

De la definición de x_n tenemos $(\lambda_n - A)x_n = y$ luego

$$\lambda_n x_n = Ax_n + y. \tag{3.38}$$

Como esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular para $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\lambda_m x_m = Ax_m + y \tag{3.39}$$

luego restando (3.38) con (3.39)

$$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0$$

y por tanto, sumando y restando $\lambda_n x_m$

$$\lambda_n x_n - \lambda_n x_m + \lambda_n x_m - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0$$

de donde agrupando tenemos

$$\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) = -(\lambda_n - \lambda_m)x_m.$$

Luego

$$\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) = (\lambda_m - \lambda_n)x_m \tag{3.40}$$

Tomando norma en (3.40) se tiene

$$\|\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = \|(\lambda_m - \lambda_n)x_m\|$$

ahora aplicando (3.37) al primer miembro de la igualdad anterior llegamos a

$$\lambda_n \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = \|(\lambda_m - \lambda_n)x_m\|$$

luego tomando extremos y aplicando (3.36)

$$\begin{aligned} \lambda_n \|x_n - x_m\| &\leq \|(\lambda_m - \lambda_n)x_m\| \\ &= |\lambda_m - \lambda_n| \|x_m\| \leq |\lambda_m - \lambda_n| C \end{aligned}$$

Como se tiene que $\lambda_n \to \lambda$ y $\lambda > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, se ve que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X.

Sea $x_n \to x$. Como $\lambda_n \to \lambda$ tenemos, entonces

$$\lambda_n x_n \to \lambda x, \tag{3.41}$$

de donde por (3.38) se tiene que

$$\lambda_n x_n - y = Ax_n,$$

luego por (3.41)

$$Ax_n \to \lambda x - y. \tag{3.42}$$

Además como ya se tiene que A es cerrado, entonces si $x_n \to x$ tenemos $Ax_n \to Ax$, luego por (3.42) se tiene que, $Ax = \lambda x - y$ despejando y

$$y = (\lambda - A)x$$

y como y es un elemento arbitrario de X, entonces $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$.

Como A es m-disipativo y $\mathrm{Im}(\lambda - A) = X$ con $\lambda > 0$ entonces se tiene de la parte (i) ya probada, que $\lambda \in \rho(A)$. Luego $\lambda \in \Lambda$. Como $\lambda_n \in \Lambda$ y $\lambda_n \to \lambda$, con $\lambda \in \Lambda$, se tiene que Λ es cerrado.

Luego, $\Lambda = (0, \infty)$ pues si Λ es abierto y cerrado en $(0, \infty)$ entonces debemos tener $\Lambda = (0, \infty)$.

Pero como $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$ entonces

$$(0, \infty) = \Lambda \subset \rho(A).$$

Esto prueba la parte (ii).

iii) Sea $\lambda > 0$ entonces $\lambda \in (0,\infty) \subset \rho(A)$ por (ii). Como en (ii) podemos tomar una sucesión $\lambda_n \subset (0,\infty)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Entonces siguiendo los pasos de $ii)$ se prueba que $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$. Como $\lambda > 0$ fue tomado arbitrariamente, se tiene $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Esto prueba (iii) y por tanto termina la demostración de la Proposición8.■

Teorema 2. ***(Lumer-Phillips)*** *$A \in G(1,0)$ si y solamente si A es m-disipativo y densamente definido.*

Demostración.

Si $A \in G(1,0)$ decimos que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones lineales de clase C_0, que satisface la condición

$$\|S(t)\| \leq 1$$

y por el Corolario 4.6 de [G], se tiene que A es cerrado, su dominio es denso en X y $(0,\infty) \subset \rho(A)$, luego dado un $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ entonces existe $(\lambda I - A)^{-1}$ lineal, acotado y densamente definido, es decir, el operador $\lambda I - A$ es invertible, entonces $\lambda I - A$ es inyectivo, luego $\lambda I - A$ es sobreyectivo.

Entonces

$$\operatorname{Im}(\lambda - A) = X,\ \forall\, \lambda > 0.$$

Luego, para cada aplicación dualidad j se tiene

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle \leq |\langle S(t)x, j(x)\rangle| \leq \|S(t)x\|\,\|j(x)\|.$$

Como $A \in G(1,0)$ se tiene que $\|S(t)x\| \leq \|x\|, \forall\, x \in X$. Entonces

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle \leq \|x\|\,\|x\| = \|x\|^2$$

Luego $\operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - \|x\|^2 \leq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\langle S(t)x - x, j(x)\rangle) &= \operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - \operatorname{Re}(\langle x, j(x)\rangle) \\ &= \operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - \|x\|^2 \leq 0\end{aligned}$$

de donde, dividiendo por t y tomando el límite cuando $t \to 0^+$ y por la definición de generador infinitesimal tenemos que

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x, \ \forall\, x \in D(A)$$

luego

$$\operatorname{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \forall\, x \in D(A)$$

de donde vemos que A es disipativo.

Recíprocamente, si A es $m-$disipativo, entonces por la Proposición 3.11 se tiene que

$$A \text{ es cerrado } \text{ y } \ (0, \infty) \subset \rho(A) \tag{3.43}$$

y por (3.28)

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\right\| \\ &\geq \lambda \left\|(\lambda - A)^{-1}x\right\|\end{aligned}$$

o sea

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}x\right\| \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)\|x\|, \ \ \forall\, x \in X \text{ y } \forall\, \lambda > 0$$

luego

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

y como $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ entonces

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \;, \forall\, \lambda > 0$$

de donde se sigue que $|\lambda| \, \|R(\lambda, A)\| \leq 1$.

Así, tenemos que

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1 \;, \forall\, \lambda > 0. \tag{3.44}$$

Luego de (3.43) y (3.44), por el Corolario 3.6 de [P] se sigue que

$$A \in G(1, 0).$$

Lo cual completa la prueba.■

Observación. Del Teorema de *Lumer-Phillips* si $A \in G(1,0)$,se tiene que A es m-disipativo, luego A es disipativo, por la Definición 3.8 tenemos que $\mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0$; para toda aplicación dualidad, j, y para todo $x \in D(A)$.

Proposición 3.12. $A - w \in G(M, 0)$ *si y solo si* $A \in G(M, w)$.

Demostración. Ver [G] ó [P].

Proposición 3.13. *Si* $A \in G(1, 0)$ y $B \in \mathcal{L}(X)$ *entonces* $A + B \in G(1, \|B\|)$.

Demostración. Para cada aplicación dualidad j, se tiene

$$Re\,\langle (B - \|B\|\, I)\, x, j(x)\rangle = Re\,\langle Bx - \|B\|\, x, j(x)\rangle = Re\,\langle Bx, j(x)\rangle - \|B\|\, \|x\|^2$$

pero como $Re(z) \leq |z|$

$$\begin{aligned} Re\,\langle Bx, j(x)\rangle - \|B\|\,\|x\|^2 &\leq |\langle Bx, j(x)\rangle| - \|B\|\,\|x\|^2 \\ &\leq \|Bx\|\,\|j(x)\| - \|B\|\,\|x\|^2 \\ &\leq \|B\|\,\|x\|\,\|x\| - \|B\|\,\|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

luego

$$Re\,\langle (B - \|B\|\, I)\, x, j(x)\rangle \leq 0$$

se tiene entonces que $B - \|B\|\, I$ es disipativo.

Ahora

$$\|(B - \|B\|\, I)\, x\| = \|Bx - \|B\|\, x\| \leq \|Bx\| + \|B\|\, \|x\| \leq 2\, \|B\|\, \|x\| \;\; \forall\, x \in Dom(A).$$

Como A y $B - \|B\|\, I$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3 de [P], con $a = 0$ y $b = 2\, \|B\| \geq 0$ entonces

$$A + B - \|B\|\, I \in G(1, 0)$$

y por la Proposición 3.12

$$A + B \in G(1, \|B\|).\blacksquare$$

Capítulo 4

Grupos de Clase C_0

Definición 4.1. *Se dice que una aplicación $S : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ es un Grupo de Operadores Lineales Acotados de X si*

I) $S(0) = I$, *donde I es el operador identidad de $\mathcal{L}(X)$;*

II)* $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

Se dice que S es un Grupo de Clase C_0 si

III)* $\lim_{t\to 0} \|(S(t) - I)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

El generador infinitesimal A del grupo S es definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall\, x \in D(A)$$

Proposición 4.2. *Para que A sea generador infinitesimal de un Grupo de Operadores Lineales Acotados de clase C_0, es necesario y suficiente que $+A$ y $-A$ sean generadores infinitesimales de semigrupos de clase C_0.*

Demostración.

Se tiene que A es el generador infinitesimal de un Grupo de Operadores Lineales Acotados de Clase C_0.

De acuerdo a la definición dada en el Capítulo 2 se ve que la restricción $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo de clase C_0 al cual denotaremos por S_+, luego la aplicación

$$S_- : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

definida por $S_-(t) = S(-t)$, es también un semigrupo de clase C_0. En efecto.

i) $S_-(0) = S(-0) = S(0) = I$

ii) $S_-(t+s) = S\left(-(t+s)\right) = S(-t-s) = S(-t).S(-s) = S_-(t).S_-(s); \ \forall\, t, s \in \mathbb{R}^+$

iii) $\lim\limits_{t\to 0} \|(S_-(t) - I)\, x\| = \lim\limits_{t\to 0} \|(S(-t) - I)\, x\| = 0; \ \forall\, x \in X.$

Se vió también en el Capítulo 2, Definición 2.2, que el generador infinitesimal de S_+ es A.

Probemos ahora que el generador infinitesimal de S_- es $-A$

En efecto.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S_-(h) - I}{h} x = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(-h) - I}{h} x = -\lim_{h\to 0^+} \frac{S(-h) - I}{-h} x = -Ax$$

luego $-A$ es el generador infinitesimal de S_- .

Recíprocamente, sean A y $-A$ generadores infinitesimales de semigrupos S_+ y S_-de clase C_0 respectivamente. Por el Corolario 3.5 se tiene

$$S_+(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda} x, \quad \forall\, x \in X$$

y

$$S_-(t)x = S(-t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-tB_\lambda} x, \quad \forall\, x \in X.$$

de donde se puede ver que $S_+(t)$ conmuta con $S_-(t)$.

Denotemos con

$$T(t) = S_+(t).S_-(t)$$

y se observa que $T(t)$ es un semigrupo. Veamos

i) $T(0) = S_+(0).S_-(0) = I$; pues S_+ y S_- son semigrupos de clase C_0

ii) $T(t+s) = S_+(t+s).S_-(t+s) = S_+(t)S_+(s)S_-(t)S_-(s) = S_+(t)S_-(t)S_+(s)S_-(s) = T(t).T(s)\ \forall t, s \in \mathbb{R}$

Como S_+ es un semigrupo de clase C_0 por la Proposición 2.8 existen números reales M y w tales que

$$\|S_+(t)\| \leq Me^{wt}\, , t \geq 0.$$

Además, como $\|S_+(t)\|$ es acotado en todo intervalo acotado y teniendo en cuenta la continuidad fuerte de S_+ y de S_- tenemos

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\| &= \|S_+(t)S_-(t)x - S_+(t)x + S_+(t)x - x\| \\
&\leq \|S_+(t)S_-(t)x - S_+(t)x\| + \|S_+(t)x - x\| \\
&= \|S_+(t)\,[S_-(t)x - x]\| + \|S_+(t)x - x\| \\
&\leq \|S_+(t)\|_{\mathcal{L}}\, \|S_-(t)x - x\| + \|S_+(t)x - x\| \to 0;
\end{aligned}$$

cuando $t \to 0^+$. Por lo tanto T es de clase C_0.

