UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"UNA ECUACIÓN HIPERBÓLICA NO LINEAL QUE INTERVIENE EN MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

NILTON CÉSAR SARAVIA YATACO

Callao, Noviembre–2013

PERÚ

Hoja de referencia del Jurado y Aprobación

Una Ecuación Hiperbólica No Lineal Que Interviene En Mecánica Cuántica Relativista

NILTON CÉSAR SARAVIA YATACO

Tesis presentada a consideración del cuerpo docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Libro de Acta de sustentación de tesis Nro. 1.

Aprobado por:

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Presidente

Lic. Rolando Manuel Vega De La Peña
Secretario

Lic.Eladio Gilberto Casapía Almonte
Vocal

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Suplente

Mag. Dionicio Orlando Moreno Vega
Asesor

DEDICATORIA

Con mucho cariño y amor dedico éste esfuerzo a mis hijos Pablo, Abigail y Briana quienes me dan el impulso y el motivo de superación. También a mi hermano Angel Javier por su grandioso apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir con este trabajo, que presento para optar el Titulo Profesional de Licenciado en ciencias matemática, deseo manifestar mi gratitud a las siguientes personas:

- A Dios, el creador de todo lo visible e invisible, quién es el principio de toda sabiduría.

- A mis Padres, por su entrañable cariño, confianza y apoyo.

- Al Magister Dionisio Orlando Moreno Vega, por su amistad, confianza y por su orientación en la realización, segura y cosntante del presente trabajo.

- A todos los profesores de la Escuela Profesional de Matemática de la F CNM, quienes formaron mi desarrollo Profesional.

- A mis estimados amigos el profesor Mg.Eduardo Trujillo Flores, y el Lic. Felix Leon Barboza, por su apoyo incondicional.

ÍNDICE GENERAL

Resumen

UNA ECUACIÓN HIPERBÓLICA NO LINEAL QUE INTERVIENE EN MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA

Nilton César Saravia Yataco

Agosto - 2013

Asesor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega.

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En éste trabajo demostramos la existencia y unicidad de soluciones débiles y fuertes de una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico dada en la forma:

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega\, x\,]0,T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma\, x\,]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x);\ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases},$$

Donde Ω es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, y $f\colon \Omega \times]0,T[\to \mathbb{R}$ es una función con frontera Γ bien regular y $\rho > 0$. Para obtener nuestros resultados aplicamos el método de "FAEDO – GALERKIN", que consiste en proyectar el sistema original a espacios de aproximación de dimensión finita, luego hacemos un pasaje al limite. En el espacio de dimensión finita $V_N = [w_1, w_2, \dots\dots, w_N]$ obtenemos una solución aproximada $u_N(t)$ en un intervalo $]0, T_N[$, $T_N < T$, usando el teorema de caratheodory para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luego hacemos Estimativas a Priori que nos permiten extender la solución $u_N(t)$ a todo el intervalo $[0, T]$. Con estas estimativas obtenemos convergencias en el espacio

$L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^2(\Omega), L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ y $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$; que nos permiten probar la existencia de las soluciones débiles y fuertes.

Palabras Claves:

Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas.

Método de Faedo – Galerkin.

Soluciones Fuertes.

Abstract

A NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION INVOLVED IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

Nilton César Saravia Yataco

August - 2013

Assessor: Ms. Dionicio Orlando Moreno Vega.

Title Obtained : Licensed in Mathematica.

This work demonstrated the existence and uniqueness of weak and strong solutions for a partial differential equation of hyperbolic type of the form:

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{in} \quad Q = \Omega\, x\,]0,T[\,, T \text{ finite} \\ u = 0 & \text{about} \quad \sum = \Gamma\, x\,]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x);\ u'(x,0) = u_1(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases} ;$$

Ω is a set in $\mathbb{R}^n$, open and bounded, $f\colon \Omega \times]0,T[\to \mathbb{R}$ is a function with regular boundary Γ either $\rho > 0$ .To obtain our results we apply the method of "FAEDO - GALERKIN", which consists of projecting the original system espace of finite dimensional approximation, then we make a passage to the limit. In the finite-dimensional space $V_N = [w_1, w_2, \dots\dots, w_N]$ obtain an approximate solution $u_N(t)$ in an interval $]0, T_N[$, $T_N < T$, using the Caratheodory theorem for Ordinary Differential Equations. Then we Priori Estimates for allowing us to extend the solution $u_N(t)$ the entire interval $[0,T]$ .With these estimates we obtain convergence in space $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^2(\Omega), L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ y $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$; that allows us to prove the existence of weak and strong solutions.

Keywords:

Hyperbolic Partial Differential Equations.
Faedo method - Galerkin.
Strong Solutions.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del Problema

En este proyecto de tesis estudiaremos la ecuación hiperbólica no lineal:

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega\, x\,]0, T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma\, x\,]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x);\ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Donde

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, es el Operador Laplaciano

Además Ω Es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ bien regular y $\rho > 0$.

Se mostrará la existencia de la solución global débil y fuerte.

1.2 Formulación del Problema

La ecuación (*) se presenta con frecuencia en la mecánica cuántica y relatividad general, por eso pretendemos de analizar y responder la siguiente interrogante:

Imponiendo una condición, (*) ¿Sera posible garantizar la existencia de una solución global fuerte y débil?

1.3 Objetivos de la Investigación

1.3.1Objetivos generales

El objetivo de este trabajo es mostrar la existencia global de la solución débil y fuerte de la ecuación hiperbólica no lineal

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega\, x\,]0,T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma\, x\,]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x);\ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Este proyecto nos permite realizar una investigación científica básica, tanto desde el punto de vista teórico y práctico.

El trabajo desarrollado está en la línea de las Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas, por lo que los resultados pueden ser aprovechados por diferentes especialistas cuyo trabajo esté relacionado con este estudio (Físicos, Químicos, Ingenieros, etc.) y que deseen profundizar sus investigaciones en la teoría de existencia de soluciones fuertes.

1.3.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos tenemos los siguientes:

1. Familiarizarnos con los Métodos del análisis funcional que se usaran para la prueba de las soluciones débiles y fuertes del problema (*).

2. Para obtener este resultado aplicaremos el método de "FAEDO - GALERKIN", que consiste en proyectar el sistema original a espacios de aproximación de dimensión finita, luego hacer un pasaje al límite.

3. Hacer más conocida la gran teoría de las ecuaciones hiperbólicas no lineales en la línea de las ecuaciones diferenciales parciales , y sus aplicaciones.

1.4 Importancia y Justificación de la Investigación

El proyecto de tesis presentado reviste una gran importancia en el área de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Con las herramientas del análisis funcional, de la aproximación numérica se investiga la existencia de la solución fuerte.

Creemos que Este proyecto permitirá avanzar en otras líneas de investigación. También es importante llamar la atención que las herramientas usadas son de referencia actual, por lo que se hace necesario su estudio para una posible incorporación en los planes de estudio de las diversas especialidades en matemática e ingeniería.

Nuestro trabajo puede aplicarse para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones para el problema de cauchy para la ecuación de la onda amortiguada como:

$$u_{tt} - \Delta u + u_t|u|^{\rho-1}u = 0$$

$$u_{tt} - \Delta u + u_t|u|^{\rho-1}u = f$$

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. PRELIMINARES

2.1.1 Espacios $L^p(\Omega)$

El espacio euclidiano de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n-uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$; $\forall\, i = 1,2,\ldots,n$

Para $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, denotaremos con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue, es decir

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty\right\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un numero real por una función, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ se torna un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y la aplicación $|\;\;|_p$ definida por

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}};\; u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$$

Es una seminorma en $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Se dice que $u = v$ casi siempre (c.s) en Ω si y solo si $\exists\, \mathrm{M} \subseteq \Omega$ tal que
$u(x) = v(x)\;\; \forall\, x \in \Omega - \mathrm{M}$ y $\mathrm{med}(\mathrm{M}) = 0$

Para obtener una norma se define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\Omega)$, mediante

$$u \equiv v \text{ si y solo si } u = v \text{ c.s. en } \Omega .$$

Denotaremos por $L^p(\Omega)$ el espacio cociente

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\equiv} = \{[u]: u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

Que consiste en un espacio de Banach con la norma

$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}; u \in L^p(\Omega)$;

Cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx; v \in \mathrm{L}^2(\Omega);$$

la norma inducida será denotada por

$$|u| = \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}; v \in L^2(\Omega)$$

Si $p = \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, denotaremos con $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω , esencialmente acotadas en Ω . Es decir

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \to \mathbb{R}/u \text{ es medible } y \exists\ C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Definimos el supremo esencial como

$$\underset{x\in\Omega}{\mathrm{Supess}}|u(x)| = \inf\{\mathrm{C} > 0; |u(x)| \leq \mathrm{C} \text{ c.s en } \Omega \}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $L^\infty(\Omega)$ se torna en un $\mathbb{R}$- espacio vectorial y

$$\|u\|_\infty = \mathrm{Supess}_{x\in\Omega}|u(x)|\, ;\ u \in L^\infty(\Omega),$$

define en él una norma.

Representaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$; $1 \leq p < \infty$ el espacio vectorial de las (clases de) funciones medibles $u: \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subseteq \Omega$.

Proposición 2.1.1 (**Desigualdad de Hölder**) sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$. Entonces $u.v \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

Demostración. Véase L.A. Medeiros & E.A. de Mello [42].

Sean V,W dos espacios de banach con $V \subseteq W$ como subespacio vectorial (ambos con norma probablemente diferentes). Diremos que V esta inmerso continuamente en W y denotaremos por $V \hookrightarrow W$ si y solo si existe $C > 0$ tal que $|u|_W \leq C|u|_V \ \ \forall u \in V$.

Proposición 2.1.2 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \|u\|_p \leq \|u\|_q (\text{med}(\Omega))^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$$

Demostración. Véase Adams [43]

Proposición 2.1.3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega).$$

Proposición 2.1.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Entonces $L^p(\Omega)$ es separable para $1 < p < \infty$, y uniformemente convexo y reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demostración. Véase Brezis [3] o Adams [43].

Teorema 2.1.1 (Teorema de representación de Riesz para $L^p(\Omega)$) Sea $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $T \in [L^p(\Omega)]'$. Entonces existe $v \in L^q(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p(\Omega)$; $T(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$ además $\|v\|_q = \|T\|_{[L^p(\Omega)]'}$ asi $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$.

Demostración. Véase Adams [43].

Teorema 2.1.2 (teorema de representación de Riesz para $L^1(\Omega)$) sea $T \in [L^1(\Omega)]'$. Entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo

$u \in L^1(\Omega)$; $T(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$ y $\|u\|_\infty = \|T\|_{[L^1(\Omega)]'}$. Así $[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Véase Adams [43].

Sea $v \in L^1(0,T)$, decimos que $s \in]0,T[$ es un punto de Lebesgue para v , si para $h > 0$ tal que $]s-h, s+h[\subseteq]0,T[$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} v\,(\xi)d\xi = v(s)$$

Proposición 2.1.5 Si $v \in L^1(0,T)$, entonces casi todos los puntos de s en $]0,\mathrm{T}[$ son puntos de Lebesgue para v.

Demostración. Véase L.A.Medeiros & E.A.de Mello [42].

Un multi-indice α (de dimensión n) es una $\mathrm{n}-$ upla de números enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1 \alpha_{,2}, \ldots, \alpha_n)$. El módulo del multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ lo denotaremos por $|\alpha|$ y se define como $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

Sea $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots\ldots x_n^{\alpha_n}$ y el operador de orden α por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Para $0 = \alpha = (0,0,\ldots,0)$ definimos $D^0 u = u$.
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función escalar. El soporte de u es la clausura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \,/\, u(x) \neq 0\}$ y lo denotaremos por $\mathrm{sop}\,(u)$.

Observacion 1

El soporte de u es el menor conjunto cerrado de Ω fuera del cual $u = 0$ en el siguiente sentido:

$i)$ $\mathrm{sop}\,(u)$ es cerrado en Ω y $u = 0$ en $\Omega \setminus \mathrm{sop(u)}$.

ii) Si W es un conjunto cerrado de Ω y $u = 0$ en $\Omega \backslash \mathrm{W}$ entonces $\mathrm{sop(u)} \subseteq \mathrm{W}$.

Por $C_0^\infty(\Omega)$ se denotará el espacio vectorial de todas las funciones cón soporte compacto en Ω que posean derivadas continuas de todas las órdenes en Ω.
Teorema 2.1.3. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq \mathrm{p} < \infty$.

Demostración. Véase Medeiros [44] & Milla [45].

Se dice que una sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si y sólo si:

i) Existe un compacto fijo K de Ω tal que todos los soportes de φ_k, $k \in \mathbb{N}$ están contenidos en K.

ii)La sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente en K, juntamente con todas sus derivadas de todas las ordenes.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con ésta noción de convergencia se representa por $D(\Omega)$ y se denomina el espacio de las funciones de prueba en Ω.