Ahora, si $x \in D(A) = D(-A)$ y $h > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)x - x}{h} &= \frac{S_+(h)S_-(h)x - x}{h} \\
&= S_+(h)\frac{S_-(h)x - x}{h} + \frac{S_+(h)x - x}{h}
\end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = -Ax + Ax = 0, \ \ \forall\, x \in D(A)$$

Luego, si denotamos por B el generador infinitesimal de T entonces $Bx = 0$ y $D(A) \subset D(B)\ \forall\, x \in D(A)$.

Como $D(A) \subset D(B) \subset X$ y como A y B son generadores infinitesimales de T entonces se tiene que $D(A)$ es denso en X y $D(B)$ es denso en X luego $\overline{D(A)} = \overline{D(B)}$.

Sea $x \in D(B) \subset X$ entonces $x \in X$ luego existirá una sucesión $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ pues $D(A)$ es denso en $D(B)$.

Como B es cerrado, entonces $D(B)$ es cerrado.

Dado $x \in D(B),\ x = \lim x_n,\ (x_n) \subset D(A)$ entonces

$$Bx = B\left(\lim x_n\right) = \lim B\left(x_n\right) = 0$$

luego $Bx = 0;\ \forall\, x \in D(B)$.

Por (iii) de la Proposición 2.11, si T es un semigrupo de clase C_0 y B su generador infinitesimal entonces

$$T(t)x - x = B\left(\int_0^t T(u)x du\right)\ \forall\, x \in X$$

y además

$$\int_0^t T(u)x du \in D(B)$$

luego

$$T(t)x - x = B\left(\int_0^t T(u)x du\right) = 0$$

entonces $T(t)x = x = Ix$, luego

$$T(t) = I,\ \forall\, t \geq 0$$

entonces como

$$T(t) = S_+(t).S_-(t) = I, \quad \forall\, t \geq 0$$

se tiene que

$$S_-(t) = S_+(t)^{-1} \tag{4.1}$$

luego podemos definir un grupo S de clase C_0, con generador infinitesimal A por

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t) & \text{si } t \geq 0 \\ S_-(-t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Se tiene

$$S(0) = S_+(0) = I$$

es decir se satisface la primera condición de grupo.

Probemos que se cumple (II^*)

a) Si $t > 0$ y $s > 0$, entonces

$$S(t+s) = S_+(t+s) = S_+(t).S_+(s) = S(t).S(s)$$

b) Si $t < 0$ y $s < 0$, entonces

$$S(t+s) = S_-(-t-s) = S_-(-t).S_-(-s) = S(t).S(s)$$

c) Si $t > 0$, $s < 0$ y $t + s > 0$, entonces

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S_+(t+s) = S_+(t+s)S_+(-s)S_+(-s)^{-1} = S_+(t+s-s)S_+(-s)^{-1} \\ &= S_+(t)S_-(-s) = S(t).S(s) \end{aligned}$$

d) Si $t > 0,\ s < 0$ y $t + s < 0$, entonces

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S_-(-t-s) = S_-(-t-s)S_-(t)S_-(t)^{-1} = S_-(-t-s+t)S_-(t)^{-1} \\ &= S_-(-s)S_+(t) = S(t).S(s) \end{aligned}$$

luego la condición (II^*) es válida.

También se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \|(S(h) - I)\,x\| = \lim_{h \to 0^+} \|(S_+(h) - I)\,x\| = 0,\ \forall\, x \in X$$

$$\lim_{h \to 0^-} \|(S(h) - I)\,x\| = \lim_{-h \to 0^+} \|(S_-(-h) - I)\,x\| = 0,\ \forall\, x \in X$$

con lo cual la condición (III^*) es válida. Esto prueba que S es un grupo de clase C_0.■

Definición 4.3. *Un grupo S de operadores lineales acotados de un espacio de Hilbert X, es llamado Grupo Unitario si*

$$S(t)^* = S(t)^{-1},\ \ \forall\, t \geq 0,$$

donde $S\,(t)^*$ representa el operador adjunto de $S\,(t)$.

Teorema 4.4. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y S un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A. Entonces, definiendo $S^* : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X^*)$ por $S^*(t) = S(t)^*$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, S^* es un semigrupo de clase C_0 y A^* su generador infinitesimal.*

Demostración. Ver [K].

Teorema 3 (Stone). *Un operador lineal A de un espacio de Hilbert X es el generador infinitesimal de un grupo unitario de clase C_0 si y solo si $A^* = -A$.*

Demostración.

Si A es el generador infinitesimal de un grupo unitario S de clase C_0 se tiene por la Proposición 4.2 que A es el generador infinitesimal del semigrupo S_+ y $-A$ es el generador infinitesimal del semigrupo S_-.

También tenemos que A es densamente definido por la Proposición 2.12.

Además por el Teorema 4.4, como S_+ es un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A se tiene entonces que A^* es el generador infinitesimal del semigrupo S_+^*.

Luego por definición de S^*

$$S_+^*(h) = S_+(h)^* = S_+(h)^{-1} = S(h)^{-1} \tag{4.2}$$

como $S(h)$ es un operador tenemos

$$I = S(0) = S(h-h) = S(h).S(-h)$$

es decir, $S(-h) = S(h)^{-1}$. Luego en (4.2)

$$S_+^*(h) = S_+(h)^* = S_+(h)^{-1} = S(h)^{-1} = S(-h) \tag{4.3}$$

Tomando extremos en (4.3) tenemos

$$S_+^*(h) = S(-h)$$

entonces

$$\frac{S_+^*(h) - I}{h} = \frac{S(-h) - I}{h}$$

Para $x \in D(A)$

$$\frac{S_+^*(h)x - x}{h} = \frac{S(-h)x - x}{h}$$

ahora como $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{S(-h)x - x}{h} = -Ax$ entonces existe $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{S_+^*(h)x - x}{h} = A^*x$ de donde $x \in D(A^*)$

Por tanto como

$$D(A^*) = D(-A) \quad \text{y} \quad A^*x = -Ax, \; \forall\, x \in D(A)$$

se tiene que $A^* = -A$.

Recíprocamente supongamos que $A^* = -A$.

Para todo $x \in D(A)$

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)}$$

tomando extremos tenemos

$$(Ax, x) + \overline{(Ax, x)} = 0$$

luego $\operatorname{Re}(Ax, x) = 0$, esto nos dice por la Definición 3.8 que los operadores $\pm A$ son disipativos.

Como A y $-A$ son disipativos, por la Proposición 3.10 tenemos

$$\|(\lambda - A)\, x\| \geq \lambda\, \|x\| \;, \; \forall\, \lambda > 0, \; \forall\, x \in D(A)$$

$$\|(\lambda + A)\, x\| \geq \lambda\, \|x\| \;, \; \forall\, \lambda > 0, \; \forall\, x \in D(A)$$

en particular para $\lambda = 1$ tenemos

$$\|(I - A)\, x\| \geq \|x\| \,; \; \forall\, x \in D(A) \tag{4.4}$$

$$\|(I + A)\, x\| \geq \|x\| \,; \; \forall\, x \in D(A) \tag{4.5}$$

Ahora si $(I - A)\, x = 0$ entonces de (4.4) tendríamos $x = 0$; y si $(I + A)\, x = 0$ entonces de (4.5) $x = 0$. Luego los operadores $I - A$, $I + A$ son inyectivos, luego son invertibles.

Además, para todo $x \in D\left((I \pm A)^{-1}\right)$ se tiene

$$\|x\| = \left\|(I \pm A)\,(I \pm A)^{-1}x\right\| \geq 1.\left\|(I \pm A)^{-1}x\right\|$$

luego $\left\|(I \pm A)^{-1}x\right\| \leq \|x\|$, entonces

$$\left\|(I \pm A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

Como A^* es cerrado por el Teorema 1.6 del Apéndice de [G] y $A^* = -A$ de hipótesis, entonces $\pm A$ es cerrado, luego $I \pm A$ es cerrado y $(I \pm A)^{-1}$ es cerrado.

Por tanto, para probar que $\mathrm{Im}(I \pm A) = X$, basta probar que

$$\mathrm{Im}\,(I \pm A) = D\,(I \pm A)^{-1} \quad \text{es denso en } X.$$

Pues si $\mathrm{Im}(I \pm A) = D\,(I \pm A)^{-1}$ es denso en X entonces $\overline{D\,(I \pm A)^{-1}} = X$ pero,

$$\overline{D\,(I \pm A)^{-1}} = \overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)}$$

y como $\mathrm{Im}(I \pm A)$ es cerrado, entonces $\overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)}$ $=\mathrm{Im}(I \pm A)$.

Ahora probemos que

$$\mathrm{Im}\,(I \pm A) = D\,(I \pm A)^{-1} \quad \text{es denso en } X.$$

Debemos probar que $\overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)} = X$. Pero

$$X = \overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)}^{\perp}$$

Para probar que $\overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)} = X$ basta probar que

$$\overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)}^{\perp} = \{0\}$$

Sea $y \in \mathrm{Im}(I \pm A)^{\perp}$ entonces $y \perp \mathrm{Im}(I \pm A)$ entonces para cada $x \in D(A)$ tenemos

$$(I \pm A)\,x = x \pm Ax \in \mathrm{Im}\,(I \pm A)$$

entonces

$$0 = ((I \pm A)\,x, y) = (x \pm Ax, y) = (x, y) \pm (Ax, y)$$

entonces $(Ax, y) = (x, \pm y)$; luego por la definición del operador adjunto de A, se tiene $y \in D(A^*)$ y

$$A^*y = \pm y = -Ay \tag{4.6}$$

Luego

$$(Ay, y) = (-A^*y, y) = -(y, Ay) = -\overline{(Ay, y)}$$

de donde

$$\mathrm{Re}\,(Ay, y) = 0 \tag{4.7}$$

Pero por (4.6)

$$\begin{aligned}(Ay, y) &= (-A^*y, y) = (-(\pm y), y) \\ &= \mp (y, y) = \mp \|y\|^2\end{aligned} \tag{4.8}$$

tomando parte real a (4.8)

$$\mathrm{Re}\,(Ay, y) = \mp \|y\|^2 \tag{4.9}$$

De (4.7) y (4.9), $\|y\|^2 = 0$ entonces $y = 0$, de donde

$$\mathrm{Im}\,(I \pm A)^{\perp} = \{0\}$$

luego $X = \overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)}$, es decir, $\mathrm{Im}(I \pm A)$ es denso en X. Pero como $\mathrm{Im}(I \pm A)$ es cerrado, entonces

$$\overline{\mathrm{Im}\,(I \pm A)} = \mathrm{Im}\,(I \pm A) = X$$

Ahora, como se tiene que $\pm A$ son disipativos y $\mathrm{Im}(I \pm A) = X$ entonces $\pm A$ son operadores $m-$disipativos, luego por el Teorema 2 (Lumer-Phillips) $\pm A \in G(1, 0)$ es decir, $+A$ y $-A$ son generadores infinitesimales de un semigrupo de contracciones de clase C_0, S, con $\|S(t)\| \leq 1$; entonces $+A$ y $-A$ son generadores infinitesimales de semigrupos de clase C_0 de donde por la Proposición 4.2 A genera un grupo S, de clase C_0.

Hemos probado hasta el momento que A es el generador infinitesimal de un grupo S, de clase C_0. Falta probar que S es unitario

En efecto.

El semigrupo S_- es generado por $-A$, pero por hipótesis $-A = A^*$ de donde por el Teorema 4.4 S_-^* es generado por $A^{**} = A$.

Por lo tanto $S_-(t)^* = S(t)$, y como

$$S_-(t) = S(-t) = S(t)^{-1}$$

se tiene $\left(S(t)^{-1}\right)^* = S_-(t)^* = S(t)$, es decir,

$$S(t)^{-1} = S(t)^*$$

luego por la Definición 4.3, S es un grupo unitario.■

Capítulo 5

El Problema de Cauchy Abstracto

5.1 La Ecuación Homogénea

Sea X un espacio de Banach y sea A un operador lineal en X, densamente definido. Dado cualquier $x \in X$, el problema de Cauchy Abstracto para A con valor inicial x, consiste en hallar una función $u : [0, +\infty\rangle \to X$ que sea solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t)\,, \quad t > 0 \\ u(0) &= x \end{cases} \tag{5.1}$$

donde por solución entendemos una función $u : [0, +\infty\rangle \to X$ tal que $u(t)$ es continua para $t \geq 0$, continuamente diferenciable para $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ y satisface (5.1).

La segunda igualdad de (5.1) es llamada *condición inicial* del problema.

Teorema 5.1. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 entonces para cada $x \in D(A)$, (5.1) tiene una única solución, continuamente diferenciable en todo $t \geq 0$.*

Demostración.

De la Proposición 2.11, parte (i), como S es un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal, si $x \in D(A)$ entonces $S(t)x \in D(A)$, $\forall\ t \geq 0$. Además, $S(t)$ es derivable y para cada $x \in D(A)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x$$

entonces $u(t) = S(t)x$ es solución de (5.1) pues satisface

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = \frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = Au(t)$$

además $u(0) = S(0)x = x$, i.e., $u(t) = S(t)x$ también satisface la condición inicial de (5.1).

Hemos probado que $u(t) = S(t)x$ es solución de (5.1). Ahora probemos que si u es solución de (5.1) entonces u debe ser de la forma $u(t) = S(t)x$.

Si $0 \leq s \leq t < \infty$ por la parte (i) de la Proposición 2.11

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(S(t-s)u(s)) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)\frac{du(s)}{ds} \\ &= -S(t-s)Au(s) + S(t-s)Au(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como la derivada es cero, se tiene que: $S(t-s)u(s)$ no depende de s. Para $s = 0$, tenemos

$$S(t-s)u(s) = S(t)u(0) = S(t)x; \tag{5.2}$$

pues u es solución de (5.1).

Para $s = t$,

$$S(t-s)u(s) = S(0)u(t) = u(t); \tag{5.3}$$

pues S es un semigrupo de clase C_0.

Luego, de (5.2) y (5.3)

$$S(t)x = u(t), \quad \forall\, t \geq 0.\blacksquare$$

Por tanto la única solución de (5.1) es $u(t) = S(t)x, \ \forall\ t \geq 0$. Además esta solución es continuamente diferenciable para todo $t \geq 0$ pues $S(t)x$ es continuamente diferenciable para todo $t \geq 0$.

Definición 5.2. Sea L un operador de $L^2(\Omega)$ definido por:

$$\begin{cases} D(L) &= H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega) \\ Lu &= \sum\limits_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \left(a_{\alpha\beta} D^{\beta} u\right), \quad \forall\, u \in D(L) \end{cases}$$

entonces por el Teorema 4.24 de [G], $-L \in G(1, w), \ \forall\, w \geq w_0$ i.e., $-L$ es el generador infinitesimal de un semigrupo S de operadores lineales acotados de clase C_0 que satisface la condición

$$\|S(t)\| \leq 1.e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

de acuerdo a la Notación 3.6.

Consideremos el Problema de Cauchy asociado al operador $-L$. Como $-L$ es el generador infinitesimal de un semigrupo S entonces por la Proposición 2.12, $-L$ es un operador lineal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= -Lu \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{cases} \tag{5.4}$$

Por el Teorema 5.1; $\forall\ u_0 \in D(L) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ el problema (5.4) tiene una única solución continuamente diferenciable en todo $t \geq 0$.

En particular cuando $m = 1$;

$$L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\Delta$$

luego $\forall\, u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ el problema (4.2) toma la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5.5}$$

y por el Teorema 5.1, el problema (5.5) tiene una única solución, continuamente diferenciable para todo $t \geq 0$.

La ecuación $(5.5)_1$ es la ecuación del calor.

La ecuación del calor es el ejemplo más sencillo de ecuación parabólica.

Definición 5.3. *Sea S un semigrupo de clase C_0, A su generador infinitesimal y $n \in \mathbb{N}$.*

Denotemos $A^0 = I$, $A^1 = A$ y supongamos que A^{n-1} está definido, definiremos A^n como

$$D(A^n) = \{x \,;\, x \in D(A^{n-1}) \;\; y \;\; A^{n-1}x \in D(A)\}$$

$$A^n x = A\left(A^{n-1}x\right),\; \forall\, x \in D(A^n)$$

Proposición 5.4. *Sea S un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Tenemos:*

i) $D(A^n)$ es un subespacio de X y A^n es un operador lineal de X;

ii) Si $x \in D(A^n)$, entonces $S(t)x \in D(A^n)$, $\forall\, t \geq 0$ y

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x,\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Ver [G].

Lema 5.5. *Sea A un operador lineal cerrado de X.*

Para cada $x \in D(A^k)$,

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\| \tag{5.6}$$

el funcional $|\,.\,|_k$ define una norma sobre $D(A^k)$ con la cual $D(A^k)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [K].

Llamaremos *norma del gráfico* a la norma dada por

$$|x|_G = \|x\| + \|Ax\| \;\; ; \text{ para cada } x \in D(A).$$

y representaremos por $[D(A)]$ el espacio de Banach $(D(A), |\,.\,|_G)$. Note que el hecho de que $(D(A), |\,.\,|_G)$ sea un espacio de Banach se debe al Lema anterior. Además, la norma $|\,.\,|_G$ coincide con $|\,.\,|_1$ definida en (5.6).

Observación 5.1. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 y $x \in D(A)$ entonces por el Teorema 5.1, la solución u de (5.1) es continuamente diferenciable en todo $t \geq 0$, es decir, $u \in C^1([0,\infty); X)$.

Además, hemos probado en el Teorema 5.1 que la solución es dada por $u(t) = S(t)x$. Esta solución satisface $\dfrac{du(t)}{dt} = Au(t)$, entonces $u(t) \in D(A)$, $\forall\; t \geq 0$. Luego $u \in C([0,\infty); [D(A)])$.

Por tanto:

$$u \in C([0,\infty); [D(A)]) \cap C^1([0,\infty); X).$$

Lema 5.6. *Sea A un operador lineal cerrado. Supongamos que para cada valor inicial $x \in D(A)$, el sistema (5.1) tiene una única solución $u(t,x)$ continuamente diferen-*

ciable en $[0,+\infty)$. *Entonces, para cada* $\tau \in \mathbb{N}$, *existe una constante* M_τ *tal que*

$$\sup_{0\leq t\leq\tau} |u(t,x)| \leq M_\tau |x|$$

Demostración.

Como A es un operador cerrado entonces podemos introducir en $D(A)$ la norma del gráfico. (Recuerde que es necesario que A sea cerrado para que $D(A)$ con la norma del gráfico sea un espacio de Banach).

Definimos la aplicación

$$T_\tau : [D(A)] \to C([0,\tau]; [D(A)])$$

definida por

$$T_\tau x = u(t,x) \ , \ 0 \leq t \leq \tau,$$

Si $x, y \in D(A)$ y $v(t) = \alpha u(t,x) + \beta u(t,y)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \alpha\frac{du(t,x)}{dt} + \beta\frac{du(t,y)}{dt} = \alpha Au(t,x) + \beta Au(t,y) \\ &= A(\alpha u(t,x) + \beta u(t,y)) = Av(t) \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} v(0) &= \alpha u(0,x) + \beta u(0,y) \\ &= \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t) = Av(t) \\ v(0) = \alpha x + \beta y \end{cases} \tag{5.7}$$

Notemos que
| $u(t,x)$denota la solución de (5.1) con dato inicial x.
| $u(t,y)$denota la solución de (5.1) con dato inicial y

i.e.,

$$\begin{cases} \dfrac{du(t,x)}{dt} = Au(t,x) \\ u(0,x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{du(t,y)}{dt} = Au(t,y) \\ u(0,y) = y \end{cases}$$

De (5.7) se deduce que $v(t)$ es la solución del sistema (5.1) con dato inicial $\alpha x + \beta y$.

Pero como sabemos, dado $z \in D(A)$, la función $u(t,z)$ denota la solución de (5.1) con dato inicial $\alpha x + \beta y$. Además como observamos arriba, $v(t)$ es solución de (5.1) con dato inicial $\alpha x + \beta y$, así tenemos que las funciones $u(t, \alpha x + \beta y)$ y $v(t)$ son soluciones de (5.1) con dato inicial $\alpha x + \beta y$. Pero de acuerdo a la hipótesis del Lema, para cada $z \in D(A)$, existe una única solución de (5.18) con dato inicial z. Entonces debemos tener que

$$u(t, \alpha x + \beta y) = \alpha u(t,x) + \beta u(t,y)$$

i.e.,

$$T_\tau(\alpha x + \beta y) = \alpha T_\tau(x) + \beta T_\tau(y)$$

i.e., T_τ es lineal.

Ahora, probaremos que T_τ es una aplicación cerrada.

Sea (x_n) una sucesión en $[D(A)]$ tal que $x_n \to x$ en $[D(A)]$ y supongamos que $T_\tau x_n \to w$ en $C([0,\tau];[D(A)])$, por definición de T_τ tenemos

$$u(t, x_n) \to w(t) \text{ cuando } n \to \infty \text{ en } [D(A)],$$

i.e.,

$$|u(t,x_n) - w(t)|_G < \in$$

entonces

$$\|u(t,x_n) - w(t)\| + \|Au(t,x_n) - Aw(t)\| < \in$$

Entonces

$$u(t, x_n) \to w(t) \text{ en } X \text{ cuando } n \to \infty$$

$$Au(t, x_n) \to Aw(t) \text{ en } X \text{ cuando } n \to \infty$$

Pero $Au(t, x_n) = \dfrac{du(t, x_n)}{dt}$, luego:

$$\frac{du(t, x_n)}{dt} \to Aw(t) \text{ en } X \text{ cuando } n \to \infty$$

Observación:

Como

$$T_\tau x_n \to w \text{ en } C([0, \tau]; [D(A)])$$

entonces

$$\|T_\tau x_n - w\|_{C([0,\tau];[D(A)])} < \in$$

luego

$$\|T_\tau x_n(t) - w(t)\|_{[D(A)]} \leq \sup_{t \in [0,\tau]} \|T_\tau x_n(t) - w(t)\|_{[D(A)]} < \in$$

para todo $t \in [0, \tau]$

En particular para $t = 0$ tenemos

$$\|T_\tau x_n(0) - w(0)\|_{[D(A)]} < \in$$

$$\|u(0, x_n) - w(0)\|_{[D(A)]} < \in$$

entonces $x_n \to w(0)$ en $[D(A)]$ pero $x_n \to x$ en $[D(A)]$, (luego $x_n \to x$ en X).

Por la unicidad del límite tenemos: $w(0) = x$.

Además esta convergencia es uniforme en $[0, \tau]$ pues la norma de $C([0, \tau]; [D(A)])$ es la norma de la convergencia uniforme.

Tenemos:

$$u(t, x_n) \to w(t) \text{ en } X \text{ cuando } n \to \infty \tag{5.8}$$

$$\frac{du}{dt}(t, x_n) \to Aw(t) \text{ en } X \text{ cuando } n \to \infty$$

uniformemente en $[0, \tau]$ y además

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} & = & Aw(t) \\ w(0) & = & x \end{cases}$$

Note que w solo está definida sobre el intervalo $[0, \tau]$. Vamos a extenderla a $\mathbb{R}^+$. Faltaría definirla sobre $(\tau, +\infty)$. Definimos $w(t)$ sobre $(\tau, +\infty)$ por

$$w(t) = u(t - \tau, w(\tau))$$

Osea como la solución de (5.1) con dato inicial $w(\tau)$.