Observación 2

i) La convergencia en $D(\Omega)$ será denotada por $\varphi_k \to \varphi$

ii) El operador $D^\alpha: D(\Omega) \to D(\Omega)$ es continuo.

2.1.2 El Espacio de las Distribuciones

Se denomina distribución sobre Ω a toda forma lineal T sobre $D(\Omega)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(\Omega)$.

Es decir, una distribución es una aplicación

$$T: D(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\varphi \to T(\varphi)$$

Tal que

i) $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$

ii) T es continua, esto es, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$ entonces $T_k(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω en éste espacio una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$, si y sólo si la sucesión $T_k(\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$ para todo φ en $D(\Omega)$.

El espacio de las distribuciones sobre Ω, con ésta noción de convergencia, será denotado por $D'(\Omega)$.

El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T, \varphi \rangle$ (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longrightarrow \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx \qquad (2.1)$$

Afirmación: $T_u \in D'(\Omega)$

En efecto

a) T_u está bien definida, pues si $\mathrm{K} = \mathrm{sop}(\varphi)$, entonces

$$\left|\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx\right| = \left|\int_k u(x)\varphi(x)\, dx\right| \leq \int_k |u(x)\varphi(x)| dx$$
$$\leq \max_{x \in k} |\varphi(x)| \int_k |u(x)|\, dx < \infty$$

b) T_u es lineal y continua en $D(\Omega)$. En efecto,

i) La linealidad es justificada por la linealidad de la integral.

ii) Sobre la continuidad de T_u diremos:

Sea $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ en $D(\Omega)$. Luego existe un compacto fijo que K , esto equivale a decir que $\max_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$ en $\mathbb{R}$.

Para demostrar la continuidad de T_u debemos mostrar que $\langle T_u, \varphi_k \rangle \to \langle T_u, \varphi \rangle$, cuando $k \to \infty$ en $\mathbb{R}$ .luego tenemos:

$$|\langle T_u, \varphi_k \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_k - \varphi \rangle| = \left|\int_\Omega u(x)(\varphi_k - \varphi)(x) dx\right| =$$

$$\left|\int_k u(x)(\varphi_k - \varphi)(x)\, dx\right| \leq \int_K |u(x)||\varphi_k(x) - \varphi(x)\, dx|$$
$$\leq \max_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \int_k |u(x)|\, dx \to 0$$

Luego $\langle T_u, \varphi_k \rangle \to \langle T_u, \varphi \rangle$, cuando $k \to \infty$ en $\mathbb{R}$., entonces T_u es continua. □

Lema 2.2.1 (Du Bois Raymond) Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$, Para todo φ en $D(\Omega)$. Entonces $u(x) = 0$ c.s en Ω.

Demostración. Véase Rivera [46].

T_u está unívocamente determinado por u.

En efecto,

Cuando $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $u = v$ c.s. en Ω entonces $u - v = 0$ c.s en Ω, luego

$$\int_\Omega (u(x) - v(x))\,dx = 0$$

$$\int_\Omega u(x)\,dx = \int_\Omega v(x)dx$$

Entonces $T_u = T_v$.

Ahora supongamos T definida como en (2.1) por dos funciones $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Entonces

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx \ \text{ y } \langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx, \forall\, \varphi \text{ en } D(\Omega).$$

Luego

$$\int_\Omega (u - v)(x)\,\varphi(x)dx = 0 \quad, \forall\, \varphi \text{ en } D(\Omega),$$

por el **lema 2.2.1** se concluye que $u(x) = v(x)$ c.s. en Ω
por tanto las distribuciones T_u definidas por funciones $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ son unívocamente definidas; por ésta razón se identifica u con la distribución T_u, luego $L^1_{loc}(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$.

Derivada Distribucional

Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice se denomina derivada de orden α de T a la distribución de $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle;\ \forall\, \varphi \in D(\Omega)$$

Se sigue de la definición que cada distribución T sobre Ω posee derivadas de todas las órdenes. Así las funciones de $L^1_{loc}(\Omega)$ poseen derivadas de todas las órdenes en el sentido de las distribuciones.

Observación

1. Vale para distribuciones el teorema de Schwartz sobre el orden de derivación.

2. El operador $D^\alpha: D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es lineal y continuo en el sentido de la convergencia definida en $D'(\Omega)$. En efecto,

   - Sean $\beta_1\beta_2 \in \mathbb{R}; T_1T_2 \in D'(\Omega)$. Entonces

   $$\langle D^\alpha(\beta_1T_1 + \beta_2T_2), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\beta_1T_1 + \beta_2T_2,\ D^\alpha\varphi\rangle$$
   $$= \beta_1(-1)^{|\alpha|}\langle T_1\ D^\alpha\varphi\rangle + \beta_2(-1)^{|\alpha|}\langle T_2,\ D^\alpha\varphi\rangle$$
   $$= \beta_1\langle D^\alpha T_1, \varphi\rangle + \beta_2\langle D^\alpha T_2, \varphi\rangle$$
   $$= \langle\beta_1\ D^\alpha T_1 + \beta_2\ D^\alpha T_2, \varphi\rangle\ \ \forall\ \varphi \in D(\Omega)$$

   Luego $\quad D^\alpha(\beta_1T_1 + \beta_2T_2) = \beta_1\ D^\alpha T_1 + \beta_2\ D^\alpha T_2, \varphi$

   - Sea $T_k \to T$ en $D'(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Probaremos que $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$, en $D'(\Omega)$

   $$\lim_{k\to\infty}\langle D^\alpha T_k, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_{k\to\infty}\langle T_k,\ D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\ D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$$

   Para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Entonces $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$ en $D'(\Omega)$

3. La derivada distribucional de una función de $L^1_{loc}(\Omega)$ no es en general, una función de $L^1_{loc}(\Omega)$. □

   Esta última observación motiva la definición de una clase significativa de espacios de Banach de funciones, conocidas como espacios de Sobolev.

2.1.3 Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos con $H^m(\Omega)$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las funciones u que

pertenecen a $L^2(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$.
Siendo $D^\alpha u$ la derivada de u en sentido de las distribuciones.
$H^m(\Omega)$ es el llamado espacio de Sobolev de orden m.
Dadas las funciones, $u, v \in H^m(\Omega)$ definimos el producto interno

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

Cuya norma inducida es

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} | D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde (. , .) y | | denotan el producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ respectivamente.
El espacio vectorial $H^m(\Omega)$, con el producto interno asi definido es un espacio de Hilbert real.
Si $m_1 > m > 0$ tenemos las siguientes inmersiones continuas

$$H^{m_1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

El espacio $\mathrm{D}(\Omega)$ está contenido en $H^1(\Omega)$, como Ω es acotada entonces $D(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$, luego denotaremos por $H_0^1(\Omega)$ la clausura de $D(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$; esto es

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\| \ \|_{H^1(\Omega)}}$$

Así $u \in H_0^1(\Omega)$ si y sólo si existe una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $D(\Omega)$ tal que

$\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ Cuando $k \to \infty$.

Si Ω es regular, entonces

$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)/u|_\Gamma = 0\}$

Donde Γ es la frontera de Ω y

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)/ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i = 1,2,..n\right\}$$

El dual topológico de $H^1(\Omega)$ se denota por $H^{-1}(\Omega)$.

Por definición, la norma en $H^1(\Omega)$ es

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(|u|^2 + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial ix}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

La forma bilineal ((. , .)): $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$((u,v)) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial ix}\frac{\partial v(x)}{\partial ix}\,dx = \int_\Omega \nabla u(x), \nabla v(x)dx = (\nabla u, \nabla v)$$

Define un producto interno en $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$que induce una norma la cuál la denotamos por $\|\quad\|$.

$$\|u\|^2 = ((u,u)) = (\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|^2 \qquad (2.3)$$

Proposición 2.3.6 sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Γ bien regular. Entonces las normas definidas en (2.2) y (2.3) son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración

De (2.3) tenemos $\|u\|^2 = |\nabla u|^2 \le |u|^2 + |\nabla u|^2 = \|u\|^2{}_{H^1(\Omega)}$,

entonces

$$\|u\| \le \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad (2.4)$$

Por la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|^2{}_{H^1(\Omega)} = |u|^2 + |\nabla u|^2 \le C^2|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2.$$

Entonces

$$\|u\|^2{}_{H^1(\Omega)} \le c_1|\nabla u|^2.$$

Luego

$$\|u\|^2{}_{H^1(\Omega)} \le c^{\frac{1}{2}}\|u\|$$

Así pues, las normas definidas por (2.2) y (2.3) son equivalentes.

Consideremos el espacio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, notemos que

$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega);\ u\,|_\Gamma = 0\}$, Entonces la forma bilinial

$(.,.)_\Delta : (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \to \mathbb{R}$

Definida por $(u,v)_\Delta = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,dx = (\Delta u, \Delta v)$

Consiste en un producto interno en $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, que induce una norma, la que denotamos por $\| \quad \|_\Delta$

$$\|u\|_\Delta^2 = (u,u)_\Delta = (\Delta u, \Delta u) = |\Delta u|^2. \blacksquare$$

Definición 2.3.5.

$$\overline{D(\Omega)}^{\| \quad \|_{H^m(\Omega)}} = H_0^m(\Omega).$$

Teorema 2.3.6. (Identidad de Green)

Sea Ω un conjunto abierto, acotado y bien regular del espacio $\mathbb{R}^n$, situado a un mismo lado de su frontera $\partial\Omega$. Entonces para toda $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ tenemos:

$$\int_\Omega (-\Delta u)v dx \quad = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ designa la derivada normal exterior de u, siendo $\vec{\eta}$ el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$ y $\mathrm{d}\Gamma$ es la medida de Lebesgue sobre la superficie $\partial\Omega$.

2.1.4 Espacios $L^p(0,T;\ V)$

Sean $0 < T < \infty$ y V un espacio de Banach, una función $u :]0,T[\longrightarrow V$ es llamada medible en $]0,T[$, si la función real $t \longmapsto \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V}$ es medible Lebesgue en $]0,T[$ para todo $f \in V'$, donde V' es el dual topológico de V y $\langle . \, , . \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V' y V. En este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u :]0,T[\to V$, es llamada integrable en sentido de Bochner en $]0,T[$, si u es medible en $]0,T[$ y la función real $t \longmapsto \|u(t)\|_V$ es integrable a Lebesgue en $]0,T[$. En este caso la integral de esta función es un vector tal que:
$\int_0^T u(t)dt \in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V' x V} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{V' x V} \, dt; \ \forall f \in V'$$

Si $1 \leq p < \infty$ denotaremos por $L^p(\,0,T;\,V)$ el espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u\colon]\,0,T[\, \to V$ medibles y tales que $t \longmapsto \|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesque en $]\,0,T[$. Este espacio vectorial, es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;V)$, también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t), v\,(t))_V \, dt$$

Si $p = \infty$ representaremos por $L^\infty\,(0,T;V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u :]0,T[\to V$ que son medibles y tal que el supremo esencial de

$\{\|u(t)\|_V \,;\; t \in\,]0,T[\}$ es finito. $L^\infty\,(0,T;V)$, es un es espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \underset{t\in]0,T[}{\text{supess}} \, \|u(t)\|_V \, .$$

2.4.1 El Método de Fourier. Éste es un método para la solución de problemas de física matemática, basado en la separación de variables. Es propuesto para la solución de los problemas de conductividad térmica por J. Fourier [12] y [13]. La solución de la ecuación que satisface las condiciones iniciales y de frontera, se le conoce al método de Fourier como la superposición de soluciones que satisfacen las condiciones de contorno, y pueden ser representadas como producto de una función dependiendo solo de las variables del espacio con otra función dependiendo de su tiempo. La presencia de tales soluciones, están conectadas en la búsqueda de autofunciones y autovalores de algunos operadores diferenciales, y de la expansión de una secuencia de funciones con condiciones iniciales dados por las autofunciones obtenidas. Particularmente, el problema del desarrollo de funciones en series e integrales de Fourier, aparecen en la aplicación del Método de Fourier para el estudio de las vibraciones de la cuerda, y la conductividad térmica de una barra. Por ejemplo, el estudio de las vibraciones de una pequeña cuerda de longitud 1, de extremos fijos, consiste en obtener la solución del problema.

$$\begin{cases} u_{tt} = C^2 u_{xx}, \text{ en } \mathbf{R}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \text{ para } t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde asumimos que C es una constante, y **R** designa la semifaja dado por $\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, t > 0\}$.

Las soluciones del tipo $F(x)G(t)$ de la ecuación anterior, satisfacen las condiciones de contorno son dados por

$$u_n(x,t) = sen(n\pi x)\{a_n \cos(n\pi Ct) + b_n sen(n\pi Ct)\}$$

Escogiendo los coeficientes a_n y b_n de modo adecuado, es posible demostrar que la solución $u(x,t)$ del problema (2. 5) está dado por

2141

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\{\ a_n \cos(n\pi Ct) + \ b_n sen(n\pi Ct)\} \qquad (2.6)$$

2.4.2 El método de Faedo – Galerkin. Este método es diseñado para encontrar soluciones de los problemas de evolución. Fue desarrollado por Sandro Faedo [10],y treinta años después el método de Galerkin; éste método es una combinación de los métodos de Fourier y Galerkin. Para ilustrarlo, consideremos el siguiente problema de evolución

$$A[u] = \ f, \qquad (2.7)$$

donde $u\colon \mathbb{R}^{n+1} \to f$, es una función que depende de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, y para el tiempo $t \geq 0$. La función $u(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; t)$ satisface comúnmente (2.7).

$$D_t^k u(x,0) = \ u_0^k(x), \quad k = 0,1,\dots,m-1 \qquad (2.8)$$

(Donde u_0^k son las funciones conocidas y $m \geq 1$, es el orden de la ecuación de evolución),y las condiciones de contorno

$$u|_{\Sigma} \ = \ 0, \qquad (2.9)$$

donde Σ es el límite lateral del cilindro $\Omega \times]0,T[$.

Dado un sistema completo de funciones $\{w_j(x)\}$ ortonormalizadas y definidas en Ω satisfaciendo (2.9), se busca aproximaciones de la solución de (2.7) - (2.9) de la forma

$$u^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} g_j(t) w_j(x) \qquad (2.10)$$

donde las funciones $g_i(t)$ son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\int_{\Omega} \{A[u^N] - f\} w_j dx \ = 0, \ \ j = 1,2,\dots,N, \qquad (2.11)$$

Con las condiciones iníciales

$$D^k g_j(0) = \int_\Omega u_0^k w_j dx, \qquad k = 0,1, \dots, m-1$$

Si el sistema (2.11) es de la forma normal, entonces los $g_i(t)$ están bien definidas por lo menos localmente, y la solución $u(x,t)$ se obtiene tomando el límite en (2.10) cuando $\mathrm{N} \to \infty$.

Considerando el problema dado en (2.5) y tomando en particular $w_j = \operatorname{sen}(\pi j x)$, obtenemos

$$u^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} g_j(t) sen(\pi j x)\} \tag{2.12}$$

donde $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} g_1'' - c^2 g_1 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ g_N'' - c^2 g_N = 0 \end{cases}$$

La solución $u(x,t)$ de (2.5) es obtenida cuando tomamos el limite en (2.12) con $N \longrightarrow \infty$. En este caso la solución coincide con (2.6).

Proposición 2.4.8 Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$ .Entonces $L^P(0,T;V)$ es separable en el caso que V sea separable y, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Véase Zeidler [47].

Proposición 2.4.9 Sean X, Y dos espacios de Banach. Si la inmersión $X \subseteq Y$ es continua. Entonces $\forall\ 1 \leq q < p \leq \infty$, la inmersión $L^P(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;X)$ es también continua.

Demostración. Véase Zeidler [47].

Proporción 2.4.10 Sea V un espacio de Banach. El espacio dual de $L^P(0,T;V)$ es isomorfo al espacio $L^q(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ 1\leq p,q<\infty$.

Demostración. Véase Zeidler [47].

2.1.5 Distribuciones Vectoriales

Sea V un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre $]0,T[$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0,T)$ (continua en el sentido de la convergencia definida en $D(0,T)$). Dada una distribución T su valor en φ se representa normalmente, por $\langle T,\varphi\rangle$.

Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$, denotaremos por $D'(0,T;V)$.

Sea $u\in L^p(0,T;V);\quad 1\leq p\leq\infty$, definimos

$$T_u\colon D(0,T)\to V\ \text{ tal que }\quad \langle T_u,\varphi\rangle=\int_0^T(u(t)\varphi(t)\,dt \tag{2.13}$$

a) Veamos la buena definición

- $u\in L^p(0,T;V)$ entonces u es medible en el sentido de Bochner. Como $\varphi\in D(0,T)$ entonces φu es medible en el sentido de Bochner.

- $\varphi\in D(0,T)$ entonces la función $\psi_1\colon]0,T[\to\mathbb{R}/\psi_1(t)=|\varphi(t)|$ pertenece a $L^\infty(0,T)$, $u\in L^p(0,T;V)$ entonces la función ψ_2, tal que $\psi_2\colon]0,T[\to\mathbb{R}/\psi_2(t)=\|u(t)\|_V$, pertenece a $L^p(0,T)$, luego $\psi_2\in L^1(0,T)$; entonces por el Teorema de Hölder la función $\psi_1\psi_2\colon]0,T[\longrightarrow\mathbb{R}/\ (\psi_1\psi_2)(t)=|\varphi(t)|\|u(t)\|_V=\|\varphi(t)u(t)\|_V$ pertenece a $L^1(0,T)$ es decir la función $t\longmapsto\|\varphi(t)u(t)\|_v$ es integrable.

  Luego $\varphi u\in L^1(0,T;V)$.

b) T_u es lineal y continua en $D(0,T)$

- La linealidad es justificada por la linealidad de la integral.

- Veamos la continuidad de T_u.

Sea $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(0,T)$ y $\varphi \in D(0,T)$ tal que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ en $D(0,T)$; luego existe un conjunto compacto fijo K de Ω tal que $\mathrm{sop}(\varphi_k) \subseteq K$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y φ_k converge para φ uniformemente en K, esto es equivalente a decir que $\max_{x\in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ en $\mathbb{R}$. Para probar la continuidad de T_u debemos mostrar que $\langle T_u, \varphi_k\rangle \longrightarrow \langle T_u, \varphi\rangle$ cuando $k \longrightarrow \infty$ en V.

$$\|\langle T_u, \varphi_k\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle\|_V = \|\langle T_u, \varphi_k - \varphi\rangle\|_V = \int_0^T (\varphi_k(t) - \varphi(t))\, u(t)dt\|_V$$

$$\leq \int_0^T |\varphi_k(t) - \varphi(t)|\|u(t)\|_V\, dt \leq \max_{t\in K} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \int_0^T \|u(t)\|_V\, dt$$

$$\leq \max_{t\in K} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \int_0^T C\, \|u(t)\|_V^p\, dt\, ;\; C > 0$$

Entonces $\langle T_u, \varphi_k\rangle \to \langle T_u, \varphi\rangle$ cuando $k \longrightarrow \infty$ en V. Luego T_u es continua por tanto $T_u \in D'(0,T;V)$. □

Lema 2.5.2 Sea V un espacio de Banach. Si $u \in L^1(0,T;V)$ y $\int_0^T u(t)\varphi(t)\, dt = 0$, para todo φ en $D(0,T)$. Entonces $u(t) = 0$ c.s. en $]0,T[$.

Demostración. Véase Zeidler [47].

T_u está unívocamente determinando por u. En efecto

Supongamos que T es definida como en (2.13) por dos funciones $u, v \in L^p(0,T;V)$, entonces

$\langle T, \varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)\, dt$ y $\langle T, \varphi\rangle = \int_0^T v(t)\varphi(t)\, dt$ para todo φ en $D(0,T)$.

Entonces

$\int_0^T (u(t) - v(t))\, \varphi(t)dt = 0$ para todo φ en $D(0,T)$

Luego por el Lema 2.5.2 se concluye que $u(t) = v(t)$ c.s en $]0,T[$.

Por tanto las distribuciones T_u definidas por funciones

$u \in L^P(0,T;V),\ 1 \leq p \leq \infty$

Son unívocamente definidas, Por esta razón se identifica u con la distribución T_u.

Luego $L^P(0,T;V) \subseteq D'(0,T;V)$.

Se dice que una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de distribuciones sobre $]0,\mathrm{T}[$ con valores en V, converge para la distribución T en $D'(0,T;V)$, cuando $\langle T_{k,}\varphi\rangle$ converge para $\langle T,\varphi\rangle$ en V para todo φ en $D(0,T)$.

Derivación en $D'(0,T;V)$

Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales, denotadas vectoriales, denotado por u' ó $\frac{du}{dt}$ como

$$\left\langle\frac{du}{dt},\varphi\right\rangle = -\left\langle u,\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle\ ;\ \forall\varphi \in D(0,T;V)$$

En general la derivada de orden n se define como

$$\left\langle\frac{d^n u}{dt^n},\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle u,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle\ ;\ \forall\varphi \in D(0,T;V)$$

En particular todo elemento $u \in L^P(0,T;V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,\mathrm{T}[$.

Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $\mathrm{C}\,([0,\mathrm{T}];\mathrm{V})$ el espacio de las funciones que son continuas de $[0,T]$ en V.

Sean V y H , dos espacios de Hilbert real, con sus respectivas estructuras de Hilbert $\{V,(.,.)_V,\|\ \ \|_V\}$ y $\{H,(.,.)_H,\|\ \ \|_H\}$,se supone que $V \hookrightarrow H$, esto es, V esta continuamente inmerso en H, con V denso en $\mathrm{H}(\bar{V}^{\|\ \|_\mathrm{H}} = \mathrm{H})$.

Por dualidad, si identificamos H con su dual H', gracias al Teorema de Representación de Riez obtenemos $V \subseteq H \equiv H' \subseteq V'$ donde cada espacio es denso en el siguiente, y las inmersiones son continuas.

Lema 2.5.3 (Temam) Sea X un espacio de Banach X' su dual. Sean u, g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T;X)$. Entonces son equivalentes

1. u es c.s. igual a la primitiva de g es decir $\exists\ \xi \in X$,tal que

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \qquad \text{c.s. en } t \in [0,T]$$

2. Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt$$

3. $\forall\ \eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X' \times X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X' \times X},$$

en el sentido distribucional sobre $]0,\mathrm{T}[$.

Si u satisface 1 y 2 , entonces en particular u es igual c.s. a una función continua desde $[0,T]$ en X.

Demostración. Véase Temam [48].

Lema 2.5.4 Sean V, H y V' espacios de Hilbert, cada espacio incluido y denso en el siguiente $(V \subseteq H \subseteq V')$, V' dual de V. Si $u \in L^2(0,T;V)$ y

$u' \in L^2(0,T;V')$. Entonces $u \in C([0,T];H)$ y tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V' \times V}$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.

Demostración. Véase Temam [48]

2.1.6. Convergencia en $L^P(0,T;V)$

Sea V un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, converge fuerte en V si $\exists\ u \in V$ tal que $\| u_k - u \|_V \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. En tal caso denotaremos por $u_k \rightarrow u$.

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V, si existe $u \in V$ tal que

$$\langle f,u_k\rangle_{V'\times V} \longrightarrow \langle f,u\rangle_{V'\times V}\ ; \quad \forall\ f \in V'$$

en este caso denotaremos por $u_k \rightharpoonup u$.

Proposición 2.6.1 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V que converge débil hacia u en V. Entonces

$$\|u\|_V \leq \liminf \| u_k \|_V$$

Demostracion. Véase Brezis [3]

Proposición 2.6.2 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, si converge fuerte entonces converge débil para el mismo limite.

Demostración. Véase Brezis [3].

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^P(0,T;V)$ y $u \in L^P(0,T;V)$, se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a u en $L^P(0,T;V)$ si:

$\langle f,u_k\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^P(0,T;V)} \rightarrow \langle f,u\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^P(0,T;V)}; \quad \forall f \in L^P(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Esto significa que

$$\int_0^T \langle f(t),u_k(t)\rangle_{V'\times V} \rightarrow \int_0^T \langle f(t),u(t)\rangle_{V'\times V}\,\mathrm{dt}\,; \quad \forall f \in L^q(0,T;V')$$

Observación 1

En el caso $V = H_0^1(\Omega)$ entonces $V' = H^{-1}(\Omega)$

$$\langle G,v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (G,v)\,;\ \forall G \in L^2(\Omega), \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' = L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Luego

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))dt \longrightarrow \int_0^T \big(w(t), u(t)\big)dt$$

Donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ y $w \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. □

Sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual topológico, dotamos a V' de la norma

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\|u\|_V \le 1} |\langle f, u\rangle|$$

Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotaremos por $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ si y solo si $\langle u_k, w\rangle \longrightarrow \langle u, w\rangle$ para todo $w \in V$.

Así $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;V')$ si y sólo si

$$\langle u_k,w\rangle_{L^\infty(T,0;V')\times L^1(T,0;V)} \to \langle u,w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}\ ;\forall\ w\ \in L^1(0,T;V)$$

, es decir

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V}dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V}dt \longrightarrow;\quad \forall\, w\ \in L^1(0,T;V)$$

Observación 2

Si $V = L^2(\Omega)$ y $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;\big(L^2(\Omega)\big)')$ significa que

$$\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

; $\forall\, w \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$,es decir

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\mathrm{dt}$$
$$\to \int_o^T \langle u(t), w(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\,\mathrm{dt}\,;\forall\ w \in\ L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

por tanto $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ si y sólo si

$\int_o^T (u_k(t), w(t))dt \to \int_o^T (u(t), w(t))dt\ ;\forall\ w\ \in L^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. □

2.1.7. Resultados importantes

Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto cuyos elementos son denotados con (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función no necesariamente continua. Consideremos la Ecuacion Diferencial Ordinaria (EDO)

$$x'(t) = f(t, x) \tag{2.14}$$

Resolver (2.14) es encontrar una función absolutamente continua $x(t)$ definida en algún intervalo I de la recta tal que $(t, x(t)) \in D;\ \forall\ t\ \in I$ y $x'(t) = f(t, x)$.