Note que cuando t varía en $(\tau, +\infty)$ entonces $t - \tau$ varía en $(0, +\infty)$.

Cuando $t = \tau$ tenemos

$$w(\tau) = u(\tau - \tau, w(\tau)) = u(0, w(\tau)) = w(\tau).$$

De esta forma, tenemos definida w sobre $[0, +\infty)$ por

$$w(t) = \begin{cases} w(t), & \text{cuando} \quad t \in [0, \tau] \\ u(t - \tau, w(\tau)), & \text{cuando} \quad t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

Luego resulta que:

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} & = & Aw(t) \quad , \quad t > 0 \\ w(0) & = & x \end{cases}$$

Note en (5.8) que

$$u(t, x_n) \to w(t) \quad \text{en } X, \ \text{para cada } t \in [0, \tau]$$

entonces

$$u(0, x_n) \to w(0) \quad \text{en } X$$

entonces

$$x_n \to w(0) \quad \text{en } X,$$

pero $x_n \to x$ en X, entonces $w(0) = x$.

De esta forma, w es solución de (5.1) con dato inicial x y además es continuamente diferenciable en $[0, +\infty\rangle$.

Por unicidad, como $u(t, x)$ es solución de (5.1) con dato inicial x entonces

$$w(t) = u(t, x).$$

Teníamos: $x_n \to x$ en $[D(A)]$ y $T_\tau x_n \to w$ en $C([0, \tau]; [D(A)])$, entonces tenemos

$$T_\tau x_n \to u(t, x) = T_\tau x$$

de donde se sigue que es T_τ cerrada.

Luego tenemos que para cada $\tau \in \mathbb{N}$, la aplicación T_τ es lineal y cerrada entonces por el Teorema de la Gráfica Cerrada se tiene que existe M_τ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T_\tau x\| \leq M_\tau \|x\|$$

es decir

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t, x)\| \leq M_\tau \|x\| . \blacksquare$$

Proposición 5.7. *Sea A un operador lineal y acotado y E un subconjunto denso en $D(A)$ entonces $A(E)$ es un subconjunto denso en* $\mathrm{Im}(A)$.

Demostración. Ver [B].

Lema 5.8. *Sea A un operador lineal cerrado, densamente definido y tal que $\rho(A) \neq \phi$. Entonces $D(A^2)$ es denso en X.*

Demostración. Ver [Kr].

Observación.

Si $\lambda \in \rho(A)$ existe $(\lambda - A)^{-1}$ y $D(\lambda - A)^{-1} = X$

$$(\lambda - A)^{-1} : X \to D(A)$$

$$(\lambda - A)^{-1} X = D(A)$$

pero $D(A) \subset X$ entonces

$$(\lambda - A)^{-1} D(A) \subset (\lambda - A)^{-1} X = D(A)$$

$$(\lambda - A)^{-1} D(A) \subset D(A). \tag{5.9}$$

Definición 5.9. *Un semigrupo $S(t)$ de clase C_0 con generador infinitesimal A se llama diferenciable para $t > t_0 \geq 0$, si $S(t)\, X \subset D(A)$ $\forall\, t > t_0$. $S(t)$ se llama diferenciable si es diferenciable para $t > 0$.*

Teorema 5.10. *Sea A un operador lineal cerrado, densamente definido con $\rho(A) \neq \phi$ y supongamos que el problema de valor inicial (5.1) tiene una única solución $u(t)$ continuamente diferenciable en $[0, +\infty)$, para cada valor inicial $x \in D(A)$. Entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo, $S(t)$, de clase C_0 y*

$$u(t, x) = S(t)x$$

donde $u(t, x)$ es la solución con valor inicial x.

Demostración

Definamos

$$\widetilde{S}(t) : [D(A)] \to [D(A)]$$

por

$$\widetilde{S}(t)x = u(t,x), \text{ donde } t \geq 0.$$

donde $[D(A)]$ denota el espacio de Banach $(D(A), |\,.\,|_G)$ y $u(t,x)$ es solución del Problema (5.1) con condición inicial x.

Tenemos que $\widetilde{S}(t)$ es un operador lineal para cada $t \geq 0$ (del Lema 5.6).

Afirmación. $\widetilde{S}(t)$ satisface las propiedades de semigrupos.

En efecto.

$\widetilde{S}(0)x = u(0,x) = x, \ \forall\, x \in [D(A)]$ pues u es solución del problema (5.1)

Sea $u(t,x)$ la solución de (5.1), probaremos que

$$\widetilde{S}(t+s)x = \widetilde{S}(t)\widetilde{S}(s)x$$

o equivalentemente que

$$v(t) = u(t+s,x) \quad \text{y} \quad w(t) = u(t, u(s,x))$$

sean iguales.

En efecto, hagamos $r = t + s$

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dr}u(r,x)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dr}u(r,x) = Au(r,x) = Au(t+s,x)$$

y $v(0) = u(s,x)$. También

$$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{dt}u(t,u(s,x)) = Au(t,u(s,x))$$

y $w(0) = u(0,u(s,x)) = u(s,x)$. De la unicidad resulta

$$v(t) = w(t), \ \ \forall\, t > 0.$$

Es decir, $u(t+s,x) = u(t,u(s,x))$ entonces

$$\widetilde{S}(t+s)x = \widetilde{S}(t)u(s,x) = \widetilde{S}(t)\widetilde{S}(s)x.$$

i.e., se verifica la segunda condición de semigrupo.

Para que $\widetilde{S}(t)$ sea un semigrupo C_0 en el espacio de Banach $[D(A)]$, resta verificar que

$$\lim_{t\to 0^+} \widetilde{S}(t)x = x \tag{5.10}$$

según la norma $|\,.\,|_G$

En efecto

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{S}(t)x - x\right|_G &= |u(t,x) - u(0,x)|_G \\ &= \|u(t,x) - x\| + \|Au(t,x) - Ax\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $t \to 0^+$ pues $u(0,x) = x$ y $Au(0,x) = Ax$, luego se cumple (5.10). Por lo tanto se tiene que $\widetilde{S}$ es un semigrupo de clase C_0.

En el Lema 5.6 se probó que $\sup\limits_{0\le t\le t_0} |u(t,x)|_G \le c\,|x|$, luego como $\widetilde{S}(t)x = u(t,x)$ tenemos que $\widetilde{S}(t)x$ es acotada para $0 \le t \le t_0$. Entonces $\widetilde{S}$ admite una extensión.

Ahora mostraremos que

$$\widetilde{S}(t)Ay = A\widetilde{S}(t)y, \ \ \forall\, y \in D(A^2) \tag{5.11}$$

Escribamos para $y \in D(A^2)$

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)ds$$

tenemos

$$v'(t) = u(t, Ay) \tag{5.12}$$

y como

$$\int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)ds = u(s, Ay)|_0^t = u(t, Ay) - Ay \tag{5.13}$$

resulta de (5.12) y (5.13) que

$$\begin{aligned} v'(t) &= Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)ds = Ay + \int_0^t Au(s, Ay)ds \\ &= A\left(y + \int_0^t u(s, Ay)ds\right) = Av(t) \end{aligned}$$

A conmuta con la integral por su cerradura y la continuidad de $u(t, x)$.

Y como $v(0) = y$, se tiene que v es la solución de (5.1) con valor inicial y.

Por lo tanto $v(t) = u(t, y)$ por la unicidad de la solución.

Además

$$Au(t, y) = Av(t) = v'(t) = u(t, Ay)$$

o sea

$$A\widetilde{S}(t)y = \widetilde{S}(t)Ay, \ \ \forall\, y \in D(A^2)$$

lo que prueba (5.11).

Sea $x \in D(A)$ y $\lambda \in \rho(A)$, recordemos que por hipótesis, $\rho(A) \neq \phi$; entonces $(\lambda - A)^{-1}$ existe, es acotado, densamente definido y por (5.9)

$$(\lambda - A)^{-1}D(A) \subset D(A)$$

Luego escribiendo $y = (\lambda - A)^{-1}x$, se tiene que $y \in D(A)$. Aplicando $(\lambda - A)$ a ambos miembros

$$(\lambda - A)y = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x = x \in D(A)$$

luego $Ay \in D(A)$ y por lo tanto $y \in D(A^2)$ por la Definición 4.3.

Luego por (5.11)

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(t)x &= \widetilde{S}(t)(\lambda - A)y = \widetilde{S}(t)\lambda y - \widetilde{S}(t)Ay \\ &= \lambda\widetilde{S}(t)y - A\widetilde{S}(t)y \\ &= (\lambda - A)\widetilde{S}(t)y\end{aligned}$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{S}(t)x\right\| &= \left\|(\lambda - A)\,\widetilde{S}(t)y\right\|_X \leq \left\|\lambda\widetilde{S}(t)y\right\| + \left\|A\widetilde{S}(t)y\right\| \\ &= |\lambda|\left\|\widetilde{S}(t)y\right\| + \left\|A\widetilde{S}(t)y\right\| \\ &\leq \max\{|\lambda|, 1\}\left(\left\|\widetilde{S}(t)y\right\| + \left\|A\widetilde{S}(t)y\right\|\right) = M'\left|\widetilde{S}(t)y\right|_G \\ &\leq M''e^{wt}\|y\| \leq M''e^{wt}(\|y\| + \|Ay\|)\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde

$$w > w_0 = \inf\left\{\log\frac{\left|\widetilde{S}(t)\right|}{t}, t > 0\right\}$$

Además

$$y = (\lambda - A)^{-1}x = R(\lambda, A)x$$

y por lo tanto

$$\|y\| = \|R(\lambda, A)x\| \leq \|R(\lambda, A)\|\,\|x\| \leq M_1\|x\| \tag{5.15}$$

Luego de esto, como $Ay = \lambda y - x$, entonces de (5.15) tenemos

$$\begin{aligned}\|Ay\| &= \|\lambda y - x\| \leq |\lambda|\,\|y\| + \|x\| \\ &\leq |\lambda|\,M_1\|x\| + \|x\| = (|\lambda|\,M_1 + 1)\,\|x\|\end{aligned} \tag{5.16}$$

Luego, de (5.15) y (5.16)

$$\begin{aligned}\|y\| + \|Ay\| &\leq M_1 \|x\| + (|\lambda| M_1 + 1) \|x\| \\ &= ((|\lambda| + 1) M_1 + 1) \|x\| = M''' \|x\|\end{aligned}$$

donde $M''' = ((|\lambda| + 1) M_1 + 1)$. Finalmente de (5.14)

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{S}(t)x\right\| &\leq M'' e^{wt} \left(M''' \|x\|\right) \\ &= M'' M''' e^{wt} \|x\| \\ &= M e^{wt} \|x\|, \ \forall\, x \in D(A)\end{aligned}$$

Como $D(A)$ es denso en X (por hipótesis), y $\widetilde{S}(t)$ es lineal y acotado entonces admite una extensión lineal acotada, $S(t)$, a todo el conjunto X.

Por lo tanto, $S(t)$ es un operador lineal acotado de X, para todo $t \geq 0$.

Luego $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo de operadores lineales acotados.

Como $S(t)$ es una extensión continua de $\widetilde{S}(t)$ tenemos que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$.