Sea $(t_0, x_0) \in D$ consideremos el problema de valor inicial (PVI)

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t,x) \\ \ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ entonces se dice que f satisface las condiciones de Caratheodory sobre D si:

i. $f(t, x)$ es medible en t para cada x fijo.
ii. $f(t, x)$ es continua en x para cada t fijo.
iii. Para cada compacto K en D existe una función real integrable en $m_K(t)$ tal que

$$|f(t, x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t)\ ,\ \forall\ (t, x) \in K$$

Consideremos el rectángulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a\ ,\ |x - x_0|_{\mathbb{R}^n} \leq b\ ,\ a > 0,\ b > 0\}$$

Teorema 2.7.4 (Caratheodory) Sea $f: R \to \mathbb{R}^n$ que satisface las condiciones de Caratheodory sobre R entonces existe una solución $x(t)$ de (2.15) sobre algún intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.

Demostración. Véase Medeiros & Rivera [44].

Corolario Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y f satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre D, entonces el problema **(2.15)** tiene solución para cualquier $(t_0, x_0) \in D$.

Sea $\varphi(t)$ una solución de **(2.14)** sobre I y $I \subset I_1$, entonces se dice que $\varphi(t)$ tiene un prolongamiento hasta I_1 si existe $\varphi_1(t)$ tal que $\varphi_1(t)$ es una solución de **(2.14)** sobre I_1 y $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\forall\ t \in I$.

Teorema 2.7.5 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, acotado y conexo, f satisfaciendo las dos primeras condiciones de Caratheodory sobre D y existe una función integrable $m(t)$ tal que $|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m(t)$, $\forall\ (t,x) \in D$. Sea φ una solución de **(2.14)** sobre un intervalo abierto $]a,b[$ entonces

i. Existen $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$.

ii. Si $(b, \varphi(b-0)) \in D$ entonces φ puede ser prolongado hasta $]a, b+\delta]$ para algún $\delta > 0$. De manera análogo se procede para a.

iii. $\varphi(t)$ puede ser prolongado hasta un intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $\big(\gamma, \varphi(\gamma+0)\big)$, $(\omega, \varphi(\omega-0)$ $\in \partial D$ (∂D frontera de D).

iv. Si f puede extenderse a $\overline{D}$ sin que ella pierda sus propiedades entonces $\varphi(t)$ puede ser prolongada hasta un intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que : $\big(\gamma, \varphi(\gamma+0)\big), \big(\omega, \varphi(\omega-0)\big) \in \partial D$.

Demostración. Véase Medeiros & Rivera [44].

Corolario Sea $D = [0,T] \times B$, T finito > 0, $B = \{x \epsilon \mathbb{R}^n; |x|_{\mathbb{R}^n} \leq b,$ $b > 0\}$, $|x_0|_{\mathbb{R}^n} \leq b$ y f en las condiciones del **teorema 2.7.5**. Sea $\varphi(t)$ una solución de

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t,x) \\ \quad x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Supongamos que en cualquier intervalo I donde $\varphi(t)$ esta definido, se tiene $|\varphi(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq M$, $\forall\, t \in I$, M independiente de I y $M < b$ .Entonces φ tiene un prolongamiento hasta $[0,T]$.

Teorema 2.7.6 (Espectral) Sean V y H dos espacios de Hilbert, con sus respectivas estructuras de Hilbert $\{V, ((.,.)), \|\|_V\}$ y $\{H, (.,.)_H, \|\|_H\}$ tal que $V \subseteq H$ con inmersión continua, compacta y densa. Si $A: V \to V'$ es el operador definido por la terna $\{V, H; ((.,.))\}$ por $\langle Au, v\rangle_{V' \times V =} ((u, v))$ $\forall$ $u \in D(A)$, entonces

i. Existe un sistema ortonormal completo $(\omega_i)_{i \in N}$ en H formado por los vectores propios del operador A.

ii. Los valores propios λ_i, asociados a los ω_i forman una sucesión no decreciente $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots \leq \lambda_i \leq \cdots \to \infty$ y cumple la relación

$$((\omega_i, v)) = \langle A\omega_i, v\rangle_{V' \times V} = \lambda_i(\omega_i, v); \ \forall \ v \in V$$

Demostración. Véase Milla Miranda [45].

Lema 2.7.6 (Gronwall) Sea $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ y $\varphi(t) \geq 0$; $\forall t \in [0, T]$. Supongamos que existen $K_1, K_2 \geq 0$ tal que $\varphi(t) \leq K_1 + K_2 \int_0^t \varphi(s)ds$; $\forall$ $t \in [0, T]$.Entonces $\varphi(t) \leq K_1 \exp(K_2 t)$; $\forall$ $t \in [0, T]$.

Lema 2.7.7 Sea Y un espacio de Hilbert, con su estructura de Hilbert $\{Y, (.,.)_Y, \|\|_Y\}$ y X , un espacio de Banach, tal que $X \subseteq Y$ con inmersión continua y densa. Si $u \in L^P(0, T; X)$, $u' \in L^P(0, T; Y)$, $v \in L^P(0, T; Y)$ y v' $L^P(0, T; X')$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(v(t), u(t))_Y = \langle v'(t), u(t)\rangle_{X' \times X} + (v(t), u'(t))_Y$$

La derivada del primer miembro es en el sentido de las distribuciones sobre $]0, T[$, de la función $t \to (v(t), u(t))_Y$.

2.2. Existencia Y Unicidad De Soluciones Débiles

Sea Ω un conjunto acotado y abierto en $\mathbb{R}$ con frontera suficientemente regular Γ y , $T > 0$, un número real arbitrario y Q el cilindro $\Omega \times]0, T[$ cuya frontera lateral $\sum$ está dado por $\Gamma \times]0, T[$.

Considere el problema

$$u_{tt} - \Delta\, u + |u|^{\rho} u = f, \text{ en } \quad Q \quad (\rho > 0), \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{sobre} \quad \Sigma \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

con

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega), \; u_1 \in L^2(\Omega) \; y \; f \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big). \tag{3.4}$$

Aquí $u = u(x,t)$ describe un campo escalar relativista con interacciones potenciales, asignado de [35].

En adelante adoptaremos las notaciones y definiciones de los espacios funcionales dados en [22] y [27].

Definición 3.1. Una función $u: Q \to \mathbb{R}$,

$$u \in L^{\infty}\,\big(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)\big),$$

$$u_t \in L^{\infty}\,\big(0,T; L^2(\Omega)\big),$$

es llamada solución débil del problema (3.1) - (3.3), si para todo $v \,\epsilon\, H_0^1 \cap L^{\rho+2}(\Omega\,)$ tenemos

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) + \big((u,v)\big) + \langle |u|^{\rho} u, v\rangle = (f,v), \tag{3.5}$$

en $D'(0,T)$ y también

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{y} \quad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{3.6}$$

Aquí $(.\,,\,.)$ y $\big((.\,,\,.)\big)$ representa el producto interno en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente:

$$(u,v) = \int_\Omega uvdx, \qquad ((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx\,,$$

Y $\langle .\ ,\ . \rangle$ Indica la dualidad entre $L^{p'}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ $, p = \rho + 2$ especificando a continuación, la doble correspondiente.

Observación: En la identificación de $L^2(\Omega)$ con su dual (doble), se obtiene las cadenas de

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega);$$

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega).$$

En virtud de (3.5) tenemos

$$u_{tt} = f + \Delta u - |u|^p\, u \quad \text{en} \quad D'(Q) \tag{3.7}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las inclusiones

$$f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),$$

$$\Delta u \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))\,;$$

$$|u|^\rho u \in L^\infty\left(0,T; L^{p'}(\Omega)\right) \subset L^\infty\left(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)\right)\,;$$

Donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, obtenemos

$$u_{tt} \in L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)\right), \tag{3.8}$$

y, como consecuencia del Lema 1.2 (Capítulo 1) de [22] , $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$ está bien definida.

Teorema 3.1.(Teorema de Existencia y Unicidad de Solución Débil).

Bajo las condiciones de (3.4). El problema (3.1) - (3.3) admite una solución débil en el sentido de la definición 3.1. La solución es única para cualquier valor ρ , tal que: $0 < \rho < +\infty$, si $n = 1,2$ y para $0 < \rho < \frac{2}{n+2}$, si $n \geq 3$.

Para probar la existencia de la solución débil del problema (3.1) - (3.3), se utiliza el método Galerkin, exactamente el Método de Faedo - Galerkin, (**Ver Sección 2.4.2 p14**.), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con los valores iniciales, cuya existencia de la solución local será garantizada por el **Teorema de Caratheodory** dado en [6] (véase el capítulo 2, p.33). Por medio de las estimativas a priori, vamos a ampliar la solución para todo el intervalo $]0,T[$, la obtención de una sucesión $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$, que convergirá para la solución de (3.1), verificando las condiciones iníciales.

2.2.1 Problema aproximado.

Siendo $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}$ separable, de [3], y sea $(w_v)_{v \in \mathbb{N}}$ una base para $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$, cuya existencia esta garantizada por el **Lema 1.1** de [22]. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos

$$V_N = [w_1, \dots, w_N]$$

el subespacio de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $p = \rho + 2$, de dimensión finita, generada por los N primeros vectores de la base. Definamos

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x) \tag{3.9}$$

Donde las funciones $g_i^N(t)$ son escogidas, de tal manera que (u^N), sea la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(u_{tt}^N, w_j) + \left(\left(u^N, w_j\right)\right) + \int_\Omega |u^N|^\rho\, u^N, w_j dx = \left(f, w_j\right), \; j = 1, \dots, N \tag{3.10}$$

Con las condiciones iníciales

$$u^N(x,0) = u_0^N(x) \to u_0(x) \;\; en \;\; H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega), \tag{3.11}$$

$$u_t^N(x,0) = u_1^N(x) \to u_1(x) \ \ en \ \ L^2(\Omega) \ , \tag{3.12}$$

Donde

$$u_0^N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_{0i} w_i(x); \quad u_{0i} = (u_1, w_i), \forall i = 1, \dots, N. \ ,$$

$$u_1^N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_{1i} w_i(x); \quad u_{1i} = (u_1, w_i) \ \forall i = 1, \dots, N.$$

Por Caratheodory [6], el problema (3.10) - (3.12) para cada N, posee solución local u^N en el intervalo $[0, t_N)$ Cuando u^N y u_t^N son absolutamente continuas y u_{tt}^N existe casi siempre. Por medio de las estimativas a priori, extenderemos la solución para todo el intervalo $[0, T]$.

2.2.2 Estimativas a priori.

Multiplicando (3.10) por $(g_j^N)'$ y sumando de 1 hasta N, obtenemos

$$(u_{tt}^N, u_t^N) + \left((u^N, u_t^N)\right) + \int_\Omega |u^\rho| \, u^N u_t^N dx = (f, u_t^N). \tag{3.13}$$

Notemos que la tercera expresión de la izquierda de la igualdad tiene sentido, ya que $|u^N|^\rho u^N \epsilon \, L^{p'}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. En efecto, como

$$p' = \frac{\rho + 2}{\rho + 1}$$

Tenemos

$$\| |u^N|^\rho u^N \|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}$$

$$= \int_\Omega \left| |u^N|^\rho u^N \right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx = \int_\Omega |u^N|^{\rho+2} dx = \|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p < +\infty. \tag{3.14}$$

De ello se deduce a partir de (3.14) y (3.9) y en virtud de la desigualdad de Hölder, en que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho u^N u_t^N dx \in L^1(0,t_N) \tag{3.15}$$

En consecuencia, (3.15) con (3.13) implica

$$(u_{tt}^N, u_t^N) \in L^1(0,t_N). \tag{3.16}$$

La afirmación:

$$(u_{tt}^N, u_t^N) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t), \tag{3.17}$$

Donde $\frac{d}{dt}$ y derivado de distribución en $D'(0,\ t_N)$. En efecto, para cada $\theta \in D(0,t_N)$, de (3.16) tenemos

$$\langle (u_{tt}^N, u_t^N), \theta\rangle = \int_0^{t_N} (u_{tt}^N, u_t^N)\theta(t)dt =$$

$$\int_0^{t_N}\int_\Omega u_{tt}^N\, u_t^N dx\, \theta(t)dt = \int_\Omega\int_0^{t_N} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^N)^2\theta(t)dtdx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \{(u_t^N)^2\theta(t)|_{t=0}^{t=t_N} - \int_0^{t_N} (u_t^N)^2\, \theta'(t)\, dt\right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{t_N}\int_\Omega (u_t^N)^2\theta'(t)\, dt = \frac{1}{2}\langle \frac{d}{dt}|u_t^N|^2, \theta\rangle.$$

De manera Análoga se prueba que

$$\big((u^N, u_t^N)\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t), \tag{3.18}$$

Donde a partir de ahora vamos a considerar $\|\,.\,\|(t) = \|.\|_{H_0^1(\Omega)}(t)$ y $|\,.\,|(t) = \|\,.\,\|_{L^2(\Omega)}(t)$. Además,

$$\int_\Omega |u^N|^\rho \, u^N \, u_t^N \, dx = \frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u^N|^{\rho+2} dx, \tag{3.19}$$

Por lo tanto, de $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda,\ \lambda \epsilon\ \mathbb{R}$, se tiene $F'(\lambda) = (\rho + 1)|\lambda|^\rho$.

Así a partir de (3.13), (3.17), (3.18) y (3.19) se deduce que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^{\rho+2} dx, = (f, u_t^N), \tag{3.20}$$

donde $t \epsilon [0, t^N[$.

Multiplicando por 2 a (3.20), e integramos de 0 a t , $t\ \epsilon\,]0, t[$

obtenemos

$$|u_t^N|(t)^2 + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t)$$

$$= |u_t^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p + 2\int_0^t (f, u_t^N)\,(s)ds.$$

Usando la desigualdad de Schwarz y el hecho de que $2ab \leq a^2 + b^2$, $a\,, b > 0$, vemos que

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t) \leq |u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 \tag{3.21}$$

$$+\frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p + \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^t \left\{(|u_t^N|^2 + \|u^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p\right\}(s)ds.$$

A partir de (3.11) y (3.12), existe una constante $c_0 > 0$, tal que

$$|u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c_0\ ;\ \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Ahora, a partir de (3.21) y (3.22) obtenemos

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t)$$

$$\leq c_0 + c_1 \int_0^t \left\{|u_t^N|^2 + \|u^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p\right\}(s)ds. \qquad (3.23)$$

Donde $c_1 > 0$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdada de Gronwall, existe una constante $c > 0$, tal que después se prolonga

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t) \leq c;\ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.24)$$

Por lo tanto se concluye que

$$u^N \text{ es acotado en } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \qquad (3.25)$$

$$u^N \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \qquad (3.26)$$

$$u_t^N \text{ es acotado en } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \qquad (3.27)$$

Y, sin embargo, (3.14) y (3.26), se deduce que

$$|u^N|^\rho u^N \text{ es acotado en } L^{p'}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right) = L^{p'}(Q)\,. \qquad (3.28)$$

De acuerdo con estos resultados y la compacidad de los espacios correspondientes, de [3, 22, 24], obtenemos una subsucecion (u^ν) de (u^N) ,Tal que

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \qquad (3.29)$$

$$u^\nu \rightharpoonup u \text{ en } L^p\left(0,T;L^p(\Omega)\right) \qquad (3.30)$$

$$u_t^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \qquad (3.31)$$

$$|u^{v}|^{\rho}u^{v} \rightharpoonup x \qquad \text{en} \qquad L^{p'}\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right) = L^{p'}(Q) \tag{3.32}$$

2.2.3. **Pasaje al Límite.** Consideremos el conjunto

$$W = \{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega));\ u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

Mediante la topología

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2\left(0,T\,;\,H_0^1(\Omega)\right)} + \|u_t\|_{L^2\left(0,T\,;\,L^2(\Omega)\right)}.$$

De ello se deduce a partir de (3.25) y (3.27) que la subsucesión

$$u^{v} \quad \text{es acotada en } W. \tag{3.33}$$

Por lo tanto, por el teorema Aubin - Lions, de [22], existe una subsucesion u^{μ} de u^{v} tal que

$$u^{\mu} \to u \quad \text{Converge fuertemente en} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.34}$$

De esta convergencia podemos obtener una subsucesion de u^{μ}, para la cual, sin embargo usaremos la misma notacion, tal que

$$|u^{\mu}|^{\rho}u^{\mu} \to |u|^{\rho}u \quad \text{c.s. en} \quad Q, \tag{3.35}$$

y, por (3.28) existe $C > 0$ tal que

$$\||u^{\mu}|^{\rho}u^{\mu}\|_{L^{p'}(Q)} \leq C, \quad \forall\, \mu \in \mathbb{N}$$

Luego, por el **Lema 1.3,** capítulo 1 de [22], se concluye de (3.32) que

$$X = |u|^{\rho}u. \tag{3.36}$$

Sean $\mu, j \in \mathbb{N}$ tales que $\mu \geq j$, y $\theta \in D(0,T)$. Multiplicando la ecuación aproximada (3.10). por θ, e integrando 0 a T, obtenemos

$$\int_0^T (u_{tt}^{\mu}, w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u^{\mu}, w_j))\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \left\{\int_{\Omega} |u^{\mu}|^{\rho} u^{\mu} w_j dx\right\}\theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$-\int_0^T (u_t^{\mu}, w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u^{\mu}, w_j))\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \{\int_{\Omega} |u^{\mu}|^{\rho} u^{\mu} w_j dx\}\theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt. \tag{3.37}$$

Debido a la convergencia de (3.27), (3.29), (3.31), (3.32) y por (3.36), se tiene

$$\int_0^T ((u^{\nu}, w_j))\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T ((u, w_j))\theta(t)dt \tag{3.38}$$

$$\int_0^T (u_t^{\nu}, w_j)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_t, w_j)\theta'(t)dt \tag{3.39}$$

$$\int_0^T \{\int_{\Omega} |u^{\nu}|^{\rho} u^{\nu} w_j dx\}\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T \{\int_{\Omega} |u|^{\rho} u w_j\} dx\theta(t)dt \tag{3.40}$$

De (3.37), (3.38), (3.39) y (3.40), tenemos

$$-\int_0^T (u_t, w_j)\, \theta'(t)dt + \int_0^T ((u, w_j))\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \{\int_{\Omega} |u|^{\rho} u w_j\, dx\}\theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt. \tag{3.41}$$

Por la densidad de las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base (w_j) en $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, resulta que

$$-\int_0^T (u_t\, , v)\, \theta'(t)dt + \int_0^T ((u_t\, , v))\, \theta(t)dt$$

$$+ \quad \int_0^T \{\int_\Omega |u|^\rho uv\} dx\theta(t)dt = \int_0^T (f,v)\theta(t)dt \tag{3.42}$$

para todo $v \epsilon H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Pero como $(u_t, v) \epsilon L^2(0,T)$, tenemos

$$\langle (u_t, v), \theta\rangle = \int_0^T (u_t, v)\theta dt,$$

Que es derivable y su derivada está dada por

$$\langle \frac{d}{dt}(u_t, v), \theta\rangle = -\langle (u_t, v), \theta'\rangle = -\int_0^T (u_t, v)\, \theta' dt.$$

Utilizando (3.42) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) + \big((u, v)\big) + \int_\Omega |u|^\rho uv\, dx = (f, v) \text{ en } D'(0,T). \tag{3.43}$$

2.2.4. Condiciones Iniciales. Debido a las convergencias de (3.29), (3.31) y también por (3.8) , seguido del **Lema 8.1** (capítulo 3), de [23] que

$$u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C_s\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big),$$

$$u_t \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)) \cap C_s\big(0,T; L^2(\Omega)\big),$$

Donde $C_s(0,T;X)$. Representa el espacio de las funciones débilmente continuas en $[0,T]$ de X. (ver [23]).

Probaremos inicialmente que

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3.44}$$

En efecto, $\theta\ \epsilon\ C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$. Entonces, para $v > j$, $(j \epsilon \mathbb{N})$, tenemos

$$\int_0^T (u_t^v, w_j)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_t, w_j)\,\theta(t)dt.$$

La integración por partes:

$$-(u^v(x,0), w_j) - \int_0^T (u^v, w_j)\theta'(t)dt \rightarrow -(u, w_j) - \int_0^T (u, w_j)\theta'(t)dt$$

Pero ademas de (3.29) resulta

$$\int_0^T (u^v, w_j)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u, w_j)\theta'(t)dt,$$

lo que implica

$$(u^v(x,0), w_j) \rightarrow (u(x,0), w_j), \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$u^v(x,0) \rightarrow u(x,0) \text{ en } L^2(\Omega).$$

Por otro lado, (3. 11) vemos que

$$u^v(x,0) \rightarrow u_0(x,0) \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

Por la unicidad del límite, obtenemos $u(x,0) = u_0(x)$.

Probaremos, a continuación, que

$$u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3.45}$$

Sea $0 < \delta < T$, defininamos

$$\theta_{\delta(t)} = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1; \; 0 \le t \le \delta, \\ \quad 0; \; \delta < t \le T, \end{cases} \tag{3.46}$$

que pertenece a $H_0^1(0,T)$. Multiplicando la ecuación aproximada (3.10) por $\theta_\delta(t)$ e integrando de 0 a T , tenemos

$$\int_0^T (u_{tt}^v, w_j)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T ((u^v, w_j))\theta_\delta(t)dt$$

$$+\int_0^T \left\{\int_\Omega |u^v|^\rho u^v w_j dx\right\}\theta_\delta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta_\delta(t)dt.$$

Tomando $v \to \infty$ y teniendo en cuenta la densidad de los elementos de la base $\{w_j\}$ en $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, se deduce que para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$

$$-(u_1(x), v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_{t,}v)(t)dt + \int_0^\delta ((u, v))\theta_\delta(t)dt$$

$$+\int_0^\delta \left\{\int_\Omega |u|^\rho uv dx\right\}\theta(t)dt = \int_0^\delta (f, v)\theta_\delta(t)dt.$$

Luego cuando el límite $\delta \to 0$, obtenemos

$$(u_1(x), v) = (u_t(x, 0), v), \forall\, v \in H_0^1(\Omega)L^p(\Omega).$$

Es decir,

$$u_1(x) = u_t(x, 0)$$

2.2.5. Unicidad.

Se demuestra que el problema (3.1) - (3.3) admite una unica solución débil desde $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$, $n \geq 3$. En efecto, supongamos que u y v sean soluciones débiles de (3.1) - (3.3) y considererr $w = u - v$. Considerando que

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)),\ w_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.47}$$

$$w_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$$

que satisface el problema

$$w_{tt} - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)\right), \tag{3.48}$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0. \tag{3.49}$$

Utilizamos el método de Visik – Ladyzenskaya de [39]. Consideremos para cada $s \epsilon [0,T]$, en la siguiente función

$$\psi(x,t) = \begin{cases} -\int_t^s w(x,\xi)d\xi\,; & 0 \le t \le s, \\ 0; & s < t \le T. \end{cases} \tag{3.50}$$

Luego,

$$\psi_t(x,t) = \begin{cases} w(x,t); & 0 \le t \le s, \\ 0; & s < t \le T. \end{cases} \tag{3.51}$$

De Las expresiones de arriba y de (3.47) vemos que

$$\psi, \psi' \in L^\infty\big(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\big). \tag{3.52}$$

Comparando (3.48) con ψ en la dualidad de

$L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)\right) \times L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\big)$, obtenemos

$$\int_0^s \langle w_{tt}, \psi\rangle(t)dt + \int_0^s \langle -\Delta w, \psi\rangle(t)dt = \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\rangle(t)dt. \tag{3.53}$$

Recordando que $\psi = 0$ en $[0,T]$, y la integración por partes, y usando en efecto que $\langle -\Delta w, \psi\rangle = \big((w,\psi)\big)$, obtenemos

$$\langle w_t(x,s), \psi(x,s)\rangle - \langle w_t(x,0), \psi(x,0)\rangle - \int_0^s (w_t, \psi_t)(t)dt$$

$$+\int_0^s \big((w,\psi)\big)(t)dt = \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\rangle(t)dt$$

o de (3.49),(3.50) y (3.51) tenemos

$$-\int_0^s (w_t, w)dt + \int_0^s \big((w_t,\psi)\big)(t)dt = \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\rangle(t)dt,$$

Es decir,

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|w|^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\psi\|^2(t)dt = \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\rangle(t)dt,$$

Lo que implica

$$-\frac{1}{2}|w(x,s)|^2+\frac{1}{2}|w(x,0)|^2+\frac{1}{2}\|\psi(x,s)\|^2$$

$$-\frac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2=\int_0^s\langle|v|^\rho v-|u|^\rho u,\psi\rangle dt.$$

Lo visto en (3.49) y (3.50), se sigue

$$-\tfrac{1}{2}|w|^2(s)-\tfrac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2=\int_0^s\int_\Omega\ \langle|v|^\rho v-|u|^\rho u\rangle\psi dxdt. \tag{3.54}$$