Como $\widetilde{S}(t)$ es un semigrupo de clase C_0 se tiene

$$\left\|\widetilde{S}(t)x - x\right\| \to 0$$

cuando $t \to 0^+$, $\forall\, x \in D(A)$, y como $D(A)$ es denso en X, entonces dado $x \in X$, existe una sucesión $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$, además

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x_n - x_n\| = \lim_{t \to 0^+} \left\|\widetilde{S}(t)x_n - x_n\right\| = 0$$

entonces $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t)x_n - x_n\| = 0$. Ahora, haciendo $n \to \infty$ tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x_n - x_n\|\right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\lim_{n \to \infty} \|S(t)x_n - x_n\|\right) = \lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0,$$

$\forall\, x \in X$.

Ahora sí podemos decir que S es un semigrupo de clase C_0.

Para completar la demostración debemos probar que A es el generador infinitesimal de $S(t)$.

Sea B el generador infinitesimal de $S(t)$. Si $x \in D(A)$ entonces por definición de $S(t)$ tenemos

$$S(t)x = \widetilde{S}(t)x = u(t,x). \tag{5.17}$$

luego

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x, \quad \forall\, t \geq 0$$

lo que implica

$$\left.\frac{d}{dt}S(t)x\right|_{t=0} = AS(0)x = Ax$$

pues S es un semigrupo. Y además

$$\left.\frac{d}{dt}S(t)x\right|_{t=0} = BS(0)x = Bx$$

se tiene que $x \in D(B)$, entonces $A \subset B$.

Por otro lado como $y \in D(A^2)$, pero $D(A^2) \subset D(A)$ entonces

$$y \in D(A) \subset D(B)$$

$$Ay = By$$

pues B es una extensión de A.

Luego de (5.11), (5.17) y como $Ay = By$ tenemos

$$AS(t)y = S(t)Ay = S(t)By$$

de donde si λ es tal que Re$\lambda > w$

$$e^{-\lambda t}AS(t)y = e^{-\lambda t}S(t)Ay = e^{-\lambda t}S(t)By$$

integrando los extremos de la igualdad anterior y usando (3.1)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)ydt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Bydt$$
$$A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ydt\right) = R(\lambda, B)By$$
$$AR(\lambda, B)y = R(\lambda, B)By$$

pero en el Capítulo 3 se vió que $R(\lambda, B)$ conmuta con B, entonces

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y, \quad \forall\, y \in D(A^2) \tag{5.18}$$

Probaremos ahora que la parte final de (5.18) se verifica para y arbitrario en X.

Como se tiene que $D(A^2)$ es denso en X, es decir, sea $y \in X$ cualquiera, entonces existe una sucesión $(y_n) \subseteq D(A^2)$ tal que $y_n \to y$ en X. De (5.18) y como A es cerrado, $BR(\lambda, B)$ acotado

$$AR(\lambda, B)y_n = BR(\lambda, B)y_n$$

además como

$$AR(\lambda, B)y_n \to AR(\lambda, B)y$$

$$BR(\lambda, B)y_n \to BR(\lambda, B)y$$

para todo $y \in X$

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y, \quad \forall\, y \in X \tag{5.19}$$

entonces

$$D(A) \supset \mathrm{Im}\,(R(\lambda, B)) = D(B)$$

pues

$$R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}$$

$$\text{Im}\,(R(\lambda, B)) = D(B)$$

Probemos que $\text{Im}\,(R(\lambda, B)) \subset D(A)$.

Sea $w \in \text{Im}\,(R(\lambda, B))$ entonces $w = R(\lambda, B)v$, para algún $v \in X$, luego $w \in D(B) \subset X$. De (5.19)

$$\begin{aligned} AR(\lambda, B)v &= BR(\lambda, B)v \\ Aw &= Bw \end{aligned}$$

entonces $w \in D(A)$, es decir, $\text{Im}\,(R(\lambda, B)) \subset D(A)$.

Ahora como $D(B) \subset D(A)$ y $Bw = Aw$, $\forall\, w \in D(B)$ se tiene $B \subset A$.

Finalmente como $A \subset B$ y $B \subset A$ tenemos $A = B$. Lo cual prueba que A es el generador infinitesimal de S y con esto se concluye la prueba.■

En el Teorema 5.1 se trabajó con la hipótesis de que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0. Veamos en el siguiente Teorema que es lo que ocurre cuando A es el generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable.

Teorema 5.11. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable entonces para cada $x \in X$ el problema de valor inicial (5.1) tiene solución única; si $x \in D(A)$ la solución es continuamente diferenciable.*

Demostración.

Por el Teorema 5.1 se tiene que $u(t) = S(t)x$ es solución de (5.1) pero como S es un semigrupo diferenciable por el Teorema 3.3 de [G], $S(t)x$ es diferenciable y $S'(t) = AS(t)$

es un operador lineal acotado.

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = \frac{d}{dt}(S(t)x) = S^{'}(t)x = AS(t)x = Au(t)$$

además

$$u(0) = S(0)x = Ix = x.$$

entonces existe solución.

Si $x \in D(A)$ por la Proposición 2.11 parte (i) se tiene que $S(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax$$

pero $S(t)Ax$ es una aplicación continua, entonces $\frac{d}{dt}S(t)x$ es continua. Luego

$$S(t)x = u(t)$$

es continuamente diferenciable.

Unicidad. Consecuencia del Teorema 5.1■

Capítulo 6

Aplicaciones

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, para lo cual se utilizará toda la teoría expuesta en los capítulos anteriores.

Mediante los resultados estudiados, resolveremos las ecuaciones de la Onda, del Calor y la de Schrödinger.

6.1 La Ecuación de Ondas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ.

Denotemos $Q = \Omega \times (0, \infty)$ y $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$.

Consideremos el siguiente problema de valor inicial y frontera:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u & = & 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u\,(x, t) & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) & = & u_0(x) & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) & = & v_0(x) & \text{en } \Omega \end{array} \right. \tag{6.1}$$

donde $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v_0 \in H_0^1(\Omega)$.

El problema consiste en hallar una única función $u(x, t) : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisface (6.1).

Donde

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

es el operador de Laplace con respecto a las variables espaciales, t es la variable tiempo y u_0, v_0 son funciones dadas.

La ecuación $(6.1)_1$ se llama *Ecuación de Ondas.* El operador

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

se designa por $\square$ algunas veces; es el operador de onda.

La ecuación de Ondas es el prototipo de ecuación hiperbólica.

La ecuación $(6.1)_2$ es la condición de frontera de tipo Dirichlet; (puede ser sustituida por la condición de Neumann), la condición $u = 0$ sobre Σ expresa que la cuerda (respectivamente la menbrana, etc.) está fija en el borde Γ.

Las ecuaciones $(6.1)_3$ y $(6.1)_4$ representan las condiciones iniciales del sistema: son los datos de Cauchy; la configuración inicial (desplazamiento inicial) es dada por $u_0(x)$ y la velocidad inicial por $v_0(x)$.

Supondremos que Ω es de clase C^∞ con Γ acotada.

Teorema 6.1. (Existencia y Unicidad) Supongamos que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una única función u, que satisface $(6.1)_1$, $(6.1)_2$, $(6.1)_3$, $(6.1)_4$ y

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H_0^1\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2\right).$$

Además se verifica

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 , \ \forall\, t \geq 0$$

Notaciones.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

Demostración.

La ecuación $(6.1)_1$ se escribe en forma de sistema de primer orden

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v & = & 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u & = & 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty) \end{array}\right. \tag{6.2}$$

Denotemos con

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

de modo que (6.2) toma la forma

$$\frac{dU}{dt} - AU = 0 \tag{6.3}$$

donde

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}$$

Sean $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ son elementos de H.

Por la Desigualdad de Poincaré-Friedrichs, la fórmula

$$(u_1, u_2) = \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_2 dx, \quad u_1,\ u_2 \in H_0^1(\Omega)$$

define un producto interno y una norma que hacen de $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert.

Se puede definir un producto interno en H por

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega (\nabla u_1 . \nabla u_2 + v_1 v_2)\, dx$$

y con ello H es un espacio de Hilbert.

Denotemos

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)$$

Entonces

$$A : D(A) \subset H \to H.$$

Ahora el sistema $(6.1)_1$, $(6.1)_3$, $(6.1)_4$ es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} - AU = 0 \\ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6.4}$$

Tenemos, aplicando la Identidad de Green

$$\begin{aligned}
(AU_1, U_2) &= \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \int_\Omega (\nabla v_1 . \nabla u_2 + \Delta u_1 v_2)\, dx \\
&= -\int_\Omega \Delta u_2 v_1 dx - \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla v_2 dx \\
&= -\int_\Omega (\Delta u_2 v_1 + \nabla u_1 . \nabla v_2)\, dx \\
&= -\int_\Omega (\nabla u_1 . \nabla v_2 + v_1 \Delta u_2)\, dx \\
&= -(U_1, AU_2) = (U_1, (-A) U_2)
\end{aligned}$$

Como

$$(AU_1, U_2) = (U_1, (-A) U_2)$$

se tiene que $A^* = -A$. Luego por el Teorema de Stone, A es el generador infinitesimal de un grupo unitario S, de clase C_0. Si A genera un grupo entonces genera dos semigrupos.

Ahora, por el Teorema 5.1 (Problema de Cauchy), como A es el generador infinitesimal de un semigrupo S_+ para cada $x \in D(A)$ el problema (6.4) tiene una única solución

$$U(t) = S_+(t)U_0,$$

continuamente diferenciable para $t \geq 0$, esto es

$$U \in C\left([0,\infty);[D(A)]\right) \cap C^1\left([0,\infty);H\right) \tag{6.5}$$

Luego como $U(t) = S_+(t)U_0$ y S es un grupo unitario se tiene

$$\|S_+(t)U_0\| = \|U_0\|, \quad \forall\, t \geq 0$$

entonces

$$\|U(t)\|_H = \|U_0\|_H, \ \forall\, t \geq 0 \tag{6.6}$$

es decir U es una isometría.

Como toda función de H satisface $(6.1)_2$ tenemos de (6.5) si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, entonces u es la única función que satisface $(6.1)_1$, $(6.1)_2$, $(6.1)_3$ y $(6.1)_4$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \in C\left([0,\infty[\,, \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty);H_0^1 \times L^2\right) \text{entonces}$$

$$\begin{cases} u \in C\left([0,\infty[\,;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \ \text{ y } \ u' \in C\left([0,\infty);H_0^1\right) \\ u \in C^1\left([0,\infty);H_0^1\right) \ \text{ y } \ u' \in C^1\left([0,\infty);L^2\right) \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} u \in C\left([0,\infty[\,;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \text{ y } u \in C^1\left([0,\infty);H_0^1\right) \\ u \in C^1\left([0,\infty);H_0^1\right) \text{ y } u \in C^2\left([0,\infty);L^2\right) \end{cases}$$

luego

$$u \in C\left([0,\infty[\,;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,\infty)\,;H_0^1\right)\cap C^2\left([0,\infty)\,;L^2\right). \tag{6.7}$$

Luego por (6.6) se tiene

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2=\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

o sea

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2=\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

para todo $t\geq 0$, pues $v=\dfrac{\partial u}{\partial t}$. ■

Veamos ahora el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0 \text{ en } (0,\infty)\times\Omega \\ u(0)=u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0)=v_0 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{6.8}$$

donde Ω es un conjunto abierto del espacio $\mathbb{R}^n$.

Se vió en (6.3), que la primera ecuación de (6.8) es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t}-AU=0$$

donde $A=\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Sea $H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ equipado del siguiente producto interno

$$(U_1,U_2)=\int_\Omega(\nabla u_1\nabla u_2+u_1u_2+v_1v_2)\,dx,$$

donde

$$U_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad ;U_2=\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Con el producto interno así definido, H es un espacio de Hilbert.