Afirmación:

$$||v|^\rho v-|u|^\rho u|\leq(\rho+1)2^{2\rho}\{|u|^\rho+|v|^\rho\}|w|.$$

En efecto, notemos que

$$F(\lambda)=|\lambda|^\rho\Rightarrow F'(\lambda)=(\rho+1)|\lambda|^\rho,\qquad\lambda\in\mathbb{R},$$

Entonces $F\in C^1(\mathbb{R})$. Asi mismo, dada α y $\beta\in\mathbb{R}$, existe $\xi\in\,]\alpha,\beta[$ tal que por el teorema del valor medio:

$$|F(\beta)-F(\alpha)|\leq|F'(\xi)||\beta-\alpha|$$

Es decir,

$$|F(\beta)-F(\alpha)|\leq(\rho+1)|\xi|^\rho|\beta-\alpha| \tag{3.55}$$

Desde $\xi\in\,]\alpha,\beta[$, existe un $\theta\in\,]0,1[$ tal que

$$\xi=\alpha+(\beta-\alpha)\theta. \tag{3.56}$$

Ahora tomamos $\alpha=u(x,t)$ y $\beta=v(x,t)$, de (3.55) y (3.56), se obtiene

$$||v|^\rho v-|u|^\rho u|\leq(\rho+1)2^{2\rho}\{|u|^\rho+|v|^\rho\}|w|. \tag{3.57}$$

A partir de (3.55) y (3.57) resulta que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s)+\frac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2 \tag{3.58}$$

$$\leq c(\rho)\int_0^s\int_\Omega \{|u|^\rho+|v|^\rho\}|w|\psi dxdt.$$

Usando el teorema de inmersión de Sobolev en [24], se obtiene

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Donde

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \tag{3.59}$$

Afirmación:

$$|u|^\rho,|v|^\rho\in L^n(\Omega)\ \text{c.s. en}\ (0,T). \tag{3.60}$$

De hecho, tenemos por hipótesis

$$0<\rho<\frac{2}{n-2}$$

Es decir,

$$0<\rho n<\frac{2n}{n-2}\leq q.$$

Esto, y el hecho de que Ω es limitada, resulta

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{L}^{\rho n}(\Omega). \tag{3.61}$$

Ahora, como u **y** $v\in H_0^1(\Omega)$ c.s. en $]0,T[$, se sigue de (3.61) que

$$|u|^\rho,|v|^\rho\in L^n(\Omega)\ \text{c.s. en}\ (0,\mathrm{T}). \tag{3.62}$$

A partir de (3.59)

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1. \tag{3.63}$$

Recordando las inclusiones

$$w \in L^2(\Omega) \text{ c.s en } (0,\mathrm{T}), \tag{3.64}$$

Y

$$\psi \in L^q(\Omega) \quad c.s \quad \text{en} \quad (0,\mathrm{T}), \tag{3.65}$$

Siguiendo de (3.58) (3.62) (3.63) (3.64) (3.65) y por desigualdad de Hölder generalizada de [3] , se tiene que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s)+\frac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2 \tag{3.66}$$

$$\leq c_1\int_0^s\{(\||u|^\rho\|_{L^n(\Omega)}+\||v|^\rho\|_{L^n(\Omega)})|w|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}\}(t)dt.$$

De (3.61), y en efecto de que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ tenemos

$$\sup_{t\in[0,T]}\||u|^\rho\|_{L^n(\Omega)}(t)=\sup_{t\in[0,T]}\left[\int_\Omega |u|^{n\rho}(t)dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq k_1\sup_{t\in[0,T]}\|u\|^\rho(t)<+\infty,$$

Donde concluimos que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s)+\frac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2\leq c_2\int_0^s|w|_{L^2(\Omega)}(t)\|\psi\|(t)dt. \tag{3.67}$$

Considerar

$$w_1(x,t)=\int_0^t w(x,\xi)d\xi. \tag{3.68}$$

De (3.50) y (3.68), para todo $t \in [0,s]$, tenemos que

$$\psi(x,t) = -\int_t^s w(x,\xi)d\xi = -\int_0^s w(x,\xi)d\xi + \int_0^t w(x,\xi)d\xi = w_1(x,t) - w_1(x,s). \tag{3.69}$$

Por lo tanto,

$$\psi(x,0) = w_1(x,0) - w_1(x,s) = -w_1(x,s).$$

A partir de (3.69) y (3.67) se deduce que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s) + \frac{1}{2}\|w_1\|^2(s) \leq c\int_0^s \{|w|^2 + \|w_1\|^2\}(t)dt.$$

Por lo tanto, en virtud de la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$|w|^2(t) + \|w_1\|^2(t) \leq 0.$$

Por lo tanto se concluye que

$$w = 0 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega), \forall\, t \in [0,T].$$

Que es lo que se quería demostrar. ■

En el caso $n = 1,2$ con $0 < p < +\infty$, la prueba es análoga, simplificando las inmersiones (3.61) las cuales se verifican inmediatamente cuando $n = 1,2$.

2.3. Existencia y Unicidad De Soluciones Fuertes

Consideremos el mismo problema

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f, \text{ en } \quad Q\ (\rho > 0), \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{sobre} \quad \textstyle\sum, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.3}$$

El objetivo de este capıtulo es obtener una solución fuerte para (4.1) - (4.3) por lo tanto, daremos las condiciones rigurosas a los condiciones iníciales,antes mencionada:

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,,\; u_1 \in H_0^1(\Omega) \quad \mathbf{y} \quad f, f_t \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big) \qquad (4.4)$$

Definición 4.1. Una función $u: Q \to \mathbb{R}$, tal que

$$u \in L^\infty\big(0,T,H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big)\,,$$

$$u_t \in L^\infty\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big)\,,$$

$$u_{tt} \in L^\infty\big(0,T,L^2(\Omega)\big),$$

Es llamada la solución fuerte del problema (4.1) - (4.3) si satisface la ecuación (4.1) $c.s.$ en Q y las condiciones iniciales (4.3) para $c.t.\ x \in \Omega$.

Teorema 4.1 Bajo las condiciones en (4.4) y $0 < \rho < \frac{2}{n-2}$; $(n \geq 3)$. Entonces, el problema (4.1) - (4.3) admite una única solución en el sentido de la **definición 4.1**.

Al igual que en el capítulo anterior, este teorema aun es válido para $n = 1,2$ con $0 < \rho < +\infty$.

La existencia de la solución, se probará utilizando nuevamente el método de **Faedo – Galerkin.**

2.3.1. Problema Aproximado.

Observamos en primer lugar, por el teorema de Inmersión de Sobolev , dado en [24] y [26],que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega); \quad q \leq \frac{2n}{n-2} \qquad (4.5)$$

Como por hipótesis, $\rho \leq \frac{2}{n-2}$,entonces

$$2\rho \leq \frac{4}{n-2} \Leftrightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{4}{n-2} + 2 \Leftrightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Por lo tanto

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega), \qquad (4.6)$$

En consecuencia, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ se cumple

$$|v|^{\rho+2} \in L^1(\Omega) \quad \mathbf{y} \quad |v|^{\rho} v \in L^2(\Omega). \qquad (4.7)$$

Sea (w_v) Una base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Para cada $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, Consideremos

$$V_N = [w_1, \dots\dots, w_{\mathrm{N}}],$$

El subespacio de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, generado por los Nprimeros vectores de la base.Definamos

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x) \qquad (4.8)$$

Donde las funciones $g_i^N(t)$ se eligen tal que u^N se solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$(u_{tt}^N, w_{j)} + \left(\left(u^N, w_j\right)\right) + \left(|u^N|^{\rho} u^N, w_j\right) = (f, w_j),\ j = 1, \dots, N \qquad (4.9)$$

Con las condiciones iníciales

$$u^N(x,0) = u_0^N(x) \longrightarrow u_0(x) \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

(4.10)

$$u_t^N(x,0) = u_1^N(x) \longrightarrow u_1(x) \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega).$$

(4.11)

Por Carathéodory, el sistema (4.9) para cada N , posee solución local u^N en un intervalo $[0, t_N[$, Donde u^N y u_t^N son las funciones absolutamente continuas y u_{tt}^N existe casimsiempre. Por medio de las Estimativas a Priori,vamos a extender la solucion en todo el intevalo $[0, T]$.

2.3.2. Estimativas Apriori.

- **Estimativa I:** Multiplicando (4.9) por $\left(g_j^N\right)'$ y sumando de 1 a N, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^{\rho+2}(t)dx = (f, u_t^N),$$

Similar a lo que hicimos en el problema (3.1) - (3.3).

Tomando $p = \rho + 2$ e integrando la expresión anterior desde 0 a t , $t \in (0, t_N)$, obtenemos

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|^p_{L^p(\Omega)}(t)$$

$$= |u_t^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|^p_{L^p(\Omega)} + 2\int_0^t (f, u_t^N)(s)ds \qquad (4.12)$$

$$\leq |u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|^p_{L^p(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t |u_t^N|^2(s)ds$$

A partir de (4.10) y (4.11), existe una constante $c_0 > 0$ tal que

$$|u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p + \|f\|_{L^2(Q)}^2 \le c_0. \qquad (4.13)$$

Por lo tanto, a partir de (4.12) y (4.13) se obtiene

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t)$$

$$\le c_0 + c_1 \int_0^t \left\{|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p\right\}(s)ds.$$

Usando la desigualdad de Gronwall en la ultima desigualdad , vemos que

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p \le c_2, \ \forall\, t \in [0,T]. \qquad (4.14)$$

Luego,

$$u^N \text{ es acotado en } L^\infty\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big) \qquad (4.15)$$

$$u^N \text{ es acotado en } L^\infty\big(0,T,L^p(\Omega)\big) \qquad (4.16)$$

$$u_t^N \text{ es acotado en } L^\infty\big(0,T,L^2(\Omega)\big). \qquad (4.17)$$

Y, sin embargo,de (4.6) y (4.15), se deduce que

$$|u^N|^\rho u^N \text{ es acotado en } L^\infty\big(0,T,L^2(\Omega)\big) \qquad (4.18)$$

- **Estimativa II**: Sin perdida de generalidad, consideremos la base (w_υ) ortonormal, en a $L^2(\Omega)$ (a través del proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt cualquier base puede ser ortogonalizados, [27]).

Notemos que

$$u_{tt}^N = \sum_{j=1}^{N} (g_j^N)'' w_j \Rightarrow (u_{tt}^N, w_j) = (g_j^N)''.$$

A partir de la expresión anterior y (4.9) resultados

$$(g_j^N)'' = (f, w_j) - ((u^N, w_j)) - (|u^N|^\rho u^N, w_j), j = 1, \ldots, N. \qquad (4.19)$$

Como los términos del segundo miembro de (4.19) son absolutamente continuos en $[0, T]$, se deduce que $(g_j^N)'' \in L^2(0, T)$. Por lo tanto, para cada N $\in \mathbb{N}$ fijo, se tiene

$$u_{tt}^N \in L^2(0, T;\ L^2(\Omega)). \qquad (4.20)$$

Usando en efecto que las derivadas clásicas y distribucionales coinciden en el presente caso, resulta de (4.9) que

$$\frac{d}{dt}(u_{tt}^N, w_j) = (f_t, w_j) - ((u_t^N, w_j)) - (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho\, u_t^N w_j dx \qquad (4.21)$$

En $L^2(0, T)$. Luego de (4.19) viene

$$(g_j^N)''' \in L^2(0, T)$$

Además, para cada N $\in \mathbb{N}$ fijo, tenemos

$$u_{ttt}^N \in L^2(0, T;\ L^2(\Omega)) \qquad (4.22)$$

Luego, a partir de (4.21), obtenemos

$$(u_{ttt}^N, w_j) + ((u_t^N, w_j)) + (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho\, u_t^N w_j dx = (f_t, w_j). \qquad (4.23)$$

Multiplicando por $(g_j^N)''$ y sumando desde 1 a N, vemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{tt}^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^N\|^2(t) + (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho\, u_t^N u_{tt}^N dx = (f_t, u_{tt}^N),$$

Donde

$\frac{d}{dt}\{|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t)\} \leq 2(\rho + 1)\int_\Omega |u^N|^\rho\, u_t^N u_{tt}^N dx + 2(f_t, u_{tt}^N).$
(4.24)

Como $u^N \in H_0^1(\Omega)$, vemos que $u^N \in L^{\rho n}(\Omega)$, además $|u^N|^\rho \in L^n(\Omega)$. También el hecho de que $u_t^N \in H_0^1(\Omega)$, obtenemos $u_t^N \in L^q(\Omega)$.Siendo $\frac{1}{q}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=1$, siguiendo por la desigualdad de Hölder generalizada que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho\, |u_t^N||u_{tt}^N| dx \leq \||u^N|^\rho\|_{L^n(\Omega)}\|u_t^N\|_{L^q(\Omega)}|u_{tt}^N|_{L^2(\Omega)}(t)$$

$$= \|u^N\|_{L^{\rho n}(\Omega)}^\rho \||u_t^N|\|_{L^q(\Omega)}|u_{tt}^N|_{L^2(\Omega)}(t). \qquad (4.25)$$