Tomemos

$$D(A) = \left[\left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)\right],$$

Para $U \in D(A)$, tenemos

$$\begin{aligned}
((-I+A)\,U, U) &= (-U + AU, U) = (-U, U) + (AU, U) \\
&= (AU, U) - (U, U) \\
&= \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv + v\Delta u)\, dx - \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 + v^2\right) dx \\
&= -\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2 + v^2 - uv\right) dx \leq 0,
\end{aligned}$$

luego, $-I + A$ es disipativo.

Probaremos que $A \in G(1,1)$

Por demostrar que $-I + A \in G(1,0)$, esto quiere decir que $-I + A$ es m-disipativo y densamente definido si y solamente si $-I + A$ es disipativo y $\text{Im}(I - (-I + A)) = H$.

Tenemos probado que $-I+A$ es disipativo, nos falta probar que $\text{Im}(I - (-I + A)) = H$.

En efecto. Por demostrar que

$$\text{Im}\,(2I - A) = H$$

i.e., debemos probar que $2I - A$ es sobreyectivo.

Por demostrar que, dado $F \in H$, existe $U \in D(2I - A) = D(A)$ tal que $(2I - A)U = F$, i.e.,

$$\left[2\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

desarrollando tenemos

$$\begin{cases} 2u - v = f \\ 2v - \Delta u = g \end{cases} \tag{6.9}$$

De (6.9) se deduce que

$$-\Delta u + 4u = 2f + g \tag{6.10}$$

Tenemos la ecuación

$$-\Delta u + 4u = 2f + g$$

donde $f \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, entonces $2f + g \in L^2(\Omega)$ ahora

$$-\Delta u + 4u = h,$$

donde $h = 2f + g \in L^2(\Omega)$. Para resolver este problema, usamos el siguiente resultado.

Lema. Para todo $\lambda > 0$ se tiene

a) Si $h \in L^2(\Omega)$, existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u + \lambda u = h$$

además $\Delta u \in L^2(\Omega)$

b) Si $h \in L^2(\Omega)$, entonces $u \in H^2(\Omega)$.

Demostración. Ver [BC].

Ahora, usando las partes *a*) y *b*) del Lema. Como $h \in L^2(\Omega)$ entonces existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ de la ecuación

$$-\Delta u + 4u = h$$

También tenemos de (6.9) que $v = 2u - f$ entonces $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto la ecuación

$$2U - AU = F$$

tiene una solución $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ en $D(A)$, es decir, el operador

$$2I - A = I - (-I + A)$$

es sobreyectivo.

Luego, tenemos $\mathrm{Im}(2I - A) = H$.

Como se tiene que $-I+A$ es disipativo y que $\mathrm{Im}(2I-A) = H$ entonces $-I+A$ es m-disipativo, además como $D(-I+A)$ es denso se tiene por el Teorema de Lumer-Phillips que $-I + A \in G(1,0)$ de donde por la Proposición 3.12

$$A \in G(1,1).$$

Finalmente como A es el generador infinitesimal de un semigrupo S de clase C_0 tal que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ y como $M = 1$ y $w = 1$

$$\|S(t)\| \leq e^t,$$

se tiene por el Teorema 5.1 del Problema de Cauchy que el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - AU = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases},$$

tiene para cada $U_0 \in D(A)$ una única solución U, continuamente diferenciable para $t \geq 0$, es decir

$$U \in C\left([0,\infty); D(A)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H\right),$$

entonces al igual que en el problema anterior por (6.7) se llega a que

$$u \in C\left([0,\infty)\,;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,\infty)\,;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^2\left([0,\infty)\,;L^2(\Omega)\right)$$

y satisface $(6.8)_1$ y $(6.8)_2$.

Multiplicando ambos miembros de $(6.8)_1$ por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e integrando en Ω se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_\Omega (-\Delta u)\,\frac{\partial u}{\partial t}dx = 0 \tag{6.11}$$

Veamos a que es igual la primera parte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_\Omega 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\end{aligned} \tag{6.12}$$

Veamos la segunda parte

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\Delta u)\,\frac{\partial u}{\partial t}dx &= \int_\Omega \nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_\Omega \nabla u.\frac{\partial}{\partial t}\nabla u dx = \frac{1}{2}\int_\Omega 2\nabla u.\frac{\partial}{\partial t}\nabla u\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla u\right|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\end{aligned} \tag{6.13}$$

Luego, reemplazando (6.12) y (6.13) en (6.11) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\right) = 0$$

entonces

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u(x,t)\right|^2 dx = \text{constante.}$$

es decir

$$\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\nabla u_0\right|^2 dx + \int_\Omega \left|v_0\right|^2 dx$$

Con los mismos argumentos se llega a las mismas conclusiones, cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$. En ese caso

$$H = H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$$

y tomemos

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n). \blacksquare$$

6.2 La Ecuación del Calor.

Notaciones. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ. Denotemos $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, +\infty)$.

Consideremos el siguiente problema de valor inicial y frontera

Hallar una función

$$u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u & = & 0 & \text{en } Q \\ u(x,t) & = & 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{6.14}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador de Laplace respecto de las variables espaciales, t es la variable temporal y $u_0(x)$ es una función dada.

La ecuación (6.14) se llama *Ecuación del Calor*, pues modela la distribución de temperatura en el dominio Ω.

La ecuación del calor y sus variantes intervienen en numerosos fenómenos de Difusión (la propagación del calor es sólo un ejemplo entre otros muchos). Esta ecuación es el prototipo de ecuación parabólica. La condición $(6.14)_2$ expresa que el borde Γ de Ω se mantiene a temperatura cero. La función u_0 es la condición inicial o Dato de Cauchy.

Definimos el operador A de $L^2(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} D(A) &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au &= \Delta u, \ \forall\, u \in D(A) \end{aligned}$$

luego (6.14) puede ser escrito bajo la forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{6.15}$$

es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{6.16}$$

Note que para que una función u sea solución de (6.15) debemos tener que $u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, luego $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $u(x, t) = 0$ en $\Gamma \times (0, \infty)$, i.e., si u es solución de (6.15) entonces u satisface la condición frontera $(6.14)_2$.

Además, hay que notar que el problema (6.14) es equivalente al problema (6.15) y (6.15) es equivalente a (6.16), pero (6.16) tiene la forma (5.1).

Recordemos el Teorema 5.1: Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 entonces para cada $x \in D(A)$ existe una única solución, de clase C^1 de la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x \end{cases}$$

De acuerdo al Teorema 5.1, si $u_0 \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces el semigrupo generado por A es una solución C^1 del problema (6.15).

Además de acuerdo a la Observación 5.1 dada en el capítulo anterior, si $u_0 \in D(A)$

entonces

$$u \in C([0,\infty);[D(A)]) \cap C^1([0,\infty);X). \tag{6.17}$$

donde $[D(A)]$ denota el conjunto $D(A)$ con la norma del gráfico, i.e.,

$$|w|_G = \|w\| + \|Aw\|$$

En nuestro caso tenemos $X = L^2(\Omega)$ luego, de acuerdo a la observación mencionada tendríamos que la solución u de (6.15) es tal que $u(t) = S(t)u_0$ y además:

$$u \in C([0,\infty);[D(A)]) \cap C^1\left([0,\infty);L^2(\Omega)\right) \tag{6.18}$$

Examinemos el significado de $u \in C([0,\infty);[D(A)])$.

Si $u \in C([0,\infty);[D(A)])$ entonces u es una aplicación continua de $[0,\infty)$ en $[D(A)]$, además, el número

$$\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{[D(A)]}$$

es finito, i.e., existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{[D(A)]} < M \tag{6.19}$$

Pero

$$|u(t)|_{[D(A)]} = \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.20}$$

Luego, como

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.21}$$

tomando $\sup\limits_{t>0}$

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{t\geq 0} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}\right) = \sup_{t\geq 0} |u(t)|_{[D(A)]} < M$$

entonces

$$\|u(t)\|_{C([0,\infty);L^2(\Omega))} < M$$

es decir

$$u \in C\left([0,\infty) ; L^2(\Omega)\right) \tag{6.22}$$

Además, en $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tenemos que las normas

$$\|w\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

y

$$|\|w\||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.23}$$

son equivalentes, i.e., existen constantes C_1 y C_2 positivas tales que

$$C_1\left(\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \leq \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\left(\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}\right)$$

Luego, de (6.23), (6.21) y (6.20) tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} &= \sup_{t\geq 0} \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}\right) = \sup_{t\geq 0} |u(t)|_{[D(A)]} < M
\end{aligned}$$

es decir,

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} < M$$

entonces

$$u \in C\left([0,\infty) ; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \tag{6.24}$$

Por tanto de (6.18), (6.24) y (6.22) tenemos

$$u \in C\left([0,\infty) ; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,\infty) ; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty) ; L^2(\Omega)\right)$$

En general, si $u_0 \in L^2(\Omega)$ entonces la función

$$u(t) = S(t)u_0$$

es tal que

$$u(0) = S(0)u_0 = Iu_0 = u_0.$$

Además, el operador Δ es m-disipativo y autoadjunto entonces por la Proposición 4.28 de [G] tenemos que S es un semigrupo diferenciable y por la Proposición 2.11

$$\frac{d}{dt}(S(t)u_0) = AS(t)u_0$$

es decir

$$\frac{du}{dt} = Au = \Delta u$$

Así, tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Además como S es un semigrupo diferenciable, por el Teorema 4.29 de [G] tenemos que para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n\left((0,\infty); \left[D(A^k)\right]\right), \forall\, k, n \in \mathbb{N}.$$

Pero

$$D(A^k) = \left\{w \in H^{2k};\ w = \Delta w = \ldots = \Delta^{k-1}w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\right\}$$

Luego para cada $t \in (0,\infty)$ se tiene

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n\left((0,\infty); H^{2k}(\Omega)\right),\ \ \forall\, k, n \in \mathbb{N}$$

Pero por los Teoremas de Inmersión de los espacios de Sobolev tenemos $H^{2k}(\Omega) \subset C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ luego

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n\left((0,\infty); C^m\left(\overline{\Omega}\right)\right), \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},$$

donde $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ es el espacio de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que juntamente con sus derivadas $D^\alpha f,\ 0 \leq |\alpha| \leq m$, son uniformemente continuas en Ω.

6.3 La Ecuación de Schrödinger en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La *Ecuación de Schrödinger* en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es dada por

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - qu \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases}$$

donde Δ es el operador Laplaciano y q es una función real y medible en $\mathbb{R}^n$.

Sea la terna (Ω, A, μ) un espacio de medida y $q : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible en relación a A.

El espacio $X = L^2(\Omega, A, \mu)$ es un espacio de Hilbert y M_q es un operador de $X = L^2(\Omega, A, \mu)$, definido por

$$\begin{aligned} D(M_q) &= \{u \in X;\ qu \in X\} \\ M_q u &= qu, \forall\, u \in D(M_q) \end{aligned}$$

Veamos ahora la definición del operador A_1, asociado con el operador diferencial $i\Delta$.

Sea A_1 el operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$D(A_1) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

$$A_1 u = i\Delta u, \quad \forall\, u \in D(A_1)$$

Afirmación: Los operadores $-iA_1$ y $-M_q$ son simétricos.

Veamos. Para $u, v \in D(M_q)$ se tiene por la definición que

$$M_q u = qu$$

$$M_q v = qv$$

Denotando por (,) el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos:

$$(M_q u, v) = (qu, v) = (u, qv) = (u, M_q v)$$

entonces M_q es simétrico y por lo tanto $-M_q$ es simétrico.

Nota 6.2. Si $u \in D(A_1)$ se tiene que

$$A_1 u = i\Delta u$$

y multiplicando por i obtenemos

$$-iA_1 u = \Delta u$$

Para $u, v \in D(A_1)$ tenemos que

$$-iA_1 u = \Delta u$$

$$-iA_1 v = \Delta v$$

Luego, como Δ es simétrico se tiene

$$(-iA_1 u, v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) = (u, -iA_1 v),$$

i.e., $-iA_1$ es simétrico.

Ahora como $-iA_1$ es simétrico y $-M_q$ es simétrico nosotros deseamos que $-iA_1 - M_q$ sea simétrico, para ello veamos la siguiente observación.

Observación. Si los operadores $A : H \to H$ y $B : H \to H$ son simétricos, entonces el operador $A + B : H \to H$ es simétrico si

$$(A+B)u = Au + Bu \qquad \text{y} \qquad D(A+B) = D(A) \cap D(B).$$

Luego tenemos que

$$A_1 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad M_q : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

son simétricos, entonces $-iA_1 - M_q$ será simétrico si:

$$\begin{aligned} D(-iA_1 - M_q) &= D(A_1) \cap D(M_q). \\ &= H^2(\mathbb{R}^n) \cap \{u \in L^2;\ qu \in L^2\} \end{aligned}$$

Si $H^2(\mathbb{R}^n) \subset \{u \in L^2;\ qu \in L^2\} = D(M_q)$, entonces

$$H^2(\mathbb{R}^n) \cap D(M_q) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

luego $D(-iA_1 - M_q) = H^2(\mathbb{R}^n)$.

Además, si $D(-iA_1 - M_q)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, i.e., si $-iA_1 - M_q$ es densamente definido y como $((-iA_1 - M_q)\,u, v) = (u, (-iA_1 - M_q)\,v)\ \forall\ u, v \in D(-iA_1 - M_q)$ se tiene que $-iA_1 - M_q$ será simétrico, (esa definición se puede ver en el Apéndice de [G].

Demostremos que el operador $-iA_1 = \Delta$ es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En efecto. Usaremos el siguiente Teorema.

Teorema 6.3. *Si A es simétrico y $Im(\lambda_0 - A) = X$ para algún λ_0 real, $\lambda_0 \in \rho(A)$, entonces A es autoadjunto.*

Demostración. Ver [G].

En nuestro caso tenemos que $-iA_1$ es simétrico, y por el Teorema 6.3 nos faltaría probar que

$$\mathrm{Im}(\lambda_0 - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\ \text{para } \lambda_0 \in \rho(-iA_1).$$

Nota 6.4. $A^* = -A$ si y solamente si iA es auto-adjunto. En efecto, si $A^* = -A$, entonces $(iA)^* = \bar{i}A^* = -i(-A) = iA$, luego iA es auto-adjunto.

Recíprocamente, si iA es auto-adjunto, entonces $(iA) = (iA)^* = \bar{i}A^* = i(-A^*)$, luego $A^* = -A$.

Por el Corolario 4.25 de [G] se tiene que $-iA_1 = \Delta \in G(1,0)$. Luego por el Teorema de Lumer-Phillips, $-iA_1$ es m-disipativo y densamente definido.

Tenemos $-iA_1$ es disipativo pues,

$$(-iA_1u, u) = (\Delta u, u) = -(\nabla u, \nabla u) = -\parallel \nabla u \parallel^2 \leq 0$$

Además por la Proposición 3.10, para todo $u \in D(A_1)$,

$$\parallel (1-(-iA_1))u \parallel \geq \parallel u \parallel$$

de donde $I - (-iA_1)$ es inyectivo y por lo tanto invertible.

Probemos esta inyectividad. Tenemos

$$\|(1-(-iA_1))u\| \geq \|u\| \tag{6.25}$$

Supongamos que $(1-(-iA_1))u = 0$, entonces por (6.25)

$$\parallel u \parallel \leq \parallel (1-(-iA_1))u \parallel = 0$$

luego se tiene que $u = 0$. Esto prueba la inyectividad de $(1-(-iA_1))$.

Por otra parte, si

$$(1-(-iA_1))u=v \tag{6.26}$$

multiplicando por la inversa

$$u=(1-(-iA_1))^{-1}v$$

luego

$$\| u \|= \left\|(1-(-iA_1))^{-1}v\right\| \tag{6.27}$$

además de (6.26) y (6.25) tenemos

$$\| v \|=\| (1-(-iA_1))u \|\geq\| u \|$$

luego $\| u \|\leq\| v \|$; entonces de (6.27)

$$\| (1-(-iA_1))^{-1}v \|=\| u \|\leq\| v \|,$$

i.e., $(1-(-iA_1))^{-1}$ es un operador acotado.

Luego como existe $(1I-(-iA_1))^{-1}$, es acotado y densamente definido, entonces

$$1\in\rho(-iA_1) \tag{6.28}$$

además por el Teorema 9.2 del Apéndice de [G], la ecuación

$$u+iA_1u=v$$

tiene una solución débil en $H^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, v\in L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto

$$\mathrm{Im}(1.I-(-iA_1))=L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6.29}$$

De (6.28) y (6.29) y como $-iA_1$ es simétrico entonces

$$-iA_1 \text{ es auto-adjunto (por el Teorema 6.3).} \blacksquare$$

Por otra parte, si q es real, entonces iM_q es el generador infinitesimal de un grupo unitario de clase C_0; por el Teorema de Stone tenemos que

$$(iM_q)^* = -iM_q$$

y por la Nota 6.4 si

$$(iM_q)^* = -iM_q$$

entonces $i(iM_q)$ es autoadjunto, i.e., $-M_q$ es auto-adjunto.

Probemos que $-M_q$ es auto-adjunto.

Definamos el conjunto

$$E_n = \{x \in \Omega; |q(x)| \leq n, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $u \in X = L^2(\Omega, A, \mu)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|qu\chi_{E_n}\right|^2 d\mu &= \int_\Omega |q|^2 \left|u\chi_{E_n}\right|^2 d\mu \\ &\leq n^2 \int_{E_n} |u|^2 \, d\mu \\ &\leq n^2 \int_\Omega |u|^2 \, d\mu < \infty \end{aligned}$$

pues $u \in L^2(\Omega, A, \mu)$.

El dominio de M_q estaba dado por

$$D(M_q) = \left\{u \in L^2(\Omega, A, \mu); \ qu \in L^2(\Omega, A, \mu)\right\}$$

entonces

$$\int_\Omega \left|q(u\chi_{E_n})\right|^2 d\mu < \infty$$

luego

$$q(u\chi_{E_n}) \in L^2(\Omega, A, \mu).$$

Como $q(u\chi_{E_n}) \in L^2(\Omega, A, \mu)$ y $u\chi_{E_n} \in L^2(\Omega, A, \mu)$, entonces por la definición del operador M_q, $u\chi_{E_n} \in D(M_q)$, $n = 1, 2, ...$

Probemos ahora que $D(M_q)$ es denso en $L^2(\Omega, A, \mu)$.

Para ello probaremos que: $\left|u(x)\chi_{E_n}(x) - u(x)\right| = 0$

Demostración.

Dado cualquier $x \in \Omega$, si $q(x) = r$, tomamos $n_0 = [r] + 1$, donde $[r]$ denota el mayor número entero menor que r, entonces $|q(x)| \leq n_0$, por la definición de los conjuntos E_n se tiene que $x \in E_{n_0}$. Luego $x \in E_n, \forall n \geq n_0$, pues $E_n \subset E_m$, $\forall\, m > n$.

Además si $x \in E_{n_0}$

$$\chi_{En}(x) = 1, \ \forall\, n \geq n_0;$$

entonces

$$\left|u(x)\chi_{E_n}(x) - u(x)\right| = |u(x) - u(x)| = 0; \ \forall\, n \geq n_0$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} u(x)\chi_{E_n}(x) = u(x)$$

Como $u(x)\chi_{E_n}(x) \to u(x)$ para todo punto $x \in \Omega$ y

$$\left|u\chi_{E_n}(x)\right| \leq |u(x)| \ \ \forall\, x \in \Omega$$

con $u \in L^2(\Omega, A, \mu) \subset L^1(\Omega, A, \mu)$

$$\begin{aligned}\left\|u\chi_{E_n}\right\|_{L^1} &= \int \left|u\chi_{E_n}\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\chi_{E_n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega,A,\mu)}\end{aligned}$$

entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que $u \in L^2(\Omega, A, \mu)$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u\chi_{E_n} - u \right\|_{L^2(\Omega,A,\mu)} = 0$$

Hemos probado que, dado $u \in X = L^2(\Omega, A, \mu)$, existe una sucesión $(u\chi_{E_n}) \subset D(M_q)$ tal que

$$u\chi_{E_n} \to u \ \text{ en } \ L^2(\Omega, A, \mu)$$

Por lo tanto $D(M_q)$ es denso en $L^2(\Omega, A, \mu) = X$.■

Se tiene que M_q es simétrico. Por tanto el adjunto M_q^* de M_q satisface las condiciones

$$D(M_q) \subset D(M_q^*) \qquad \text{y} \qquad M_q^* u = M_q u;\ \forall\, u \in D(M_q) \tag{6.30}$$

Luego el operador M_q será auto-adjunto si $D(M_q) = D(M_q^*)$.

Para probar que $D(M_q) = D(M_q^*)$, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Primero se probará que los operadores $\pm iI + Mq$ son inyectivos.

Paso 2. Probaremos que los operadores $\pm iI + Mq$ son sobreyectivos.

Paso 3. Finalmente supónemos que $D(M_q) \neq D(M_q^*)$.

Procederemos a probar cada paso.

Paso 1. Veamos que los operadores $(\pm iI + Mq)$ son inyectivos. Sea

$$(\pm iI + M_q)\, u = (\pm iI + M_q)\, v$$

entonces $\pm iI(u - v) + M_q(u - v) = 0$, es decir,

$$(\pm i + q)(u - v) = 0$$

como q es real, se tiene que $(\pm i + q) \neq 0$ entonces vemos que $u = v$, i.e., los operadores $(\pm iI + Mq)$ son inyectivos.□

Paso 2. Tomando módulo, tenemos $|\pm i + q(x)| \geq 1, \forall x \in \Omega$. De donde, si $v \in X$ y $\left|\frac{\pm iv}{(\pm i + q)}\right| \leq |v|$ entonces $\frac{\pm iv}{(\pm i + q)} \in X$.

En efecto. Supongamos que $v \in X = L^2(\Omega, A, \mu)$ y que vale la desigualdad siguiente

$$\left|\frac{\pm iv}{(\pm i + q)}\right| \leq |v|$$

entonces tomando norma en $L^2(\Omega, A, \mu)$ tenemos

$$\left\|\frac{\pm iv}{(\pm i + q)}\right\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} < \infty$$

$$\frac{\pm iv}{\pm i + q} \in L^2(\Omega, A, \mu) = X$$

Luego como: $\frac{qv}{\pm i + q} = v - \frac{\pm iv}{\pm i + q} \in X$ entonces

$$\frac{v}{\pm i + q} \in D(M_q) \quad \text{y} \quad (\pm iI + M_q)\frac{v}{\pm i + q} = v$$

De donde concluimos que los operadores $\pm iI + M_q$ son sobreyectivos.□

Paso 3. Supongamos que $D(M_q) \neq D(M_q^*)$. Pero como $D(M_q) \subset D(M_q^*)$ entonces

$$D(M_q) \subsetneq D(M_q^*)$$

i.e., existirá

$$u \in D(M_q^*) \text{ tal que } u \notin D(M_q) \tag{6.31}$$

Como $u \in D(M_q^*)$ se tiene $(iI + M_q^*)u \in X$. Pero como $iI + M_q$ es sobre, de la definición de sobreyectividad, existirá $v \in D(M_q)$ tal que

$$(iI + M_q)v = (iI + M_q^*)u \tag{6.32}$$

Pero como $v \in D(M_q)$ entonces $v \in D(M_q^*)$. Luego por (6.30)

$$M_q v = M_q^* v$$

entonces

$$(iI + M_q)v = (iI + M_q^*)v \tag{6.33}$$

De (6.32) y (6.33)

$$(iI + M_q^*)u = (iI + M_q^*)v \tag{6.34}$$

Finalmente obtenemos $iI + M_q^*$ no es inyectivo, pues si lo fuese tendríamos de (6.34) que $u = v$. Y como $v \in D(M_q)$ entonces al ser $u = v$ tendriamos que $u \in D(M_q)$, lo cual contradice (6.31).