Tenemos

$$0 < \rho < \frac{2}{n-2} \Rightarrow \rho n < \frac{2n}{n-2} \leq q.$$

De esto, y el hecho de que Ω es acotada, resulta que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \qquad (4.26)$$

De (4.25) y (4.26), existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho\, |u_t^N||u_{tt}^N| dx \leq c_3\|u^N\|^\rho(t)\|u_t^N\|(t)|u_{tt}^N|(t),$$

y usando la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$, y (4.15) en la expresión de arriba, tenemos que existe $c_4 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho\, |u_t^N||u_{tt}^N| dx \leq c_4\{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(t). \qquad (4.27)$$

Ahora, a partir de (4.24) y (4.27) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\{|u_{tt}^N|^2 + \|u_t^N\|^2\}(t) \leq c_5\{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(t) + |f_t|^2(t) + |u_{tt}^N|^2(t).$$

Integrando la expresión anterior de 0 a 1, $t \in [0,T]$, vemos que

$$|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) \leq \|u_{tt}^N(x,0)\|^2 + \|u_1^N\|^2 + \|f_t\|_{L^2(Q)}^2$$

$$+c_6 \int_0^t \{\|u^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(s)ds. \tag{4.28}$$

En virtud de (4.15), (4.17), (4.20) y (4.22) tenemos

$$u^N \in C_s([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap C\big([0,T], L^2(\Omega)\big),$$

$$u_t^N, u_{tt}^N \in C\big([0,T], L^2(\Omega)\big),$$

Tiene sentido hablar de $u_{tt}^N(x,0)$. De (4.19), en particular, podemos escribir

$$|u_{tt}^N(x,0)|^2 =$$

$$\big(f(x,0), u_{tt}^N(x,0)\big) - \Big(\big(u^N(x,0), u_{tt}^N(x,0)\big)\Big) - \big(|u^N(x,0)|^\rho u^N(x,0), u_{tt}^N(x,0)\big). \tag{4.29}$$

Usando los teoremas de Green y Schwarz en la expresión anterior, resulta

$$|u_{tt}^N(x,0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \big\{|f(x,0)|_{L^2(\Omega)} + |\Delta u_0^N|_{L^2(\Omega)} + ||u_0^N|^\rho u_0^N|\big\}|u_{tt}^N(x,0)|.$$

Así que a partir de (4.6) y (4.10), se concluye existe $c_7 > 0$, tal que

$$|u_{tt}^N(x,0)|_{L^2(\Omega)} \leq c_7; \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.30}$$

Por lo tanto, a partir de (4.11), (4.28) y (4.30) tenemos

$$|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) \leq c_8 + c_9 \int_0^t \{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(s)ds.$$

Una vez más por el lema de Gronwall:

$$|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) \leq c; \forall\, t \in [0,T]; \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad (4.31)$$

resulta que

$$u_t^N \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;(\Omega)), \quad (4.32)$$

$$u_{tt}^N \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega)). \quad (4.33)$$

2.3.3. Pasaje al Límite.

De las estimativas hechas en (4.15), (4.16), (4.17) (4.18) (4.32) y (4.33), podemos extraer una subsucesión u^υ de u^N tal que

$$u^v \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty\left(0,T;\, H_0^1(\Omega)\right) \quad (4.34)$$

$$u^v \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad L^p(Q) \quad (4.35)$$

$$u_t^v \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad (4.36)$$

$$u_t^v \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad (4.37)$$

$$u_{tt}^v \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad (4.38)$$

Sea $\theta \in D(0,T)$ y $\upsilon > j$. De (4.9) podemos escribir

$$\int_0^T (u_{tt}^v, w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u^v, w_j))\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \left\{\int_\Omega |u^v|^\rho u^v w_j dx\right\} \theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt. \quad (4.39)$$

Tomamos los resultados de (4.15), (4.17) y por el teorema de Aubin - Lions, podemos extraer una subsucesión u^μ de u^v de modo que

$$u^\mu \to u \quad \text{en} \quad L^2(Q).$$

Se deduce que existe una subsucesión u^μ que nos permite usar la misma notación, de tal manera que

$$u^\mu \longrightarrow u \text{ c.s} \quad \text{en} \quad Q.$$

Por la continuidad de la aplicación de $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, y de la ultima convergencia vemos que

$$|u^\mu|^\rho u^\mu \to |u|^\rho u \text{ c.s} \quad \text{en} \quad Q. \quad (4.40)$$

De (4.18) (4.40) y por el **Lema 1.3**, del capítulo 1 de [22], se obtiene

$$|u^\mu|^\rho u^\mu \to |u|^\rho u \quad \text{en} \quad L^2(Q). \quad (4.41)$$

Por lo tanto, las convergencias de (4.34), (4.38) y (4.41) nos permite tomar el límite en (4.39)

$$\int_0^T (u_{tt}, w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \left((u, w_j)\right) \theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \left\{\int_\Omega |u|^\rho u, w_j dx\right\} \theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt.$$

Por la densidad de las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base (w_v) en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, se sigue que

$$\int_0^T (u_{tt}, v)\theta(t)dt + \int_0^T \big((u,v)\big)\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \left\{\int_\Omega |u|^\rho uv dx\right\}\theta(t)dt = \int_0^T (f,v)\theta(t)dt, \qquad (4.42)$$

Para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, con el resultado de que

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{en} \quad D'(0,T; L^2\Omega\,),$$

y por [23] , Obtenemos

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{en} \quad L^2(0,T; L^2\Omega\,). \qquad (4.43)$$

De (4.43) y (4.34) tenemos

$$-\Delta u \in L^2(\Omega)\ q.s\ en\ (0,T), \qquad (4.44)$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \qquad (4.45)$$

y por resultados de regularidad de los problemas elípticos,tenemos

$$u \in H^2(\Omega) \quad \text{para} \quad c.t.\ \ t \in (0,T). \qquad (4.46)$$

Y sin embargo, Como

$$f \in C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad |u|^\rho u \in L^\infty\big(0,T;\ L^2(\Omega)\big) \quad \text{y} \quad u_{tt} \in L^\infty\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$$

Se sigue a partir de (4.43) que

$$\Delta u \in L^\infty\big(0,T;\ L^2(\Omega)\big). \qquad (4.47)$$

Teniendo en cuenta nuevamente la regularidad de los problemas elípticos,tenemos que

$$\underset{t\in]0,T[}{\text{suppess}}\|u\|_{H^2(\Omega)} = C\underset{t\in]0,T[}{\text{suppess}}\ |\Delta u|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Por lo tanto

$$u \in\ L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{4.48}$$

Las condiciones iniciales son probadas de manera análoga al Capítulo 3.

2.3.4. Unicidad.

Vamos a demostrar que la solución más fuerte del problema (4.1) - (4.3) obtenido en la sección anterior es única desde que $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$, si $n \geq 3$, ó $0 < \rho < \infty$, si $n = 1,2$.

También enfatizamos que la prueba de la unicidad, podría ser hecha de manera análoga al capitulo anteriorhacer de una manera análoga a capítulo anterior (Sección 3.5). Aquí le daremos una demostración diferente, aplicando el Método de la Energia, el cual es el caso más aceptables dbido a la regularidad de la solución obtenida.

Supongamos que u y v dos soluciones fuertes de (4.1) - (4.3) y consideremos $w = u - v$.

Entonces para w, satisface

$$w_{tt} - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u \ \text{ c.s. } \quad \textbf{en} \quad Q, \tag{4.49}$$

$$w(x,t)|_\Sigma = 0 \tag{4.50}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \tag{4.51}$$

Haciendo la composición (4.49) con w_t obtenemos

$$(w_{tt}, w_t) + (-\Delta w\,, w_t) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u\,, w_t).$$

Dado que $w \in L^\infty(0,T;H_0^1) \cap H^2(\Omega)$ y debido al teorema de Green

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u\,, w_t). \tag{4.52}$$

Estimando el segundo miembro de (4.52) de una manera análoga a lo hecho en (3.57), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) \tag{4.53}$$

$$\leq c(\rho)\int_\Omega \{\,|u| + |v|\,\}^\rho |w||w_t|dx.$$

Por el teorema de Inmersión de Sobolev:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \leq \frac{2n}{n-2} \tag{4.54}$$

Por la hipótesis de $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$, es decir $\rho n \leq \frac{2}{n-2}$. De esto y de (4.54) resulta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \tag{4.55}$$

Ahora, como $u, v \in H_0^1$ c.s. en $(0, T)$, y de la Inmersion en (4.55) se tiene que

$$|u|^\rho,\ |v|^\rho \in L^n(\Omega); w \in L^q(\Omega) \text{ c.s. en } (0, t). \tag{4.56}$$

Pero, cómo $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$ y en virtud de la desigualdad de Hölder generalizada

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)$$

$$\leq c_1\left\{\|u\|^\rho_{L^n(\Omega)} + \|v\|^\rho_{L^n(\Omega)}\right\}|w_t|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^q(\Omega)}(t) \text{ c.s en }]0, \mathrm{T}[.$$

Pero de (4.55) y el hecho de que $u, v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)$$

$$\leq c_2|w_t|_{L^2(\Omega)}\|w\|(t) \quad \text{c.s.} \quad \text{en }]0, T[.$$

Integrando la última desigualdad de 0 a T, $t \in [0,T]$:

$$|w_t|^2(t) + \|w\|^2(t)$$

$$\leq |w_t|^2(x,0) + \|w\|^2(x,0) + c_3 \int_0^t |w_t|^2 \|w\|^2(s)\, ds$$

$$\leq c_4 \int_0^t \{|w|^2 + \|w\|^2(s)\},$$

y por Gronwall $|w_t|^2(t) + \|w\|^2(t) \leq 0$, $\forall\, t \in [0,T]$.

Donde concluimos que

$$w = 0 \quad \textbf{en} \quad H_0^1(\Omega), \forall\, t \in [0,T]$$

Es decir, $w = 0$ **en** $L^\infty\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$. ■

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la investigación

$$u = 0 \quad sobre$$
$$\sum = \Gamma \; x \;]0, T[$$
$$u(x, 0) = u_0(x);$$
$$u'(x, 0) = u_1(x) \qquad en \quad \Omega$$

3.2. Operacionalización de la Variable

Variable	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
$u = 0 \quad sobre$ $\sum = \Gamma \; x \;]0, T[$ $u(x, 0) = u_0(x);$ $u'(x, 0) = u_1(x)$ $en \quad \Omega$	Este trabajo nos permite realizar una investigación científica básica, tanto desde el punto de vista teórico y práctico.	El trabajo desarrollado está en la línea de las Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas, por lo que los resultados pueden ser aprovechados por diferentes especialistas cuyo trabajo esté relacionado con este estudio (Físicos, Químicos, Ingenieros, etc.) y que deseen profundizar sus investigaciones en la teoría de existencia de soluciones fuertes	Ω Es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ bien regular y $\rho > 0$. Se mostrará la existencia de la solución global débil y fuerte.	$u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ El Operador Laplaciano

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

En el espacio de dimensión finita $V_m = [w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m$ se obtiene una solución aproximada de $u_m(t)$ en un intervalo $[0, T_m]$, $T_m < T$ usando el teorema de caratheodory para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luego se hace Estimativas a Priori que permiten extender la solución $u_m(t)$ a todo el intervalo $[0, T]$.

Hipótesis específica

Con las estimativas obtenemos convergencias en el espacio $L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$, $L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ y $L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$; que permiten probar la existencia de las soluciones débiles.

Realizaremos un minucioso estudio de cada material obtenido, con la finalidad de adaptarlo a nuestro objetivo y que nos lleve a la obtención de nuestros resultados.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de Investigación

La investigación es de tipo científica-teórico y la metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo mas exhaustivo posible en cada demostración.

4.2. Tipo de Investigación

En la actualidad los modelos matemáticos, relacionados con procesos dependientes del tiempo son intensamente estudiados. Las ecuaciones de evolución representan situaciones físicas tales como: oscilación de la cuerda, difusión de gases, vibraciones de membrana, etc. Asi es como se implementan diversos métodos para obtener soluciones de los modelos propuestos.En nuestro caso tenemos el sistema de evolución:

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\quad , \\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

En el caso $u'' - \Delta u = f$, el sistema posee solucion fuerte y fue estudiado por Reynaldo Arturo Egocheaga Díaz en [40] , también, el sistema admite soluciones débiles y fue estudiado por Noel Figueroa Pablo Fernando en [41] .

Nuestro estudio resuelve específicamente la existencia y unicidad de soluciones de soluciones débiles y fuertes, esto es, en primer lugar en el capitulo 2 en la sección 2.2 demostramos la existencia y unicidad de soluciones débiles y luego en la sección 2.3 del mismo, demostramos la existencia y unicidad de soluciones fuertes del sistema $(*)$.