Como $iI + M_q^*$ no es inyectivo, existe $v \neq 0$ tal que $(iI + M_q^*)v = 0$, i.e., $M_q^* v = -iv$

Para $u \in D(M_q)$ se tiene que

$$(M_q u, v) = (u, M_q^* v) = (u, -iv) = (iu, v)$$

Tomando los extremos de esta igualdad, llegamos a

$$((M_q - iI)u, v) = 0$$

entonces

$$((-iI + M_q)u, v) = 0$$

y como $-iI + M_q$ es sobreyectivo, entonces $(-iI + M_q)D(M_q) = X$. Luego como

$$(w, v) = 0,\ \forall\ w \in X$$

se tiene que $v = 0$, lo cual es una contradicción, que viene de haber supuesto que $D(M_q) \neq D(M_q^*)$.

Finalmente $D(M_q) = D(M_q^*)$ de donde M_q es auto-adjunto y por lo tanto $-M_q$ es auto-adjunto.□

Bajo apropiadas restricciones sobre la función q, se puede probar que el operador $-iA_1 - M_q$ es autoadjunto.

Vamos a restringirnos a estos dos casos: $q = 0$ y $q \in L^\infty(\Omega)$.

a) **Primer Caso**. Cuando $q(x) = 0, \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

La ecuación estaba dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u + iqu &= 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

donde q es una función dada. Ahora si $q(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, entonces la ecuación toma la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u &= 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{6.35}$$

Como $q(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, entonces por definición

$$M_q u = qu \;\forall\, u \in D(M_q)$$

luego $M_q = 0$. Además en (6.29) se tuvo que $\operatorname{Im}(I-(-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ con $1 \in \rho(-iA_1)$.

Luego

$$\operatorname{Im}(I - (-iA_1 - M_q)) = \operatorname{Im}(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$$

con $\lambda_0 = 1 \in \rho(-iA_1) = \rho(-iA_1 - M_q)$.

Entonces por el Teorema 6.3 que nos dice que si el operador en este caso $-iA_1 - M_q$ es simétrico(ya probado), y $\operatorname{Im}(1I - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\lambda_0 = 1 \in \rho(-iA_1 - M_q)$ entonces

$$(-iA_1 - M_q) \text{ es auto-adjunto}$$

De la Nota 6.4, si $-iA_1 - M_q$ es auto-adjunto, i.e., si $i(-A_1 + iM_q)$ es auto-adjunto entonces

$$(-A_1 + iM_q)^* = -(-A_1 + iM_q) = A_1 - iM_q$$

pero $A^{**} = A$, luego

$$(-A_1 + iM_q) = (A_1 - iM_q)^*$$

Y por el Teorema de Stone (ver [G]), se tiene que el operador $A_1 - iM_q$ genera un grupo unitario de clase C_0. Si $A_1 - iM_q$ genera un grupo entonces genera dos semigrupos.

Ahora como $A_1 - iM_q$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, entonces por el Teorema del Problema de Cauchy para cada $u_0 \in D(A_1 - iM_q) = D(A_1) = H^2(\mathbb{R}^n)$, la ecuación de Schrödinger tiene una única solución u, con condición inicial u_0 y continuamente diferenciable para $t \geq 0$.

La solución es de la forma

$$u(t) = S(t)u_0$$

tomando norma

$$\|u(t)\| = \|S(t)u_0\| = \|u_0\|$$

Luego

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \ t \geq 0.$$

De esta forma, hemos probado que el problema de valor inicial (6.35) posee una única solución en la clase

$$u \in C^1\left([0,+\infty), X\right).$$

b) **Segundo Caso.** Cuando $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Como $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $M_q u = qu \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \|M_q u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_q u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |qu|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|qu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Holder Generalizada, (ver [B]), con

$$q \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

se tiene

$$qu \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{y} \qquad \|qu\|_{L^2} \leq \|q\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}.$$

Luego

$$\|M_q u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|qu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

entonces, M_q es acotado.■

Ahora como M_q es acotado y $-iA_1 \in G(1,0)$ por Proposición 3.13

$$iA_1 - M_q \in G(1, \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}),$$

de donde por la Proposición 3.12

$$-iA_1 - M_q - \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \in G(1,0)$$

y de todo ello tenemos por el Teorema de Lumer Phillips que

$$\mathrm{Im}(\lambda - (-iA_1 - M_q - \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} I) = L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\ \lambda > 0$$

esto tambien se puede expresar como

$$\operatorname{Im}(\lambda + \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} I - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$$

En particular si tomamos $\lambda_0 = \lambda + \|M_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ entonces

$$\operatorname{Im}(\lambda_0 - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$$

con $\lambda_0 \in \rho(-iA_1 - M_q)$

Con esto se prueba que $-iA_1 - M_q$ es autoadjunto por el Teorema 6.3. De la Nota 6.4, si $-iA_1 - M_q$ es autoadjunto entonces

$$(-A_1 + iM_q) = (A_1 - iM_q)^*$$

y por el Teorema de Stone se tiene que el operador $A_1 - iM_q$ genera un grupo unitario de clase C_0. Luego como en el primer caso, concluimos también que la ecuación de Schrödinger tiene una única solución u, con condición inicial u_0 y continuamente diferenciable para $t \geq 0$.

Finalmente tenemos que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad t \geq 0. \blacksquare$$

Métodos y Materiales

El presente trabajo tuvo como objetivo estudiar los aspectos matemáticos de la ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Schrödinger, mediante la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales.

El desarrollo del mismo tuvo varias etapas.

La primera etapa del trabajo, consistió en un estudio de los Espacios L^p reales, el cual se dió en el curso de Seminario de Tesis II. La metodología seguida fue mediante exposiciones. El tema de exposición fue extraido del *Libro de Análisis Funcional y Aplicaciones* de Haim Brezis (Alianza Editorial. Madrid, 1983), el mismo que fue complementado con otros textos de Análisis Funcional como son:

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1978;

Zeidler, E., *Nonlinear Funcional Analysis*, Vol. II/A. Springer-Verlag, 1990.

Al finalizar la primera etapa el profesor encargado nos sugirió un tema de tesis y nos describió el proyecto de tesis relacionado con la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales.

Aquí se dió inicio a la segunda etapa, que consistió básicamente en el levantamiento de la información bibliográfica, la obtención de datos, etc. Para ello se hicieron necesarias visitas a las bibliotecas de nuestra universidad (Biblioteca Especializada, Biblioteca Central), así como también de otras universidades (Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Universidad Nacional Federico Villareal). También, accesamos páginas en internet como:

www.dim.uchile.cl/Notes/Semigrupos

www2.uca.es/dept/matematicas/investigación

www.galileana.dsm.usb.ve, etc.

Al finalizar la segunda etapa teníamos definidos los libros textos que utilizaríamos en nuestro trabajo, los cuales fueron:

Gomes, A., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução.* Coleção Textos de Métodos Matemáticos. IM-UFRJ, 2000, Rio de Janeiro, Brasil.

Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications.* John Wiley & Sons, 1989.

Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, Applied Math. Sc. vol.44, New York ,1983.

Asi, que la tercera etapa fue el verdadero inicio de este trabajo.

Cuando comenzamos a estudiar estos textos, nos dimos cuenta de la importancia que tenían los conocimientos obtenidos de las asignaturas del Plan de Estudio de la Escuela Profesional.

Esta etapa fue la más prolongada debido a las dificultades que encontramos para la elaboración del trabajo, pues en casi todos los textos y en casi todas las páginas de internet se podía encontrar la definición de Semigrupos, Grupos de Operadores, etc.; mas no las aplicaciones a las distintas ecuaciones.

En la cuarta etapa se tuvo que seleccionar cuidadosamente los temas que se colocarían en este trabajo, pues como se sabe en matemática cada nuevo tema viene arrastrando temas antes vistos, por ello se hizo complicada la selección de aquellos temas.

Lo que se observará en este trabajo es en primer lugar una revisión de la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales, del Problema de Cauchy Abstracto y luego con este material se estudia la existencia y unicidad de las soluciones de tres problemas de evolución ya mencionados.

Una vez estudiados los temas en la cuarta etapa, se inició la digitación del trabajo el cual fue realizado gracias a la Facultad, la cual me permitió usar los laboratorios del Centro de Computo para así poder digitar el trabajo en un programa matemático llamado Scientific WorkPlace 3.0.

La quinta etapa no tuvo complicación alguna pues el editor de texto ayudo mucho a que se realizara de manera sencilla.

Terminada la digitación del trabajo, se prosiguió a la revisión del mismo, la cual viene a ser la sexta etapa. Esta etapa es mas laboriosa que las anteriores, pues hay que observar una y otra vez que las notaciones dadas sean las mismas para todos los capítulos, que al mencionar una ecuación esta sea la ecuación adecuada.

En la séptima etapa entregamos un ejemplar de la tesis al profesor asesor, quien se encargó de leerla, revisarla, así como de hacer las correcciones y sugerencias necesarias.

Resultados y/o Aportes

Al finalizar este trabajo, podemos resumir nuestro estudio en los siguientes resultados y/o aportes:

La Teoría de Operadores Lineales nos proporciona un método elegante y eficaz para estudiar la existencia de soluciones de algunos problemas de evolución.

Los Teoremas de Hille-Yosida, Lummer Phillips y de Stone fueron desarrollados de manera muy cuidadosa en cuanto a su teoría expuesta, usando siempre un lenguaje sencillo y de ser bastante didácticos y claros en la exposición y demostración de sus resultados.

Existencia y Unicidad de la Solución, este teorema es el de mayor importancia en el trabajo, pues es el meollo del mismo consiste en probar mediante la Teoría de Semigrupos de Operadores Lineales que las tres ecuaciones de evolución vistas anteriormente tienen solución y esta es única, lo cual se puede afirmar por este teorema.

Creemos que la exposición hecha en el trabajo puede servir de ayuda y referencia a quienes deseen estudiar Ecuaciones Diferenciales Parciales sobre Espacios Funcionales.

Conclusiones

De nuestro trabajo se concluye que:

La Teoría de Semigrupos es una herramienta poderosa y elegante para abordar una gran cantidad de Ecuaciones Difrenciales en Derivadas Parciales; la cual nos permite probar la existencia y unicidad de las soluciones de algunos problemas de evolución como la ecuacion de ondas, del calor, de Schrödinger y de otras mas.

Bibliografía

[B] BREZIS, H., *Análisis Funcional y Aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[B-C] BRÉZIS, H.-CAZENAVE, T., *Nonlinear Evolution Equations. Preprint.*

[G] GOMES, A., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução.* Coleção Textos de Métodos Matemáticos. IM-UFRJ, 2000, Rio de Janeiro, Brasil.

[K] KESAVAN, S., *Topics in Functional Analysis and Applications.* John Wiley & Sons, 1989.

[Kr] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1978.

[L] LIMA, E., *Curso de Análise.* Rio de Janeiro, IMPA, 1982.

[P] PAZY, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, Applied Math. Sc. vol.44, New York ,1983.

[S] SHOWALTER, R. E., *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations.*

[SH] SHOWALTER, R. E., *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations.*

[Z] ZEIDLER, E., *Nonlinear Funcional Analysis*, vol. II/A. Springer-Verlag, 1990.