4.3. Población y Muestra

Por se nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}^n$ y espacios de Banach.

4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de este trabajo de tésis se revisó la bibliografía específicada y recopilación de información obtenida vía interés realcionada al tema de interés.

4.5. Procediemiento de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no necesitó procediemientos de recolección de datos más que la revisión bibliográfica (libros, páginas web, paper, etc.)

4.6. Procediemiento estadístico y análisis de datos

Ninguno.

CAPÍTULO V

Resultados

Los resultados más relevantes de esta tesis son:

1. Se logró demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema mixto,

$$
(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

Imponiendo que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

2. Se logró demostrar también la existencia y unicidad de soluciones fuertes del problema mixto,

$$
(*)\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

Imponiendo que

$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ y $f, f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

CAPÍTULO VI

Discusiones

1. En un próximo trabajo seria atacar con los mismos métodos usados en la tesis el problema de existencia y unicidad de soluciones del problema mixto,

$$\begin{cases} u'' - \Delta^2 u + |u|^\rho u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

2. Otro trabajo mas general es estudiar con los mismos métodos usados en la tesis el problema ,

$$\begin{cases} u'' - Au + |u|^\rho u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Donde A es un operador lineal, simétrico, auto adjunto y coersivo de $H_0^1(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

En nuestro trabajo concluimos lo siguiente:

- Probamos la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema mixto:

$$(*)\begin{cases} u'' - \Delta^2 u + |u|^\rho u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\,, T \text{ finito} \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \sum = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x)\ ;\ u'(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

- Tambien se muestra la existencia y unicidad de soluciones fuertes del problema $(*)$.

- Estos resultados pueden ser aprovechados por diferentes especialistas cuyo trabajo este relacionado con la existencia y unicidad de soluciones débiles y fuertes.

- Creemos que esta, tesis permitirá el avance de otras líneas de investigación. También es importante resaltar la atención que las herramientas usadas son de referencia actual, por lo que se hace necesario su estudio para una posible incorporación en los planes de estudio de las diversas especialidades en matemática, Fisica e ingeniería.

CAPÍTULO VIII

Recomendaciones

- Dentro de este trabajo ambicioso como lo fue éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto se recomienda a futuros egresados que tengan el interés en el proyecto, en la línea de investigación de las ecuaciones diferenciales parciales.

- Estos resultados pueden ser aprovechados por diferentes especialistas cuyo trabajo este relacionado con la existencia y unicidad de soluciones débiles y fuertes.

- Creemos que esta, tesis permitirá el avance de otras líneas de investigación. También es importante resaltar la atención que las herramientas usadas son de referencia actual, por lo que se hace necesario su estudio para una posible incorporación en los planes de estudio de las diversas especialidades en matemática, Fisica e ingeniería.

CAPÍTULO IX

Referencias Bibliográficas

[1] Antropova VI, Observaciones sobre MV Ostrogradskii de 'Memoria sobre la difusión del calor en Istor cuerpos sólidos. - Mattlssled, 16 (1965), 97-126.

[2] AE Assan, Métodos de Elementos Finitos: Primeros pasos, UNICAMP, Campiñas en el año 1999.

[3] Brezis H., Funcional teoría Análisis y aplicaciones, Ediorial Alianza, Madrid, 1984.

[4] FE Browder, Problemas no lineales, Les Presses de L'Universit` y Montreal, Montreal, 1966.

[5] chazy Jean, MecaniqueRationelle, Gauthier - Villars, vol. II, p. 218, Paris, 1933.

[6] Coddington, E., Levinson, N., Teoría de las Ecuaciones differntial ordinarias, MacGraw- Hill, Londres, 1955.

[7] Cooper JM, Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales con MATLAB, Birkhauser, 1998.

[8] Courant, R. Hilbert, D., Los métodos de la física matemática, vol. 1, p. 174, Wiley - Intercience de 1953.

[9] Dautray R., JL Lions, Análisis Matemático y Métodos Numéricos para la Ciencia y Tecnología, Vol.. 1, Springer-Verlag, 1998.

[10] Faedo S., Un Nuevo Metodo per Esistenziale y cuantitativa L'AnalisideiProblemi di Propagazione, Annalidella Scuola Norma. Sup, Roma (1949), 1-41.

[11] Figueiredo DG, Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales, Cuarta Edicion, Project Euclid, IMPA, Río de Janeiro, 1977.

[12] JBJ Fourier, Teoría de la AnalytiqueChauler, F. Dudot, París (1822), 839.

[13] JBJ Fourier, Analizar des ecuaciones determinees, F. Dudot, París (1831), 24-258.

[14] BG Galerkin, Bares y placas. La serie en algunas preguntas de equilibrio elástico barras y planchas, noticias de Ingenieros, vol. 1 (1915), 897-908 (en ruso: Sterzhni i plastinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok, Vestnik Ingenerov, vol. 1 (1915), 897-908).

[15] Jorgens K., Anfangswertproblem en el Grossen piel eine Klasse nichtlinearer Wellen- gleichungen, Math. Zeitschr., 77 (1961), 295-308.

[16]AN Krylov et al., El académico BG Galerkin: En el septuagésimo aniversario de su nacimiento, Vestnik Akademiinauk SSSR, 4 (1941), 91-94.

[17] AG Kuzmin, No - las ecuaciones clásicas de tipo mixto y sus aplicaciones en gas dinámica, Serie Internacional de Matemática Numérica, 109, Basilea: Birkhauser Verlag, 1992.

[18] Larkin NA El problema no lineal Valor Límite para la Ecuación de Mixta Tipo, Funkcialaj Ekvacioj, 42 (1999) 491-506.

[19] Larkin NA En un problema de Transonic dinámica de gases, Matemáticas contemporanea, Rio de Janeiro, vol. 15 (1998) 169-186.

[20] Larkin NA Soluciones suaves para Transsonic Dinámica de Gases, Novosibirsk, Nauka, 1991.

[21] Lemos NA, Mecánica Analítica, Biblioteca de Física, Sao Paulo, 2004.

[22] Lions J.L., Quelques méthodes de la résolution des problémes aux limites non linéaires, Dunod Gauthier-Villars, París, 1969.

[23] JL Lions, Magenes E., Problemesaux limita homogéneos` enes et aplicaciones no, vol. 1 Dunod, París, 1968.

[24] LA Medeiros, MM Miranda, Espacios de Sobolev (Inicia a los problemas Elıticos hace lo homogéneo), IM - UFRJ, Río de Janeiro, 2000.

[25] Medeiros LA, Mello EA La integral de Lebesgue, IM - UFRJ, Río de Janeiro, 1989.

[26] LA Medeiros, Iniciac para los espacios de Sobolev y de su aplicación, IM - UFRJ, Río de De enero de 1983.

[27] Mijailov VP, Ecuaciones diferenciales es Parciales derivados, Moscú, MIR, 1978.

[28] D. Napolitano, O. Ryzhov, Por analogía entre viscosa no equilibrio e inerciales flujos con velocidades transónicas, J. Comput. Math. Phys. Y 1 (1971), 1229 1261.

[29] JJ O'Connor, EF Robertson, Biografía de BG Galerkin, Diccionario de Scientific Biography, New York, 1990.

[30] IG Petrovski, Conferencias sobre ecuaciones diferenciales parciales, Interscience Publishers, NY, 1954.

[31] Rakhimova IKJohn William (Strutt) Rayleigh - iniciador de la modernateoría matemática de las vibraciones, En: Apuntes sobre la historia de la física matemática,"Naukova Dumka", Kiev (1985), 141-147.

[32] Ritz W. Neue Methode zur Losung gewisser Randwertaufgaben, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. - Physik. Klasse. Nachrichten, de Göttingen (1908).

[33] Ritz W. Ubereine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der matematischen Physik, Journal für die reine und Angewandte Mathematik, (1909)

[34] Schift LI, No teoría del mesón lineal de las fuerzas nucleares, Phys.. Rev., 84 (1951), 1-9.

[35] Segal IE El problema de Cauchy Global para un campo escalar relativista con el poder de interaccion, Bull. Math Soc. Francia, 91 (1963), 129-135.

[36] Sokolovski VV, En la vida y la carrera científica del académico BG Galerkin, Izvestia Akademii nauk SSSR, Otdeleniet ekhnicheskikh nauk, 8 (1951), 1159-1164.

[37] JW Thomas, Numéricos Ecuaciones en Derivadas Parciales: Métodos de diferencias finitas, Springer-Verlag, Nueva York, 1999.

[38] Visik MI Solución del sistema de ecuaciones que tienen forma casi lineal divergente bajo Condiciones de contorno periódicas, Dokl. Acad. Nauk, SSSR, 137 (1961), 502-505.

[39] Visik MI, Lady zhenskaya, OA, Límites - Problemas de valor parcial de diferencial ecuaciones potenciales y ciertas clases de ecuaciones de operadores, Uspekhi matemáticas. Nauk 6 (72) (1956),41-97; Espanhol trad, Amer.. Math. Transl Soc. (2) 10, 1958, 223-281

[40] Reynaldo Arturo Egocheaga Díaz. Existencia y Unicidad de la Solución Fuerte de la Ecuación de la Onda. Informe Final del Trabajo de Investigación Científica. Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, UNAC. 2012.

[41] Noel Figueroa Pablo Fernando. Existencia y Unicidad de la Solución Débil de la Ecuación de la Onda. Informe Final del Trabajo de Investigación Científica. Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, UNAC. 2012.

[42] L.A. Medeiros & E.A. De Mello. A Integral de Lebesgue. Textos Matematicos Nro. 18 IM – UFRJ (19975).

[43] R. Adams; Sovolev Spaces. Academic press, New York – London and San Francisco. 1976.

[44] L.A. Medeiros & P.H. Rivera. Espaços de Sobolev Equações Diferenciais Parciais, textos de Metodos Matemáticos Nro. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1975)

[45] M, Milla Miranda. A análise espectral em espaços de Hilbert. Textos de Métodos Matemáticos, Nro. 128, IM-UFRJ, Rio De janeiro (1990).

[46] P. H. Rivera. Introduccion a la Teoria de Distribuciones. Textos de Métodos Matemáticos Nro. 6 , IM-UFRJ, Rio De janeiro (1985).

[47] Eberhard Zeidler. Nonlinear Funtional Analisys and its Aplications. Vol. II/A y Vol. II/B. 1999.

[48] R. Teman, Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland,Amsterdam. 1979.

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
Identificación del Problema En este proyecto de tesis estudiaremos la ecuación hiperbólica no lineal: $u'' - \Delta u + \lvert u \rvert^{\rho} u = f$ en $Q = \Omega \times]0,T[$, T finito $u = 0$ sobre $\sum = \Gamma \times]0,T[$ $u(x,0) = u_0(x)$; $u'(0,x) = u_1(x)$ en Ω Donde $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$ $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ El Operador Laplaciano Además Ω Es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ bien regular y $\rho > 0$. Se mostrará la existencia de la solución global débil y fuerte. Formulación del Problema La ecuación (*) se presenta con frecuencia en la mecánica cuántica y relatividad general, por eso pretendemos de analizar y responder la siguiente interrogante: Imponiendo una condición, (*) ¿Sera posible garantizar la existencia de una solución global fuerte y débil?	**Objetivos generales** Mostrar la existencia global de la solución débil y fuerte de la ecuación hiperbólica no lineal (*),Este proyecto nos permite realizar una investigación científica básica, tanto desde el punto de vista teórico y práctico. El trabajo desarrollado está en la línea de las Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas, por lo que los resultados pueden ser aprovechados por diferentes especialistas cuyo trabajo esté relacionado con este estudio (Físicos, Químicos, Ingenieros, etc.) y que deseen profundizar sus investigaciones en la teoría de existencia de soluciones fuertes. **Objetivos específicos** Familiarizarnos con los Métodos del análisis funcional que se usaran para la prueba de las soluciones débiles y fuertes del problema (*).	**Hipótesis general** En el espacio de dimensión finita $V_m = [w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m]$ se obtiene una solución aproximada de $u_m(t)$ en un intervalo $[0, T_m], T_m < T$ usando el teorema de caratheodory para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luego se hace Estimativas a Priori que permiten extender la solución $u_m(t)$ a todo el intervalo$[0,T]$. **Hipótesis específica** Con las estimativas obtenemos convergencias en el espacio $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ que permiten probar la existencia de las soluciones débiles. Realizaremos un minucioso estudio de cada material obtenido, con la finalidad de adaptarlo a nuestro objetivo y que nos lleve a la obtención de nuestros resultados.	**Tipo de Investigación** La investigación es de tipo científica-teórico. **Metodologia** usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo mas exhaustivo posible en cada demostración. Técnicas e instrumentos de recolección de datos Para la realización de este trabajo de tésis se revisó la bibliografía específicada y recopilación de información obtenida vía interés realcionada al tema de interés.	Por se nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}^n$ y espacios de Banach.